**Facultad de Educación**

**MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA**

# Aspectos necesarios cuando se diseñan actividades para el aprendizaje con geometría dinámica.

# Necessary aspects when designing activities for learning with dynamic geometry.

**Alumna: Leticia Treceño Cotero**

**Especialidad: Matemáticas**

**Director: Mario Fioravanti Villanueva**

**Curso académico: 2018/2019**

**Octubre, 2019**

**VºBº Director:**

**Mario Fioravanti Villanueva**

A pesar de haber empleado términos genéricos siempre que ha sido posible, en diversas ocasiones se ha empleado el masculino para referirnos a ambos sexos, sin que esto signifique un uso sexista del lenguaje ni las implicaciones que este conlleva.

(Fernández-Fuentes, Lázaro-Visa, 2018)

## Resumen

A lo largo de las últimas décadas, se ha vivido un gran desarrollo de las tecnologías y con ellas la sociedad se ha adaptado a adquirir los aprendizajes empleándolas. A través de estos cambios, los docentes se han amoldado a las nuevas situaciones tratando de llevar a las aulas estos cambios. Aunque cada vez es más común utilizar las nuevas tecnologías para apoyarse en las explicaciones teóricas, surge una duda, realmente son bien empleadas estas herramientas o, por el contrario, sólo se ha informatizado la misma didáctica, pero no se ha cambiado la metodología para que el alumnado adquiera su aprendizaje desde otra perspectiva. En este trabajo se plantean aquellos aspectos necesarios al utilizar tareas matemáticas empleando *softwares* de geometría dinámica para ayudar a los estudiantes a comprender mejor la geometría aumentando su motivación y su interés.

Palabras clave: Geometría dinámica, tareas matemáticas, tecnología y GeoGebra.

## Abstract

Over the last few decades, there has been a great development of technologies and with them society has adapted to acquire the learnings using them. Through these changes, teachers have adapted to new situations trying to bring these changes into the classrooms. Although it is increasingly common to use new technologies to rely on theoretical explanations, a doubt arises, just actually well used or, on the contrary, only the same didactics have been computerized, but the methodology for students to acquire their learning from a different perspective. This work raises the necessary aspects when using mathematical tasks using dynamic geometry software to help students better understand geometry by increasing their motivation and interest.

Key words: Dynamic geometry, mathematics tasks, technology and GeoGebra.

# Índice

# 1. Introducción

El gran desarrollo de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) que se ha vivido en las últimas décadas conduce a que deben ser incluidas y han de tenerse en cuenta en el currículo ya que permiten realizar actividades que pueden mejorar el aprendizaje de los alumnos. Por otra parte, las instalaciones de los centros educativos están cada vez más actualizadas, hecho que se puede aprovechar para que el alumnado adquiera un proceso de aprendizaje desde otra perspectiva.

El currículo en la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria incluye el uso de TICs dentro del área de las matemáticas: “Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.” (Decreto 38/2015, de 22 de mayo, que establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria, 2015, Anexo I, apartado 26). Una aplicación de geometría dinámica es un *software* que permite construir figuras libremente donde los elementos están relacionados entre sí, con la propiedad de que si se arrastra alguna parte, el resto responde dinámicamente conservando las conexiones. Así se pretende realizar la integración curricular de las TIC como el proceso de hacerlas parte del currículo, permeándolas con los principios educativos y la didáctica que conforman el engranaje del aprender (Sánchez, 2002, p. 2).

Los docentes, para explicar la geometría, empleamos las herramientas de las que disponemos, siendo la más frecuente hasta hace unos pocos años la pizarra. Teniendo esto en cuenta, el profesorado consigue su objetivo con gran dificultad, un buen dibujo sobre el que poder apoyarse para que los discentes sean capaces de comprender, relacionar y visualizar el temario que se está explicando. Esto se debe a que, aun siendo riguroso y meticuloso, resulta muy complicado dibujar en la pizarra con exactitud y de forma clara una construcción geométrica (Morante y Vallejo, 2011, p. 111).

Dentro de las aplicaciones informáticas de geometría dinámica existentes se ha decidido trabajar con GeoGebra porque se trata de un *software* libre y su instalación es gratuita; además, permite trabajar de manera personalizada realizando construcciones analíticas y geométricas pudiendo programar actividades con antelación (Losada, 2007, p. 223); así mismo, tras descubrir la existencia de GeoGebra en este Máster, he experimentado que ayuda a comprender con mayor claridad los conceptos, así como a aumentar las competencias en TIC y de visión espacial.

En un principio la intención fue realizar una pequeña investigación para el trabajo empleando el uso de la herramienta de geometría dinámica GeoGebra dentro del aula en el centro de prácticas asignado, un centro de personas adultas (CEPA) situado en Santander.

Al inicio del período de prácticas intenté centrar la unidad didáctica enfocándola de tal manera que me permitiera realizar esa pequeña investigación sobre Trabajo Final de Máster (TFM) pensado en alguna unidad relacionada con la geometría para emplear GeoGebra, pero dado el cambio que ha experimentado el currículo en la enseñanza de personas adultas, en 1 ESPA (Primero de Educación Secundaria para Personas Adultas) ya no se imparte geometría y el nivel en el manejo de tecnologías resultó ser muy bajo. Debido a esto, el enfoque del trabajo se modificó.

Sin querer cambiar el foco sobre el diseño de las actividades de demostración empleando sistemas de geometría dinámica (SGD en adelante), el planteamiento del trabajo ha pasado de ser una pequeña investigación *in situ* a otra en la que se centra sobre el estudio de diferentes casos ya investigados para así llegar a una conclusión sobre cómo se deben emplear los SGD en las aulas de secundaria y bachillerato, y si hubiera que centrarse en los momentos previos a introducirlo teniendo en cuenta las diferentes casuísticas que se pueden dar a la hora de aprender geometría en adolescentes.

Un SGD es un programa informático que permite crear y manipular construcciones geométricas, manteniendo sus relaciones geométricas invariantes. Posteriormente, en la sección 3.1. “Sistemas de geometría dinámica (SGD)”, se ampliará esta información.

## 1.1. Objetivos y estructura

En este trabajo se pretende presentar algunos aspectos necesarios que se deben tener en cuenta a la hora de elegir las actividades de demostración para ser desarrolladas con programas de geometría dinámica, así como proponer algunas actividades que sirvan al profesorado de apoyo en el aula a la hora de explicar los contenidos referentes a lugares geométricos. Con ello se procura que las tareas sirvan además para el alumnado como referencia en casa a la hora de reforzar el tema de estudio, de esta forma si un alumno tuviera la necesidad de emplear mayor tiempo para la comprensión de los conceptos tiene la oportunidad de hacerlo a su ritmo.

Por consiguiente, este trabajo se estructura comenzando con una justificación teórica de la propuesta, donde el foco estará puesto en la importancia del aprendizaje en el alumnado, es decir, se centra en cómo se pueden acercar los conceptos geométricos empleando los SGD, así como los beneficios que otorga el empleo de GeoGebra dentro del aula.

Una vez realizada la justificación de la propuesta se analiza el tema de estudio teniendo en cuenta tanto el nivel de los contenidos como las dificultades que encuentra el alumnado a la hora de enfrentarse a las tareas matemáticas.

Posteriormente, se introduce la herramienta GeoGebra, así como varias actividades donde el alumnado puede ponerse a prueba y trabajar diferentes teoremas focalizados en lugares geométricos.

Finalmente se extraen una serie de conclusiones, se incluyen las consultas bibliográficas que se han utilizado, así como un anexo para ampliar la actividad planteada.

## 2. Justificación

Según la teoría de Vygotski (1981, citado por Del Rey, R., Prados, M.M. y Reina, M.C., 2014, p. 36) acerca del funcionamiento psicológico y el aprendizaje humano que se da a través de los procesos de desarrollos sociales e interactivos, o dicho de otra manera, acerca de cómo nos relacionamos en la vida social, conduce a un aprendizaje denominado por este autor como interiorización, es decir, un proceso de transformación que conlleva cambios en la estructura y en la asimilación de los contenidos. En este trabajo, la modificación estructural que ayuda a interiorizar los lugares geométricos se puede alcanzar a través del diseño de las actividades de demostración empleando un SGD. También asegura que en los procesos de enseñanza-aprendizaje, no aprendemos solos sino de y con nuestros semejantes, incluso dentro de las aulas. Si a lo largo de las explicaciones teóricas de la geometría nos apoyamos en un SGD, cuando los alumnos tengan que utilizar este tipo de programas ya estarán familiarizados con ellos y no supondrá una barrera añadida en su interiorización. Asociado a esto, Vygotsky propuso el concepto de zona de desarrollo próximo (ZDP), que como dicen Del Rey, R., Prados, M.M. y Reina, M.C. (2014, p. 37) es la interacción entre un alumno y otra persona con mayores nociones sobre una tarea, donde a través de la interacción entre ambos, el primero adquiere el dominio para realizar la tarea a través de la ayuda del segundo.

A estas ayudas Bruner (1978) las denominó “andamiaje”, ya que son unos andamios metafóricos, que se construyen para guiar al alumno en la resolución de la tarea y tras haberse apoyado en esas “estructuras” cuando el estudiante sea capaz de realizar el ejercicio por el mismo, el docente deberá retirar paulatinamente los apoyos hasta que finalmente ya no sean necesarios.

Desde la llegada de los SGD, los docentes de matemáticas han tratado de emplearlos para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la materia. En este trabajo nos centraremos en el aprendizaje de la geometría y cómo a través de programas que permiten trabajarla de forma dinámica, mejora la interiorización de conceptos, así como el desarrollo de otras capacidades.

Los SGD permiten a los usuarios construir objetos geométricos con facilidad, si lo comparamos con los tediosos formatos de lápiz y papel que se utilizan tradicionalmente en la enseñanza y el aprendizaje. No obstante, los beneficios de trabajar con un SGD van más allá de crear objetos con facilidad. Poder emplear las TIC facilita cambiar la forma en la que se interactúa con los objetos geométricos, además de la forma en la que interactúa el docente con el alumnado (Iranzo y Fortuny, 2008).

Numerosos investigadores han demostrado que los SGD ofrecen a los estudiantes oportunidades para considerar relaciones invariantes a través del arrastre, pudiendo llegar a hipótesis y conclusiones relacionadas. Emplear actividades en estos entornos puede llegar a ser una vía poderosa para que el alumnado explore y justifique las relaciones geométricas al tiempo que desarrolla su comprensión y apreciación del ejercicio (Trocki y Hollebrands, 2018, p. 111).

Aparece entonces la necesidad de ofrecer tareas que guíen y requieran que los discentes las aprovechen para mejorar sus argumentos explorando, conjeturando y justificando conclusiones. No es suficiente pedir al alumnado que justifique un teorema a través de un SGD, sin ofrecer orientación sobre cómo hacerlo. Aunque surge una pregunta para los interesados en la actividad matemática y la capacidad de argumentar que posee el estudiante en estos entornos: ¿cómo se puede conseguir a través del currículo en general y de las tareas matemáticas en particular orientar a los alumnos para aprovechar las ventajas singulares de los SGD de tal manera que lleguen a la justificación matemática?

Trocki y Hollebrands (2018) llegan a la premisa de que se puede conseguir a través del desarrollo de estrategias que conduzcan a explorar la exactitud de una afirmación diseñando experimentos que prueben la validez de dicha afirmación.

Atendiendo a lo mencionado anteriormente, aplicar los SGD dentro del aula facilitará a los alumnos alcanzar su aprendizaje de forma atractiva, diferente y motivadora además de modificar la dinámica rígida del proceso de enseñanza-aprendizaje a través de los libros y del formato lápiz y papel.

## 3. Marco teórico

A lo largo de este apartado se muestra la utilidad de la geometría dinámica empleando SGD, concretamente GeoGebra, en la demostración de actividades de lugares geométricos. Para ello, es importante conocer aquellos conceptos y definiciones que conllevan al desarrollo de esta.

El significado etimológico de la palabra geometría (medida de la tierra) se relaciona con las actividades reconstructivas de las delimitaciones parcelarias que sufrían inundaciones por las crecidas del río Nilo en la antigüedad.

Con el paso del tiempo, en la época de los griegos, la geometría pasó a formar parte del mundo de las formas. Es aquí donde se establecen sus componentes elementales, así como las relaciones y combinaciones entre los mismos.

La geometría se centra en objetos conocidos como punto, recta, triángulo, polígono, etc. Dichos términos denotan las "figuras geométricas", las cuales son consideradas como conceptos, entidades idealizadas o representaciones generales para una categoría de objetos (Godino y Ruíz, 2003).

Dentro de las matemáticas, la geometría es uno de los temas que adquiere más importancia para la humanidad y su desarrollo, ya que, está relacionado directa o indirectamente con actividades variadas que se realizan para el progreso de la sociedad, el estudio o para la recreación.

