¿CÓMO ENSEÑAR SUCESIONES LINEALES? RAZONAMIENTO INDUCTIVO Y HOJA DE CÁLCULO

TRABAJO FIN DE MÁSTER

MÁSTER DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE SECUNDARIA

CURSO 2011-2012

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Margarita Mateos Ortés

Vº Bº DEL PROFESOR

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN:

La construcción del aprendizaje significativo es una de las cuestiones más estudiadas y anheladas por toda la comunidad educativa. Encontrar la estrategia y los recursos adecuados para llevar a nuestros alumnos por el camino de la compresión y el razonamiento no es tarea fácil y constituye uno de los objetivos principales de todo buen docente.

En el área curricular y, más concretamente, en la materia de Matemáticas, este asunto cuenta con aun más importancia: Constituye una lucha constante de los profesores, evitar que la enseñanza de las Matemáticas se reduzca al operativismo sinsentido y la repetición automática de cálculos a partir del uso de algoritmos, y fórmulas de aplicación inmediata, que encajen una relación de todos los datos suministrados. El cálculo es un área fundamental de las Matemáticas y una herramienta eficaz para el estudio de las demás, pero desde la docencia debemos cuidar que la actividad matemática de nuestros alumnos no se reduzca a calcular.

En la etapa educativa de la ESO, es especialmente recomendable desarrollar en los alumnos procesos de inducción que les permitan conocer y comprender los conceptos mediante ensayos y verificación de conjeturas. “En ningún caso, la conceptualización, formalización y simbolización deben preceder a la comprensión de conceptos y relaciones extraídas de la actividad real” (Decreto 57/2007).

Se trata de fomentar en los alumnos el razonamiento inductivo, que es aquel que se produce de forma natural al analizar casos particulares que le llevan a descubrir leyes generales (Pólya, 1945). Este es el tipo de razonamiento que se produce en la construcción del conocimiento científico, ya que implica que el individuo trabaje ampliando la información de la que parte y comprobando la validez de esa nueva información (Cañadas y Castro, 2006).

Varias publicaciones (Diseño Curricular Base, 1989; Real Decreto 1631, 2006; NCTM, 1989) enfatizan la importancia que tiene para los alumnos desarrollar pautas (percibirlas y extenderlas) para la comprensión de conceptos y relaciones matemáticas importantes, como el concepto de función, y para el desarrollo de capacidades de éstos para llevar a cabo procesos de particularización, inducción, recursión, iteración, abstracción y generalización.

En cuanto a las competencias y habilidades a adquirir por parte de los estudiantes dentro de la tipología de problemas en la que se centra el estudio, se encuentran: examinar casos especiales, organizar la información de forma sistemática, particularizar, establecer conjeturas y generalizar propiamente dicho (Mason et al, 1982; Lewis, 1983; Swan, 1984; Andrews, 1990). Al igual que "identificar y describir regularidades, pautas y relaciones conocidas en conjuntos de números y formas geométricas similares" que además, forma parte de los criterios de evaluación de la materia de Matemáticas para la Educación Secundaria Obligatoria (Real Decreto 1631/2006 y Decreto 57/2007).

En el contexto de nuestro trabajo, las progresiones aritméticas, el aprendizaje significativo depende en gran medida del *proceso de generalización lineal* que llevan a cabo los alumnos durante la realización de los ejercicios. Las sucesiones numéricas y más concretamente las progresiones aritméticas, se encuentran incluidos en los contenidos de Matemáticas del tercer curso de la ESO y en los de 1º de Bachillerato. Sin embargo, el estudio y desarrollo de procesos de generalización, se encuentra presente durante todo el currículo de Secundaria.

En este trabajo, exploramos los mecanismos que gobiernan el proceso de generalización en los alumnos, estudiamos las herramientas y estrategias didácticas que pueden resultar útiles al docente para explotar el potencial de este proceso para fomentar el aprendizaje de sus alumnos y, finalmente, planteamos varios ejemplos prácticos para llevar al aula estas orientaciones.

2. MARCO TEÓRICO:

En el contexto de los problemas de generalización lineal, a la hora de optimizar el proceso de enseñanza y aprendizaje y favorecer el razonamiento y la comprensión en nuestros alumnos, conviene tener en cuentas varios aspectos del proceso de generalización:

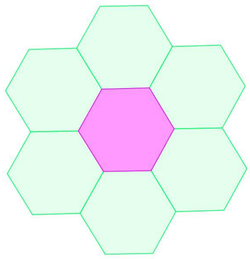
- qué mecanismos cognitivos intervienen y bajo qué proceso mental se producen,
- qué generalizan los alumnos, cómo se produce ese proceso de generalización lineal y,
- qué metodologías y recursos didácticos pueden ayudar al docente a explotar las potencialidades de este proceso y favorecer el aprendizaje de sus alumnos.

2.1. TIPOLOGÍA DE LOS PROBLEMAS A ESTUDIO:

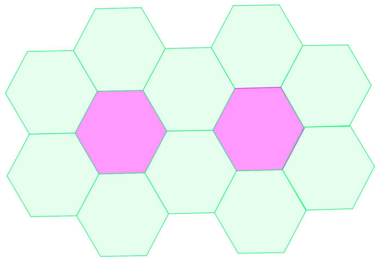
Nuestro trabajo trata de un tipo particular de sucesiones aritméticas, que en la que el término general responde a la forma f(n)= an+b, con a y b números enteros tales que a≠0, b≠0, a>0 y a+b>0. Este tipo de problemas se conocen en la literatura con el nombre de *problemas de generalización lineal.*

La presentación más recomendable para estos problemas responde generalmente al siguiente formato, que favorece un razonamiento menos forzado de los alumnos y un desarrollo más intuitivo del proceso de generalización lineal:

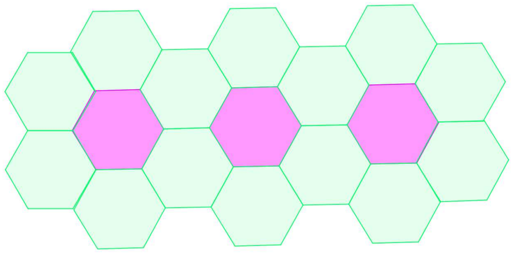
1º) Un dibujo ilustrativo que describe visualmente los primeros términos de la sucesión (n=1, 2, 3…) ó un enunciado contextualizado en el que se describe la situación del problema. Ej.: *Problema de las Jardineras:*



n=1



n=2



n=3

2º) Un enunciado que plantea 3 cuestiones en el siguiente orden:

- Cuestiones introductorias: se pide, de forma contextualizada, al alumno el valor de la sucesión para los términos 4 ó 5.

  Ej.: *El Ayuntamiento quiere instalar jardineras y rodearlas con baldosas hexagonales según el modelo que se ve arriba.*

  a) ¿Cuántas baldosas necesitará el Ayuntamiento para rodear 5 jardineras?

- Cuestiones de generalización próxima: se pide el valor de la sucesión para un término tal que el alumno aun puede calcularlo mediante un procedimiento de recuento directo. En este caso el alumno puede resolver el problema haciendo un recuento directo sobre el dibujo o extendiendo la sucesión numérica hasta el término solicitado.

  Ej.: b) ¿Cuántas baldosas necesitará el Ayuntamiento para rodear 10 jardineras?

- Cuestiones de generalización lejana: Se pide al alumno el valor de la sucesión para un término tal que resultaría muy difícil o complejo hacerlo mediante el procedimiento de recuento directo y para el que necesariamente debe desarrollar una expresión o fórmula general.

  Ej.: *c) ¿Cuántas baldosas necesitará para rodear 100 jardineras?*

2.2. PROCESO MENTAL DE LA GENERALIZACIÓN LINEAL:

El proceso de generalización, o *abstracción reflexiva* (Piaget, 1987, Piaget, 1990), consiste en la ejecución de una serie de *acciones* (Piaget, 1987; Piaget, 1990; Dörfler, 1991) del sujeto sobre los elementos del problema que estudia, que se transforman en una entidad conceptual abstracta (Piaget, 1987; Piaget, 1990) o *invariante* (Dörfler, 1991). Este *invariante* es la fórmula que en cada momento es capaz de generalizar, abstraer, el alumno (ya sea la que relaciona un término de la sucesión con el siguiente como la fórmula que permite calcular cualquier término de la sucesión sin conocer el término anterior) y se caracteriza por dos cualidades: la estructura genérica abstraída (cualidad *intensional*) y el rango de aplicabilidad que posee (cualidad *extensional*).

Por otra parte, la forma en que los conocimientos previos del alumno, los esquemas conceptuales ya construidos sobre el tema, influyen en la construcción del nuevo conocimiento, se denomina *esquema de descomposición genética* del nuevo concepto (Dubinsky y Lewin, 1986).

2.3. ¿CÓMO GENERALIZAN LOS ALUMNOS?:

Para la resolución de problemas de generalización lineal, los alumnos establecen *estrategias de solución*, entendiendo por tales a la combinación de *acciones*, *esquema de la acción* e *invariante* establecido en el curso de la resolución (García Cruz, 1999).

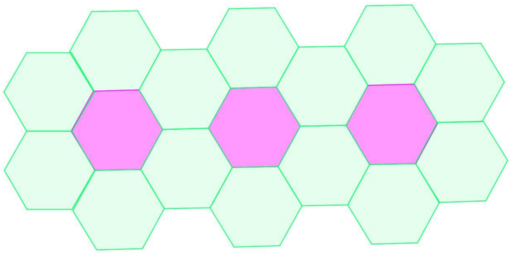
Podemos distinguir tres modalidades de estrategias de solución:

- *Visual*, en la que las acciones que derivan en el invariante se desarrollan sobre el dibujo del enunciado del problema (el alumno estudia, hace cálculos y extrae el patrón o la pauta para hallar la solución apoyándose en el dibujo),
- *Numérica*, en la que el invariante se establece a partir de realizar acciones sobre los términos de la sucesión numérica (el alumno desarrolla cálculos y extrae la regla partiendo de los datos numéricos de la sucesión) y,
- *Mixta*, en la que de forma combinada, el alumno desarrolla acciones sobre la sucesión numérica y comprueba la validez de sus cálculos sobre el dibujo (García Cruz, 1999).

En cuanto a qué generalizan los alumnos, encontramos 3 niveles de generalización (García Cruz, 1999) que dan información detallada sobre cómo se produce el proceso de generalización. Estos niveles permiten establecer el *esquema de descomposición genética de la estructura conceptual de pauta lineal,* o dicho de otro modo, la forma en que los conocimientos previos de los alumnos influyen en la construcción de los nuevos conceptos y esquemas:

- **Nivel 1. *Patrón iterativo y recursivo***: El alumno generaliza la ***diferencia constante de la progresión (d)***, que es el rasgo más fácil de percibir de la pauta lineal de la sucesión, el patrón iterativo y recursivo (*regla recursiva)*. Estos comportamientos no suponen generalización, pero son útiles para el alumno, porque puede utilizarlos para comprobar la validez de los cálculos que ha realizado. En este nivel, el alumno puede trabajar sobre la sucesión de dos formas:

  - ***Suma iterativa:*** Calcular el término requerido sumando la diferencia constante (d) repetidamente desde el primer término, *Ej.: Problema de las Jardineras:*



El Ayuntamiento quiere instalar jardineras y rodearlas con baldosas hexagonales según el modelo que se ve arriba.a) ¿Cuántas baldosas necesitará el Ayuntamiento para rodear 5 jardineras? b) ¿Cuántas baldosas necesitará el Ayuntamiento para rodear 10 jardineras? c) ¿Cuántas baldosas necesitará para rodear 100 jardineras?

