Facultad de Ciencias

Sobre el cálculo del número de raíces del determinante de una matriz polinomial en una región del plano complejo.
(Computing the number of roots of the determinant of a polynomial matrix in a region of the complex plane)

Trabajo de Fin de Máster
para acceder al

MÁSTER UNIVERSITARIO EN MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Autor: Gustavo Torres Guerrero

Director: Laureano González Vega

Junio - 2019

Resumen

El cálculo de las raíces del determinante de una matriz polinomial en una variable es un problema recurrente en Álgebra Computacional. Es bien conocido que su cálculo mediante el desarrollo de dicho determinante trae consigo una explosión combinatoria que produce polinomios de alto grado con coeficientes difíciles de manejar en la práctica. En el trabajo de H. Dym y D. Volok se demuestra como calcular el número de raíces del determinante de dicha matriz polinomial $N(\lambda)$ en una región del plano complejo en términos de la signatura de una matriz numérica X que es construida a partir de los coeficientes de la matriz $N(\lambda)$.

Puesto que los algoritmos de aproximación de las raíces de una ecuación, en muchas ocasiones, parten de técnicas que calculan el número de raíces en una región determinada y van haciendo esta más pequeña para aproximar cada una de las raíces, nos proponemos aquí entender la demostración del Teorema de H. Dym y D. Volok antes mencionado con el fin de que pueda ser utilizada en el contexto de la separación de las raíces del determinante de una matriz polinomial.

Palabras claves: Matriz polinomial; Raíces de ecuaciones; Determinante; Espacios de Hilbert con núcleo reproductor; Espacios de Hardy.

Abstract

Computing the roots of the determinant of a polynomial matrix in one variable is a recurrent problem in Symbolic Computation. It is well known that performing this task through the determinant expansion results in a combinatorial explosion that produces high-degree polynomials with huge coefficients that are difficult to handle in practice. In their work, H. Dym and D. Volok prove how to compute the number of zeros of the determinant of the matrix polynomial $N(\lambda)$ inside a region of the complex plane in terms of the signature of a numerical matrix X that is constructed from the coefficients of $N(\lambda)$.

Since typically, approximation algorithms for finding the roots of an equation often start from techniques that compute the number of roots in a given region and make successive reductions of this region in order to approximate each root, our purpose here is to understand the proof of H. Dym and D. Volok Theorem in order to be used in the context of the separation of the roots of the determinant of the considered polynomial matrix.

Keywords: Polynomial matrix; Equation roots; Determinant; Reproducing kernel Hilbert spaces; Hardy spaces

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El cálculo de las raíces del determinante de una matriz polinomial en una variable es un problema recurrente en Álgebra Computacional. Por ejemplo en [8], [3] y [5] aparece cuando se quieren calcular los puntos críticos de una curva algebraica plana definida implícitamente por un polinomio $P(x, y) = 0$, puesto que para ello se deben calcular las raíces de la resultante de P y P_y considerados como polinomios en y. Pero la resultante de P y P_y es el determinante de una matriz cuadrada cuyas entradas son los coeficientes de P y P_y considerados como polinomios en y (la matriz de Sylvester de P y P_y respecto de y).

Es bien conocido que no es aconsejable abordar este cálculo de raíces mediante el desarrollo de dicho determinante porque típicamente produce polinomios de grado alto y cuyos coeficientes crecen mucho en comparación con los coeficientes del polinomio de partida. Además es muy probable que ese determinante produzca un polinomio "difícil" desde el punto de vista de su tratamiento numérico.

En [6] H. Dym y D. Volok demostraron que para cualquier matriz polinomial $N(\lambda)$ de dimensión $m \times m$ cuyo determinante no se anula idénticamente, existe una matriz numérica X construida a partir de sus coeficientes tal que su signatura permite determinar las raíces del determinante de $N(\lambda)$ en una determinada región del plano complejo. Puesto que los algoritmos de aproximación de las raíces de una ecuación, en muchas ocasiones, parten de técnicas que calculan el número de raíces en una región determinada e ir haciendo esta más pequeña para aproximar cada una de las raíces se ha intentado aquí entender la demostración del Teorema de Dym y Volok con el fin de que este pudiera ser utilizado en el contexto de la separación de las raíces del determinante de una matriz polinomial.

Con el fin de lograr el objetivo propuesto se divide este trabajo en 5 capítulos. Partiendo de este capítulo introductorio, el segundo capítulo muestra las herramientas y conceptos fundamentales para entender la demostración del teorema. Se establece la notación a utilizar y se escogen los dominios sobre los cuales se hará la búsqueda de las raíces del determinante. Se introducen los espacios de Hilbert con núcleo reproductor y los espacios de Hardy de índice 2, junto con sus características principales en relación con el problema que nos ocupa. En el tercer capítulo se obtiene la matriz X a partir de un procedimiento basado en la manipulación de las raíces del determinante de $N(\lambda)$ y luego se procede a la demostración del teorema principal. En el capítulo 4 se desarrolla varios ejemplos basados en la demostración de este teorema para el cálculo del número de raíces del determinante de $N(\lambda)$ de orden dos en el disco unitario. Se analiza también un caso particular en el que se obtiene la matriz X sin necesidad de utilizar las raíces del determinante de $N(\lambda)$ y brinda también un ejemplo en el que se muestra la equivalencia con ambos procedimientos empleados. Finalmente en el capítulo 5 se analizan los resultados obtenidos y se presentan algunas posibles lineas de trabajo futuro.