Es importante y necesario estudiar la geometría, puesto que se puede entender como el idioma universal que permite describir y construir el mundo del ser humano, así como transmitir la percepción a través de ella. Además, Gamboa y Vargas (2013, p. 75) aseguran que la geometría se constituye en el lenguaje a través del cual entendemos nuestra realidad. Por otro lado, a través del estudio de esta se adquieren beneficios cognitivos, así como habilidades a la hora de comprender otras áreas como las sociales, culturales, científicas y tecnológicas.

El concepto de geometría dinámica viene dado por Nick Jackiw y Steve Rasmussen: "En sí es un espacio virtual en el cual se construyen libremente figuras siguiendo una serie de pasos y donde cada elemento depende uno del otro en relación de lo que se quiera hacer” (Goldenberg y Cuoco, 1988).

Los docentes en general y los que se dedican a la enseñanza de las matemáticas en particular, han de contar con una base de conocimientos amplia para poder servir de guía en el proceso de enseñanza-aprendizaje que se vive en la actualidad, ese que está dotado de nuevas tecnologías. Dentro del papel de guía, el profesor debe preguntarse cómo va a ser capaz de transmitir esos conocimientos a través de la geometría dinámica, empleando el uso de los SGD. La respuesta a esta importante pregunta se puede encontrar en las tareas matemáticas.

Doyle (1988) detectó dos tipos diferentes de tareas a través de su investigación sobre las características de estas relacionadas con el estudiante, a las cuales denominó, por un lado, las comunes o conocidas y por otro las innovadoras, refiriéndose en la última a que los alumnos deban tomar decisiones sobre lo que van a hacer y cómo lo van a hacer. Con los SGD, las tareas pueden ser estructuradas de forma que se consigan enlazar las explicaciones teóricas con las experiencias prácticas que justifican las relaciones y los teoremas geométricos, de modo que el alumnado comprenda los conceptos y procesos matemáticos que se estén trabajando (Trocki y Hollebrands, 2018, p. 112). Posteriormente, en el apartado 3.2. “Tareas geométricas con SGD” se ampliará el concepto de tarea matemática.

A través de la literatura sobre diferentes estudios relacionados con las demostraciones que se realizan en los SGD, el proceso de las actividades comienza con una fase de exploración y termina con una fase en la que el alumno realiza una explicación. Sin embargo, se llega a la conclusión de que apenas se tiene en cuenta el diseño de las tareas (Fahlgren y Brunström, 2014).

Desde el punto de vista docente, es importante tener muy presente el diseño de las actividades que se requieren plantear a través de los SGD, por ello en este trabajo, como ya se ha comentado anteriormente, se tendrán en cuenta las fases anteriores a la construcción de la tarea para terminar planteando actividades que sirvan de ejemplo ilustrativo.

### 3.1. Sistemas de geometría dinámica (SGD)

Con la aparición de las TIC y la revolución tecnológica, llegaron numerosas investigaciones sobre los SGD para poder incorporarlos en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Buena parte de estos estudios están de acuerdo en el cambio que los SGD han introducido en la naturaleza de la geometría, ya que se aprecia como cambia dentro del entorno dinámico comparándolo con el formato que se empleaba del lapicero y el papel, el formato tradicional.

Los SGD según Miranda (2005) son aquellos que permiten distinguir entre el dibujo y la construcción de este, es decir, posibilitan interactuar con las construcciones realizadas, haciendo que las relaciones y las propiedades geométricas se mantengan. El procedimiento no es otro que mover un elemento libre y observar si la relación geométrica se mantiene, como se puede apreciar en la Figura 1.

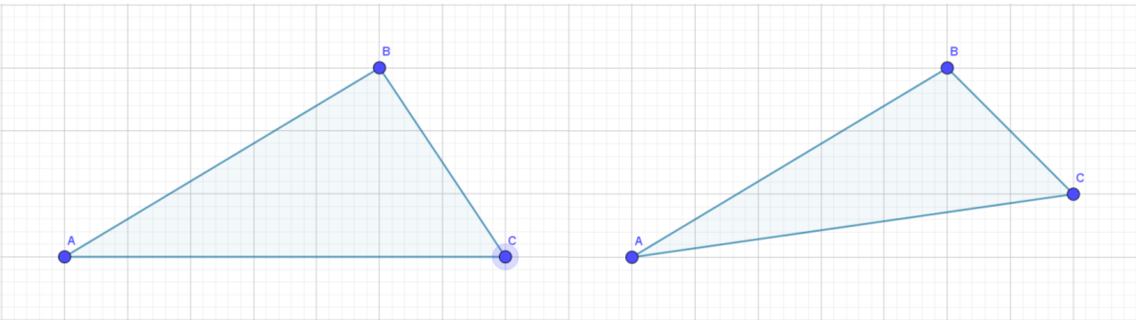


Figura 1. Ejemplo creado con un SGD, GeoGebra. Elaboración propia.

En el ejemplo anterior, se parte de un polígono creado con GeoGebra, el situado a la izquierda. Si decidimos mover uno de sus puntos, C, la figura se modifica como se aprecia a la derecha, manteniendo la relación que habíamos creado, un polígono de tres lados.

Además, los SGD poseen una pantalla gráfica a través de la cual los alumnos, pueden dibujar objetos geométricos primitivos (puntos, rectas, segmentos, etc.) y asignar relaciones geométricas entre ellos (perpendicularidad, paralelismo, etc.) a partir de un catálogo prefijado. De esta manera se generan construcciones geométricas más o menos complejas en las que los objetos pueden ser seleccionados por el usuario y arrastrados por la pantalla, manteniendo las relaciones geométricas establecidas en la construcción (González-López, 2001).

La formación en geometría tradicional imita el registro escrito, histórico y evolutivo de la disciplina a través de la deducción lógica, en la que una colección de declaraciones probadas crece desde una base que se acepta sin que esta necesite ser demostrada. Sin embargo, los matemáticos que documentaron estas pruebas deductivas probablemente emplearon su imaginación al considerar varias formas de objetos geométricos, mientras que al mismo tiempo consideran qué relaciones deben ser ciertas siempre. La actividad matemática que utiliza SGD a menudo se basa en la experiencia y en la observación de los hechos, ya que los alumnos forman y prueban conjeturas a través de la medición y el arrastre, imitando así el juego matemático de la imaginación. Con ello, surge un desafío de cómo usar los recursos tecnológicos para crear y justificar hipótesis utilizando la herramienta de un SGD.

A lo largo del trabajo consideramos que la tarea matemática enfocada en la geometría es la herramienta que el docente debe emplear para servir de guía en el desarrollo del aprendizaje de los alumnos. Por ello se debe tener en cuenta cómo se va a plantear la actividad, para qué se va a desarrollar y a quién va dirigida. En el apartado 3.2. “Tareas geométricas con SGD” se detallan estas consideraciones, atendiendo a las siguientes reflexiones: ¿cómo se puede alcanzar esta herramienta? ¿qué características se deben tener en cuenta a la hora de establecer la tarea?

### 3.1.1. GeoGebra

En este apartado se explican las características principales del *software* de geometría dinámica GeoGebra. También, se aclara el motivo de la elección de esta y no de otra posible herramienta.

A través del apartado “Acerca de GeoGebra[1]” de su página web se encuentra la definición:

> “GeoGebra es un *software* de matemáticas para todo nivel educativo. Reúne dinámicamente geometría, álgebra, estadística y cálculo en registros gráficos, de análisis y de organización en hojas de cálculo. GeoGebra, con su libre agilidad de uso, congrega a una comunidad vital y en crecimiento. […] Dinamiza el estudio. Armonizando lo experimental y lo conceptual para experimentar una organización didáctica y disciplinar que cruza matemática, ciencias, ingeniería y tecnología (STEM: Science Technology Engineering & Mathematics). La comunidad que congrega lo extiende como recurso mundial, ¡potente e innovador para la cuestión clave y clásica de la enseñanza y el aprendizaje!”

Además, dispone de una interfaz intuitiva y ágil; se trata de una herramienta que permite crear recursos de aprendizaje interactivos; se encuentra disponible en diferentes idiomas y su código abierto está disponible para usos no comerciales, lo que nos permite acceder a él de manera gratuita. Esto hace que el departamento no tenga que comprar una licencia para poder trabajar con el programa en las aulas.

A través de la propia página de GeoGebra se ofrecen diferentes recursos para el aula distribuidos por áreas como el álgebra, la aritmética, el cálculo, la estadística, funciones, geometría, probabilidad y trigonometría; así como tutoriales. En cuanto a las aplicaciones, dispone de calculadora gráfica, geometría, graficadora 3D y se puede emplear el programa en línea o descargar en cualquier dispositivo gratuitamente.

En el mercado existen más *softwares* que permiten realizar actividades geométricas dinámicas como Cabri-Geometre, Sketchpad, Cinderella, R y C (regla y compás), etc. Como ya se ha mencionado, en este trabajo se ha decidido trabajar con GeoGebra porque, aunque se trate de un programa similar a Cabri

[1] https://www.geogebra.org/

en cuanto a instrumentos y posibilidades, la herramienta elegida incorpora elementos algebraicos y de cálculo.

Por consiguiente, se aprecia una ventaja sobre otros programas de geometría dinámica que es la dualidad en pantalla, esto implica que una expresión introducida en una de las ventanas, la algebraica, se corresponde con un objeto en la otra ventana, la geométrica y viceversa; asimismo si se desea, se puede ocultar la ventana que se requiera, como vemos en las Figuras 2 y 3. Además, el uso de este programa supone que puede ser empleado en todos los niveles educativos; es multiplataforma, se puede utilizar en cualquier dispositivo desde ordenadores pasando por móviles o tabletas electrónicas; y es capaz de crear páginas web o crear formatos HTML, con lo que, si un alumno necesitara continuar una actividad propuesta dentro del aula en su casa, puede retomar dicha construcción sin complicaciones trabajando a su ritmo.

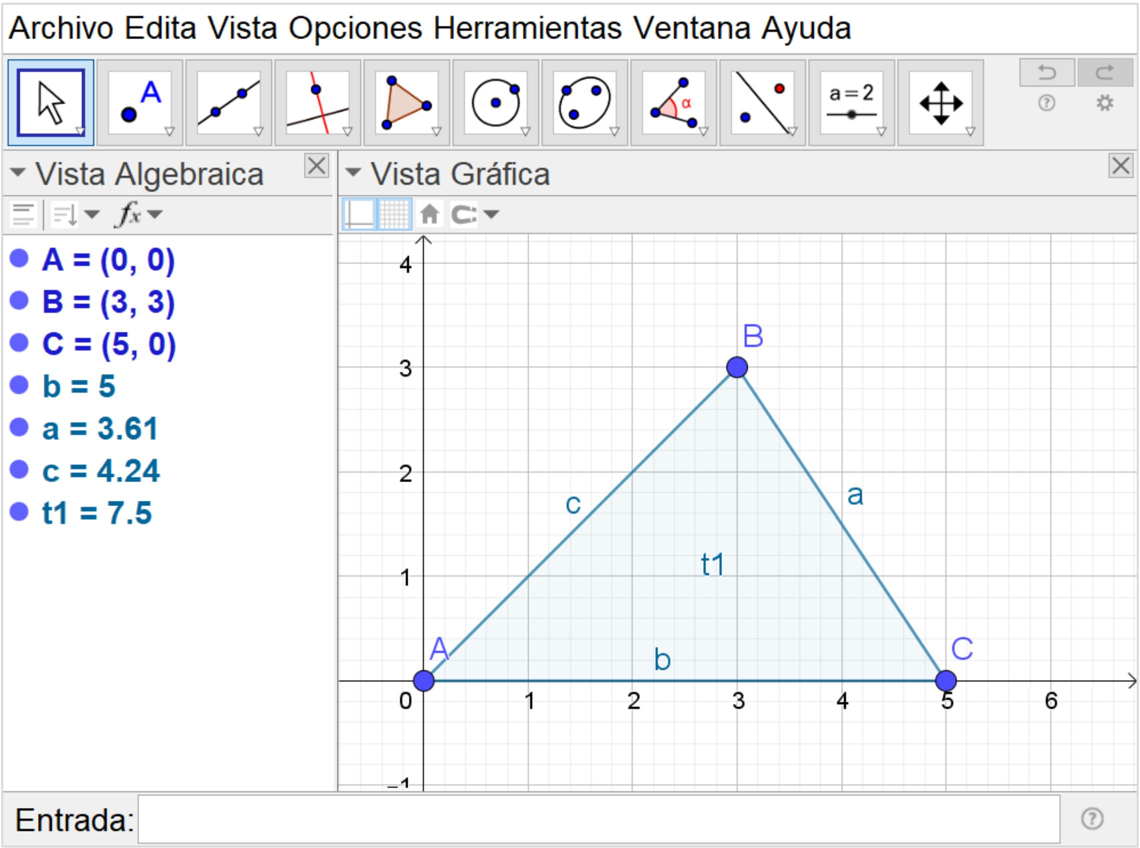


Figura 2. Ventanas algebraica y geométrica vistas en la misma pantalla, GeoGebra. Elaboración propia.

