http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6
ISSN: 2254-8351

Educación Matemática en la Infancia

Estrategias de generalización por niños de 6 y 7 años al resolver una tarea que involucra un patrón geométrico

Juncal Goni-Cervera
Universidad de Cantabria, Santander, España, juncal.goi@alumnos.unican.es
Irene Polo-Blanco
Universidad de Cantabria, Santander, España, irene.polo@unican.es

Fecha de recepción: 29-11-2019
Fecha de aceptación: 9-12-2019
Fecha de publicación: 15-12-2019

RESUMEN

Recientes investigaciones en Educación Matemática han puesto de manifiesto que los niños desde edades tempranas son capaces de mostrar pensamiento algebraico, y destacan la importancia de proporcionar contextos que les ayude a desarrollarlo. Con el fin de profundizar en estos aspectos, este trabajo explora las estrategias de generalización cercana, lejana y de relación inversa que muestran seis niños de 6 y 7 años al resolver una tarea que involucra un patrón geométrico. Se observa en los resultados una preferencia por las estrategias conteo y recursiva para la obtención de términos cercanos, con algunas manifestaciones de estrategias más avanzadas para generalización lejana. Además, dos de los participantes obtienen la relación funcional inversa para un valor concreto haciendo uso de distintas estrategias. Los resultados coinciden con estudios similares que evidencian que los niños de estas edades son capaces de resolver tareas que involucren relaciones funcionales, y dan información sobre el razonamiento que manifiestan en la búsqueda de los distintos términos de la secuencia. Se concluye destacando la importancia de trabajar con tareas de patrones similares a las del trabajo acompañándolas de material familiar a los estudiantes con el fin de ayudarles a desarrollar este tipo de pensamiento.

Palabras clave: Pensamiento algebraico, early algebra, patrones geométricos, generalización.

Generalization strategies used by 6 and 7-year-old students when solving a geometric pattern task

ABSTRACT

Recent research in Mathematics Education has shown that children from an early age can express algebraic thinking and highlight the importance of providing contexts that help them develop it. In order to deepen in these aspects, this project explore near, far and inverse generalization strategies shown by six children aged 6 and 7 when solving a task that involves a geometric pattern. The results show a preference for counting and recursive strategies for obtaining near terms, with some evidence of more advanced strategies for far generalization. In addition, it is shown how two of the students were able to find the inverse functional relationship for a specific value using a variety of strategies. The results coincide with similar studies that show that students of this age can solve tasks that involve functional relationships and provide information about their reasoning when trying to find the different terms of the sequence. Finally, in order to help the students develop this type of reasoning the importance of working with geometric pattern tasks together with concrete material familiar to them is highlighted.

Key words: Algebraic thinking, early algebra, geometric patterns, generalization.

1. Introducción

Desde el ámbito educativo se ha puesto recientemente de manifiesto la importancia de los aprendizajes matemáticos desde la etapa de Educación Infantil (Castro, Cañadas y Molina, 2017). En concreto, la propuesta *early algebra* apuesta por introducir el pensamiento algebraico desde los primeros niveles educativos, al haberse constatado que desde edades muy tempranas los niños son capaces de mostrar este tipo de pensamiento (Blanton, Brizuela, Gardner, Sawrey y Newman-Owens, 2015).

El pensamiento algebraico considera como parte del contenido matemático la manera de hacer, pensar y hablar sobre álgebra (Cañadas y Molina, 2016; Kaput, 2008). Por otro lado, Vergel (2015, p. 196) entiende este pensamiento como "una forma particular de reflexionar matemáticamente" y lo considera "un conjunto de procesos corporizados de acción y de reflexión". Blanton y Kaput (2004) lo describen como el proceso mediante el cual se llegan a generalizar relaciones matemáticas, a partir de un conjunto de instancias particulares, y a expresarlas en formas cada vez más formales. Cabe destacar la contribución de Radford (2010), quien caracteriza el pensamiento algebraico por estar compuesto de: (1) objetos básicos tales como incógnitas, variables y parámetros, (2) operaciones entre los objetos básicos y (3) la manera específica en que se nombra o se refiere a estos objetos básicos.

Molina (2011) resalta que el objetivo de incluir el álgebra desde edades tempranas no es meramente el de facilitar a los estudiantes el posterior estudio del álgebra, sino promover en los alumnos un aprendizaje más profundo y complejo de las matemáticas escolares y con ello una mejor comprensión de ellas. Otros autores (Kaput, Carraher y Blanton, 2009; citado por Molina, 2011) señalan la persecución de múltiples objetivos al aplicar *early-algebra* en las escuelas, como son: (1) empoderar el currículo básico, (2) preparar a los estudiantes para el posterior enfrentamiento a tareas que requieran el uso del álgebra, facilitándoles una base sólida de aprendizaje, (3) descubrir progresivamente diferentes símbolos presentes en la aritmética y álgebra escolar y (4) eliminar la introducción abrupta del álgebra al llegar el periodo de Educación Secundaria.

Dentro del pensamiento algebraico, Blanton y Kaput (2004) describen el razonamiento funcional como la rama centrada en las relaciones directas o indirectas existentes entre cantidades. En la misma línea, Cañadas y Molina (2016, p. 210) definen el pensamiento funcional como "un componente del pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen". Justifican el interés de estudiar este tipo de pensamiento porque aporta comprensión sobre la manipulación de fórmulas, las variables y la relación entre diferentes representaciones. Además, las autoras lo consideran una potente herramienta en Matemáticas, resaltando que conecta y unifica contenidos del currículo.

Investigaciones llevadas a cabo relacionadas con *early algebra* (Blanton et al., 2015) ponen de manifiesto que los niños tienen capacidades relacionadas con el pensamiento funcional desde edades más tempranas de lo que se presuponía. Otros autores han mostrado además que la introducción temprana del pensamiento algebraico fomenta el razonamiento inductivo (Castro, Cañadas y Molina, 2010; Castro et al., 2017). Por ejemplo, Castro et al. (2017) pusieron en evidencia el desarrollo de las capacidades intuitivas de relaciones funcionales lineales en niños de 5 y 6 años. Las investigadoras trabajaron con doce niños de estas edades durante tres sesiones, en las que les plantearon situaciones relacionadas con animales que involucraban las funciones $y = x$, $y = 2x$ e $y = x + 1$. Este trabajo mostró que algunos niños percibían relaciones funcionales de correspondencia y otros de covariación, coincidiendo con resultados de otros estudios similares (Ureña, Molina y Ramírez, 2018). Castro et al. (2017) concluyen que los estudiantes de Primaria son capaces de trabajar con y describir situaciones sobre relaciones de covariación entre dos cantidades y de presentar una progresión en el lenguaje matemático que explica las operaciones que utilizan para resolver las tareas.

