Facultad
de
Ciencias

PROPIEDADES DEL NÚMERO e

(Properties of the number e)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Borja Cubillas Rodríguez

Director: Mario Fioravanti Villanueva

Diciembre 2019

Agradecimientos

En primer lugar, quiero darle las gracias a Mario por darme la posibilidad de realizar este trabajo y ayudarme a realizarlo.

Agradecerle a mi familia su apoyo y paciencia a lo largo de todos estos años, que no han sido pocos.

También quiero darle las gracias a mis amigos de toda la vida y a todos que he ganado desde que llegue a la universidad, desde los compañeros de clase, hasta los profesores y demás empleados de la facultad y de la cafetería.

Y por último, quiero agradecerle a Luis Alberto todo lo que ha hecho por mí a lo largo de la carrera. Gracias por estar siempre dispuesto a ayudarme.

Cuando uno va al médico,
no le pregunta que en cuantos años acabó la carrera.

Resumen

El número e es uno de los número más importantes. En este trabajo se verán varias de sus representaciones y su función exponencial. Además se mostrará una prueba de que es irracional y otra de que es trascendente. También se hará una introducción a las fracciones continuas para posteriormente obtener la de e, y se estudiará algunas aplicaciones de éste número. Para finalizar, se mostrará su computación aproximada por algunas de las representaciones vistas y se introducirán los aproximantes de Padé.

Palabras clave: número e, irracional, trascendente, fracción continua, Padé.

Abstract

The number e is one of the most important numbers. In this work, several of its representations will be shown and its exponential function. In addition, a proof that e is irrational and a proof that e is transcendental will be presented. An introduction to the continuous fractions will also be made to subsequently obtain the continued fraction of e. Some applications of this number will be studied. Finally, methods to compute it using different representations and Padé approximants will be presented.

Key words: number e, irrational, transcendental, continued fraction, Padé.

Índice general

Introducción

Durante los siglos XVI y XVII se produjo una gran expansión económica en Europa gracias a los grandes descubrimientos geográficos. La sociedad feudal del Medievo fue reemplazada por mercaderes que propiciaban la acumulación de riqueza y la circulación del dinero. Esta clase social es la burguesía. Los descubrimientos geográficos favorecieron que los puertos se convirtiesen en ciudades financieras y bancarias, donde se comenzó a realizar préstamos. Además, durante esta época el ser humano comienza a interesarse por la naturaleza. Estos cambios en la economía y en la ciencia crean la necesidad de realizar cálculos cada vez mas complejos, ya fuese para la astrología, la economía o para las técnicas de navegación, e impulsan la búsqueda de nuevos métodos para realizar dichos cálculos de una manera más sencilla.

De todos los métodos que aparecieron, el más importante fue el de los logaritmos, que significa "número para el cálculo", desarrollado por el matemático John Napier [1550-1617]. Los logaritmos consiguieron que en los cálculos donde apareciesen multiplicaciones y divisiones de cierta complicación, fuesen sustituidas por sumas y restas, lo que facilitaba mucho los cálculos.

La sociedad escogió para sus cálculos logaritmos en base 10 debido a la forma que tenía para contar, que no es otra que los dedos de la mano, pero por otra parte, se observó que en muchos procesos naturales, como el crecimiento de bacterias, aparecían las potencias de un número irracional, al que se le llamo número e. Entonces para estudiar estos fenómenos se empezaron a utilizar logaritmos de base e y que se denominan logaritmos neperianos en honor a John Napier.

Además de en la naturaleza, el número e apareció en la economía, por ejemplo a la hora de calcular el interés compuesto de un préstamo, que representa la acumulación de intereses generados en un espacio de tiempo por un determinado capital.

$$C_f = C_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

siendo t el número de años.

El valor del interés compuesto va creciendo al aumentar el número de años y para un número de años t fijo aumenta al aumentar n, que es e^{rt}, como veremos en la sección 5.3. El primero en hacer estos cálculos fue el matemático suizo Jakob Bernouilli [1654-1705], puesto que en 1683 identificó que el número por el cual se debía multiplicar al capital inicial era el valor al que se acercaba $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$. Además, se convirtió en el primer número de la historia de las matemáticas definido como el resultado de un proceso infinito de aproximaciones sucesivas [16] [22] [21].

Capítulo 1

La definición del número e

El número e puede representarse de distintas maneras, y a lo largo de este capítulo veremos algunas de ellas y finalizaremos con la definición de la función exponencial de base e.

1.1. El número e como límite de una sucesión

Lo primero que vamos a estudiar es la existencia del límite de la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Teorema 1.1. *Existe el límite*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = T, \tag{1.1}$$

la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = S \tag{1.2}$$

es convergente, y además $T = S$.

Demostración. Sea la sucesión

$$S_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!} =, \quad n = 1,2,3... \tag{1.3}$$

Se va a probar que converge a un límite cuando $n \longrightarrow \infty$.

Como $S_n \le S_{n+1}$ $\forall n$, se tiene que S_n crece monótonamente. Empezando con $n = 3$, tenemos que

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n > 1\cdot 2\cdot 2\cdot ...\cdot 2 = 2^{n-1}$$

Por lo tanto,

$$S_n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}};$$

con $n = 3, 4, 5, \cdots$.

En esta última suma de términos comenzando por el segundo, forma una progresión geométrica de razón $1/2$. La suma de esta progresión es

$$\left(\frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2}\right) = 2(1 - 1/2^n) < 2.$$

Por lo tanto, tenemos que $S_n < 1+2 = 3$, y por lo tanto S_n está acotada. Ahora, como toda sucesión acotada superiormente y monótona creciente tiende a un límite cuando $n \to \infty$, S_n converge al límite S. Además, con esto vemos también que S esta entre 2 y 3.

Ahora se considera la sucesión

$$T_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Vamos a probar que T_n converge al mismo límite que S_n.

Por el teorema del binomio

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k,$$

y aplicándolo a T_n se tiene que

$$T_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$= \binom{n}{0} 1^n + \binom{n}{1} 1^{n-1} \left(\frac{1}{n}\right) + \binom{n}{2} 1^{n-2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + \binom{n}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!}. \tag{1.4}$$

Como todas las expresiones que están dentro de los paréntesis son menores que 1, tenemos que $T_n < S_n$, y por lo tanto la sucesión T_n también está acotada superiormente. Además T_n crece monótonamente, ya que reemplazando n por $n+1$ aumenta el valor de los sumandos de los paréntesis. En consecuencia tenemos que T_n también converge a un límite cuando $n \to \infty$. A dicho límite le denominaremos T.

Ahora vamos a comprobar que $S = T$.

Como $S_n \geq T_n\ \forall n$, tenemos que $S \geq T$. Entonces lo que tenemos que probar también es que $S \leq T$.

Sean $m < n$ números enteros. Los primeros $m+1$ términos de T_n son:

$$1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + ... + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)...\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)\frac{1}{m!}. \tag{1.5}$$

Como $m < n$ y todos los términos son positivos, esta última suma (1.5) es menor que T_n. Si ahora $n \longrightarrow \infty$ manteniendo m fijo, la suma 1.5 tenderá a S_n, mientras que T_n lo hará a T. Por lo tanto tenemos $S_m \leq T_n$, y en consecuencia $S \leq T$. Como ya sabíamos que $S \geq T$, tenemos que $S = T$, que es lo que queríamos probar.

□

Definición 1.2. *El límite T se denominará el número e, es decir,*

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

De la demostración anterior también se deduce que

$$e = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}. \tag{1.6}$$

El número e también se puede representar como un producto infinito:

Sea S_n la suma parcial 1.3, entonces

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)!} = S_n\left(1 + \frac{1}{(n+1)!S_n}\right) = S_n\left(1 + \frac{1}{u_{n+1}}\right),$$

siendo $u_k = k!S_{k-1}$ un número entero con

$$u_n = n!S_{n-1},$$

$$u_{n+1} = (n+1)!S_n = (n+1)n!\left(S_{n-1} + \frac{1}{n!}\right) = (n+1)(n!S_{n-1} + 1).$$

Se observa que

$$u_1 = 1,$$

$$u_{n+1} = (n+1)(u_n + 1),$$

y entonces se obtiene que

$$S_n = \prod_{j=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{u_j}\right).$$

Por lo tanto, el desarrollo del número e como producto infinito es

$$e = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{u_n + 1}{u_n} \right) = \left(\frac{2}{1} \right) \left(\frac{5}{4} \right) \left(\frac{16}{15} \right) \left(\frac{65}{64} \right) \cdots$$

con $u_n \geq n!$.

Fue Leonhard Euler [1707-1783] quién le dio nombre al número e. Concretamente Euler usó por primera vez la letra e para designar a este número en una carta dirigida al matemático alemán Christian Goldbach en 1731, donde le cuenta el modo en que logró resolver el cálculo del área de la región ubicada debajo de cierta familia de curvas [16].