Respuesta de Suma iterativa: <u>el alumno se da cuenta de que debe sumar 4 repetidamente cada vez empezando desde el término 1</u>

1 jardinera → 6 baldosas grises

2 jardineras → 6+ 4= 10 baldosas grises

3 jardineras → 6 + 4 + 4 = 14 baldosas grises

4 jardineras → 6+4+4+4 = 18 baldosas grises

Luego 5 jardineras → 6+4+4+4+4 = 22 bald. grises

- ***Proceso recursivo:*** el alumno se da cuenta de la relación que establece, entre dos términos consecutivos cualesquiera de la sucesión, la **ley de formación de los términos de la sucesión (o *regla recursiva*),** aunque no extrae la expresión algebraica que la representa ($a_n=a_{n-1}+d$).

Respuesta de proceso recursivo: <u>El alumno identifica que el número de baldosas necesarias es igual al anterior número más 4:</u>

1 jardinera > 6 baldosas grises

2 jardineras > 6+ 4= 10 baldosas grises

3 jardineras > 10 + 4 = 14 baldosas grises

4 jardineras > 14+4 = 18 baldosas grises

5 jardineras > 18+4 = 22 baldosas grises

- ***Nivel 2. Generalización local*:** El alumno generaliza la ***regla específica de cálculo* (*fórmula general de la sucesión ó regla explícita,*** *(*$a_n=a_1+(n-1)*d$) al aplicarla a todos los apartados del problema (o al menos a los dos últimos). Esta regla de cálculo queda fijada por el invariante establecido en el proceso generalización, que es la fórmula general de la sucesión. (El invariante es la fórmula que el alumno generaliza en cada momento, la recursiva o la explicita). Esto implica tanto los casos en los que los alumnos son capaces de representar la regla de cálculo con una expresión algebraica, con una fórmula, como los casos en los que tan solo son capaces de expresar la generalización verbalmente.

El mecanismo clave en el paso del nivel 1 al 2, momento en el que el alumno comienza a generalizar, es el cambio en el foco de atención desde el conjunto de datos particulares de los primeros términos hacia su estructura (Cañadas, María C., Castro, Enc., Castro, Enr., 2008). Dörfler (2002) considera que este proceso viene determinado por un cambio consciente que convierte el conjunto de datos en una regularidad con entidad propia, en logro cognitivo.

Ej.: *el alumno se da cuenta de que para obtener el número de baldosas necesarias, tiene que sumar al número de baldosas correspondiente a una jardinera (a_1=6) la diferencia constante (d=4) tantas veces como el número de jardineras requerido menos 1 (n-1): $a_n= a_1 + (n-1)*d$, sea capaz o no de expresarlo con una fórmula*:

1 jardinera > 6 baldosas grises

2 jardineras > 6+ 4= 10 baldosas grises

3 jardineras > 6 + 4 + 4 = 14 baldosas grises

4 jardineras > $6+\underbrace{4+4+4}_{= 4*(4-1)}$ *= 18 baldosas grises*

Luego 5 jardineras > $\overbrace{6+4+4+4}^{18}+4$, $6+\underbrace{4+4+4+4}_{= 4*(5-1)}$ *= 22 baldosas grises*

…………

- *Nivel 3. Generalización global o comprensión conceptual:* Aquí el alumno generaliza la *estrategia de solución* (acciones, esquema de la acción e invariante) en dos o más problemas del mismo tipo que se le han dado uno detrás de otro. Es decir, el alumno se da cuenta de que esa estrategia le resulta útil para resolver más problemas del mismo tipo, los de sucesiones aritméticas. La consistencia se refiere a que el alumno es persistente, persiste en utilizar la misma estrategia en diferentes problemas. *Por ejemplo: en la siguiente ocasión que se plantea al alumno un problema del mismo tipo, éste sigue la misma estrategia y realiza las mismas acciones para resolverlo, por ejemplo: calcula varios términos de la sucesión por recuento directo sobre el dibujo para extraer la diferencia constante, luego hace el desarrollo aritmético de la serie para esos números, observa el patrón y extrae la fórmula general.*

Los pasos o actividades que realiza el alumno durante este proceso de generalización, durante el proceso de razonamiento inductivo, son los siguientes (Cañadas y Castro, 2005):

- Trabajo con casos particulares.
- Búsqueda y predicción de patrones.
- Formulación de conjeturas.
- Validación de conjeturas.
- Generalización de conjeturas.
- Justificación de conjeturas para el caso general.

2.4. ORIENTACIONES DIDÁCTICAS EN PROCESOS DE GENERALIZACIÓN LINEAL:

La forma de presentación y la metodología a aplicar en las secuencias de enseñanza – aprendizaje de este tipo de problemas, tiene también una gran influencia en el aprendizaje de los alumnos y en el proceso de generalización que estos desarrollan.

Así, el contexto del problema influye en la variedad de respuestas, ya que si incluye texto, dibujos o diagramas además de números, los alumnos pueden elegir el medio que les resulte más asequible para abordarlo. Esto se convierte, al mismo tiempo, en una potente herramienta para el profesor que, al conocer la forma de entender el problema por cada alumno, podrá enfocar la explicación de los nuevos contenidos utilizando esos medios, permitiendo a sus alumnos desarrollar una comprensión mucho más profunda (García Cruz, 1999; Lannin, Barker y Townsend, 2006).

Diversos estudios (Stacey, 1989; Castro, 1995; Redden, 1994; Taplin, 1995; Cañadas, María C., Castro, Enc., Castro, Enr., 2008) hacen referencia a la presencia de dibujos y representaciones geométricas en el contexto de los problemas como factor que facilita la comprensión y la construcción del esquema conceptual general a los alumnos. Lannin, Barker y Townsend (2006) indican además, que el uso de dibujos así como de objetos manipulativos no solo favorecen el razonamiento en el proceso de generalización, sino que también favorecen que los alumnos cometan menos errores de los que suelen cometer al utilizar solo símbolos algebraicos y que encuentren significado a los sistemas de representación asociados como tablas y gráficos.

Por otra parte, también se determina que el uso didáctico de la producción espontánea y de la discusión en el aula de las diferentes estrategias de resolución planteadas por los alumnos, favorece la persistencia en el tiempo de los conceptos y esquemas aprendidos (García Cruz, 1999).

En cuanto al fomento del uso de reglas recursivas o explicitas en los estudiantes, algunos autores sostienen (Orton, Orton y Roper, 1999) que el uso de reglas recursivas puede llevar a los alumnos a centrarse en calcular los términos particulares de los primeros apartados, obstaculizando su razonamiento hacia la obtención de las reglas generales (reglas explicitas, fórmulas generales de la sucesión). Sin embargo otros (Lannin, Barker y Townsend, 2006), evidencian que provocar en los alumnos el uso de reglas explicitas puede llevarles al abandono de la reflexión y la toma de decisiones con sentido (centrando el trabajo hacia el uso de técnicas consistentes en adivinar y comprobar las estrategias que cumplen el patrón de un conjunto poco representativo de la progresión) y puede provocar que se concentren en casos particulares en lugar de en las relaciones generales, sin que consigan ver lo general en lo particular.

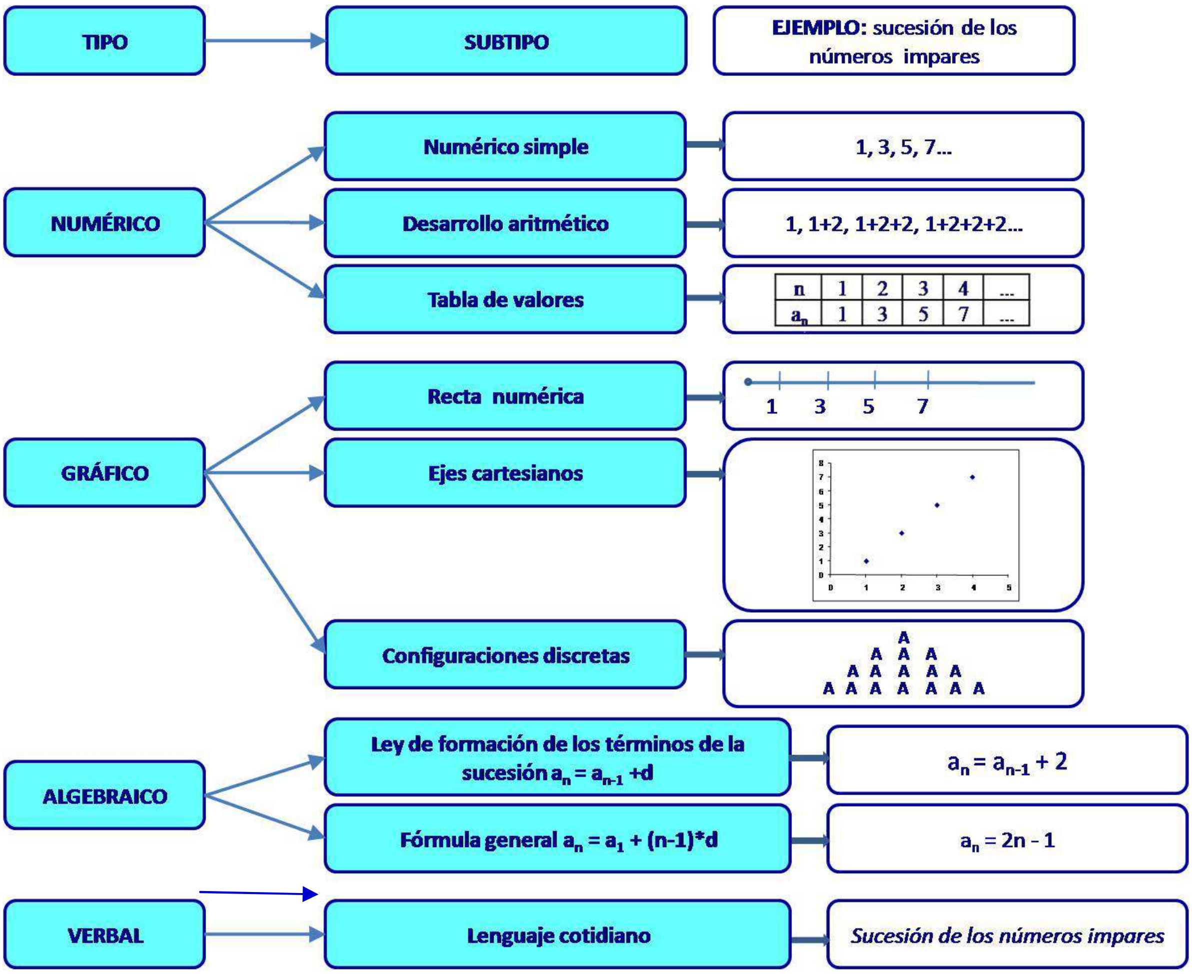
De acuerdo a los estudios realizados por Lannin, Barker y Townsend (2006), los alumnos tienden a centrarse en los aspectos particulares de los términos del problema en lugar de observar la estructura general de la sucesión para extraer la formula general. En este sentido, recomiendan que los profesores pidan a los alumnos que comprueben el dominio de aplicabilidad de las reglas que han construido, ya sean recursivas o explicitas, ya que esto dirige a los alumnos a reconocer la generalidad de sus reglas y a mantener su atención en las relaciones existentes entre el dibujo y la progresión, asociados a la comprensión y a la construcción de significados, evitando que queden estancados en las estrategias de ensayo y error.

2.4.1. LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN:

A menudo, el trabajo con progresiones aritméticas en el aula puede presentarse de forma muy pobre, resumido a calcular los términos de la sucesión sin ningún tipo de contextualización del problema ni propuesta de más tareas.

En ese sentido, los sistemas de representación posibles para este tipo de sucesiones, son muchos y sirven al alumno para exteriorizar sus representaciones mentales (Castro y Castro, 2007) para reflejarlas en otro soporte distinto del mental y dotarlas de mayor orden y coherencia.

Encontramos los siguientes sistemas de representación posibles:



Proponer a los alumnos utilizar varios de estos sistemas de representación, así como pasar de uno a otro, puede favorecer la comprensión del problema y de la interpretación de esos sistemas de representación:

La mayoría de los alumnos no recurren a la generalización para dar respuesta a los problemas propuestos (Cañadas y Castro, 2006). Por eso es importante que el docente induzca a los alumnos hacia la resolución de los problemas mediante el establecimiento de pautas propias de la generalización. Una forma de hacerlo es proponerles que justifiquen verbalmente sus respuestas: estudios existentes (Cañadas y Castro, 2006) indican que los alumnos suelen generalizar verbalmente cuando intentan justificar sus conjeturas y lo que consiguen es dar una explicación para el caso general.

