



# **FACULTAD DE EDUCACIÓN**

**MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN  
SECUNDARIA**

**APLICACIONES DE GEOMETRÍA DINÁMICA EN LA ENSEÑANZA DE LA  
GEOMETRÍA DESCRIPTIVA**

Dynamic Geometry applications in Descriptive Geometry teaching

Alumno: José Enrique Cerón Hoyos

Especialidad: Matemáticas

Director: Mario Fioravanti Villanueva

Curso: 2019/2020

Fecha: Marzo 2020

Vº Bº Director:

Mario Fioravanti Villanueva

---

## RESUMEN

Desde su introducción a finales del siglo XVIII por parte de Gaspar Monge, la Geometría Descriptiva se ha mantenido inalterable, sin grandes modificaciones en sus postulados fundacionales. La aparición del CAD, fundamentalmente en sus versiones 3D, ha ocasionado que gran parte de las técnicas propias de la Geometría Descriptiva se hayan quedado obsoletas, sin un uso práctico en la actualidad. Pero los sistemas CAD presentan una serie de inconvenientes para su aplicación docente en las aulas de secundaria y bachillerato, debido a su complejidad de utilización al tener una orientación profesional. Por otra parte, la reciente aparición de sistemas de Geometría Dinámica 3D ha propiciado que estas aplicaciones sean una de las herramientas más recomendadas para su uso en la enseñanza de la geometría espacial en secundaria. En el presente trabajo se plantea la utilización de estos sistemas como herramientas de apoyo a la docencia de la Geometría Descriptiva.

### Palabras clave:

Geometría Descriptiva, Dibujo Técnico, Geometría Dinámica, Geogebra

## ABSTRACT

Since its introduction at the end of the 18th century by Gaspar Monge, Descriptive Geometry has remained unchanged, without major modifications to its foundational postulates. The CAD systems development, mainly in their 3D versions, has caused that much of the techniques of Descriptive Geometry have become obsolete, without practical use nowadays. However, CAD systems have some disadvantages in their educational use in secondary and high school educational stages, due to its cumbersome use. On the other hand, the recent development of 3D Dynamic Geometry systems has led to these applications being one of the most recommended tools for their use in high school spatial geometry teaching. In the present work, the use of these systems is proposed as tool to support the teaching of Descriptive Geometry.

### Keywords:

Descriptive Geometry, Technical drawing, Dynamic Geometry, Geogebra

## INDICE

1. Introducción y justificación .....	3
1.1. Objetivos .....	5
2. Marco teórico .....	6
2.1. Docencia de Dibujo Técnico y Geometría Descriptiva.....	6
2.2. Relación entre la Geometría Descriptiva y la Geometría Métrica ....	10
2.3. Sistemas CAD .....	14
2.4. Sistemas de Geometría Dinámica.....	19
2.5. Comparativa CAD-Geometría Dinámica.....	25
3. Propuesta didáctica .....	26
3.1. Metodología.....	27
3.1.1. Planteamiento del problema.....	27
3.1.2. Introducción de datos .....	28
3.1.3. Resolución del problema .....	31
3.2. Aplicación de la metodología.....	31
3.2.1. Verdadera magnitud de formas en planos. Medición de áreas y ángulos en figuras planas.....	32
3.2.2. Perpendicular de un punto a un plano. Distancia de un punto a un plano. ....	34
3.2.3. Distancia entre dos rectas que se cruzan .....	38
4. Conclusiones .....	42
5. Bibliografía .....	44
6. Anexo.....	48

## 1. INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

La materia de Dibujo Técnico se encuentra, durante la etapa de la Enseñanza Secundaria Obligatoria, emplazada dentro de las asignaturas Educación Plástica, Visual y Audiovisual y Tecnología. En la primera de ellas, Educación Plástica, es uno de los cuatro bloques en los que está dividida la asignatura a lo largo de los tres cursos en los que se imparte (primero, tercero y cuarto de la ESO), mientras que en Tecnología (segundo y tercero de ESO) se imparten conocimientos de Normalización y CAD dentro del Bloque de “Expresión y comunicación técnica”.

Es en bachillerato cuando la materia adquiere identidad propia, expresada en las asignaturas Dibujo Técnico I y II, lo que permite adquirir una visión más amplia y completa de la misma vislumbrando las relaciones existentes entre los diferentes bloques que la forman, relaciones que estaban ocultas durante la etapa de la ESO al estar sus contenidos dispersos en otras materias.

Según el Decreto 38/2015, de 22 de mayo, que establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria, la materia de Dibujo Técnico está estructurada en cuatro bloques:

1. Geometría y Dibujo Técnico. En este bloque se desarrollan los contenidos relacionados con la geometría plana: tangentes, figuras geométricas....
2. Sistemas de Representación. En él se desarrollan los diferentes sistemas de representación: Sistema Diédrico, Sistema Axonométrico e Isométrico, Perspectiva Caballera y Perspectiva Cónica. Estos sistemas son usados para representar en el plano elementos tridimensionales.
3. Normalización. Consiste en la representación de piezas y acotación, siendo la aplicación práctica del sistema diédrico.
4. Documentación gráfica de proyectos. Este bloque solo se imparte en el segundo curso de bachillerato, y tiene por finalidad la aplicación práctica

---

e interrelación de los conocimientos adquiridos en los otros bloques. Dentro de este apartado está incluido el uso de software de Diseño Asistido por Ordenador (CAD) tanto en 2D como en 3D.

El segundo bloque, donde se estudian los diferentes Sistemas de Representación, forma parte de lo que también se conoce como Geometría Descriptiva. La Geometría Descriptiva es la materia que establece las relaciones existentes entre las figuras o cuerpos en el espacio (3D) con su representación en el plano (2D).

Gaspar Monge, considerado el padre de la Geometría Descriptiva al publicar el primer tratado (1799) en el que se incluía dicha denominación, define la Geometría Descriptiva según sus objetivos:

*“La geometría descriptiva tiene dos objetos: el primero es dar métodos para representar sobre un papel de dibujo, que no tiene más de dos dimensiones, a saber, longitud y latitud; todos los cuerpos de la naturaleza, que tiene tres, longitud, latitud y profundidad, con tal que estos cuerpos puedan ser determinados rigurosamente.*

*El segundo objeto es dar el modo de reconocer por medio de una exacta descripción las formas de los cuerpos, y deducir todas las verdades que resultan, bien sean de sus formas, bien de sus posiciones respectivas”*

De la definición proporcionada por Gaspar Monge, se establecen las características que han de tener los diferentes sistemas de representación: en primer lugar, dado un cuerpo en el espacio, el plano ha de representar con exactitud las características geométricas del mismo y; en segundo lugar, dadas las proyecciones de un objeto, se ha de poder conocer sus características geométricas. Por lo tanto, un sistema de representación ha de permitir el paso del espacio (3D) al papel (2D) y del papel al espacio, estableciendo una relación biunívoca entre el objeto y su representación.

Por otro lado, dentro del currículo se establece la necesidad de la inclusión de las nuevas tecnologías, principalmente CAD, no como contenido de la

---

asignatura, sino principalmente como una herramienta más en el desarrollo del resto de los contenidos.

Mientras que la integración o el uso de programas de diseño asistido por ordenador o CAD dentro de los bloques de Geometría, Normalización y Documentación gráfica de proyectos se hace de manera directa debido a las herramientas que los programas CAD incluyen, su uso dentro de los Sistemas de Representación es más complejo dada la naturaleza de los mismos y su objetivo, la representación de objetos 3D en 2D. Asimismo, la excesiva complejidad de los programas CAD, especialmente AUTOCAD, el software más utilizado, añade mayor dificultad al aprendizaje (Gacto y Albadalejo, 2014).

El hecho de que la Geometría Descriptiva esté estrechamente relacionada con la geometría espacial, dado que permiten la resolución de problemas similares aplicando metodologías diferentes, una mediante técnicas de dibujo y otra mediante el empleo de las matemáticas, abre la posibilidad al empleo de otro tipo de aplicaciones informáticas diferentes al CAD, como pueden ser los programas de Geometría Dinámica, más utilizados estos en materias matemáticas. Concretamente, en el caso de la geometría espacial tienen especial interés aquellos softwares con herramientas y visualizaciones 3D, como Geogebra.

### **1.1. OBJETIVOS**

El principal objetivo de este trabajo es la aplicación de sistemas de Geometría Dinámica, más concretamente Geogebra 3D, en la docencia de Dibujo Técnico en bachillerato, centrándose en el bloque dedicado a la Geometría Descriptiva o Sistemas de Representación, en especial en la enseñanza del Sistema Diédrico de proyección.

Para la consecución del objetivo principal se han planteado una serie de objetivos previos:

- Análisis de las prácticas docentes que se llevan a cabo en la asignatura de Dibujo Técnico y su influencia en el proceso de aprendizaje.
- Estudio de las diferentes propuestas pedagógicas que se plantean para mejorar la enseñanza de la materia.
- Analizar las relaciones existentes entre la Geometría Descriptiva y otras áreas del conocimiento, principalmente las matemáticas.
- Evaluar la aplicación de los sistemas CAD y de los sistemas de Geometría Dinámica como herramientas de apoyo a la docencia, analizando sus fortalezas y debilidades.
- Proponer aplicaciones prácticas de los sistemas de Geometría Dinámica adaptadas a la docencia de la Geometría Descriptiva.

## **2. MARCO TEÓRICO**

### **2.1. DOCENCIA DE DIBUJO TÉCNICO Y GEOMETRÍA DESCRIPTIVA**

La docencia del dibujo técnico suele realizarse de manera tradicional (Gacto y Albadalejo, 2014), mediante el empleo de herramientas manuales como la escuadra, el cartabón y el compás para la realización de representaciones geométricas o de figuras en el plano o papel por parte de los alumnos, mientras que los principales recursos del docente son la clase magistral y el uso de la pizarra para exponer los contenidos de la materia (Calderón, 2019).

Esta metodología, como indican Gilabert y González (2015), provoca una desmotivación y falta de interés en el alumnado, al percibir una desconexión entre lo que se les enseña y la realidad actual, realizando únicamente prácticas manuales a las que no ven utilidad, dado que en la práctica profesional se usan programas de diseño asistido por ordenador (CAD). El surgimiento del CAD ha modificado la forma de trabajo en el ámbito profesional pero no ha influido en el

---

método de enseñanza académica del dibujo técnico (Gómez-Fabra y Company, 2006).

La falta de relación entre la teoría impartida en las aulas, en las que se enseña en 2D, y la práctica profesional, en la que se trabaja en 3D, genera una mayor dificultad para una correcta asimilación de los contenidos (Fernández y Gacto, 2014). Todo ello ha provocado un estancamiento de la asignatura, al estar sus contenidos alejados de las necesidades y tecnologías actuales y no observar los alumnos una utilidad práctica de la misma (Gilabert y González, 2015).

Mediante esta forma de trabajo tradicional los alumnos no realizan un aprendizaje activo, en el que puedan manipular e interactuar con los objetos, por lo que no se favorece un aprendizaje significativo de la materia (Viana, 2014).

Asimismo, esta actitud pasiva de los alumnos en el proceso de aprendizaje lleva consigo una falta de conocimientos en la ejecución de elementos y formas geométricas, en 2D y 3D, así como en procedimientos de Geometría Descriptiva o Sistema Diédrico (Gacto y Albadalejo, 2014). Por consiguiente, se generan en los alumnos carencias en el desarrollo de su capacidad de visión espacial, mostrando dificultades a la hora de trabajar mentalmente con figuras tridimensionales (Fernández y Gacto, 2014), uno de los grandes objetivos de la materia.

La problemática expresada en los párrafos anteriores se hace más patente en la enseñanza de la Geometría Descriptiva, principalmente el Sistema Diédrico de representación, en donde el nivel de abstracción mental necesario para la asimilación correcta de los contenidos es superior al resto del temario de la asignatura. Como ponen de manifiesto Di Paola, Pedone y Pizurro (2013), según la experiencia obtenida en el desarrollo de su docencia, el uso exclusivo de los métodos tradicionales en la docencia de la Geometría Descriptiva, la representación de puntos, rectas y planos en el papel, ralentiza el proceso de aprendizaje de los alumnos limitando el conocimiento de la geometría, elementos y figuras tridimensionales.

---

De acuerdo a los planteamientos expuestos por Giménez, Grassa y Vidal (2010), la falta de relación entre los procedimientos proyectivos empleados en el Sistema Diédrico con la estructura mental que rige el pensamiento espacial de los alumnos genera la paradoja de provocar una saturación de contenidos teóricos en una materia basada en elementos visuales, generando dificultades a los alumnos en la obtención de imágenes mentales en tres dimensiones a partir de proyecciones. Por lo tanto, proponen la necesidad de realizar un cambio significativo en el modelo de aprendizaje, dejando a un lado la ortodoxia tradicional de la Geometría Descriptiva o Proyectiva, centrándose directamente en la configuración espacial, sin el empleo de los procedimientos clásicos del Sistema Diédrico. Poder trabajar con modelos tridimensionales, resolviendo espacialmente los problemas geométricos que se presentan sin la necesidad de recurrir a las proyecciones de dichos modelos, incrementa la eficacia del proceso en comparación con las metodologías tradicionales (Cisneros y Cabezos, 2016).

Como ha quedado de manifiesto en los párrafos anteriores, es necesario la introducción de nuevas metodologías y procedimientos educativos en la asignatura de Dibujo Técnico que provoquen el interés y la participación activa del alumnado, fomentando el aprendizaje significativo de una materia crucial para aquellos estudiantes que opten por el estudio de carreras de ingeniería y/o tecnológicas.

