

ALGUNOS FACTORES INFLUYENTES

EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS

EN MATEMATICAS

Trabajo Fin de Master

Curso 2011-2012

Master universitario en Formación del Profesorado de Secundaria

Universidad de Cantabria

Natalia Rodríguez-Miñón Ferrán

Vº Bº DEL DIRECTOR

MARIO FIORAVANTI VILLANUEVA

INDICE

1. Introducción.....	3
2. Aspectos de la resolución de problemas según Schoenfeld.....	6
3. Dificultades iniciales antes de resolver.....	8
3.1 Creando el clima adecuado.....	10
4. La interacción afectiva y el aprendizaje matemático. Causas y efectos.	12
5. ¡Caray con el Algebra!	17
6. La representación gráfica y su enorme importancia.....	22
6.1 Ver para entender	32
7. Conclusiones.....	33
Bibliografía.....	34

¿Quién hay tan neciamente curioso que envíe a sus hijos a la escuela para que aprendan qué piensa el maestro? Más una vez que los maestros han explicado las disciplinas que profesan enseñar, las leyes de la virtud y de la sabiduría, entonces los alumnos consideran consigo mismo si han dicho cosas verdaderas, examinando según sus fuerzas aquella verdad interior. Entonces es cuando aprenden...

SAN AGUSTÍN

1. INTRODUCCION

¿POR QUE ENSEÑAR A RESOLVER PROBLEMAS DE MATEMATICAS?

<<La matemática ha constituido, tradicionalmente, la tortura de los escolares del mundo entero, y la humanidad ha tolerado esta tortura para sus hijos como un sufrimiento inevitable para adquirir un conocimiento necesario; pero la enseñanza no debe ser una tortura, y no seríamos buenos profesores si no procuráramos, por todos los medios, transformar este sufrimiento en goce, lo cual no significa ausencia de esfuerzo, sino, por el contrario, alumbramiento de estímulos y de esfuerzos deseados y eficaces>>. (Puig Adam, 1958).

La resolución de problemas es considerada en la actualidad una parte esencial de la educación matemática. Mediante la resolución de problemas, los estudiantes experimentan la utilidad de las Matemáticas en el mundo que les rodea. Si los alumnos aprenden a resolver problemas en matemáticas, podrán adquirir formas de pensar, hábitos de persistencia y curiosidad y seguridad en situaciones poco familiares que les servirán de mucho fuera de las clases de matemáticas. Podríamos decir que todos los días de tu vida y en tu lugar de trabajo (o estudio), ser un buen resolutor de problemas puede traerte grandes ventajas. La resolución de problemas es una parte integrada del aprendizaje de las matemáticas y por lo tanto no debería ser una parte aislada del programa de matemáticas. Es un proceso, no un procedimiento paso a paso o una respuesta que hay que encontrar; y aunque a una mirada por encima puede parecer que la resolución de problemas en matemáticas es generalmente caótica o como poco, desordenada, existe confirmación práctica de que hay métodos, procedimientos y actitudes que favorecen el éxito y todo esto, como

docentes, nos debería llevar a estudiar estas técnicas y herramientas con la esperanza de que los estudiantes puedan aprender a disfrutar con las Matemáticas y sean con el tiempo buenos resolutores de problemas.

Dentro del currículo de secundaria, vemos que se marca una parte de contenidos comunes para todas las asignaturas de secundaria, y de forma transversal e incluida en ese apartado se encuentra la resolución de problemas de matemáticas, ya que se pretende de ello una aplicación a la vida real de los conocimientos adquiridos. Tenemos que considerar que es necesario que la enseñanza de las Matemáticas sea una forma de poder proporcionar estrategias y recursos. No será más interesante que los alumnos pasen largas horas utilizando teorías y/o fórmulas, sino que será igual de enriquecedor y fructífero el que adquieran experiencia en el uso de datos, en el conocer cómo interpretarlos y en el aprendizaje de las tácticas para afrontar el reto de los problemas. Además el uso de las fórmulas ha de ir acompañado de un espíritu crítico para conocer para qué, cómo y cuándo utilizarlas.

Es por estos motivos por los que pretendo desarrollar el cómo la resolución de problemas es muy importante tanto desde el punto de vista del que enseña como del que aprende.

Según Lester & Kehle, 2003, p.510 (traducido al castellano): " El éxito en la resolución de problemas requiere, coordinación de experiencias previas, representaciones familiares y modelos de inferencia e intuición en un esfuerzo de generar nuevas representaciones y modelos relacionados de inferencia, que resuelven las tensiones o la ambigüedad que incitó la actividad original de la resolución de problemas".

El pensar requiere de un entrenamiento; al igual que para otras actividades deportivas como el fútbol, ski, tenis, es en los entrenamientos donde adquirimos los conocimientos, los pequeños trucos, ese aprendizaje que nos permite detectar la diferencia entre antes y después de los nuevos trucos aprendidos bajo la guía de un experto. Así pues, podemos "entrenar" nuestro propio proceso de pensamiento, de forma que tras él, sintamos realmente que

éste se vuelve más eficaz. Como afirman G. Polya y G. Szego "...en el aprendizaje del pensar sólo la práctica del pensar es verdaderamente útil".

El hábito de pensar nos ayudará a que cuando realicemos o nos enfrentemos a una actividad que requiera del pensamiento, nuestra actitud ante ello sea más placentera o al menos se afronte de una manera natural, como un corredor de maratón no tiene miedo a correr para no perder el autobús.

Por lo tanto, la idea que ha promovido este trabajo, es el estudio de ciertas variables que determinan la estructura del pensamiento en la resolución de problemas de matemáticas, e intentar aprender cómo el docente puede en su práctica diaria, ayudar, favorecer y promover en la enseñanza de ésta materia a afrontar el reto que la resolución de problemas supone y qué factores le pueden ayudar a ello.

El trabajo está dividido en seis partes, además de esta introducción. En la segunda parte presentamos un resumen de uno de los análisis más completos y significativos del proceso de resolución de problemas, que es el de Alan Schoenfeld, y las estrategias heurísticas que se utilizan con mayor frecuencia. En la tercera y cuarta partes reflexionamos sobre algunas de las dificultades iniciales con las que se encuentran los alumnos antes de llevar a cabo la resolución de los problemas, como son la comprensión lectora y los factores emocionales (autoconfianza, bloqueos, etc.). La quinta parte trata sobre el paso de la Aritmética al Álgebra, presentando algunos ejemplos de soluciones de problemas realizadas por alumnos de la E.S.O. En la sexta parte hemos estudiado el papel de las diferentes formas de representación, enfatizando la representación gráfica y apoyándonos en ejercicios realizados por los alumnos. En la séptima parte se recogen las conclusiones.

2. ASPECTOS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SEGÚN SCHOENFELD

Tras años de investigación a nivel mundial sobre el tema de la resolución de problemas de matemáticas en busca de un marco explicativo completo de cómo se relacionan los distintos aspectos que influyen en el pensamiento matemático, se ha llegado a un acuerdo general de la importancia de 5 aspectos (Schoenfeld, 1992):

1. El conocimiento de base.

Para el observador, el punto de partida es tratar de reconocer los conocimientos base, también llamados recursos, de los alumnos que se enfrentan a la resolución de problemas, contando con que puede ser que esa información base tenga contenidos erróneos, que irán siendo arrastrados hasta su detección.

2. Las estrategias de resolución de problemas o heurísticas.

Sobre este tema ha habido muchos estudios pero yo personalmente veo mejor organización en las preguntas que se hacía Polya en este apartado, ya que con ellas se estructura cada conocimiento y además crea un recurso de heurística que puede ayudar a muchos a encauzar el planteamiento de un problema matemático. Veo una necesidad en transcribir las cuatro etapas que ve Polya y las preguntas que se hace en cada una de ellas:

- a) Comprender el problema: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuáles son las condiciones? ¿Es posible cumplirlas? ¿Son suficientes para determinar la incógnita? ¿Son irrelevantes? ¿Contradictorias?
- b) Diseñar un plan: ¿Se conoce algún problema relacionado? ¿Se puede replantear el problema? ¿Se puede convertir en un problema más simple? ¿Se pueden introducir elementos auxiliares?
- c) Ponerlo en práctica: aplicar cada plan, controlar cada paso, comprobar y probar que son correctos....

