2012

El infinito en las Matemáticas de la Enseñanza Secundaria

Trabajo Fin de Máster

Dirigido por:

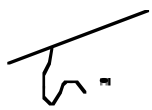
Claudia Lázaro del Pozo

Tomás Recio Muñiz

Sergio Jato Canales

Julio 2012

Vº Bº:



Claudia Lázaro del Pozo **Tomás Recio Muñiz**

Agradecimientos

El presente Trabajo fin de Máster fue realizado bajo la supervisión de D. Tomás Recio y Dª. Claudia Lázaro, a quienes me gustaría expresar mi gratitud por la labor realizada.

Así mismo quiero agradecer a D. Roberto Antúnez, profesor del I.E.S Augusto González Linares, por su aportación a mi formación como docente durante mi estancia de prácticas.

Por último, y no por ello menos importante, quiero mostrar mis agradecimientos a mi familia, en especial a Madre y Patri, y a todos l@s que comparten mis días (★★★)

"La capacidad de un individuo,

radica en el significado que le dé

a la palabra infinito" (Anónimo)

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN.

El infinito ha sido, es y seguirá siendo un tema de reflexión matemática y pedagógica. Se trata de un concepto que muchas veces contradice la lógica elemental a través de la cual interpretamos el mundo. Este hecho puede provocar cierto rechazo a su estudio y comprensión, e incluso provocar ciertos conflictos mentales.

Aún así la idea del infinito es inherente al pensamiento humano. Desde temprana edad asociamos este concepto con su parte opuesta; la percepción de la finitud que nos rodea. Incluso en nuestro lenguaje cotidiano usamos con frecuencia este término; "tener una paciencia infinita", "un espacio infinito", "infinitas veces"… Todos entendemos el significado de estas expresiones y sin embargo nos presenta gran dificultad reflexionar sobre ellas. Profundizar en el concepto de infinito nos genera un tremendo esfuerzo y requiere una gran disposición sobre ello.

Todo esto se pone de manifiesto tanto en alumnos como en docentes, a la hora de manejar este concepto en la enseñanza.

Desde los primeros años de formación escolar el infinito comienza a formar parte de nuestras estructuras mentales, ya sea asociado a procesos cíclicos (como por ejemplo la alternancia entre el día y de la noche), a procesos de conteo (por ejemplo, de números naturales) o a través del infinito geométrico (la lejanía de las estrellas o del horizonte).

El verdadero conflicto sucede al enfrentarse al cálculo infinitesimal, alrededor de los diecisiete años. Éste aparece siempre en la escena matemática, muchas veces sin preparación previa suficiente, presentando a los estudiantes conflictos difíciles de solventar.

Con todo esto, en el presente trabajo se ha descrito el camino del infinito a lo largo de la Historia, además de realizar un estudio de su presencia en la Enseñanza Secundaria.

A través del análisis de diversas cuestiones planteadas al alumnado, se han mostrado las concepciones que los estudiantes tienen sobre el concepto de infinito, describiendo sus principales dificultades de asimilación.

Por último se han propuesto una serie de posibilidades pedagógicas con el fin de facilitar la explicación y compresión de este concepto.

2. OBJETIVOS.

El presente Trabajo Fin de Máster pretende realizar un recorrido por el infinito matemático, haciendo principal hincapié en su integración en las Matemáticas de la Enseñanza Secundaria.

Para ello se plantean los siguientes objetivos:

- Examinar la presencia del infinito en los contenidos de la Enseñanza Secundaria.
- Mostrar y analizar las concepciones que el alumnado de Secundaria tiene sobre el infinito.
- Describir las principales dificultades que presenta el concepto de infinito en la Enseñanza Secundaria.
- Plantear posibilidades pedagógicas que faciliten su descripción y comprensión.

3. EL INFINITO.

3.1. CONCEPTO.

Desde la antigüedad el concepto de infinito ha resultado ser complejo de asimilar, tanto en la investigación matemática, como en la sociedad y el lenguaje. Resulta ser un término del cual se tiene cierta intuición, viéndolo como algo "que no termina" o algo "que no tiene final", pero que resulta difícil de definir.

El Diccionario de la Real Academia de la Lengua recoge las siguientes acepciones del concepto "infinito":
(Del lat. *infinītus)*.
1. adj. Que no tiene ni puede tener fin ni término.
2. adj. Muy numeroso o enorme.
3. m. Lugar impreciso en su lejanía y vaguedad. La calle se perdía en el infinito.
4. m. En una cámara fotográfica, última graduación de un objetivo para enfocar lo que está distante.
5. m. Mat. Valor mayor que cualquier cantidad asignable.
6. m. Mat. Signo (∞) con que se expresa ese valor.
7. adv. m. Excesivamente, muchísimo

Analizando estas acepciones se reflejan diferentes modos de abordar el infinito. La primera de ellas lo describe como algo que no tiene fin, y que por lo tanto existe, y como algo que no puede tener fin en el caso de que existiera. Las acepciones segunda, tercera y séptima se refieren a percepciones del concepto; algo enorme, muy lejano, con exceso… En cuanto a la cuarta se trata del concepto que se usa, en términos fotográficos, para designar distancias tras las cuales el enfoque será el mismo. Finalmente, la quinta y sexta se refieren al infinito desde la perspectiva matemática.

Se observa que, aunque todas estas acepciones se refieren a ideas de espacio y tiempo infinitos, no definen con claridad un concepto, sino más bien las cualidades que debe tener algo que sea infinito.

Para comprender mejor el término se suele recurrir al conjunto de los números naturales, cuya serie no tiene final.

Dentro de este conjunto, los números pares que, por supuesto, no son todos los números naturales, son infinitos al igual que la serie completa. Además a cada número natural le corresponde un número par. De tal modo que, paradójicamente siendo los números pares una parte del conjunto, existen tantos como números naturales, chocando con la idea lógica de que la parte no puede ser de igual tamaño que el todo.

Seguidamente, y para intentar profundizar más en el término, se hablará de los distintos tipos de infinito.

3.2. TIPOS.

El hombre, al igual que su entorno, es de carácter finito y, sin embargo, a menudo recurre al concepto de infinito, incorporándolo a su vida diaria de un modo que acaba siendo necesario para poder comprender la finitud que lo rodea.

"El hombre estudia y maneja el infinito mediante la creación matemática, que formaliza la reiteración, la comparación, la ordenación y la clasificación, procesos básicos del quehacer matemático. La reiteración y la comparación permiten alcanzar dos conceptos distintos de infinitud." (Lorenzo 2001).

A continuación se describen los diferentes tipos de infinito.

3.2.1. EL INFINITO POTENCIAL.

El infinito potencial nace de la posibilidad de hacer reiteradamente una acción sin aparente limitación. Se trata de las acciones que jamás tienen fin porque siempre hay un más allá. (Lorenzo 2001).

Para tratar de aclarar este hecho se usará de nuevo el conjunto de números naturales, a modo de ejemplo. A cada número natural le sigue siempre otro y no se puede definir un último número ya que éste tendría a su vez un sucesor. No importa como de grande sea un número natural, ya que siempre se puede definir el siguiente añadiendo una unidad.

Tener esa posibilidad de hacerlo, en este caso, de seguir generando números naturales, es lo que define al infinito potencial.

Del mismo modo se puede analizar el infinito potencial con el ejemplo de la recta. Euclides, en su obra *"Elementos de geometría"* considera a las rectas como *"segmentos cuya longitud la podemos hacer todo lo larga que queramos.".* Esta percepción de las rectas claramente hace alusión al infinito potencial. Igualmente, al anunciar que los números primos son infinitos, lo expresa diciendo *"Hay más números primos que cualquier cantidad de números primos propuesta*", evitando así considerar el infinito actual. (Gracián 2011).

Esta concepción del infinito potencial va ligada con la idea de límite, concretamente con la operación de paso al límite. Esto es así ya que estos conceptos existen a modo de tendencia o, lo que es lo mismo, en potencia.