Por otra parte, la mayoría de los estudiantes que llegan a expresar la generalización, utilizan con mayor frecuencia el sistema de representación numérico que los otros sistemas de representación (Cañadas y Castro, 2006).

Esta es una valiosa información para el profesor, que podría utilizar estos sistemas de representación que resultan más comprensibles para los estudiantes en las tareas introductorias.

2.4.2. LA HOJA DE CÁLCULO:

Otra de las herramientas más útiles al docente para apoyar y facilitar el proceso de generalización en los alumnos es la hoja de cálculo. Entre las ventajas que ofrece trabajar con ella durante la resolución de los problemas encontramos:

- Es una herramienta que facilita la introducción del algebra a alumnos de bajo rendimiento, muy útil como paso previo al abordaje de la materia con lápiz y papel (Wilson, Ainley y Bills, 2005).
- Además, los recursos y posibilidades que ofrece ayudan a los alumnos a trabajar los problemas de generalización en papel (Wilson, Ainley y Bills, 2005).
- Permite a los estudiantes razonar de una forma más flexible y esta flexibilidad les aporta mayor accesibilidad a situaciones problemáticas, facilitándoles el desarrollo de reglas recursivas y/o explicitas (Lannin, Barker y Townsend, 2006).
- Ayuda a los alumnos a conectar sus ideas matemáticas sobre las fórmulas y expresiones algebraicas (representaciones simbólicas), los gráficos (representaciones gráficas), los dibujos y el contexto del problema en sí (Lannin, Barker y Townsend, 2006).
- La hoja de cálculo es una herramienta útil que ayuda a los docentes a cambiar el enfoque tradicional de la enseñanza centrado en los procedimientos, hacia el desarrollo de significados para las representaciones algebraicas (Lannin, Barker y Townsend, 2006).
- Ayuda a los estudiantes a comprender el concepto de variable: acciones como hacer clic o arrastrar una celda (Lannin, Barker y Townsend, 2006; Wilson, Ainley y Bills, 2005), trabajar con fórmulas y gráficos y especialmente con los conceptos de “variable celda” y “variable columna” (Wilson, Ainley y Bills, 2005), facilita a los estudiantes

comprender el significado de “variable” como una cantidad variable y a conectar sus ideas formales e informales sobre el concepto.

- La hoja de cálculo cumple también una función similar a la de los objetos manipulativos (Decreto 57/2007). Su uso facilita a los alumnos desarrollar el proceso de abstracción a partir de la reflexión sobre las ideas que surgen de la experiencia adquirida por el manejo y la interacción con el programa: les facilita analizar propiedades, explorar relaciones, formular conjeturas y validarlas.
- La hoja de cálculo facilita el proceso de organizar la información, posibilita el uso de gráficos sencillos, el tratamiento de grandes cantidades de datos, y libera tiempo y esfuerzos de cálculo para dedicarlo a la formulación de preguntas, comprensión de ideas y redacción de informes (Decreto 57/2007).

Por otra parte, algunos autores (Merodio, Señas, Fioravanti, González y Diego, 2007) consideran que el uso de Excel puede llevar al abandono de las estrategias visuales por parte de los alumnos ya que hacen un uso básicamente instrumental del programa como herramienta que facilita los cálculos. Sin embargo recomiendan superar este obstáculo mejorando el conocimiento técnico del programa, <u>proponiéndoles tareas que</u>, aún con números pequeños, <u>fomenten en los alumnos el desarrollo de métodos generalizables</u> y, lo que es más importante, <u>desarrollando la capacidad de los alumnos para interpretar la sintaxis de Excel en términos algebraicos</u>.

Entre las competencias, destrezas y habilidades que los alumnos adquieren al manejar la hoja de cálculo encontramos:

- organizar la información (Decreto 57/2007).
- organizar datos: ordenar, categorizar, generalizar, comparar y resaltar los elementos claves (Eduteka, 2003);
- Concentrarse en la toma de decisiones, en la reflexión, el razonamiento y la resolución de problemas (Decreto 57/2007)

➢ Descubrir patrones: Al arrastrar las celdas en la columna, reconocen pautas y regularidades en la progresión.

➢ realizar diferentes tipos de gráficas que agreguen significado a la información ayudando en la interpretación y análisis (Eduteka, 2003);

➢ usar fórmulas para manipular números, explorar cómo y qué formulas se pueden utilizar en un problema determinado y cómo cambiar las variables que afectan el resultado (Eduteka, 2003).

Se recomiendan 3 **estrategias para utilizar la hoja de cálculo** como herramienta para reforzar el significado de variable en los alumnos (Wilson, Ainley y Bills, 2005):

1) Enfatizar en la idea de <u>variable celda y variable columna</u>,

2) Establecer vínculos entre la <u>notación de la hoja de cálculo</u> y la <u>notación habitual</u> (estándar).

3) <u>Nombrar columnas</u> en la hoja de cálculo: ayuda a visualizar el vínculo existente entre la notación algebraica estándar y la notación de la hoja de cálculo, fomenta que los alumnos entiendan la notación como la representación de una variable y les proporciona una imagen de rango de valores para la variable.

2.4.3. LA ILUSIÓN DE LA LINEALIDAD:

Otro de los procesos erróneos que surgen en el aula cuando los alumnos se dedican a trabajar los problemas de generalización es el de la *ilusión de la linealidad:* la tendencia que presentan los estudiantes a aplicar modelos lineales, a resolver problemas utilizando la relación de proporcionalidad y de la regla de tres, en situaciones en las que éstas no son aplicables (Van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2006).

Entre los motivos que desencadenan este tipo de comportamiento se encuentran" (Van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2006):

- El carácter simple y auto-evidente de las relaciones lineales: la idea de proporcionalidad es la primera que viene a la mente.

- El hecho de que a medida que los estudiantes van cogiendo destrezas de razonamiento lineal (cosa que aumenta con la edad) mediante la práctica de resolución de problemas típicos, tienden también a sobre-generalizar los modelos lineales y aprenden a aplicarlos sin manifestar planteamiento razonado alguno, fijándose tan solo en características superficiales del problema que les permiten identificar "ese problema" como el que se resuelve de "ese modo". Esto se aprecia especialmente en la aplicación de la proporcionalidad directa y la regla de tres en problemas que no se ajustan a esta propiedad lineal, en la fijación de los alumnos por dibujar una gráfica que pase por dos puntos como una recta, intentando además que pase por el origen, y en los problemas de geometría que relacionan longitud y área o volumen, en los que los alumnos aplican un factor de escala lineal en lugar de cuadrático o cúbico como corresponde.

- La influencia de la escolaridad: en ciertos momentos del currículo de matemáticas se pone una atención extensiva y casi exclusiva en la linealidad y muy a menudo, esto sucede sin que se explicite y enfatice suficientemente sobre el dominio de aplicabilidad de este concepto.

El docente puede actuar en varios aspectos de cara a <u>evitar esta tendencia en los alumnos</u> (Van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2006):

- A medida que se van tratando conceptos como la multiplicación, la división, la proporcionalidad… debe también hacer hincapié en la capacidad de dichos conceptos para modelizar algunas situaciones y su incapacidad para modelizar otras.

- Debe llevar al aula ejercicios que relacionen situaciones de la vida real con modelos matemáticos e incidir en la reflexión sobre esas relaciones: para favorecer que los alumnos entren a reflexionar sobre la justificación de esa correspondencia de los modelos con la situación que modelizan y no se dejen llevar por la asunción de modelos sin estudiar la situación planteada.

- Los problemas planteados bajo el formato de valor faltante en los que se plantean 3 datos conocidos y un tercero que los alumnos deben calcular (por ejemplo: *El granjero Carlos necesita aproximadamente 8 horas para* *abonar un terreno cuadrado de 200 m de lado. ¿Cuántas horas necesitará para abonar un terreno cuadrado de 600 m de lado?*) generan más resultados erróneos que los planteados por comparación porque parece que los alumnos asocian la regla de tres a ese tipo de enunciado. Ante esto, el docente puede reducir la carga de problemas planteados bajo el formato de "problemas de valor faltante", cambiando el formato de presentación al de los denominados "problemas de comparación" (p. ej., *"Hoy, el granjero Carlos ha abonado un terreno cuadrado. Mañana, tiene que abonar otro terreno cuadrado con el lado el triple de grande. ¿Cuánto tiempo necesitará aproximadamente para abonar este terreno?*)

3. CÓMO ENSEÑAR SUCESIONES. ALGUNAS PROPUESTAS:

3.1. CÓMO PLANTEAR PROBLEMAS:

Entre los recursos posibles para plantear los problemas de generalización lineal, el docente dispone de un amplio abanico de ellos. La misión del profesor es seleccionar la combinación adecuada de ellos para cada problema de forma que favorezca la comprensión de los alumnos y que les facilite el abordaje del mismo:

- Evitar enunciados en los que únicamente aparecen números: incluir dibujos, diagramas y representaciones geométricas en los enunciados, así como objetos manipulativos (facilita la comprensión, el razonamiento, que los alumnos cometan menos errores, la construcción del esquema conceptual de los alumnos, favorece que cometan menos errores y que encuentren significado a los sistemas de representación asociados).
- Evitar utilizar siempre, en el texto del enunciado del problema, el formato de problemas de valor faltante alternándolo con otros como los enunciados por comparación (para evitar los errores derivados de la ilusión de la linealidad).
- Incluir entre las cuestiones a realizar, cuestiones introductorias, cuestiones de generalización próxima y cuestiones de generalización lejana en lugar de solo pedir el término general de la sucesión (se trata de plantear un escenario que facilite a los alumnos detectar progresivamente los patrones de la sucesión, razonar inductivamente y llegar a generalizar).
- Utilizar la hoja de cálculo para introducir los problemas por primera vez y como herramienta de apoyo a los alumnos de bajo rendimiento en particular y a todos en general.

- Pedir a los alumnos que justifiquen verbalmente sus respuestas (favorece que los alumnos generalicen al tratar éstos de dar una explicación para el caso general).

3.2. ESTRATEGIAS DEL PROFESOR:

Durante el desarrollo de los problemas, el profesor debe inducir a los alumnos a generalizar. Para ello, puede proponer diversas tareas a sus alumnos que les dirijan hacia el proceso, que fomenten la comprensión y que les permita desarrollar el proceso de generalización de forma más amplia:

- Utilizar la hoja de cálculo para introducir el concepto de variable independiente y variable dependiente enfatizando en la idea de variable celda y variable columna.
- Proponer a los alumnos nombrar celdas y columnas y establecer vínculos entre la notación de la hoja de cálculo y la notación algebraica (esto favorece que los alumnos entiendan la notación como la representación de una variable y les permite asociar la idea de rango de valores al concepto de variable).
- Proponer a los alumnos que comiencen a trabajar utilizando el sistema de representación numérico (ya que resulta más comprensible para los alumnos en las cuestiones introductorias).
- Proponer a los alumnos utilizar los distintos sistemas de representación en la resolución de los problemas así como pasar de unos a otros (favorece la comprensión del problema y la interpretación de los sistemas de representación).
- Utilizar la hoja de cálculo para mostrar a los alumnos los sistemas de representación numérico, gráfico y algebraico y las relaciones existentes entre ellos.
- Pedir a los alumnos que comprueben el dominio de aplicabilidad de las reglas que han construido (evita que los alumnos se centren en lo particular del problema favoreciendo la

generalización y el establecimiento de vínculos entre el dibujo o gráfico y la progresión).