- d) Examinar la solución: ¿Se puede chequear el resultado?, ¿El argumento? ¿Podría haberse resuelto de otra forma? ¿Se puede usar el resultado o el método para otro problema?

Las estrategias se aprenden con el paso del tiempo, se aplican en contextos particulares y llegan a ser más elaboradas y flexibles, según se vayan utilizando en problemas de mayor complejidad. Podemos, por lo tanto, hacer una recopilación de las estrategias más frecuentes que se suelen utilizar en la resolución de problemas, y que según S. Fernández ,1992, (citado por Jesús Escudero Martín) serían:

- Ensayo-error.
- Empezar por lo fácil, resolver un problema semejante más sencillo.
- Manipular y experimentar manualmente.
- Descomponer el problema en pequeños problemas (simplificar).
- Experimentar y extraer pautas (inducir).
- Resolver problemas análogos (analogía).
- Seguir un método (organización).
- Hacer esquemas, tablas, dibujos (representación).
- Hacer recuento (conteo).
- Utilizar un método de expresión adecuado: verbal, algebraico, gráfico, numérico (codificar, expresión, comunicación).
- Sacar partido de la simetría.
- Deducir y sacar conclusiones.
- Conjeturar.
- Principio del palomar.
- Analizar los casos límite.
- Reformular el problema.
- Suponer que no (reducción al absurdo).
- Empezar por el final (dar el problema por resuelto).

3. Los aspectos metacognitivos

En la práctica de la resolución de problemas matemáticos, hay un momento en el que se hace un análisis de la marcha del proceso; el monitorizar y controlar el progreso de estas actividades, son los elementos que van a formar parte de la metacognición.

Estos aspectos se relacionan con la manera en que se seleccionan y despliegan los recursos matemáticos y las heurísticas de las que se dispone.

4. Los aspectos afectivos y el sistema de creencias

Las creencias dan forma al comportamiento matemático; los aspectos afectivos son la predisposición con la que los alumnos afrontarán el reto de la resolución de problemas. Como docentes no deberíamos olvidar nunca que mucha carga afectiva que adquieren los alumnos depende de nosotros, de nuestra actitud en la enseñanza y en este aspecto haré hincapié en las pruebas y datos que recogí en mi paso por el instituto en el que realicé las prácticas.

5. La comunidad de práctica

Una parte crucial del trabajo del educador, consiste en desarrollar cuidadosamente interacciones que favorezcan la interiorización de estrategias determinadas, formas de razonamiento y posturas conceptuales.

3. DIFICULTADES INICIALES ANTES DE RESOLVER

Podemos afirmar que la primera dificultad que enfrentan los estudiantes en la comprensión lectora matemática es que a veces no comprenden el lenguaje, ya que desconocen las palabras, aunque posean los conocimientos relacionados con las operaciones. Es decir que, para empezar, si no entienden muchos de los vocablos que han leído, no tendrán acceso al léxico. Por esto, el estudiante debe primero asegurarse que comprende todas las palabras, debe aprender a sacarlas por contexto o bien preguntarlas, lo que lo llevará a comprender el texto en su totalidad.

Como ejemplo he querido presentarles a los alumnos de 3 ESO, un problema sencillo, de la forma que ya han resuelto varios; este es el enunciado del problema y al introducir la palabra excede, ha habido diversas respuestas de los alumnos, de las cuales por no extenderme, presentaré dos casos:

- 3.- Las tres cuartas partes de la edad del padre de Juan excede en 15 años a la edad de éste. Hace 4 años, la edad del padre era el doble de la edad del hijo. Hallar las edades de ambos.

$$\frac{3}{4}x = 2y + 15$$

$$x = 2y$$

$$2x = 4y$$

No he sabido

Este alumno, me comenta a posteriori, que no ha sabido hacer el problema porque no sabía lo que significaba la palabra exceder. Claro ejemplo de lo que aquí queremos repasar. Sin embargo, también me encuentro con el caso de la alumna que conoce el significado de la palabra, pero tampoco le sirve de nada, pues lo único que conocía después era el nombre del tema que habíamos trabajado durante varias sesiones en clase.

- 3.- Las tres cuartas partes de la edad del padre de Juan excede en 15 años a la edad de éste. Hace 4 años, la edad del padre era el doble de la edad del hijo. Hallar las edades de ambos.

Las $\frac{3}{4}$ de edad del padre son 15 años más que la edad de Juan.

Hay que plantear un sistema de ecuaciones para resolver el problema.

Però no se siguió porque no se pudo plantear el sistema.

El papel que juega el conocimiento en la resolución de problemas, es un factor que no dejamos de lado, ya que el conocimiento de los contenidos en los que podemos situar a un problema determinado es crucial para su resolución

puesto que el conocimiento de estrategias por muy amplias y generales que sean, no pueden suplir al conocimiento puntual de la materia en concreto, es decir, no podemos sustituir el conocimiento de la materia por estrategias que nos lleven a la solución de problemas; conocimiento y estrategias han de ir de la mano.

3.1 Creando el clima adecuado

Un buen profesor de resolución de problemas es aquél que posee las mismas características que un buen solucionador de problemas y sabe comunicarlas a los otros. En los estudios de la Enseñanza y el Aprendizaje de las matemáticas que he leído para la realización de este trabajo, se reconoce de forma amplia en varios escritos la diferencia entre la razón y la emoción. Debido a que estas dos variables está reconocido que son variables independientes entre sí para el estudio de la enseñanza y aprendizaje, no debemos errar en estudiarlas de forma separada, sino que lo que aquí pretendemos es el estudio de las distintas consecuencias que obtendremos tras la interrelación de ambas variables. Será esencial que para el desarrollo matemático de los alumnos, se tenga en cuenta tanto lo que piensan como lo que sienten.

Por lo tanto podemos decir que es importante lo que pueden hacer los profesores para desarrollar la disposición de los alumnos para la resolución de problemas, creando y manteniendo un ambiente de clase que les anime a explorar, arriesgarse, compartir fracasos y éxitos y preguntarse unos a otros. En tal ambiente de apoyo, los alumnos adquirirán confianza en sus capacidades, voluntad para comprometerse y explorar problemas; los propondrán y serán perseverantes en la búsqueda de soluciones. Una herramienta considerada como importante para crear un clima adecuado de interés, es no descartar ninguna de las proposiciones que los alumnos propongan, por descabellada que parezca; nunca contestaremos de forma que el alumno no quiera volver a proponer por vergüenza, o porque pueda pensar que sus ideas no son válidas; así mismo, no deberíamos permitir a los alumnos, estas críticas que nosotros no vamos a realizar. Las clases en las que

llevemos a cabo preguntas a los alumnos como: ¿alguien tiene una idea de cómo podríamos....? , además de esta forma, ¿a alguno se le ocurre otra forma de llegar al resultado? La interacción de los alumnos en la solución de los problemas en clase, provoca un entrenamiento del cuál se pueden extraer unas pautas para la secuenciación en la resolución de problemas; si esto se lleva a cabo habitualmente, los problemas no serán solo aquellos enunciados con los que se les evalúa, sino una práctica habitual en sus vidas, a la que enfrentarse sin temores; quizás a un alumno, no se le ocurra la primera vez, qué camino coger para la resolución de un problema, pero si dentro del aula, los compañeros aportan ideas, y alguna lleva al fin, esto les ha tenido involucrados, y la resolución ha de ser un éxito conjunto (motivación); creo que además de la práctica en el aula, será necesario que los alumnos se tomen su tiempo en casa con las tareas de pensar en la resolución de problemas, puesto que las horas para impartir son escasas y con mucho temario, pero debemos darle importancia a esto a la hora de recogida de datos en el aula, valorando en la evaluación la dedicación de los alumnos al pensamiento de problemas en su tarea diaria.