Capítulo 2

Herramientas y nociones fundamentales

En este capítulo introducimos las notaciones y herramientas fundamentales que nos ayudarán a comprender de forma correcta la demostración del teorema principal sobre el que gira este trabajo. Se dan las nociones elementales de espacios de Hilbert con núcleo reproductor y Espacios de Hardy, se detallan sus principales características que los hacen una herramienta adecuada para su uso y se demuestran algunos resultados de interés para su posterior uso.

2.1. Notaciones

La matriz polinomial $N(\lambda)$ de dimensión $m \times m$, es la matriz cuyas entradas son polinomios, o sea

$$N(\lambda) = \begin{pmatrix} p_{11}(\lambda) & p_{12}(\lambda) & \dots & p_{1m}(\lambda) \\ p_{21}(\lambda) & p_{22}(\lambda) & \dots & p_{2m}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1}(\lambda) & p_{m2}(\lambda) & \dots & p_{mm}(\lambda) \end{pmatrix},$$

donde asumiremos que $p_{ij} \in \mathbb{C}[\lambda]$ con $i, j = 1 \dots m$. Es importante notar además que $N(\lambda)$ se puede ver como una función polinomial de valor matricial en una variable compleja escrita como

$$N(\lambda) = \sum_{i=0}^{d} A_i \lambda^i = A_0 + A_1\lambda + \cdots + A_d\lambda^d,$$

donde $A_0, A_1, \dots, A_d$ son matrices en $\mathbb{C}^{m\times m}$ y d es el grado del polinomio. En ocasiones será útil este segundo enfoque. Tengamos además las siguientes notaciones:

$$d_j \overset{\mathsf{def}}{=} \deg(N(\lambda)e_j), \quad n \overset{\mathsf{def}}{=} \max(d_1, \dots, d_m), \quad \text{y} \quad d = \sum_{j=1}^{m} d_j,$$

siendo e_j elementos de la base estándar de $\mathbb{C}^m$ y los números d_j, $j = 1, \dots, m$, se refieren a los grados de los polinomios por columnas de $N(\lambda)$.

Puesto que estaremos restringidos a calcular los ceros de $\det N(\lambda)$ sobre un dominio Ω_+, las opciones clásicas son:

(1) $\Omega_+ = \mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$, el disco unidad abierto;

(2) $\Omega_+ = \mathbb{C}_+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda - \overline{\lambda})/i > 0\}$, el semiplano abierto superior; y

(3) $\Omega_+ = \Pi_+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda + \overline{\lambda} > 0\}$, el semiplano abierto derecho.

Puesto que en (2) y (3) el análisis es prácticamente el mismo abordaremos solamente los dos primeros casos y según la elección que se trate tendremos las siguientes notaciones:

	$\Omega_+ = \mathbb{D}$	$\Omega_+ = \mathbb{C}_+$
∂	$S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : \|\lambda\| = 1\}$	$\mathbb{R}$
$\rho_\omega(\lambda)$	$1 - \lambda\overline{\omega}$	$2\pi i(\lambda - \overline{\omega})$
$b_\omega(\lambda)$	$\frac{\lambda-\omega}{1-\lambda\overline{\omega}}$	$\frac{\lambda-\omega}{\lambda-\overline{\omega}}$
$\delta(\lambda)$	$\mathrm{diag}(\lambda^{d_1}, \ldots, \lambda^{d_m})$	$\mathrm{diag}((i+\lambda)^{d_1}, \ldots, (i+\lambda)^{d_m})$
$\Delta(\lambda)$	$\mathrm{diag}(b_0(\lambda)^{d_1}, \ldots, b_0(\lambda)^{d_m})$	$\mathrm{diag}(b_i(\lambda)^{d_1}, \ldots, b_i(\lambda)^{d_m})$

Luego, dado $N(\lambda)$ y una matriz hermitiana A, denotamos como

(1) $\nu_\pm(N)$, la cantidad de ceros de $\det(N(\lambda))$ en $\Omega_\pm$, donde $\Omega_- = \mathbb{C} \setminus \{\Omega_+ \cup \partial\}$,

(2) $\mu_+(A), \mu_-(A)$ y $\mu_0(A)$, cantidad de autovalores positivos, negativos y cero respectivamente de la matriz A.