Los cambios a introducir han de estar orientados a la mejora de la capacidad de visualización y razonamiento espacial de los alumnos, en los que el estudio de Dibujo Técnico es un factor de gran influencia, como los estudios realizados por Arrieta y Medrano (2015) demuestran. En las pruebas realizadas a alumnos de diferentes carreras universitarias en las que, entre otros factores, se relacionó la nota obtenida en la asignatura de Dibujo Técnico con los resultados de los test de capacidad visual realizados, se comprobó que a mayor nivel de visión espacial más nota obtenían los alumnos en la asignatura de Dibujo Técnico, lo que corroboró lo que estudios previos habían confirmado.

La capacidad de percepción espacial, según los estudios llevados a cabo por Piaget desde el punto de vista evolutivo (Gacto y Albadalejo, 2014), se

---

desarrolla de manera preeminente en la adolescencia, siendo por tanto esta etapa evolutiva la adecuada para fomentar la mejora y el entrenamiento de dicha capacidad. Por el contrario, los estudios realizados por Arrieta y Medrano (2015) señalan que la percepción espacial puede mejorar con un entrenamiento adecuado también en adultos.

Respecto a la enseñanza de la Geometría Descriptiva, los diferentes autores recomiendan disociar los aspectos más mecánicos y tediosos de la misma de su concepción teórica, focalizando la atención y los esfuerzos en la enseñanza de los procedimientos geométricos espaciales que son la base de la misma. Para ello se necesita el uso de herramientas y metodologías que faciliten la comprensión de dichos conceptos (Pita, 2016).

Las carencias que presenta la metodología tradicional de enseñanza del Dibujo Técnico, y principalmente en lo que se refiere a la didáctica de la Geometría Descriptiva, se hacen cada vez más patentes en el contexto social y educativo actual, en el que la aparición de las nuevas tecnologías ha provocado una desconexión entre la enseñanza académica tradicional y las necesidades formativas del alumnado, más orientadas a una aplicación práctica y menos academicista de la materia.

Debido a ello, han surgido diferentes propuestas educativas que buscan una actualización de los métodos didácticos sin perder la idiosincrasia propia de la materia. De entre los cambios que los diferentes autores recomiendan, destaca la incorporación de herramientas TIC adaptadas a los contenidos propios de la asignatura.

Dentro de las herramientas TIC destacan las siguientes:

- Software CAD. El uso de sistemas CAD, tanto en 2D como en 3D, está recogido dentro del currículo de la asignatura, según establece el Decreto 38/2015.
- Sistemas de Geometría Dinámica. El desarrollo de estos sistemas en los últimos años, principalmente con la inclusión de comandos

y vistas tridimensionales, posibilitan la aplicación de los conceptos y procedimientos empleados en la Geometría Descriptiva.

Dentro de esta categoría destacan aquellas propuestas que abogan por la inclusión de la multidisciplinaridad en la materia (Gilabert y González, 2015), principalmente mediante la aplicación de conceptos y procesos geométrico-matemáticos en el desarrollo de la docencia en el dibujo (García A., García F., Rodríguez y Villa, 2010), y en el uso de herramientas y procesos propios del dibujo y la Geometría Descriptiva en la enseñanza de las matemáticas (Barrantes, 2003).

- Herramientas de realidad virtual y aumentada. Estos sistemas permiten a los estudiantes una visualización espacial de los elementos y construcciones permitiendo su manipulación virtual, lo que proporciona una mayor interacción entre los estudiantes y los objetos representados (Kaufmann y Schmalstieg, 2006).

## **2.2. RELACIÓN ENTRE LA GEOMETRIA DESCRIPTIVA Y LA GEOMETRÍA MÉTRICA (MATEMÁTICAS)**

El dibujo técnico mantiene una relación evidente con otras ramas del conocimiento con las que la posibilidad de poder efectuar un conocimiento multidisciplinar es enorme. De entre las materias con las que la correspondencia es más cercana destacan las matemáticas, y más concretamente la geometría tanto plana como espacial. Esta interrelación entre ambas materias se desarrolla desde el primer contacto que tienen los alumnos con ambas materias, tanto en la educación primaria como en la secundaria.

En la geometría plana, mediante la representación de figuras y cuerpos y la realización de construcciones geométricas, esta simbiosis está altamente interiorizada y se realiza con naturalidad, no existiendo una separación clara entre ambas materias.

---

Por el contrario, la geometría espacial recibe un tratamiento totalmente diferenciado en ambas disciplinas, lo que dificulta la interconexión de los contenidos por parte de los alumnos, no llegando estos a apreciar el indudable paralelismo existente entre ambas materias. El enfoque que se aplica a la materia en matemáticas está basado en el desarrollo de procesos más analíticos y menos visuales, en donde los procedimientos y metodologías empleados en la Geometría Descriptiva no son aplicados, obviando la componente gráfica de la geometría espacial.

El conocimiento de la realidad se ha dividido en diferentes materias, lo que limita la obtención de una visión general de la misma, por lo que es necesario el uso de la multidisciplinaridad, un acercamiento a la realidad espacial desde diferentes ámbitos para obtener un conocimiento más completo de la problemática (Gilabert y González,2015).

Como exponen Barrantes, Balletbo y Fernández (2013), en el tratamiento de la enseñanza de la geometría espacial desde la perspectiva de las matemáticas se tiende a aplicar una posición deductiva, basándose en la memorización de los contenidos y teoremas y en la automatización de los procedimientos, en donde los problemas son resueltos de manera mecánica mediante la aplicación de las formulas y ecuaciones aprendidas (Díaz, 2015), obviando las características geométricas de los elementos y centrándose en los aspectos métricos del proceso.

Todo ello conduce a una limitación del proceso de aprendizaje al prescindir de la componente visual de la geometría, lo que excluye o restringe el uso de la intuición como elemento de acercamiento al conocimiento geométrico-espacial (Barrantes et al., 2013), e impide que el alumno conecte los contenidos matemáticos con la realidad (Madrid, 2015).

Otro aspecto importante que se obvia mediante el uso de esta metodología tradicional es la no utilización de materiales manipulativos, tanto físicos como informáticos, que permitan la visualización del problema desde diferentes ángulos de visión, facilitando la resolución del problema al tener una

---

perspectiva más completa y general del mismo, lo que fortalece la comprensión y el proceso cognitivo (Gutiérrez y Jaime, 2015).

Analizando los contenidos establecidos en el currículo oficial de ambas materias se pueden observar con claridad las relaciones existentes en el campo de la geometría espacial:

- a) La materia de geometría espacial dentro de las asignaturas de matemáticas se estudia en el bloque dedicado a la geometría en la asignatura de Matemáticas II en segundo de bachillerato, según establece el currículo de la misma.

Los contenidos relacionados con la geometría métrica incluidos en el currículo son los siguientes:

- Posiciones relativas entre rectas y/o planos: incidencia, paralelismo y perpendicularidad.
- Propiedades métricas: cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes.

- b) En el currículo de dibujo técnico los aspectos relacionados con la geometría espacial, se tratan con más profundidad en la asignatura de Dibujo Técnico II, en segundo de bachillerato.

Los contenidos de la geometría métrica espacial están ubicados en el bloque dedicado a los Sistemas de Representación (Geometría Descriptiva), siendo los siguientes:

- Resolución de problemas de pertenencia, incidencia, paralelismo y perpendicularidad.
- Construcción de figuras planas mediante transformaciones: cambios de planos, abatimientos...

- Determinación de la verdadera magnitud de segmentos. Distancias y ángulos entre elementos.

En la tabla 1 se muestra de una manera más desarrollada las relaciones existentes entre ambas materias, en la que se aprecian con claridad las posibilidades de establecer conexiones multidisciplinares entre ambas materias.

Tabla 1. Relaciones entre los contenidos curriculares de las asignaturas Dibujo Técnico II y Matemáticas II relacionados con la Geometría Espacial.

	GEOMETRIA DESCRIPTIVA	GEOMETRIA MÉTRICA
	Representación del punto, la recta y el plano	Ecuaciones de la recta y el plano
Pertenenencia, incidencia, paralelismo y perpendicular	Pertenencia de un punto a una recta	Posiciones relativas:  Posiciones relativas de dos planos en el espacio  Posiciones relativas de tres planos en el espacio  Posiciones relativas de una recta y un plano en el espacio  Posiciones relativas de dos rectas en el espacio  Simetrías  Proyección ortogonal de punto sobre recta  Proyección ortogonal de punto sobre plano  Proyección ortogonal de recta sobre plano
	Pertenencia de un punto a plano	
	Pertenencia de una recta a un plano	
	Paralelismo entre rectas	
	Paralelismo entre recta y plano	
	Paralelismo entre planos	
	Recta perpendicular a un plano	
	Plano perpendicular a recta	
	Intersección de recta y plano	
	Intersección de planos	
Verdadera magnitud de formas planas. Áreas	Abatimientos	Propiedades métricas:  Ángulos entre: Dos rectas Recta y plano Dos planos
	Cambios de plano	
	Construcción de figuras planas	
Distancias	Distancia de un punto a una recta	Distancias entre: Dos puntos Punto y recta Punto y plano Dos planos paralelos Recta y plano paralelos Dos rectas que se cruzan
	Distancia de un punto a un plano	
Ángulos	Ángulo entre rectas	Áreas
	Ángulo entre planos	
	Ángulo entre recta y plano	

A la vista de lo expuesto, la didáctica de la geometría espacial, efectuada siguiendo la metodología tradicional tanto en su vertiente matemática como en la Geometría Descriptiva, no genera un aprendizaje significativo en el alumnado,

al percibir las como materias inconexas y alejadas de la realidad, reduciendo su aprendizaje al conocimiento y aplicación rutinarias de fórmulas y ecuaciones por un lado, así como a la ejecución de procedimientos mecánicos por el otro.

Esto ha llevado a diferentes autores a plantearse la introducción de nuevos métodos en la práctica docente que faciliten el aprendizaje de la materia. El desarrollo e introducción en los últimos años de programas de Geometría Dinámica con capacidades de visualización y uso de herramientas 3D, ha hecho de estos sistemas unas herramientas de gran ayuda en la mejora de la enseñanza de la materia.

La experiencia llevada a cabo por Gutiérrez y Jaime (2015), mediante el empleo del programa de geometría dinámica Cabri 3D a lo largo del proceso didáctico, demuestra los beneficios de su uso, produciendo una mejora en la capacidad de abstracción espacial de los estudiantes y una mejor asimilación de los conceptos y relaciones geométricas estudiados.

De la misma manera, el profesor Miguel Pino (2014), mediante la inclusión del uso de Geogebra 3D en la enseñanza de la geometría espacial en el segundo curso de bachillerato, ha constatado las siguientes mejoras educativas: mejora de la capacidad de visualización espacial de los alumnos, generalización de los problemas, resolución más efectiva de dudas y una visión de los procesos desde diferentes ángulos.

### **2.3. SISTEMAS CAD**

La aparición de las aplicaciones CAD en la década de 1960 y el surgimiento de los ordenadores personales en la década de 1980, supusieron un cambio fundamental en el Dibujo Técnico, no tanto a nivel didáctico como a nivel profesional (Gómez-Fabra y Company, 2006). Como se ha indicado anteriormente, este cambio se ha producido preferentemente en el ámbito profesional, donde el uso del CAD en sus múltiples variantes (2D, Modelado 3D, CAD paramétrico...) ha erradicado por completo las herramientas tradicionales, modificando los métodos de trabajo. Actualmente las herramientas CAD están

totalmente integradas en numerosas disciplinas diferentes al dibujo técnico, siendo una base fundamental en su desarrollo:

- CAM: Fabricación asistida por ordenador
- CAE: Ingeniería asistida por ordenador
- PDM: Gestión de datos de producto
- PLM: Gestión del ciclo de vida de producto

La introducción del CAD en las aulas, de manera intensiva en la universidad y más tímidamente en secundaria (Alonso, Troncoso, Pérez y González, 2005), se ha producido de manera imparable desde principios de la década de los 90, a medida que los programas han ido mejorando su usabilidad, pasando de sistemas complejos de utilizar sin una formación inicial adecuada a los programas actuales en los cuales los entornos de trabajo son más amigables, interactivos y visuales. Se ha producido un cambio paulatino en sus procesos de trabajo, evolucionando de comandos ejecutados por órdenes textuales que se introducían mediante teclado a interfaces más sencillas donde las operaciones se realizan por medio de iconos explicativos del proceso a realizar.

Esta complejidad de los sistemas ha provocado en muchos casos que se haya variado el objetivo de la enseñanza, centrada más en el aprendizaje de los programas CAD que en el uso de los mismos como una herramienta educativa adicional a las existentes (Alonso et al., 2005; Pita, 2016). Por lo tanto, el CAD se ha introducido en los currículos como un contenido propio de la asignatura, como un objeto de aprendizaje en sí mismo, y no como un recurso de apoyo a los conocimientos teóricos y conceptuales de la misma.

A pesar de la complejidad de la herramienta, generada en parte por la gran cantidad de comandos y ordenes disponibles, su uso didáctico se ha ido generalizando, principalmente integrado en los bloques de contenidos más prácticos de la asignatura: geometría plana, normalización y documentación técnica de productos. Inicialmente, las herramientas CAD eran empleadas como

---

meros sustitutos de los instrumentos de dibujo tradicionales (escuadra, cartabón, compás...), sin introducir modificaciones en la práctica docente (Gómez-Fabra y Company, 2006).

El uso de estos sistemas dentro de la geometría plana ha simplificado o incluso llegado a eliminar los procedimientos más rutinarios de la misma, permitiendo centrarse en los conceptos intrínsecos de la materia, aquellos que aportan más valor al aprendizaje. Muchos de los procedimientos realizados mediante regla y compás se han quedado totalmente obsoletos debido a la existencia de comandos CAD específicos que suplen con precisión y rapidez sus objetivos (Gómez-Fabra y Company, 2005).