4. LA INTERACCION AFECTIVA Y EL APRENDIZAJE MATEMATICO. CAUSAS Y EFECTOS

Tras una placentera lectura de lo que el profesor Miguel De Guzman 2006 en su libro “Para pensar mejor”, hemos recogido uno de los factores que hemos considerado fundamental en la resolución de problemas de matemáticas: El factor afectivo.

Hemos de partir de una **confianza** en nosotros mismos. Debemos saber que la diferencia entre un virtuoso de una actividad cualquiera, y el promedio, se debe fundamentalmente a la frecuencia de su entrenamiento y no tanto a la diferencia de su capacidad inicial. El ejercicio del pensamiento tiene poca amistad con la prisa; la serenidad es necesaria para el proceso del pensamiento, y si nos hemos de enfrentar a una resolución de un problema con un tiempo limitado o con prisa, hemos de procurar haber ensayado con

anterioridad. Necesitaremos de una actitud de gusto por el ejercicio del pensamiento, que esto nos reporte una satisfacción, el gusto por el reto.

Para poder analizar un poco más en profundidad las consecuencias que podemos obtener en la interacción de las variables que aquí tratamos (afectividad-aprendizaje), seguiremos este apartado basándonos en la clasificación que Gómez-Chacón, 2002, hace del afecto y de los episodios emocionales:

Dentro de los afectos que van a influir en la enseñanza, la clasificación la hace de esta forma:

- Afecto local: al que describe como el afecto que afecta de forma momentánea al aprendizaje en un momento concreto.
- Afecto global: son las influencias socioculturales de cada alumno y la forma que se interiorizan esos afectos locales, configurando una estructura de creencia, la expectativa que uno tiene de éxito o fracaso de sí mismo sobre un tema en concreto, en este caso, la resolución de problemas de matemáticas.

Contextualizamos nuestro ejercicio al aula de matemáticas de un Instituto, en los cursos de enseñanza obligatoria, podríamos seguir para el desarrollo de nuestro trabajo, la clasificación de “episodios emocionales de los estudiantes”:

1. Enfrentarse al enunciado de un problema

Ya hemos tratado previamente la dificultad que encuentran a veces los alumnos en la comprensión del enunciado del problema, problema verbal. En este apartado, vamos a trasladarnos al sentimiento que recorre al estudiante cuando ha de enfrentarse al enunciado del problema; éste espera encontrar un enunciado con cierta similitud a los problemas realizados en el aula consensuados con el profesor, y que dan lugar a un mecanismo para la resolución o saber a través de qué campo del conocimiento ha de resolverse. Si el alumno no encuentra la similitud o la ruta para llegar a la resolución, esto le crea un bloqueo, y un abandono de la resolución del problema.

2. Las influencias afectivas dependen de la tipología de estrategias que se utilicen

El conocimiento del problema va a afectar a la confianza en el estudiante en sí mismo. Son los propios alumnos los que han de aprender en la resolución qué hacer y cuando hacerlo; si no consiguen depurar esa dinámica y es siempre el profesor u otra persona las que le dicen cómo y qué hacer para resolver, no adquirirán las destrezas necesarias en su crecimiento como resolutores. Sin embargo, desde el punto de vista del docente, no debemos dejar a un lado el saber que hay que realizar una graduación de los distintos problemas, no solo en cuanto a dificultad, sino también en las variables que han de utilizar para resolver. En este apartado podríamos conectar con uno de los consejos de Polya mencionados más arriba, de enseñar a los alumnos a simplificar un problema en partes más sencillas, para darles herramientas que les vayan generando confianza.

3. Abandono el problema

En el estudio de los sentimientos que provocan que un alumno que está resolviendo un problema, lo abandone, se ha encontrado de forma reiterativa la ansiedad; ésta, en el nivel de resolución de problemas consiste en el miedo extremo a cometer errores, miedo a cuando falla la memoria y al desconocimiento de cómo persistir en el intento de la resolución. La ansiedad crea una disminución en la atención, en la capacidad de recuperación de conocimientos desde la memoria y una reducción en el razonamiento. Este sentimiento provoca una frustración que impide el progreso, y es donde se empiezan a formar las falsas creencias de que no se sabe hacer y por lo tanto surge el rechazo a la actividad.

El miedo del que hablamos, puede orientarse de dos formas:

- hacia el bloqueo y la negación
- como heurística que nos oriente a tranquilizarnos y empezar de nuevo de otra forma.

Ya Polya hacía mención a la necesidad de la superación del miedo en el siguiente texto:

"Sería un error el creer que la solución de un problema es un « asunto puramente intelectual »; la determinación, las emociones, juegan un papel importante. Una determinación un tanto tibia, un vago deseo de hacer lo menos posible pueden bastar a un problema de rutina que se plantea en la clase, pero, para resolver un problema científico serio, hace falta una fuerza de voluntad capaz de resistir durante años de trabajos amargos fracasos."
(Polya, Como plantear y resolver problemas: pp. 80-81).

La reacción que cada uno tenemos frente al miedo, es distinta. Hay que racionalizar el proceso de enfrentarse al miedo, y en el momento en el que sepamos controlar razonadamente este proceso, desaparecerá el stress que provoca. Por lo tanto, se ha de trabajar con los alumnos aquellas circunstancias en las que ellos no se encuentren a la altura intelectual, ya que ésta es muchas veces causa de abandono.

4. El autoconocimiento

Como ya hemos reconocido la importancia de la actividad emocional en el aprendizaje, existen unas pautas que serán de ayuda para regular este proceso emocional en la resolución de los problemas

- a) Reconocimiento de nuestro carácter, nuestra forma de aprendizaje y nuestras reacciones.
- b) Aprender a controlar nuestros impulsos, a organizarnos y a utilizar todo ello en nuestro beneficio.
- c) Conocer nuestras habilidades sociales, la facilidad para trabajar en grupo, y para la toma de decisiones.

Por lo tanto, siendo estos tres puntos tan importantes para adquirir o potenciar la capacidad significativa del aprendizaje, será relevante que todo este proceso se encuentre incluido en la actividad docente para aquellos alumnos que no lo tengan adquirido.

Son Sanmartín y Jorba, 1995, los autores que señalan los siguientes elementos como facilitadores de la autorregulación de los aprendizajes:

- Identificar los motivos y los objetivos de las actividades de aprendizaje.
- Anticipar y planificar las operaciones necesarias para realizar la tarea.
- Identificar los criterios de evaluación.
- Promover el trabajo por proyectos.

5. Gestionar la actividad emocional

Este paso consiste en saber reconocer cuáles son las reacciones que se obtienen ante un problema; debemos saber reconocer cuál es el carácter de la reacción y si esta es de carácter negativo, intentar deshacernos de ella.

6. Estilo de aprendizaje

Muchos autores coinciden en definirlo así: "se trata de cómo la mente procesa la información o cómo es influida por las percepciones de cada individuo" (Alonso, Gallego y Honey, 1994). Lo definen como los rasgos afectivos, cognitivos y fisiológicos, que sirven como indicadores relativamente estables, de cómo los estudiantes perciben, interaccionan y responden a sus ambientes de aprendizaje. Es decir, el estilo de aprendizaje no es una cualidad inamovible de la personalidad, sino que es la interacción de las variables personales con las contextuales.

7. Mitos y creencias. Trabajar de forma constructiva

Las ideas y opiniones que el alumno tiene sobre las matemáticas en el contexto en el que estamos aplicando estos episodios emocionales, están arraigados de forma muy profunda en ellos. Estas creencias van a influir en la forma que estudien las matemáticas; y algunas de estas creencias que tienen se deben a la forma de impartir la materia en el aula, por ejemplo, el enunciado de los problemas, la forma de evaluar, las tareas del grupo y las tareas a realizar. Es aquí donde entra a escena un trabajo muy delicado que ha de

realizar el profesor y es reconducir al alumno desde sus errores y deficientes concepciones, hacia un conocimiento matemático que sea validable.

8. El profesor, su actitud

El pensamiento y por tanto la actitud del profesor, van a determinar la forma en la que los alumnos desarrollen sus creencias positivas, o bien sus dificultades de aprendizaje (bloqueos) ante la resolución de los distintos tipos de problemas.