3.2.2. EL INFINITO ACTUAL.

El infinito actual nace al considerar a éste como un objeto y aparece al superar la operación de paso al límite. (Costa y Otto 2005).

Por consiguiente esta apreciación apunta a que existen diferentes tipos de infinito, con tamaños distintos, lo que a menudo genera dificultades en su comprensión y estimación.

Siguiendo con la línea de argumentación de los conjuntos de números naturales y de los números pares se consideran que son infinitos aunque sus tamaños no sean iguales.

Aparece aquí cierto conflicto ya que se definen dos conjuntos del mismo modo, infinitos, aunque no presenten igual tamaño. Para evitar dicho conflicto se define un conjunto infinito como aquel en el que se pueda establecer correspondencia biunívoca con una parte del mismo.

3.3. EL INFINITO A LO LARGO DE LA HISTORIA.

A lo largo de la Historia el Hombre ha sentido curiosidad e incluso temor al concepto de lo infinitamente grande, relacionándolo incluso con cuestiones teológicas y/o divinas. En parte todo esto está relacionado con los sistemas físicos que le rodean, ya que éstos son finitos y no siempre el concepto de infinito se muestra a su alcance.

Las antiguas civilizaciones, como la azteca o la egipcia, poseían sistemas de numeración finitos, con una terminología que no superaba ciertos valores.

Otras civilizaciones, como los babilonios y las mayas, incluyeron numeraciones posicionales intentando representar valores con la cantidad mínima de símbolos, y aún así su sistema se veía limitado en valores.

La primera intuición sobre el concepto de infinito llegaría a través de la sucesión de los números naturales, ya que como es sabido, este conjunto presenta un primer término pero carece de uno final.

Se encontrarán las primeras especulaciones sobre lo infinito en la cultura griega. Concibieron el término, de carácter filosófico, "ápeiron" que significaba "sin límites". Su idea era que cualquier cosa existente lo es en función de sus límites. Esta noción de lo "sin límites" se refería a lo indefinido y a partir de él se formaba todo lo existente a través de ciertas limitaciones. Todo esto conllevó a asociar el término "ápeiron" con las diferentes concepciones religiosas de Dios. (Gracián 2010).

Más adelante Zenón (Elea, 490 a.C. – ídem, 430 a.C.), perteneciente a la Escuela Eleática describió una serie de paradojas que negaban la existencia del movimiento, la validez del espacio y el transcurrir del tiempo.

Aristóteles (Estagira, 384 a.C. – Isla de Chalcis 322 a.C.), influenciado por las paradojas de Zenón, realizó la distinción entre infinito actual e infinito potencial, aunque manifestó la prohibición de que en su escuela se aceptase el infinito actual. Esta percepción aristotélica se aceptaría durante los siguientes dos mil años.

Poco después Euclides (325 a.C. – Alejandría, 265 a.C.) trató el infinito de un modo sutil en sus postulados, siempre evitando nombrarlo directamente. En su obra *“Elementos de geometría”* considera a las rectas como *“segmentos cuya longitud la podemos hacer todo lo larga que queramos.”,* haciendo alusión al infinito potencial. Igualmente, toma esta actitud al expresar: *“Hay más números primos que cualquier cantidad de números primos propuesta*”.

Fue muy posteriormente cuando el hombre se acercó al concepto del infinito actual. Los matemáticos indios del siglo IX introdujeron el cero en el sistema de numeración. Consideraron que si a un quebrado con denominar cero se le sumaba o restaba cualquier cantidad, permanecía invariable. A este valor se la denominó “cantidad infinita”. Todo esto llevó a que el infinito se representase como 1/0 y que este concepto perdurara en las matemáticas árabe-medieval y más adelante en Europa. (Fedriani y Tenorio 2010)

Ya en el siglo XVII Bonaventura Cavalieri (Milán, 1598 – Bolonia, 1647), estimulado por los trabajos de Euclides, formuló la *Teoría de los indivisibles* que estudia magnitudes geométricas indivisibles o formadas por infinitos elementos de área y volumen. Describió que sumando los infinitos elementos de área de un cuerpo se obtiene su área, sucediendo lo mismo con su volumen.

También Galileo (Pisa, 1564 – Florencia, 1642) estudió lo infinitamente pequeño aunque llegó a situaciones contradictorias. Por ejemplo en 1636 logró comprobar la existencia de la misma cantidad de números cuadrados como de naturales, y ante tal hecho, su conclusión fue que todos los infinitos tienen el mismo tamaño.

A partir de aquí se empezaron a idear los procesos infinitesimales. Fueron Newton (Woolsthorpe 1642 – Londres, 1727) y Leibniz (Leipzig, 1646 - Hannover, 1716) los artífices del desarrollo del cálculo integral y diferencial. Aún así el primer matemático en emplear el símbolo ∞ para referirse al infinito fue John Wallis (Ashford, 1616 – Oxford, 1703). Más adelante, en el presente trabajo, se hablará más detalladamente sobre este hecho.

Esta aparición permitió definir el punto y la recta en el infinito, conceptos básicos de la Geometría Proyectiva, permitiendo a artistas y arquitectos pintar y dibujar rectas paralelas que coincidían en un punto que por supuesto no se veía en la realidad. Fue Gérard Desargues (Lyon, 1591 – ídem, 1661) quien definió el punto del infinito, que no era otro que en el que se cortan las rectas paralelas. Dicho punto se situaba en la línea del horizonte (Fedriani y Tenorio 2010).

Pero aún no se había definido con claridad el concepto de infinito, ni siquiera se podía concebir el infinito actual como tal. Entraron entonces en juego Georg Cantor (San Petersburgo, 1845 – Halle, 1918) y Bernhard Bolzano (Praga, Bohemia, actual República Checa, 1781 – ídem, 1848) que describieron al *conjunto finito* como aquel con un número natural de elementos y al *conjunto infinito* como aquel que no es finito. Como puede observarse estas definiciones sostienen la existencia del infinito actual, pero lo ven como la negación de lo finito.

Casi simultáneamente, en 1888, todo esto cambió ya que Richard Dedekind (Brunswick, 1831 – ídem, 1916) describió al *conjunto infinito* como aquel equivalente a una de sus partes y al *conjunto finito* como lo no infinito.

Con el concepto de infinito ya definido, siguieron apareciendo paradojas y teorías acerca del mismo. David Hilbert (Königsberg, 1862 -Gotinga, Alemania, 1943) planteó su famosa paradoja del Hotel Infinito donde describió varias situaciones en las que dicho hotel admitía nuevos huéspedes, incluso infinitos nuevos huéspedes, aunque se encontrase completo.

Más adelante, Kurt Gödel (Brünn, 1906 - New Jersey, 1978) comprobó que a partir de la *Teoría de Conjuntos* no se podía demostrar la existencia del *conjunto infinito* y el matemático Jonh Conway (Liverpool, 1937 -) relacionó los distintos tipos de infinito mediante la siguiente expresión;

∞ (infinito potencial) = Ω (infinito absoluto) .ω (infinito actual).

Como se ha podido apreciar en este paseo del infinito por la Historia, ha resultado ser un concepto difícil de alcanzar para el hombre e incluso muchas veces divinizado. Tanto filósofos como matemáticos han intentando comprender su significado y es tal su complejidad que hoy en día, sigue siendo un término complejo de comprender.

3.4. EL SÍMBOLO DEL INFINITO

A lo largo de la historia de las ciencias la ambición por resolver diferentes problemas ha favorecido la creación de abreviaturas y símbolos con el fin de facilitar el planteamiento de hipótesis y la simplificación de demostraciones y conclusiones (Reményi 2001).

En el caso del infinito, como ya se ha descrito en el apartado anterior, todo esto se complicaba debido a las dificultades de comprensión que ha generado este concepto.