En todo lo que sigue asumiremos que $N(\lambda)$ cumple las siguientes propiedades:

$$\deg(N(\lambda)) \geq 1, \tag{2.1}$$

$$\det(N(\lambda)) \neq 0, \quad \forall\, \lambda \in \partial, \tag{2.2}$$

$$N_0 \stackrel{\mathsf{def}}{=} \lim_{\lambda\to\infty} N(\lambda)\delta(\lambda)^{-1}. \tag{2.3}$$

2.2. Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

Como es conocido un espacio de Hilbert es un espacio vectorial X sobre sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (real o complejo) dotado de un producto interno que es completo respecto a la norma que este define. Este producto interno es una función $\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ que cumple que

(1) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ para todo $x, y \in X$,

(2) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ para todo $x, y, z \in X$,

(3) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ para todo $x, y \in X$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$,

(4) $\langle x, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in X$,

(5) $\langle x, x\rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Como consecuencias inmediatas de la definición de producto interno se tiene además que

(I) $\langle 0, x\rangle = \langle x, 0\rangle = 0$ para todo $x \in X$,

(II) $\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$ para todo $x, y \in X$,

(III) $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$ para todo $x, y \in X$.

Definición 2.1. *Sea X un conjunto no vacío. Decimos que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor definido en X y con valores en el cuerpo $\mathbb{K}$ si satisface que:*

1. *$\mathcal{H}$ es un subespacio vectorial del espacio de funciones $\mathcal{F} = \{f : X \to \mathbb{K}\}$. (En $\mathcal{F}$ se consideran las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un escalar por una función).*

2. *$\mathcal{H}$ está dotado de un producto interno $\langle ., .\rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ con respecto al cual es un espacio de Hilbert.*

3. *Para cada $\omega \in \mathcal{H}$ el funcional lineal $E_\omega : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ dado por*

$$E_\omega(f) = f(\omega), \quad f \in \mathcal{H},$$

es continuo. (i.e. existe una constante $C_\omega > 0$ tal que $|f(\omega)| \leq C_\omega \|f\|$ para todo $f \in \mathcal{H}$).

Al funcional E_ω se le llama funcional de evaluación en el punto ω.

Dado que el funcional de evaluación en ω es continuo en $\mathcal{H}$, por el Teorema de Representación de Riez (consultar por ejemplo [10, p. 40]) se sigue que existe una única función $k_\omega \in \mathcal{H}$ tal que

$$f(\omega) = \langle f, k_\omega\rangle \quad \text{para todo} \quad f \in \mathcal{H}. \tag{2.4}$$

A la función k_ω se le conoce como el núcleo reproductor de $\mathcal{H}$ para el punto ω. El núcleo reproductor de $\mathcal{H}$ es la función $K : X \times X \to \mathbb{K}$ definida por

$$K(\lambda, \omega) = k_\omega(\lambda) \quad \lambda, \omega \in X.$$

Aplicamos (2.4) a la función $f = k_\omega$ para obtener

$$K(\lambda, \omega) = k_\omega(\lambda) = \langle k_\omega, k_\lambda\rangle.$$

Proposición 2.1. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert sobre un conjunto X con núcleo reproductor K. Si $\{e_s : s \in S\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$ entonces*

$$K(\lambda, \omega) = \sum_{s\in S} \overline{e_s(\omega)}, e_s(\lambda)$$

donde esta serie converge puntualmente.

Demostración. Para cualquier $\omega \in X$, tenemos que

$$\langle k_\omega, e_s\rangle = \overline{\langle e_s, k_\omega\rangle} = \overline{e_s(\omega)}.$$

Por lo que

$$k_\omega = \sum_{s\in S} \overline{e_s(\omega)} e_s,$$

donde estas sumas convergen en norma sobre $\mathcal{H}$.

Pero como estas sumas convergen en norma, también convergen en todo punto. Por tanto,

$$K(\lambda, \omega) = k_\omega(\lambda) = \sum_{s\in S} \overline{e_s(\omega)} e_s$$

como se quería demostrar. $\square$

2.3. Espacios de Hardy

Definición 2.2. *El espacio de todas las funciones analíticas con valores en $\mathbb{C}^{m\times 1}$ respecto a Ω_+, representables en series de potencias con coeficientes cuya suma cuadrática es finita, se denominará espacio de Hardy de índice 2 (o espacio de Hardy-Hilbert por ser este, de índice 2, el único espacio de Hardy que a su vez es espacio de Hilbert [9]), denotado como $\mathbf{H}^2_m$. Esto es*

$$\mathbf{H}^2_m = \left\{ f : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \text{ con } a_n \in \mathbb{C}^{m\times 1}, \text{ tal que } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Para las funciones $f, g \in \mathbf{H}^2_m$ tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad y \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad con \quad a_n, b_n \in \mathbb{C}^{m\times 1},$$