9. ¡Me he quedado en blanco!

Esta frase que hemos oído prácticamente todos en alguna ocasión, no es más que la imposibilidad, con los medios que tengo y los conocimientos, de resolver ese problema, aunque en otra ocasión lo haya hecho. Esto crea unas falsas creencias al alumno, y pierde autoconfianza porque no se encuentra capaz de resolver el problema. Muchas de estas situaciones se podrían resolver incidiendo en conocimientos de base que no se adquirieron en su debido momento.

10. Los factores contextuales y las creencias matemáticas

Los alumnos, adquieren durante su vida escolar, unos roles que les contextualizan. La pertenencia a los distintos grupos, le pueden hacer adquirir creencias que no son reales y que por sí mismas van a dificultar el aprendizaje de determinados alumnos.

Dentro de los aspectos afectivos, no querría dejar de mencionar que tiene un carácter relevante como hemos visto, la actitud, entendida como *“una predisposición evaluativa (positiva o negativa) que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento ((Hart, 1989, en Ana Caballero Carrasco, Lorenzo J. Blanco Nieto, Eloísa Guerrero Barona, 2009). En el ámbito psicopedagógico se definen las actitudes en función de tres componentes: el cognitivo (creencias, expectativas, preferencias...), el afectivo (sentimientos, emociones y estados de ánimo) y el comportamental (conductas e intenciones de acción).”*

Con esta información sobre el peso que tiene la variable afectiva en el aprendizaje de la asignatura de matemáticas para los alumnos de la ESO, creo que sería conveniente, se crearan distintas líneas de investigación, en las que se estudie la forma de incluir o articular, de forma efectiva la dimensión afectiva en los currículos escolares.

5. ¡CARAY CON EL ALGEBRA!

Dentro del currículo de secundaria, los alumnos comienzan con una nueva incorporación a su conocimiento que es el Algebra. El Algebra está considerada por muchos, como uno de los descubrimientos más portentosos cuando no uno de los más fundamentales en las matemáticas. Si explicamos lo que el Algebra ha supuesto para el desarrollo de las matemáticas, podemos entender estas afirmaciones ya que con ella se han inventado signos y símbolos para expresar todas las cantidades, sean de la naturaleza que sean; mediante la introducción de variables se han conseguido dar teoremas generales, con demostraciones rigurosas, de forma que con uno de ellos, se expresen infinitos casos. Por lo tanto parece seguro que habrá que incluir el Algebra en el currículo de Matemáticas de una forma amplia, y no solo como un curso. Dada la importancia del Algebra, como acabamos de ver, la forma de enseñar y aprender ésta en los primeros cursos de secundaria en la educación española, serán determinantes para la evolución de su conocimiento en estadios posteriores. El tránsito de la Aritmética al Álgebra está lleno de vacíos en el currículo escolar; el conocimiento de las formas de representación que utilizan los alumnos para resolver los problemas verbales algebraicos, debe ser una de las herramientas que permitan al docente conocer estos vacíos y desarrollar estrategias de enseñanza y de aprendizaje, para garantizar que estas lagunas no se produzcan. Una gran dificultad que encuentran los estudiantes es que no identifican las variables que entran en juego y cómo se relacionan. Para superar este obstáculo, deben aprender a hacerse preguntas que los lleven a analizar el problema, es decir a separarlo por partes. Una vez

analizado esto, es decir separadas estas partes, entonces debe sintetizar al preguntarse "¿cómo se relacionan?" Es decir: ¿qué tienen en común, qué es lo que las une, junta o bien las separa, qué es lo que se repite, qué es lo que las divide, cuál es la excepción, cuáles son las características que entran en el problema? Veamos un problema en el que detectamos en un porcentaje elevadísimo, una laguna del paso al Álgebra de alumnos que están en 3º de la ESO; error muy común en una misma clase, tendría que dar pistas suficientes al docente de cuál es esta laguna en su aula, y poner remedio para solventarlo. Esta es una muestra de un ejercicio resuelto por los alumnos de una misma clase de 3º de la ESO; no es mi intención mostrar la resolución, por varios alumnos, del mismo ejercicio, sin un motivo, y este es dar una idea de la forma en la que estos alumnos han resuelto en un porcentaje muy alto el problema, sin introducir el Álgebra en la resolución, y llegando a la solución deseada.

2.- En una librería, Ana compra un libro con la tercera parte de su dinero y un cómic con las dos terceras partes de lo que le quedaba. Al salir de la librería tenía 12 euros. ¿Cuánto dinero tenía Ana?

$$\frac{1}{3} \text{ de } \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \rightarrow \text{Halla lo que le ha quedado del dinero que le ha sobrado antes}$$

$$\frac{2}{9} = 12€ \rightarrow \frac{1}{9} = 6€ \rightarrow \frac{9}{9} = 54€ \rightarrow \text{Halla cuántos euros es un noveno para poder hallar cuántos euros son los nueve novenos (total)}$$

54 euros tenía Ana

Aunque el planteamiento es correcto, aquí se iguala $2/9=12€$

No se introduce la variable, los pasos están correctamente explicados, resultado correcto

2.- En una librería, Ana compra un libro con la tercera parte de su dinero y un cómic con las dos terceras partes de lo que le quedaba. Al salir de la librería tenía 12 euros. ¿Cuánto dinero tenía Ana?

$$\frac{1}{3} \text{ de } \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \rightarrow \text{es } 6 \text{ que sobra después de comprar el libro y el comic}$$

$$\frac{2}{9} = 12€ \rightarrow \frac{1}{9} = 6€ \rightarrow 9 \cdot 6 = 54€$$

54 € tenía al principio

Este alumno, realiza el mismo planeamiento, sin variable. Solución correcta, pero con la falta también de las variables. $2/9=12€$

2.- En una librería, Ana compra un libro con la tercera parte de su dinero y un cómic con las dos terceras partes de lo que le quedaba. Al salir de la librería tenía 12 euros. ¿Cuánto dinero tenía Ana? 54

Yo lo he hecho a la inversa

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \quad 12€ = \frac{2}{9} \quad 6€ = \frac{1}{9} \quad 54 = 1$$

Un tercer caso, que vemos es muy parecido en forma a los anteriores.

2.- En una librería, Ana compra un libro con la tercera parte de su dinero y un cómic con las dos terceras partes de lo que le quedaba. Al salir de la librería tenía 12 euros. ¿Cuánto dinero tenía Ana?

Ana

Libro $\frac{1}{3}$ €

Cómic $\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{3}$ del total de €

Entonces $\frac{1}{3}$ de $\frac{2}{3} = 12€$, por lo que $\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{3} = 36€$.

Si $\frac{2}{3}$ del dinero total es 36€, $\frac{3}{3}$ del dinero que tenía Ana es 54€

En este caso, la explicación en forma de texto que realiza el alumno, da la información suficiente para ver que él entiende el ejercicio, sabe cuál debe ser el procedimiento, y llega al resultado correcto, sin pasar por el Álgebra.

Si bien es cierto que respecto a los criterios de **Evaluación**, en el currículo de secundaria, y tal y como indica el RD 1631/2006, de 29 de Diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria estos son algunos de los criterios que tienen relación con el Álgebra, junto a un breve comentario:

Bloque 3. Álgebra (2º ESO, contenidos mínimos):

"...Utilización de las ecuaciones para la resolución de problemas. Resolución de estos mismos problemas por métodos no algebraicos: ensayo y error dirigido."

Su criterio de evaluación es como sigue:

"Se pretende comprobar la capacidad de utilizar el lenguaje algebraico para generalizar propiedades sencillas y simbolizar relaciones, así como plantear ecuaciones de primer grado para resolverlas por métodos algebraicos y también por métodos de ensayo y error. Se pretende evaluar, también, la capacidad para poner en práctica estrategias personales como alternativa al

álgebra a la hora de plantear y resolver los problemas. Asimismo, se ha de procurar valorar la coherencia de los resultados.”