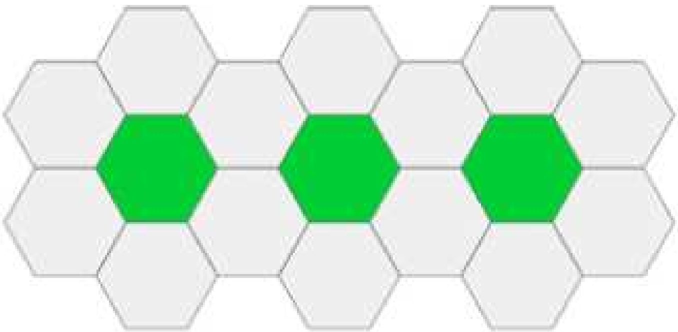
- Establecer discusiones en el aula sobre la idoneidad de las diversas estrategias de resolución que han desarrollado los alumnos (favorece la persistencia en el tiempo de los conceptos y esquemas aprendidos) o pedir distintas formas de resolver los problemas si todos lo han hecho igual.
- Para evitar los problemas derivados de la ilusión de la linealidad en los alumnos, el docente puede proponer, entre los problemas de generalización, ejemplos de problemas que se ajusten a la proporcionalidad directa o a la aplicación de la regla de tres, proponer otros que no se ajusten a estas propiedades y confrontarlos para enfatizar en la idea de que no se trata de reglas aplicables a todas las situaciones.

3.3. ALGUNOS EJEMPLOS:

A continuación planteamos una colección de problemas de generalización lineal extraídos de diversa bibliografía. Para cada uno de ellos, incluimos el planteamiento original y seguidamente, presentamos una propuesta de planteamiento propia y las estrategias didácticas para el docente de cara a favorecer los procesos de razonamiento inductivo y generalización lineal de los alumnos.

Esta propuesta ha sido elaborada en la hoja de cálculo de Excel pero podría desarrollarse en cualquier hoja de cálculo, como Geogebra u Open Office.

a) "JARDINERAS" (Shell Centre for Mathematical Education, 2003)



El Ayuntamiento quiere instalar 100 jardineras y rodearlas con baldosas hexagonales según el modelo que se ve arriba. (En este modelo hay 14 baldosas rodeando a 3 jardineras.) ¿Cuántas baldosas necesitará el Ayuntamiento?

Este problema podría plantearse de la siguiente forma:

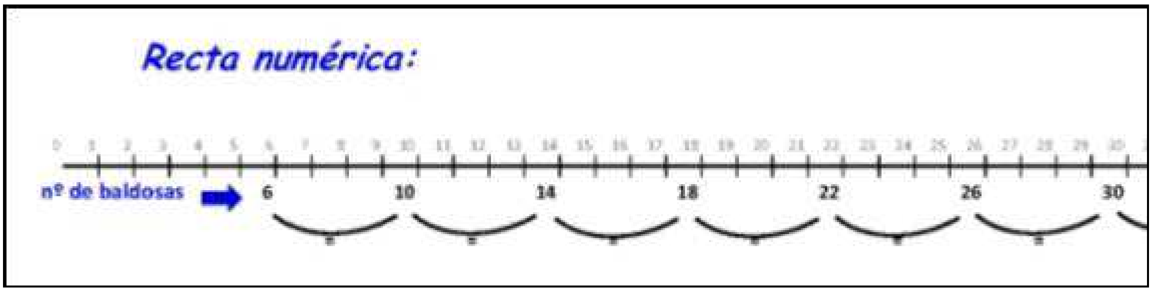
❖ **Plantear el problema según el formato anteriormente descrito de los problemas de generalización lineal: Incluir cuestiones introductorias, de generalización próxima y lejana, para inducir a los alumnos a explorar los patrones de la progresión y a razonar de una forma más intuitiva la regla de cálculo de la serie de números:**

1) *El Ayuntamiento quiere instalar jardineras y rodearlas con baldosas hexagonales, ¿cuántas baldosas necesitará para una calle en la que se dispondrán 5 jardineras?*
2) *¿Cuántas necesitará para una plaza en la que van a colocarse 15 jardineras?*
3) *¿y para un parque con 100 jardineras? Justifica tu respuesta.*

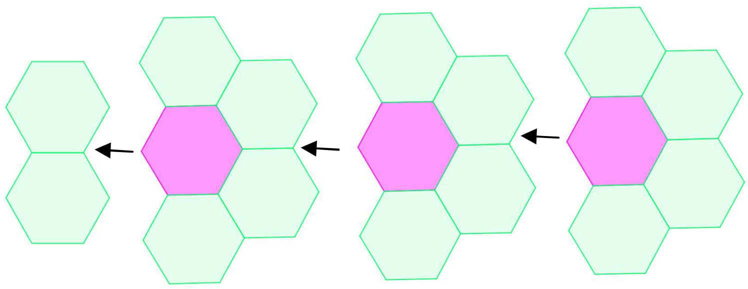
- **Para la realización del problema el profesor puede indicar a los alumnos las siguientes pautas para ayudarles a iniciar el proceso de generalización:**

- *Puedes seguir dibujando para ver cuántas jardineras necesitas, pero ¿por qué no pruebas a dibujar los resultados que estas obteniendo en una recta numérica?*(1)
- *Busca pautas en tus datos, ¿no encuentras algo repetitivo de un valor a otro?*
- *Intenta escribir con palabras esa regla. Luego comprueba para que valores se cumple.* (3)
- *Usad vuestra regla para escribir el número de baldosas necesarias para el parque con 100 jardineras.* (4)
- *¿Y para n jardineras? Hay varias formas de hacer esto, intentad hallar algunas alternativas.* (4)
- *¿Podríais hallar una expresión que os permitiese calcular el número de baldosas necesarias para n jardineras sin depender del número de baldosas para el caso inmediatamente anterior (n-1)?Puedes observar los datos y comprobar cuantas veces esta la diferencia constante en cada término de la sucesión: 6, 6+4=10, 6+4+4=14… ó Observa el dibujo: cada jardinera está rodeada de 6 baldosas, pero las baldosas consecutivas comparten algunas baldosas* (5)
- *Debate: ¿cuál de las estrategias seguidas es la más útil?* (6)

(1) Las estrategias de resolución de algunos alumnos serán visuales (sobre el dibujo), otros podrán desarrollar estrategias numéricas (apoyándose en los valores de los términos de la sucesión conocidos), pero en cualquier caso, manejar varios sistemas de representación en la resolución, así como pasar de uno a otro, favorece la visualización y la comprensión del problema y la interpretación de esos sistemas de representación. Por eso, resulta interesante que el docente sugiera a los alumnos utilizar más de un sistema de representación durante la realización de los ejercicios. En el caso de la representación en la recta numérica, ésta puede ofrecer a los alumnos una forma muy sencilla de visualizar la regla recursiva de la progresión, porque se visualiza directamente una distancia igual entre todos los valores de la sucesión, esto es, la diferencia constante:



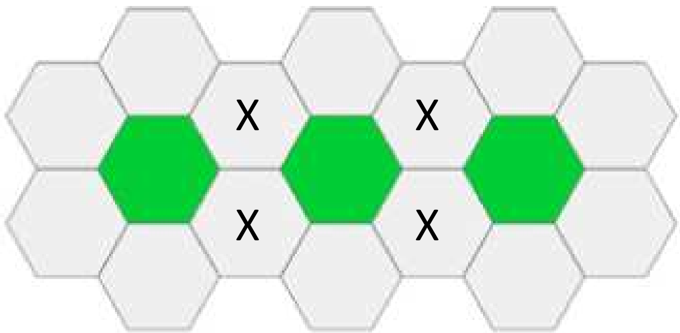
Esto también pueden visualizarlo directamente sobre el dibujo al observar que después de la primera jardinera, que necesita de 6 baldosas, hay que añadir 4 baldosas más cada vez que se añade una jardinera:



2 +4 + 4 + 4

(3)Los alumnos suelen generalizar verbalmente cuando intentan justificar sus conjeturas, por lo que pedir a los alumnos que utilicen el sistema de representación verbal es una forma de inducirles a generalizar y evitar que se centren únicamente en los casos particulares. De igual forma, pedirles que comprueben el dominio de aplicabilidad de sus reglas también les lleva a generalizar y a comprender mejor la relación existente entre el dibujo y la progresión.

(4 y 5) En este punto se asume que los alumnos ya han detectado la regla recursiva de la sucesión (la ley de formación de los términos de la sucesión) y con estas preguntas, el profesor trata de inducir a los alumnos a extraer la regla explicita (la fórmula general). Utilizar tan solo las preguntas expuestas en (4) o incluir sugerencias con instrucciones mucho más claras como en (5) dependerá en gran medida de las respuestas de los alumnos. En cualquier caso, sugerirles otro sistema de representación como el desarrollo aritmético (6, 6+4, 6+4+4, 6+4+4+4…6+4($n_{jardineras}$ – 1)) de la serie es muy útil para que sean capaces de detectar la regla de cálculo, al igual que apoyarse en el dibujo:



Baldosas = $6n_{jardineras} - 2(n_{jardineras} - 1)$

Estas son estrategias que los alumnos pueden haber desarrollado solos, pero en caso de no ser así, el profesor debe ir sugiriendo una u otra pauta para ayudarles.

(6) Por último, con el debate, el profesor induce a los alumnos a analizar las diversas reglas que han desarrollado y a valorarlas razonadamente.

Esto resulta muy favorable para la persistencia de lo aprendido con la realización del ejercicio.

b) "TRABAJO EN EL POZO" Y "EL NADADOR" (Botella, Millán, Pérez y Cantó, 2008):

A continuación presentamos un par de problemas seleccionados para desarrollarlos en la hoja de cálculo. Se proponen para ser planteados a los alumnos conjuntamente con el fin de utilizarlos no solo para la enseñanza y aprendizaje de las progresiones aritméticas, sino también como herramienta para reforzar los conceptos de variable continua y discreta, de función discreta continua y discontinua y para enfatizar en el aula sobre el concepto del dominio de las progresiones (números naturales).

TRABAJO EN EL POZO:

Un trabajador llega a un acuerdo con el propietario de un pozo. Le pagará 20 euros por el primer metro de profundidad, 50 euros por el segundo, 80 euros por el tercero, 110 por el cuarto y así sucesivamente. La profundidad del pozo es de 25 metros.

a) ¿Cuánto recibirá por el último metro?

b) ¿Y en total?

EL NADADOR:

Un nadador ha de preparar su próxima competición en 60 días. Seguirá el siguiente plan: el primer día nadará 500 metros y cada día nadará 50 metros más que el anterior.

a) ¿Cuántos metros nada el vigésimo día de entrenamiento? ¿Y el enésimo?

b) ¿Cuántos kilómetros nadará durante todo el periodo de entrenamiento?

Estos problemas podrían plantearse de la siguiente forma:

❖ **Plantear el problema según el formato anteriormente descrito de los problemas de generalización lineal: Incluir cuestiones introductorias, de generalización próxima y lejana, para inducir a los alumnos a explorar los patrones de la progresión y a razonar de una forma más intuitiva la regla de cálculo de la serie de números:**

TRABAJO EN EL POZO:

Un trabajador llega a un acuerdo con el propietario de un pozo. El propietario le pagará cada vez que haya avanzado 1 metro completo de la siguiente forma: 20 euros por el primer metro de profundidad, 50 euros por el segundo, 80 euros por el tercero, 110 por el cuarto y así sucesivamente. La profundidad del pozo es de 25 metros.

a) ¿Cuánto recibirá por el 5º metro? ¿Y por el 6º?

b) ¿Cuánto recibirá por el último metro?

c) El trabajador quiere distribuir publicidad en la que se especifiquen sus honorarios para cualquier profundidad de pozo de cualquier posible cliente. ¿Podrías establecer una regla para que el trabajador pueda incluirla en su publicidad?

EL NADADOR:

Un nadador ha de preparar su próxima competición en 60 días. Seguirá el siguiente plan: el primer día nadará 500 metros y a lo largo de cada día nadará 50 metros más que el anterior.

a) ¿Cuántos metros habrá nadado el 5º día?

b) ¿Y el vigésimo día?