Con el fin de profundizar en esta dirección, este trabajo se centra en estudiar las estrategias de generalización que emplean estudiantes de 6 y 7 años en la resolución de una tarea que involucra una relación funcional. Surge del trabajo de fin de grado realizado por la primera autora, y tiene el objeto de estudiar el tipo de razonamiento que manifiestan los estudiantes en la obtención de términos concretos (cercanos y lejanos) y la relación inversa en una tarea de un patrón geométrico mediante el uso de material concreto familiar a los estudiantes. A continuación, se presenta el marco que se tendrán de referencia en la investigación.

2. Generalización de patrones geométricos

Generalizar consiste en pasar de lo particular a lo general; de un objeto a una clase que lo contiene; desde lo particular, identificando qué es lo común, a un conjunto que incluya más casos (Dreyfus, 1991; Llinares, 2018). Este proceso implica tres acciones: detectar una propiedad común, generalizar esa propiedad común para todos los términos de la secuencia y determinar una regla usando esa propiedad común que permita hallar cualquier término de la secuencia (Dreyfus, 1991).

Los problemas de generalización que involucran patrones geométricos representan, mediante una figura, una progresión aritmética de la que se conocen los primeros términos y se pide calcular el valor para otros términos, así como una regla general (Callejo y Zapatera, 2014). En los problemas de generalización de patrones pueden plantearse tres tareas (Llinares, 2018; Stacey, 1989): (1) tareas de generalización cercana (pueden resolverse mediante la representación y conteo de los elementos), (2) tareas de generalización lejana (van más allá de los límites prácticos razonables de representación de todos los elementos) y (3) tareas de obtención de una regla general que permita calcular un término cualquiera de la sucesión. Algunos problemas pueden incluir el cálculo de la posición de un término de la secuencia a partir de dicho término, es decir, el proceso inverso.

La generalización de patrones es considerada, según Vergel (2015), una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela. Dicha generalización requiere (Radford 2008, 2013, citados por Vergel, 2015): (1) tomar conciencia de una propiedad común observando varios términos particulares, (2) generalizar dicha característica para todos los términos y (3) servirse de esa propiedad común para averiguar nuevos valores de cualquier término de la secuencia.

Distintas investigaciones se han centrado en estudiar cómo los alumnos de Primaria resuelven tareas de generalización que involucran patrones geométricos. Por ejemplo, un estudio sobre el uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de Educación Primaria en una tarea de generalización mostró que los estudiantes son capaces de describir relaciones de correspondencia entre variables de primer grado (Merino, Cañadas y Molina, 2013). Estas autoras utilizaron la idea de patrón, que Castro (1995) describe como la repetición de una situación con regularidad para (1) identificar y describir las estrategias empleadas por los estudiantes presentes en el experimento en una tarea de generalización y (2) describir las representaciones que los estudiantes emplean en la tarea.

En la misma línea, Arbona, Beltrán, Gutiérrez y Jaime (2017) proponen tres ejemplos para trabajar problemas de patrones geométricos con alumnos de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas en los que se detecta una evolución gradual en cuanto a dificultad se refiere. En uno de los ejemplos se plantearon cuestiones de generalización inmediata, próxima y lejana y una relación inversa entre el número de sillas y mesas en un contexto cotidiano. Estos autores concluyen que las tareas que involucran patrones geométricos suponen un contexto adecuado para introducir el álgebra mediante la generalización de relaciones funcionales a estudiantes de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas (Arbona et al., 2017).

2.1. Estrategias de generalización

Entre las investigaciones relacionadas con pensamiento algebraico, algunas se centran en estudiar de manera más detallada el tipo de estrategias que utilizan los alumnos al aproximarse a la generalización. Por ejemplo, Merino et al. (2013) se interesaron en las estrategias que manifestaron veinte alumnos de

5º de Primaria en la resolución de una tarea de generalización abordando cuestiones tanto de relación directa como inversa. Concluyeron que los estudiantes fueron capaces de identificar varios patrones y representaciones en la tarea de generalización presentada, y mostraron conocimientos y herramientas necesarias para identificar las diferentes relaciones funcionales con un uso predominante del sistema pictórico y el conteo.

Razonamientos similares también fueron apreciados en niños de 6 y 7 años por Cañadas y Fuentes (2015) quienes estudiaron a modo exploratorio las estrategias utilizadas por los estudiantes en la realización de una tarea que involucra la relación lineal $G=5\cdot N$, entre el número de niños (N) que asisten a una fiesta de cumpleaños y el número de globos (G) que se necesitan. Se comenzó trabajando en el grupo clase los supuestos N=1 y N=2, para pedir a continuación la resolución de la tarea para N= 3, 4, 5, 8, 10, 20 y 100.

Por otro lado, Lannin, Barker y Townsend (2006) recogieron las estrategias de generalización algebraica empleadas por dos estudiantes de quinto de Primaria, así como los factores que las propiciaban. Las estrategias mostradas se clasificaron como: *conteo* (*counting*), *recursiva* (*recursive*), *múltiplo de la diferencia* (*chunking*), *razonamiento multiplicativo* (*whole-object*) y *correspondencia* (*explicit*). Entre los factores que propician estas estrategias destacaron los sociales, cognitivos y de tarea. Utilizando el mismo marco de referencia, Polo-Blanco, Oliveira y Henriques (2019) analizaron cómo futuros maestros españoles y portugueses identificaban y expresaban la generalización en tareas de patrones geométricos.

Para el presente trabajo se considerará la siguiente clasificación de estrategias, adaptada de los trabajos anteriores (ver Tabla 1):

Tabla 1. Estrategias de generalización. Ejemplos para la relación $P=3\cdot N+1$ con *P* número de paredes y N número de aulas de una escuela

Estrategia	Definición	Ejemplo
Conteo	Dibujar o construir el patrón y contar todos los elementos	Para N=4: [dibuja el patrón para 4 aulas y cuenta todos los elementos]
Recursiva aditiva	Continuar la secuencia usando la diferencia numérica entre términos consecutivos como factor aditivo	Para N=4: "Tres aulas tienen diez paredes y le añadimos tres más. Son trece"
Múltiplo de la diferencia	Utilizar la diferencia entre términos consecutivos como un factor multiplicativo, ajustando o sin ajustar el resultado	Para N=20: [a partir del caso N=10, añade 3x10] "Ahora añado diez clases más, con tres paredes cada una: 31+3x10 = 61"
Razonamiento multiplicativo	Utilizar razonamiento proporcional con ajuste o sin él, comenzando por un término conocido de la secuencia.	Para N= 4: "Dos aulas tienen siete, entonces cuatro aulas tienen catorce, pero se quita uno del principio, así que trece"
Correspondencia	Expresar una relación entre cantidades variables basándose en las características pictóricas o numéricas de la representación	Para N=10: "Para diez aulas son treinta y uno porque siempre hay que multiplicar por tres el número de aulas y añadir uno."