Este criterio va dirigido a comprobar que el estudiante es capaz de utilizar las herramientas algebraicas en la resolución de problemas. Para ello ha de ser capaz de utilizar los símbolos, con las convenientes expresiones habituales, para el planteamiento de ecuaciones y resolverlas por algún medio fiable, que no necesariamente ha de ser la manipulación algebraica de las expresiones. Así pues, en la evaluación de estos procedimientos, no debemos desechar las soluciones que no hayan sido alcanzadas a través de los símbolos algebraicos, pero que su resolución tenga sentido y alcance buen fin. Es por lo tanto, que en la calificación de estos ejercicios, no consideré como fallo esta forma de resolver, pero lo que sí que hice, fue que a la hora de entregar de vuelta a los alumnos las correcciones, les hice ver a cada uno, que aunque la solución era correcta y además habían explicado los pasos, (parte fundamental que se les pedía en el enunciado), no habían utilizado las herramientas que se les habían enseñado en clase para la resolución, que era la introducción de variables, y que en este caso, el ejercicio no presentaba mayor dificultad para resolverlo de la forma que lo hicieron, pero que en un futuro, los problemas adquirirían mayor complejidad y les sería de gran ayuda y necesidad la introducción de las variables, así que empezando a usarlas con problemas de fácil resolución, comenzarían con el "entrenamiento" necesario para desarrollar las habilidades del uso de las variables para la resolución de problemas.

"Gran parte de las dificultades de los alumnos para resolver problemas tienen que ver con la comprensión del enunciado. La investigación demuestra que muchos alumnos no pueden identificar la información relevante que se proporciona en los problemas y tampoco logran la imagen o representación mental" (M A. Sánchez, 1995).

Esta cita, nos abre paso al siguiente factor que influye de forma significativa a la hora de la resolución de problemas de matemáticas.

6. LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y SU ENORME IMPORTANCIA

La representación es una actividad esencial en el desarrollo del pensamiento matemático. Existe una clasificación que la divide en dos: representación interna y representación externa. En éste contexto, vamos a considerar representación como los enunciados, la tablas, los diagramas, las expresiones realizadas mediante símbolos, las gráficas, y aquellas notaciones utilizadas frecuentemente en las matemáticas; éste tipo de representación es la considerada como externa. No será nuestro propósito en este trabajo entrar en la clasificación (Kaput 1987), pero sí dejar constancia de ella, para ser precavidos en el uso del término representación. Los sistemas de representación gráfica externa, podemos decir que son el medio por el que las personas son capaces de exteriorizar sus conocimientos, haciendo que los demás sean capaces de conocerlos. Las formas de representación por las que una persona es capaz de expresarse, mostrará cómo es la información y conocimiento que tiene sobre determinado concepto.

Dentro de los muchos factores que favorecen la resolución de los problemas de matemáticas, la representación gráfica es para muchos autores uno fundamental. Adentrándonos en ésta parcela, los problemas verbales algebraicos, que admiten múltiples tipos de representación para su resolución correcta, proporcionan al alumno la oportunidad para que construya un sistema de representación propio más o menos sofisticado, que favorezca el desarrollo de las competencias matemáticas de resolución de problemas pero sobre todo la competencia de modelización; el alumno será capaz de llevar a cabo esta competencia a nivel básico y realizando trabajo en esta dirección en la enseñanza aprendizaje de la representación, en un futuro sus habilidades se incrementarán y será capaz de realizar trabajos de mayor dificultad al tener buena base.

A la hora de elegir problemas donde el Algebra esté presente en la resolución, se recomienda la elección de contextos útiles, cercanos al entorno del escolar o familiar en el cual se desarrollen las historias de los problemas

verbales; ello favorecerá el aprendizaje significativo en los alumnos y facilitará que el estudiante adquiera los sistemas de representación del pensamiento algebraico que el profesor pretende en cada parcela de la materia ya que los contextos cercanos favorecen la comprensión y favorecen la interiorización de los contenidos. La mayoría de los especialistas en la elaboración de problemas de matemáticas inciden en que si la contextualización es cercana al entorno escolar, será muy probable que se facilite al alumno la comprensión de la situación descrita en el problema, y por lo tanto la relación existente entre los datos y las incógnitas.

Un aspecto que considero importante y que se puede deducir fácilmente, es la idea de que no se puede reducir un concepto matemático a uno cualquiera de sus modos de representación; la riqueza de esta área de las matemáticas viene dada por que cada concepto admite varias representaciones. Esta variedad en las representaciones podemos deducirla de dos orígenes: la representación de la variable como un hecho específico, y la representación de ésta interactuando con distintos conceptos u otras variables.

Debido a la enorme importancia, en la didáctica matemática, del saber cómo los alumnos adquieren el conocimiento matemático, se han llevado a cabo numerosos estudios sobre este tema; a través de ellos conocemos que este conocimiento se puede extraer en un principio que de la representación gráfica que los alumnos hacen junto con los argumentos que utilizan para la resolución de tareas y problemas.

En este sentido interpretamos algunas ideas de Hiebert y Carpenter 1992:

“Las matemáticas escolares son comprendidas si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de comprensión viene determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido a fondo si se liga a redes existentes con conexiones más numerosas o más fuertes” (p. 67).

Las representaciones gráficas o dibujos, ayudan de manera importante a dar un carácter intuitivo y a favorecer la comprensión de las relaciones

algebraicas. De esta manera, éstas, pueden establecer un puente entre el pensamiento aritmético y el algebraico, a través de acercamientos de los números y los gráficos que nos lleven a las relaciones algebraicas.

Vista la eficacia que puede suponer la representación gráfica en el paso de los sistemas de representación numéricos al Algebra, podemos aportar que los gráficos necesitan de una mayor presencia en el sistema educativo, incluyéndolos en las herramientas a enseñar a los alumnos, debiendo ser introducidos en el currículo de una forma organizada y sistemática. Es difícil encontrar en los currículos básicos del Algebra escolar en nuestro país, una introducción coordinada de los diferentes sistemas de representación. La introducción de la enseñanza y el aprendizaje de las distintas representaciones gráficas, mejorará la comprensión y, por lo tanto, el conocimiento de los contenidos de Algebra.

Dentro de los sistemas de representación gráfica externa, y basándonos en la Tesis Doctoral de Francisco Fernández García, 1997, podemos considerar tres sistemas básicos de signos:

- *Númericos*
- *Gráficos*
- *Simbólicos*

A través de estos tres sistemas básicos de signos podemos obtener cinco tipos de representaciones. Estas son las siguientes:

- *Ensayo y error, cuyos signos son numéricos y cuyas relaciones se producen al conjeturar y probar sistemáticamente valores numéricos para las incógnitas.* Este sistema necesita de mucha memoria, y además requiere de mucho tiempo.

De mi paso por las prácticas del instituto, he podido recoger el siguiente ejercicio que ejemplifica éste método de Ensayo-Error; reconocemos que podría llevarnos a pensar que ha llegado a obtener el resultado del 8 por otro método (factor de 52-20), pero si consideramos que el orden de ejecución que ha realizado es primero el de la parte inferior izquierda de la resolución, su resolución se acerca al Ensayo-Error que aquí pretendemos representar.

4.- Tenemos dos depósitos de agua con la misma capacidad. El depósito A tiene 20 litros y hemos de echarle 9 cubos más para que se llene. El depósito B tiene 52 litros y hay que echarle 5 cubos más para llenarlo. ¿Qué cantidad de agua cabe en cada depósito?

$$A = 20L + 9 \text{ cubos se llena} \rightarrow a \text{ 8L por cubo el depósito llega a } 92L = 8 \cdot 9 + 20$$

$$B = 52L + 5 \text{ cubos se llena} \rightarrow a \text{ 8L por cubo el depósito llega a } 92L = 8 \cdot 5 + 52$$

A	B
20	52
+8 88	60 + 8
+8 36	68 + 8
+8 44	76 ..
.. 52	84 ..
.. 60	92 ..
.. 68	
76	
84	
92	

Número = cualquier múltiplo de $52 - 20 \rightarrow 32$
 $\begin{array}{r} 32 \\ 1 \\ \hline 8 \cdot 4 \end{array}$

- Parte-Todo: las relaciones que implica el problema se plantean en su mayoría de forma numérica, considerando los datos desconocidos como parte del resultado de operar los datos conocidos y comparando el total con la parte. En algunos casos pueden establecerse ecuaciones, pero no se utilizan las reglas de la sintaxis del álgebra, sino operaciones aritméticas basadas en la comparación e igualación (balanza), no generaliza pero establece unas relaciones entre cantidades que no son operaciones aisladas: existe un plan de actuación.