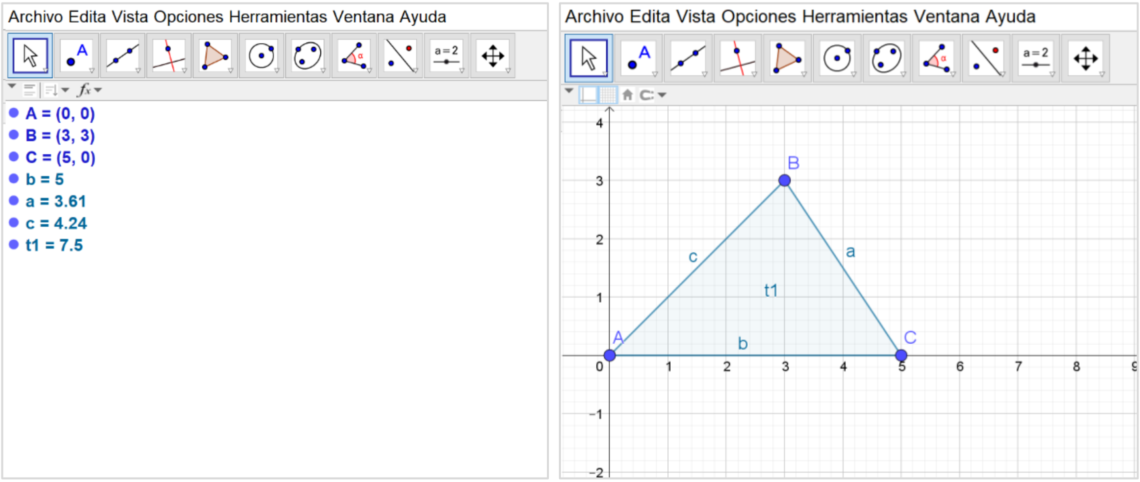


Figura 3. Ventanas algebraica y geométrica vistas en diferentes pantallas, GeoGebra. Elaboración propia.

### 3.2. Tareas geométricas con SGD

Una tarea matemática dentro de un SGD se define como una combinación de pautas que conducen al alumno a través de apartados para que sus diseños geométricos puedan modificarse logrando así los objetivos de aprendizaje específicos. El esbozo de la actividad puede ser construido previamente por el docente, parcialmente construido con la expectativa de que el alumno posteriormente ejecute composiciones adicionales, o no se construirá previamente con lo cual el estudiante debe realizar el objeto por completo.

Para que las tareas matemáticas en general o tareas geométricas en este estudio resulten apropiadas en los SGD y fomenten la capacidad de los estudiantes para explorar, hacer conjeturas, verificar, explicar y generalizar; su diseño ha de tener presente tanto las fases anteriores a la construcción de la actividad, como a las de después. Para ello, Leung (2011) sugiere un modelo epistémico de diseño de tareas, es decir, a través de ayudas visuales, en un entorno rico en tecnología, donde los estudiantes puedan participar en actividades que incluyan exploración, reconstrucción y explicación.

Por otro lado, Fahlgren y Brunström (2014) sostienen que los SGD proporcionan oportunidades para actividades matemáticas como la exploración, la conjetura, la verificación y la explicación.

Lo primero que se debe tener en cuenta para crear una tarea matemática es la diversidad de los grupos que existen en las aulas, es decir, lo diferentes que pueden ser unos grupos de alumnos frente a otros. Con esto se llega a que en función del nivel del que parta el grupo, esto influirá a la hora de realizar la actividad matemática que se tenía programada. Además, las declaraciones, el razonamiento y las expresiones que se usen en las tareas han de ser establecidas por el docente junto con los discentes en cada aula.

A fin de que una actividad matemática dentro de la geometría dinámica proporcione una enseñanza efectiva se deberán plantear tareas que salgan de la rutina, con algo de dificultad para que obligue a los estudiantes a reflexionar sobre los objetivos que se quieren conseguir y sobre los procedimientos que pondremos en marcha, como el estudio de lugares geométricos.

De esta forma, el alumnado aprenderá a planificar, a supervisar y a evaluar su propio aprendizaje, y la labor docente será la de guiar a los alumnos en ese aprendizaje evitando que se pierdan. Para ello, las clases deben convertirse en espacios de reflexión donde se realicen ejercicios procedimentales de cara a adquirir esas destrezas, pero también en los cuales se puedan desarrollar esos procedimientos aprendidos en problemas que aborden otros fines. Hay que aprender los procedimientos, pero también hay que saber relacionarlos a la hora de solucionar un problema y ahí es donde se pone en práctica la planificación, la supervisión y la evaluación de su propio aprendizaje. A medida que pase el tiempo, la necesidad que los alumnos tienen del profesor como guía irá disminuyendo hasta que sean capaces de aprender autónomamente (Del Puy M. y Pozo J.I., 2010).

Dentro de la tarea matemática, para poder estructurarla, se necesita conocer las partes que actúan en ella. Por un lado, está la solicitud (en inglés *prompt*), que se define como pregunta o instrucción relacionada con un diseño que requiere una respuesta verbal o escrita; es posible que también requiera una acción tecnológica, como en la forma de un dibujo, construcción, medición o manipulación del boceto. Las tareas que contienen indicaciones que coordinan las acciones tecnológicas con la profundidad matemática indican que la tarea es de mayor calidad según los estudios. En función de la codificación que se plantee teniendo en cuenta los diferentes niveles de profundidad matemática y el tipo de acciones tecnológicas, se alcanza una calidad en mayor o menor medida.

De acuerdo con Smith y Stein (1998); y Zbiek *et al*. (2007), las tolerancias para la profundidad matemática están referenciadas en los niveles de 0 a 5. El código cero sirve para reconocer la necesidad de fidelidad matemática; se entiende por fidelidad matemática el hecho de que la construcción presentada se ajusta a las propiedades matemáticas deseadas y respeta las convenciones generalmente aceptadas. Los niveles uno y dos hacen referencia a la memorización; en cuanto a los códigos de tres y cinco reflejan recomendaciones para realizar tareas generando hipótesis y pruebas en los SGD; mientras que el nivel cuatro de profundidad matemática requiere que los estudiantes expliquen los conceptos matemáticos, procesos o relaciones del diseño. Este código también se basa en investigaciones que enfatizan la necesidad de que los estudiantes expliquen lo que notan cuando utilizan un SGD.

Los códigos de acción tecnológica son los referenciados por las letras A, B, C, D, E y F. De tal manera que los códigos A, B y C reflejan cómo se pueden emplear los SGD para imitar acciones que tradicionalmente se han hecho con lapicero, papel y un dispositivo de medición; el código D habla del potencial de los SGD para cambiar la forma en que los alumnos interactúan con los objetos geométricos mediante el uso del arrastre; y los códigos E y F reconocen el potencial de los estudiantes para descubrir relaciones invariantes y consideran casos extremos. A continuación, se resumen en la Tabla 1 los niveles y descriptores que se han mencionado anteriormente. Se trata de una adaptación del estudio de Trocki y Hollebrands (2018, p. 123).

Tabla 1

*Análisis de tareas de geometría dinámica*

| *Asignación para la profundidad matemática* | |
|---|---|
| *Niveles* | *Niveles y descripciones* |

| | |
|---|---|
| N/A | La solicitud requiere una tarea de tecnología sin enfoque en las matemáticas. |
| 0 | La solicitud se refiere a un diseño que no tiene fidelidad matemática. |
| 1 | La solicitud requiere que el estudiante recuerde un hecho matemático, regla, fórmula o definición. |
| 2 | El aviso requiere que el alumno informe del boceto. No se espera que el estudiante proporcione una explicación. |
| 3 | La solicitud requiere que el alumno considere los conceptos, procesos o relaciones matemáticos en el boceto actual. |
| 4 | La solicitud requiere que el alumno explique los conceptos matemáticos, procesos o relaciones en el boceto actual. |
| 5 | El sistema requiere que el alumno vaya más allá de la construcción actual y generalice los conceptos, procesos o relaciones matemáticos. |

*Tipos de acciones tecnológicas*

| *Posibles* | *Descriptores* |
|---|---|
| N/A | La solicitud no requiere dibujo, construcción, medición o manipulación del boceto actual. |
| A | El enunciado requiere dibujar dentro del boceto actual. |
| B | La tarea requiere una medición dentro del croquis actual. |
| C | El aviso requiere construcción dentro del croquis actual. |
| D | El mensaje requiere arrastrar o utilizar otros aspectos dinámicos del boceto. |
| E | El aviso requiere una manipulación del boceto que permita el reconocimiento de relaciones invariantes emergentes o patrones entre objetos geométricos. |
| F | La solicitud requiere la manipulación del boceto que puede sorprender a un alumno que explora las relaciones representadas o hacer que este refine su pensamiento basado en temas dentro de la sorpresa que puede estar basado en pruebas de casos extremos. |

Traducción propia

A través de sus investigaciones, Trocki y Hollebrands (2018), afirman que las tareas que contienen una colección de indicaciones que representan combinaciones de códigos de acción tecnológica con niveles más altos de profundidad matemática se consideran más propensas a alinearse con la actividad matemática de los estudiantes de mayor calidad. Dichas tareas pueden servir como parte del puente del territorio conceptual antes de la prueba para dar sentido y valor a la deducción formal, la teórica y la prueba.

Los niveles en los que se pueden clasificar las tareas matemáticas según Trocki y Hollebrands son:

- <u>Alto</u>: la tarea contiene una colección de indicaciones que coordinan la profundidad matemática y las acciones tecnológicas de tal manera que requieren que el alumno obtenga conclusiones generales basadas en relaciones invariantes emergentes que van más allá de un diseño estático.
- <u>Bajo</u>: la tarea no contiene una colección de indicaciones que coordinen la profundidad matemática y las acciones tecnológicas de tal manera que requieran que el alumnado saque conclusiones generales basadas en relaciones invariantes emergentes que van más allá de un diseño estático.
- <u>Medio</u>: La tarea contiene una colección de indicaciones que coordinan la profundidad matemática y las acciones tecnológicas de tal manera que pueden alentar, pero no implican necesariamente que el estudiante saque conclusiones generales basadas en relaciones invariantes emergentes que vayan más allá de un diseño estático.

Estos niveles capturan una forma de ver la calidad de la tarea en los SGD, según se distingue por las exigencias del alumnado para extraer conclusiones generales basadas en la actividad en un SGD.

### 3.2.1. Diseño de tareas geométricas

Como afirma Gutiérrez (2014): “El uso de TICs facilita a los profesores la tarea de diversificar sus programaciones de las clases para que estudiantes de diferentes intereses o capacidades matemáticas sigan ritmos de trabajo distintos”, pero a fin de que las actividades programadas alcancen el objetivo de enseñanza-aprendizaje de la geometría a través de los SGD, ¿cómo se deben diseñar las tareas matemáticas?

Diferentes autores sugieren utilizar problemas abiertos para crear un ambiente de enseñanza-aprendizaje en el que los alumnos puedan explorar y enunciar hipótesis. Fahlgren y Brunström llegaron a la conclusión de que se pueden crear problemas abiertos que empleen las características que aportan los SGD convirtiendo las actividades cerradas tradicionales en tareas abiertas.

Un principio que se debe tener en cuenta sobre el diseño es incluir tareas donde los estudiantes se familiaricen con el *software* y que les den posibilidades de desarrollar modalidades de interacción con el SGD. Según Leung (2011, citado por Fahlgren y Brunström, 2014, p. 291) afirma que construir o manipular objetos matemáticos virtuales es una forma significativa de aprender a convertir las herramientas virtuales en instrumentos pedagógicos.

Los pasos que se pueden seguir, hablando en términos genéricos, a la hora de diseñar una tarea son los siguientes: en la primera etapa se solicita a los estudiantes que creen una figura en GeoGebra y que la exploren. A continuación, los alumnos deben realizar las hipótesis que consideren necesarias y finalmente, justificarlas incluyendo las explicaciones necesarias de por qué la están dando por válida. Para mejorar las capacidades justificativas del alumnado, se debe prestar especial importancia al orden secuencial mencionado.

Leung (2011) propone un modelo de diseño de tareas compuesto por tres modos epistémicos que reflejan los aspectos mencionados anteriormente. Designando estos como: el modo de prácticas (MP), el modo de discernimiento crítico (MDC) y el modo de discurso situado (MDS). Además, describe el MP como un modo de exploración en un entorno rico en tecnología, dentro de un SGD. Una intención con este modo es hacer que los alumnos se familiaricen con el *software* y darles posibilidades de desarrollar modalidades de interacción con el SGD.

Poco a poco, a medida que los estudiantes se sienten cómodos con el uso del *software*, su enfoque de atención puede cambiar del uso rutinario de la herramienta hasta el significado de la construcción. Este cambio de atención llevará a los alumnos al siguiente modo, el MDC, donde la construcción de significado matemático mediado por los instrumentos formados en el MP toma el centro del escenario, es decir, las experiencias y la observación a través del manejo práctico incitan a la aparición del significado matemático.