Se le atribuye al matemático británico John Wallis (Ashford, 1616 – Oxford, 1703) la introducción del símbolo ∞ para representar al infinito. Mucho antes de emprender su camino por la Matemáticas, Wallis se había ganado prestigio como filósofo. Se cree que designara el símbolo ∞ a partir de la letra latina *m.* En concreto de una representación de la letra m, en cursiva, del siglo VII. Dicha escritura cursiva se utilizaba como signo del número mil y por extensión de un valor muy grande. De hecho, otros matemáticos de la época, como por ejemplo Bernhard Nieuwentijt (North Holland, 1654 – Purmerend, 1718) en su "*Analysis infinitorum",* ya utilizaban el símbolo "*m*" para referirse al infinito.

Por otro lado, se cree también que Wallis pensó en reflejar un camino sin fin, a modo de bucle.

A partir de este momento, la aparición del símbolo ∞ contribuyó a la modernización de las matemáticas. Apareció cada vez con más frecuencia a principios del siglo XVIII, tanto en la literatura matemática como en la filosófica. Se le asociada continuamente con lo infinitamente pequeño, debido al desarrollo del cálculo infinitesimal que se estaba produciendo en la época.

Fue a partir de los trabajos de Leonhard Euler (Basilea, 1707 - San Petersburgo, Rusia, 1783) cuando ∞ se convirtió en un símbolo permanente en las Matemáticas.

Ya en el siglo XIX dicho símbolo se utilizó en los procesos de paso al límite, sobre todo en series y sucesiones, llegando hasta nuestros días.

Además, el símbolo ∞ no sólo ha sido aplicado en relación a conceptos matemáticos, sino que ha transcendido a diversas áreas. Por ejemplo, en

determinados contextos religiosos paganos ha sido utilizado en sustitución del círculo que aparece sobre las imágenes de los santos representando la eternidad. (Gracián 2010)
También en el Tarot aparece reflejado en la carta del Mago, concretamente sobre la cabeza de éste.

3.5. EL INFINITO EN LAS MATEMÁTICAS DE LA ENSEÑANZA SECUNDARIA.

Desde el comienzo de la formación escolar se empieza a conocer y convivir con el infinito. Concretamente con el infinito potencial, que paulatinamente va adquiriendo reflejo en nuestras estructuras mentales, ya sea asociado a procesos cíclicos (como por ejemplo la alternancia entre el día y de la noche), a procesos de conteo (por ejemplo conteo de números naturales) o a través del infinito geométrico (la lejanía de las estrellas o del horizonte).
Se trata de una ida mental que suele estancarse y que no suele presentar crisis destacables al entrar en conflicto con la intuición, de tal modo que no supone un verdadero problema para el estudiante.
Por el contrario, todo esto cambia cuando se trata del infinito actual. Éste aparece siempre en la escena matemática, muchas veces sin preparación previa suficiente, presentando a los estudiantes unas dificultades difíciles de solventar. En concreto, este conflicto entre el infinito actual y el alumno comienza alrededor de los diecisiete años, en el estudio del cálculo infinitesimal, y se prolonga en las enseñanzas de grado universitarias del ámbito técnico-científico.
Estudios realizados, por Fishbein (1979) y Duval (1983), sobre este concepto, manifiestan que la mitad de los sujetos no aceptan la existencia del infinito actual, lo que demuestra que no se trata de una característica de madurez, si no de una visión que no cambia con la edad. Incluso profesores de Educación Secundaria afirman que el infinito actual no debe existir como tal, aunque a la

hora de impartir sus clases explican y solucionan ejercicios donde éste juega un importante papel. (Gracián, 2010).
En este sentido, muchos docentes a la hora de desarrollar explicaciones sobre la Teoría de Conjuntos, estas se ciñen a la pertenencia a un conjunto o inclusión de un conjunto en otro y no se dan explicaciones sobre el número de elementos de cada conjunto infinito (cardinalidad).
Al no tratarse percepciones como que un conjunto puede ser igual a una parte del mismo o que un conjunto acotado sea infinito no se le ofrece al alumno la posibilidad de abordar términos que vayan en contra de su intuición o lógica.

A continuación y a través de la siguiente tabla, se recogen las apariciones del infinito, tanto potencial como actual, en los contenidos del currículo de las Matemáticas de la Educación Secundaria, tanto de la Educación Secundaria Obligatoria, como de Bachillerato, según los Reales Decretos 1631/2006 y 1467/2007. Además de los contenidos que aparecen reflejados en el BOE, se incluye una breve explicación acerca de la relación de los mismos con el infinito.

Curso Académico	Contenido relacionado con el infinito
1º E.S.O	Números decimales. Relaciones entre fracciones y decimales. (Bloque: Números) – **Expresiones decimales periódicas y no exactas – Aproximaciones de cantidades con infinitos decimales**
2º E.S.O	Relaciones entre fracciones, decimales y porcentajes (Bloque: Números) - **Expresiones decimales periódicas y no exactas – Aproximaciones de cantidades con infinitos decimales** Aportaciones del estudio gráfico al análisis de una situación:

	crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos. (Bloque: Funciones y gráficas) – **Crecimiento y decrecimiento indefinido e infinito. Continuidad de las funciones en todo R** Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas. (Bloque: Funciones y gráficas) **– Coma flotante en calculadoras – Infinitos decimales - Crecimiento y decrecimiento indefinido e infinito. Continuidad de las funciones en todo R o continuidad finita**
3º E.S.O	Números decimales y fracciones. Transformación de fracciones en decimales y viceversa. Números decimales exactos y periódicos. Fracción generatriz. (Bloque: Números) - **Infinitos decimales – Decimales periódicos** Operaciones con fracciones y decimales. Cálculo aproximado y redondeo. Cifras significativas. (Bloque: Números) **Expresiones decimales periódicas y no exactas – Aproximaciones de cantidades con infinitos decimales** Representación en la recta numérica. (Bloque: Números) **Representación de números irracionales y racionales con infinitos decimales – La recta numérica como representación geométrica infinita** Análisis de sucesiones numéricas. Progresiones aritméticas y geométricas. (Bloque: Álgebra) **Infinitos términos de una progresión** Sucesiones recurrentes. Las progresiones como sucesiones recurrentes. (Bloque: Álgebra) **Infinitos términos de una progresión** Curiosidad e interés por investigar las regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números. (Bloque: Álgebra) **Estudio de conjuntos**

	numéricos infinitos Curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas. (Bloque: Geometría) **Comparación entre objetos muy pequeños y muy grandes** Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. (Bloque: Funciones y gráficas) – **Crecimiento y decrecimiento indefinido e infinito. Continuidad de las funciones en todo R o continuidad finita** Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente: dominio, continuidad, monotonía, extremos y puntos de corte. (Bloque: Funciones y gráficas) – **Crecimiento y decrecimiento indefinido e infinito. Continuidad de las funciones en todo R o continuidad finita** Formulación de conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica. (Bloque: Funciones y gráficas) – **Crecimiento y decrecimiento indefinido e infinito. Continuidad de las funciones en todo R o continuidad finita** Experiencias aleatorias. Sucesos y espacio muestral. (Bloque: Estadística y probabilidad) **Espacios muestrales como representación de un conjunto infinito**
	Intervalos. Significado y diferentes formas de expresar un intervalo. (Bloque: Números) **Intervalos infinitos o semirectas** Representación de números en la recta numérica. (Bloque: Números) **Representación de números irracionales y racionales con infinitos decimales – La recta numérica como representación geométrica infinita**