Por otro lado, la introducción y generalización de los sistemas CAD tridimensionales, y fundamentalmente el modelado 3D y el diseño paramétrico, ha simplificado en gran manera el diseño de cuerpos y elementos sólidos, permitiendo mediante el uso de un número reducido de comandos la obtención de modelos 3D altamente elaborados. Asimismo, las capacidades de visualización espacial de que disponen, que permiten ver los modelos desde diferentes puntos de vista con extrema facilidad, facilitan la comprensión geométrica del sólido sin la necesidad de amplios conocimientos previos (Beltrán y Rodríguez, 2017).

Otra de las ventajas de estos sistemas es la posibilidad de obtención de las proyecciones de los cuerpos sobre los planos de manera automatizada (fig. 1), sin apenas intervención del usuario, generando las vistas planas que los definen de una manera directa y precisa, simplificando considerablemente el proceso de representación.

Esta simplicidad unida a la precisión intrínseca de los sistemas CAD ha permitido que se hayan reemplazado los procedimientos proyectivos tradicionales como herramienta para la representación tridimensional de objetos y cuerpos, por lo que su enseñanza está desapareciendo en numerosas universidades (Migliari, 2012).

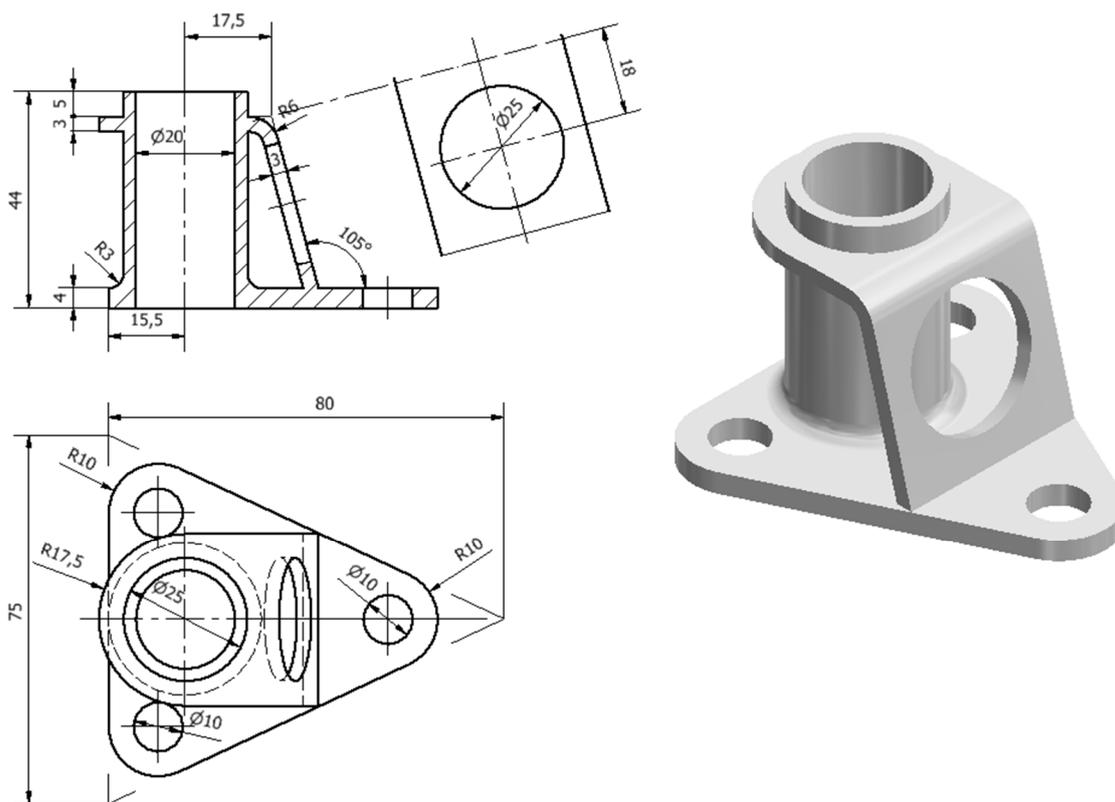


Figura 1 Modelo 3D de un cuerpo y sus proyecciones obtenidas mediante software de modelado tridimensional

Debido al enfoque eminentemente profesional de los sistemas de Diseño Asistido por Ordenador, su uso didáctico se ha centrado en los contenidos más prácticos del dibujo, como se ha comentado previamente, obviando la parte más teórica o académica de la misma, la Geometría Descriptiva y los Sistemas de Representación, más concretamente el Sistema Diédrico.

Además del enfoque profesional de los programas, otro de los motivos que han influido en su no utilización en la Geometría Descriptiva radica en los fundamentos nucleares de la misma: la representación de cuerpos tridimensionales en el plano. Los sistemas CAD como se ha comentado realizan esta función de forma directa, sin recurrir a complejas construcciones o procedimientos, por lo que la función primordial de la Geometría Descriptiva se ha puesto en entredicho por diferentes autores (Migliari, 2012).

A pesar de ello, se han realizado diversas experiencias de implantación de la Geometría Descriptiva en aplicaciones CAD (Cisneros y Cabezos, 2016; Di Paola et al., 2013; Gilabert y González, 2015; Pita, 2016). La mayor parte de estas experiencias se han llevado a cabo en entornos docentes universitarios y en carreras técnicas en las que los conocimientos que aporta la materia son parte fundamental del proyecto curricular de las mismas.

Las metodologías desarrolladas han ido evolucionando desde su uso como apoyo a los métodos tradicionales, hasta una total supresión de los mismos mediante el uso de las capacidades 3D. Como remarcan los autores, los procesos desarrollados no han abandonado la Geometría Descriptiva, sino que se ha procedido a eliminar los procedimientos y construcciones más rutinarias y superfluas, conservando la base conceptual y academicista de la materia. En otras palabras, se ha producido un cambio de herramientas, sustituyendo el papel y las herramientas tradicionales por otra más potente y precisa, que ofrece una mayor capacidad de visualización espacial. Se ha pasado de representar procedimientos geométricos tridimensionales en sistemas bidimensionales (el papel) a una geometría tridimensional directa, sin intermediarios.

Esto ha provocado que muchos de los problemas clásicos se hayan quedado obsoletos y no tengan sentido, dado que los métodos de resolución son completamente diferentes (Gómez-Fabra y Company, 2006; Pita, 2016). Un ejemplo de ello son los problemas de abatimientos, mediante los cuales se obtenían las formas reales de figuras situadas en el espacio “abatiendo” dicho plano sobre los planos coordenados. Este procedimiento ya no es necesario dado que actualmente todos los sistemas CAD disponen de herramientas que permiten trabajar directamente en cualquier plano independientemente de su situación.

Al contrario de lo que cabía esperar, la utilización de estas metodologías ha reforzado el método tradicional, como indica Beltrán J. y Beltrán J.M. (2010), volviéndolo más eficaz cuando los alumnos han alcanzado un mayor nivel de abstracción y percepción espacial mediante uso las herramientas de diseño y visualización 3D.

Por otro lado, el desarrollo de los sistemas de Geometría Dinámica tridimensional ha destapado algunas de las carencias de los sistemas CAD en la resolución de problemas de geometría espacial, como exponen Asperl (2005) y Di Paola et al. (2013):

- Excesivo número de comandos u órdenes, lo que aumenta la complejidad de los sistemas.
- Estaticidad: los elementos y construcciones creadas no se pueden modificar dinámicamente, impidiendo la generalización de los conceptos teóricos.
- Sistemas finalistas: su objetivo es obtener un resultado final preciso, no quedando registrada la secuencia de operaciones que ha permitido su consecución, por lo que no se puede reproducir el proceso paso a paso, disminuyendo la capacidad didáctica del proceso.

Estas limitaciones, debidas principalmente a la concepción profesional del CAD, han fomentado el uso de aplicaciones de Geometría Dinámica, orientadas originalmente al campo de las matemáticas, en la enseñanza de la geometría espacial.

#### **2.4. SISTEMAS DE GEOMETRÍA DINÁMICA**

Al contrario que las aplicaciones CAD, los sistemas de Geometría Dinámica están enfocados a un uso preferentemente didáctico, donde la metodología y los procesos son tan importantes como el resultado final.

De entre la variedad de sistemas existentes nos vamos a centrar en Geogebra, debido a su amplia difusión en los entornos educativos, su gratuidad y a su facilidad de uso.

Esos sistemas permiten una interrelación bidireccional entre las representaciones gráficas de elementos y/o figuras geométricas y las bases matemáticas en las que se sustentan. Este vínculo existente es una relación dinámica, al seguir conservando las restricciones creadas durante el proceso

---

constructivo al modificar o mover las figuras o elementos diseñados, lo cual es la principal virtud en su vertiente educativa de la Geometría Dinámica. Debido a ello las construcciones no son exclusivas de un problema con unos datos concretos, sino que permiten la generalización de los conceptos teórico-prácticos introducidos en la sesión didáctica. Gracias a este dinamismo, el docente puede introducir en la práctica educativa el factor de experimentación que facilita la comprensión de los conceptos geométricos, aportando un beneficioso complemento a la enseñanza tradicional (Alegre, Comesaña y Pérez, 2009; Calderón, 2019).

Además de su dinamismo, estos sistemas presentan otra serie de características que influyen de manera notable en la generación de conocimiento, de entre las que destacan:

- Manipulación de elementos. Una vez contruidos los modelos, se pasa a la fase de experimentación y análisis de sus propiedades mediante la manipulación de los objetos en tiempo real (Barrantes et al., 2013).
- Creación de construcciones paso a paso (Di Paola et al., 2013; Viana, 2014). El orden en el que se han ejecutado los procedimientos queda registrado en el sistema, permitiendo volver a etapas realizadas con anterioridad. Generalmente, permiten realizar una reproducción gráfica del proceso paso a paso, fomentando la comprensión de los conceptos explicados.
- Facilidad en la introducción de datos. Dado que la introducción de datos en cualquier proceso es una de las etapas más críticas del mismo, los sistemas de Geometría Dinámica se caracterizan por simplificar dicho proceso, facilitando y agilizando su uso (Asperl, 2005).
- Uso intuitivo (Gutiérrez, 2005). Este es otro de los requisitos que han de cumplir los softwares de Geometría Dinámica. Al estar dedicados preferentemente a la enseñanza su metodología de trabajo ha de estar

orientada hacia un uso directo, centrándose la docencia en la enseñanza de los conceptos geométricos y no en el manejo de los sistemas.

- Visualización desde diferentes ángulos. Con la introducción de la Geometría Dinámica 3D, otro de los aspectos en el que se pone énfasis es en los beneficios que ha aportado la visualización espacial de los procesos y la posibilidad de poder ver las construcciones desde diferentes puntos de vista, lo que ha mejorado la capacidad visual de los estudiantes (Di Paola et al., 2013; Pino, 2014; Viana 2014).

Inicialmente, los programas de Geometría Dinámica poseían únicamente entornos de trabajo 2D, por lo que su uso estaba limitado a la geometría plana. La reciente introducción de capacidades 3D (fig. 2) en los sistemas ha permitido la extrapolación de su metodología de trabajo a la geometría espacial, ampliando sus capacidades educativas a otras disciplinas, como la Geometría Descriptiva.

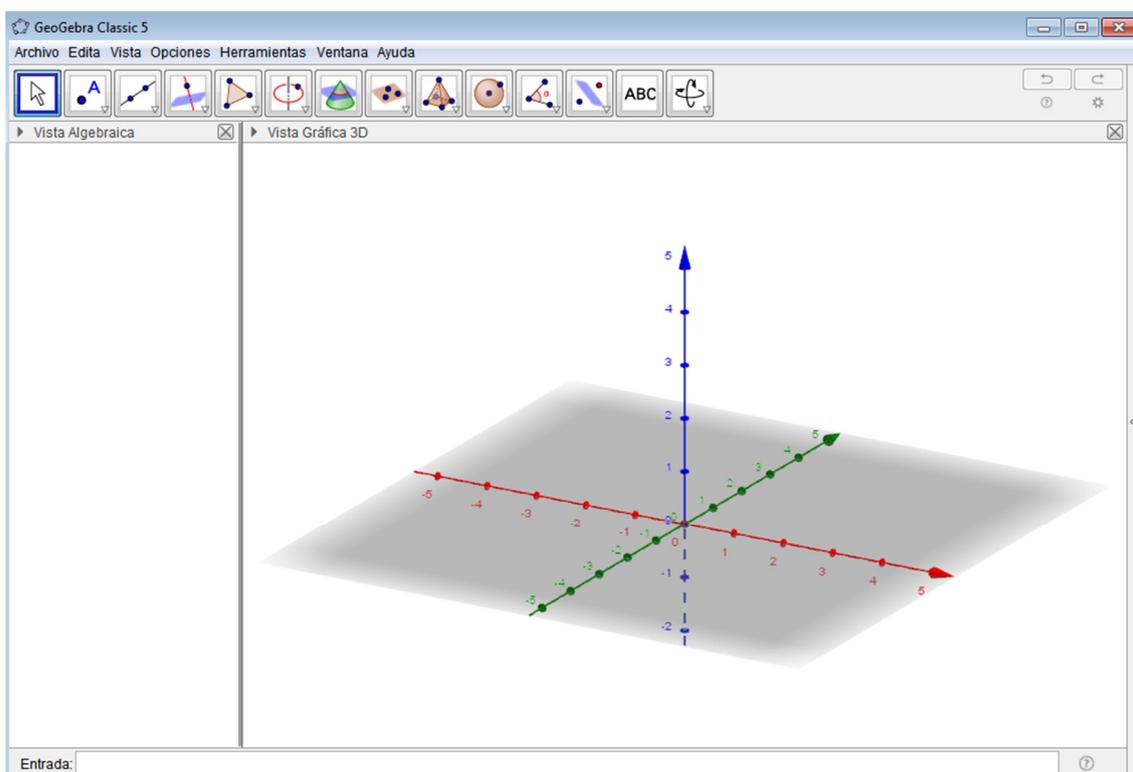


Figura 2 Entorno de trabajo 3D en Geogebra 5.