El MDC se caracteriza por la observación y el registro de patrones de variantes o invariantes para obtener ideas que favorezcan el enunciado de hipótesis. Este modo puede animar al alumnado a desarrollar capacidades para comunicar su razonamiento matemático y argumentarlo.

Por otro lado, en el MDS los alumnos deben expresar lo que han descubierto en los modos anteriores. Así pues, al entrar en este modo, los estudiantes pueden desarrollar un razonamiento inductivo que conduzca a hacer conjeturas generalizadas. A partir de entonces, los alumnos podrían desarrollar discursos y modos de razonamiento para explicar o probar. Leung señala que el MDS puede servir de puente entre las experiencias empíricas y el razonamiento matemático formal.

En definitiva, tras revisar varias investigaciones relacionadas con las tareas matemáticas, se puede concluir que un modelo para el diseño de tareas en los SGD enfocado a promover las capacidades demostrativas de los alumnos debe tratarse de un problema abierto; solicitar a los estudiantes hacer sus propias construcciones, y formular sus propias hipótesis por escrito; así como proporcionar la ayuda necesaria a lo largo del proceso de prueba, de manera similar a los tres modos epistémicos del modelo de Leung.

Para desarrollar las tareas matemáticas, seguiremos las recomendaciones que señala Sinclair (2003, 2004, citado por Trocki y Hollebrands, 2018, p. 120) empleando bocetos dinámicos construidos previamente, donde el foco estará puesto en la cuestión de la propia tarea y el manejo de la herramienta que tendrán que conocer los alumnos previamente.

Las recomendaciones quedan reflejadas de la siguiente manera: de cara a llamar la atención del estudiante, el boceto debe proporcionar un estímulo visual a través del color, el movimiento y las marcas; si se pretende proporcionar recursos al alumno, se le solicitará que realice una acción, bien observando, deduciendo o arrastrando, por lo que el diseño debe contener las características que estamos solicitando; también se debe tener en cuenta que el esbozo debe invitar a la exploración por parte del estudiante por lo que las preguntas han de ser abiertas, es decir, permitir al alumnado encontrar rutas alternativas a la hora de resolverlo; por otro lado, empleando preguntas que sorprendan a los discentes conducirán a una mayor exploración, si bien hay que cerciorarse de que el croquis sea lo suficientemente flexible para que los estudiantes examinen los casos siempre y cuando se delimite de tal manera que se evite alcanzar la frustración; finalmente, se deben tener presentes las preguntas que conlleven a la comprensión por parte de los alumnos de cara a su aprendizaje.

### 3.3. Estrategias adoptadas en los SGD

Los beneficios de usar SGD para crear y explorar construcciones geométricas han sido bien documentados según afirman Trocki y Hollebrands (2018). Las acciones tecnológicas de medición y arrastre a menudo se estudian juntas. Por ejemplo, Hollebrands (2007) estudió el uso de los recursos tecnológicos por parte de los estudiantes con *The Geometer's Sketchpad* (GSP): además del arrastre, los alumnos utilizaron elementos de medida para complementar su actividad. El análisis reveló además dos tipos de estrategias que los discentes emplearon cuando trabajaban con un SGD. En la estrategia reactiva, el alumno tomó una decisión sobre cómo proceder de acuerdo con lo que se presentó en la pantalla, pero en la estrategia proactiva, el estudiante demostró cierta reflexión sobre qué esperar antes de que se realizara una acción.

Para llegar a una comprensión más profunda de la demostración, Arzarello *et al*. (2002, citado por Trocki y Hollebrands, 2018, p. 117) identificaron el potencial del arrastre en los SGD. Varios investigadores posteriormente ampliaron su trabajo para investigar cómo el uso del arrastre combinado con otras acciones tecnológicas puede llevar a los estudiantes a la demostración. Estos identificaron siete modalidades cognitivas a través del uso del arrastre. Las modalidades son consideradas en relación con la forma en que una tarea diseñada para un SGD puede incorporar medios apropiados hacia objetivos de aprendizaje específicos, como realizar hipótesis. Los diferentes modos de arrastre que definieron son:

- Arrastre errático: movimiento sin un plan específico, aleatorio, cuya finalidad es la de modificar un dibujo, pero sin importar cómo es esa modificación. Este tipo de arrastre suele aparecer cuando tras haber construido una figura que se ajusta al enunciado de una tarea, los alumnos empiezan a explorar la figura buscando invariantes matemáticos sin ninguna idea previa de qué invariantes buscar ni dónde o cómo encontrarlos.
- Arrastre guiado: se arrastra un punto u otro objeto con el fin de obtener un caso particular de la figura construida. Una situación en la que aparece el arrastre guiado es la de haber construido una figura en la que interviene un cuadrilátero general y el alumno modifica el dibujo para conseguir que ese cuadrilátero se transforme en otros cuadriláteros específicos como por ejemplo un rectángulo.

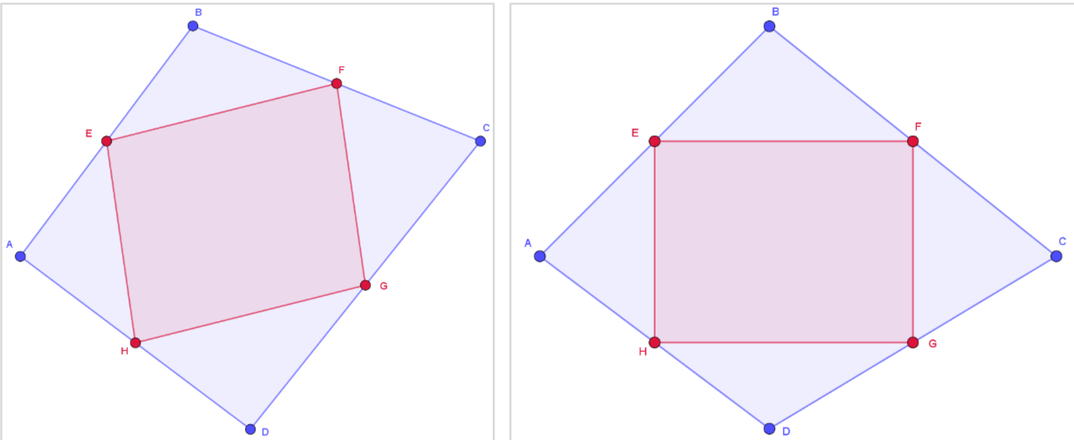


Figura 4. Ejemplo arrastre guiado. Elaboración propia.

En la Figura 4 vemos un dibujo obtenido mediante arrastre guiado durante la resolución del siguiente caso: Dado un cuadrilátero ABCD, sea EFGH el cuadrilátero formado al unir consecutivamente los puntos medios de los lados de ABCD, ¿cuándo es EFGH un rectángulo?

- Arrastre vinculado: vincula un punto a uno o varios objetos y los mueve.
- Arrastre de límite: el arrastre se realiza moviendo un punto semiarrastrable que esté vinculado a un objeto.

- <u>Arrastre sobre un lugar geométrico ficticio</u>: el arrastre se hace procurando que los sucesivos dibujos conserven cierta propiedad matemática. En este caso, generalmente hay un punto de la figura cuyo recorrido coincide con un lugar geométrico oculto. La identificación y caracterización de ese lugar geométrico suele llevar a la solución del problema.
- <u>Línea de arrastre</u>: dibujar nuevos puntos a lo largo de una línea para mantener la regularidad de la figura.
- <u>Prueba de arrastre</u>: mueve los puntos arrastrables o semirrastrables para ver si la construcción hecha conserva las condiciones matemáticas de la tarea. Un ejemplo de este tipo de arrastre es la construcción de un rectángulo, ya que, al mover un vértice de esta figura se convierte inmediatamente en un cuadrilátero general.

Los hallazgos sobre la actividad matemática del alumnado con GSP se resumen en la tabla 2 de Hollebrands (2007, p. 188). Idealmente, los estudiantes usarían una combinación de estrategias reactivas y proactivas para realizar una tarea matemática y desarrollar su conocimiento

Tabla 2

*Algunas estrategias GSP de los estudiantes*

Estrategias de los estudiantes relacionadas con sus usos de arrastrar y medir.

| | Uso de una característica | |
|---|---|---|
| Estrategia | Arrastre | Medición |
| Reactivo | Arrastre al azar | |
| Reactivo o proactivo | Arrastre para formular una hipótesis o buscar una invariancia. | Medición para formular una hipótesis o buscar una invariancia. |
| | Arrastre para probar una construcción. | Medición para probar una hipótesis. |
| Proactivo | Arrastre para probar una hipótesis. | Medición para probar una construcción. |

Traducción propia

Además, documentó las estrategias y los niveles de abstracción que sentían los estudiantes: uno de ellos exhibió una abstracción empírica ya que tomó decisiones a partir únicamente de las apariencias físicas, mientras que otro evidenció una abstracción casi empírica porque primero planificó cuáles iban a ser sus acciones tecnológicas y después interpretó la información visual. Finalmente, un alumno exhibió abstracción reflexiva.

La abstracción empírica recae sobre las características visuales de los objetos. Por ejemplo, una cualidad observable de un objeto puede ser el tamaño: un triángulo 'grande', y una cualidad visual de una acción puede ser: la acción de 'arrastrar'. Sin embargo, la abstracción reflexiva permite construir estructuras nuevas mediante recolocación de elementos que la componen, puede funcionar tanto de modo inconsciente como con acciones deliberadas.

Siguiendo el pensamiento de Trocki y Hollebrands, comprender las conexiones entre las estrategias que aportan los alumnos cuando emplean SGD y los niveles de abstracción que existen es esencial para diseñar tareas que puedan llevar al alumnado a alcanzar niveles más altos de abstracción y argumentación típicamente asociados con el aprendizaje de la geometría. Las tareas de los SGD pueden necesitar guiar a los estudiantes a propósito a través del uso de estas acciones tecnológicas. También estudiaron la investigación de Hoyles y Jones (1998) que consistía estudiar una clase de estudiantes de secundaria completando tareas empleando la herramienta Cabri a través de las funciones de medición y arrastre. Ese estudio documentó que la actividad matemática de los estudiantes utilizando un SGD condujo a importantes ganancias de aprendizaje. Este hallazgo resultó relevante al observar que la combinación singular de factores tales como la calidad de las tareas, la orientación del docente y la capacidad de los alumnos pueden haber conducido a tales resultados.

Por ello en este trabajo adoptamos las estrategias mencionadas a la hora de diseñar una tarea geométrica como se desarrolla tanto en el apartado 4 “Propuesta en GeoGebra” como en el apartado “anexo”.

# 4. Propuesta en GeoGebra

En este apartado se desarrolla un modelo para el diseño de tareas matemáticas en un SGD, basado en los principios clave mencionados a lo largo del trabajo y que han sido extraídos a partir de los diferentes estudios observados al respecto.

Una razón para ejemplificar el diseño de actividades con alumnos de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 3º ESO es que las estrategias de trabajo que estos pueden emplear son más completas empleando estos sistemas dentro del bloque 3, Geometría, que establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria, Decreto 38/2015, de 22 de mayo, donde se establece lo siguiente: "ahonda en conceptos y procedimientos básicos de la geometría plana analítica para reconocer, medir, describir y analizar formas y configuraciones sencillas. Finaliza profundizando, con el uso de conceptos trigonométricos y problemas métricos".

Por consiguiente, para el diseño de la tarea matemática que se va a desarrollar se tiene en cuenta que los alumnos que participen en su resolución han estudiado previamente el tema sobre el que tienen que pensar, en este trabajo, lugares geométricos.

## 4.1. Metodología

Anteriormente se ha comentado la imposibilidad de poner en práctica en el aula esta tarea, de manera que se plantea la actividad de forma hipotética, es decir, cómo se hubiera procedido en el caso de haber podido trabajar en el período de prácticas con la actividad creada.

Se parte de la premisa de que los alumnos no están acostumbrados a trabajar con los SGD. Por lo tanto, antes de comenzar la tarea matemática en sí, hay que introducirles brevemente en GeoGebra, *software* elegido para el caso práctico, con un enfoque en las herramientas más importantes que probablemente son necesarias para interactuar con el ejemplo. De esta forma, se empleará una clase de cincuenta minutos de duración para el contacto previo con la herramienta, facilitando unas explicaciones previas de cómo funciona el programa, cuáles son las aplicaciones que necesitaremos conocer para desarrollar la tarea posterior y dejando que practiquen con los tutoriales interactivos que se encuentran en la página web del Instituto GeoGebra de Cantabria (IGC). Esta tarea forma parte del nivel bajo definido por Trocki y Hollebrands. La tarea de nivel medio, pasando progresivamente a nivel alto, se presentará en una hoja de trabajo y se solicitará a los participantes que trabajen juntos y escriban sus respuestas en la misma.