Teniendo como referencia el marco teórico anterior, nos planteamos qué estrategias de las reflejadas en la tabla anterior mostrarán estudiantes de 6 y 7 años en la resolución de una tarea de generalización planteada a través de un patrón geométrico. El diseño de la investigación llevada a cabo se presenta en las siguientes secciones.

2.2. Preguntas de investigación

Esta investigación tiene como objetivo conocer las estrategias de generalización que manifiestan alumnos de 6 y 7 años durante la resolución de una tarea que involucra generalización a términos cercanos, lejanos y relación inversa haciendo uso de material concreto familiar a los estudiantes. En particular, nos planteamos las siguientes preguntas de investigación: (1) ¿qué estrategias muestran los estudiantes al resolver tareas que involucran términos cercanos y lejanos?, (2) ¿qué estrategias muestran los estudiantes al invertir el proceso para un término concreto?, (3) ¿de qué manera el material empleado ayuda a desarrollar las estrategias manifestadas por los estudiantes?

3. Metodología

Se ha seguido un estudio de casos de tipo exploratorio y descriptivo. Se recogieron los datos durante el mes de marzo de 2019 en un colegio de Reino Unido, donde la primera autora estaba realizando las prácticas internacionales.

3.1. Participantes

El experimento requirió la participación de seis estudiantes de 6 y 7 años de segundo curso de educación primaria de un colegio público de la ciudad de Gloucester (Reino Unido). Los estudiantes fueron escogidos de la misma clase, en base a su nivel de competencia matemática. Este nivel se estableció teniendo como referencia la prueba matemática *Mocks* del examen *Key Stage 1 National curriculum tests* (Standards and Teasting Agency, 2018a, 2018b). Dicha prueba consta de una parte de conocimientos aritméticos (máximo 25 puntos) y otra de razonamiento matemático (máximo 35 puntos). El centro realiza un simulacro de la prueba Mocks con los alumnos de segundo unos meses antes del oficial con el fin de establecer pautas de enseñanza adecuadas para cada alumno. Las condiciones de realización fueron las mismas que en el examen oficial.

Se seleccionaron dos alumnos de nivel bajo (puntuación menor a 30), dos alumnos de nivel medio (puntuación entre 30 y 50) y dos alumnos de nivel alto (puntuación superior a 50) con el fin de observar el desempeño de distintos perfiles de alumnado. Dentro de cada grupo, se seleccionaron para el estudio los dos primeros alumnos cuyas familias presentaron el consentimiento a participar. Los datos de los estudiantes escogidos para el estudio se pueden ver en la Tabla 2.

Tabla 2. Datos de los participantes en el estudio

Estudiante	Edad (años: meses)	Sexo	KS1 Mocks SATS*	Nivel de competencia matemática
E1	6:11	M	59	Alto
E2	6:10	M	18	Bajo
E3	7:11	F	41	Medio
E4	7:3	F	60	Alto
E5	6:11	M	48	Medio
E6	7:3	F	25	Bajo

* Prueba matemática Mocks Key Stage 1 National curriculum tests (Standards and Testing Agency, 2018a y 2018b).

En el comienzo del estudio, los participantes habían trabajado en el aula la multiplicación de cantidades pequeñas reiterando la suma, el conteo de dos en dos, de cinco en cinco y de diez en diez y habían trabajado el reconocimiento de patrones del sistema numérico (por ejemplo, series de números pares e impares), incluyendo tareas en las que se incrementaba la complejidad de los patrones. Utilizaban como apoyo para el cálculo el material *Numicon* desde el comienzo de su escolarización, por lo que estaban muy familiarizados con él.

3.2. Diseño de la entrevista

En esta fase se les propone a los estudiantes resolver un problema que involucra la función P= 3·N+1 con P número de paredes y N número de aulas de una escuela. Este diseño de la entrevista está basado en estudios previos similares (Merino et al., 2013) adaptando las preguntas al contexto descrito y a la edad de los estudiantes. El problema se les presentó a los estudiantes de manera verbal, y fue el siguiente:

"Martín está construyendo una escuela. Para construir un aula necesita cuatro paredes. Imagina que estos palitos son las paredes de la escuela que Martín está construyendo. Primero construye un aula, así [la instructora construye un aula con palillos (ver Figura 1, izquierda)].

P1. "¿Cuántas paredes tiene la escuela?"
"Ahora quiere añadir una nueva aula así" [la instructora construye una nueva aula como se muestra en la Figura 1, centro],
P2. "¿Cuántas paredes necesita para construir una escuela con 2 aulas?"
"Quiere seguir añadiendo clases" [la instructora construye una nueva clase como se muestra en la Figura 1, derecha],
P3. "¿Cuántas paredes necesita para construir una escuela con 3 aulas?"

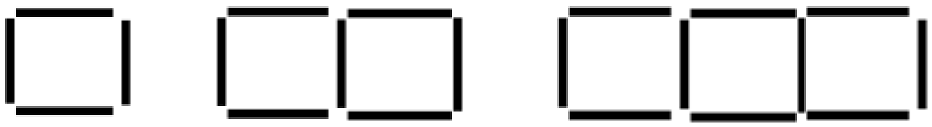

Figura 1. Patrón para una, dos y tres aulas

[continuan las preguntas dejando al estudiante resolverlas de manera independiente]
P4. "¿Y con 4 aulas? ¿Cómo lo sabes?"
P5. "¿Cuántas paredes necesita para construir una escuela con 6 aulas? ¿Cómo lo sabes?"
P6. "¿Y una escuela con 7 aulas? ¿Cómo lo sabes?"
P7. "¿Cuántas paredes necesitra para construir una escuela con 10 aulas? ¿Cómo lo sabes?"
P8. "Y si quiere hacer una escuela más grande, con 20 aulas, ¿cuántas paredes necesita? ¿Cómo lo sabes?"
P9. "Ahora imagina una escuela más grande, una escuela enorme, con 100 aulas. ¿Cuántas paredes necesita para construirla? ¿Cómo lo sabes?"
P10. "Imagina que la escuela que Martín ha construido tiene 25 paredes. ¿Cómo puedes saber cuántas aulas tiene? ¿Se te ocurre otra manera de hacerlo?"