La aplicación de los sistemas de Geometría Dinámica 3D en la enseñanza de la Geometría Descriptiva se ha centrado en la representación y posterior manipulación de cuerpos y figuras en el espacio, como las experiencias desarrolladas por Kaufmann y Schmalstieg (2006) y Di Paola et al. (2013), en las que realizaron una combinación de técnicas de Geometría Dinámica y Realidad Aumentada con resultados satisfactorios al conseguir una mayor implicación de los alumnos en la materia.

Otros autores, como Viana (2014) y Calderón (2019), han desarrollado una serie de aplicaciones manipulativas en Geogebra donde se muestra la metodología proyectiva clásica de la Geometría Descriptiva, utilizando las aplicaciones como complemento a la docencia del Sistema Diédrico, logrando una mejora en la comprensión por parte de los alumnos de los procedimientos proyectivos tradicionales (fig. 3).

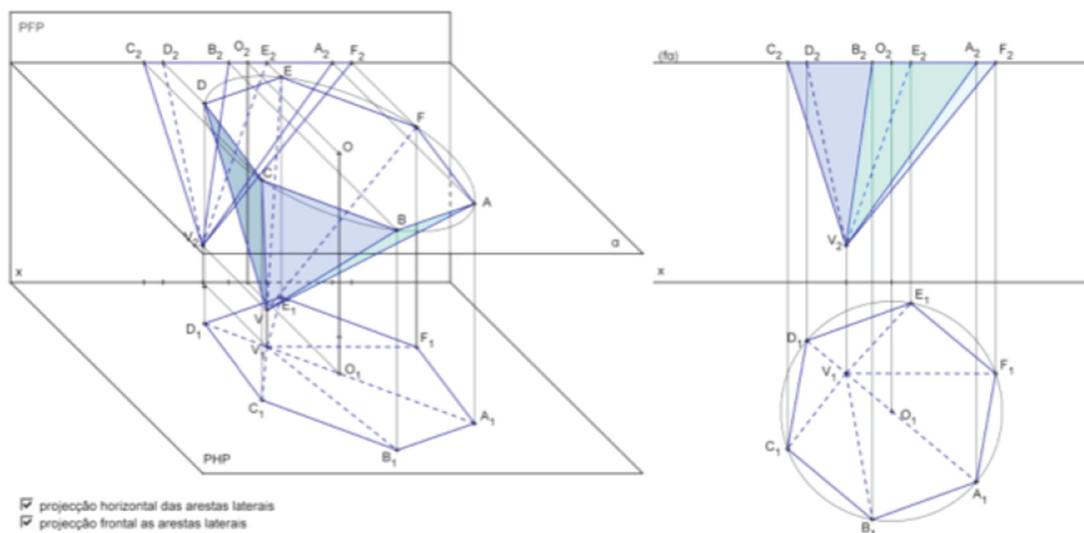


Figura 3 Proyecciones de una pirámide en el Sist. Diédrico (Viana, 2014)

El uso de estos sistemas, como los estudios realizados por Gutiérrez y Jaime (2015) sobre la influencia del uso sistemático de la Geometría 3D corroboran, influye positivamente en el aprendizaje de los alumnos, ayudando a los usuarios a mejorar la percepción espacial de los objetos estudiados.

Como conclusión al análisis de las posibilidades de aplicación de sistemas de Geometría Dinámica 3D en la enseñanza de la Geometría Descriptiva, se muestran aplicaciones desarrolladas por diferentes autores dentro de la página web oficial de Geogebra ([www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)). Los autores seleccionados son los siguientes:

1. José Rebollo (<https://www.geogebra.org/u/rebollo>) (fig. 4).

Este autor ha elaborado una serie de aplicaciones dinámicas en las que se desarrolla todo el currículo del Sistema Diédrico. En ellas se aplican los procedimientos proyectivos clásicos en el espacio, para una mejor comprensión de la metodología, aunque no se puede ver el proceso paso a paso, solamente el resultado final.

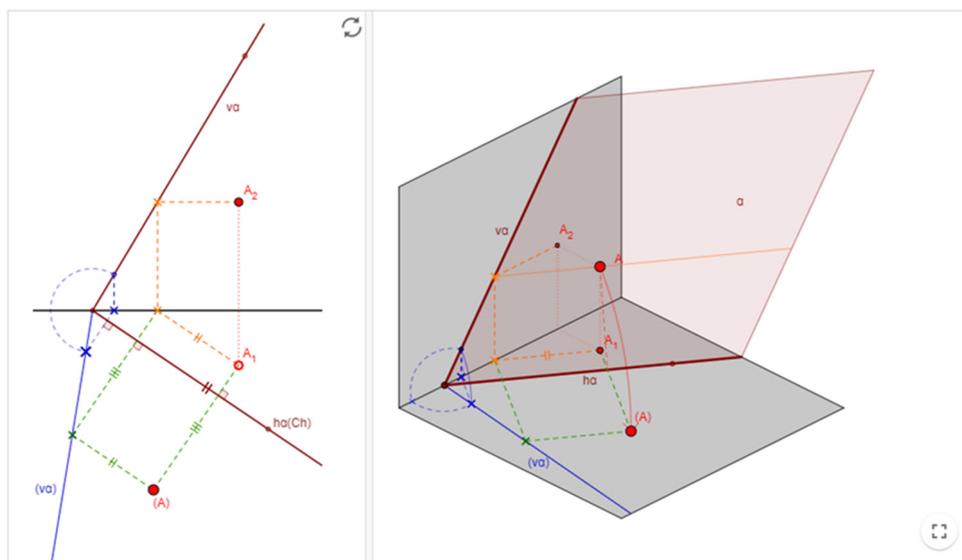


Figura 4 Abatimiento de un punto. José Rebollo

2. Luis Pérez Vega (<https://www.geogebra.org/u/luisperez>) (fig. 5).

Al igual que José Rebollo, ha desarrollado el currículo completo, aunque en este caso las aplicaciones no son dinámicas, siendo la principal diferencia que se permite ver el proceso paso a paso, lo que facilita la comprensión del procedimiento por parte de los alumnos.

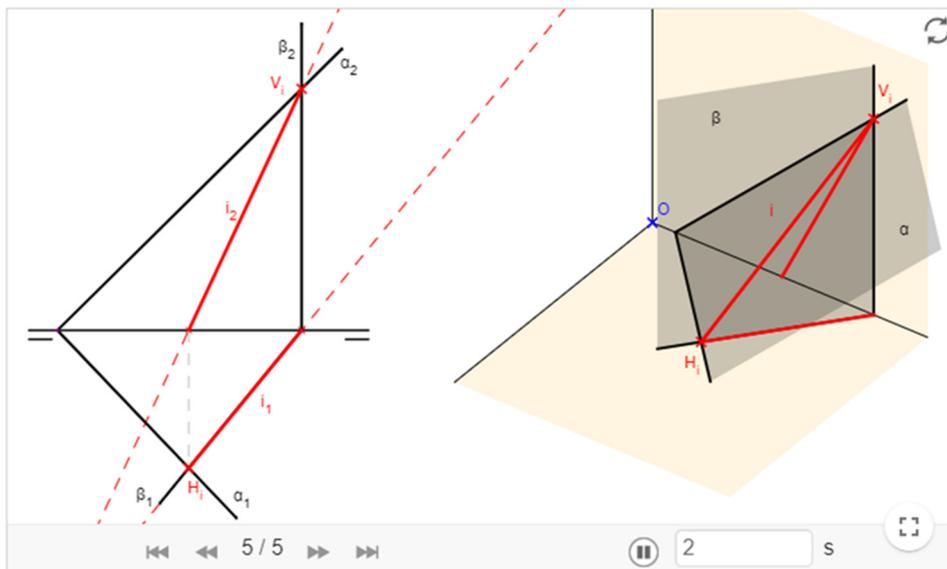


Figura 5 Intersección de planos. Luis Pérez

3. Ester Alonso (<https://www.geogebra.org/u/ester+alonso>) (fig. 6).

A diferencia de los autores anteriores, esta autora no obtiene las proyecciones diédricas tradicionales, sino que muestra el proceso espacialmente, aunque no incluye la opción de ver la secuencia de operaciones realizadas para la obtención del resultado final.

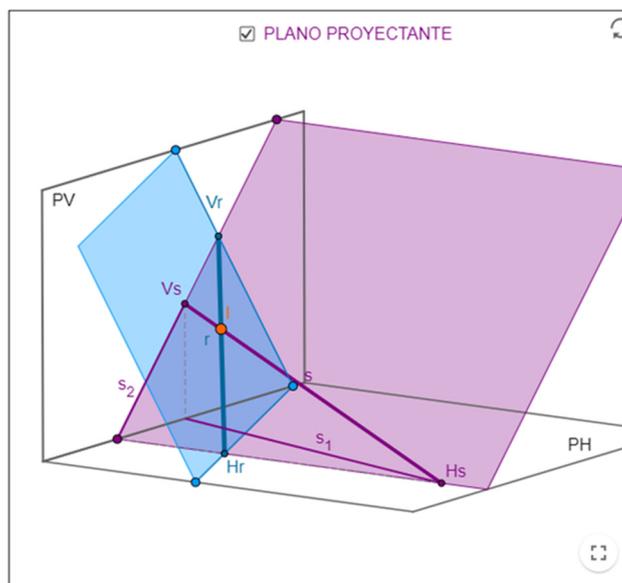


Figura 6 Intersección de recta y plano. Ester Alonso

4. Ignacio Larrosa Cañestro (<https://www.geogebra.org/u/ilarrosa>)(fig. 7).

El enfoque de este autor es puramente matemático, resolviendo los problemas de geometría espacial mediante procedimientos analíticos, en lugar de gráficos.

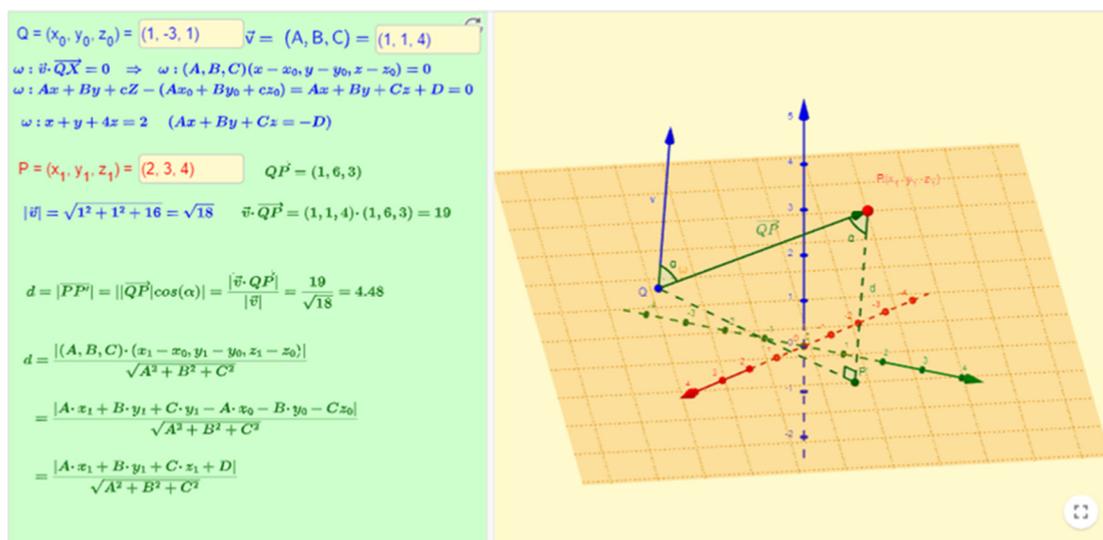


Figura 7 Distancia de un punto a un plano. Ignacio Larrosa

**2.5. COMPARATIVA CAD-GEOMETRÍA DINÁMICA**

Una vez analizadas las posibilidades educativas de las aplicaciones CAD y de los entornos de Geometría Dinámica, se procede a realizar una comparativa entre ambos. En las tablas 2 y 3 se exponen las ventajas e inconvenientes detectados por los autores anteriormente citados, así como las que yo he apreciado mediante el uso habitual de ambos sistemas.

Tabla 2 Ventajas e inconvenientes de los sistemas CAD

CAD	
VENTAJAS	INCONVENIENTES
Amplia variedad de programas	Estáticos
Aplicación a mayor número de campos	Complejidad de uso
Precisión	No están orientados a la docencia
Uso profesional	Entornos de trabajo no siempre intuitivos
Visualización 3D	

Tabla 3 Ventajas e inconvenientes de los sistemas de Geometría Dinámica

<b>GEOMETRÍA DINÁMICA</b>	
<b>VENTAJAS</b>	<b>INCONVENIENTES</b>
Dinámicos Facilidad de uso Resolución paso a paso Generalización de los resultados Visualización de los elementos manipulativos	Funcionabilidad limitada Limitaciones en el diseño de sólidos

Ambos sistemas tienen bastantes puntos en común, sobretodo en lo que se refiere a las posibilidades de visualización espacial y a su uso en la resolución de problemas geométricos.

La principal característica que destaca de los sistemas CAD es su orientación profesional, lo que hace que sean más potentes, con un mayor número de herramientas disponibles, lo cual también es su mayor inconveniente para su uso didáctico en secundaria y bachillerato, dado la complejidad que ello conlleva.