se define su producto interno como

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n^*.$$

La norma del vector $f \in \mathbf{H}_m^2$ *está dada por*

$$\|f\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2}, \quad \textit{donde} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Denotemos por $\mathbf{L}_m^2 = \mathbf{L}_m^2(S^1)$ al espacio de Hilbert de las funciones con valores en $\mathbb{C}^{m\times 1}$ cuadrado integrables sobre S^1 con respecto a la medida de Lebesgue. Si se tiene para cada entero n, la función $e_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$ sobre S^1, es bien conocido que el conjunto $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ forma una base ortonormal de $\mathbf{L}^2$ (ver por ejemplo [1, p. 24]). Por extensión, considerando $\tilde{e}_n = e_n(e^{i\theta})e_j$, donde e_j con $j = 1, \ldots, m$, son elementos de la base estándar de $\mathbb{C}^m$, se comprueba fácilmente que este nuevo conjunto de funciones forman una base ortonormal de $\mathbf{L}_m^2$. Si definimos el siguiente subespacio de $\mathbf{L}_m^2$ como

$$\widetilde{\mathbf{H}}_m^2 = \{\tilde{f} \in \mathbf{L}_m^2 : \langle \tilde{f}, \tilde{e}_n\rangle = 0 \text{ para } n < 0\},$$

esto es, $\tilde{f} \in \widetilde{\mathbf{H}}_m^2$ si su serie de Fourier es de la forma

$$\tilde{f}(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta} \quad \text{tal que} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty,$$

es claro que $\widetilde{\mathbf{H}}_m^2$ es un subespacio cerrado de $\mathbf{L}_m^2$ y existe un isomorfismo natural entre $\widetilde{\mathbf{H}}_m^2$ y $\mathbf{H}_m^2$. Es decir, identificamos la función $f \in \mathbf{H}_m^2$ cuya serie de Fourier es

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$$

con la función analítica

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

De aquí se deduce fácilmente que el conjunto $\{\tilde{e}_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ forma una base ortonormal de $\mathbf{H}_m^2$.

Teniendo en cuenta que $\mathbf{H}_m^2$ es también un espacio de Hilbert y $\{\tilde{e}_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ es una base ortonormal sobre S^1, utilizando la Proposición 2.1, su núcleo reproductor vendría dado por

$$k_\omega(\lambda) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} \tilde{e_n}(\lambda)\tilde{e_n}(\omega)^* = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda\overline{\omega})^n = \frac{1}{1-\lambda\overline{\omega}}. \tag{2.5}$$

Siendo $\mathbf{H}^2_m$ un subespacio cerrado de $\mathbf{L}^2_m$, mediante descomposición ortogonal tenemos que para todo vector $u \in \mathbf{L}^2_m$, existen los vectores únicos $w \in \mathbf{H}^2_m$ y $z \in (\mathbf{H}^2_m)^\perp$ tal que $u = w + z$. Luego la proyección ortogonal $\mathbf{p} : \mathbf{L}^2_m \to \mathbf{H}^2_m$, es el operador lineal tal que $\mathbf{p}u = w$. Si A es una matriz polinomial de dimensión $m \times m$, entonces tendremos que $\mathbf{p}A|_{\mathbf{H}^2_m} = Aw|_{\mathbf{H}^2_m}$. Mediante esta proyección ortogonal se establece una relación que permite determinar la cantidad de ceros en Ω_+ del determiante de una matriz polinomial.

Lema 2.1. *Sea $P(\lambda)$ una matriz polinomial de dimensión $m \times m$ tal que*

$$\det(P(\lambda)) \neq 0, \quad \forall\, \lambda \in \partial,$$

y sea $\sigma(\lambda) = \operatorname{diag}\{(\lambda + i)^{l_1}, \ldots, (\lambda + i)^{l_m}\}$, donde $l_i = deg\{e_j^* P\}$ para $i = 1, \ldots, m$. Entonces

$$\nu_+(P) = \begin{cases} \dim\ker \mathbf{p}P^*|_{\mathbf{H}^2_m} & si\ \Omega_+ = \mathbb{D}, \\ \dim\ker \mathbf{p}(\sigma^{-1}P)^*|_{\mathbf{H}^2_m} & si\ \Omega_+ = \mathbb{C}_+\ y\ \operatorname{lím}_{\lambda\to\infty} \sigma(\lambda)^{-1}P(\lambda)\ es\ invertible. \end{cases}$$

La demostración de este lema se puede encontrar de forma detallada en [6], esta se omite aquí por utilizar conceptos que van más allá del alcance de este trabajo.