Figura 1.1: L. Euler por Jakob Emanuel Handmann hacia 1756, Deutsches Museum, Múnich

1.2. La función e^x

Una propiedad que caracteriza al número e es que la función e^x es la única función, a menos de un factor constante, cuya derivada es igual a la función [11].

Teorema 1.3.

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

Demostración. Tomamos $f(x) = e^x$. Para calcular su derivada aplicamos la definición:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h},$$

donde

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{t \to 0} \frac{e^{0+h} - e^0}{h} = f'(0).$$

En consecuencia,

$$f'(x) = e^x f'(0)$$

Ahora se tiene que probar que $f'(0) = 1$.

Como $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, aplicando el cambio de variable $n = 1/t$ se tiene que

$$e = \lim_{t\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} ,$$

y por lo tanto

$$e^h = \lim_{t\to 0} (1+t)^{\frac{h}{t}} .$$

Aplicando la definición de la derivada en $x = 0$,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{lim_{t\to 0} (1+t)^{\frac{h}{t}} - 1}{h}.$$

Tomando $t = h$,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^{\frac{h}{h}} - 1}{h} = 1$$

con lo que se termina la demostración. □

Otra forma de ver el resultado anterior sería resolviendo la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = y \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Leftrightarrow$$
$$\ln y = x + C_1 \Leftrightarrow y = Ce^x$$

donde C es una constante arbitraria.

Teorema 1.4.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Demostración. Sea $f(x) = e^x$, calculamos su serie de Taylor en $x = 0$, es decir, su serie de Mac Laurin.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} = f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)x^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(0)x^3}{3!} + \cdots$$

Aplicando el teorema 1.3,

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{x!}.$$

□

Capítulo 2

El número e es irracional

En la antigua Grecia los números tenían una jerarquía cuyo primer lugar estaba ocupado por los números primos, seguidos del resto de los enteros. Después estaban otros sin el mismo grado de perfección, que eran los que se expresaban como el cociente de dos números enteros, y parecía inconcebible que existiese otra clase de números. Cuenta la leyenda que el primer matemático que demostró que la diagonal de un cuadrado de lado 1 no puede ser el cociente de dos enteros pagó cara su herejía [3].

En este capítulo vamos a demostrar que e es un número irracional mediante la reducción al absurdo, es decir, vamos a suponer que e es un número racional de la forma a/b con a y b números enteros, y llegaremos a una contradicción [6]. Posteriormente también se demostrará que e^2 y e^4 son irracionales.

Teorema 2.1. *El número e es irracional.*

Demostración. Tomamos e en forma de serie (1.6) y

$$e = \frac{a}{b}$$

con a y b números enteros, y $b > 0$.

Entonces

$$b!e = b! + \frac{b!}{1!} + \frac{b!}{2!} + \cdots + \frac{b!}{b!} + x,$$

con

$$x = b!\left(e - \sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}\right).$$

Claramente

$$b! + \frac{b!}{1!} + \frac{b!}{2!} + \cdots + \frac{b!}{b!} \in \mathbb{Z},$$

por lo que se debe analizar x.

$$x = b!\left(\frac{a}{b} - \sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}\right) = a(b-1)! - \sum_{n=0}^{b} \frac{b!}{n!}$$

El primer término es un número entero, y cada fracción en el sumatorio también es un entero ya que $n \leq b$ para cada término. Por lo tanto x es un entero.

Ahora tenemos que probar que $0 < x < 1$.

Por lo tanto

$$x = \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!} > 0$$

Para todos los términos $n \geq b+1$ tenemos la cota superior

$$\frac{b!}{n!} = \frac{1}{(b+1)(b+2)\cdots(b+(n-b))} \leq \frac{1}{(b+1)^{n-b}}$$

el cual es estricto aun para cada $n \geq b+2$. Cambiando el índice del sumatorio a $k = b+2$ y usando la fórmula para la serie geométrica infinita, obtenemos

$$x = \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^k} = \frac{1}{b+1}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{b+1}}\right) = \frac{1}{b} < 1.$$

Como no hay ningún entero entre 0 y 1, hemos llegado a una contradicción, y por lo tanto, e debe ser un número irracional. □

Una vez probada la irracionalidad de e, se puede pensar en otros número irracionales, como puede ser $\sqrt{2}$, que es un irracional cuyo cuadrado es racional. Sin embargo, en el caso del número e no sucede esto ya que e^2 también es irracional, y lo mismo pasa con e^4, como se verá a continuación. [1].

Teorema 2.2 (Liouville)**.** *e^2 es un número irracional.*

Demostración. Se considera la siguiente ecuación

$$e^2 = \frac{a}{b} \Longrightarrow be = ae^{-1}. \tag{2.1}$$

Aplicando el teorema 1.4, sustituimos en (2.1)

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \cdots$$

y

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} \pm \cdots.$$

Se multiplica por $n!$ a 2.1, siendo n algún número par lo suficientemente grande.

La parte izquierda de la igualdad se puede descomponer en

$$\alpha = n!b\left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

que es un entero, y el resto, es decir,

$$n!b\left(1+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots\right)$$

que es aproximadamente $\frac{b}{n!}$ al ser mayor que $\frac{b}{n+1}$, pero menor que $\frac{b}{n}$, ya que

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} &\leq \frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\\ &\leq \frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots=\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Analizando el otro lado de la igualdad, se tiene que $n!ae^{-1}$ también se puede descomponer en un entero β, y el resto

$$(-1)^{n+1}n!a\left(\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}-\cdots\right)\approx(-1)^{n+1}\frac{a}{n}$$

Por lo tanto tenemos que para un número par n el resto es mayor que $-\frac{a}{n}$, pero menor que

$$-a\left(\frac{1}{(n+1)}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+1)^3}-\cdots\right)=-\frac{a}{(n+1)}\left(1-\frac{1}{n}\right)<0,$$

y por lo tanto se llega a una contradicción, ya que para un n lo suficientemente grande se tendría que $n!ae^{-1}$ es un poco menor pero muy cercano a β, mientras que $n!be$ es un poco mayor pero cercano a α, y por lo tanto no puede cumplirse $n!ae^{-1}=n!be$.

□

Teorema 2.3. *e^4 es irracional.*

Demostración. Sea

$$e^4=\frac{a}{b}\Longrightarrow be^2=ae^{-2}. \tag{2.2}$$

A diferencia del caso anterior, tomamos $n=2^m$, en vez de ser un número arbitrario.

Ahora se multiplica por $\frac{n!}{2^{n-1}}$ a ambos lados de la igualdad (2.1).

Por lo tanto se tiene que

$$b\frac{n!}{2^{n-1}}e^2=a\frac{n!}{2^{n-1}}e^{-2}. \tag{2.3}$$

Antes de seguir con la demostración es necesario introducir un caso especial de teorema de Legendre: para cualquier entero $n\geq 1$, $n!$ contiene el factor primo 2 como mucho $n-1$ veces (la igualdad se daría si y sólo si n es potencia de dos, $n=2^m$).

Si sustituimos las series que resultan al usar el teorema 1.4, es decir,

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1} + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \cdots + \frac{2^r}{r!} + \cdots$$

y

$$e^{-2} = 1 - \frac{2}{1} + \frac{4}{2} - \frac{8}{6} + \cdots + (-1)^r \frac{2^r}{r!} + \cdots ,$$

para $r \leq n$ se obtienen sumandos enteros a los dos lados:

$$\gamma = b\frac{n!}{2^{n-1}}\frac{2^r}{r!}$$

y

$$\delta = (-1)^r a\frac{n!}{2^{n-1}}\frac{2^r}{r!}$$

donde para $r > 0$ el denominador $r!$ contiene el factor primo 2 como máximo $r-1$ veces, en tanto que $n!$ lo tiene exactamente $n-1$ veces. Por lo tanto para $r > 0$ los sumandos son pares.

Cómo hemos tomado $n = 2^m$, n es par, y las series que obtenemos para $r \geq n+1$ son

$$2b\left(\frac{2}{n+1} + \frac{4}{(n+1)(n+2)} + \frac{8}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\right)$$

y

$$2a\left(-\frac{2}{n+1} + \frac{4}{(n+1)(n+2)} - \frac{8}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\right).$$

Si n es grande, estas series suman aproximadamente $\frac{4b}{n}$ y $-\frac{4a}{n}$ respectivamente, aplicando al igual que en el teorema anterior la serie geométrica. Para $n = 2^m$ lo suficientemente grande,se tiene que el término de la izquierda de la desigualdad (2.3) es un poco mayor pero muy cercano a un entero γ, mientras que el término de la derecha es un poco menor pero muy cercano a un entero δ, por lo que se llega a una contradicción. □

Una vez visto que e, e^2 y e^4 son irracionales, se va a estudiar el caso general, es decir, ver que e^r es irracional cuando r es un racional no nulo. Para ello es suficiente demostrar que e^s no puede ser racional para ningún número natural s, ya que si $e^{s/t}$ fuese racional, entonces $(e^{s/t})^t = e^s$ también lo sería.