En lo que se refiere a los Sistemas de Geometría Dinámica, su orientación docente les hace ideales para el planteamiento y desarrollo de problemas geométricos. En cambio, es en el diseño de piezas y cuerpos sólidos donde muestran sus mayores desventajas, siendo esta una faceta que los sistemas CAD tienen más desarrollada.

Por lo tanto, dada su orientación geométrica y su facilidad de uso, se va a proceder a aplicar Geogebra para el desarrollo de una propuesta didáctica consistente en la utilización de aplicaciones de software con capacidades tridimensionales para la resolución de los procedimientos espaciales de la Geometría Descriptiva

### **3. PROPUESTA DÍDACTICA**

Se presenta una propuesta didáctica para la enseñanza de conceptos y resolución de ejercicios propios de la Geometría Descriptiva mediante el empleo del software de Geometría Dinámica Geogebra en su versión 3D.

Los materiales desarrollados están enfocados al aprendizaje de los procedimientos conceptuales que son implícitos a la Geometría Descriptiva, desprendiéndose de los procesos más mecánicos, rutinarios y farragosos de la misma. Para ello se pretende prescindir de la metodología tradicional consistente en el empleo de las proyecciones de los elementos en los planos horizontal y vertical para la resolución de los ejercicios, sustituyéndolos en su lugar por la utilización de técnicas de geometría espacial y de la visualización y representación tridimensional.

Se aplicará esta metodología a los contenidos de la materia expuestos en la Tabla 1 (pág. 13), pudiendo servir también como herramienta de apoyo a la docencia de la geometría métrica en la asignatura de Matemáticas II.

Primeramente, se van a presentar las diferentes fases que componen el proceso de resolución de problemas y seguidamente su aplicación a los diferentes contenidos.

### **3.1. METODOLOGÍA**

El diseño de cada una de las tareas se compone de tres fases interrelacionadas entre sí, permitiendo una retroalimentación de cada una de ellas a medida que se avanza en el proceso para introducir las modificaciones o corregir los defectos que vayan apareciendo a medida que se avanza en la resolución del mismo.

Dichas etapas son:

1. Planteamiento del problema.
2. Introducción de los datos del problema.
3. Resolución del problema aplicando metodologías geométricas.

#### **3.1.1. Planteamiento del problema.**

Esta etapa es común para la resolución de los problemas en cualquiera de los diferentes sistemas de representación existentes, así como para su resolución mediante Geogebra. Consiste en la realización de un boceto o croquis

manual en el que se representa espacialmente el problema planteado y posteriormente se expone la forma de resolución.

El croquis que se realice ha de ser independiente de los datos de que se dispongan o de la disposición de los elementos, es decir, ha de plantearse el procedimiento de forma genérica. De esta manera se consigue una extrapolación del proceso a diferentes problemáticas y posiciones de los elementos geométricos que intervienen en el problema.

Por lo tanto, en esta fase es necesaria una cierta abstracción espacial por parte del alumno para poder plasmar las ideas, siendo la parte más importante del proceso educativo y en la que el profesor ha de ser más incisivo como docente, resolviendo las posibles dudas que se puedan plantear.

Las siguientes fases consisten en aplicar en el sistema de representación que se esté usando, lo desarrollado en el boceto. A continuación se muestran los pasos a seguir para su resolución mediante Geogebra.

### **3.1.2. Introducción de datos.**

En esta etapa del proceso se han de introducir los datos objeto del problema en el programa. Es necesario realizar una fase previa, antes de la realización del ejercicio, en donde se enseñen los conceptos básicos del programa y las herramientas que van a ser de utilidad en la resolución del problema planteado.

Obviamente ha de tenerse en cuenta que los alumnos han realizado actividades previas en el aula en las que han tenido contacto con los conceptos básicos de los sistemas de representación, conociendo los tres elementos fundamentales de los mismos: el punto, la recta y el plano. El resto de elementos, principalmente las superficies y sólidos (poliedros, prisma y pirámide, cilindro y cono, esfera), se representan mediante una combinación de los anteriores.

Por otro lado, en los sistemas de representación la recta y el plano no vienen definidos por sus ecuaciones, sino que están referenciados a los elementos que lo forman:

- La recta está definida por dos puntos, o un punto y una dirección (recta paralela o perpendicular a un plano o a otra recta y que pase por un punto).
- El plano queda definido por diferentes datos:
  - Tres puntos
  - Una recta y un punto
  - Dos rectas que se corten
  - Dos rectas paralelas

Por lo tanto, a efectos de la introducción de los datos iniciales, el punto es el elemento más interesante, ya que los otros dos elementos fundamentales quedan definidos mediante combinaciones de puntos.

En el caso de su aplicación como complemento a las clases de matemáticas las rectas y los planos también pueden introducirse mediante las ecuaciones que las definen.

En los ejercicios de sistemas de representación los datos suelen venir dados según las coordenadas de los puntos o de forma gráfica (en plano o papel). En este último caso la obtención de los datos del papel para su posterior introducción en Geogebra u otro software es una fase crítica del proceso.

Para ello se han de determinar las coordenadas de los puntos que definen cada elemento básico para su posterior introducción. En la figura 8 se muestra la obtención gráfica de las coordenadas de los tres elementos básicos, para la posterior introducción de los datos en Geogebra.

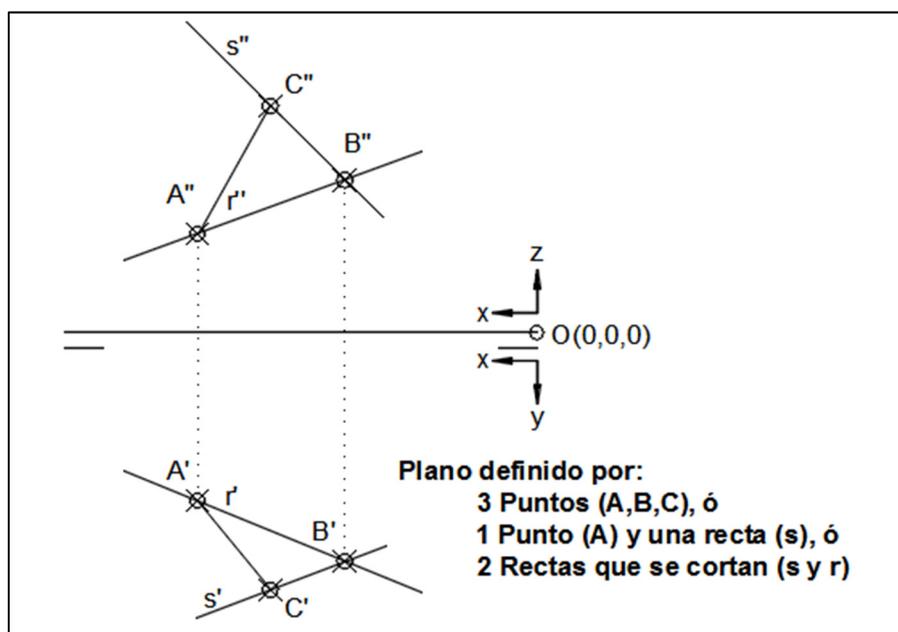
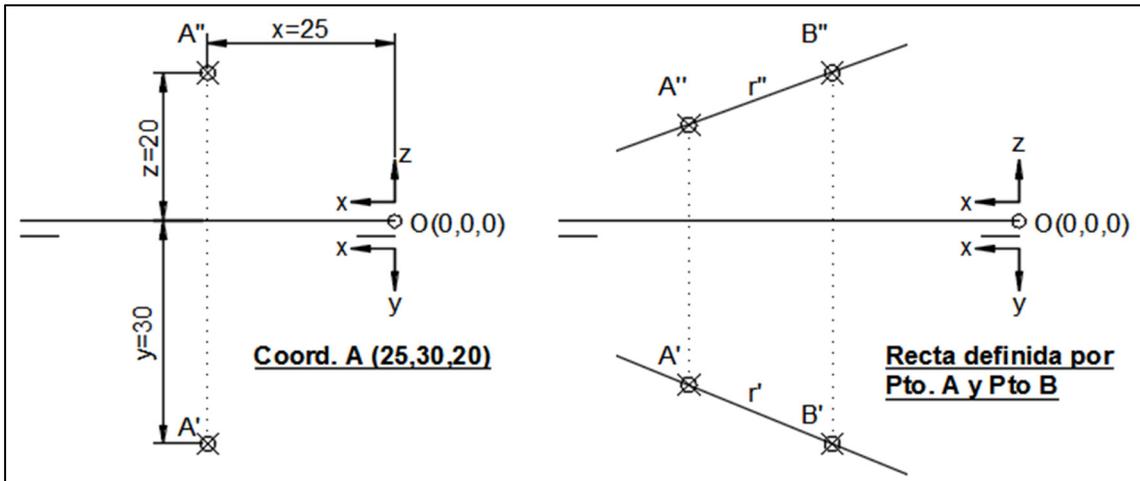


Figura 8 Determinación gráfica de coordenadas

Como se observa, en primer lugar se ha de seleccionar un punto  $O$  como origen de coordenadas (en este caso situado en la línea de tierra) y, posteriormente, se toman las coordenadas de los puntos en función de dicho origen. Se muestra también las coordenadas positivas de los ejes para su correcta introducción en Geogebra. Las flechas indican el lado positivo de los ejes.

Para definir una recta se tomarán dos puntos de la misma y para definir un plano se tomarán tres puntos del mismo.

### 3.1.3. Resolución del problema.

La última fase del proceso es la resolución del problema planteado haciendo uso de las herramientas y comandos que Geogebra dispone, siguiendo los pasos establecidos en la etapa 1 de planteamiento del problema.

En algunos de los casos la resolución es de manera directa, sin la utilización de los procedimientos conceptuales propios de la Geometría Descriptiva en el caso de que el programa disponga de comandos específicos, aunque generalmente es necesario la aplicación de los conocimientos de geometría espacial adquiridos.

A continuación, se presentan ejemplos de su aplicación en la resolución de los ejercicios o problemas más habituales de la Geometría Descriptiva, centrándonos principalmente en los correspondientes a la geometría métrica, ya que para su desarrollo se emplean la práctica totalidad de los conceptos de la Geometría Descriptiva.

## 3.2. APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA

Se ha aplicado la metodología a tres tipos de problemas:

- Representación de figuras en el espacio.
- Distancia entre un punto y un plano.
- Distancia entre dos rectas que se cruzan.

La selección de ejercicios desarrollados que se expone en los siguientes apartados ha sido realizada en base a criterios didácticos y conceptuales. En cada uno de ellos se aplican procedimientos y contenidos tratados en problemas precedentes, con lo que se consigue dar continuidad a la propuesta metodológica reforzando los conocimientos adquiridos.

### 3.2.1. Verdadera magnitud de formas en planos. Medición de áreas y ángulos en figuras planas.

#### Contenidos del currículo tratados:

- Criterios de pertenencia.
- Abatimientos.
- Cambios de plano.
- Construcción de figuras planas en el espacio.

#### Problemas:

- Partiendo de un elemento plano dado, se pide representar determinadas figuras geométricas planas contenidas en él.
- Determinar el área, perímetro y ángulos de figuras planas situadas en el espacio.

#### Sistema tradicional (Sistema Diédrico) (fig. 9)

Su resolución mediante el Sistema Diédrico tradicional se ejecuta mediante el empleo de dos procedimientos:

- Abatimiento: consiste en abatir o girar un plano hasta hacerle coincidir con uno de los planos cartesianos de proyección: el plano horizontal o el plano vertical.
- Cambio de plano: consiste cambiar los planos sobre los que se proyecta la figura, colocando los nuevos planos de proyección paralelos a la figura, por lo que esta se proyecta sobre ellos en verdadera magnitud.

Estos procedimientos son dos de los más complejos a realizar siguiendo la metodología tradicional, siendo procesos lentos que requieren de un alto nivel de capacidad visual. En el caso de tener que realizar el proceso inverso, el nivel de dificultad se incrementa notablemente.

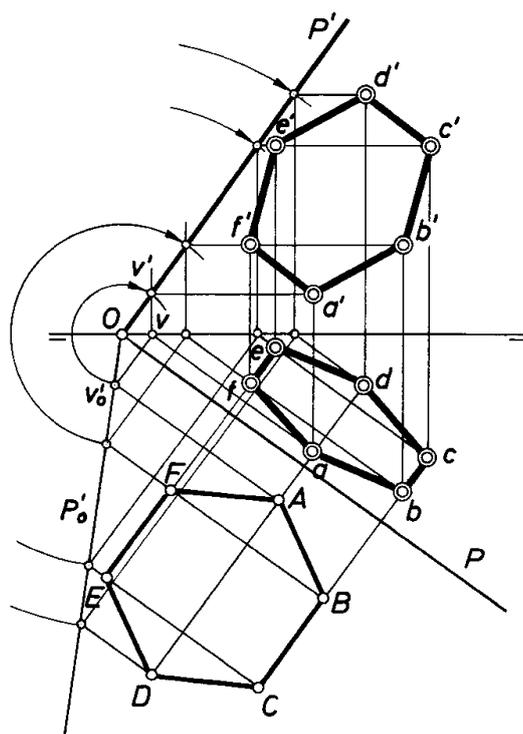


Figura 9 Verdadera magnitud de formas planas mediante abatimiento en el Sist. Diédrico (González y Palencia, 2005)

### Geogebra (Geometría Dinámica)

En el caso del planteamiento del problema mediante Geogebra la resolución del ejercicio es directa (fig. 10).