Las preguntas P1 a P6 involucran términos cercanos, que son aquellos que pueden obtenerse mediante la representación (bien en material, bien mediante un dibujo) y conteo de todos los elementos (Stacey, 1989). Las preguntas P7 a P9 evalúan términos lejanos de la secuencia con el fin de observar si los estudiantes abandonaban los materiales concretos y recurrían a estrategias más avanzadas en la búsqueda de la relación funcional entre el número de aulas y paredes. Finalmente, la última pregunta evaluaba si establecían la relación funcional inversa para el valor 25. Durante toda la entrevista, los estudiantes tuvieron a su disposición palillos y material *Numicon*.

La primera autora de este trabajo llevo a cabo las entrevistas. Se realizó una con cada estudiante de una duración aproximada de 30 minutos. La entrevista tuvo lugar en una de las aulas multiusos del colegio, sin distracciones. Durante la entrevista, los estudiantes disponían de palillos de madera, una hoja de papel, lapicero, y el material manipulativo *Numicon*, que podían utilizar si así lo requerían. Con el fin de poder identificar las estrategias manifestadas por los estudiantes (ver Tabla 1), todas las sesiones fueron grabadas en vídeo, transcritas y traducidas.

4. Resultados

A modo de resumen, se recoge en la Figura 2 el porcentaje de estrategias empleadas distinguiendo por tipo de generalización (cercana o lejana) y la relación inversa para el término 25.

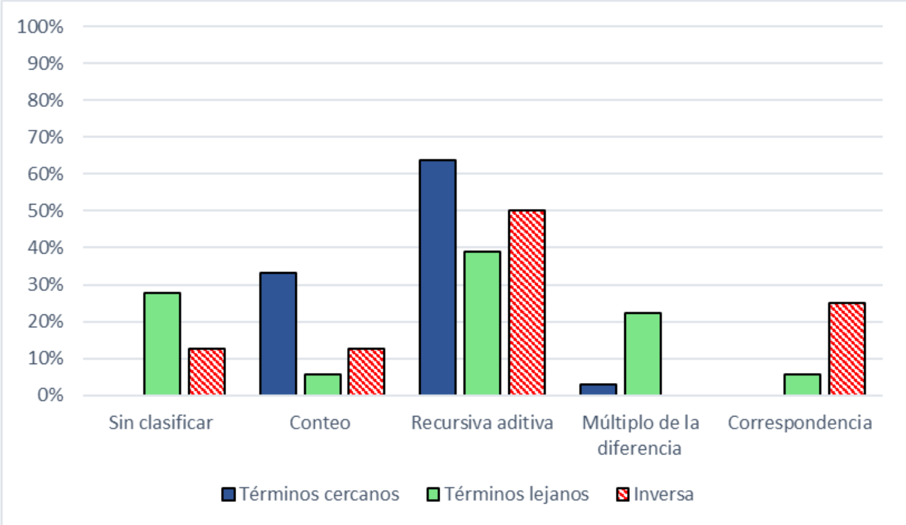

Figura 2. Estrategias de generalización para términos cercanos, lejanos y relación inversa

A continuación, se explica con más detalle el desempeño de los estudiantes distinguiendo por tipo de generalización.

4.1. Generalización cercana

La Tabla 3 recoge los resultados relativos a las estrategias de generalización empleadas por cada uno de los estudiantes E1 … E6 en su resolución de las preguntas P2 a P5, que involucran términos cercanos. Se excluye P1(N=1) por no establecer relación entre las cantidades variables: paredes/aulas. Además, como se ha mencionado en la sección de metodología, en las dos preguntas P2 y P3 la instructora proporcionaba el patrón con los palillos, pero a partir de P4 (N=4), si bien los estudiantes seguían teniendo a su disposición los palillos, la instructora ya no los colocaba formando las aulas. En los casos de resolución incorrecta, se invitaba a los estudiantes a realizar un nuevo intento de resolución con apoyo de la instructora y se registraban las dos estrategias manifestadas. En la Tabla 3 se presentan las estrategias empleadas por los estudiantes en la respuesta a estas preguntas.

Tabla 3. Estrategias de generalización cercana*

E	P2 (N=2)	P3 (N=3)	P4 (N=4)	P5 (N=6)	P6 (N=7)
E1	R (C)	R (C)	R (C)	D (C)	R (C)
E2	CT (C)	CT (C)	R (I) / CT (C)	CT(I)	R (C)
E3	CT (C)	R (C)	R (I)	R (I) / R (C)	R (I)
E4	R (C)	R (C)	R (C)	R (C)	R (C)
E5	R (C)	R (C)	R (C)	R (I) / CT (C)	R (I)
E6	CT (C)	CT (C)	CT (C)	CT (C)	CT (C)

*N: número de aulas, C: respuesta correcta, I: respuesta incorrecta, CT: Conteo, R: Recursiva aditiva, D: Múltiplo de la diferencia

Como se aprecia en la Tabla 3, la estrategia más frecuente ha sido la recursiva aditiva, que se ha manifestado en 21 de 33 ocasiones. Esta estrategia se manifiesta cuando el estudiante continua la secuencia usando la diferencia numérica entre términos consecutivos. Por ejemplo, E1 razonaba así al resolver P2 (N=2): "Siete. Porque aquí [señalando el patrón con una sola aula] hay cuatro y después añado estos tres". E5 razonaba respondiendo a P4 (N=4): "[haciendo alusión al caso N=3] Son tres más, trece en total".

La siguiente estrategia más frecuente en generalización cercana (11 de 33 ocasiones) ha sido la estrategia de *conteo*. Esta estrategia se caracteriza porque el estudiante realiza un conteo de todos los elementos (palillos) basándose en el patrón. Este es el caso por ejemplo de E3 quien, señalando el patrón construido con palillos, argumentó para la pregunta P2 (N=2): "Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete. Siete" y de E2 quien argumentó para P3 (N=3): "Diez. Porque hay: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve y diez (ver Figura 3)".

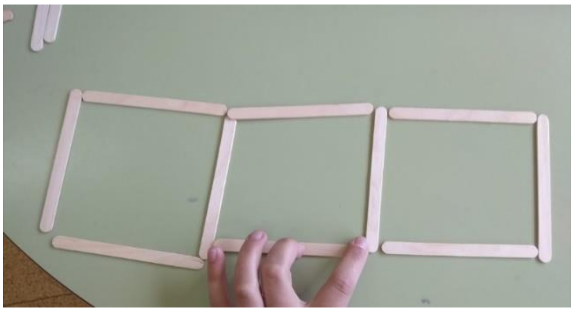

Figura 3. Resolución correcta por E2 a la pregunta P3 (N=3) mediante conteo de palillos (estrategia CT)