Antes de empezar con este teorema, es necesario introducir un resultado que proviene de una idea de Hermite.

Proposición 2.4. *Sea $n \geq 1$ fijo y sea*

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}. \tag{2.4}$$

- *(i) La función $f(x)$ es un polinomio de la forma $f(x) = \dfrac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} c_i x^i$, donde los coeficientes c_i son enteros.*
- *(ii) Para $0 < x < 1$ se tiene que $0 < f(x) < \dfrac{1}{n!}$.*
- *(iii) Las derivadas $f^{(k)}(0)$ y $f^{(k)}(1)$ son enteros para todo $k \geq 0$.*

Demostración. (i) es inmediato.

(ii) si $0 < x < 1$, entonces $0 < 1 - x < 1$ y $x^n(1-x)^n < 1$.

Para de mostrar (iii), por (i) vemos que la k-ésima derivada $f^{(k)}$ se anula en $x = 0$ excepto si $n \leq k \leq 2n$ y, para estos valores de k,

$$f^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!}c_k$$

es un entero.

De $f(x) = f(1-x)$ se deduce que

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(1-x)$$

para todo x y, por tanto, $f^{(k)}(1) = (-1)^k f^{(k)}(0)$, que es un entero. $\square$

Teorema 2.5. *Si r es un número racional no nulo, e^r es irracional.*

Demostración. Se supone que $e^s = \dfrac{a}{b}$, siendo s, a, b números naturales, y sea n lo suficientemente grande como para que $n! > as^{2n+1}$.

Tomamos

$$F(x) := s^{2n}f(x) - s^{2n-1}f'(x) + s^{2n-2}f''(x) \mp \cdots + f^{(2n)}(x),$$

siendo $f(x)$ la función (2.4). $F(x)$ se puede expresar como una suma infinita

$$F(x) := s^{2n}f(x) - s^{2n-1}f'(x) + s^{2n-2}f''(x) \mp \cdots$$

ya que las derivadas $f^{(k)}(x)$ se anulan para $k > 2n$. Por lo tanto $F(x)$ satisface la ecuación

$$F'(x) = -sF(x) + s^{2n+1}f(x).$$

Utilizando esta desigualdad se obtiene que

$$\frac{d}{dx}[e^{sx}F(x)] = se^{sx}F(x) + e^{sx}F'(x) = s^{2n+1}e^{sx}f(x)$$

y por lo tanto,

$$N := b\int_0^1 s^{2n+1}e^{sx}f(x)dx = b[e^{sx}F(x)]_0^1 = aF(1) - bF(0).$$

Aplicando (iii) del lema anterior tenemos que esta expresión es un entero. Esta expresión es un entero por (iii) de la proposición anterior. Aplicando (ii) obtenemos tanto cotas superiores como inferiores para N,

$$0 < N = b \int_0^1 s^{2n+1} e^{sx} f(x) dx < b s^{2n+1} e^s \frac{1}{n!} = \frac{a s^{2n+1}}{n!} < 1,$$

con lo que se llega a una contradicción ya que por una parte tenemos que N es un entero, pero por otra no existe ningún entero entre las cotas que tiene N, con lo que queda probado el teorema.

$\square$

Capítulo 3

La trascendencia del número e

Un número complejo α se denomina número trascendente si para cualquier $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $f(\alpha) \neq 0$. Si $f(\alpha) = 0$ entonces se denominaría número algebraico.

Si hayamos un polinomio de cierto grado que anule a un número, sabemos que ese número es algebraico. Sin embargo, para saber si un número es trascendente tenemos que probar que ningún polinomio con coeficientes enteros lo anula, lo que es una tarea mucho más complicada. A esto se debe el hecho de que a pesar de conocerse el número e desde el siglo XVII, no fue hasta el siglo XIX, en 1873, cuando el matemático francés Charles Hermite [1822-1901] consiguió demostrar que no existe ningún polinomio no nulo con coeficientes enteros del que el número e fuese raíz [8] [13].

Figura 3.1: C. Hermite hacia 1887

Lema 3.1. *Si* $t \in \mathbb{C}$ *entonces* $|e^t| \leq e^{|t|}$.

Demostración. Sea $t = \alpha + i\beta$, α, $\beta \in \mathbb{R}$.
Entonces

$$\begin{aligned} e^t = e^{\alpha}(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta) \longrightarrow |e^t| &= |e^{\alpha}|\sqrt{\cos^2\beta + \mathrm{sen}^2\beta} \\ &= e^{\alpha} \leq e^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = e^{|t|}. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2 (Hermite)**.** *El número e es trascendente.*

Demostración. Para un polinomio f y para un número complejo t, aplicando la integración por partes

$$\int_0^t e^{-u} f(u)du = \left[-e^{-u}f(u)\right]_0^t - \int_0^t -e^{-u}f'(u)du =$$

$$= \left[-e^{-u}f(u)\right]_0^t + \int_0^t e^{-u}f'(u)du, \tag{3.1}$$

donde la integral es sobre el segmento que une 0 con t.
Sea

$$I(t,f) := \int_0^t e^{t-u}f(u)du,$$

aplicando de nuevo la integración por partes,

$$\int_0^t e^{t-u}f(u)du = \left[-e^{t-u}f(u)\right]_0^t + \int_0^t e^{t-u}f'(u)du = e^t f(0) - f(t) + I(t, f'(u)).$$

Si f es un polinomio de grado m, entonces iterando se obtiene que

$$I(t,f) = e^t \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t).$$

Si F es el polinomio obtenido de f al reemplazar cada coeficiente de f por su valor absoluto y aplicando el lema 3.1, de la definición de $I(t,f)$ se tiene que:

$$|I(t,f)| \leq \int_0^t |e^{t-u}f(u)|du \leq |t|e^{|t|}F(|t|) \tag{3.2}$$

Suponiendo ahora que e es un número algebraico de grado n, entonces

$$a_n e^n + a_{n-1}e^{n-1} + \cdots + a_1 e + a_0 = 0 \tag{3.3}$$

siendo a_i enteros y $a_0 a_n \neq 0$.

Se considera el siguiente sumatorio:

$$J := \sum_{k=0}^{n} a_k I(k, f)$$

con

$$f(x) = x^{p-1}(x-1)^p ... (x-n)^p$$

donde $p > |a_0|$ es un número primo suficientemente grande. Usando (3.3), se tiene que:

$$I(k, f) = e^k \sum_{j=0}^{m} j^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t) = -\sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t)$$

y entonces,

$$J = \sum_{k=0}^{n} a_k I(k, f) = -\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(k) = -\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_k f^{(j)}(k),$$

donde $m = (n+1)p - 1$. Como f tiene un cero de orden p en $1, 2, ..., n$ y un cero de orden $p-1$ en 0, tenemos que el sumatorio ahora empieza en $j = p-1$. Para $j = p-1$ la derivada de orden $p-1$ en f en 0 es

$$f^{(p-1)}(0) = (p-1)!(-1)^{np}(n!)^p$$

Si tenemos que $n < p$, entonces $f^{(p-1)}(0)$ es divisible por $(p-1)!$ pero no por p. Si $j \geq p$, vemos que $f^{(j)}(0)$ y $f^{(j)}(k)$ son divisibles por $p!$ para $1 \leq k \leq n$. Por lo tanto J es un entero distinto de 0 divisible por $(p-1)!$ y en consecuencia

$$(p-1)! \leq |J|.$$

Por otro lado, aplicando (3.2) se tiene que

$$|J| = \sum_{k=0}^{n} |a_k| I(k, f) \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \, k e^k F(k) \leq A n e^n ((2n)!)^p,$$

donde A es el máximo de los valores absolutos de los a_k.

Como

$$e^p \geq \frac{p^{p-1}}{(p-1)!}$$

tenemos que

$$p^{p-1} e^{-p} \leq (p-1)! \leq |J| \leq A n e^n ((2n)!)^p$$

Para un p suficientemente grande, es una contradicción. $\square$

Para finalizar con este capítulo, cabe destacar que a pesar de que se sabe que e y π son trascendentes, se ignora si lo es $e + \pi$. También se sabe que $\pi + e$ o $\pi \cdot e$ es trascendente, pero no cual de los dos. En cambio, e^π si se sabe que es trascendente, ya que quedó demostrado gracias a Alexandr Gelfond [1906-1968] y Theodor Schneider [1911-1988]. No puede decirse lo mismo de π^e, que a día de hoy no se sabe si es racional o irracional [14].