Pasos:

1. Definir el plano que contenga la figura.
2. Ver el plano en verdadera magnitud (comando “vista de plano” o “representación 2d”).
3. Representar en esa vista la figura dada. En la figura 10 se muestra la circunferencia inscrita en triángulo dato y se han determinado los ángulos que forman los lados entre sí (comando ángulo).



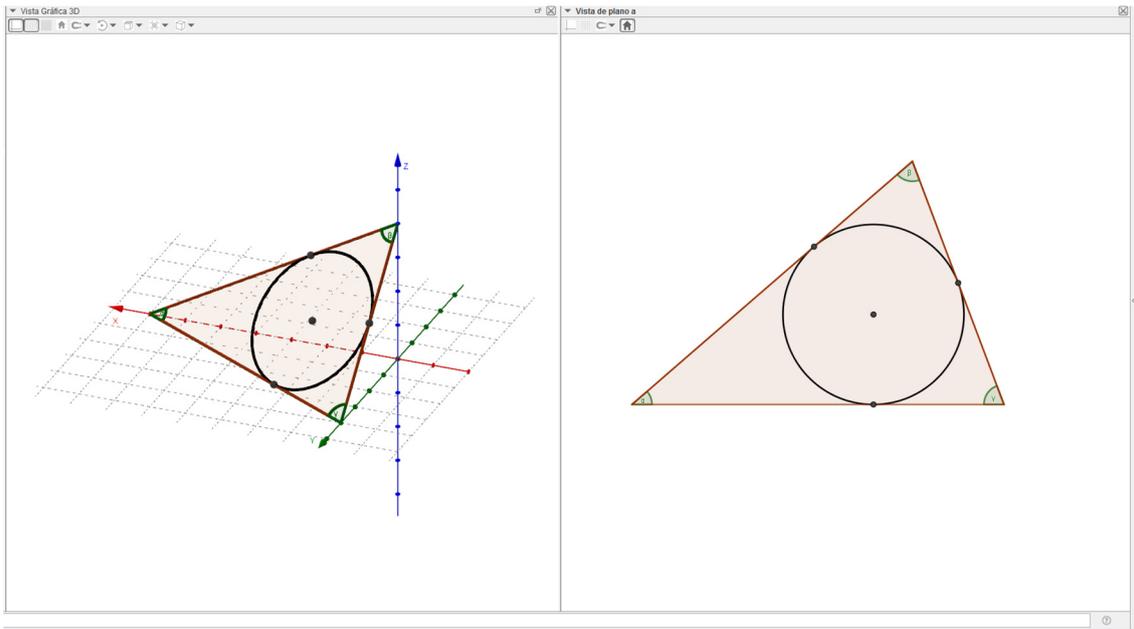


Figura 10 Verdadera Magnitud de formas planas

### 3.2.2. Perpendicular de un punto a un plano. Distancia de un punto a un plano.

#### Contenidos del currículo tratados:

- Recta perpendicular a plano.
- Pertenencia de recta a plano.
- Intersección de recta con plano.
- Intersección entre planos.
- Distancia de un punto a un plano.

#### Problemas:

- Trazar por un punto la recta perpendicular a un plano (fig. 11).
- Determinar la mínima distancia entre un punto y un plano (fig. 11).

Planteamiento del problema (Croquis) (fig. 11).

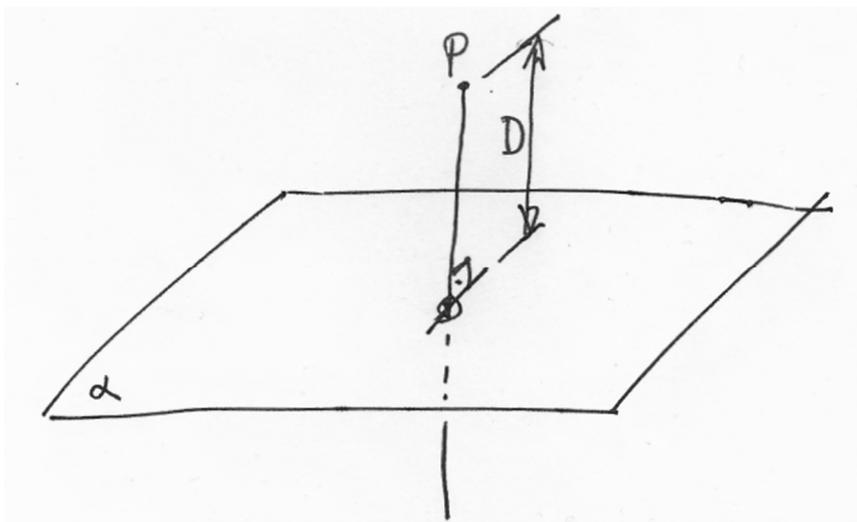


Figura 11 Distancia de un punto a un plano. Croquis del procedimiento

Sistema tradicional (Sistema Diédrico) (fig. 12)

Este ejercicio engloba dos problemas clásicos de la Geometría Descriptiva: trazar recta perpendicular a un plano y determinar la intersección de una recta con un plano.

*Recta perpendicular de punto a plano:*

Su resolución mediante el Sistema Diédrico tradicional se puede realizar mediante dos procedimientos:

- Opción 1. Cambio de plano: mediante este procedimiento se coloca el plano de tal manera que quede perpendicular a uno de los planos de proyección. Una vez situado, se traza la recta perpendicular del punto al plano, siendo ésta la recta buscada. De esta manera también se obtiene de forma directa el punto intersección entre la recta y el plano.
- Opción 2. Se obtienen las trazas del plano (intersección del mismo con el plano horizontal y vertical, respectivamente), y desde el punto se trazan las líneas perpendiculares a las trazas (por la proyección horizontal del punto perpendicular a la traza horizontal, y por la

proyección vertical del punto perpendicular a la traza vertical). Las dos perpendiculares son las proyecciones de la recta buscada (fig. 12).

*Intersección de recta con plano (fig. 12):*

- El planteamiento genérico consiste en trazar un plano que contenga la recta, y hallar la intersección de dicho plano con el plano original. Posteriormente se determina el punto intersección entre la recta perpendicular al plano y la recta intersección.

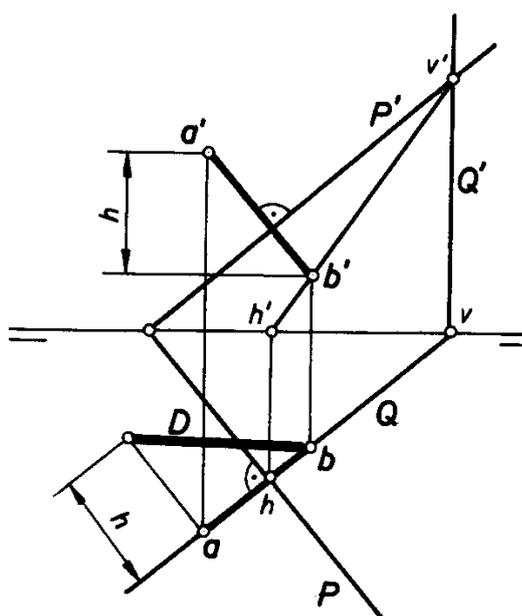


Figura 12 Distancia de un punto a un plano en el Sistema Diédrico (González y Palencia, 2005)

### Geogebra (Geometría Dinámica)

En el caso del planteamiento del problema mediante Geogebra se puede resolver el problema de manera directa (método 1), o siguiendo procedimientos de la Geometría Descriptiva (método 2).

Método 1 (fig.13). Pasos:

1. Se definen el punto y el plano.

2. Se traza la recta perpendicular del punto al plano. Comando Perpendicular. 
3. El punto intersección de la recta con el plano se obtiene con el comando Intersección. 

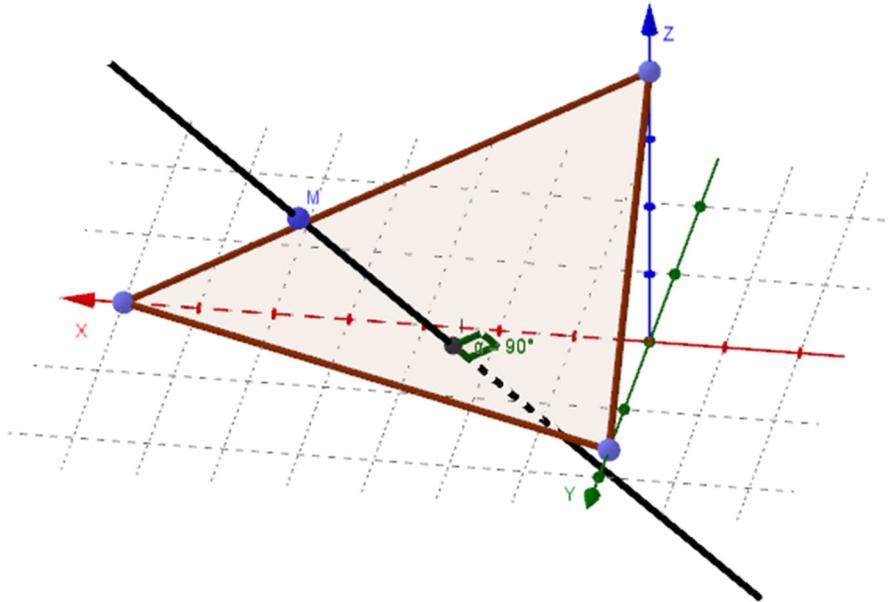


Figura 13 Distancia de punto a plano. Método 1

Método 2 (fig. 14). Pasos:

1. Se definen el punto y el plano.
2. Se traza la recta perpendicular del punto al plano. Comando Perpendicular. 
3. Se traza un plano que contenga la recta. Comando Plano. 
4. Se halla la recta intersección entre los dos planos. Comando Intersección de dos superficies 
5. Se determina el punto intersección entre la recta perpendicular y la recta intersección. Comando Intersección. 
6. Se calcula la distancia mediante el comando Distancia. 

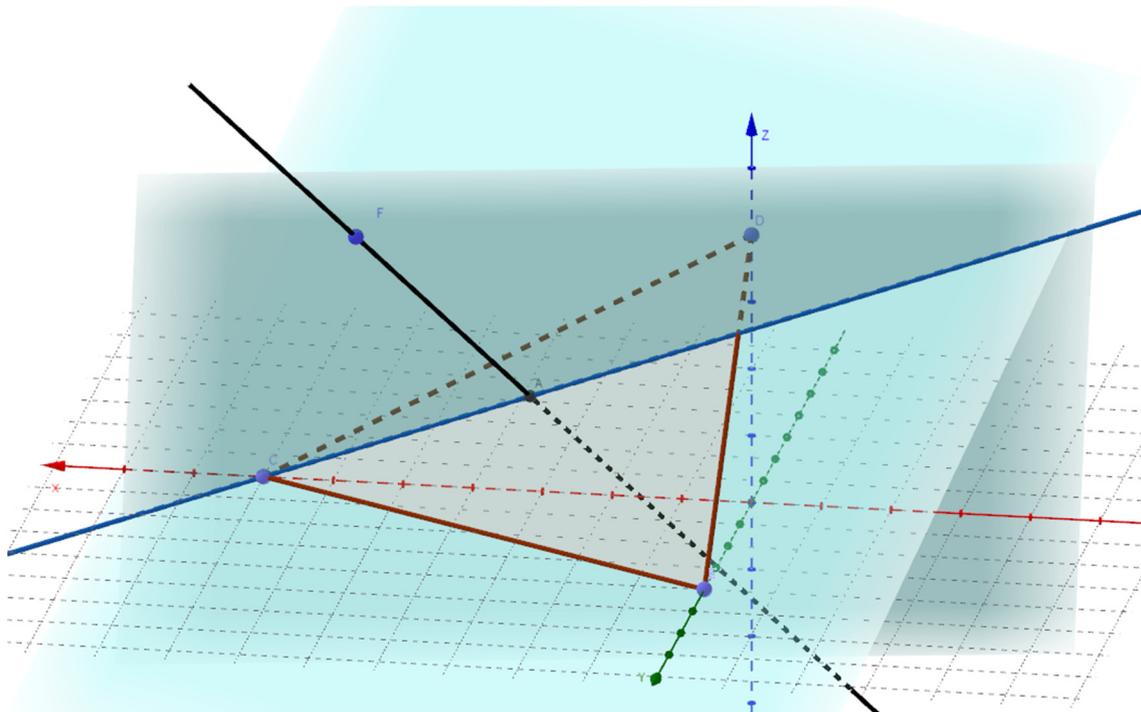


Figura 14 Distancia ente un punto y un plano. Método 2.

### 3.2.3. Distancia entre dos rectas que se cruzan

#### Contenidos del currículo tratados:

- Paralelismo.
- Plano formado por dos rectas.
- Recta perpendicular a plano.
- Intersección de recta con plano.
- Pertenencia de punto a recta y a plano.
- Distancia de un punto a un plano.
- Distancias entre dos rectas que se cruzan.
- Ángulo entre rectas que se cortan.

#### Problemas:

- Distancia ente dos rectas que se cruzan (fig. 15).

Planteamiento del problema (Croquis) (fig. 15).