Cabe destacar que en una ocasión un estudiante (E1) mostró una estrategia más avanzada del tipo *múltiplo de la diferencia* para obtener un término cercano de la secuencia. Esta estrategia se caracteriza porque se utiliza la diferencia entre términos consecutivos como un factor multiplicativo, ajustando el resultado. En esta ocasión, E1 argumentó para P5 (N=6): "Diecinueve. Porque me he dado cuenta de que está en la tabla del 3, pero primero está este 4". Interpretamos que E1 recurre aquí a un argumento de tipo multiplicativo ("está en la tabla del 3"), ajustando el resultado al añadir las 4 paredes de la primera aula. Como era de esperar, se aprecia un decremento en el éxito en las respuestas a medida que aumenta el tamaño del término implicado. Por ejemplo, todos los estudiantes resolvieron de manera exitosa las primeras preguntas: P2 (N=2) y P3 (N=3), y es al responder la pregunta P4 (N=4) cuando se observan las primeras respuestas incorrectas. Este es el caso de E2 quien recurrió a una estrategia recursiva aditiva errónea argumentando: "Catorce. Porque si añades… si añades a los diez [haciendo referencia al caso anterior] otros cinco, son catorce". Manifiesta así darse cuenta de que puede apoyarse en el caso anterior para calcular el número de paredes de la nueva escuela, aunque se equivoca en la diferencia que añade y en el cálculo. El paso de la pregunta P4 (N=4) a P5 (N=6) involucra una nueva dificultad al ser la primera vez que aparecen términos no consecutivos. Esta dificultad se ve reflejada en el alto número de respuestas incorrectas (3 de 6 en el primer intento). Por ejemplo, E5 colocó las seis aulas empleando palillos y respondió a P5 (N=6) de la siguiente manera: "Dieciséis. Porque he contado 13+3". Muestra así utilizar una estrategia de tipo recursiva aditivia al añadir tres nuevos palillos, pero se basa en el resultado de la pregunta anterior (N=4) y no en el anterior de la secuencia (N=5). En su segundo intento (con ayuda de la instructora) contó los palillos que tenía sobre la mesa y rectificó su respuesta a "diecinueve". En este caso, al emplear la estrategia de *conteo*, E5 se dio cuenta del error y retomó la estrategia recursiva aditiva añadiendo: "antes conté 13+3 pero es 13+6 porque no son 5 aulas, sino 6".

Poniendo el foco en la secuencia de estrategias empleada por cada estudiante, se aprecian distintos comportamientos. Por ejemplo, E1 se mantuvo en una estrategia recursiva aditiva al identificar la diferencia entre términos consecutivos desde el principio y en P5 (N=6), al pasar a un término no consecutivo, empleó una estrategia *múltiplo de la diferencia*. Resolvió la última pregunta P6 (N=7) recurriendo de nuevo a la recursiva aditiva, al involucrar esta el término consecutivo respecto a la pregunta anterior. El estudiante E2 mantuvo una estrategia de *conteo* durante casi todas las preguntas modelizando el patrón con palillos, y fue solo en la última pregunta (P6, N=7) cuando empleó la diferencia entre términos para obtener la respuesta (estrategia recursiva aditiva). La estudiante E3 resolvió P2 (N=2) mediante estrategia de *conteo*, pero a partir de P3 (N=3), mostró una estrategia recursiva aditiva que mantuvo hasta el final de las preguntas de generalización cercana, aunque con errores de conteo en su ejecución. La estudiante E4 mostró comprender el patrón desde el principio, empleando durante todas las preguntas de términos cercanos la estrategia recursiva aditiva. Cuando los términos no eran consecutivos (paso de P5 a P6) recurrió al lápiz y el papel para escribir el término intermedio y así, seguir aplicando la misma estrategia. El estudiante E5 también se mantuvo en una estrategia recursiva aditiva mostrando identificar desde el principio el patrón "tres más", expresión que repite varias veces durante la entrevista. Por último, E6 fue la única estudiante que se mantuvo durante todos los términos cercanos en la estrategia de *conteo*, apoyándose en todo momento en la representación del patrón mediante palillos.

Se aprecia que, en general, el tipo de estrategia empleada ha venido condicionada por tamaño del término de la secuencia y el material proporcionado. La mayoría de los estudiantes emplearon los palillos disponibles para responder las tareas que involucraban términos cercanos construyendo el patrón. Algunos de ellos se apoyaron en el patrón construido para emplear una estrategia de *conteo*, y otros para identificar la diferencia entre términos consecutivos. Sin embargo, dos de los estudiante (E1 y E4) razonaron a partir de la pregunta P4 (N=4) recurriendo al cálculo mental mediante la estrategia recursiva aditiva y en una ocasión, multiplo de la diferencia, sin apoyarse en ninguna representación externa.

4.2. Generalización lejana

A continuación se presentan los resultados sobre las estrategias de generalización empleadas por los estudiantes en la obtención de términos lejanos de la secuencia. En la Tabla 4 se resume el tipo de estrategia y el éxito en la resolución de las preguntas P7, P8 y P9, que involucran los términos: 10, 20 y 100 aulas respectivamente. Al igual que en las preguntas de generalización cercana, en los casos de resolución incorrecta se invitaba a los estudiantes a realizar un nuevo intento de resolución con apoyo de la instructora y se registraban las dos estrategias manifestadas.

Tabla 4. Estrategias de generalización lejana*

E	P7 (N=10)	P8 (N=20)	P9 (N=100)
E1	D (C)	D (C)	C (I)
E2	R (I) / R (C)	SR	SC (I) / SC (I)
E3	CT (I) / R (I)	SC (I) / SC (I)	SR
E4	R (C)	R (C)	D (I) / D (C)
E5	R (I) / R (C)	SR	SC (I)
E6	SR	SR	SR

* N: número de aulas, C: respuesta correcta, I: respuesta incorrecta, CT: conteo, R: Recursiva aditiva, D: Múltiplo de la diferencia, C: Correspondencia, SC: Sin clasificar, SR: Sin responder

Como se aprecia en la Tabla 4, predomina la estrategia recursiva aditiva (7 de 18 ocasiones). Por ejemplo, E5 respondía así al resolver P7 (N=10) en su primer intento: "Tres más [haciendo alusión a P6 (N=7)]". La instructora le indicó la necesidad de pasar por los casos intermedios entre P6 (N=7) y P7 (N=10) para poder seguir usando esa estrategia, tras lo cual E5 corrigió su respuesta. Aunque varios de los estudiantes se apoyaron en esta estrategia en la pregunta P7, la mayoría no llegó a la respuesta correcta cometiendo el mismo error que E5 al apoyarse en lo obtenido en la pregunta anterior.