Capítulo 4

Las fracciones continuas y el número e

En este capítulo veremos una introducción a las fracciones continuas [9][3] y finalizaremos con la representación del número e de esta manera.

4.1. Introducción a las fracciones continuas

Una fracción continua es una expresión de la forma

$$x = a_0 + \cfrac{\beta_0}{a_1 + \cfrac{\beta_1}{a_2 + \cfrac{\beta_2}{a_3 + \cfrac{\beta_3}{\ddots \, + \cfrac{1}{a_N}}}}}$$

siendo una función de $N+1$ variables, donde a_0 es un entero y el resto de los a_i y los β_i son enteros positivos.

La teoría de las fracciones continuas es un capítulo importante de las matemáticas ya que constituyen un método muy interesante para representar número reales, y cuyos orígenes se remontan a la matemática hindú del siglo V antes de Cristo. Se debe a L. Euler la formulación de la teoría en sus términos actuales [3].

A lo largo de este capítulo utilizaremos las fracciones continuas simples, de decir, las que $\beta_i = 1$:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots \; + \cfrac{1}{a_N}}}}}$$

Por comodidad, para expresar un número en forma de fracciones continuas se hará de la siguiente manera:

$$x = [a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n].$$

Entonces,

$$[a_0] = \frac{a_0}{1}, \quad [a_0, a_1] = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1}, \quad [a_0, a_1, a_2] = \frac{a_2 a_1 a_0 + a_2 + a_0}{a_2 a_1 + 1}$$

y por lo tanto

$$[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1},$$

$$[a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n] = \left[a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right],$$

$$[a_0, a_1, \cdots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, \cdots, a_n]} = [a_0, [a_1, a_2, \cdots, a_n]]$$

para $1 \leq n \leq N$.

Teorema 4.1. *La fracción continua finita es una función racional y, como tal, puede ser expresada en la forma*

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n(a_0, a_1, \cdots, a_n)}{q_n(a_1, a_2, \cdots, a_n)} = [a_0, a_1, ..., a_n]$$

donde p_n y q_n son polinomios con coeficientes enteros no negativos de $n+1$ y n variables respectivamente, determinados por las siguientes relaciones de recurrencia:

$$p_0 = a_0, \quad p_1 = a_1 a_0 + 1, \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad (2 \leq n \leq N),$$

$$q_0 = 1, \quad q_1 = a_1, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad (2 \leq n \leq N).$$

Demostración. Para $n = 0$ y $n = 1$,

$$p_0 = a_0, \quad q_0 = 1,$$

y

$$p_1 = a_0 a_1 + 1, \quad q_1 = a_1,$$

dando lugar a

$$\frac{p_0}{q_0} = [a_0], \qquad \frac{p_1}{q_1} = [a_0, a_1].$$

Para los demás casos aplicamos inducción: Suponemos que se cumple la igualdad para $n \leq m$, con $m < N$. Entonces

$$[a_0, a_1, \cdots, a_{m-1}, a_m] = \frac{p_m}{q_m} = \frac{a_m p_{m-1} + p_{m-2}}{a_m p_{m-1} + q_{m-2}}$$

donde p_{m-1},p_{m-2}, q_{m-1}, q_{m-2} dependen solo de $a_0, a_1 \cdots, a_{m-1}$.

$$\begin{aligned}
[a_0, a_1, \cdots, a_{m-1}, a_m, a_{m+1}] &= \left[a_0, a_1, \cdots, a_{m-1}, a_m, a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right] \\
&= \frac{\left(a_m + \dfrac{1}{a_{m+1}}\right) p_{m-1} + p_{m-2}}{\left(a_m + \dfrac{1}{a_{m+1}}\right) q_{m-1} + q_{m-2}} \\
&= \frac{a_{m+1}(a_m p_{m-1} + p_{m-2}) + p_{m-1}}{a_{m+1}(a_m q_{m-1} + q_{m-2}) + q_{m-1}} \\
&= \frac{a_{m+1} p_m + p_m}{a_{m+1} q_m + q_{m-1}} = \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}.
\end{aligned}$$

□

4.2. Las fracciones continuas y los números racionales

Aparte de ser un método para representar números reales, las fracciones continuas nos permiten analizar la racionalidad de un número real. Para ello, antes debemos introducir las fracciones continuas infinitas, que son con las que se representan los números irracionales.

Sea x un número real cualquiera, y sea $a_0 = [x]$ la parte entera de dicho número. Por lo tanto,

$$x = a_0 + \varepsilon_0, 0 \leq \varepsilon_0 < 1$$

Si $\varepsilon_0 \neq 0$, entonces:

$$\frac{1}{\varepsilon_0} = a_1' > 1, \quad [a_1'] = a_1, \quad a_1' = a_1 + \varepsilon_1, \quad 0 \leq \varepsilon_1 < 1.$$

Si $\varepsilon_1 \neq 0$, entonces:

$$\frac{1}{\varepsilon_1} = a_2' = a_2 + \varepsilon_2, \quad 0 \leq \varepsilon_2 < 1$$

y así sucesivamente. Además, $a_n' = 1/\varepsilon_{n-1} > 1$, y entonces $a_n \geq 1$, para $n \geq 1$. Por lo tanto

$$x = [a_0, a_1'] = \left[a_0, a_1 + \frac{1}{a_2'}\right] = [a_0, a_1, a_2'] = [a_0, a_1, a_2, a_3'] = \cdots$$

Este sistema de ecuaciones es el algoritmo de fracciones continuas, que no finalizará mientras $\varepsilon_n \neq 0$. Si encontrásemos un valor N donde $\varepsilon_N = 0$ se finalizaría con el algoritmo y tendríamos que

$$x = [a_0, a_1, a_2, \cdots, a_N]$$

En este caso x habría sido representado por una facción continua simple, y además entonces x sería un número racional.

Definición 4.2. *El sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned}
&h = a_0 k + k_1, && (0 < k_1 < k),\\
&k = a_1 k_1 + k_2, && (0 < k_2 < k_1),\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot && \\
&k_{N-2} = a_{N-1} k_{N-1} + k_N, && (0 < k_N < k_{N-1}),\\
&k_{N-1} = a_N k_N &&
\end{aligned}$$

se llama algoritmo de Euclides.

Teorema 4.3. *La representación en fracción continua de un número real es finita si o solo si ese número es racional.*

Demostración. Si x es un entero, entero ε_0 y $x = a_0$. Si no lo es, entonces

$$x = \frac{h}{k},$$

con h y k enteros y $k > 1$. Como

$$\frac{h}{k} = a_0 + \varepsilon_0,$$

$$h = a_0 k + \varepsilon_0 k,$$

siendo a_0 el cociente y $k_1 = \varepsilon_0 k$ el resto cuando h es dividido por k.

Si $\varepsilon_0 \neq 0$, entonces

$$a_1' = \frac{1}{\varepsilon_0} = \frac{k}{k_1}$$

y

$$\frac{k}{k_1} = a_1 + \varepsilon_1,$$

$$k = a_1 k_1 + \varepsilon_1 k1$$

con a_1 el cociente y $k_2 = \varepsilon_1 k_1$ el resto, cuando k es dividido por k_1. Se obtiene así la serie de ecuaciones

$$h = a_0 k + k_1, \quad k = a_1 k_1 + k_2, \quad k_1 = a_2 k_2 + k_3, \quad \cdots$$

que continúa mientras $\varepsilon_n \neq 0$, o lo que es lo mismo, mientras $k_{n+1} \neq 0$. $\square$

Ahora se tratará la representación de un número irracional mediante una fracción continua infinita.

Para representar un número irracional por fracciones continuas, llamaremos

$$a_n' = [a_n, a_{n+1}, \cdots]$$

al n-ésimo cociente completo de la fracción continua

$$x = [a_0, a_1, \cdots].$$

Entonces

$$a_n' = \lim_{N \longrightarrow \infty} [a_n, a_{n+1}, \cdots, .a_N]$$

$$= a_n + \lim_{N \longrightarrow \infty} \frac{1}{[a_{n+1}, \cdots, a_N]} = a_n + \frac{1}{a_{n+1}'},$$

y en particular

$$x = a_0' = a_0 + \frac{1}{a_1'}.$$

Además,

$$a_n' > a_n, \quad a_{n+1}' > a_{n+1} > 0, \quad 0 < \frac{1}{a_{n+1}'} < 1,$$

y por lo tanto $a_n = [a_n']$.

4.3. La fracción continua simple del número e

Una vez vistos estos resultados, se pasará a tratar la representación del número e con fracción continua [4] [18]. Fue Euler quién probó en 1737 la irracionalidad de e utilizando las fracciones continuas simples. Como curiosidad, cabe destacar que a pesar de no ser el primero en estudiar las fracciones continuas, si fue el primero en realizar un artículo muy completo sobre sus propiedades.