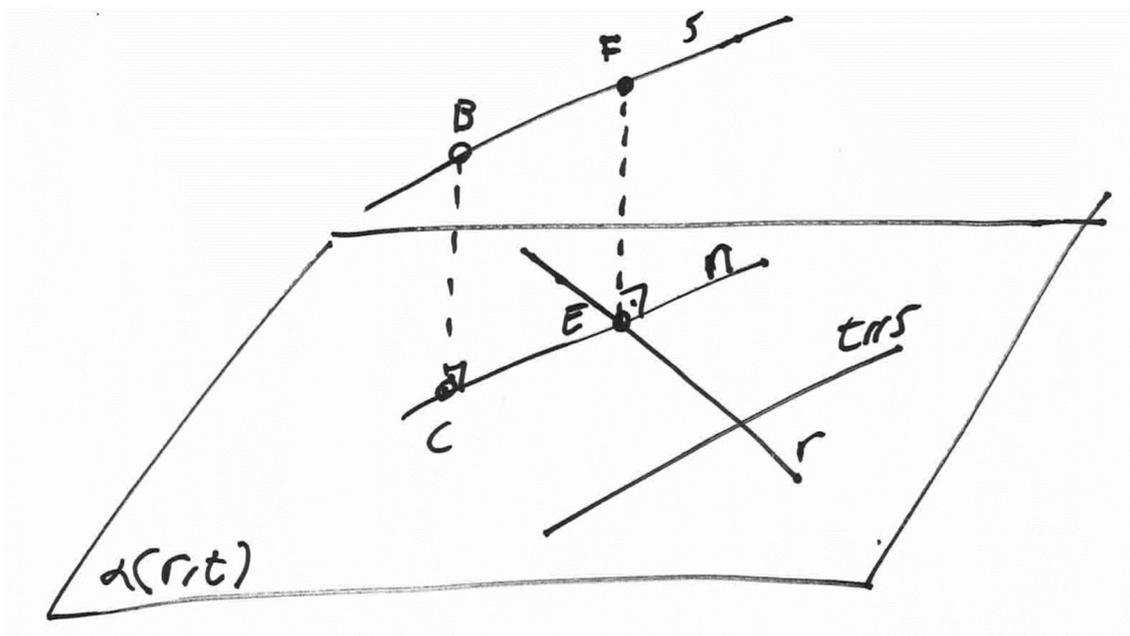


Figura 15 Mínima distancia entre dos rectas que se cruzan. Planteamiento del problema

Sistema tradicional (Sistema Diédrico)

De entre los posibles métodos de resolución que se utilizan en los sistemas de representación se va a presentar el procedimiento más genérico, aunque más laborioso. Este procedimiento no es de uso habitual en su resolución en papel, aunque es el método más efectivo para su uso en el espacio (fig.16).

1. Se traza una recta (t) paralela a una de las rectas datos (s) por un punto perteneciente a la otra recta (r). Estas dos rectas, r y t, forman un plano P paralelo a la recta s.
2. Por un punto B de la recta s se traza una recta perpendicular al plano P, y se halla el punto intersección de dicha recta con el plano, punto C, formando el segmento CB.
3. Por el punto C se traza una recta n paralela a s, y se determina el punto intersección con la recta r, punto E.

4. Por el punto E se traza un segmento paralelo a CB, situándose el otro extremo del mismo F en la recta s. Este segmento EF es la distancia buscada.

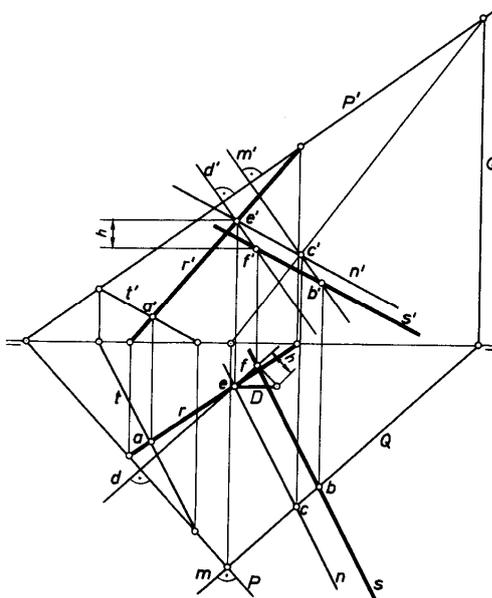


Figura 16 Mínima distancia entre dos rectas que se cortan por el Sist. Diédrico.  
(González y Palencia, 2005)

### Geogebra (Geometría Dinámica)

Para su resolución mediante Geogebra se empleará el procedimiento descrito en el apartado anterior (fig. 17).

Pasos:

1. Se introducen los datos de las dos rectas (r) y (s).
2. Se traza una recta (t) paralela a una de las dadas (s) por un punto de la otra (r). Comando recta paralela. 
3. Definir el plano formado por las rectas (r) y (t). Comando plano. 
4. Por un punto (B) de (s) trazar la recta perpendicular al plano. Comando perpendicular. 
5. Hallar el punto (C) intersección de la recta perpendicular con el plano. Comando intersección. 
6. Trazar el segmento BC. Comando segmento. 

7. Por el punto (C) trazar la recta paralela a (s) y hallar el punto (E) intersección con la recta (r). Comandos recta paralela e intersección.
8. Por el punto (E) trazar el segmento (EF) paralelo a BC. El segmento (EF) es la mínima distancia buscada. Comando recta paralela.

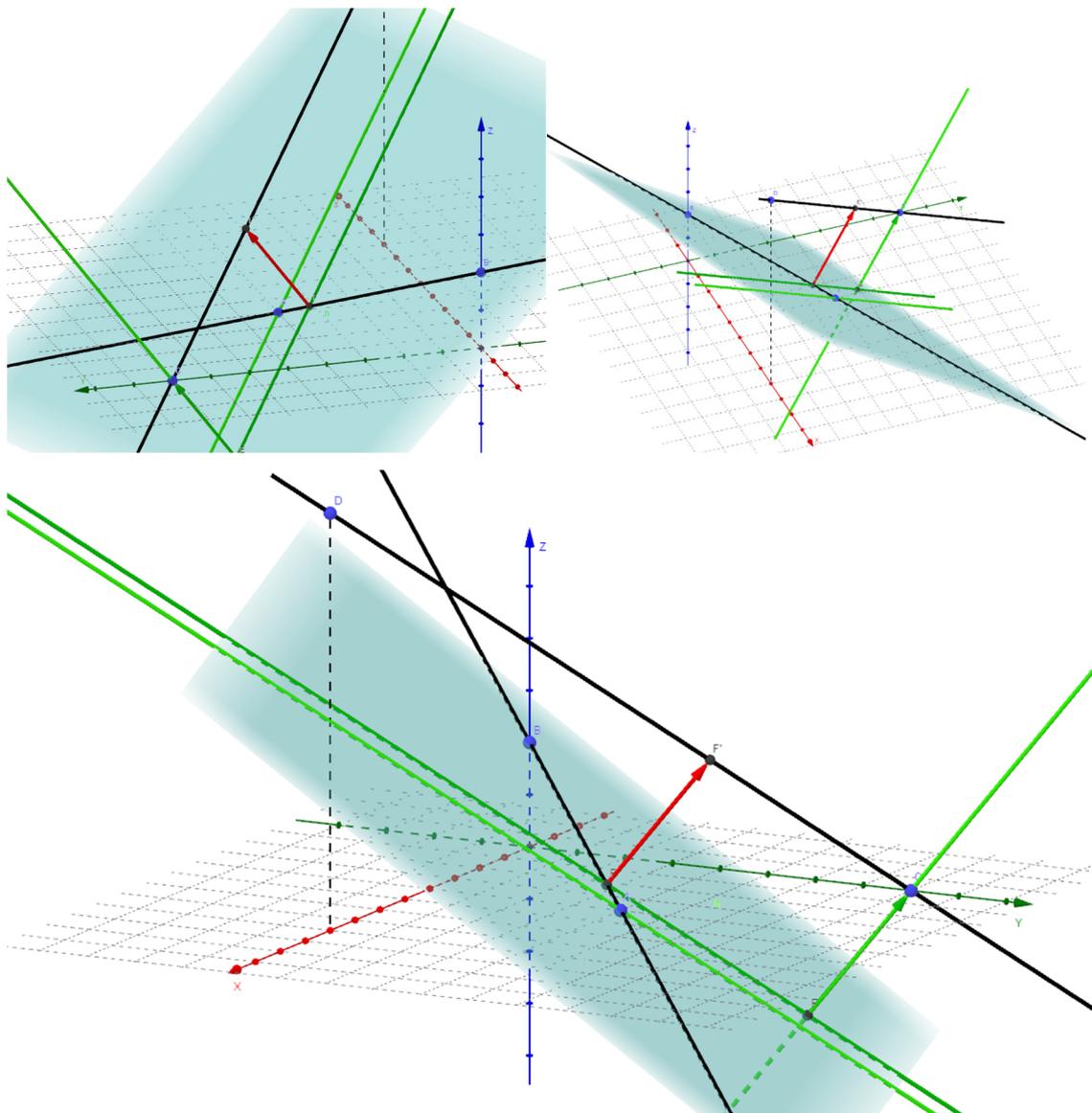


Figura 17. Distancia entre dos rectas que se cruzan.

Se incluyen diferentes perspectivas del ejercicio (fig. 17). La posibilidad de manipulación de los datos y la opción de poder modificar los puntos de vista facilitan la comprensión conceptual de la metodología empleada en la resolución del problema.

#### 4. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha realizado un estudio de la situación actual de la enseñanza de Dibujo Técnico en general, y en bachillerato en particular. Los estudios analizados demuestran que las técnicas didácticas utilizadas hoy en día siguen siendo principalmente las tradicionales: clase magistral por parte del profesor y realización de prácticas manuales por parte de los estudiantes. Aunque se han detectado metodologías más activas por parte de algunos docentes, lo cierto es que la gran mayoría de ellos sigue empleando los modelos educativos clásicos ya mencionados.

Esta falta de innovación educativa, unida a la dificultad intrínseca de la materia, ha generado una actitud pasiva y cierto desencanto entre los alumnos, que no ven una utilidad práctica a la materia, al ser conscientes de que la realidad profesional a la que está orientada la asignatura está dominada por los sistemas CAD.

Esta desmotivación del alumnado es superior en el bloque relacionado con la Geometría Descriptiva o Sistemas de Representación, donde el nivel de capacidad de abstracción espacial necesario es mayor, por lo que los alumnos se limitan a aprender los procedimientos o construcciones rutinarias sin llegar a profundizar en los procesos conceptuales en los que dichas construcciones se basan. Estos conceptos, que son el núcleo de la Geometría Descriptiva, son en realidad mucho más sencillos que las construcciones a las que los estudiantes se enfrentan, y son comunes para los diferentes sistemas proyectivos existentes.

Por otro lado, la aparición del CAD, fundamentalmente en sus versiones tridimensionales, ha ocasionado que la mayor parte de las técnicas clásicas se hayan quedado obsoletas, sin una aplicación o utilidad práctica en la actualidad, por lo que algunos autores abogan por la eliminación de la Geometría Descriptiva de los currículos de las materias.

Por el contrario, otros autores abogan por la conservación de la Geometría Descriptiva, pero despojándola de los procedimientos más mecánicos y

repetitivos, conservando solamente sus bases conceptuales. La aplicación de esas bases en entornos tridimensionales genera un alto valor formativo, fomentado la capacidad de visión espacial del alumnado.

Dadas las características de los entornos CAD actuales, su relativa complejidad y su orientación profesional, hace que la aplicación de esta metodología en ellos genere ciertos inconvenientes en su uso didáctico en secundaria, como pueden ser la necesidad de aprender gran cantidad de comandos para su correcta utilización, lo que conlleva un consumo excesivo de tiempo para aprender a manejar el programa en detrimento del aprendizaje de los conceptos geométricos correspondientes.

Teniendo en cuenta las dificultades comentadas, y unido al desarrollo de los sistemas de Geometría Dinámica tridimensionales, más orientados a la docencia que el CAD, ha propiciado que estas aplicaciones sean unas de las herramientas más recomendadas para su uso en la didáctica de la geometría espacial en niveles preuniversitarios.

En las aplicaciones desarrolladas en el presente trabajo se ha demostrado la facilidad de aplicación de los conceptos propios de la Geometría Descriptiva en las aplicaciones de Geometría Dinámica, en este caso particular Geogebra, mostrando todas ventajas educativas: facilidad de uso, generalización de los problemas, visualización desde diferentes ángulos...

Como conclusión final, y en modo de opinión particular, la enseñanza de la Geometría Descriptiva necesita la introducción de cambios didácticos que la adapten a la realidad actual. Su surgimiento a finales del siglo XVIII sirvió para solucionar la problemática de poder representar figuras tridimensionales en elementos planos de una manera precisa y académica. El surgimiento de las nuevas tecnologías en general, y del CAD en particular, ha ocasionado la desaparición de su motivo fundacional, por lo que ha de desprenderse de sus elementos superfluos y aprovechar sus potentes bases conceptuales adaptándose a los tiempos actuales.

## 5. BIBLIOGRAFÍA

- Alegre Fidalgo, P., Comesaña Campos, A. y Pérez Vázquez, M. (2009). Empleo de herramientas de geometría dinámica para la enseñanza de expresión gráfica en la ingeniería. En *Actas del XXI Congreso Internacional de Ingeniería Gráfica-ADM*. Lugo: 2009.
- Alonso, J. A., Troncoso, J. C., Pérez, M. y González, J. L. (2005). Usabilidad de las herramientas CAD. Consideraciones sobre el uso de los programas de CAD en la docencia del Dibujo Técnico. En *Actas del XVII Congreso Internacional Conjunto Ingegraf-XV ADM*, Sevilla: 2005.
- Alonso, E., *Ester Alonso*. Recuperado el 14 de enero de 2020 de <https://www.geogebra.org/u/ester+alonso>
- Arrieta, I. y Medrano, M. C. (2015). Un análisis de la capacidad visual en los estudios de ingeniería técnica. *PNA*, 9(2), 85-106.
- Asperl, A. (2005). How to teach CAD. *Computer-Aided Design and Applications*, 2(1-4), 459-468. doi:10.1080/16864360.2005.10738395
- Barrantes López, M. (2003). Caracterización de la enseñanza-aprendizaje de la geometría en primaria y secundaria. *Campo Abierto: Revista De Educación*, 24, 15-36.
- Barrantes López, M., Balletbo, I. y Fernández, M. (2013). Enseñar geometría en secundaria. *Academicus. Revista De Ciencias De La Educación*, 1 (3), 26-32.
- Beltrán Chica, J. y Beltrán Polaina, J. M. (2010). Sistema diédrico. Técnicas educativas con ayuda 3D en el espacio real y su simulación en el espacio virtual. *Pixel-Bit: Revista De Medios y Educación*, 36, 151-170.