4º E.S.O Opción A	Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones. (Bloque: Álgebra) **– Regiones no acotadas – Recta paralelas** Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados. (Bloque: Funciones y gráficas) **- Crecimiento y decrecimiento indefinido e infinito de funciones. Continuidad de las funciones en todo R o continuidad finita** Estudio y utilización de otros modelos funcionales no lineales: exponencial y cuadrática. Utilización de tecnologías de la información para su análisis. (Bloque: Funciones y gráficas) **- Crecimiento y decrecimiento indefinido e infinito de funciones. Continuidad de las funciones en todo R o continuidad finita**
4º E.S.O Opción B	Reconocimiento de números que no pueden expresarse en forma de fracción. Números irracionales. (Bloque: Números) **Expresiones decimales no periódicas y no exactas – Aproximaciones de cantidades con infinitos decimales** Representación de números en la recta real. Intervalos. Significado y diferentes formas de expresar un intervalo. (Bloque: Números) **Representación de números irracionales y racionales con infinitos decimales – La recta numérica como representación geométrica infinita – Intervalos infinitos.** Interpretación y uso de los números reales en diferentes contextos eligiendo la notación y aproximación adecuadas en cada caso. (Bloque: Números) **Aproximaciones de cantidades con infinitos decimales** Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones. Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas. (Bloque: Álgebra) **– Regiones no acotadas – Recta**

	paralelas Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante ensayo-error o a partir de métodos gráficos con ayuda de los medios tecnológicos. (Bloque: Álgebra) **Crecimiento y decrecimiento indefinido e infinito de funciones. Continuidad de las funciones en todo R o continuidad finita. Comportamiento asintótico** Resolución de inecuaciones. Interpretación gráfica. (Bloque: Álgebra) **– Regiones no acotadas – Recta paralelas** Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados. (Bloque: Funciones y gráficas) **Crecimiento y decrecimiento indefinido e infinito de funciones. Continuidad de las funciones en todo R o continuidad finita** La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo. Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales. (Bloque: Funciones y gráficas) **Crecimiento y decrecimiento indefinido e infinito de funciones. Continuidad de las funciones en todo R o continuidad finita. Comportamiento asintótico** Funciones definidas a trozos. Búsqueda e interpretación de situaciones reales. (Bloque: Funciones y gráficas) **Crecimiento y decrecimiento indefinido e infinito de funciones. Comportamiento asintótico** Reconocimiento de otros modelos funcionales: función cuadrática, de proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica. Aplicaciones a contextos y situaciones reales. Uso de las tecnologías de la información en la representación, simulación y análisis gráfico. (Bloque: Funciones y gráficas) **Crecimiento y decrecimiento indefinido e infinito de funciones. Continuidad de las funciones en todo R o continuidad finita.**

	Comportamiento asintótico
Matemáticas I	Distancias en la recta real. Intervalos y entornos. (Bloque: Aritmética y álgebra) **Representación de números irracionales y racionales con infinitos decimales – La recta numérica como representación geométrica infinita – Intervalos infinitos.** Sucesiones numéricas: término general, monotonía y acotación. El número e. (Bloque: Aritmética y álgebra) **Infinitos términos de una progresión – Cifras decimales infinitas** Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. Cálculo de distancias entre puntos, puntos y rectas y dos rectas. Ángulo determinado por dos rectas. Resolución de problemas de incidencia, paralelismo y perpendicularidad. (Bloque: Geometría) **Infinito geométrico – Distancias infinitas** Funciones reales de variable real: Dominio, recorrido y extremos de una función. (Bloque: Análisis) **Crecimiento y decrecimiento indefinido e infinito de funciones - Continuidad de las funciones en todo R o continuidad finita - Comportamiento asintótico** Clasificación y características básicas de las funciones polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, parte entera, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. (Bloque: Análisis) **Crecimiento y decrecimiento indefinido e infinito de funciones - Continuidad de las funciones en todo R o continuidad finita - Comportamiento asintótico** Aproximación al concepto de límite de una función en un punto. Tendencia y continuidad. Estudio de discontinuidades. (Bloque: Análisis) **Infinito actual - Continuidad de las funciones en todo R o continuidad finita** Aproximación al concepto de derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica de la derivada de la función

	en un punto. (Bloque: Análisis) **Infinito actual** Interpretación intuitiva de las propiedades globales y locales de una función mediante el análisis de su dominio, recorrido, crecimiento, extremos, tendencia y continuidad. (Bloque: Análisis) **Crecimiento y decrecimiento indefinido e infinito de funciones - Continuidad de las funciones en todo R o continuidad finita - Comportamiento asintótico** Esbozo de la gráfica de funciones elementales. (Bloque: Análisis) **Crecimiento y decrecimiento indefinido e infinito de funciones - Continuidad de las funciones en todo R o continuidad finita - Comportamiento asintótico**
Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I	Números racionales e irracionales. Introducción a la recta real. Intervalos. (Bloque: Aritmética y álgebra) **Representación de números irracionales y racionales con infinitos decimales – La recta numérica como representación geométrica infinita – Intervalos infinitos.** Aproximación decimal de un número real. Estimación, redondeo y errores. (Bloque: Aritmética y álgebra) **Aproximaciones de cantidades con infinitos decimales** Funciones reales de variable real. Expresión de una función en forma algebraica, por medio de tablas o de gráficas. (Bloque: Análisis) **Crecimiento y decrecimiento indefinido e infinito de funciones - Continuidad de las funciones en todo R o continuidad finita - Comportamiento asintótico** Identificación de la expresión analítica y gráfica de las funciones polinómicas, exponencial y logarítmica, valor absoluto, parte entera y racionales sencillas a partir de sus características. Las funciones definidas a trozos. (Bloque: Análisis) **Crecimiento y decrecimiento indefinido e infinito de funciones - Continuidad de las funciones en todo R o continuidad finita - Comportamiento asintótico** Idea intuitiva de límite de una función en un punto. El límite como herramienta para el estudio de las discontinuidades de

	una función. (Bloque: Análisis) **Infinito actual - Continuidad de las funciones en todo R o continuidad finita** Tendencia de una función: límites infinitos y en el infinito. Esbozo de asíntotas horizontales y verticales. (Bloque: Análisis) **Infinito actual - Crecimiento y decrecimiento indefinido e infinito de funciones - Continuidad de las funciones en todo R o continuidad finita - Comportamiento asintótico**
Matemáticas II	Representación matricial de un sistema: discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Aplicación a la resolución de problemas. (Bloque: Álgebra lineal) **Sistemas de ecuaciones con infinitas soluciones** Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio. Resolución de problemas de posiciones relativas entre rectas y planos. Resolución de problemas métricos relacionados con el cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes. (Bloque: Geometría) **Infinito geométrico** Concepto de límite de una función. Cálculo de límites. Límites infinitos y en el infinito. Asíntotas. (Bloque: Análisis) **Infinito actual – Comportamiento asintótico** Continuidad de una función en un punto y en un intervalo. Tipos de discontinuidad. (Bloque: Análisis) **Continuidad de las funciones en todo R o continuidad finita - Comportamiento asintótico** Función derivada. Cálculo de derivadas. Derivada de la suma, el producto y el cociente de funciones y de la función compuesta. Aplicación de la derivada al estudio de las propiedades locales de una función y a la resolución de problemas de optimización. (Bloque: Análisis) **Infinito actual** Utilización de las propiedades globales y locales de una función para su estudio gráfico. (Bloque: Análisis) **Crecimiento y decrecimiento indefinido e infinito de funciones - Continuidad de las funciones en todo R o**

	continuidad finita - Comportamiento asintótico Introducción al concepto de integral definida a partir del cálculo de áreas encerradas bajo una curva. Teorema fundamental del cálculo. Regla de Barrow. Integrales inmediatas. Técnicas elementales para el cálculo de primitivas por partes, cambio de variable y descomposición en fracciones simples en el caso en que el denominador tenga raíces reales de orden uno. Aplicación al cálculo de áreas de regiones planas. (Bloque: Análisis) **Infinito actual – Cálculo infinitesimal** Utilización de recursos tecnológicos como apoyo en el análisis gráfico y algebraico de las propiedades de las funciones y para su representación gráfica. (Bloque: Análisis) **Crecimiento y decrecimiento indefinido e infinito de funciones - Continuidad de las funciones en todo R o continuidad finita - Comportamiento asintótico**
Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II	Interpretación del significado de las operaciones con matrices en la resolución de problemas extraídos de las ciencias sociales. (Bloque: Álgebra) **Sistemas de ecuaciones con infinitas soluciones** Inecuaciones lineales con una o dos incógnitas. Sistemas de inecuaciones. Resolución gráfica y algebraica. (Bloque: Álgebra) **Regiones no acotadas - Paralelismo** Aproximación al concepto de límite a partir de la interpretación de la tendencia de una función. Concepto de continuidad. Interpretación de los diferentes tipos de discontinuidad y de las tendencias asintóticas en el tratamiento de la información. (Bloque: Análisis) **Infinito actual - Crecimiento y decrecimiento indefinido e infinito de funciones - Continuidad de las funciones en todo R o continuidad finita - Comportamiento asintótico** Derivada de una función en un punto. Aproximación al concepto e interpretación geométrica. La función derivada

	como expresión de cambio. (Bloque: Análisis) **Infinito actual** Estudio y representación gráfica de una función polinómica o racional sencilla a partir de sus propiedades globales. (Bloque: Análisis) **Crecimiento y decrecimiento indefinido e infinito de funciones - Continuidad de las funciones en todo R o continuidad finita - Comportamiento asintótico** El problema del cálculo del área bajo una curva. Aproximación intuitiva a la integral definida. (Bloque: Análisis) **Infinito actual – Cálculo infinitesimal** Implicaciones prácticas de los teoremas: Central del límite, de aproximación de la Binomial a la Normal y Ley de los Grandes Números. (Bloque: Probabilidad y estadística) **Promedios de poblaciones de gran tamaño - Sucesión infinita de variables aleatorias independientes**