Consideremos además el espacio formado por la diferencia ortogonal de los espacios de Hardy $\mathbf{H}^2_m$ y $\Delta\mathbf{H}^2_m$, esto es

$$\mathbf{H}^2_m \ominus \Delta\mathbf{H}^2_m = \begin{pmatrix} \mathbf{H}^2 \ominus \lambda^{d_1}\mathbf{H}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{H}^2 \ominus \lambda^{d_m}\mathbf{H}^2 \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{H}^2 \ominus \lambda^{d_i}\mathbf{H}^2 = \mathbf{H}^2 \cap (\mathbf{H}^2 \cap \lambda^{d_i}\mathbf{H}^2)^\perp$, con $i = 1, \ldots, m$. Este espacio es ampliamente utilizado en [7] y se verifica que está formado por los vectores cuya $i-$ésima componente es un polinomio de grado menor que d_i.

El siguiente resultado será útil en la demostración del teorema objeto de este trabajo.

Proposición 2.2. *Sea $A(\lambda)$ una matriz polinomial de dimensión m y además $f, g \in \mathbf{H}^2_m$. Entonces se cumple que*

$$\left\langle f(\lambda), A(\lambda)\frac{g(\omega)}{\rho_\omega(\lambda)} \right\rangle = \left\langle A(\lambda)^* f(\lambda), \frac{g(\omega)}{\rho_\omega(\lambda)} \right\rangle$$

para todo $\lambda \in \mathbb{D}$.

Demostración. Comencemos demostrando la siguiente igualdad

$$\left\langle f(\lambda), \frac{\lambda^k g(\omega)}{1 - \lambda\overline{\omega}} \right\rangle = \left\langle \overline{\lambda}^k f(\lambda), \frac{g(\omega)}{1 - \lambda\overline{\omega}} \right\rangle \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{D}.$$

Dado que

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n \quad \text{tal que} \quad |a_n|^2 < \infty, \quad \text{y} \quad \frac{\lambda^k}{1-\lambda\overline{\omega}} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\omega}^n \lambda^{k+n} \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{D},$$

entonces

$$\left\langle f(\lambda), \frac{\lambda^k g(\omega)}{1-\lambda\overline{\omega}} \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} \omega^n g(\omega)^* = \left\langle \lambda^{-k} f(\lambda), \frac{g(\omega)}{1-\lambda\overline{\omega}} \right\rangle = \left\langle \overline{\lambda}^k f(\lambda), \frac{g(\omega)}{1-\lambda\overline{\omega}} \right\rangle.$$

Esta última igualdad es consecuencia de que $\overline{\lambda} = \lambda^{-1}$ para todo $\lambda \in \mathbb{D}$. Luego se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\langle f(\lambda), A(\lambda)\frac{g(\omega)}{1-\lambda\overline{\omega}} \right\rangle &= \sum_{k=0}^{m} \left\langle f(\lambda), A_k \lambda^k \frac{g(\omega)}{1-\lambda\overline{\omega}} \right\rangle = \sum_{k=0}^{m} \left\langle A_k^* f(\lambda), \lambda^k \frac{g(\omega)}{1-\lambda\overline{\omega}} \right\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{m} \left\langle A_k^* \overline{\lambda}^k f(\lambda), \frac{g(\omega)}{1-\lambda\overline{\omega}} \right\rangle = \left\langle A(\lambda)^* f(\lambda), \frac{g(\omega)}{1-\lambda\overline{\omega}} \right\rangle.
\end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 3

El Teorema y su demostración

En este capítulo procederemos a la demostración del teorema principal que brinda una herramienta para el cálculo del número de ceros de $\det(N(\lambda))$ en Ω_+. Para esto como se ha dicho se precisa del conocimiento de cierta matriz numérica X, por lo que primeramente se demuestra la existencia de cierta función $\Theta(\lambda)$ de valor matricial que cumple ciertas características y se desarrolla un método para el cálculo de X partiendo de las raíces del determinante de $N(\lambda)$.

Proposición 3.1. *Sea*

$$\det(N(\lambda)) = a(\lambda - \alpha_1)\cdots(\lambda - \alpha_d), \quad \textit{donde} \quad a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \alpha_1, \ldots \alpha_d \in \mathbb{C} \setminus \partial.$$

Existe una función $\Theta(\lambda)$ con imagen en las matrices polinomiales de dimensión $m \times m$, holomorfa en ∂, que cumple las siguientes propiedades:

$$\Theta(\lambda)^* = \Theta(\lambda)^{-1}, \quad \forall\, \lambda \in \partial, \tag{3.1}$$

$$\det(\Theta(\lambda)) = b_{\alpha_1}(\lambda)\cdots b_{\alpha_d}(\lambda), \tag{3.2}$$

$$\textit{si } \Omega_+ = \mathbb{C}_+, \ \textit{entonces} \ \lim_{\lambda\to\infty} \Theta(\lambda) = I_m, \tag{3.3}$$

$$\textit{si } \Omega_+ = \mathbb{D}_+, \ \textit{entonces } \Theta(\lambda), \ \textit{es holomorfa en } \lambda = 0, \tag{3.4}$$

$$D(\lambda) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \Theta(\lambda)^{-1}N(\lambda) \ \textit{es una matriz polinomial.} \tag{3.5}$$