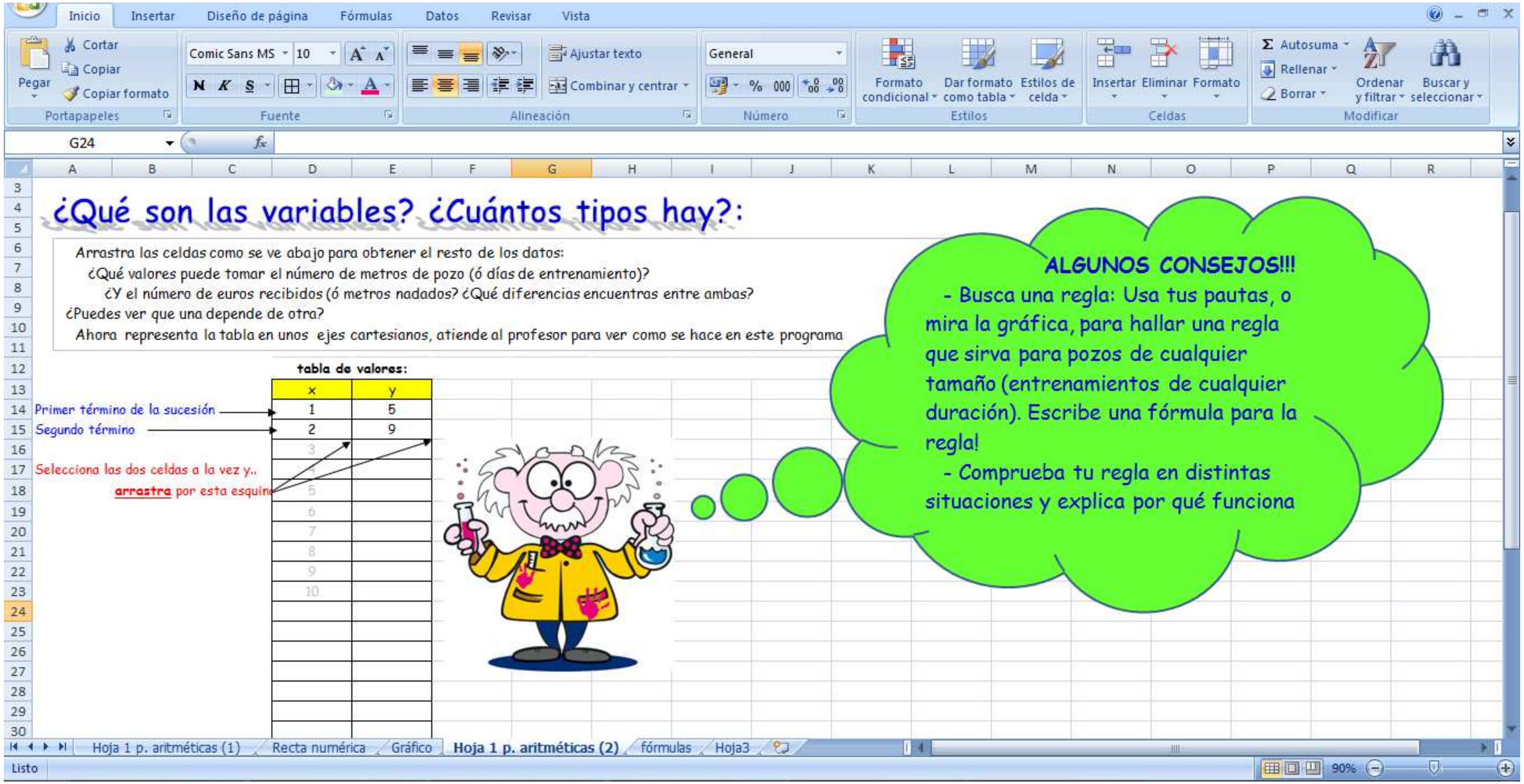
c) ¿Y el enésimo?

En primer lugar se incluyen cuestiones introductorias en los problemas en las que los alumnos deben calcular términos iniciales de la progresión; con ello pretendemos darles la oportunidad de estudiar y detectar las regularidades de la progresión desde el primer momento y sin tener que recurrir al recuento directo de los 20 ó 25 primeros términos planteados en la cuestión de generalización próxima. Si bien habrá alumnos que no detectarán estas pautas en el primer apartado, otros si podrán hacerlo, por lo que con ello conseguimos adaptar el trabajo a las distintas capacidades de los alumnos, además de incluir una opción con la que se evite el cálculo repetitivo de 20 ó 25 términos.

En segundo lugar, modificamos el enunciado para recalcar, o hacer más evidente, el carácter discreto o continuo de la función real asociada a cada caso.

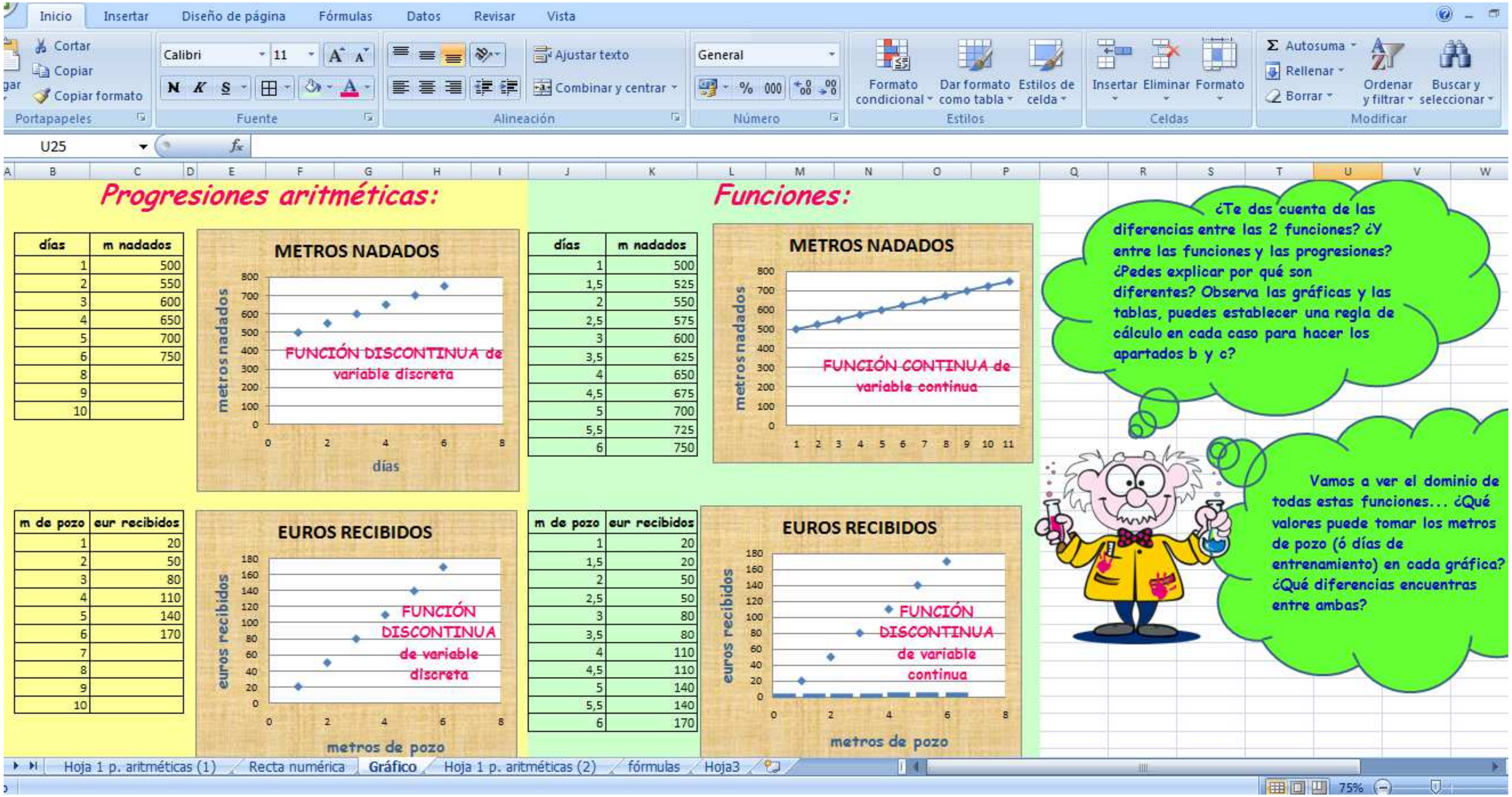
- **Para la realización del problema el profesor puede plantear a los alumnos utilizar la hoja de cálculo, e incluso una plantilla ya diseñada para apoyar el trabajo de los alumnos en el aula. Para este caso hemos desarrollado el siguiente ejemplo:**


Construye una tabla de valores!:
Para ello puedes seguir los siguientes pasos:
1) Elige dos columnas y ponles nombre: una representará los metros de pozo (ó días nadados) y otra los euros recibidos (ó metros nadados).
2) Escribe los valores que conoces de cada columna
3) Rellena la tabla del apartado para los valores que te piden en el apartado a)
tabla de valores:
x
y
Primer término de la sucesión
1
5
Segundo término
2
9
3
4
5
6
7
8
9
10
ALGUNOS CONSEJOS!!!
- Observa las pautas que se dan en tu tabla y escribelas en tu cuaderno. Observa también en la tabla que has construido ¿Puedes explicar por qué se dan esas pautas?
- Usa estas pautas para ampliar la tabla y comprueba que está bien
Hoja 1 p. aritméticas (1)
Recta numérica
Gráfico
Hoja 1 p. aritméticas (2)
fórmulas
Hoja3



Al arrastrar las celdas, los alumnos pueden apreciar con mayor facilidad que se repite una pauta que el programa detecta y reproduce y que la columna de la variable dependiente toma valores dependiendo de los valores que tome la variable independiente. Por tanto, resulta un buen momento para ayudar a los alumnos a comprender el concepto de variable independiente y dependiente a través de la tabla de valores.

Además, es un recurso útil para aquellos alumnos que no detectaron las regularidades de la progresión a partir del cálculo de los primeros términos y de la observación de la tabla y para reforzar la comprensión de los conceptos de los alumnos que si lo hicieron.



En este punto, el profesor puede reforzar los conceptos de variable dependiente e independiente apoyándose en la tabla de valores y en la gráfica simultáneamente.

Por otra parte, estudiar el problema mediante tablas de valores y gráficos permite a los alumnos comprender mejor el problema, ya que lo afrontan desde dos enfoques distintos (la tabla de valores y el gráfico), disponen de más recursos para visualizar y detectar las pautas y la regla de cálculo de las progresiones, por lo que aumentan las posibilidades de éxito. Además, trabajar con diversos sistemas de representación les ayuda a comprender mejor y a aprender a interpretar los diversos sistemas de representación.

Por último, al presentar estos dos problemas de forma conjunta, el profesor puede introducir a los alumnos en el estudio del dominio de las progresiones y de las funciones, insistiendo en el carácter discreto de las progresiones y en la diferencia existente entre las funciones reales y las progresiones (funciones, dominio: números reales; progresiones, dominio: números naturales).