Se observa cómo a medida que avanzan los cursos académicos el infinito va apareciendo con más frecuencia en los contenidos, muchas veces de manera implícita dentro de los mismos (sobre todo el infinito potencial) y otras de un modo directo (infinito actual).

Concretamente la aparición del infinito actual surge en los primeros cursos de Bachillerato, en el bloque de Análisis, cuando los alumnos se enfrentan al cálculo infinitesimal.

Una vez obtenida esta información, a partir de aquí, el presente Trabajo Fin de Máster tratará de analizar la opinión y la impresión que produce el concepto de infinito en los alumnos de Educación Secundaria y se facilitarán diversas posibilidades pedagógicas que ayuden a su explicación y comprensión.

4. ESTUDIO DE OPINIÓN DEL ALUMNADO DEL I.E.S AUGUSTO GONZÁLEZ LINARES SOBRE EL CONCEPTO DE INFINITO A TRAVÉS DE UNA ENCUESTA.

“Los estudiantes piensan frecuentemente acerca de sus tareas matemáticas de un modo muy original, bastante diferente de lo que esperan sus profesores. Cuando esta vía de pensamiento original se muestra inesperadamente útil, admiramos su poder y decimos que el estudiante ha tenido una comprensión inusual; pero cuando, por el contrario, este modo personal de pensamiento omite algo que es esencial, decimos usualmente que el estudiante ha cometido un error. De hecho, ambos casos tienen mucho en común, en particular el dato de que las ideas en la mente del alumno no son las que el profesor espera.” (Brousseau, Davis y Werner, 1986).

4.1. MUESTRA.

El siguiente estudio, sobre la opinión del concepto de infinito del alumnado de Educación Secundaria, se llevó a cabo en el I.E.S Augusto González Linares de Santander durante el mes de abril de 2012, concretamente durante la sesión posterior al desarrollo y evaluación de la unidad didáctica *Límites y Continuidad.* Por tanto, los alumnos participantes en el estudio ya conocían sus calificaciones en dicha unidad, lo que hace que sus respuestas no estén condicionadas por la sospecha de que las mismas pudieran influir en su calificación.

En el proceso del estudio participaron 12 alumnos pertenecientes a la asignatura Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I, de los cuales 6 alumnos habían aprobado la unidad didáctica, 4 alumnos la habían suspendido y los otros no se habían presentado a las pruebas de calificación.

4.2. METODOLOGÍA.

La recogida de información para este estudio se realizó mediante un cuestionario de carácter voluntario con diversas preguntas abiertas sobre el concepto de infinito. Dicho cuestionario se muestra al final del presente Trabajo Fin de Máster a modo de Anexo.

A partir de las respuestas obtenidas se ha realizado un estudio cualitativo, sobre la visión acerca del infinito por parte de los alumnos de Secundaria, elaborándose las conclusiones oportunas.

4.3. RESULTADOS.

A continuación se muestran las respuestas dadas por del alumnado acerca de las diversas cuestiones planteadas.

Cuestión I.

a) ¿Qué es el infinito?

Alumno 1. *"Es una cantidad que no se acaba nunca y a la que no se puede llegar"*

Alumno 2. *"Una representación numérica que indica el máximo valor posible"*

Alumno 3. *"Es un conjunto de dígitos, positivo o negativo sin un valor que determine su fin"*

Alumno 4. *NS/NC*

Alumno 5. *"Un símbolo que representa una cantidad, la cual va creciendo y creciendo. Para no poner dicha cifra que va aumentando se pone ∞ ó -∞."*

Alumno 6. *"Un número inalcanzable"*

Alumno 7. *"Número que se utiliza en matemáticas"*

Alumno 8. *"Un número que no tiene fin"*

Alumno 9. *"Un número infinito de cifras (en Matemáticas)"*

Alumno 10. *"Algo que no tiene fin"*

Alumno 11. *"Es el vocablo que define un conjunto ilimitado de números"*

Alumno 12. *"El infinito representa un número o un valor muy grande. Puede ser positivo o negativo"*

b) ¿Cuántos números pertenecen al conjunto de números naturales? ¿y al conjunto de números enteros? ¿Cuál es mayor de los dos conjuntos? ¿o son iguales?

Alumno 1. *"Los números positivos. Los números positivos y negativos. Es mayor el conjunto de números naturales"*

Alumno 2. *NS/NC*

Alumno 3. *"Ambos conjuntos de números son iguales ya que no tienen ningún valor que les limite"*

Alumno 4. *NS/NC*

Alumno 5. *"Los números naturales son del 0 al 9 y los enteros son aquellos que no precisan de llevar decimales"*

Alumno 6. *"Naturales son los positivos exactos y enteros son los positivos y negativos exactos. El mayor son los enteros"*

Alumno 7. *"Infinito solo los números positivos. Es mayor el de los naturales"*

Alumno 8. *"Los números que no tienen decimales. Son iguales"*

Alumno 9. *"Infinitos números los dos. No se puede definir el mayor, puesto que no hay mayor número que el infinito"*

Alumno 10. *NS/NC*

Alumno 11. *"No se conoce exactamente. No se sabe si son mayores o iguales hasta que se demuestre si alguno de los dos o ambos tienen una cifra limitadora de números"*

Alumno 12. *"Todos los números que puedas imaginar pertenecen al conjunto de números naturales. El 0, el 1, el 2, el 3… El mayor es el conjunto de números naturales."*

c) ¿Son todos los infinitos iguales o hay infinitos mayores que otros?

Alumno 1. *"Hay unos más grandes que otros"*

Alumno 2. *"No son iguales. Hay infinitos por la izquierda e infinitos por la derecha"*

Alumno 3. *"Todos los infinitos son iguales, la única diferencia está en el signo que le precede, ya sea infinito negativo o positivo"*
Alumno 4. *NS/NC*
Alumno 5. *"Está el -∞ y el +∞ y no hay más"*
Alumno 6. *"Son todos iguales"*
Alumno 7. *"No, sólo infinito que tiende a más o menos"*
Alumno 8. *"Todos iguales"*
Alumno 9. *"Hay infinitos positivos e infinitos negativos"*
Alumno 10. *"Hay infinitos positivos e infinitos negativos"*
Alumno 11. *"En teoría hay infinitos mayores que otros pero ambos designan la misma incógnita"*
Alumno 12. *"Todos los infinitos son iguales"*

d) ¿Puede el infinito ser más infinito de lo que ya es?

Alumno 1. *"Sí"*
Alumno 2. *"Cuando es por la derecha"*
Alumno 3. *"No"*
Alumno 4. *NS/NC*
Alumno 5. *"No"*
Alumno 6. *"No"*
Alumno 7. *"No"*
Alumno 8. *"No"*
Alumno 9. *"No"*
Alumno 10. *"Sí, porque no tiene fin"*
Alumno 11. *"No"*
Alumno 12. *"No"*

e) ¿Por qué crees que se representa así: ∞?