2.- En una librería, Ana compra un libro con la tercera parte de su dinero y un cómic con las dos terceras partes de lo que le quedaba. Al salir de la librería tenía 12 euros. ¿Cuánto dinero tenía Ana?

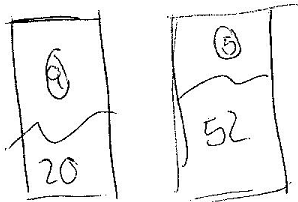
$$\frac{1}{3} \text{ de } \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \rightarrow \text{es } 6 \text{ que resta después de comprar el libro y el cómic}$$

$$\frac{2}{9} = 12€ \rightarrow \frac{1}{9} = 6€ \rightarrow 9 \cdot 6 = 54€$$

54 € tenía al principio

- **Gráfico:** entendemos este sistema de representación cuando se utiliza un sistema de representación visual (representación física, icónica, geométrica o diagramática), en definitiva un código gráfico, para plantear las relaciones entre datos e incógnitas del problema, sin ningún otro elemento que podamos considerar simbólico. cuando los signos son gráficos (en sentido amplio) y las relaciones se sustentan en los propios gráficos.

4.- Tenemos dos depósitos de agua con la misma capacidad. El depósito A tiene 20 litros y hemos de echarle 9 cubos más para que se llene. El depósito B tiene 52 litros y hay que echarle 5 cubos más para llenarlo. ¿Qué cantidad de agua cabe en cada depósito?



$$\begin{aligned} \text{Litros diferencia} &= 52 - 20 = 32 \text{ L} \\ \text{Cubos } \& \text{ echados de diferencia} &= 4 \text{ cubos } (9 - 5 = 4) \\ \frac{32}{4} &= 8 \text{ L. } 8 \text{ l capacidad cubo.} \\ 8 \cdot 9 &= 72 \text{ L. se echan al cubo A.} \\ 20 + 72 &= 92 \text{ L. capacidad.} \\ 8 \cdot 5 &= 40 \text{ L. se echan al cubo B. } 40 + 52 \text{ L. capacidad} \end{aligned}$$

- **Gráfico-Simbólico:** se trata de establecer las relaciones mediante un lenguaje simbólico (alfabético), pero con un apoyo explícito en un gráfico o dibujo en donde se representan los datos y las incógnitas, identificando los elementos que intervienen en las relaciones y, a veces, las propias relaciones. Este sistema de representación avanza en complejidad sobre el anterior, pero aún necesita un soporte concreto, una representación en la que se visualicen los datos y las incógnitas del problema. Aún así, no alcanza la formalidad de la generalización, no llega a una abstracción completa.

2.- En una librería, Ana compra un libro con la tercera parte de su dinero y un cómic con las dos terceras partes de lo que le quedaba. Al salir de la librería tenía 12 euros. ¿Cuánto dinero tenía Ana?

Resuelto de 2 formas diferentes.

1º Realizo un pequeño dibujo:

2º Ahora voy a resolverlo con una ecuación:

$$\left(\frac{1}{3} \text{ de } x\right) + \left(\frac{2}{3} \text{ de } \left(\frac{2}{3} \text{ de } x\right)\right) + 12 = x$$

$$\frac{x}{3} + \left(\frac{2}{3} \text{ de } \frac{2x}{3}\right) + 12 = x$$

$$\frac{x}{3} + \frac{4x}{9} + 12 = x \rightarrow \frac{3x}{9} + \frac{4x}{9} + \frac{108}{9} = \frac{9x}{9}$$

$$3x + 4x + 108 = 9x$$

$$108 = 9x - 7x$$

$$108 = 2x \rightarrow x = \frac{108}{2} = 54 \text{ €}$$

como Andy 9 → $6 \cdot 9 = 54 \text{ €}$
tenía Ana.

- Simbólico: se presenta cuando se utiliza un lenguaje solo y exclusivamente abstracto, usualmente alfabético, es decir un lenguaje algebraico puro en el que tanto los signos como las relaciones son simbólico-alfabéticas.

5.- Para un trabajo manual, Rocío ha comprado dos listones cortos y 2 listones largos que si se ponen uno detrás de otro miden en total 242 cm. Daniel necesita algunos más y compra 3 cortos y 4 largos que unidos miden 446 cm. ¿Cuánto mide cada listón?

Cortos miden x
largos miden y

$$\begin{cases} 3x + 4y = 446 \\ 2x + 2y = 242 \end{cases}$$

$$(-2) \cdot 4x - 4y = -242$$

$$2(38) + 2y = 242$$

$$76 + 2y = 242$$

$$2y = 242 - 76$$

$$y = \frac{166}{2} = 83 \text{ cm miden los largos}$$

$$x = 38 \text{ cm miden los cortos}$$

En relación con la importancia de la representación gráfica en la Enseñanza-Aprendizaje de las matemáticas es Siegler, 2003, el que afirma que aunque los alumnos trabajen bien en las clases de Álgebra en matemáticas, es bastante frecuente que fallen en la representación de situaciones concretas en las que trabajan con ecuaciones algebraicas, ya que están acostumbrados a trabajar las ecuaciones como una manipulación de símbolos que pierde toda su conexión con la vida real.

Y es en esta dirección en la que Duval ,1993b apunta:

“..el conocimiento asociado a un concepto es estable en un individuo, si él puede articular diferentes representaciones del concepto sin contradicciones” (p.257)

Así pues la conversión o transformación entre las distintas representaciones que un concepto tiene, será posible cuando se dominen los distintos sistemas semióticos, cuestión esta que no siempre suele suceder. Podemos poner un ejemplo bastante significativo de las conversiones o transformaciones y comprobar la complejidad que puede suponer para un alumno su transformación y por lo tanto su comprensión matemática. El ejemplo es el siguiente:

La mayoría de los estudiantes de secundaria son capaces de reconocer que

$$(n-1)+n+(n+1)$$

es interpretada como la suma de tres números enteros consecutivos, y que la expresión

$$3n$$

se interpreta como el triple de un número entero y que ambas expresiones son equivalentes

$$(n-1)+n+(n+1) = 3n \quad \text{para todo número entero } n$$

Pero esto no garantiza que los alumnos reconozcan que la expresión

$$(n-1)+n+(n+1)$$

sea interpretada como el triple de un número. En éste caso, aunque hayan establecido una relación de la sintaxis de las expresiones ello no implica que sean capaces de reconocer la equivalencia semántica.

La importancia que ha suscitado el tema de la representación gráfica en las matemáticas en las últimas décadas, ha provocado dos cambios didácticos importantes:

- a) La primera pasa por los libros de texto y los manuales de los alumnos, que han pasado de ser meros textos escritos a desarrollar progresivamente una incorporación de esquemas, figuras, cuadros e ilustraciones, para los distintos conceptos que en ellos se trata.
- b) El segundo cambio importante que se ha llevado a cabo es la creciente investigación que se ha desarrollado en torno a la definición de “representación”; una de las conclusiones más importantes es que el incremento de la visualización que se produce en los trabajos con representaciones gráficas, mejora el aprendizaje de los contenidos matemáticos.

Esta importancia en la representación gráfica, ha de trasladarse a las aulas, ya que la forma en la que el profesor se acerca a la enseñanza de la representación gráfica es crucial para el entendimiento de los distintos nexos entre concepto y representación. Será necesario, en las aulas de matemáticas, introducir tareas que requieran del uso coherente de distintas representaciones; será la tecnología una herramienta fructífera para la creación de conceptos matemáticos más profundos en los alumnos que deriven en procesos más exitosos para ellos en la resolución de problemas.