Para obtener la representación del número e como fracción continua simple, primero se debe considerar el número

$$\frac{e-1}{2} \approx 0{,}8591409142295 = \frac{8591409142295}{10000000000000}$$

Como este número es menor que 1, $a_0 = 0$.

Ahora se invierte la fracción

$$\frac{10000000000000}{8591409142295} = 1 + \frac{1408590847704}{8591409142295}$$

por lo que el siguiente denominador es la parte entera del número, es decir, $a_1 = 1$.

Se vuelve a invertir la nueva fracción y se tiene que

$$\frac{8591409142295}{1408590847704} = 6 + \frac{139862996071}{1408590847704}.$$

El siguiente denominador será $a_2 = 6$.

Repitiendo el proceso de invertir la fracción

$$\frac{1408590847704}{139862996071} = 10 + \frac{9950896994}{139862996071},$$

$a_3 = 10$.

$$\frac{139862996071}{9950896994} = 14 + \frac{551438155}{9950896994},$$

$a_4 = 14$.

$$\frac{9950896994}{551438155} = 18 + \frac{25010204}{551438155},$$

$a_5 = 18$.

$$\frac{551438155}{25010204} = 22 + \frac{1213667}{25010204},$$

$a_6 = 22$.

Una vez calculados estos valores de a_i, si la secuencia de a_i va permitiendo obtener una aproximación cada vez más exacta del número e, entonces estos a_i siguen una progresión aritmética que no empieza con el primer denominador, si no en a_2 y que va aumentando el siguiente denominador en 4.

$$\frac{e-1}{2} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cdots}}}}}.$$

Como esta serie va aumentando y nunca termina, no es una fracción continúa simple finita. Y por lo tanto, como se ha visto en las demostraciones anteriores, este número no puede ser racional.

Este resultado nos muestra la irracionalidad del número e, ya que si $\frac{e-1}{2}$ no es racional, e tampoco puede ser racional.

Ahora, despejando se obtiene que

$$e = 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cdots}}}}}.$$

Ahora hay que transformarlo en una fracción continua simple, y para ello se usan dos transformaciones [15]:

Sea la fracción continua

$$\cfrac{2}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{\cdots}}} = \cfrac{2}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{y}}}.$$

Si a es par, entonces

$$\cfrac{2}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{y}}} = \cfrac{1}{\cfrac{a}{2} + \cfrac{1}{2b + \cfrac{2}{y}}}.$$

Si a es impar, entonces

$$\cfrac{2}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{y}}} = \cfrac{1}{\cfrac{(a-1)}{2}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{(b-1)+\cfrac{1}{y}}}}}.$$

Aplicando estas transformaciones a la fracción continua de e, se tiene que

$$e = [2,1,2,1,1,4,1,1,6,\cdots] = [2, \widehat{1,2n,1}]_{n=1}^{\infty}.$$

Una vez obtenida, se va a realizar la demostración de que efectivamente es ésta la representación en fracción continua simple del número e.

Para hacerlo, lo primero que se debe hacer es cambiar la fracción continua de e por una equivalente:

$$[2,1,2,1,1,4,1,1,6,\cdots] = [1,0,1,1,2,1,1,4,1,1,6,\cdots]$$

Por lo tanto,

$$a_{3i+1} = 2i, \quad a_{3i} = 1,$$

y los p_i y los q_i serían

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_i	1	1	2	3	8	11	19	87	106
q_i	1	0	1	1	3	4	7	32	39

Además, los p_i y q_i satisfacen las siguientes relaciones de recurrencia:

$$\begin{aligned} p_{3n} &= p_{3n-1} + p_{3n-2}, & q_{3n} &= q_{3n-1} + q_{3n-2}, \\ p_{3n+1} &= 2np_n + p_{3n-1}, & q_{3n+1} &= 2nq_{3n} + q_{3n-1}, \\ p_{3n+2} &= p_{3n+1} + p_{3n}, & q_{3n+2} &= q_{3n+1} + q_{3n}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Por lo tanto, se tiene que probar que

$$\lim_{i \longrightarrow \infty} \frac{p_i}{q_i} = e.$$

Para ello, se definen las siguientes integrales:

$$A_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^n}{n!} e^x dx$$
$$B_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!} e^x dx$$
$$C_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!} e^x dx$$

Proposición 4.4. *Para $n \geq 0$, $A_n = q_{3n}e - p_{3n}$, $B_n = p_{3n+1} - q_{3_n+1}e$, y $C_n = p_{3n+2} - q_{3n+2}e$.*

Demostración. Aplicando las relaciones (4.1), solo tenemos que probar las condiciones iniciales $A_0 = e - 1$, $B_0 = 1$ y $C_0 = 2 - e$ y además que

$$A_n = -B_{n-1} - C_{n-1} \tag{4.2}$$

$$B_n = -2nA_n + C_{n-1} \tag{4.3}$$

$$C_n = B_n - A_n \tag{4.4}$$

Para (4.4),

$$x^{n+1}(x-1)^n - x^n(x-1)^n = x^n(x-1)^n(x-1) = x^n(x-1)^{n+1}.$$

Para probar (4.2), lo que es lo mismo, probar que $A_n + B_{n-1} + C_{n-1} = 0$, y se integra a ambos lados de

$$\frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x + \frac{x^n(x-1)^{n-1}}{(n-1)!}e^x + \frac{x^{n-1}(x-1)^n}{(n-1)!}e^x = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x\right),$$

que sigue las reglas de derivación del producto.

Para probar (4.3), o lo que es lo mismo, $B_n + 2nA_n - C_{n-1} = 0$, siguiendo un proceso similar al del caso anterior se integra ambos lados de

$$\frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!}e^x + 2n\frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x + \frac{x^{n-1}(x-1)^n}{(n-1)!}e^x = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!}e^x\right).$$

Con lo que terminaríamos la demostración. □

Teorema 4.5. $e = [1, 0, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, \cdots]$

Demostración. Lo primero que tenemos que ver es que A_n, B_n, C_n tienden a 0 cuando $n \longrightarrow \infty$:

$$|A_n| \leq \int_0^1 \frac{|x^n(x-1)^n|}{n!}|e^x|dx \leq \frac{1}{n!}e \longrightarrow 0$$

$$|B_n| \leq \int_0^1 \frac{|x^{n+1}(x-1)^n|}{n!}|e^x|dx \leq \frac{1}{n!}e \longrightarrow 0$$

$$|C_n| \leq \int_0^1 \frac{|x^n(x-1)^{n+1}|}{n!}|e^x|dx \leq \frac{1}{n!}e \longrightarrow 0.$$

Una vez visto esto, por la proposición 4.4,

$$\lim_{i\longrightarrow\infty}(q_i e - p_i) = 0$$

$$\lim_{i\longrightarrow\infty} q_i e = \lim_{i\longrightarrow\infty} p_i$$

y por lo tanto

$$e = \lim_{i\longrightarrow\infty}\frac{p_i}{q_i} = [1,0,1,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,1,\cdots]$$

□

Capítulo 5

Aplicaciones del número e

El número e tiene un gran número de aplicaciones, de las cuales se verán algunas en este capítulo.

5.1. Problema de cálculo de Steiner

Este problema debe su nombre al matemático suizo Jakob Steiner (1796 – 1863), y consiste en encontrar el máximo absoluto de la función $f(x) = x^{1/x}$:

Para ello, lo primero que haremos será definir la siguiente función

$$g(x) = \ln f(x) = \ln x^{1/x} = \frac{1}{x}\ln x.$$

Calculamos su derivada:

$$g'(x) = \frac{-1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Buscamos su valor máximo, por lo que analizamos donde se anula su derivada:

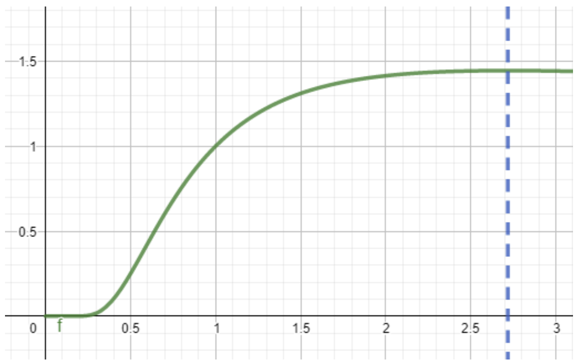

Figura 5.1: En verde $f(x) = x^{1/x}$, en azul $x = e$.

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow \ln(x) = 1 \Rightarrow x = e.$$

Claramente cuando $0 < x < e$, $g'(x)$ es positiva ya que $\ln x < 1$, y es negativa cuando $x > e$. Con lo que queda demostrado que e es el máximo absoluto y único de $g(x)$, y por lo tanto de $f(x)$ [20].