Para llevar a cabo la toma de contacto con el programa, no se aplicará un límite de tiempo, ya que pueden continuar en sus casas si así lo requieren. Donde sí se aplicará un tiempo determinado será en el desarrollo de la tarea de nivel medio, empleando una clase de cincuenta minutos, quedando distribuidos de la siguiente manera: diez minutos para explicar detalladamente lo que se solicita y aclarar las dudas que hayan surgido, 30 minutos para el desarrollo de la actividad en sí, y los últimos diez minutos para poner en común las conclusiones extraídas tras realizar la actividad.

Con la idea de seguir un orden lógico a lo largo del proceso de las tareas, los modelos seguirán la estructura que se ha ido comentando a lo largo del trabajo: primero se procede a explorar y a realizar hipótesis; seguido, se debe comprobar que estas hipótesis son ciertas; y finalmente, explicar y generalizar los resultados.

Llevar a cabo la tarea implica que inicialmente se realiza una descripción de la situación matemática y a continuación, se analiza cada parte de esta. Una forma de generar la tarea adecuada será reformular los problemas existentes, transformándolos en abiertos, como por ejemplo aboliendo las cuestiones de tipo “demostrar que”.

Para poder familiarizarse tanto con el SGD como con la situación matemática, se solicitará a los alumnos que realicen sus propias construcciones teniendo en cuenta la actividad planteada, ya que, si posteriormente los estudiantes deben investigar sobre la misma, deberán ser conscientes de cómo se construyen pasos intermedios antes de llegar al objetivo final. Si permitimos al alumnado generar sus propias creaciones siendo conscientes de los pasos que van dando, esto aumentará sus nociones en el manejo del programa y por consiguiente sus posibilidades a la hora de añadir otras construcciones en otras actividades diferentes. En el caso de los problemas de lugares geométricos, dentro del programa GeoGebra, las opciones de arrastre que se pueden emplear son el desplazamiento y el deslizador.

A fin de que los alumnos realicen construcciones adecuadas dentro de GeoGebra, se solicitará que estudien la posición de un punto para diferentes posiciones del objeto. Por otro lado, de cara a fomentar la veracidad de sus hipótesis, se pedirá que a través del SGD apoyen o contradigan la misma. Además, se requerirá que expliquen con sus propias palabras por qué su hipótesis es verdadera o no, de esta forma el alumno debe recurrir a la escritura para dibujar con palabras la representación intuitiva realizada en pantalla.

Esto les obliga a indagar aún más en la construcción, conduciéndolos hacia pasos intermedios donde pueden adquirir otras herramientas que les sirvan para realizar otras tareas. También se invitará a que los alumnos creen una tarea; y finalmente, se planteará la opción de volver a realizar nuevas hipótesis sobre la tarea solicitada, realizando los cambios que cada uno piense oportuno.

## 4.2. Ejemplo ilustrativo

Para demostrar cómo se podría diseñar una tarea matemática, se presenta un ejemplo concreto, aunque en el apartado “anexo” se añade otra variante de las tareas. Como base, se utiliza una tarea de prueba formulada de manera tradicional, es decir, aquella que comienza diciendo “demostrar que” seguido de una declaración para probar dicha demostración. Aunque antes de presentar la tarea de ejemplo, se ha decidido emplear otra en la que los alumnos entren en contacto con el programa GeoGebra.

### 4.2.1. Toma de contacto con el programa

A través del IGC se puede acceder a varios tutoriales interactivos de la herramienta, donde se puede aprender a utilizar el programa en un breve período de tiempo. Los recursos que ofrecen son tutoriales de autoaprendizaje y sirven para que el alumno practique en casa a través de actividades guiadas aquellos conceptos que ha visto previamente en el aula.

En este trabajo nos centramos en el estudio de la geometría, por lo que se tratará de centrar el aprendizaje del *software* informático sobre esto. Tras mostrar a los alumnos cómo se visualiza GeoGebra, y cuáles son sus herramientas, así como las funciones de cada una de ellas, se procederá con el tutorial mencionado anteriormente. Nos apoyaremos en la ventana gráfica y en el bloque de herramientas que se muestra en las Figuras 5 y 6, a continuación.

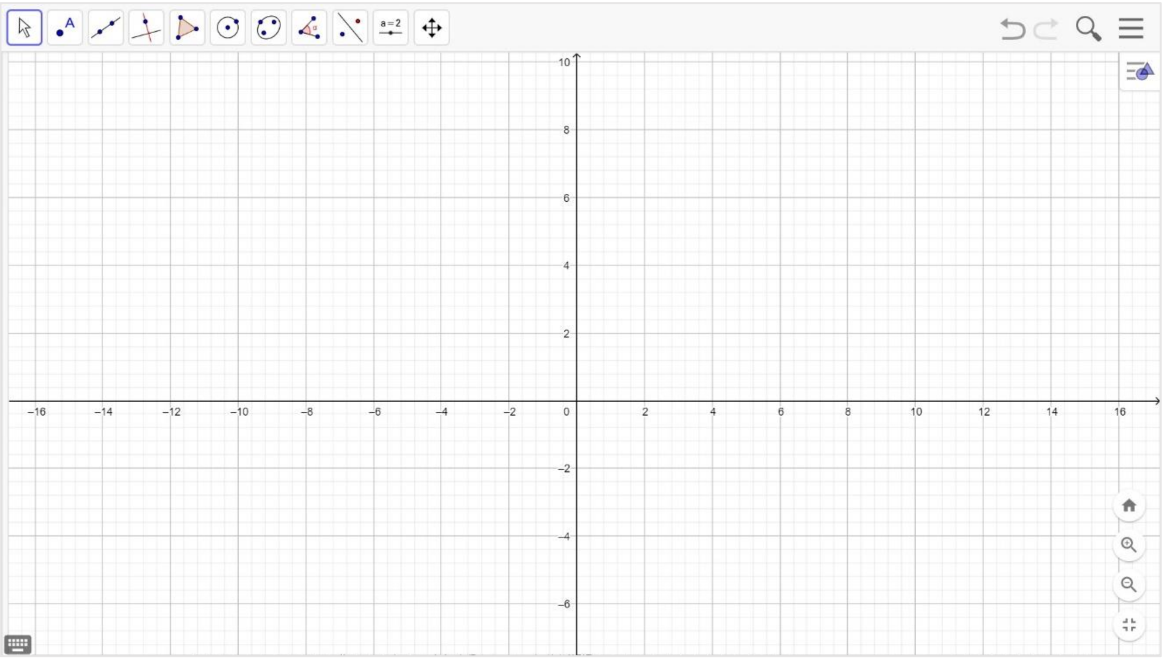

Figura 5. Vista de la ventana gráfica en GeoGebra. Elaboración propia.

Dentro de la ventana gráfica existe la posibilidad de hacer visibles las cuadrículas o no, así como los ejes.

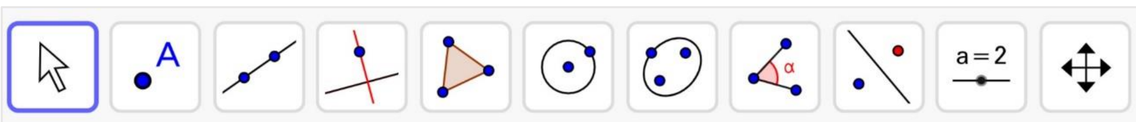


Figura 6. Barra de herramientas gráficas en GeoGebra. Elaboración propia.

Dentro de las herramientas gráficas se encuentran las herramientas de desplazamientos, de puntos, de rectas, de trazados especiales, de polígonos, de circunferencias y arcos, de cónicas, de medición, de transformación, de incorporación, de interacción, y las herramientas generales. Cada una de ellas incluye un listado con diferentes opciones.

Seguidamente, se presentarán los tutoriales relacionados con la geometría, de esta forma el alumno será capaz de entender el funcionamiento de las herramientas de forma práctica. El aspecto de los tutoriales que ofrece el IGC queda reflejado en las Figuras 7 y 8 que se muestran seguidamente.

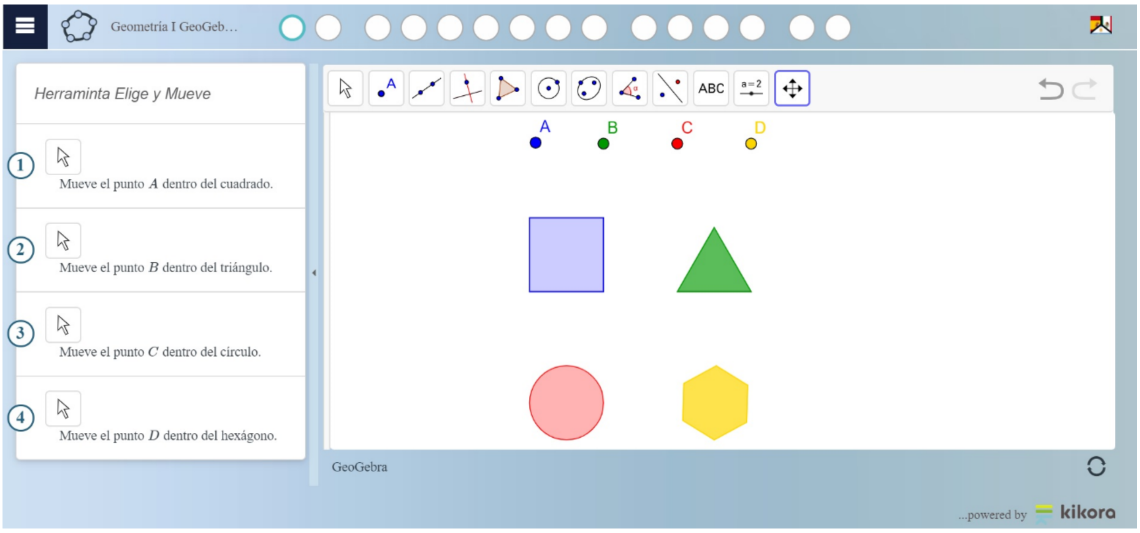


Figura 7. Geometría I. Tutorial interactivo de GeoGebra creado con Kikora[2]. Elaboración propia.

A través de este tutorial el alumno tiene que ir realizando los diferentes pasos que se le van solicitando, de tal manera que hasta que no se cumplimenta de forma correcta la acción, esta no se vuelve verde para que así el estudiante pueda continuar con el resto de las actividades.

---

[2] http://www.kikora.com/

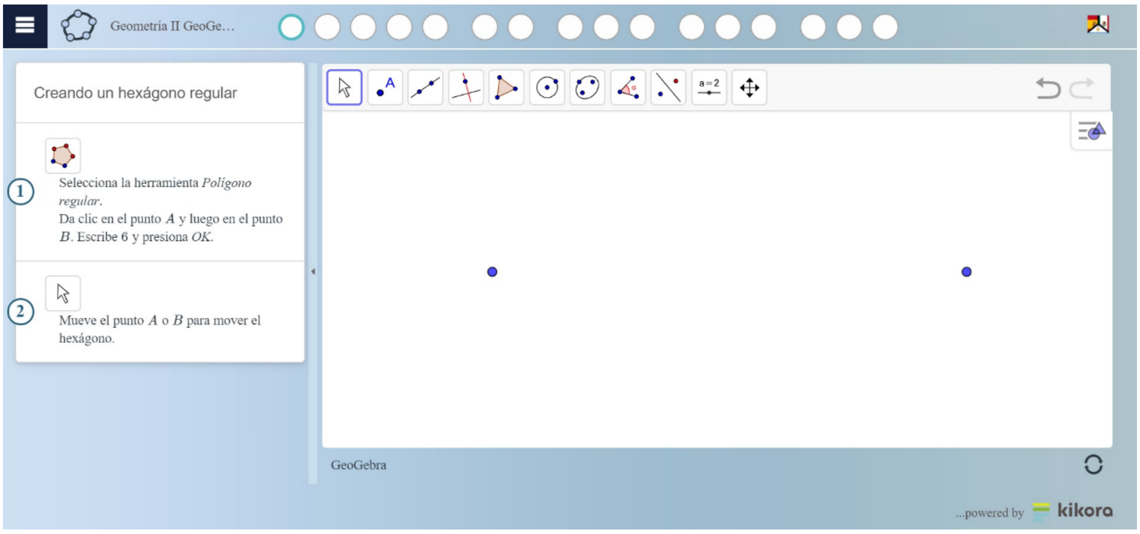


Figura 8. Geometría II. Tutorial interactivo de GeoGebra creado con Kikora. Elaboración propia.

### 4.2.2. Tarea geométrica con GeoGebra

De cara a ejemplificar cómo se puede diseñar una tarea geométrica con GeoGebra teniendo en cuenta tanto lo expresado en el marco teórico como en los pasos mencionados anteriormente, se plantea un ejercicio tipo “demostrar que” para transformarlo en un enunciado abierto como se muestra a continuación.

La descripción del problema inicial sería el siguiente:

Dada una circunferencia y un punto A interior a la misma, demuestra que los centros de las circunferencias que pasan por ese punto y son tangentes a la circunferencia dada, forman un lugar geométrico (Losada, 2009).