E4 mostró una estrategia *recursiva aditiva* para P8 (N=20) pasando por todos los términos anteriores desde la pregunta P7 (N=10) (ver Figura 4):

Figura 4. Resolución de E4 de la pregunta P8 (N=20) pasando por los términos intermedios desde N=10 mediante estrategia *recursiva aditiva*

Como se aprecia en la Figura 4, E4 se apoya en lo obtenido en la pregunta anterior (N=10), completa la secuencia con los términos intermedios, añadiendo 3 en cada uno de ellos. Obtiene finalmente la respuesta correcta correspondiente a 20 aulas: 61 paredes.

La siguiente estrategia más frecuente en generalización lejana fue *múltiplo de la diferencia* (4 de 18 ocasiones). El estudiante E1 ya había recurrido a esta estrategia en la generalización de términos cercanos y la mantuvo para contestar a P7 (N=10) y P8 (N=20). En este caso, para responder a P7 empleó una pieza del *Numicon* del número 4 y 9 piezas del número 3 disponiéndolas como se aprecia en la Figura 5.

Figura 5. Resolución de E1 de la pregunta P7 (N=10) empleando piezas del *Numicon* mediante estrategia múltiplo de la diferencia

E1 argumentó así en su resolución: "Son 31. He empezado con 4 y luego he añadido 3 paredes". Interpretamos que, al seleccionar el número exacto de piezas del número 3 directamente, está utilizando la diferencia con factor multiplicativo y realiza además un ajuste. El estudiante E1 siguió empleando la misma estrategia para P8 (N=20) seleccionando diez nuevas piezas 3s del *Numicon* y argumentando: "61. He empezado a contar a partir del 31". De nuevo muestra una estrategia de tipo *múltiplo de la diferencia* con operación implícita 31+10x3.

Como cabía esperar, la estrategia de *conteo* apenas se manifestó en la resolución de estas preguntas por su ineficacia para la obtención de términos lejanos. Aun así, destaca la resolución de E3 quien recurrió al dibujo para crear nuevas aulas y poder seguir apoyándose en el patrón (ver Figura 6).

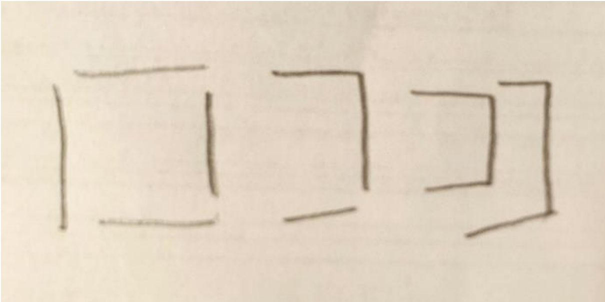

Figura 6. Dibujo de E3 en la resolución de la pregunta P7 (N=10) mediante conteo

En este caso, E3 argumentó: "Solo tenemos seis aulas [haciendo referencia a P5 (N=6)], y 6+4=10. Tengo que añadir cuatro aulas más" y dibujó esas nuevas aulas para después realizar un conteo de todo (ver Figura 6).

En la pregunta de generalización lejana para el término N=100 aparece por primera vez un argumento clasificado como estrategia de *correspondencia*, que consiste en expresar la relación entre cantidades variables para términos lejanos basándose en las características de la representación. En esta ocasión, E1 razonó para P9 (N=100) de la siguiente manera: "Definitivamente más de 100. Habría muchas aulas en línea, y en cada lado habría 100 paredes [haciendo un gesto indicando paredes horizontales]… serían paralelas y luego estas [haciendo un gesto indicando las verticales], así que 300". Manifiesta así comprender la relación funcional entre las variables para el término 100 paredes del tipo 100+100+100, aunque sin ajustar la relación al olvidar añadir la pared de la primera aula.

En la respuesta a esta misma pregunta, la estudiante E4 fue construyendo diferentes aulas como se muestra en la Figura 7. Cuando el patrón se fue complicando, abandonó esta estrategia.

Figura 7. Representación de E4 de cuatro clases con palillos y piezas de *Numicon*

Después, E4 recurrió a la construcción del número 100 con *Numicon* con 10 piezas de 10 y comenzó a contar de tres en tres señalando cada vez un agujero. Cuando la suma se fue incrementando, la instructora le animó a plasmar en el papel lo que estaba haciendo. Entonces E4 escribió 100x3. Al preguntarle la instructora si coincidía con patrones de preguntas anteriores, E4 corrigió su expresión a 100x3+4 y acto seguido, a 99x3+4 (ver Figura 8). Se observa cómo E4 se da cuenta de la necesidad de ajustar la expresión, tachando el número 100 y sustituyéndolo por 99.

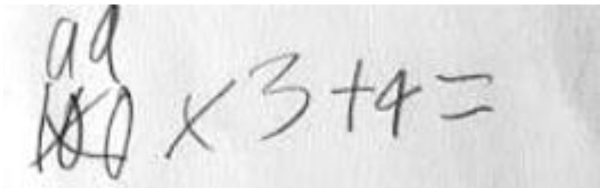

Figura 8. Respuesta de E4 a la pregunta P9 (N=100)

La siguiente transcripción muestra la resolución anterior.

> I: ¿Puedes imaginar ahora una escuela gigante, con 100 aulas? ¿Cuántas paredes tendría?
> [E4 representa el número 100 empleando diez piezas del número 10 de *Numicon*]
> E4: Tres, seis, nueve…
> E4: Estoy haciendo esto: Contando de tres en tres. Estoy tocando los huecos y cada vez es tres veces mayor.
> I: ¿Puedes escribirlo con números?
> E4: Entonces… 100x3 [Escribe en el papel 100x3]
> I: ¿Puedes comprobar si es lo mismo que aquí? [señalando el patrón construido para N=5 (ver Figura 7)]
> E4: De hecho, no… [escribe mientras lo explica en voz alta] más cuatro [En el papel queda escrito 100x3+4, y se queda pensando] ¡No! [tacha el 100 y escribe 99, quedando 99x3+4 (ver Figura 8)]
> I: ¿Cómo lo has sabido?
> E4: Porque una de ellas tiene cuatro paredes [señala en la expresión "+4"] y las demás tienen 3 paredes [señala en la expresión 99x3]

En las preguntas de generalización lejana se registraron un total de 5 estrategias sin clasificar. Encontramos un ejemplo en la respuesta de E3 quien argumentó para P8 (N=20): "Uno. Aquí hay diecinueve [haciendo referencia al patrón construido con palillos en la pregunta P5 (N=6)], necesitamos un aula más para tener veinte". Se observa en la respuesta cómo E3 que confunde las variables añadiendo 1 aula a las 19 paredes obtenidas anteriormente. Otra respuesta sin clasificar fue la de E2 que respondió simplemente: "Muchas" a la pregunta P9 (N=100), sin proporcionar ninguna explicación. Tras el apoyo por parte de la instructora, añadió "necesitaría sobre cincuenta".