5.2. Fórmulas que contienen al número e

- **Identidad de Euler**: Desarrollada por L. Euler, fue considerada en 1988 por los lectores de la revista *Mathematical Intelligencer* como la fórmula matemática mas bonita de la historia [16].

Y no es de extrañar que sea considerada como tal, ya que es una fórmula que relaciona cinco de los números más importantes y representativos de las matemáticas, como son el 1, 0, e, i y π:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Se puede deducir de la fórmula de Euler $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ cuando se toma $x = \pi$, ya que $sen(\pi) = 0$ y $cos(\pi) = -1$. Además, permite expresar cualquier número complejo en notación exponencial.

- **Fórmula de Stirling**: se utiliza para la aproximación de factoriales grandes. Su fórmula es

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^n}} = 1,$$

que frecuentemente se reescribe como

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Demostración. Por la función gamma de Euler

$$\Gamma(n+1) = n! = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx.$$

Por el cambio de variable $x = nt$,

$$\Gamma(n+1) = n^{n+1} \int_0^\infty t^n e^{-nt} dx.$$

Realizando otro cambio de variable

$$t = 1 + \frac{s}{\sqrt{n}}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n^n \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^\infty \left(1 + \frac{s}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-n-s\sqrt{n}} ds \\ &= n^n \sqrt{n} e^{-n} \int_{-\sqrt{n}}^\infty e^{n \ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{n}}\right) - s\sqrt{n}} ds.\end{aligned}$$

Ahora, para resolver la integral se usa la serie de Taylor de $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

Si se aplica al exponente de la integral quedaría

$$-\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3\sqrt{n}} - \frac{s^4}{4n} + \cdots$$

cuyo límite cuando $n \longrightarrow \infty$ es $\dfrac{-\,s^2}{2}$.

Sustituyendo,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \Gamma(n+1) = n^n\sqrt{n}e^{-n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\dfrac{s^2}{2}}.$$

Para calcular la integral, se toma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\dfrac{x^2}{2}} = I.$$

Entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2-y^2/2}dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}e^{-y^2/2}dxdy =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{y^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2/2} = I\int_{-\infty}^{\infty} e^{y^2/2}dy = I^2,$$

y pasando a coordenadas polares,

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2-y^2}{2}}dxdy = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2/2}rd\theta dr$$

$$= 2\pi\int_0^{\infty} e^{-r^2/2}rdr = 2\pi(-e^{-r^2/2})|_0^{\infty} = 2\pi,$$

y en consecuencia

$$I = \sqrt{2\pi}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \Gamma(n+1) = n^n\sqrt{n}e^{-n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\dfrac{s^2}{2}} = n^n\sqrt{n}e^{-n}\sqrt{2\pi} = n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

Con lo que queda probada la fórmula [10].

□

- **Ecuación de la catenaria**: es la curva que forma una cadena al ser suspendida de sus extremos y que es sometida solamente a la fuerza de la gravedad [2]. Su ecuación es

$$y = a\ \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = a\frac{e^{x/a}+e^{-x/a}}{2}.$$

Demostración. La ecuación diferencial de la catenaria puede deducirse aplicando equilibro de fuerzas a una porción infinitesimal de catenaria. Si se aplica el equilibrio de fuerzas a las fuerzas horizontales y verticales, entonces

$$
\begin{aligned}
F_H &= T\cos\alpha(x - \triangle\, x) - T\cos\alpha(x) = 0 \\
F_V &= T\sin\alpha(x - \triangle\, x) - T\cos\alpha(x) = \int_{s_1}^{s_2} \lambda ds,
\end{aligned}
$$

donde

- α es el ángulo formado por la catenaria y la horizontal.
- $T(x)$ es la tensión total del cable para cada punto.
- λ es el peso por unidad de longitud.

La primera ecuación implica que

$$T\cos\alpha = T_H = cte,$$

La segunda puede escribirse escogiendo adecuadamente el origen de la longitud de arco como:

$$
\begin{aligned}
T\cos\alpha &= T_H \\
T\sin\alpha &= \lambda(s - s_0)
\end{aligned}
$$

y entonces

$$\tan\alpha = \frac{\lambda}{T_H}(s - s_0).$$

Si se introduce la relación entre la tangente del ángulo de la pendiente y la longitud de arco,

$$
\begin{aligned}
\tan\alpha &= \frac{dy}{dx} \\
s &= s_0 + \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,
\end{aligned}
$$

y por lo tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda}{T_H} \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx. \tag{5.1}$$

Derivando (5.1), se obtiene que

$$\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{\lambda}{T_H} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

La solución general viene dada por

$$y(x) = \frac{T_H}{\lambda} \cosh\left(\frac{\lambda}{T_H}(x - C_1)\right) + C_2 = a \cosh\left(\frac{x - C_1}{a}\right) + C_2. \qquad (5.2)$$

La solución de (5.2) para un cable suspendido de dos puntos a la misma altura y cuyo punto mínimo es el punto $(0, a)$ es

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$$
$$a = \frac{T_H}{\lambda}.$$

$\square$

- **Campana de Gauss**: Es la fórmula densidad de la distribución normal

$$\phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

siendo μ la media y σ la desviación estándar.

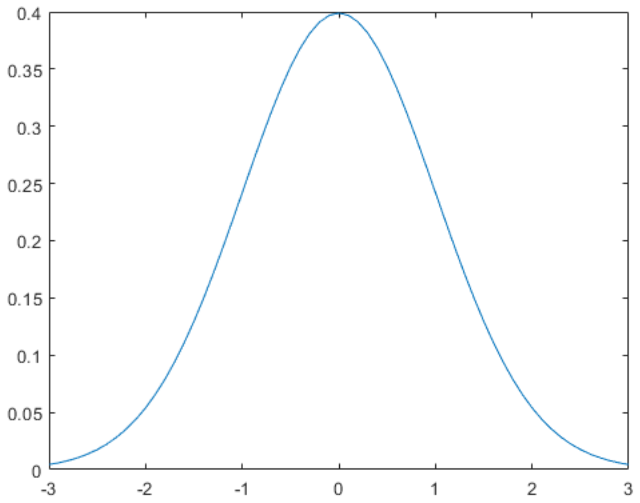

Figura 5.2: Ejemplo de la campana de Gauss

En la siguiente integral se comprueba que el área bajo su gráfica es igual a 1.

Lema 5.1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = 1$$

Demostración. Tenemos

$$\{\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx\}^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\phi(y)dxdy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy$$

Expresándolo en coordenadas polares realizando el cambio:

$$x = r \cdot cos(\phi)$$

$$y = r \cdot cos(\phi)$$

llegamos a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} rdr = \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} rdr = -e^{-\frac{1}{2}r^2}\Big|_0^{\infty} = 1$$

con lo cual se demuestra la afirmación [7]. □

Algunos ejemplos de variables asociadas a fenómenos naturales que se ajustan a la distribución normal son:

- Errores cometidos al medir ciertas magnitudes.
- La estatura de individuos.
- El cociente intelectual.

- **Distribución de Poisson**: Es una distribución de probabilidad discreta cuya función de densidad es

$$p(k;\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},$$

donde k es el número de ocurrencias del evento o fenómeno, y λ es un parámetro positivo que representa el número de veces que se espera que ocurra el fenómeno durante un intervalo dado [7].

Algunos fenómenos discretos de la naturaleza que se ajustan a la distribución de Poisson son:

- Las desintegraciones radiactivas.
- Bombardeos aéreos sobre Londres.
- La distribución de la riqueza humana.
- El número de estrellas en un determinado volumen de espacio.
- Llamadas a un número equivocado.

5.3. El interés compuesto

El número e también juega un papel importante en la economía, y un ejemplo claro es el interés compuesto [12].

El dinero que una persona invierta en una operación financiera para obtener un interés se denomina capital. Una manera de abonar estos intereses es usar la ley del interés compuesto. Con esta ley los intereses al final de cada periodo se acumulan al capital del inicio del nuevo periodo para producir nuevos intereses. Si invertimos una candidad de dinero C_0 a una tasa de interés compuesto r, y el interés se capitaliza k veces al año, al cabo de t años el saldo será

$$C_f = C_0 \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}.$$

Si la frecuencia con la que se capitaliza el interés $k \longrightarrow \infty$, si invertimos una cantidad de dinero C_0, el saldo después de t años sería

$$\lim_{k\to\infty} C_0 \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}.$$

Si realizamos el cambio de variable $1/x = r/k$.