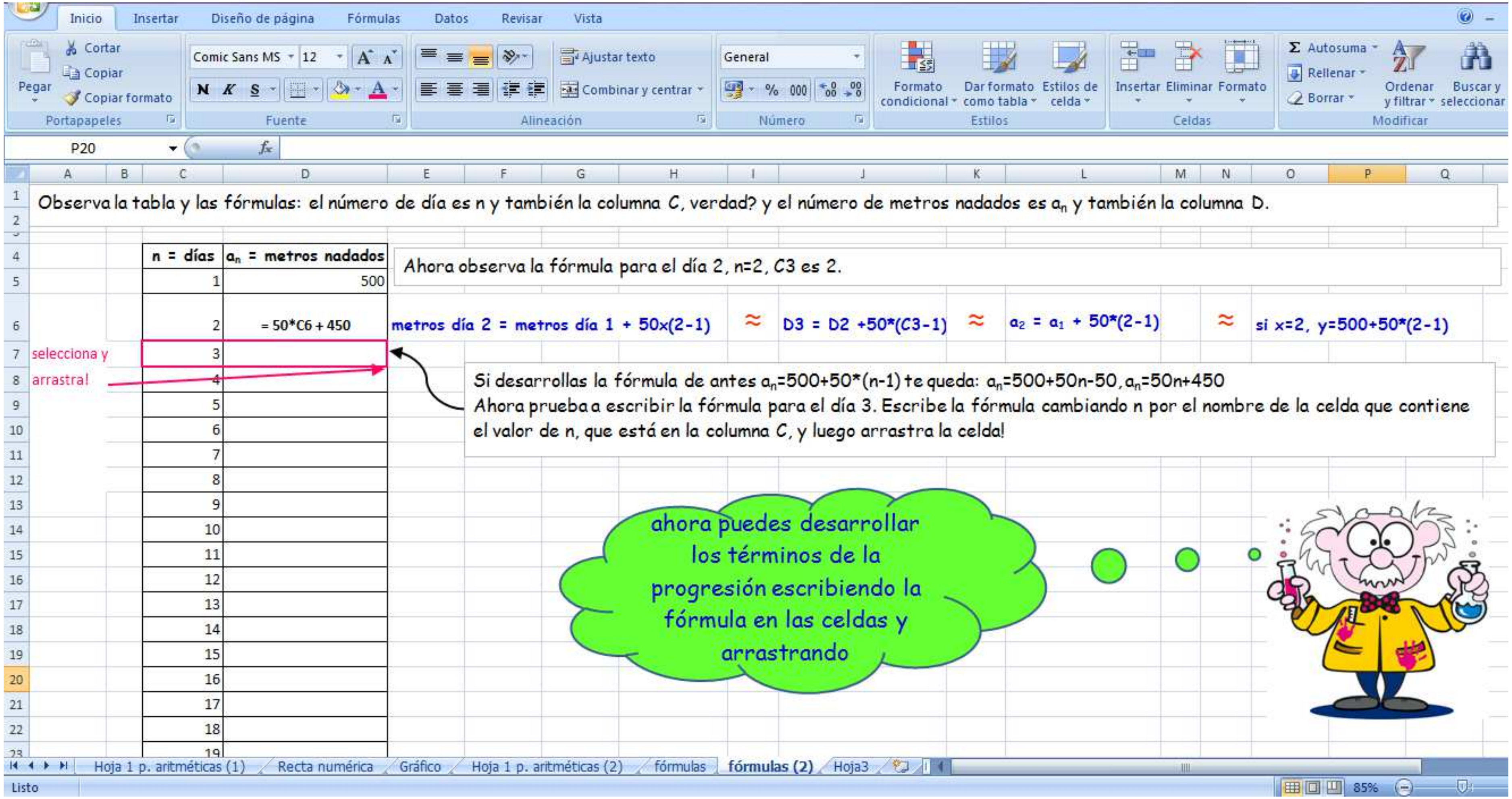
Además, estos dos problemas ofrecen la posibilidad de que los alumnos perciban las diferencias entre las funciones continuas y discontinuas asociadas a cada uno de los problemas, momento en que el profesor debe hacer énfasis en la idea de que no todos los modelos matemáticos se ajustan a todas las situaciones posibles y que resulta necesario explorar y estudiar el problema.

Llegados a este punto, es buen momento para que el profesor les introduzca al desarrollo de la fórmula de la sucesión, para lo que puede proponerles:

- Primero, explicar verbalmente, por escrito, la regla de cálculo que los alumnos detectan en el problema (ya que suelen generalizar al describir su forma de calcular los términos de la sucesión), Ej: *el nadador nada 50 metros cada día, por lo que los metros de un día son iguales que los del día anterior más 50: metros del día 5 = metros del día 6 + 50*

- Segundo, el profesor puede aprovechar los nombres que los alumnos han dado a las columnas y las expresiones verbales que han desarrollado, para establecer vínculos con la notación propia de la hoja de cálculo y a su vez con la notación algebraica: este punto es esencial para facilitarles la comprensión de los conceptos y la conexión de sus ideas formales e informales sobre función, variable…

Luego, el profesor puede apoyarse en lo aprendido para enseñarles a desarrollar las fórmulas en la hoja de cálculo:



Por último, resulta muy interesante que el profesor cierre la actividad proponiendo a los alumnos realizar un debate en clase sobre las diversas estrategias que han utilizado cada uno de ellos, sobre cuál resulta más cómoda, cuál más rápida, etc… Esto ayuda a los alumnos a consolidar lo aprendido y a que persista por más tiempo.

c) "CUADRADOS" (Vizmanos, Anzola, Peralta y Alcaide, 2004)

Las medidas de los lados de una serie de cuadrados forman la sucesión 1 cm, 3 cm, 5 cm, 7 cm,… Escribe la sucesión de los perímetros de los cuadrados.

Este problema también puede aprovecharse para que los alumnos visualicen y comprendan algunas propiedades de las sucesiones, como la multiplicación de una sucesión por un número constante.

Este problema podría plantearse de la siguiente forma:

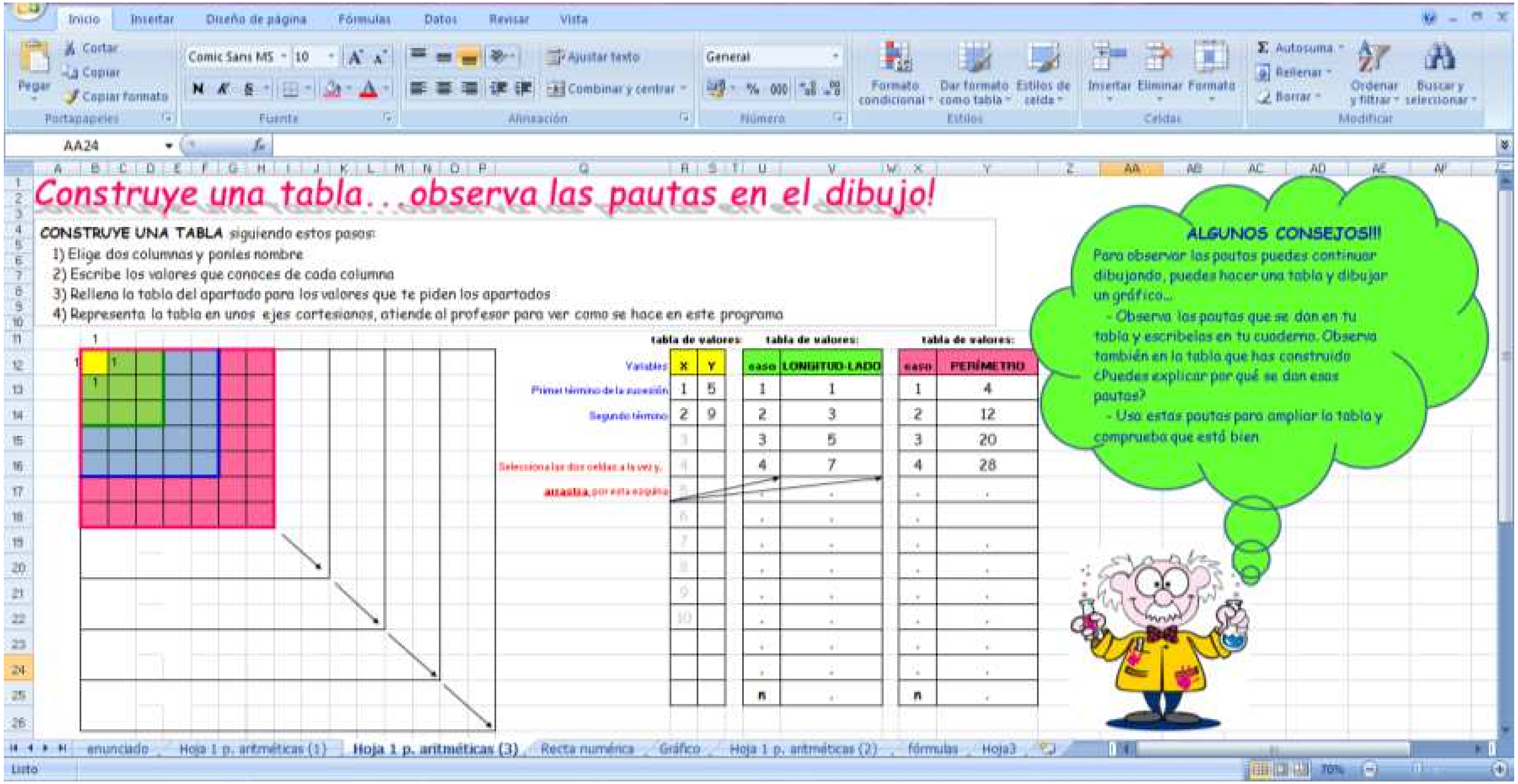
- **Plantear el problema según el formato típico de los problemas de generalización lineal: Incluir cuestiones introductorias, de generalización próxima y lejana, para inducir a los alumnos a explorar los patrones de la progresión y a razonar de una forma más intuitiva la regla de cálculo de la serie de números.**

- **También sería interesante aportar los datos en el enunciado mediante dibujos o diagramas en lugar de números, de forma que se favorezca la comprensión del problema y el razonamiento de los alumnos**

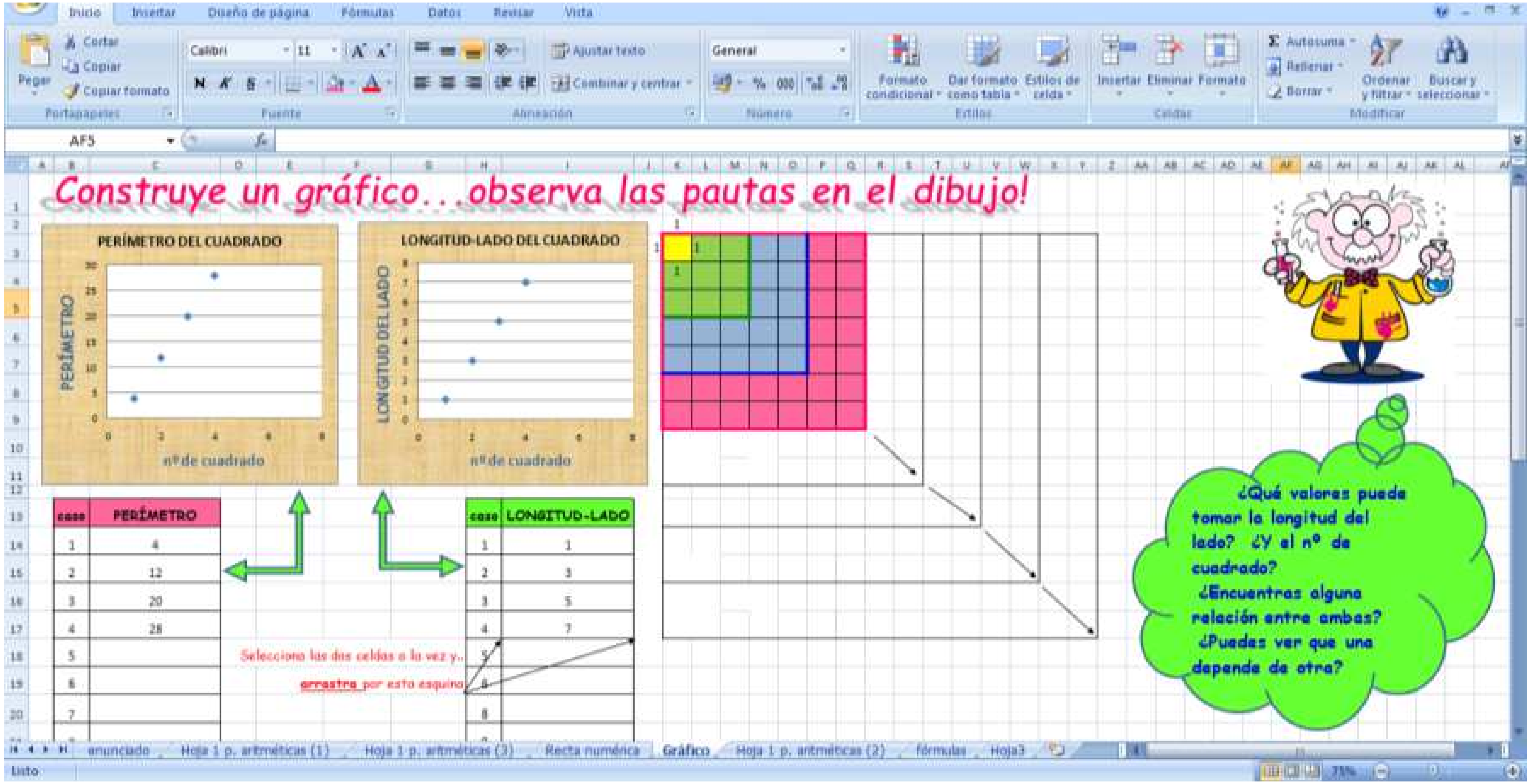
- **Por último, podría utilizarse la hoja de cálculo de Excel como soporte para el enunciado y para la realización del problema, permitiendo representar la progresión bajo diferentes sistemas de representación, facilitando la organización de los datos y la detección de patrones y reforzar el concepto de variable haciendo uso de la notación de Excel y estableciendo relaciones con la algebraica y la verbal.**

A continuación presentamos una posible presentación.