- Beltrán Pellicer, P. y Rodríguez Jaso, C. (2017). Modelado e impresión 3D en la enseñanza de las matemáticas; un estudio exploratorio. *REIDOCREA*, 6(2), 16-28.
- Calderón Salcedo, J. L. (2019). Representación de la recta en el Sistema de Monge con el apoyo de Geogebra: una experiencia didáctica. *Revista do Instituto Geogebra de Sao Paulo*, 8 (2), 102-118.
- Cisneros Vivó, J. J. y Cabezos Bernal, P. M. (2016). La innovación en la enseñanza de la geometría descriptiva. el uso de las herramientas digitales y el estudio de casos reales. *Modelling in Science Education and Learning*, 9(1), 109-120.
- Decreto 38/2015, de 22 de mayo, que establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la comunidad autónoma de Cantabria*. Boletín Oficial de Cantabria BOC. núm. 39 (2015).
- Díaz García, N. (2015). Otro enfoque de la geometría afín en bachillerato. *Números: Revista De Didáctica De Las Matemáticas*, 90, 117-135.
- Di Paola, F., Pedone, P. y Pizzurro, M. R. (2013). Digital and interactive learning and teaching methods in descriptive geometry. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 106, 873-885. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2013.12.100>
- Fernández Sánchez, A. y Gacto Sánchez, M. (2014) Nuevas herramientas tecnológicas para la didáctica del dibujo técnico en bachillerato. En // *Congreso Internacional de Innovación Docente*. Murcia: 2014.
- Gacto Sánchez, M. y Albadalejo Romero, J. J. (2014). Reflexiones sobre la docencia del dibujo técnico en los niveles de bachillerato: Una propuesta metodológica basada en el aprendizaje cooperativo y las nuevas tecnologías. *El Artista: Revista De Investigaciones En Música y Artes Plásticas*, 11, 88-112.

- 
- García López, A., García Mazarío, F., Rodríguez Sánchez, G., Rodríguez, V. y Villa Cuenca, A. (2010). Una caja informática de herramientas matemáticas. *Boletín De La Sociedad Puig Adam De Profesores De Matemáticas*, 84, 52-62.
- Gilabert González, L. M. y González Meca, S. (2015). Propuesta metodológica en el bachillerato: Incorporación de nuevas tecnologías y un acercamiento a la multidisciplinariedad. *Revista De Ciencias De La Información*, 20, 55-71.
- Giménez Morell, R. V., Grassa Miranda, V. M. y Vidal Alamar, M. D. (2010). Consideraciones sobre las imágenes mentales en el sistema diédrico español. *Arte, Individuo y Sociedad*, 22(1), 111-120.
- Gómez-Fabra, M. y Company, P. (2006). Sobre la geometría métrica asistida por ordenador. En *Actas del XVIII Congreso Internacional de Ingeniería Gráfica. Barcelona: 2006*.
- González Monsalve, M. y Palencia Cortés, J. (2005). *Geometría Descriptiva*. Sevilla: Grafitrés, S.L.
- Gutiérrez Rodríguez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralba (Eds.) *Actas del IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, Cordoba, 2005 (pp. 27-44). Cordoba: Universidad de Cordoba
- Gutiérrez Rodríguez, A. y Jaime Pastor, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA*, 9(2), 53-83.
- Kaufmann, H. y Schmalstieg, D. (2006). Designing immersive virtual reality for geometry education. En *IEEE Virtual Reality 2006*, (pp. 51-58). DOI:10.1109/VR.2006.48

Larrosa Cañestro, I., *Ignacio Larrosa Cañestro*. Recuperado el 14 de enero de 2020 de <https://www.geogebra.org/u/ilarrosa>

Madrid Martín, M. J. (2015). Enseñando geometría: Geogebra 3D en la formación para maestros. *Epsilon: Revista De La Sociedad Andaluza De Educación Matemática "Thales"*, 90, 31-38.

Migliari, R. (2015). Descriptive Geometry: From its Past to its Future. *Nexus Netw Journal*, 14(3), 555-571.

Monge, G. (1799). *Géométrie Descriptive, Leçons données aux Écoles Normales. L'an 3 de la République*. Paris: Baudouin, Imprimeur du Corps Législatif de l'Institut National.

Pérez Vega, L., *Luis Pérez*. Recuperado el 14 de enero de 2020 de <https://www.geogebra.org/u/luisperez>

Pino Mejías, M. (2014). Geometría en el espacio. *Boletín De La Titulación De Matemáticas De La UAL*, 3, 6-7.

Pita Andreu, J. (2016). Geometría 3D. Una propuesta para la introducción de la informática gráfica en la asignatura de geometría descriptiva. *EGE: Revista De Expresión Gráfica En La Edificación*, 9, 55-62.

Rebollo, J., *José Rebollo*. Recuperado el 14 de enero de 2020 de <https://www.geogebra.org/u/rebollo>

Viana, V. (2014). Dynamic geometry software and augmented reality samples for high school descriptive geometry teaching. *Revista Electrónica de Investigación, Docencia y Creatividad*, 3, pp. 46-60.

## 6. ANEXO

### Resolución de problemas matemático-geométricos mediante el uso de procedimientos de la Geometría Descriptiva en Geogebra

En esta actividad se va a proceder a la resolución de un problema de geometría métrica de la convocatoria de las pruebas de acceso a la universidad realizadas en Cantabria en junio de 2014.

Con ello se pretende establecer vínculos entre las asignaturas de Matemáticas II y Dibujo Técnico II, aportando diferentes puntos de vista que fortalezcan el proceso de aprendizaje.

El problema seleccionado es el siguiente:

3. Considera la recta  $r \equiv \begin{cases} 3x - 2y - 11 = 0 \\ 2x - y - z - 5 = 0 \end{cases}$  y los puntos  $A = (0,1,1)$  y  $B = (1,2,1)$ .

a) [1,5 PUNTOS] Halla un punto  $P$  de la recta  $r$  que equidiste de los puntos  $A$  y  $B$ .

#### Planteamiento del problema

El problema consiste en determinar un punto que equidiste de otros dos y esté situado en una recta. El proceso de resolución mediante métodos gráficos está expuesto en el croquis de la figura 18:

El proceso es el siguiente:

- Hallar el punto medio (M) del segmento AB.
- Por el punto M trazar un plano  $\alpha$  perpendicular a AB.
- El punto intersección de la recta  $r$  con el plano  $\alpha$  es el punto que buscamos.

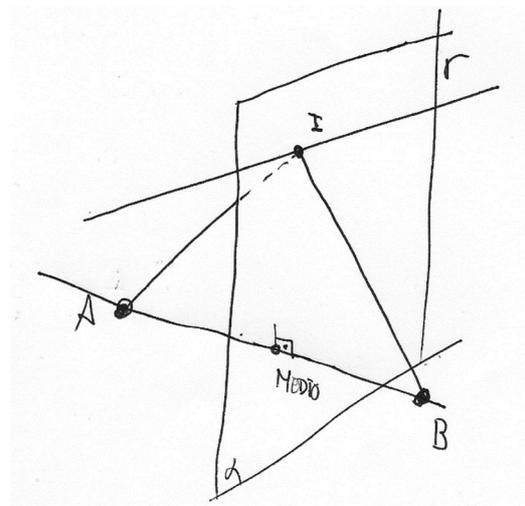


Figura 17 Croquis del proceso

Introducción de datos (fig. 19)

Los puntos A y B se introducen de manera directa en el programa:

“A=(0,1,1)”

“B=(1,2,1)”.

La recta r viene dada por la intersección de dos planos. Se introduce cada uno de los planos y se haya su intersección (comando  )

Plano “w:2x-2y-11=0”

Plano “v:2x-y-z-5=0”

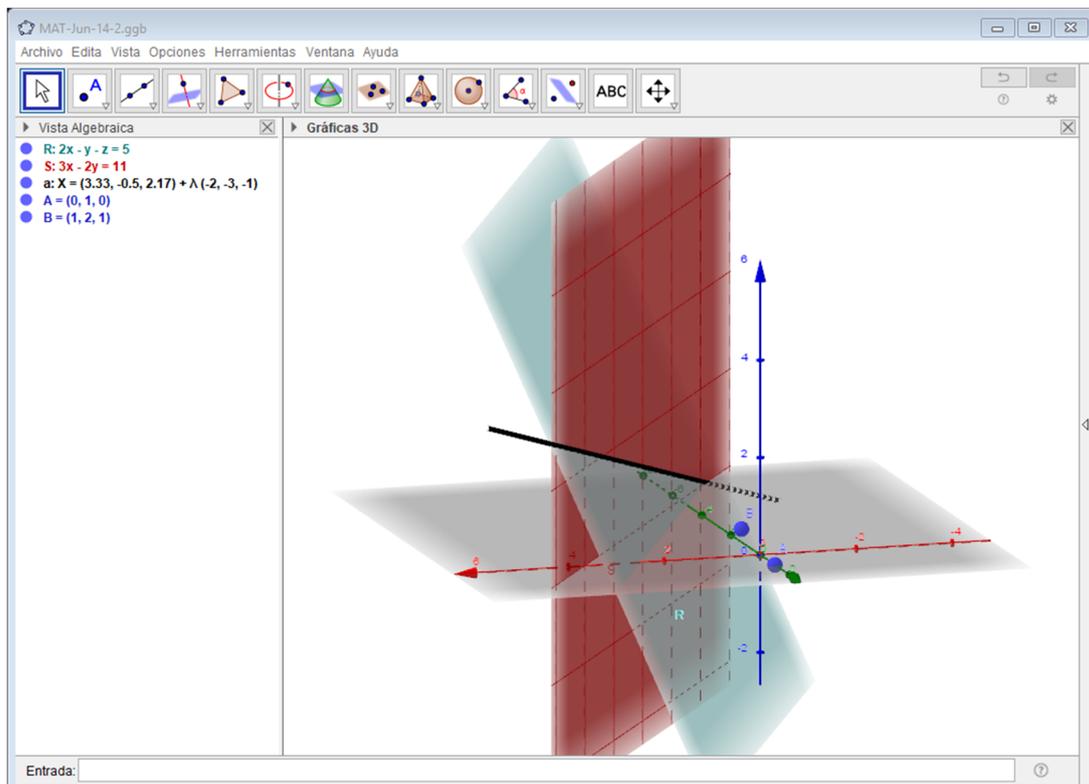


Figura 18 Datos introducidos en Geogebra

Resolución del problema (fig. 20)

1. Hallar punto medio (M) entre A y B. Comando 

2. Trazar plano perpendicular a r por M. Comando 

3. Hallar punto I de intersección entre r y el plano anterior.

Comando  El punto I es el punto buscado

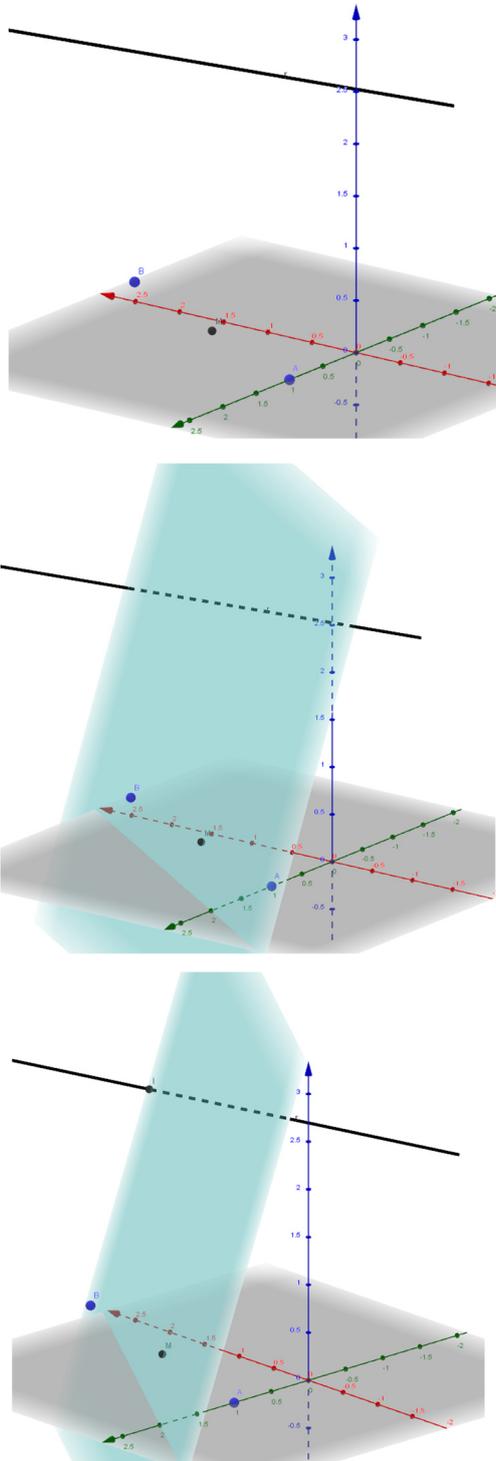


Figura 19 Proceso de resolución del problema: punto medio (M) entre A y B; plano perpendicular a (r) por (M) e intersección de (r) con el plano perpendicular.