Alumno 1. *NS/NC*
Alumno 2. *"Porque da una sensación de continuidad"*

Alumno 3. *NS/NC*

Alumno 4. *NS/NC*

Alumno 5. *NS/NC*

Alumno 6. *"Porque es un circuito cerrado al que puedes dar infinitas vueltas"*

Alumno 7. *NS/NC*

Alumno 8. *NS/NC*

Alumno 9. *NS/NC*

Alumno 10. *NS/NC*

Alumno 11. *NS/NC*

Alumno 12. *"Porque abarca todos los números"*

f) ¿Qué significa la siguiente expresión?

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Alumno 1. *"Esta expresión significa que el número al que tiende una sucesión a_n cuando n toma valores cada vez mayores es cero"*

Alumno 2. *"Tiende a infinito"*

Alumno 3. *"Límite de a_n cuando n tiende a infinito equivale a cero"*

Alumno 4. *NS/NC*

Alumno 5. *"Límite de n cuando tiende a infinito es cero"*

Alumno 6. *"Límite de a_n cuando n tiende a infinito"*

Alumno 7. *"Es la expresión de los elementos de un límite. Límite de n que tiende a infinito"*

Alumno 8. *NS/NC*

Alumno 9. *"Un límite que tiende a infinito"*

Alumno 10. *NS/NC*

Alumno 11. *"Cuando sustituimos por números sucesivamente mayores"*

Alumno 12. *"Límite cando n tiende a infinito es igual a cero"*

Cuestión II: El hotel infinito de Hilbert

Un hotel común está completo. Por tanto, si viene alguien pidiendo habitación, no se le puede alojar. Si tenemos un hotel matemático de infinitas habitaciones todas completas y viene una persona, ¿podríamos alojarla? ¿por qué? ¿Y si vinieran infinitas personas? ¿por qué?

Alumno 1. *"Yo creo que sí porque hay diferentes infinitos, unos más grandes que otros. Por lo tanto si vinieran infinitas personas se les podría alojar"*

Alumno 2. *"Sí, porque al infinito se le pueden sumar más y sigue siendo infinito"*

Alumno 3. *"Si viene una sóla persona sí podría ser alojada porque serán infinitas habitaciones más uno / Si vienen infinitas personas también podrían ser alojadas"*

Alumno 4. *NS/NC*

Alumno 5. *"En el primer caso no, porque hay tantas personas como habitaciones / No, porque dichas habitaciones infinitas se ocuparían por tantas personas infinitas"*

Alumno 6. *"Nunca pueden estar todas las habitaciones ocupadas al ser infinitos habitaciones, por tanto siempre podrían alojarse más personas"*

Alumno 7. *"Si viene una persona la podríamos alojar, ya que el número de habitaciones son infinitas"*

Alumno 8. *"Sí, porque al tener infinitas habitaciones siempre te va a quedar alguna libre / Lo mismo si vienen infinitas personas"*

Alumno 9. *"Sí, porque al haber infinitas plazas libres es imposible que estén completas / Si vienen infinitas personas, también, porque al haber infinitas plazas para infinitas personas, pues una plaza para cada persona"*

Alumno 10. *"Sí porque hay infinitas habitaciones, es decir, es imposible llenarlas / Sí porque aunque sean infinitas personas las habitaciones también son infinitas"*

Alumno 11. *"Sí, porque todavía no se ha demostrado que exista un número finito de cifras numéricas / No creo que puedan estar todas completas porque se dice que hay un número infinito de ellas"*

Alumno 12. *"Sí, porque 1 + ∞ =+ ∞ / Si, porque ∞ + ∞ = +∞"*

Cuestión III: Aquiles y la tortuga

Aquiles, llamado "el de los pies ligeros" y el más hábil guerrero de los aqueos, quien mató a Héctor, decide salir a competir en una carrera contra una tortuga. Ya que corre mucho más rápido que ella, y seguro de sus posibilidades, le da una gran ventaja inicial. Al darse la salida, Aquiles recorre en poco tiempo la distancia que los separaba inicialmente, pero al llegar allí descubre que la tortuga ya no está, sino que ha avanzado, más lentamente, un pequeño trecho. Sin desanimarse, sigue corriendo, pero al llegar de nuevo donde estaba la tortuga, ésta ha avanzado un poco más.

¿Alcanzará Aquiles a la tortuga? ¿Cuándo, cómo o dónde? ¿Por qué?

Alumno 1. *"Sí, ya que el espacio que les separa, al ser mayor la velocidad de Aquiles, será cada vez menor hasta que este la alcance y la supere"*

Alumno 2. *"La alcanzará al final del recorrido"*

Alumno 3. *"Dado que el hombre lleva mayor velocidad que la tortuga, la distancia entre ellos cada vez de reduce más. Al final tienden a acercarse pero no llegará a alcanzarla del todo"*

Alumno 4. *"Sí, dentro de algún tiempo, ya que Aquiles recorre mucha más distancia que la tortuga"*

Alumno 5. *"Sí, cuando tras seguir Aquiles a esta tortuga y recortando varios trechos hay un punto en que los dos están a la par y por velocidad ganará Aquiles"*

Alumno 6. *"Sí la alcanzará, ya que en el mismo tiempo, Aquiles avanza un trozo mucho más largo que lo que avanza la tortuga. Llegará un punto en el que Aquiles le hará falta avanzar muy poco para alcanzar a la tortuga y le será muy fácil igualarla"*

Alumno 7. *"No la alcanzará. Él siempre intenta llegar donde ha estado la tortuga, pero con el paso del tiempo la tortuga se ha adelantado un poco."*

Alumno 8. *"Sí. Cuando la distancia con la tortuga sea más corta. Ya que el hombre corre más que una tortuga, la distancia será cada vez más pequeña y algún día la alcanzará"*

Alumno 9. *"Sí la alcanzará, porque aunque la tortuga halla recorrido algo más cuando Aquiles llega a su posición anterior, ese espacio es cada vez más pequeño debido a que Aquiles es más rápido"*

Alumno 10. *"No, porque Aquiles no busca adelantarla sino llegar hasta donde está y cuando llega a donde estaba, la tortuga también se ha movido. Sólo la adelantaría si el camino no tuviera una meta porque Aquiles le recorta cada vez más camino"*

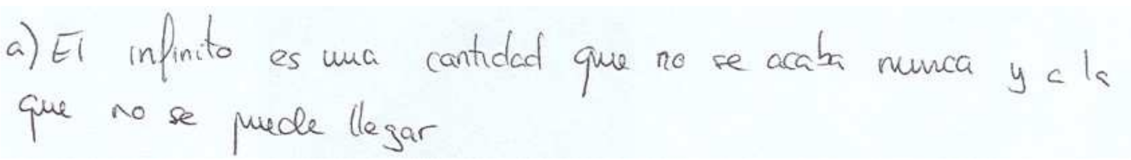
Alumno 11. *"Sí, si sigue corriendo, ya que se acercará más a la tortuga"*

Alumno 12. *"Sí, porque poco a poco irá avanzando más que la tortuga"*

4.4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS.

En base a las respuestas obtenidas en el cuestionario y mediante la observación directa en el aula durante el desarrollo de la unidad didáctica *Límites y continuidad*, se concluyen las siguientes opiniones de los alumnos de Educación Secundaria acerca del concepto de infinito:

- Los estudiantes conciben el infinito como algo que no tiene o no puede tener fin. No definen con claridad un concepto, sino más bien las cualidades que debe tener algo que sea infinito.



- Sólo unos pocos estudiantes, hablan del infinito en términos matemáticos:

El infinito es un conjunto de dígitos, positivo o negativo sin un valor que determine el fin.

Una representación numerica que indica el maximo valor posible

- La inclusión de un conjunto en otro no genera dificultades de compresión pero sí la comparación de tamaños entre conjuntos.

y El mayor es indefi nido, puesto que no hay mayor nº en ∞

no se debe resta que se demuestre si alguno de los dos o ambos tienen una cifra limitada de números

Ambos conjuntos de números son iguales ya que no tienen ningún valor que les determine.