La representación en matemáticas y su enseñanza, tienen al menos dos funciones:

- a) La comunicación: ésta función es evidente ya que tanto en la comunidad matemática como en la enseñanza de ésta disciplina, es necesario el sistema de representación, que permita de manera concisa comunicar el contenido matemático y los métodos para su conocimiento.
- b) Soporte de los procesos del conocimiento: esto es debido a que los objetos de estudio de la matemática son construcciones que realiza la mente, y necesitamos de representaciones para interactuar con ellos.

Existe una creciente importancia de la representación en la comunidad matemática, siendo éste un tema de discusión muy habitual en las conferencias y estudios de los eruditos. Una muestra de todo ello es la inclusión de las representaciones en las discusiones y en la confección del currículo de matemáticas.

El Consejo Nacional de los Profesores de Matemáticas (NCTM) en su documento *Principles and Standards for School Mathematics, 2000*, propone diez Estándares, de los cuales uno va referido a la Representación; en la presentación de éste se comenta lo siguiente:

“La forma en que las ideas matemáticas son representadas, es fundamental para que la gente pueda comprender y usar esas ideas [...]”

“Algunas formas de representación, tales como los diagramas, gráficas y expresiones simbólicas, han sido, desde hace mucho tiempo, parte de las matemáticas escolares. Desafortunadamente estas representaciones y otras, han sido enseñadas y aprendidas como si fueran fines en sí mismas. Las representaciones deben ser tratadas como elementos esenciales para apoyar la comprensión de los estudiantes de los conceptos y relaciones matemáticas; en comunicar acercamientos, argumentos e ideas matemáticas a uno mismo y a los demás; en reconocer conexiones entre conceptos matemáticos relacionados; y en aplicar las matemáticas a situaciones de problemas realísticos a través de la modelización.

Las nuevas formas de representación asociadas con la tecnología electrónica generan una necesidad aún más grande de atención instruccional en representación.” (Rico, L; 1997)

Deduciendo de todos estos estudios de la importancia de la representación, es indudable que habrá que situar a los alumnos en situaciones en las que se tengan que enfrentar a los distintos tipos de representaciones, en los distintos contextos, todo ello considerado factor fundamental para adquirir una competencia matemática.

Así en el desglose de este trabajo, donde he comenzado con una exposición de los primeros problemas con los que los alumnos se encuentran a

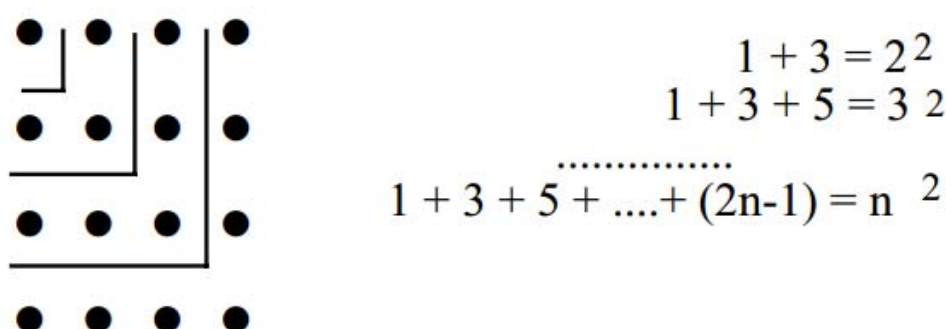
la hora de la resolución de problemas de matemáticas, hemos visto que los enunciados y su comprensión tienen una gran influencia en el fin o resolución; podemos por lo tanto añadir, ésta nueva variable que es la representación; la relación entre el lenguaje natural y los símbolos utilizados en el Álgebra o el Cálculo han sido objeto de muchos estudios, y en gran parte de ellos la comprensión del lenguaje se contextualiza en la resolución de problemas. Durante la etapa escolar, el texto que han de leer los alumnos en las clases de matemáticas en muchas ocasiones se reduce a los enunciados de los problemas. A la hora de resolver problemas el procesar correctamente la información verbal ayuda a la construcción de representaciones internas, y éstas representaciones internas provenientes del enunciado del problema, constituye el primer escalón de la adquisición de competencia. Las palabras con las que se forme el enunciado del problema van a influenciar las representaciones que se escojan y por tanto las estrategias que se utilicen para la resolución del citado problema. Así una dificultad de comprensión no se puede resolver solo actuando en los aspectos denominados formales de la comunicación, sino que hemos de acercarnos también a los contenidos; si el profesor adquiriera diversos tipos de pensar y razonar, es muy probable que le llevara a una forma diferente de comunicación con el alumnado y por consiguiente a unos contenidos de discusión más fructíferos para el desarrollo del alumno.

6.1 Ver para entender

Para finalizar esta sección, quiero comentar que me han parecido muy interesantes, las explicaciones que en el libro de Luis Rico: La educación matemática en la enseñanza secundaria (1997) en su capítulo 4 escrito por Encarnación Castro y Enrique Castro, se hacen de la visualización y de la representación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En éste capítulo se menciona la importancia de que la comprensión que se obtiene al procesar la información visual y la comprensión obtenida por el procesamiento de los datos analíticos, son complementarias, por lo que ambos códigos han de combinarse para el aprendizaje.

Serán Bull y Wittrock, 1973, los que sostienen la teoría de que las personas que dibujan por sí mismos un esquema o diagrama para formarse en ellos un concepto, son capaces de recordar ese concepto con mayor claridad que si se les ha proporcionado un dibujo con éste; y además las personas que realizan un dibujo, aprenden mejor el concepto que aquellos que solo conocen el significado verbal. Así pues no es de extrañar que haya una conclusión aceptada por investigadores y especialistas y es que las capacidades que se adquieren a través del pensamiento visual van a colaborar con los alumnos en crear nuevos caminos para hacer y pensar matemáticas.

La visualización tiene un importante papel en el razonamiento tanto inductivo como deductivo. Pongamos como ejemplo el caso siguiente:



La regla que se obtiene aquí dice que “el cuadrado de un número natural es igual a la suma de tantos números impares como indique dicho número.”

En éste caso, la visualización actúa como ayuda para comprender una regla y además crea un razonamiento de forma inductiva. Si se realiza un estudio profundo de las características de las habilidades del pensamiento lógico, se observa que cada una de ellas permite asentar la evolución del aprendizaje de la representación gráfica, ya que desde la visualización de un objeto o concepto hasta que se realiza su correcta clasificación se lleva a cabo el proceso de construcción requerido para el aprendizaje de los contenidos.

Existen muchas investigaciones que aportan muestras que indican que muchos problemas del aprendizaje del Cálculo, Álgebra y Geometría se podrían suavizar e incluso erradicar si se enseñara a los alumnos a usar y a interiorizar las representaciones visuales que van asociadas a los conceptos que no aprenden. Estas investigaciones nos descubren también que muchos docentes se niegan a esta enseñanza y que ello es debido a que una enseñanza basada en la visualización, requiere que los docentes tengan una formación adecuada para poder poner en marcha esas habilidades pedagógicas, ya que no solo basta con conocer y entender la matemática sino saberla explicar de forma visual.

De ahí que espero que este trabajo de fin de Master que hemos elaborado, me sirva de ahora en adelante, para incorporar en mi didáctica, algunos factores que determinan la enseñanza y aprendizaje de la resolución de los problemas en matemáticas.

7. CONCLUSIONES

Tras este trabajo, me gustaría exponer las conclusiones a las que hemos llegado.

- a) La enseñanza y el aprendizaje de estrategias heurísticas apropiadas, que han sido analizadas y estudiadas por matemáticos expertos e investigadores en didáctica, facilitan de forma notoria el desarrollo de las competencias en Resolución de Problemas.
- b) Será la comprensión lectora un aspecto clave para la correcta resolución de problemas; en este apartado el docente tiene un papel importante en la enseñanza de los términos verbales que se utilizan en mayor medida en conceptos matemáticos (a lo sumo, exceder..). Así mismo el docente debe crear el clima adecuado en el aula para que los alumnos expresen sus propuestas y conjeturas para la resolución de un problema propuesto. Se ha de tratar de buscar

diferentes soluciones a un mismo problema y con ello analizar sus ventajas e inconvenientes.