Poniendo el foco en la secuencia de estrategias de cada estudiante, se observa que aunque fueron abandonaron las estrategias *conteo* y *recursiva aditiva*, la mayoría no consiguió encontrar otro tipo de estrategia de generalización que les permitiera obtener la respuesta a las preguntas de términos lejanos. Por ejemplo, el estudiante E2 continuó la búsqueda del patrón apoyándose en los términos anteriores y continuando con la estrategia *recursiva aditiva* para P7, pero cuando los términos fueron más distantes (P8 (N=20)) abandonó el intento. Los casos de E3 y E5 fueron similares pues continuaron empleando estrategias de tipo *recursiva aditiva* para términos lejanos no muy distantes a los anteriores (P7 (N=10)), pero no pudieron continuar cuando los términos aumentaron. Por ejemplo, E6 que había utilizado exclusivamente estrategias de *conteo* en las preguntas de términos cercanos, tuvo dificultades para mantener dicha estrategia en la pregunta P6 (N=7) por no disponer de suficiente material, y dejó sin responder todas preguntas de términos lejanos.

4.3. Relación inversa

En la última pregunta se animó a los estudiantes a invertir el proceso para el caso 25 paredes y se codificaron las estrategias empleadas en su resolución. Cuatro de los seis estudiantes entrevistados intentaron responder proporcionando argumentos correctos, consiguiendo dos de ellos la solución.

Por ejemplo, E1 argumentó: "Alrededor de un cuarto de veinticinco. Porque habría dos lados y otro lado aquí". Por otro lado, E2 resolvió la tarea combinando estrategias de *conteo* y *recursiva*. Para ello dispuso los 19 palillos para formar una escuela con 6 aulas, y fue contándolos de uno en uno (estrategia de *conteo*). Al llegar a 19 continuó añadiendo de tres en tres y registrándolo con los dedos (cada dedo, tres paredes) hasta llegar al número 25 (estrategia *recursiva aditiva*). Cuando llegó al número 25, contó las 6 clases construidas con los palillos, añadió los dos dedos empleados y respondió correctamente: "Ocho".

El estudiante E3 había confundido variables en la resolución de P8 (N=20), y continuó con esta confusión al intentar invertir el proceso para 25 paredes. Alguno de sus argumentos fue: "Tenemos diecinueve paredes [haciendo alusión a la formación N=6 con 19 palillos], necesitamos seis nuevas aulas".

Destaca E4, que resolvió esta pregunta de cuatro maneras diferentes, todas ellas correctas. Comenzó utilizando una estrategia *recursiva aditiva* que mantuvo en las tres primeras resoluciones, y consiguió, con ayuda de la instructora, abandonar esa estrategia para cambiar a una de *correspondencia* en el cuarto intento. E4 comenzó escribiendo la secuencia de aulas en una columna. A continuación escribió 4 a la derecha del 1, y fue añadiendo 3 hasta llegar a 25 (ver Figura 9, izquierda). Al animarle la instructora a resolverlo de otra manera, escribió solamente la secuencia de paredes hasta llegar a 25 (ver Figura 9, derecha) y contó el número de términos.

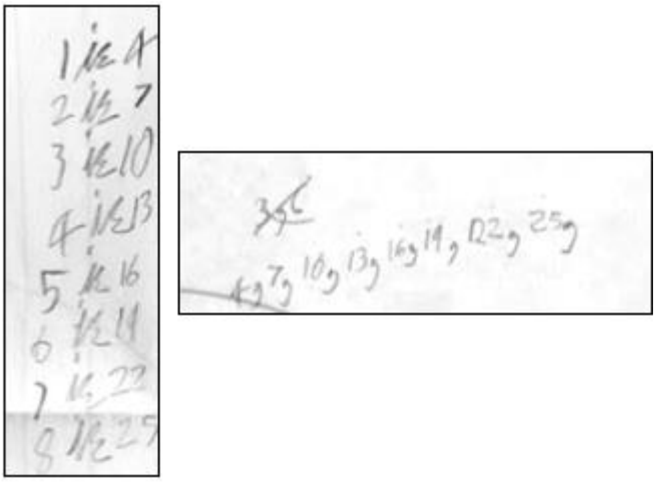

Figura 9. Dos resoluciones por E4 para la relación inversa (estrategias *recursiva aditiva*)

Al ser animada a resolverlo de otra manera, E4 intentó una tercera vez, poniendo en fila varios palillos y contando: "Cuatro [señala el primer palillo], siete [señala un nuevo palillo], diez … veinticinco [señala otro palillo y aparta los restantes]" Y prosigió contando los palillos que había dejado sobre la mesa: "Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho. Ocho", empleando así de nuevo una estrategia de tipo recursivo.

Por último, la instructora le proporcionó el número 25 empleando las fichas del *Numicon*: dos piezas del número 10 y una del número 5 y la animó a resolverlo apoyándose en ese material. En esta ocasión E4 cubrió las piezas dadas por la instructora con una pieza del número 4 y siete del número 3 y contestó: "Ocho, porque cada clase tiene tres paredes pero la primera clase tiene cuatro" y escribió en el papel 3x7+4=8 (ver Figura 10). Interpretamos que esta respuesta manifiesta un razonamiento de tipo *múltiplo de la diferencia,* al utilizar la diferencia empleada en las resoluciones anteriores como factor multiplicativo, a partir del uso de material y expresando la relación de manera simbólica (notar el uso del signo igual para indicar la solución a la pregunta: "8 aulas", y no como equivalencia numérica).

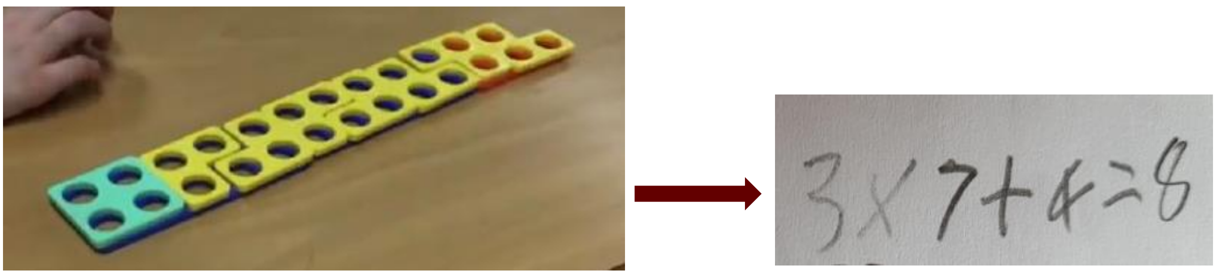

Figura 10. Resoluciones por E4 para la relación inversa con material *Numicon* y representación simbólica (estrategia de *correspondencia*)

5. Discusión y conclusiones

Se observa que las estrategias más frecuentes en generalización cercana fueron la *recursiva aditiva* y el *conteo*, coincidiendo con estudios previos como el de Merino et al. (2013) con estudiantes de 5º de Primaria y el de Cañadas y Fuentes (2015), con estudiantes de 6 y 7 años.