Es mayor el conjunto de nºs naturales

Naturales son los positivos exactos y enteros son los positivos y negativos exactos. El mayor son los enteros

- Los alumnos no tienen claro si todos los infinitos son iguales o si hay infinitos más grandes que otros, mostrando dificultades en su argumentación.

En teoria hay infinitos mayores que otros
(∞ + ∞) pero ambos designan la misma
incognita

hay infinitos + y infinitos -

Todos los infinitos son iguales.

Está el $-\infty$ y el $+\infty$, no hay más

c) Todos los infinitos son iguales, la única diferencia está en el signo que lo precede, ya sea infinito negativo, o infinito positivo.

Hay unos más grandes que otros

- La mayoría de los estudiantes no creen que el infinito pueda ser más infinito de lo que ya es, y lo afirman de un modo rotundo.

- No comparten las mismas ideas intuitivas del infinito. Cada estudiante posee sus intuiciones propias que aplica según la situación y aunque, se muestren coherentes, se suelen contradecir.

Por ejemplo el alumno 6 afirma que es mayor el conjunto de números enteros y más adelante responde que todos los infinitos son iguales.

El mayor son los enteros.

Son todos iguales

También el alumno 12 se muestra contradictorio al responder que es mayor el conjunto de números naturales que el de enteros y sin embargo después indica que todos los infinitos son iguales.

El mayor es el conjunto de números naturales

Todos los infinitos son iguales.

- Aunque varios estudiantes contesten del mismo modo a ciertas cuestiones, en otras, sin embargo sus argumentos son diferentes. Lo que hace que no tengan una idea afianzada del infinito.

Los alumnos 1 y 11 coinciden en que no todos los infinitos son iguales,

Hay unos más grandes que otros

En teoria hay infinitos mayores que otros

y sin embargo no comparten la misma idea sobre si el infinito puede ser más infinito de lo que ya es:

Sí.

NO

- En general entienden el concepto de límite como la tendencia hacia ciertos valores.

Límite de an cuando n tiende a infinito equivale a cero.

tiende a infinito

Un límite que tiende a ∞

- Analizando la paradoja del hotel infinito se observa que les resulta complicada la idea de que un conjunto infinito pueda estar acotado.

Hay infinitas habitaciones, es decir, es imposible de llenar.

el infinito se le pueden sumar más y sigue siendo infinito

No pueden estar todas las habitaciones ocupadas al ser infinitas habitaciones, por tanto siempre podrían alojarse mas personas

- En la paradoja de Zenón la mayoría de estudiantes consideran que la distancia no es infinitamente divisible. Además usan su intuición o lógica para afirmar que Aquiles sí alcanzará a la tortuga aunque matemáticamente no sea posible. De este modo consideran al proceso, finito.

• Porque el hombre corre más que una tortuga, y cada vez que el hombre corre, pues la distancia con la tortuga sera más pequeña y algun día la alcanzara.

le alcanzara al final del recorrido

③ Yo creo que Aquiles sí alcanzará a la tortuga, ya que el espacio que les separa, al ser mayor la velocidad de Aquiles, será cada vez menor, hasta que este la alcance y la supere.

5. CONCLUSIONES

En el presente Trabajo Fin de Máster se ha analizado el concepto de infinito, a través del estudio de su evolución a lo largo de la Historia y haciendo principal hincapié en sus diversas apariciones en los contenidos de la Enseñanza Secundaria.
Es incuestionable que el infinito presenta un importante papel en las Matemáticas actuales y precisamente gracias al hecho de tratar al infinito desde una visión matemática ha hecho posible su mayor comprensión.

A continuación se exponen las conclusiones a las que se ha llegado tras la realización del trabajo:

- Actualmente se distinguen dos acepciones del concepto de infinito: el potencial y actual. Se considera infinito potencial cuando se asocia a la ausencia de barreras y/o límites, a lo “que no tiene fin” o a algo que siempre puede continuar. Se denomina infinito actual cuando se considera un proceso acabado o completo, en definitiva cuando se alcanzan los límites.
- Es el infinito potencial el que aparece a temprana edad, sin provocar conflictos mentales, asociado a procesos cíclicos, de conteo o a través del infinito geométrico. Sin embargo el infinito actual tarda más en aparecer y lo hace en contextos conflictivos.
- A medida que avanzan los cursos académicos de la Enseñanza Secundaria el infinito va apareciendo con más frecuencia en los contenidos, muchas veces de manera implícita dentro de los mismos (sobre todo el infinito potencial) y otras de un modo directo (infinito actual). Una de la principales apariciones del infinito actual se produce en los primeros cursos de bachillerato, en el bloque de análisis, cuando los alumnos se enfrentan al cálculo infinitesimal.
- La lógica y/o intuición se muestra como una barrera para poder abordar concepciones actuales del infinito. Esto se manifiesta, por ejemplo, a la hora de considerar que “el todo puede ser igual a una de sus partes”.

- A menudo en la Enseñanza Secundaria se evitan contextos donde aparece el infinito actual o se den situación de un proceso infinito acabado. Por ejemplo esto sucede la hora de desarrollar explicaciones sobre la Teoría de Conjuntos. Ciñéndose a la pertenencia a un conjunto o inclusión de un conjunto en otro y no dándose explicaciones sobre el número de elementos de cada conjunto infinito (cardinalidad).
- Las dimensiones geométricas consideradas a la hora de delimitar los conjuntos numéricos son un impedimento para comprender cantidades infinitas de elementos.

En cuanto a las concepciones de los alumnos de Enseñanza Secundaria sobre el infinito se concluye que:

- Los estudiantes conciben el infinito como algo que no tiene o no puede tener fin. No definen con claridad un concepto, sino más bien las cualidades que debe tener algo que sea infinito.
- La inclusión de un conjunto en otro no genera dificultades de compresión pero sí la comparación de tamaños entre conjuntos.
- Los alumnos no tienen claro si todos los infinitos son iguales o si hay infinitos más grandes que otros, mostrando dificultades en su argumentación.
- La mayoría de los estudiantes no creen que el infinito pueda ser más infinito de lo que ya es, y lo afirman de un modo rotundo.
- No comparten las mismas ideas intuitivas del infinito. Cada estudiante posee sus intuiciones propias que aplica según la situación y aunque, se muestren coherentes, se suelen contradecir.
- Aunque varios estudiantes contesten del mismo modo a ciertas cuestiones, en otras, sin embargo sus argumentos son diferentes. Lo que hace que no tengan una idea afianzada del infinito.
- En general entienden el concepto de límite como la tendencia hacia ciertos valores.
- Les resulta complicada la idea de que un conjunto infinito pueda estar acotado.

- En la paradoja de Zenón la mayoría de estudiantes consideran que la distancia no es infinitamente divisible. Además usan su intuición o lógica para afirmar que Aquiles sí alcanzará a la tortuga aunque matemáticamente no sea posible. De este modo consideran al proceso, finito.

Una vez realizado este estudio sobre el concepto de infinito y sus características y problemas dentro de la Enseñanza Secundaria se presenta la clara necesidad de implantar procesos didácticos que ayuden tanto al profesorado como al alumnado a vencer la dificultosa asimilación de dicho concepto. A continuación se describen varias propuestas para desarrollar en el aula por parte del profesorado:

- Exponer distintas interpretaciones de situaciones y conceptos relacionados con el infinito con el fin de contrarrestar ideas previas erróneas del alumnado.
- Realizar propuestas pedagógicas dedicadas al estudio y tratamiento del infinito, de tal modo que ayuden a la interiorización del concepto y a aclarar concepciones e intuiciones sobre el mismo.
- No evitar situaciones en las que aparece el infinito actual, sino aprovecharlas para mejorar su comprensión.
- Desarrollar la *Teoría de Conjuntos* de un modo que no vaya más allá de la simple explicación de pertenencia y/o exclusión entre conjuntos numéricos.
- Uso de materiales dinámicos e interactivos que ayuden a la explicación y comprensión del infinito, ya que permiten desarrollar posibilidades pedagógicas alternativas y/o complementarias al material estático. Al final del presente trabajo, mediante el Anexo II, se recoge una colección de actividades pertenecientes al *Proyecto Gauss*, y realizables a través del software interactivo libre *Geogebra,* donde aparece el concepto de infinito en varios de sus perfiles; infinito en extensión (mosaicos), infinito en proceso (series, punto fijo), infinito en tendencia (asíntotas), infinitésimo (límites, derivadas)…

6. BIBLIOGRAFÍA

Legislación:

- ESPAÑA. 2006. Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial de España,* 5 de enero de 2007, 5, pp. 677 – 773.
- ESPAÑA. 2008. Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. *Boletín Oficial de España*, 6 de noviembre de 2007, 266, pp. 45449 – 45476.