Demostración. Puesto que $\det(N(\alpha_1)) = 0$, existe un vector $u_1 \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ tal que $u_1^* N(\alpha_1) = 0$. Consideremos el factor elemental de Blaschke-Potapov [2, p. 142]

$$\Theta_{\alpha_1}(\lambda) = I_m + (b_{\alpha_1}(\lambda) - 1)u_1(u_1^* u_1)^{-1}u_1^*.$$

Comprobemos que este factor cumple:

(1) $\Theta_{\alpha_1}(\lambda)^* = \Theta_{\alpha_1}^{-1}, \quad \forall\, \lambda \in \partial.$

Reescribiendo como $\Theta_{\alpha_1}(\lambda) = I_m + k(\lambda)u_1u_1^*$, con $k(\lambda) = (b_{\alpha_1}(\lambda) - 1)(u_1^*u_1)^{-1}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\Theta_{\alpha_1}(\lambda)^*\Theta_{\alpha_1}(\lambda) &= (I_m + \overline{k(\lambda)}u_1u_1^*)(I_m + k(\lambda)u_1u_1^*) \\
&= I_m + \overline{k(\lambda)}u_1u_1^* + k(\lambda)u_1u_1^* + k(\lambda)\overline{k(\lambda)}u_1u_1^*u_1u_1^* \\
&= I_m + u_1u_1^*\left(\overline{k(\lambda)} + k(\lambda) + k(\lambda)\overline{k(\lambda)}u_1^*u_1\right) \\
&= I_m + u_1u_1^*(u_1^*u_1)^{-1}\left(\overline{b_{\alpha_1}(\lambda)}b_{\alpha_1}(\lambda) - 1\right).
\end{aligned}$$

Pero $\overline{b_{\alpha_1}(\lambda)}b_{\alpha_1}(\lambda) = 1$ para todo $\lambda \in \partial$. Luego

$$\Theta_{\alpha_1}(\lambda)^*\Theta_{\alpha_1}(\lambda) = I_m \Rightarrow \Theta_{\alpha_1}(\lambda)^* = \Theta_{\alpha_1}^{-1}.$$

(2) $\det(\Theta_{\alpha_1}(\lambda)) = b_{\alpha_1}(\lambda)$.

Considerando la siguiente igualdad matricial

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ u_1^* & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m + k(\lambda)u_1u_1^* & k(\lambda)u_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -u_1^* & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & u_1 \\ 0 & 1 + k(\lambda)u_1^*u_1 \end{pmatrix},$$

tomando determinante a ambos lados tenemos que

$$\begin{aligned}
\det(I_m + k(\lambda)u_1u_1^*) &= 1 + k(\lambda)u_1^*u_1 \\
\det(\Theta_{\alpha_1}(\lambda)) &= 1 + (b_{\alpha_1}(\lambda) - 1)(u_1^*u_1)^{-1}u_1^*u_1 = b_{\alpha_1}(\lambda).
\end{aligned}$$

(3) Si $\Omega_+ = \mathbb{C}_+$, entonces $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \Theta_{\alpha_1}(\lambda) = I_m$.

Se tiene en este caso:

$$\lim_{\lambda\to\infty} b_{\alpha_1}(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\lambda - \alpha_1}{\lambda - \overline{\alpha_1}} = 1 \Rightarrow \lim_{\lambda\to\infty} k(\lambda) = 0 \Rightarrow \lim_{\lambda\to\infty} \Theta_{\alpha_1}(\lambda) = I_m.$$

(4) Si $\Omega_+ = \mathbb{D}_+$ entonces $\Theta_{\alpha_1}(\lambda)$ es holomorfa en $\lambda = 0$, lo que fácilmente se verifica al sustituir este valor en la función.

De la segunda propiedad se deduce que $\det(\Theta_{\alpha_1}(\lambda)^{-1}) = b_{\alpha_1}(\lambda)^{-1}$, por lo que fácilmente se comprueba que

$$\Theta_{\alpha_1}(\lambda)^{-1} = I_m + (b_{\alpha_1}(\lambda)^{-1} - 1)u_1(u_1^*u_1)^{-1}u_1^*.$$

Luego la función $N_1(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \Theta_{\alpha_1}(\lambda)^{-1}N(\lambda)$ es una matriz polinomial tal que

$$\det(N_1(\lambda)) = ab_{\alpha_1}(\lambda)^{-1}(\lambda - \alpha_1)\cdots(\lambda - \alpha_d).$$

Repitiendo todo el proceso se obtiene una nueva función $\Theta_{\alpha_2}(\lambda)$, se construye $N_2(\lambda)$, y así sucesivamente

$$N_2(\lambda) = \Theta_{\alpha_2}(\lambda)^{-1} N_1(\lambda), \ldots, N_d(\lambda) = \Theta_{\alpha_d}(\lambda)^{-1} N_{d-1}(\lambda),$$

de donde se obtiene la función $\Theta(\lambda) = \Theta_{\alpha_1}(\lambda) \cdots \Theta_{\alpha_d}(\lambda)$ que satisface las propiedades deseadas. $\square$