En cambio, para la tarea geométrica en el SGD realizaremos una serie de modificaciones con el fin de que los alumnos alcancen su aprendizaje a través de un enunciado guiado. Los niveles de la profundidad matemática que adquieren los apartados son graduales avanzando del 1 al 5 y las acciones tecnológicas engloban diferentes tipos, como se aprecia a continuación. Se presenta el ejemplo en la Tabla 3, indicando al final de cada apartado cuál es su combinación de acción tecnológica con el nivel de profundidad matemática.

Tabla 3

*Ejemplo del diseño de una tarea geométrica en GeoGebra*

| |
|---|
| Deja que B sea un punto arbitrario en la circunferencia dato. A es el punto por el que pasan todas las circunferencias que se quieren estudiar y, además, son tangentes a la dada. |
| a) Determina el centro de la circunferencia que pasa por A y es tangente en B. |
| b) Estudia la posición de los centros de las circunferencias que pasan por A y son tangentes en B para diferentes posiciones de este. ¿Qué observas? |
| c) Utiliza GeoGebra para apoyar o contradecir tu punto de vista anterior. |
| d) Demuestra con tus propias palabras que tu hipótesis es correcta. |
| e) Ahora construye tu propio ejercicio de lugares geométricos. |
| f) Intenta resolverlo de otra forma, analizando y justificando lo que observas ahora. |

Elaboración propia

El enunciado de la actividad que se aprecia en tabla anterior se acompaña de una imagen ilustrativa de los datos que se dan. Esta imagen queda reflejada en la Figura 9.

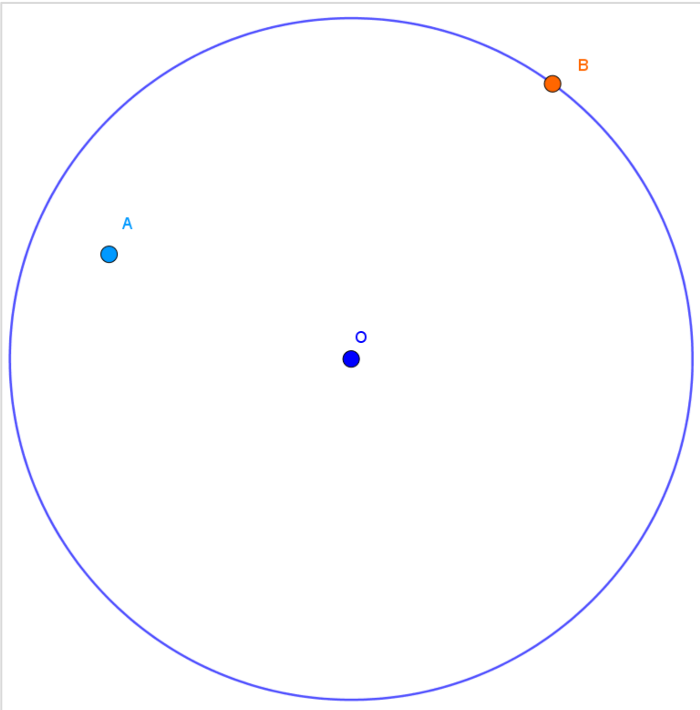


Figura 9. Descripción de la situación matemática inicial. Elaboración propia.

Una vez entregada la actividad a los alumnos, se solicita que la resuelvan paso a paso, de esta manera se les guía a lo largo del ejercicio incrementado el nivel de dificultad paulatinamente.

La primera actividad que se requiere es determinar el centro de la circunferencia que pasa por el punto A y es tangente en el punto B. Para ello, los alumnos que han estudiado previamente las construcciones necesarias para desarrollar esta parte tratarán de ejemplificarlas en GeoGebra. Una de las posibles construcciones que pueden presentar los alumnos utilizando los conocimientos vistos de lugares geométricos en el aula se muestra en la Figura 10.

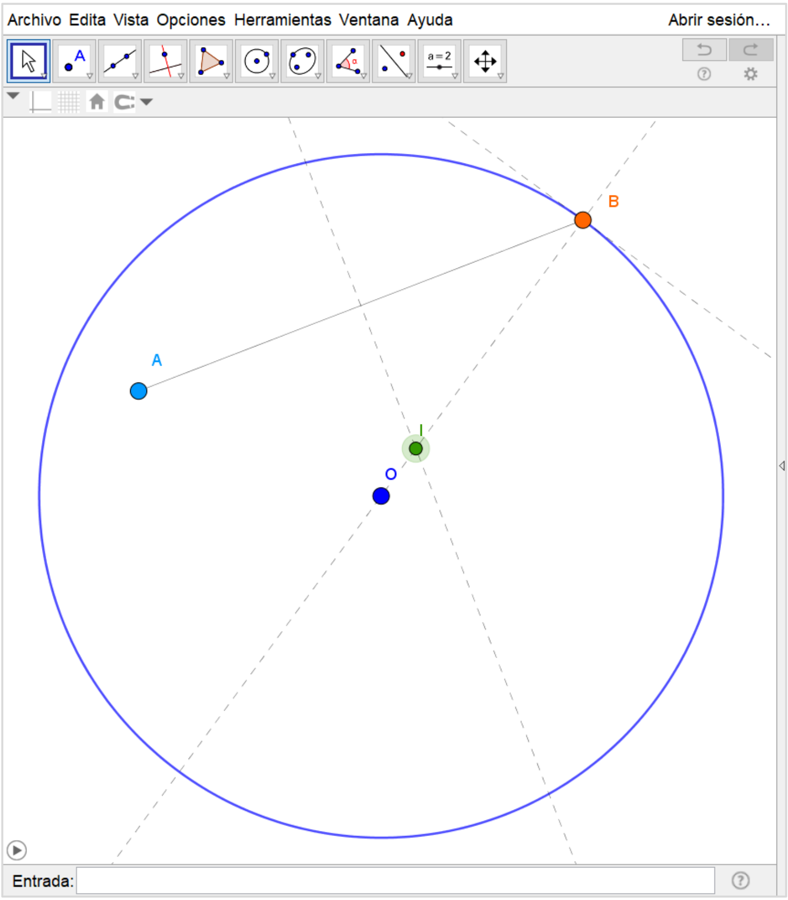


Figura 10. Ejemplo de resolución del primer apartado en GeoGebra. Elaboración propia.

Como se aprecia en la Figura 10, las construcciones corresponden a la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, siendo el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por el punto A intersectando con el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a la circunferencia dato en el punto B. Esta intersección se denomina I. Por consiguiente, el punto de intersección entre ambos lugares geométricos corresponde con el centro de la circunferencia que cumple las premisas del problema planteado para la posición vista en la figura mencionada.

Continuando con el ejemplo, en el siguiente apartado se pide estudiar la posición de los centros de las circunferencias que pasan por A y son tangentes en B para diferentes posiciones de este indicando lo que se observa. En GeoGebra empleando las herramientas “rastro” con la que se puede apreciar el movimiento que realiza un objeto y “animación” a través de la cual un elemento realiza el recorrido asociado por sí mismo, si lo utilizamos en esta actividad, se observa el desplazamiento del punto I activando el rastro del mismo para las diferentes posiciones de B que realiza el programa por sí mismo activando la animación del punto B, como se aprecia en la Figura 11.

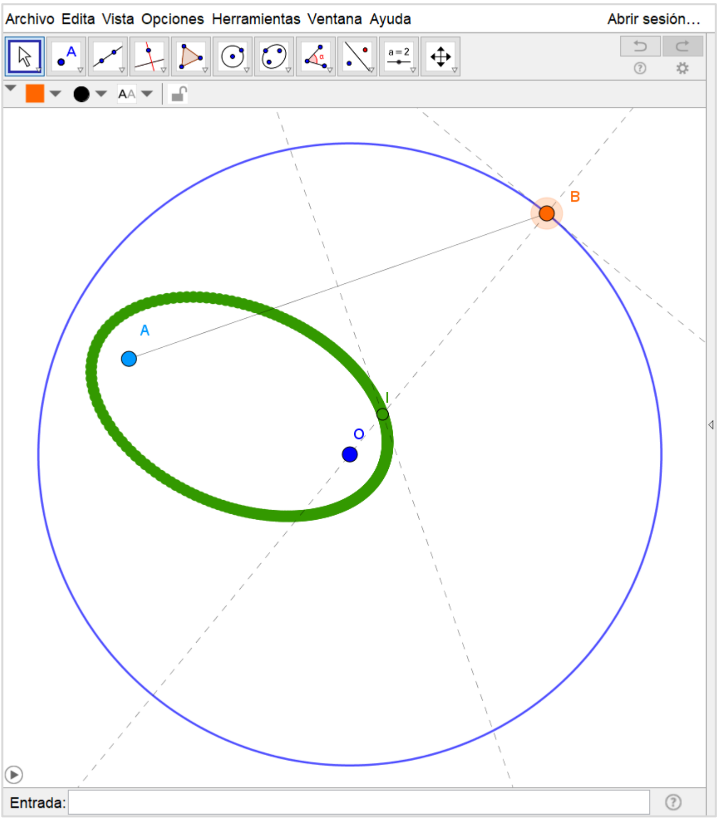


Figura 11. Descripción gráfica del punto I en función de la animación de B. Elaboración propia.

Aparentemente en la imagen superior se observa que el lugar geométrico de los centros de las circunferencias solicitadas es una elipse cuyos focos son los puntos A y O, pero ¿cómo se puede demostrar esto? Como ya hemos desarrollado a lo largo del trabajo no basta con identificar un elemento sino que se debe demostrar. Para ello el alumno debe responder a los dos siguientes apartados, utilizando GeoGebra tiene que demostrar con sus propias palabras la hipótesis enunciada, es decir, que se trata de una elipse con focos en A y O.

Por consiguiente, si se demuestra que $\overline{AI}$ + $\overline{OI}$ es constante, se puede verificar que la conjetura enunciada es correcta y de esta forma se puede afirmar que el lugar geométrico de los centros de las circunferencias solicitadas es una elipse cuyos focos son los puntos A y O.

Una demostración geométrica puede ser la siguiente; $\overline{AI}$ es uno de los lados del triángulo isósceles de base $\overline{AB}$, entonces $\overline{AI}$ = $\overline{BI}$, de donde $\overline{AI}$ + $\overline{OI}$ = $\overline{BI}$ + $\overline{OI}$ = $\overline{OB}$ el radio de la circunferencia inicial.

Para demostrarlo en GeoGebra se puede utilizar el comando “relación” con el cual se determina, como su propio nombre indica, la relación numérica que existe entre los elementos que queramos demostrar.

En las Figuras 12 y 13, queda reflejada la demostración comentada anteriormente a través del SGD.

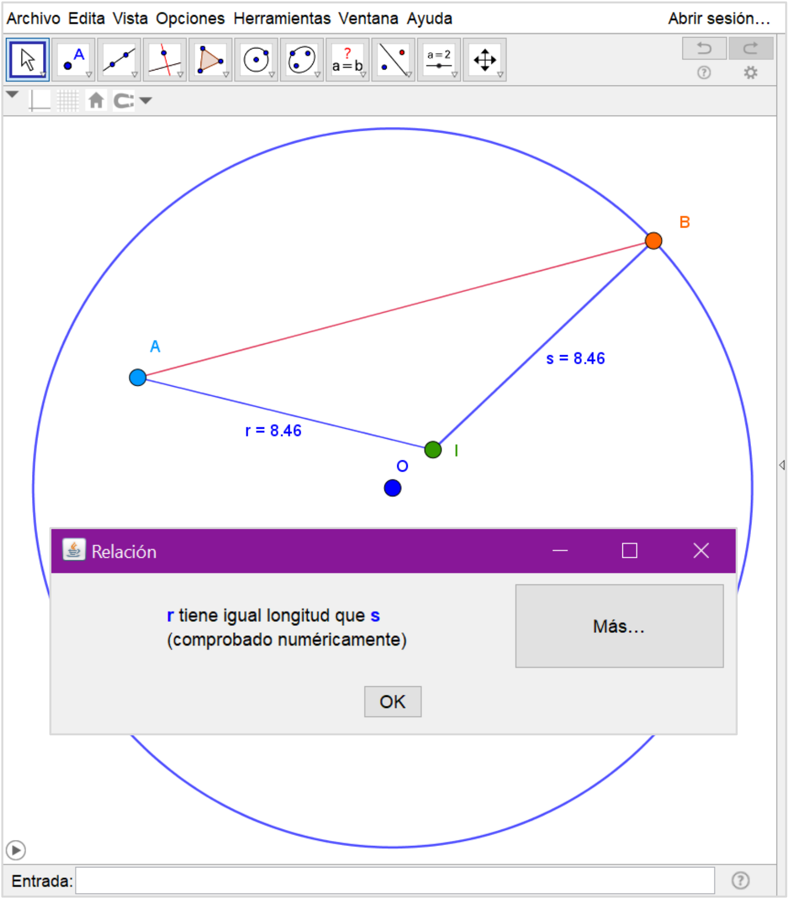


Figura 12. Demostración numérica con el comando relación. Elaboración propia.