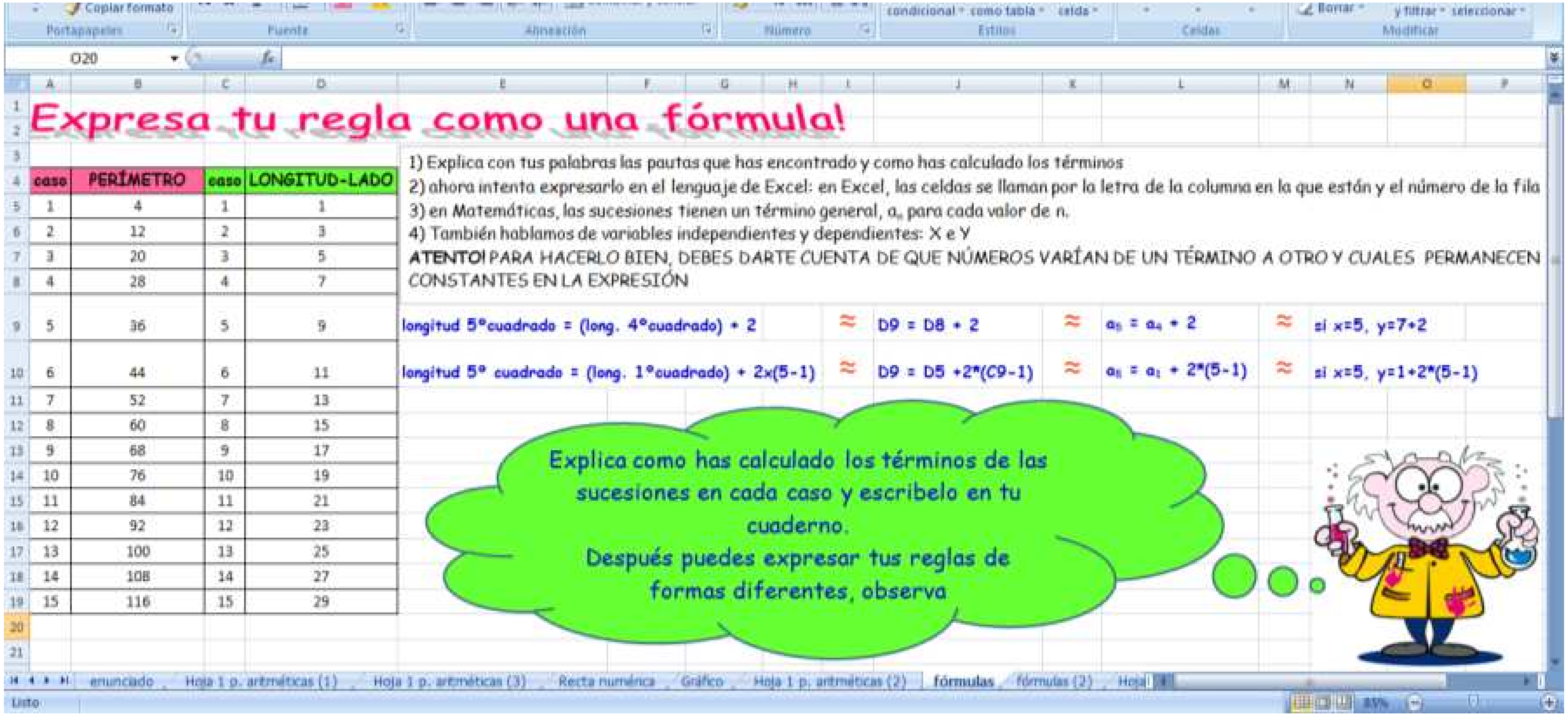
Presentar el problema con un dibujo geométrico en lugar de simplemente la sucesión numérica, aporta más recursos a los alumnos a la hora de abordar el problema, facilitándoles la comprensión y favoreciendo el razonamiento sobre el propio dibujo.


Construye una tabla...observa las pautas en el dibujo!
CONSTRUYE UNA TABLA siguiendo estos pasos:
1) Elige dos columnas y ponles nombre
2) Escribe los valores que conoces de cada columna
3) Rellena la tabla del apartado para los valores que te piden los apartados
4) Representa la tabla en unos ejes cartesianos, atiende al profesor para ver como se hace en este programa
tabla de valores:
tabla de valores:
tabla de valores:
caso
LONGITUD-LADO
PERÍMETRO
ALGUNOS CONSEJOS!!!
Para observar las pautas puedes continuar dibujando, puedes hacer una tabla y dibujar un gráfico...
- Observa las pautas que se dan en tu tabla y escríbelas en tu cuaderno. Observa también en la tabla que has construido ¿Puedes explicar por qué se dan esas pautas?
- Usa estas pautas para ampliar la tabla y comprueba que está bien

Los alumnos tienen la posibilidad de visualizar las pautas en diferentes sistemas de representación, lo que aumenta la probabilidad de éxito a la hora de descubrir los patrones de la misma, cometer menos errores, razonar y aprender a interpretar los distintos sistemas de representación posibles.

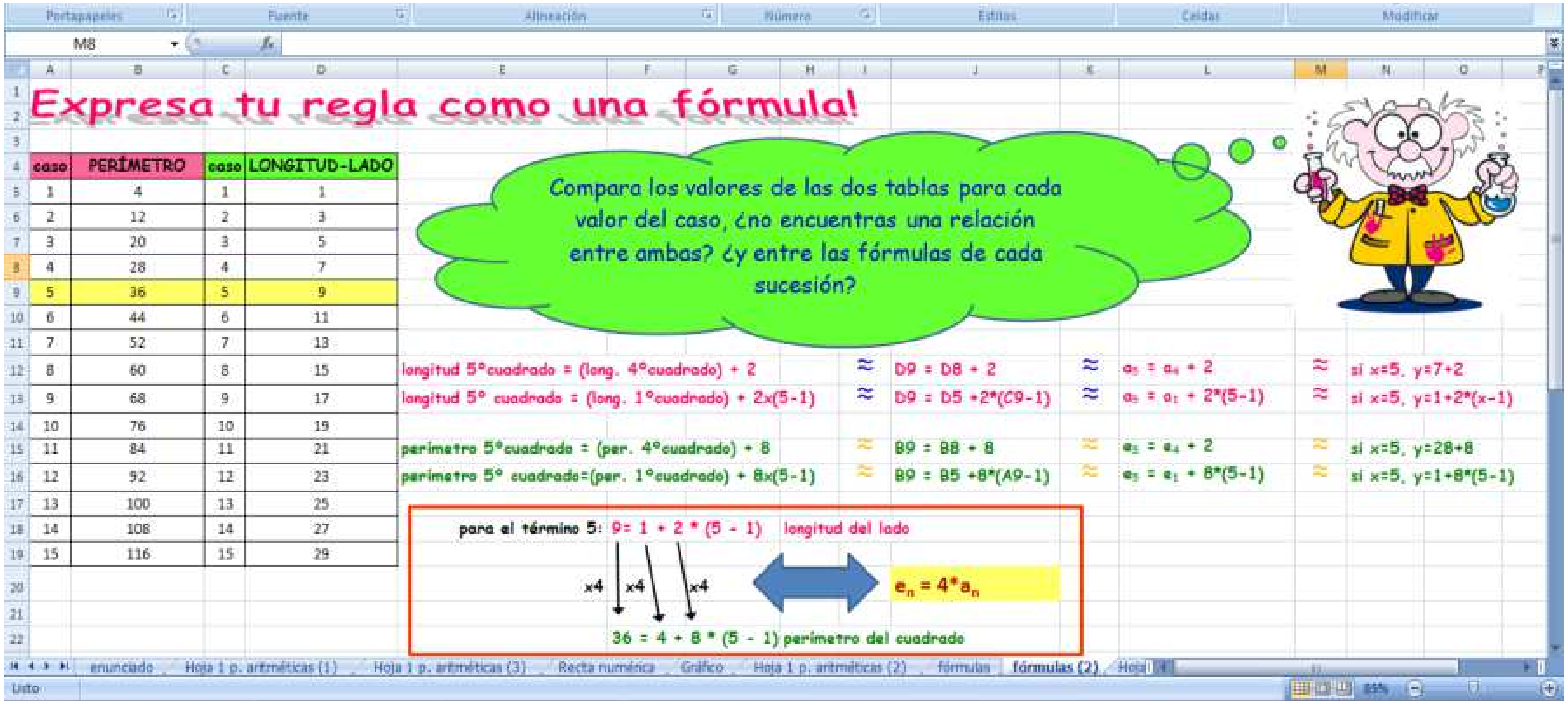


Al arrastrar las celdas los alumnos pueden detectar con mayor facilidad los patrones de las sucesiones y ahorrar tiempo en cálculos. También conviene enfatizar en el concepto de variable y de variable independiente y dependiente.