Sean

$$\widehat{N}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \delta(\lambda) N\left(\frac{1}{\lambda}\right)^* & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{D}, \\ \delta(\lambda^{-1}) N\left(\overline{\lambda}\right)^* & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{C}_+, \end{cases} \quad \text{y} \quad \widehat{D}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \delta(\lambda) D\left(\frac{1}{\lambda}\right)^* & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{D}, \\ \delta(\lambda^{-1}) D\left(\overline{\lambda}\right)^* & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{C}_+, \end{cases}$$

donde $D(\lambda)$ es la matriz polinomial definida en la Proposición 3.1. Entonces, teniendo en cuenta (2.2), (3.1) y (3.5), estas funciones matriciales $\widehat{N}(\lambda)$ y $\widehat{D}(\lambda)$ son holomorfas e invertibles en todo punto de ∂.

Fijemos además la siguiente función $\widehat{\Phi}(\lambda)$ cuyo valor es una matrix polinomial con dimensión $m \times d$ y sus columnas forman una base de $\mathbf{H}^2_m \ominus \Delta \mathbf{H}^2_m$

$$\widehat{\Phi}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \Phi(\lambda) & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{D}, \\ \delta(\lambda^{-1}) \Phi(\lambda) & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{C}_+, \end{cases}$$

donde $\Phi(\lambda) = [\phi_{j,l}(\lambda)]$ es la matriz polinomial $m \times d$ definida como

$$\widehat{\phi}_{j,l}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \lambda^{l-1} & \text{si } j = 1 \text{ y } 1 \leq l \leq d_1, \\ \lambda^{l-d_1-\ldots-d_{j-1}-1} & \text{si } j = 2, \ldots, m \text{ y } 1 \leq l - \sum_{i=1}^{j-1} d_i \leq d_j, \\ 0 & \quad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En [6, Proposición 2.3] se demuestra que existe una única matriz hermitiana $X \in \mathbb{C}^{d \times d}$ tal que

$$\frac{\widehat{N}(\lambda)\widehat{N}(\omega)^* - \widehat{D}(\lambda)\widehat{D}(\omega)^*}{\rho_\omega(\lambda)} = \widehat{\Phi}(\lambda) X \widehat{\Phi}(\omega)^*, \tag{3.6}$$

en virtud de lo cual se establece el siguiente resultado.

Teorema 3.1 (Teorema principal)**.**

$$\nu_\pm = \mu_\pm(X) + \frac{1}{2}\mu_0(X). \tag{3.7}$$

Demostración. Se divide la demostración en 5 partes.

Paso 1. Sea $\mathbf{p}$ la proyección ortogonal de $\mathbf{L}^2_m$ sobre $\mathbf{H}^2_m$ como se definió en la Sección 2.3. Denotemos

$$\begin{aligned}\alpha &\stackrel{\text{def}}{=} \dim(\ker \mathbf{p}\widehat{N}^*|_{\mathbf{H^2_m}} \cap \ker \mathbf{p}\widehat{D}^*|_{\mathbf{H^2_m}}),\\ \beta &\stackrel{\text{def}}{=} \dim(\ker \mathbf{p}\widehat{N}^*|_{\mathbf{H^2_m}}).\end{aligned}$$

En lo que sigue se asume $0 < \alpha < \beta$. Si $\alpha = 0$ o $\alpha = \beta$ la demostración tiene que ser modificada de manera obvia.

Sea $f_1(\lambda), \dots, f_\alpha(\lambda)$ una base de

$$\ker \mathbf{p}\widehat{N}^*|_{\mathbf{H^2_m}} \cap \ker \mathbf{p}\widehat{D}^*|_{\mathbf{H^2_m}}$$

y sea $f_{\alpha+1}(\lambda), \dots, f_\beta(\lambda)$ una base de su complemento ortogonal

$$\ker \mathbf{p}\widehat{N}^*|_{\mathbf{H^2_m}} \ominus (\ker \mathbf{p}\widehat{N}^*|_{\mathbf{H^2_m}} \cap \ker \mathbf{p}\widehat{D}^*|_{\mathbf{H^2_m}}).$$

Sean $v_1, \dots, v_\beta \in \mathbb{C}^d$ definidos por

$$v_j^* u = \langle \widehat{\Phi} u, f_j \rangle_{\mathbf{H^2_m}}, \quad \forall\, u \in \mathbb{C}^d, 1 \leq j \leq \beta. \tag{3.8}$$