Se demuestra que $\overline{AI} = \overline{BI}$, correspondiendo a los segmentos 'r' y 's' dentro del SGD como se observa en la imagen anterior.

Lo siguiente que se necesita obtener es si la distancia $\overline{AI} + \overline{OI}$ es igual a la distancia que hay en $\overline{BI} + \overline{OI}$. En la Figura 13 observamos que ambas distancias son iguales y por consiguiente también lo serán al radio de la circunferencia dato $\overline{OB}$, quedando demostrada la hipótesis inicial a través de GeoGebra.

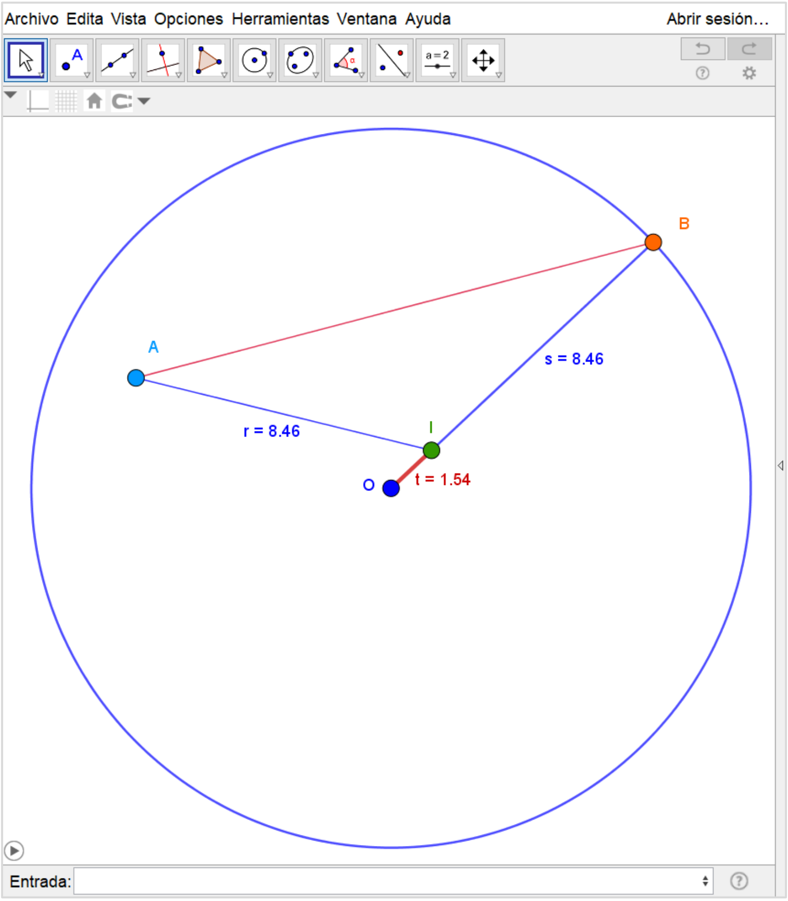


Figura 13. Demostración numérica $\overline{AI} + \overline{OI} = \overline{BI} + \overline{OI} = \overline{OB}$. Elaboración propia.

Finalmente, los alumnos proceden con los dos últimos apartados de la tarea geométrica, donde deben crear su propia actividad y tratar de resolverla. De esta manera se le incita a probar, a descubrir otras formas de encontrar otros caminos que resulten válidos también.

En el apartado "anexo" como ya se ha comentado anteriormente, se plantea otro ejemplo para el diseño de tareas geométricas en GeoGebra.

## 5. Conclusiones

Añadir nuevas herramientas a los sistemas de trabajo trae consigo cambios. En este caso, hablando de docencia, implica cambios en la metodología, pero además modificar las actividades con las que se trabajan.

A lo largo del trabajo se han expuesto diferentes autores que han investigado la importancia de emplear los sistemas de geometría dinámica en la asignatura de matemáticas, concretamente en la enseñanza de la geometría. Las investigaciones muestran que a través de *softwares* que facilitan construcciones geométricas, entre otras, los estudiantes aumentan sus intereses de cara a su aprendizaje, así como su motivación. Además, mejoran sus capacidades demostrativas y explicativas, a través de sus propias hipótesis, y sus competencias sociales, culturales, científicas y tecnológicas, ya que empleando GeoGebra los alumnos pueden trabajar en grupos o individualmente, aprendiendo a trabajar en equipo; además incrementan sus habilidades informáticas y se pueden emplear desde matemáticas, pasando por física o arte.

Aunque son muchos los beneficios que trae el uso de GeoGebra, como mejorar habilidades en nuevas tecnologías, trabajar en equipo o mejorar su creatividad diseñando sus propias creaciones, también se llega a la conclusión de que se deben planificar cuidadosa y meticulosamente las actividades que se pretendan emplear en las aulas para alcanzar un buen aprendizaje a través de la investigación, realizando hipótesis, así como las justificaciones oportunas.

Para poner en práctica el diseño de una tarea matemática que conduzca a un aprendizaje empleando una metodología diferente, nos cuestionamos lo siguiente: ¿cómo podemos presentar los datos de la tarea para que sirvan al alumno al mismo tiempo de guía? ¿qué representaciones son las más acertadas para alcanzar una relación entre lo visual y los datos de partida?

A lo largo de este trabajo se han explicado los motivos que han impedido llevar las tareas a las aulas, por lo que las conclusiones que extraemos no están fundadas en una investigación *in situ*, aunque consideramos que la base de este trabajo puede servir de punto de partida para futuras investigaciones relacionadas con la importancia de estudiar el diseño de las tareas matemáticas. Existen numerosos estudios sobre la importancia que tiene el empleo de GeoGebra para que los alumnos se sientan cómodos y participativos en las clases porque además de adquirir los conocimientos teóricos, visualizan, transforman y diseñan sus propias creaciones, de esta forma su motivación aumenta y sus ganas de trabajar conjuntamente también.

En definitiva, sabiendo que GeoGebra se trata de un *software* pensado para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, siendo, fácil de usar, intuitivo y con grandes posibilidades tanto para el profesorado como el alumnado, consideramos que se deben cuidar los diseños de las tareas matemáticas para utilizarlo y así, mejorar la metodología en cuanto al aprendizaje de los estudiantes.

## 6. Bibliografía

Bruner, J. (1978). The role of dialogue in language acquisition. En: Sinclair, Jarvelle y Levelt (eds.), *The Child's concept of language*. New York: Springer-Verlag.

Decreto 38/2015, de 22 de mayo, que establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la comunidad autónoma de Cantabria. Boletín Oficial de Cantabria. Cantabria, 5 de junio de 2015, núm. 39, 552 § 3262 (2015).

Del Puy M. y Pozo J.I. (2010). Enseñar a aprender: ¿ejercicios o problemas? Aula, (190), 38-40.

Del Rey, R. (coord.), Prados, M.M. (coord.) y Reina, M.C. (coord.) (2014). Principales modelos teóricos ante los procesos de enseñanza aprendizaje. En Prados et al. Manual de psicología de la educación para docentes de educación infantil y primaria. Madrid: Pirámide.

Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist*, 23 (2), 167-180.

Fahlgren, M. y Brunström, M. (2014). A Model for Task Design with Focus on Exploration, Explanation, and Generalization in a Dynamic Geometry Environment. *Technology, Knowledge and Learning*, 19 (3), 287-315. DOI: https://doi.org/10.1007/s10758-014-9213-9

Gamboa, R. y Vargas, G. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, 27 (1), 74-94.

Godino, J.D. y Ruíz, F. (2003). Geometría y su didáctica para maestros. *Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada*. Recuperado el 20/08/2019 de https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/

Goldenberg, E. P. y Cuoco, A. A. (1998). What is dynamic geometry? En Mahwah (Ed.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 351-368). New Jersey: Lawrence Erlbaum.

González-López, M.J. (2001). La gestión de la clase de geometría utilizando sistemas de geometría dinámica. En Gómez, P., y Rico, L. (Eds.). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 277-290). Granada: Editorial Universidad de Granada.

Gutiérrez, A. (2014). Los entornos de geometría dinámica 3D y la enseñanza de la geometría espacial. Claros y sombras. *Memorias del Congreso Internacional de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas Mediadas por TIC (CIMATIC14)* (pp. 11-21). Armenia (Colombia): Grupo Gedes

Hohenwarter, M. (2001). *GeoGebra [Página web].* Recuperado el 27/08/2019 de https://www.geogebra.org/

Hollebrands, K. (2007). The role of a dynamic software program for geometry in the strategies high school mathematics students employ. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38 (2), 164-192.

Hoyles, C., y Jones, K. (1998). Proof in dynamic geometry contexts. In C. Mammana y V. Villani (Eds.). *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 121-128). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Iranzo, N. y Fortuny, J.M. (2008). *La influencia del SGD en las estrategias de resolución de problemas de geometría analítica* (Tesis). Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2748856

Leung, A. (2011). An epistemic model of task design in dynamic geometry environment. *ZDM the International Journal on Mathematics Education*, 43 (3), 325-336.

Losada, R. (2007). GeoGebra: la eficiencia de la intuición. *La gaceta de la RSME*, 10 (1), 223-239

Losada, R. (2009). *GeoGebra en la enseñanza de las matemáticas [Página web]*. Recuperado el 04/09/2019 de http://geogebra.es/cvg/index.html

Miranda, R. (2005). *¿Qué es un procesador geométrico? Geometría dinámica [Página web]*. Recuperado el 12/08/2019 de http://www.geometriadinamica.cl/

Morante, A. y Vallejo, J.A. (2011). Software libre para el estudio de sistemas dinámicos. *La Gaceta de la RSME*, 14 (1), 111-132.

Sánchez, J. (2002). Integración Curricular de las TICs: Conceptos e Ideas. Presentado en el VI Congreso Iberoamericano de Informática Educativa. RIBIE, Vigo, España.

Santos, L. M. (2003). Procesos de transformación de artefactos tecnológicos en herramientas de resolución de problemas matemáticos. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10 (2), 195-211.

Smith, M. y Stein, M. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(5), 344-350.

Stylianides, A. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38 (3), 289-321.

Trocki, A. y Hollebrands, K. (2018). The Development of a Framework for Assessing Dynamic Geometry Task Quality. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 4, 110-138. DOI: https://doi.org/10.1007/s40751-018-0041-8

Zbiek, R., Heid, K., Blume, G., y Dick, T. (2007). Research on technology in mathematics education. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1169-1207). Charlotte: Information Age Publishing.

# Anexo

En este apartado se plantea otra actividad geométrica de demostración con GeoGebra. Para llevar a cabo esta tarea, se ha elegido el teorema de Varignon. Este enuncia lo siguiente: en cualquier cuadrilátero, los puntos medios de los lados forman un paralelogramo cuya área es la mitad de la del cuadrilátero original.

De la misma manera que se plantea en el apartado 4.2.2. "Tarea geométrica con GeoGebra" transformamos este enunciado en otro para que sirva de guía al alumno a lo largo de su resolución, alcanzando finalmente la demostración del mencionado teorema. De forma que la nueva tarea geométrica queda como se aprecia en la Tabla 4.

Tabla 4

*Diseño de una tarea geométrica en GeoGebra. Teorema de Varignon*

| |
|---|
| Sea un cuadrilátero *ABCD:* |
| a) Determina los puntos medios de los lados y dibuja el polígono que los une. ¿Qué observas? |
| b) Cambia la posición del cuadrilátero *ABCD*. ¿Qué se aprecia? |
| c) Utiliza GeoGebra para apoyar o contradecir tu punto de vista anterior. |
| d) Demuestra con tus propias palabras que tu hipótesis es correcta. |
| e) Ahora construye tu propio ejercicio de lugares geométricos. |
| f) Intenta resolverlo de otra forma, analizando y justificando lo que observas ahora. |

Elaboración propia

Cuando se realiza la construcción se observa que al unir los puntos medios de los lados del cuadrilátero dato *ABCD*, aparentemente se forma un paralelogramo al que se denomina *EFGH*, como se aprecia en la Figura 15. Luego la hipótesis inicial del alumno pudiera ser afirmar que se trata de un paralelogramo.