En las preguntas de generalización lejana la estrategia más frecuente fue también la *recursiva aditiva*, aunque aparecen nuevas estrategias más avanzadas de tipo *múltiplo de la diferencia* y *correspondencia*. Estos resultados coinciden con estudios sobre generalización de patrones (Blanton et al., 2015) en que, si bien la mayoría de los estudiantes optan por basarse en un patrón recursivo, cuando ya no pueden recurrir a estrategias de *conteo* o *recursivas*, ineficientes para la obtención de términos lejanos, manifiestan estrategias más avanzadas, mostrando ser capaces de establecer una relación funcional entre dos variables.

Se ha observado que, de los seis estudiantes, cuatro intentaron proporcionar la relación funcional inversa para el valor 25. Entre las estrategias que utilizaron, se encuentra: *conteo*, *recursiva aditiva* y *múltiplo de la diferencia*. Dos de los alumnos fueron además capaces de proporcionar la respuesta correcta en esta pregunta.

En general, el material cotidiano disponible (palillos) facilitó el empleo de estrategias de *conteo* permitiendo visualizar el patrón durante la resolución de los términos cercanos. Por otro lado, el material *Numicon* facilitó alcanzar estrategias más avanzadas en la obtención de términos lejanos por la posibilidad de manejar cantidades mayores ("9 piezas del 3 y una del 4") y relacionarlas con la expesión numérica (9x3+4). No obstante, también se dieron situaciones en las que este material ocasionó que el estudiante perdiera el patrón geométrico (olvidando el ajuste, por ejemplo), por lo que fue importante utilizarlo en combinación con la representación visual del patrón para así ayudar a avanzar a estrategias funcionales.

Los resultados aportan información acerca de la manera en que niños de 6 y 7 años se aproximan a la generalización, y coinciden con resultados de trabajos anteriores (Blanton et al., 2015 y Molina 2009), en que desde edades tempranas son capaces de usar una variedad de estrategias para resolver problemas que involucran relaciones funcionales. Además, se obseva en algunos de los participantes una variedad en el tipo de representación empleado para expresar las relaciones entre las cantidades, lo que coincide con lo observado en otros estudios con niños de edad similares (Castro et al., 2017). En el caso del presente estudio, el material *Numicon* ha jugado un papel fundamental en la manifestación de las distintas estrategias, y ha servido de ayuda en la mayoría de los casos en la obtención de los términos cercanos y lejanos y la relación inversa.

A la vista de estos resultados, se propone el trabajo con tareas que involucren generalización de patrones para fomentar el pensamiento algebraico desde edades tempranas, partiendo de estrategias de conteo basadas en la representación del patrón y guiando a los estudiantes hacia otras de mayor complejidad. Se propone acompañar estas tareas de material didáctico familiar al estudiante y en un contexto conocido para ayudar a desarrollar este tipo de razonamiento.

Agradecimientos

Trabajo financiado por proyecto "Resolución de problemas y competencia matemática en la educación primaria y secundaria y en la formación de profesores". Ministerio de Economía, Industria y Competitividad (EDU2017-84276-R).

Referencias

Arbona, E., Beltrán, M.J., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2017). Los patrones geométricos como contexto para introducir a un estudiante de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas en el álgebra. En Codina, A. (Coord.), Puig, L. (Coord), Arnau, D., Sánchez, M.T., Montoro, A. B., Carlos, J., Arnal, M. y Baeza, M. A. (Eds.), *Investigación en pensamiento numérico y algebraico: 2017* (pp. 38-47). Madrid: Universidad Rey Juan Carlos y SEIEM.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A Learning Trajectory in 6-Years-Olds' Thinking About Generalizing Funcional Relationships. *Journal for Research in Mathematis Education, 46* (5), 511-558. https://www.doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511

Blanton, M., y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education PME 28, 2,* 135-142.

Callejo, M. L. y Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 28 (48), 64-88.* http://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante: SEIEM.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales.* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Castro, E., Cañadas, M. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO, 54, 55-67.*

Castro, E., Cañadas, M. y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 6* (2), 1-13.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking process. *Mathematics Education Library, 11,* 25-41.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Nueva York, NY: Routledge.

Lannin, J., Barker, D. y Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal, 18* (3), 3-28. https://doi.org/10.1007/BF03217440

Llinares, A. (2018) Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números, 97,* 51-67.

Merino, E., Cañadas, M. y Molina, M. (2013) Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2* (1), 24-40.

Molina, M. (2011). Integración del pensamiento algebraico en la educación básica. Un experimento de enseñanza con alumnos de 8-9 años. En M. H. Matrinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, J. P. Ponte, (Eds.), EIEM 2011 - Ensino e Aprendizagem da Álgebra. *Actas do Encontro de Investigacao em Educacao Matemática* (pp. 27-51). Póvoa do Varzim: EIEM 2011.

Polo-Blanco, I., Oliveira, H., y Henriques, A. (2019). Portuguese and Spanish prospective teachers' functional thinking on geometric patterns. En Jankvist, U. T., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Veldhuis, M. (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME 11*: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. (aceptado)

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4* (2), 37-62.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20* (2), 147-164.

Standards and teasting agency (2018a). *National curriculum test Key Stage 1 mathematics*. Paper 1: arithmetic. Disponible en: https://assets.publishing.service.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/711193/STA187964e_2018_ks1_mathematics_Paper1_arithmetic.pdf.pdf

Standards and teasting agency (2018b). *National curriculum test Key Stage 1 mathematics*. Paper 2: reasoning. Disponible en:

https://assets.publishing.service.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/711209/STA187965e_2018_ks1_mathematics_Paper2_reasoning.pdf.pdf

Ureña, J., Molina, M. y Ramírez, R. (2018). Generalización con estudiantes de cuarto curso de primaria bajo el enfoque funcional. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Múñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII.* (pp. 584-593). Gijón: SEIEM.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA, 9* (3), 193-215.

Juncal Goñi Cervera. Graduada en Magisterio en Educación Primaria por la Universidad de Cantabria, Santander. En la actualidad cursa el máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
Email: juncal.goi@alumnos.unican.es

Irene Polo Blanco. Profesora Contratada Doctora del área de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Cantabria. Su tarea docente se centra en la formación de maestros de primaria, y sus líneas de investigación tratan aspectos relacionados con la historia de las matemáticas, razonamiento algebraico, y aprendizaje en alumnado con necesidades especiales.
Email: irene.polo@unican.es