Cuando $k \longrightarrow \infty$, $x \longrightarrow \infty$, entonces

$$\lim_{k\to\infty} C_0 \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt} \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} C_0 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{rxt} \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} C_0 \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{rt}$$

$$\Leftrightarrow C_0 \left(\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{rt} = C_0 e^{rt}.$$

5.4. Crecimiento exponencial

El crecimiento exponencial se aplica a magnitudes que aumentan de forma proporcional a su valor. Cuando el crecimiento de la función $N(t)$ en un instante t es proporcional al valor de la función en ese instante, se puede expresar mediante la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N$$

$$N(0) = N_0,$$

para una constante $\lambda > 0$.

Si se resuelve se obtiene

$$\frac{1}{N} dN = \lambda dt \Leftrightarrow \int \frac{1}{N} dN = \lambda \int dt$$

$$\Leftrightarrow \ln N = \lambda t + C_1 \Leftrightarrow N = e^{-\lambda t + C_1}$$

$$\Leftrightarrow N = e^{\lambda t} e^{C_1},$$

por lo que la ecuación del crecimiento exponencial será

$$N = N_0 e^{\lambda t},$$

donde N_0 es el valor inicial de la magnitud, λ la constante de proporcionalidad, y N el valor de la magnitud al cabo de t años.

Algunas fenómenos que crecen de forma exponencial son:

- El número de contraseñas posibles con n dígitos crecen exponencialmente con n.
- El número de miembros en poblaciones de ecosistemas cuando carecen de predador y los recursos son ilimitados, y además no existe competencia intraespecífica.
- El número de bacterias que se reproducen por fisión binaria.
- El número de células de un embrión mientras se desarrolla en el útero materno.

5.5. El carbono-14

A parte del crecimiento exponencial, de una manera similar también se pueden estudiar procesos con un decrecimiento exponencial. Un ejemplo de estos procesos es el del carbono-14, también llamado radiocarbono. Fue descubierto el 27 de febrero de 1940 por Martin Kamen y Sam Ruben.

La datación por radiocarbono es un método de datación radiométrica que utiliza el isótopo radioactivo carbono-14 para determinar la edad de materiales que contienen carbono hasta unos 50.000 años. En arqueología es considerada una técnica de datación absoluta, ya que aparece en todos los materiales orgánicos [5].

La forma en la que el carbono-14 decae es exponencial, es decir, el número de átomos decae de forma proporcional al número de átomos restantes. Este proceso se rige por la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} &\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \qquad \lambda > 0 \\ &N(0) = N_0, \end{aligned}$$

donde dN/dt representa el cociente de variación instantánea con que se desintegran los núcleos, N_0 la cantidad inicialmente presente, λ es la constante de proporcionalidad con signo negativo para expresar que es decrecimiento, y N la cantidad de núcleos radiactivos al cabo de t años [17].

Al resolver la ecuación diferencial se obtiene la ecuación de decrecimiento exponencial que es

$$\frac{1}{N} dN = -\lambda dt \Leftrightarrow N = N_0 e^{-\lambda t}$$

Otros ejemplos de procesos que se rigen por el decrecimiento exponencial son:

- La espuma de la cerveza.
- La presión, que atmosférica disminuye aproximadamente exponencialmente con el aumento de la altura sobre el nivel del mar.
- La intensidad de la radiación electromagnética como la luz, los rayos X o los rayos gamma en un medio absorbente, sigue una disminución exponencial con la distancia al medio absorbente.

Capítulo 6

Computación aproximada del número e

La expresión decimal del número e no puede ser conocida en su totalidad al ser irracional. Desde que se conoció éste número la sociedad científica ha intentado aumentar el número de dígitos conocidos. En los últimos tiempos el número de dígitos conocidos del número e ha aumentado considerablemente, y esto se debe tanto a la llegada de los ordenadores como a la mejora de los algoritmos.

Fecha	Cantidad de cifras	Realizador del cálculo
1690	1	Jacob Bernoulli
1714	13	Roger Cotes
1748	23	Leonhard Euler
1853	137	William Shanks
1871	205	William Shanks
1884	346	J. Marcus Boorman
1949	2,010	John von Neumann (on the ENIAC)
1961	100,265	Daniel Shanks and John Wrench
1978	116,000	Steve Wozniak on the Apple II
1994	10 000 000	Robert Nemiroff y Jerry Bonnell
Mayo de 1997	18 199 978	Patrick Demichel
Agosto de 1997	20 000 000	Birger Seifert
Septiembre de 1997	50 000 817	Patrick Demichel
Febrero de 1999	200 000 579	Sebastian Wedeniwski
Octubre de 1999	869 894 101	Sebastian Wedeniwski
21 de noviembre de 1999	1 250 000 000	Xavier Gourdon
10 de julio de 2000	2 147 483 648	Shigeru Kondo y Xavier Gourdon
16 de julio de 2000	3 221 225 472	Colin Martin y Xavier Gourdon
2 de agosto de 2000	6 442 450 944	Shigeru Kondo y Xavier Gourdon
16 de agosto de 2000	12 884 901 000	Shigeru Kondo y Xavier Gourdon
21 de agosto de 2003	25 100 000 000	Shigeru Kondo y Xavier Gourdon
18 de septiembre de 2003	50 100 000 000	Shigeru Kondo y Xavier Gourdon
27 de abril de 2007	100 000 000 000	Shigeru Kondo y Steve Pagliarulo
6 de mayo de 2009	200 000 000 000	Shigeru Kondo y Steve Pagliarulo
21 de febrero de 2010	500 000 000 000	Alexander J. Yee
5 de julio de 2010	1 000 000 000 000	Shigeru Kondo y Alexander J. Yee
24 de junio de 2015	1 400 000 000 000	Matthew Hebert
14 de febrero de 2016	1 500 000 000 000	Ron Watkins
29 de mayo de 2016	1 500 000 000 000	"Yoyo"
29 de agosto de 2016	5 000 000 000 000	Ron Watkins
3 de enero de 2019	8 000 000 000 000	Gerald Hofmann

Figura 6.1: Tabla del número de cifras computadas del número e.

A continuación se va a comparar la convergencia de las distintas definiciones del número e que se han visto a la hora de computarlas, y además se verán algunas maneras de computación del número e con una convergencia más rápida [19].

Los primeros dígitos del número e son:

$$e = 2,71828182845904523536028747135266249 77.$$

- La primera que se va a analizar es

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Sea $e_a = \left(1+\dfrac{1}{a}\right)^a$:

$$\begin{aligned} a = 1 &\longrightarrow e_1 = 2 \\ a = 100 &\longrightarrow e_{100} = 2,70 \\ a = 1000 &\longrightarrow e_{1000} = 2,716. \end{aligned}$$

Para $a = 1000$ solo se han obtenido dos decimales correctos, por lo que se puede afirmar que con esta definición de e la convergencia es lenta.

Para obtener una convergencia mas rápida se puede tomar

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^n$$

Demostración.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1+\dfrac{1}{2n}}{1-\dfrac{1}{2n}}\right)^{2n}\right)^{1/2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}}{\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}}\right)^{1/2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{e}{e^{-1}}\right)^{1/2} = e$$

$\square$

Si ahora se toma $e_a = \left(\dfrac{2a+1}{2a-1}\right)^a$:

$$\begin{aligned} a = 1 &\longrightarrow e_1 = 3 \\ a = 100 &\longrightarrow e_{100} = 2,7183 \\ a = 1000 &\longrightarrow e_{1000} = 2,718282. \end{aligned}$$

Con este cambio, ahora se han obtenido 5 decimales correctos con $a = 1000$, en lugar de los 2 que se habían obtenido en el caso anterior.

- Sea
$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$
Si se toma
$$e_a = \sum_{n=0}^{a} \frac{1}{n!},$$
entonces
$$\begin{aligned} a =&1 \longrightarrow e_1 = 2 \\ a =&10 \longrightarrow e_{10} = 2,71828180 \\ a =&15 \longrightarrow e_{15} = 2,718281828458. \end{aligned}$$

- Utilizando la definición en forma de fracción continua simple, es decir,
$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, \cdots],$$
si se fuesen calculando de uno en uno cada nuevo a_i, las fracciones que se irían obteniendo serían:
$$\begin{aligned} i =&1 \longrightarrow \frac{2}{1} = 2 \\ i =&2 \longrightarrow \frac{3}{1} = 3 \\ i =&3 \longrightarrow \frac{8}{3} = 2,6 \\ i =&8 \longrightarrow \frac{193}{71} = 2,7183 \\ i =&12 \longrightarrow \frac{23225}{8544} = 2,71828183. \end{aligned}$$
Para $i = 8$ se obtienen 3 decimales correctos, y para $i = 12$ se obtienen 7.

- Los aproximantes de Padé proporcionan una aproximación de una serie de potencias mediante una función racional. Deben su nombre al matemático francés Henri Padé [1863-1953], quién preparó su doctorado bajo la supervisión de Charles Hermite, y fue en su tesis doctoral en 1892 donde describió lo que se conoce como aproximación de Padé [4].