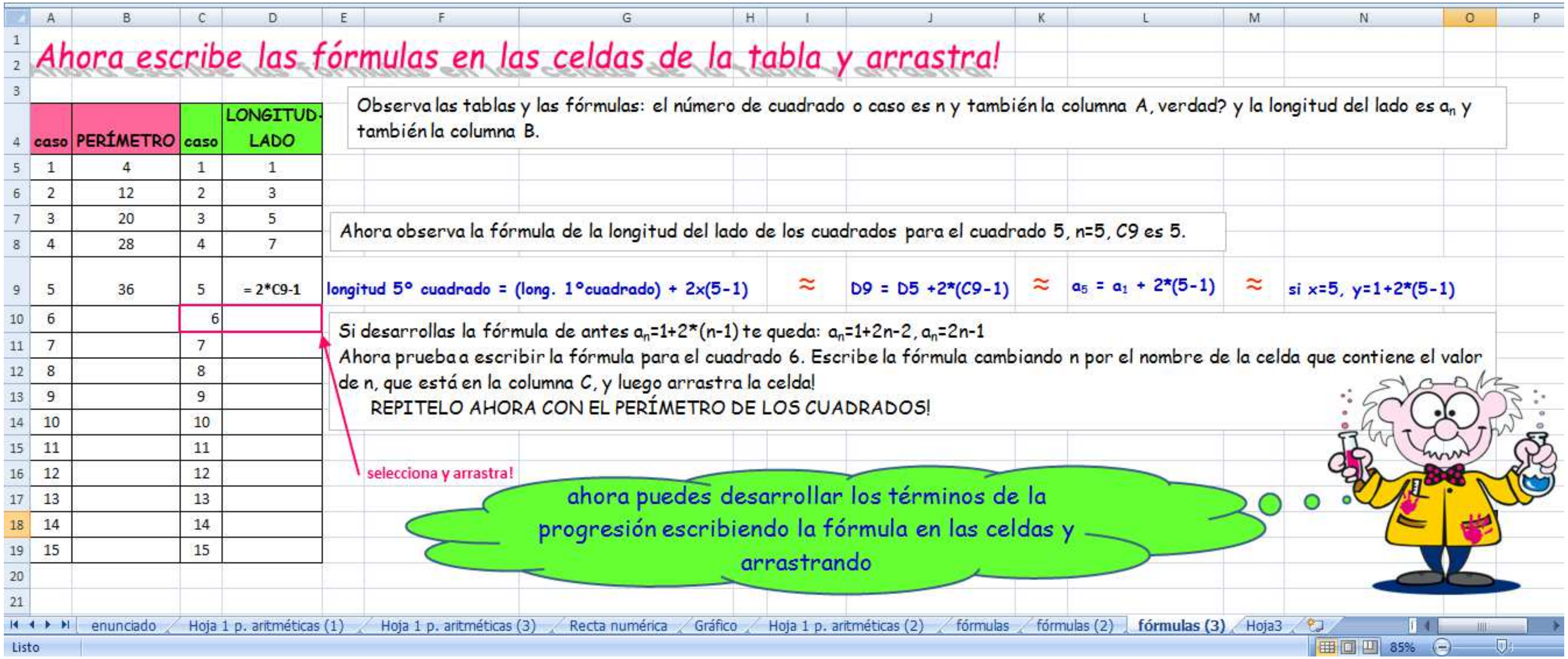


caso	PERÍMETRO	caso	LONGITUD-LADO
1	4	1	1
2	12	2	3
3	20	3	5
4	28	4	7
5	36	5	9
6	44	6	11
7	52	7	13
8	60	8	15
9	68	9	17
10	76	10	19
11	84	11	21
12	92	12	23
13	100	13	25
14	108	14	27
15	116	15	29

También pueden aprender a expresar sus reglas de cálculo según una expresión algebraica utilizando la notación de Excel y estableciendo vínculos entre ésta, sus propias expresiones verbales y la notación algebraica. A lo largo del desarrollo de estos dos problemas, los alumnos también pueden identificar la relación existente entre las dos sucesiones, observar que la sucesión correspondiente al perímetro del cuadrado es igual a la sucesión de la longitud del lado del cuadrado multiplicado por 4 y aprender las propiedades de las sucesiones, como la de la multiplicación por un número real, de forma más intuitiva y generando un aprendizaje significativo:



En este punto, el profesor puede apoyarse en lo aprendido anteriormente para enseñarles a desarrollar la fórmula en la hoja de cálculo, lo que resulta útil, no solo por la utilidad que supone aprender a manejar la hoja de cálculo, sino también para facilitar la comprensión de los conceptos de variable independiente, variable dependiente, función… y para encontrar sentido la expresión formal de la progresión al observar la reproducción de la fórmula en cada celda:



caso	PERÍMETRO	caso	LONGITUD-LADO
1	4	1	1
2	12	2	3
3	20	3	5
4	28	4	7
5	36	5	= 2*C9-1
6		6	
7		7	
8		8	
9		9	
10		10	
11		11	
12		12	
13		13	
14		14	
15		15	

Por último, resulta muy interesante que el profesor cierre la actividad proponiendo a los alumnos realizar un debate en clase sobre las diversas estrategias que han utilizado cada uno de ellos, sobre cuál resulta más cómoda, cuál más rápida, etc… Esto ayuda a los alumnos a consolidar lo aprendido y a que persista por más tiempo.

3. CONCLUSIONES:

El proceso de generalización se desarrolla a diferentes niveles en los alumnos: desde la abstracción del patrón recursivo de la progresión (nivel 1), hasta la detección de la regla explícita de cálculo (nivel 2), su expresión en forma algebraica e incluso su capacidad para reconocer la validez de la estrategia empleada en la resolución del problema en otros similares (nivel 3). En este proceso, la función del docente es guiar y favorecer que los alumnos alcancen, en la medida de lo posible, todos los niveles de generalización, ya que esto resulta un factor determinante en la construcción de significados y de lograr el aprendizaje significativo. Para lograrlo, resulta recomendable que el profesor siga algunas pautas y orientaciones didácticas en el trabajo de aula, tanto en la forma de presentar los problemas como en las estrategias didácticas a emplear en el aula:

- Incluir cuestiones introductorias, de generalización próxima y de generalización lejana en los problemas a realizar para favorecer un razonamiento progresivo e inductivo en la resolución de las diversas cuestiones.
- Incluir dibujos y representaciones geométricas en el enunciado de los problemas, así como utilizar objetos manipulativos, entre los que se incluye la hoja de cálculo, para favorecer la comprensión del problema y facilitar el razonamiento.
- Evitar plantear problemas repetidamente bajo el formato de “problemas de valor faltante” e incidir en las limitaciones del modelo lineal para explicar cualquier situación matemática.
- Comprobar el dominio de aplicabilidad de las reglas que han construido, ya que esto favorece que los alumnos dejen de centrarse en los casos particulares del problema y comiencen a fijarse en la estructura general de la progresión.
- Utilizar varios sistemas de representación durante la resolución de los problemas, así como pasar de uno a otro, ya que favorece la comprensión del problema y la interpretación de los sistemas de interpretación.

- Justificar verbalmente sus respuestas: para inducir a los alumnos a generalizar, ya que al explicar verbalmente lo que han hecho tienden a explicar la regla de cálculo que gobierna el término general.
- Discutir en el aula las diversas estrategias de resolución, ya que favorece la persistencia en el tiempo de los conceptos aprendidos.
- Utilizar la hoja de cálculo para resolver los problemas aprovechando sus posibilidades (representación de tablas, gráficos, etc…fórmulas, arrastre de celdas, etc…) les permite organizar la información, descubrir patrones, conectar sus ideas formales sobre el problema (expresiones algebraicas, gráficos, concepto de variable…) con el contexto del problema en sí y aproximarse a la notación algebraica desde un enfoque más flexible, mediante la relación con la notación de Excel y la expresión verbal.

5. BIBLIOGRAFÍA:

- Andrews, P. (1990). Generalising Number Pattern. *Mathematics in School.* September, 9-13.
- Botella, L.M., Millán, L.M., Pérez, P. y Cantó, J. (2008). *Matemáticas. Tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria.* Alcoy, Alicante: Marfil.
- Cañadas, M.C. y Castro, E. (2005). *Inductive reasoning in the justifications of the result of adding two even numbers.* Report presented at Fourth Congress of the European Society in Mathematics Education. Sant Feliu de Guixols (Girona, Spain).
- Cañadas, M.C. y Castro, E. (2006). Un porcedimiento para la caracterización de estrategis en problemas de sucesiones que involucran el razonamiento inductivo. *Indivisa: Boletín de estudios e investigación.* Monografía IV, 13-24.
- Cañadas, M.C., Castro, Enc. y Castro, Enr. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de ESO en el problema de las baldosas. Universidad de Zaragoza, Universidad de Granada
- Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales.* Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- National Council of Teachers of Mathematics Commission on Standards for School Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston VA: The Council.
- Decreto 57/2007, de 10 de mayo, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Cantabria. BOC de 25 de mayo de 2007, p. 7495-7615.
- Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalizations in mathematics, en A. Bishop *et al* (eds), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching,* pp. 63-85. Kluwer. Holland.
- Dörfler, W. (2002). Formation of mathematical objects as decision making. *Mathematical Thinking and Learning,* 4(4), 337-350.

- Dubinsky, E. y Lewin, P. (1986). Reflective Abstraction and Mathematics Education: the genetic decomposition of induction and compactness, *The Journal of Mathematical Behavior,* 5, 55-92.

- Eduteka (2003). La hoja de cálculo una poderosa herramienta de aprendizaje, Disponible en: http://www.eduteka.org/HojaCalculo2.php

- García, J. A. (1998). El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal. Tesis Doctoral. Tenerife: Universidad de la Laguna.

- García, J. A. (1999). La generalización en un tipo particular de sucesiones aritméticas: los problemas de generalización lineal. *Números, revista de didáctica de las matemáticas,* 38, 3-20.

- Lannin, J.K., Barker, D.D. y Townsend, B.E. (2006). Recursive and explicit rules: How can we build student algebraic understanding?. *Journal of Mathematical Behavior* 25, 299–317.

- Lewis, B. (1983). *Matemáticas Modernas. Aspectos Recreativos.* Madrid: Alhambre.

- Mason, J., Burton, L. y Kaye, S. (1982). *Thinking Mathematically.* Addison-Wesley. [Existe versión en castellano: Pensar Matemáticamente. Editorial Labor y Ministerio de Educación y Ciencia. 1988]

- Merodio, M.A., Señas, M.J., Fioravanti, M., González, M.J. y Diego, J.M. (2007) Influencia de la Hoja de Cálculo en los métodos de resolución de problemas de generalización lineal. XIII Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, Disponible en: http://thales.cica.es/jaem/entrada/indice.html

- MEC. (1989). *Diseño Curricular Base*. *Educación Secundaria Obligatoria. Madrid:* Ministerio de Educación y Ciencia

- Orton, J., Orton, A., & Roper, T. (1999). Pictorial and practical contexts and the perception of pattern. In Orton, A. (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 121–136). London: Cassel Wellington House.

- Piaget, J. (1987). *Introducción a la Epistemología Genética: El pensamiento Matemático.* Editorial Paidós. Mexico.

- Piaget, J. (1990). *La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo.* Siglo XXI de España Editores S.A. Madrid. [L'équilibration des structures cognitives. Probléme central du développment (Études d'Épistemologie génétique, XXXIII). Presses Universitaires de France, 1975] (Traducción de Eduardo Bustos).
- Pólya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton University Press: Princeton, NJ) [Traducción castellana de Julián Zugazagoitia, *Cómo plantear y resolver problemas.* (Trillas: México, 1965)].
- Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria
- Redden, E. (1994). Alternative pathways in the transition form arithmetic thinking to algebraic thinking, en da Ponte, J.P. y Matos, J.F. (eds), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* University of Lisbon. Vol. 4, 89-96
- Roig, A.I. y Llinares, S. (2008). Fases en la abstracción de patrones lineales. XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Badajoz, Septiembre de 2008. [Publicado en Luengo, R; Gómez, B.; Camacho, M. & Blanco, L. (eds.) (2008). *Investigación en educación matemática XII.* Badajoz: SEIEM. (pp.195-204)]
- Shell Centre for Mathematical Education (1993). *Problemas con pautas y números.* Bilbao: Universidad del Pais Vasco.
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 147-164.
- Swan, M. (1984). *Problems with Patterns and Numbers.* Join Matriculation Boards. Shell Centre for Mathematics Education. Nottingham: Swan, M. [Existe versión en castellano: *Problemas con pautas y números.* Bilbao: Servicio Editorial del País Vasco.]
- Taplin, M. (1995). Spatial patterning: a pilot study of pattern formation and generalization, en L. Meira y D. Carraher (eds). *Proceedings of the Nineteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Universidade Federal de Pernambuco, Recife. Vol. 3, 42-49.

- Van Dooren, W., De Bock, D. y Verschaffel, L. (2006). La búsqueda de las raíces de la ilusión de Linealidad. *Indivisa: Boletín de estudios e investigación*, Nº. Extra 4, (Ejemplar dedicado a: VII Seminario de Investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA)) , pags. 115-138.
- Vizmanos, J.R., Anzola, M., Peralta, J. y Alcaide, F. (2004). 3º Secundaria. Matemáticas Gauss. Pinto (Madrid): SM.
- Wilson, Kirsty, Ainley, J. y Bills, L. (2005). Spreadsheets, pedagogic strategies and the evolution of meaning for variable. *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Vol. 4, 321-328. Melbourne: PME

IMÁGENES:

- Profesor chiflado: http://urkullu.eu/2009/10/31/el-laboratorio-del-profesor-chiflado/