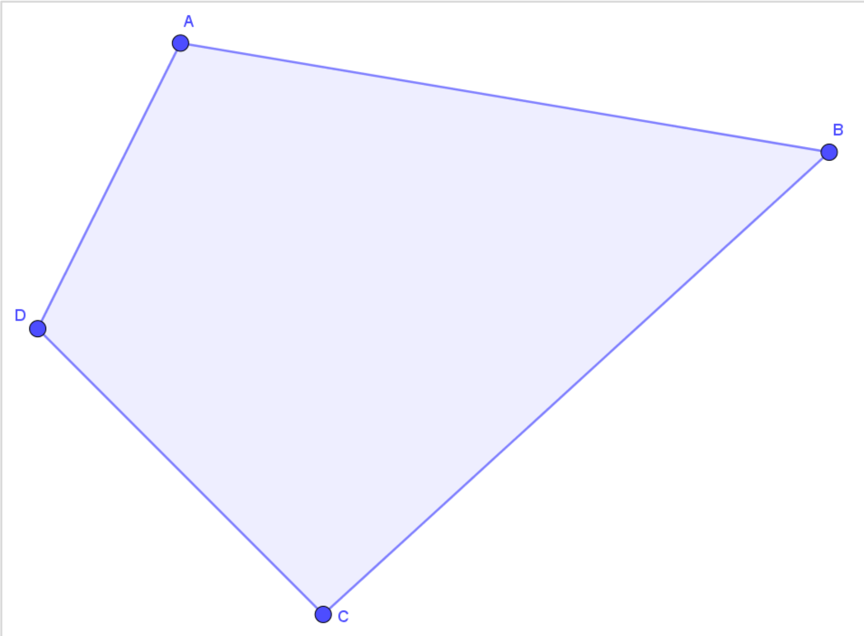


Figura 14. Representación del enunciado de la actividad, GeoGebra. Elaboración propia.

Como se aprecia en la imagen anterior, una posible interpretación del enunciado por parte de los alumnos puede ser esta.

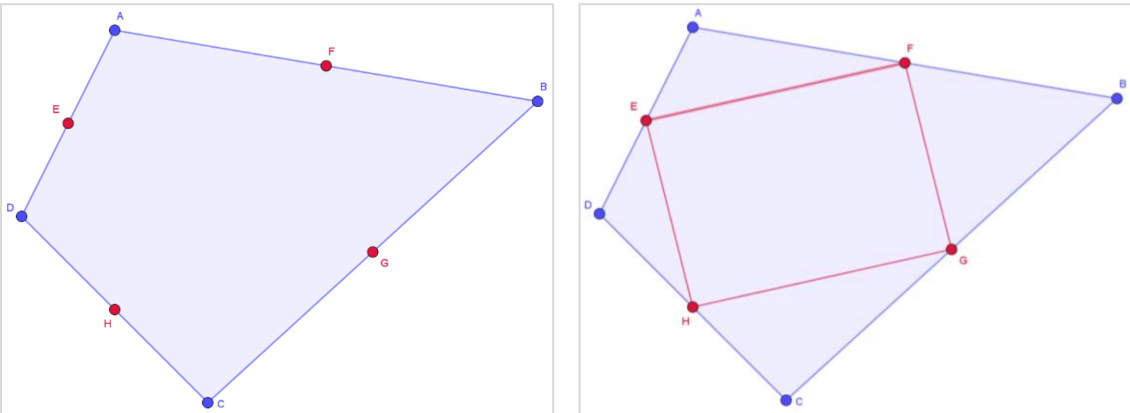


Figura 15. Ejemplo de resolución del primer apartado en GeoGebra. Elaboración propia.

Antes de demostrar la hipótesis enunciada, continuamos con la resolución del siguiente apartado, el cual solicita que se cambie la posición del cuadrilátero inicial. Esta parte queda reflejada en la Figura 16.

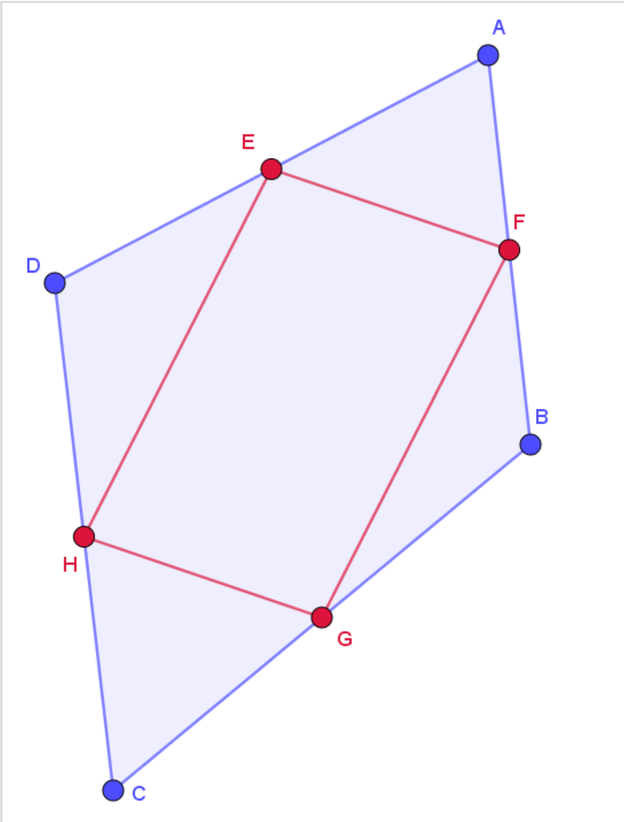


Figura 16. Ejemplo de resolución del segundo apartado en GeoGebra. Elaboración propia.

Un ejemplo de lo que ocurre al modificar el cuadrilátero inicial es el que se ha ilustrado en la imagen anterior, de esta forma se comprueba que independientemente de los movimientos que tengan los vértices del cuadrilátero inicial, *ABCD*, obtenemos un paralelogramo.

Para demostrarlo partimos de un polígono de cuatro lados cualesquiera, como el que tenemos a partir de los movimientos realizados anteriormente cuyos vértices continúan siendo *ABCD*. A partir de este, si nos fijamos en el triángulo formado por *ABD*, tomando como base el lado *BD,* y unimos los puntos medios de los lados, como el punto medio de *AD, E,* y el punto medio de *AB, F*, obtenemos un segmento 'e' paralelo a la base del triángulo mencionado, que a su vez, resulta ser la diagonal 'i' del cuadrilátero como se aprecia en Figura 17. La demostración a través del SGD resulta sencilla gracias al comando "relación" del que dispone.

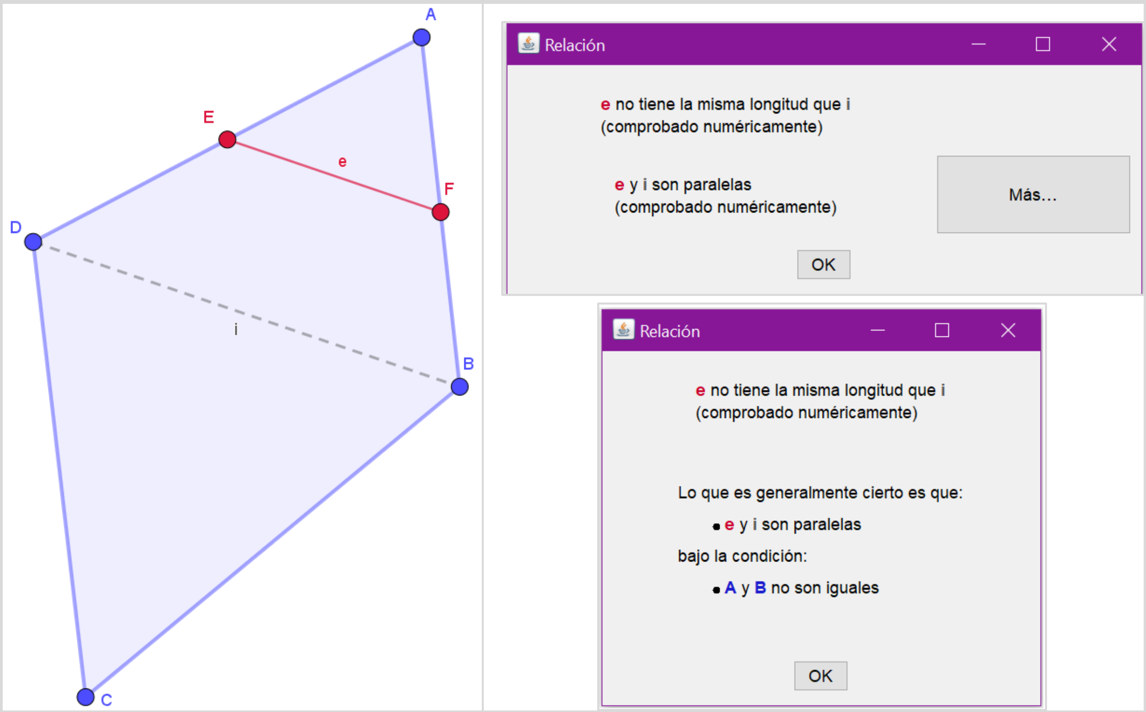


Figura 17. Demostración numérica en GeoGebra de la relación de paralelismo que hay entre la diagonal y el segmento que une los puntos medios de los lados consecutivos. Elaboración propia.

Si se repite el proceso con el triángulo formado por los vértices *BCD*, de la misma forma se obtiene que el segmento formado por los puntos medios también es paralelo a la diagonal ‘i’.

Aunque se haya empleado el comando “relación” de GeoGebra para demostrarlo numéricamente, también se puede realizar una demostración formal empleando el “teorema de la base media”. Este teorema se puede encontrar dentro de la biblioteca de recursos que ofrece el *software* a través de su página web con el título “Primer teorema de la base media de triángulos”[3].

Por otro lado, empleando el mismo sistema, se obtiene que si utilizamos el triángulo cuyos vértices son *ABC*, cogiendo como base el lado *AC*, y trazamos el segmento que une los puntos medios de los lados, como el punto medio de *AB, F,* y el punto medio de *BC, G*, obtenemos un segmento ‘f’ paralelo a la base

[3] https://www.geogebra.org/m/zWpAe3K6

del triángulo mencionado, que a su vez, resulta ser la diagonal 'j' del cuadrilátero como se aprecia en Figura 18.

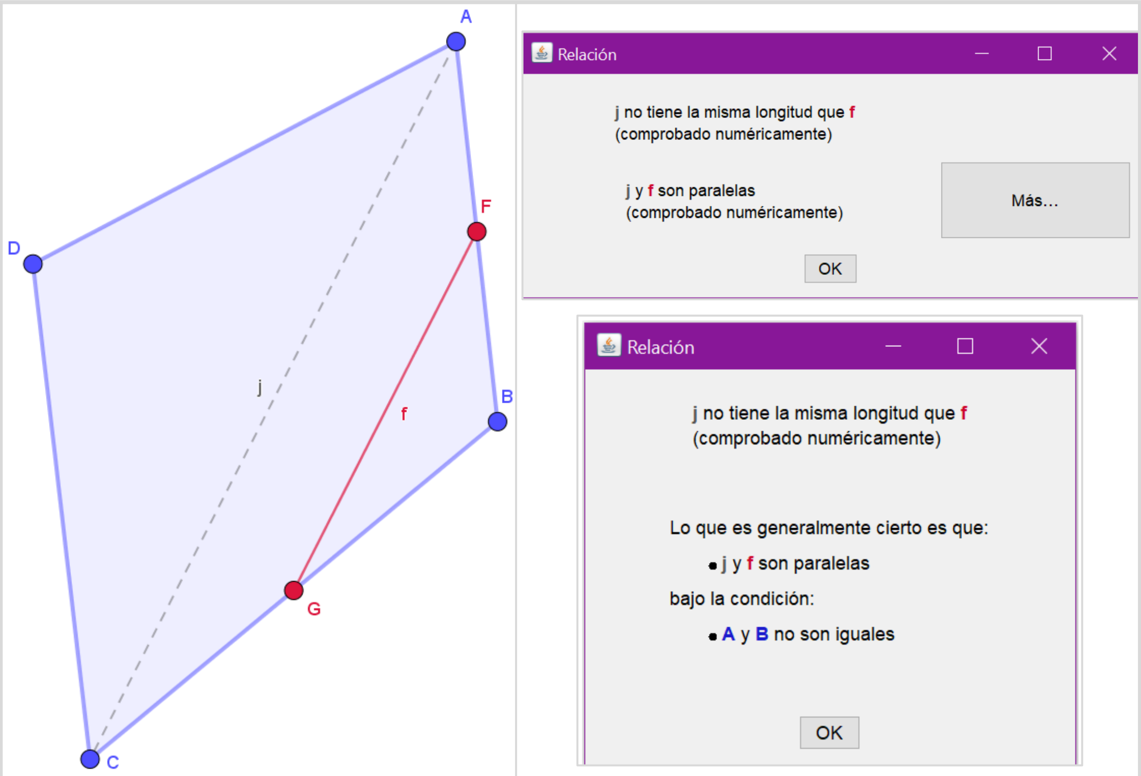


Figura 18. Demostración numérica en GeoGebra de la relación de paralelismo que hay entre la diagonal y el segmento que une los puntos medios de los lados consecutivos. Elaboración propia.

Como se aprecia en la imagen anterior, se vuelve a comprobar de forma numérica a través de GeoGebra la relación de paralelismo que hay entre los otros segmentos con la diagonal, por consiguiente, teniendo en cuenta lo anterior siempre se obtiene un paralelogramo. De esta forma queda demostrado el Teorema de Varignon.