- c) El factor emocional es una pieza clave en la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas en Matemáticas, y marcará, según los estudios realizados por investigadores de la docencia, la forma de afrontar un problema por parte de los alumnos y las pautas para su resolución, y será labor del docente, favorecer un clima y una confianza en el alumno de forma que la actitud ante la resolución sea la más favorable posible.
- d) Dentro de los conocimientos en matemáticas, existe un punto en el que los alumnos han de dar el salto del Cálculo al Álgebra, y está estudiado que este paso no se encuentra exento de dificultades; el docente ha de saber cuáles son las necesidades para que esta evolución sea efectiva y no se creen lagunas en el conocimiento. Valorar las distintas fases en este paso, de forma justa y atendiendo a lo que el RD 1631/2006 de 29 de Diciembre en cuanto a la evaluación, será parte necesaria para que el paso se realice de forma correcta.
- e) La representación gráfica es un factor muy influyente en el desarrollo del pensamiento matemático, y la enseñanza de los distintos tipos de representaciones que se pueden dar para la resolución de problemas, es de nuevo una labor para la que el docente ha de estar preparado y ha de saber transmitir a los alumnos.

BIBLIOGRAFIA TFM

- ✓ ALONSO, C.; GALLEG0, D.; HONEY, P. 1994. Los Estilos de Aprendizaje. Procedimientos de diagnóstico y Mejora. Bilbao: Ediciones Mensajero.
- ✓ BULL, B. L. & WITTROCK, M. C. 1973. Imagery in the learning of verbal definitions. *British Journal of Educational Psychology*, 43, 289-293.
- ✓ CABALLERO, A., BLANCO, L. J. y GUERRERO, E. 2007. El dominio afectivo en futuros maestros de matemáticas en la Universidad de Extremadura. [en línea] *Paradigma*, Vol. XXIX, nº2 diciembre de 2008. [Consulta Junio 2012]
<http://www.scielo.org.ve/pdf/pdg/v29n2/art09.pdf>
- ✓ DE GUZMAN, M. 2006. Para pensar mejor. Editorial Pirámide.
- ✓ DE SÁNCHEZ M A. "Desarrollo de las habilidades del pensamiento. Procesos básicos del pensamiento. Guía del instructor". Editorial Trillas.
- ✓ DUVAL, R. 1993b: Semiosis et Noesis. *Lecturas en Didáctica de la Matemática: Escuela Francesa* (pp. 118-144). México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.
- ✓ ESCUDERO, J. Resolución de problemas [en línea]. I.E.S. Fray Luis de León. Salamanca.[Consulta Junio 2012]
http://platea.pntic.mec.es/jescuder/prob_int.htm
- ✓ FERNANDEZ, F. (bajo la dirección de RICO, L. y FERNÁNDEZ CANO, A. (1997). Evaluación de competencias en Algebra Elemental a través de problemas verbales [en línea]. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. [Consulta Junio 2012]
http://fgm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver_detalle/.../descargar/
- ✓ FRADE, L. 2012. Comprensión lectora de problemas matemáticos [en línea]. Información y servicios educativos para docentes de América Latina. [Consulta Junio2012]
http://www.eleducador.com/ecu/index.php?option=com_content&view=article&id=154:comprension-lectora-de-problemas-matematicos&catid=50:matematicas&Itemid=41
- ✓ GARCIA, F. (2012) A vueltas con la resolución de problemas [en línea] Ábaco revista digital. SM Conecta 2.0 [Consulta Junio 2012]
http://www.profes.net/newweb/mat/apieaula2.asp?id_contenido=33673

- ✓ GARCÍA, J.R., RODRIGUEZ, A. Enero-Abril 2.009. La representación en matemáticas: una dificultad en el aprendizaje [en línea]. Ethos Educativo-44. [Consulta Junio 2012]
<http://www.imced.edu.mx/Ethos/Archivo/44/44-93.pdf>
- ✓ GÓMEZ CHACÓN, I.M^a. 2002. Afecto y aprendizaje matemático: causas y consecuencias de la interacción emocional [en línea]. Ed: Universidad de Huelva (si libro). [Consulta Junio 2012]
<http://www.mat.ucm.es/~imgomezc/vieja/igomez-chacon-huelva.pdf>
- ✓ HITT, F. 2003. Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología [en línea] Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, nº2 [Consulta Junio 2012]
<http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/fernandoHitt.pdf>
- ✓ KAPUT, J. 1987. Representational systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 19–26). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.
- ✓ LESTER, F. K., & KEHLE, P. E. 2003. From problem solving to modeling: the evolution of thinking about research on complex mathematical activity. In: R. Lesh, & H. Doer (Eds.), Beyond constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching (p. 510). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- ✓ LERMA, M.A. Febrero 1999. Propuesta didáctica estrategias para el desarrollo de la habilidad de representación gráfica [en línea]. Ciudad Universitaria. San Nicolás de los Garza, N. León [Consulta Junio 2012]
<http://eprints.uanl.mx/2333/1/1020125492.PDF>
- ✓ MARTINEZ, M. 2008 Diferentes representaciones en matemática [en línea] VI Festival Internacional de Matemática 29 al 31 de mayo, 2008, Colegio Bilingüe San Agustín, Palmares, Costa Rica. Universidad Nacional. [Consulta Junio 2012]
<http://www.cientec.or.cr/matematica/2010/ponenciasVI-VII/Margot-2.pdf>
- ✓ NCTM. Principles and Standards for School Mathematics (2000)
<http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=16909>
- ✓ PEREZ, R. (alumno), DEL PINO, C. (profesor guía). Propuesta de un manual para el uso docente, orientado al tratamiento de la resolución de problemas, en la educación matemática de enseñanza media” [en línea]. [Consulta Junio 2012]
<http://inst-mat.utalca.cl/~cdelpino/tesis1/capitulos/04-cap2.pdf>
- ✓ POLYA, G. 1945. How to solve it. Princeton University Press.

- ✓ POLYA, G. 1962. Mathematical Discovery. New York: John Wiley & Sons Inc.
- ✓ PÓLYA, G. [AND] SZEGÖ, G. 1976. Problems and theorems in analysis. New York: Springer.
- ✓ PUIG, P. 1958. Curso de Geometría métrica. Madrid : Patronato de Publicaciones de la Escuela Especial de Ingenieros Industriales.
- ✓ Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria
www.boe.es/diario_boe/txt.php?id=BOE-A-2007-238
- ✓ RICO, L., CASTRO, Enrique., CASTRO, Encarnación., CORIAT, M., MARÍN, A., PUIG, L., SIERRA, M., SOCAS, M. 1997. La educación matemática en la Enseñanza Secundaria. Capítulo II y Capítulo IV.[en línea] Horsori Editorial, SL
- ✓ ROJAS, P.J. Febrero 2012 Sistemas de representación y aprendizaje de las matemáticas [en línea] Artículo de sección, Revista digital Matemática, Educación e Internet. Vol. 12, No 1. Agosto. Universidad Distrital Francisco José de Caldas Grupo MESCUD [Consulta Junio 2012]
http://www.tecdigital.itcr.ac.cr/revistamatematica/Secciones/Didactica_y_Software/P_Rojas_V12N1_2011/P_Rojas_V12N1_2011.pdf
- ✓ SIEGLER, R. S. 2003. Implications of cognitive science research for mathematics education. In Kilpatrick, J., Martin, W. B., & Schifter, D. E. (Eds.), A research companion to principles and standards for school Mathematics (pp. 219-233). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- ✓ SCHOENFELD, A. H. 1992. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 334-370). New York: MacMillan.
- ✓ SANMARTI, N. y JORBA, J. 1995. Autorregulación de los procesos de aprendizaje y construcción de conocimientos. Alambique, 4, 59-77
- ✓ VILANOVA, S. y otros. La Educación Matemática. El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje [en línea]. Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina. O.E.I. Revista Iberoamericana de Educación. [Consulta Junio 2012]
<http://www.rieoei.org/deloslectores/203Vilanova.PDF>