  Para obtener la aproximación de Padé de e, es necesario centrarse en la serie de potencias
$$e^z = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!}.$$
Una aproximación de Padé para e^z de tipo (m, n) es una función racional $p(z)/q(z)$ con $p(z)$ y $q(z)$ polinomios y siendo el grado de $p(z) \leq m$ y el de $q(z) \leq n$, y
$$\frac{p(z)}{q(z)} = e^z + O(z^{m+n+1})$$

cuando $z \longrightarrow 0$.

En otras palabras, los primeros $m+n+1$ coeficientes de la serie de Taylor de $p(z)/q(z)$ concuerdan con los de e^z. Además, la aproximación de Padé es única. Por lo tanto, si uno quiere estudiar la aproximación de Padé de e, se toma $z=1$ en la aproximación de e^z.

Sea $r_{m,n}(z)$ la aproximación de Padé de tipo (m,n) de e^z, tomando $z=1$ se tiene que

$$\begin{aligned}
r_{1,1}(1) &= [2,1],\\
r_{1,2}(1) &= [2,1,2],\\
r_{2,1}(1) &= [2,1,2,1],\\
r_{2,2}(1) &= [2,1,2,1,1],\\
r_{2,3}(1) &= [2,1,2,1,1,4],\\
r_{3,2}(1) &= [2,1,2,1,1,4,1],\\
r_{3,3}(1) &= [2,1,2,1,1,4,1,1],
\end{aligned}$$

por lo que se puede apreciar que los aproximantes de Padé de tipo (n,n),$(n,n+1)$ y $(n+1,n)$ parecen dar los convergentes de la fracción continua del número e.

Hermite desarrollo un método para obtener las aproximaciones de Padé usando integrales. Si reformulamos la definición de los aproximantes de Padé, se puede decir que los polinomios $p(z)$ y $q(z)$ que se quieren obtener, cuyos grados son como mucho m y n respectivamente, son aquellos tales que $q(z)e^z - p(z) = O(z^{m+n+1})$ cuando $z \longrightarrow 0$, lo que es lo mismo, la función

$$z \longmapsto \frac{q(z)e^z - p(z)}{z^{m+n+1}}$$

es holomórfica.

Para continuar, es necesario introducir el siguiente resultado.

Proposición 6.1. *Sea $r(x)$ un polinomio de grado k. Entonces existen polinomios $q(z)$ y $p(z)$ con grado$\leq k$ tales que*

$$\int_0^1 r(x)e^{zx}dx = \frac{q(z)e^z - p(z)}{z^{k+1}}.$$

Específicamente,

$$q(z) = r(1)z^k - r'(1)z^{k-1} + r''(1)z^{k-2} - \cdots$$

y

$$p(z) = r(0)z^k - r'(0)z^{k-1} + r''(0)z^{k-2} - \cdots$$

Demostración. Aplicando la integración por partes

$$\int_0^1 r(x)e^{zx}dx = \frac{r(1)e^z - r(0)}{z} - \frac{1}{z}\int_0^1 r'(x)e^{zx}dx,$$

y aplicando inducción se tiene la demostración. $\square$

Por lo tanto, para obtener los aproximantes de Padé $p(z)/q(z)$ de tipo (m,n), se necesitan polinomios $p(z)$ y $q(z)$ de grados m y n respectivamente tales que

$$z \longmapsto \frac{q(z)e^z - p(z)}{z^{m+n+1}}$$

sea holomórfica. Esto sugiere tomar $k = m+n$ en la proposición anterior. Para elegir $r(x)$ se analizan las fórmulas

$$q(z) = r(1)z^{m+n} - r'(1)z^{m+n-1} + r''(1)z^{m+n-2} - \cdots$$

y

$$p(z) = r(0)z^{m+n} - r'(0)z^{m+n-1} + r''(0)z^{m+n-2} - \cdots .$$

Como el grado de $q(z) \leq n$, $r(x)$ tiene una raíz de orden m en $x = 1$, y como el grado de $p(z) \leq m$ se tiene que $r(x)$ tiene una raíz de orden n en $x = 0$. Como el grado de $r(x)$ es $m+n$, se tiene que

$$r(x) = x^n(x-1)^m,$$

y por lo tanto,

$$\int_0^1 x^n(x-1)^m e^{zx}dx = \frac{q(z)e^z - p(z)}{z^{m+n+1}},$$

donde $p(z)/q(z)$ es la aproximación de Padé de tipo (m,n) de e^z.

Si tomando $z = 1$ y le añadimos el factor $1/n!$ se obtiene la integral utilizada en la demostración del teorema (4.5) de la representación en fracción continua del número e.

La aproximación de Padé de la función e^t sería

$$\frac{\sum_{k=0}^{m} \dfrac{(m+n-k)!m!}{(m+n)!k!(m-k)!}t^k}{\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(m+n-k)!n!}{(m+n)!k!(n-k)!}(-t)^k}.$$

Si por ejemplo se toma el caso donde $n = m$, al ir aumentando el grado de e^t se va obteniendo que

$$\left[\frac{2+t}{2-t}, \frac{12+6t+t^2}{12-6t+t^2}, \frac{120+60t+12t^2+t^3}{120-60t+12t^2-t^3}, \cdots\right].$$

De aquí se puede calcular la aproximación de e. Se toma $e = (e^t)^{1/t}$ y entonces

$$\left[\left(\frac{2+t}{2-t}\right)^{1/t}, \left(\frac{12+6t+t^2}{12-6t+t^2}\right)^{1/t}, \left(\frac{120+60t+12t^2+t^3}{120-60t+12t^2-t^3}\right)^{1/t}, \cdots\right] \tag{6.1}$$

Para mostrar la eficiencia de este método, tomando la última fórmula de (6.1), entonces

$$\begin{aligned}
&t = 1 \longrightarrow e = 2{,}718\textcolor{red}{3}\\
&t = 1/2 \longrightarrow e = 2{,}71828\textcolor{red}{2}\\
&t = 1/4 \longrightarrow e = 2{,}7182818\textcolor{red}{3}\\
&t = 1/32 \longrightarrow e = 2{,}7182818284590\textcolor{red}{7}\\
&t = 1/256 \longrightarrow e = 2{,}718281828459045235\textcolor{red}{4}.
\end{aligned}$$

Bibliografía

[1] Aigner, M. y Ziegler, G. M., *El libro de las demostraciones*, Nivola, 2005.

[2] *Catenaria*, https://es.wikipedia.org/wiki/Catenaria.

[3] Cilleruelo, J. y Córdoba, A., *La teoría de los números*, Biblioteca Mondarori, Madrid 1992.

[4] Cohn, H., *A short proof of the simple continued fraction expansion of e*, The American Mathematical Monthly,, Vol. 113, No. 1, 2006.

[5] *Datación por radiocarbono*, https://es.wikipedia.org/wiki/Datacion_por_radiocarbono.

[6] *Demostración de la irracionalidad de e*, https://es.wikipedia.org/wiki/Demostracicion_de_la_irracionalidad_de_e.

[7] Feller, W., *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones. vol 1*, Limusa, Mexico, 1996.

[8] Fresán, J. y Rué, J., *Los número trascendentes*, Catarata, Madrid, 2013.

[9] Hardy, G. H. y Wright,E. M., *The theory of numbers*, Oxford University Press, Ely House, Oxford, 1960.

[10] *La fórmula de Stirling*, https://www.gaussianos.com/la-formula-de-stirling/.

[11] Maor, E., *The Story of a Number*, Princeton University Press, 1994.

[12] Martínez de la Rosa, F., *Matemáticas, Economía y Scientific WorkPlace*, Universidad de Cádiz.

[13] Murty, M. R. y Rath P., *Trascendental Numbers*, Springer, 2014.

[14] Navarro, J., *Los secretos del número* π, RBA Contenidos Editoriales y Audiovisuales, Madrid, 2011.

[15] Olds, C. D., *The simple continued fraction of e*, The American Mathematical Monthly, Vol. 77, No. 9, 1970.

[16] Piñeiro, G.E., *Con e de extraordinaria*, RBA Contenidos Editoriales y Audiovisuales, Madrid, 2015.

[17] Ross, S. L., *Ecuaciones diferenciales*, Reverté, 1992.

[18] Sandifer, E., *How Euler dit it*, MAA Online, 2006.

[19] Sebah, P. y Gourdon X., *The constant e and its computation*, numbers.computation.free.fr/Constants/constants.html.

[20] *Steiner's calculus problem*, https://en.wikipedia.org/wiki/Steiner\%27s_calculus_problem.

[21] Sorando, J.M., *Logaritmos* matematicasmundo.ftp.catedu.es/HISTORIA/historia_logaritmos.htm.

[22] Tapia Moreno, F. J., *Historia de los logaritmos*, http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/2-2-1-logaritmos.pdf.