Libros:

- (Gracián 2010) Gracián, E. 2010. *Un descubrimiento sin fin. El infinito matemático.* España: RBA Coleccionables S.A. ISBN 978-84-473-6968-3
- J. Durán, A. 2010. *La verdad está en el límite. El cálculo infinitesimal.* España: RBA Coleccionables S.A. ISBN 978-84-473-6963-8
- Lavine, S. 2005. *Comprendiendo el infinito.* México: Fondo de Cultura Económica México. ISBN 968-16-7510-X
- Zellini, P. 1980. *Breve historia del infinito.* España: Ediciones Siruela, S.A. ISBN 84-7844-064-X.
- Calviño, S; Sánchez, A. 1999. *Matemáticas 2. Primer ciclo de E.S.O.* España: Editorial EVEREST, S.A. ISBN 84-241-7150-0
- Vizmanos, J; Anzola, M, Alcaide, F. 2003. *Matemáticas GAUSS. 4º Curso de Secundaria.* España: Ediciones SM. ISBN 84-348-9325-8
- Pastor, A; Rufo, M.J; Arjona, P. 1999. *Matemáticas. Primer curso de Bachillerato.* España: Editorial EVEREST, S.A. ISBN 84-241-7578-6
- Colera, J; García, R; Oliveira, M.J. 2003. *Matemáticas II.* España: Grupo ANAYA S.A. ISBN 84-667-2161-4

Artículos de revista impresa:

- (Lorenzo 2001) Lorenzo, J de. 2001. El infinito matemático. *Investigación y Ciencia*, número 23, pp 4-9.

- (Rényi 2001) Rényi, M. 2001. Historia del signo infinito. *Investigación y Ciencia*, número 23, pp 28 - 29.

Artículos de revista digital en línea:

- (Fedriani y Tenorio 2010) Fedriani, E.; Tenorio, Á. 2010. Matemáticas del más allá: el infinito. *Revista iberoamericana de Educación Matemática* [en línea], número 21, pp. 37 - 58. [Consulta: 1 Junio 2012]. ISSN 1815-0640. Disponible en: http://www.fisem.org/web/union/revistas/21/Union_021_008.pdf
- Waldegg, G. 1996. *Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. Revista Mexicana de Investigación Educativa* [en línea], Vol 1, número 1, pp. 107-122. [Consulta: 25 Mayo 2012]. ISSN 1405-6666. Disponible en: http://redalyc.uaemex.mx/pdf/140/14000108.pdf

Trabajos académicos:

- (Costa y Otto 2005) Costa, E.; Otto, B. de. 2005. *Ideología y Matemáticas: el infinito*. Universidad de Oviedo.

Páginas web:

- REAL ACADEMIA ESPAÑOLA. 2001. Diccionario de la lengua española (22.a ed.). [Consulta: 25 Mayo 2012]. Disponible en: http://www.rae.es/rae.html
- INSTITUTO NACIONAL DE TECNOLOGIAS EDUCATIVAS Y DE FORMACION DE PROFESORADO. 2012. *Proyecto Gauss* [sitio web]. España: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. [Consulta: 28 Mayo 2012]. Disponible en: http://recursostic.educacion.es/gauss/web/indice.htm
- BIBLIOTECA UNIVERSIDAD DE CANTABRIA. 2012. *Tutorial de Citas y Referencias* [sitio web]. Cantabria: [Consulta: 3 Junio 2012]. Disponible en: http://www.buc.unican.es/Servicios/formacion/CITAR/PAG0.htm

ANEXO I

I.E.S. AUGUSTO GONZÁLEZ DE LINARES *CUESTIONES SOBRE EL INFINITO* *Curso 1º de Bachillerato (M.C.S. I)* *Abril 2.012*

Cuestión I

a) *¿Qué es el infinito?*
b) *¿Cuántos números pertenecen al conjunto de números naturales? ¿y al conjunto de números enteros? ¿Cuál es mayor de los dos conjuntos? ¿o son iguales?*
c) *¿Son todos los infinitos iguales o hay infinitos mayores que otros?*
d) *¿Puede el infinito ser más infinito de lo que ya es?*

e) *¿Por qué crees que se representa así:* ∞ *?*
f) *¿Qué significa la siguiente expresión?*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

Cuestión II El hotel infinito de Hilbert

Un hotel común está completo. Por tanto, si viene alguien pidiendo habitación, no se le puede alojar. Si tenemos un hotel matemático de infinitas habitaciones todas completas y viene una persona, ¿podríamos alojarla? ¿por qué? ¿Y si vinieran infinitas personas? ¿por qué?

Cuestión III Aquiles y la tortuga

Aquiles, llamado "el de los pies ligeros" y el más hábil guerrero de los aqueos, quien mató a Héctor, decide salir a competir en una carrera contra una tortuga. Ya que corre mucho más rápido que ella, y seguro de sus posibilidades, le da una gran ventaja inicial. Al darse la salida, Aquiles recorre en poco tiempo la distancia que los separaba inicialmente, pero al llegar allí descubre que la tortuga ya no está, sino que ha avanzado, más lentamente, un pequeño trecho. Sin desanimarse, sigue corriendo, pero al llegar de nuevo donde estaba la tortuga, ésta ha avanzado un poco más.

¿Alcanzará Aquiles a la tortuga? ¿Cuándo, cómo o dónde? ¿Por qué?

ANEXO II

Actividades Educación Secundaria Obligatoria

"Uno más… son dos" - Geometría

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/algebra/progresiones/uno_mas_son_dos/actividad.html

"Sector circular" – Álgebra

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/algebra/progresiones/sector_circular/actividad.html

"Raíz cuadrada" - Álgebra

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/algebra/ecuaciones/raiz_cuadrada/actividad.html

"Punto fijo" - Geometría

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/tales_y_pitagoras/punto_fijo/actividad.html

"Circulo y circunferencia" - Geometría

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/figuras_curvas/circulo_circunferencia/actividad.html

"Rumbos (loxodromia)" - Geometría

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/cuerpos/tierra5/actividad.html

"El método de Monte Carlo" – Estadística y Probabilidad

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/estadistica_y_probabilidad/estimacion/montecarlo/actividad.html

"La aguja de Buffon" – Estadística y Probabilidad

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/estadistica_y_probabilidad/estimacion/aguja_buffon/actividad.html

"Mosaicos periódicos" - Geometría

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/teselados/aperiodicos/actividad.html

"Dardos y cometas" - Geometría

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/teselados/dardos_cometas/actividad.html

"Los 17 grupos de mosaicos periódicos" - Geometría

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/isometrias/mosaicos/actividad.html

"Los 7 grupos de frisos" –Geometría

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/isometrias/frisos/actividad.html

Actividades Bachillerato

"Límites laterales y continuidad" - Análisis

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/bach/actividades/funciones/limites_continuidad/limites/actividad.html

"Calculadora de límites de funciones" - Análisis

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/bach/actividades/funciones/limites_continuidad/calculadora_limites/actividad.html

"Aquiles y la tortuga" - Análisis

http://www.iespravia.com/rafa/zenon/index.html

"Teorema del valor medio" - Análisis

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/bach/actividades/funciones/derivadas_integrales/teorema_valor_medio/actividad.html