Haciendo uso de la existencia de la matriz hermitiana X según (3.6) se tiene que

$$\begin{aligned} u^*\widehat{\Phi}(\omega)Xv_j = u^*\widehat{\Phi}(\omega)X^*v_j &= \Big(X\widehat{\Phi}(\omega)^*u\Big)^* v_j = \langle f_j, \widehat{\Phi}X\widehat{\Phi}(\omega)^*u\rangle_{\mathbf{H^2_m}}\\ &= \left\langle f_j, \frac{\widehat{N}(\lambda)\widehat{N}(\omega)^* - \widehat{D}(\lambda)\widehat{D}(\omega)^*}{\rho_\omega(\lambda)} \cdot u \right\rangle_{\mathbf{H^2_m}}\\ &= \left\langle f_j, \widehat{N}(\lambda)\frac{\widehat{N}(\omega)^*u}{\rho_\omega(\lambda)} \right\rangle_{\mathbf{H^2_m}} - \left\langle f_j, \widehat{D}(\lambda)\frac{\widehat{D}(\omega)^*u}{\rho_\omega(\lambda)} \right\rangle_{\mathbf{H^2_m}}\\ &= \left\langle \widehat{N}(\lambda)^*f_j, \frac{\widehat{N}(\omega)^*u}{\rho_\omega(\lambda)} \right\rangle_{\mathbf{H^2_m}} - \left\langle \widehat{D}(\lambda)^*f_j, \frac{\widehat{D}(\omega)^*u}{\rho_\omega(\lambda)} \right\rangle_{\mathbf{H^2_m}}. \end{aligned}$$

Esta última igualdad se obtiene de aplicar la Proposición 2.2. Luego identificando el núcleo reproductor (2.5) en el producto interno y aplicando (2.4), en el primer miembro tenemos

$$\left\langle \widehat{N}(\lambda)^*f_j, \frac{\widehat{N}(\omega)^*u}{\rho_\omega(\lambda)} \right\rangle_{\mathbf{H^2_m}} = (\widehat{N}(\omega)^*u)^* \cdot (\widehat{N}^*f_j)(\omega) = u^*\widehat{N}(\omega) \cdot (\mathbf{p}\widehat{N}^*f_j)(\omega) = u^*\widehat{N}(\omega) \cdot 0 = 0,$$

pues $f_j \in \ker \mathbf{p}\widehat{N}^*|_{\mathbf{H}^2_m}$ para todo $j = 1, \dots, \beta$, y en el segundo miembro

$$\left\langle \widehat{D}(\lambda)^* f_j, \frac{\widehat{D}(\omega)^* u}{\rho_\omega(\lambda)} \right\rangle_{\mathbf{H^2_m}} = (\widehat{D}(\omega)^* u)^* \cdot (\widehat{D} f_j)(\omega) = u^* \widehat{D}(\omega) \cdot (\mathbf{p}\widehat{D}^* f_j)(\omega) = u^* \widehat{D}(\omega) \cdot \mathbf{p}\widehat{D}^* f_j(\omega),$$

por lo que

$$\widehat{\Phi}(\omega) X v_j = -\widehat{D}(\omega) \cdot \mathbf{p}\widehat{D}^* f_j(\omega).$$

Como las columnas de $\widehat{\Phi}$ son linealmente independientes y $f_j \in \ker \mathbf{p}\widehat{D}^*|_{\mathbf{H}^2_m}$ para $j = 1, \dots, \alpha$, entonces se cumple que

$$X v_j = 0, \quad j = 1, \dots, \alpha, \tag{3.9}$$

luego, fácilmente se verifica de (3.8) que

$$v_j^* X v_j = \langle \widehat{\Phi} X v_j, f_j \rangle_{\mathbf{H}^2_m},$$

y para todo valor de las constantes $c_{\alpha+1}, \dots, c_\beta \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\begin{aligned} \left(\sum_{l=\alpha+1}^{\beta} \overline{c}_l v_l^* \right) X \left(\sum_{j=\alpha+1}^{\beta} c_j v_j \right) &= \sum_{j,l=\alpha+1}^{\beta} \overline{c}_l c_j \langle \widehat{\Phi} X v_j, f_l \rangle_{\mathbf{H}^2_m} \\ &= - \sum_{j,l=\alpha+1}^{\beta} \overline{c}_l c_j \langle \widehat{D}(\mathbf{p}\widehat{D}^* f_j), f_l \rangle_{\mathbf{H}^2_m} \\ &= \left\| \mathbf{p}\widehat{D}^* \sum_{j=\alpha+1}^{\beta} c_j f_j \right\|^2_{\mathbf{H}^2_m}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Paso 2. Consideremos las siguientes funciones auxiliares

$$\widetilde{N}(\lambda) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \begin{cases} N(\overline{\lambda})^* = \Delta(\lambda)\widehat{N}(1/\lambda) & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{D}, \\ \Delta(\lambda)\widehat{N}(-\lambda) & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{C}_+, \end{cases} \quad \text{y} \quad \widetilde{D}(\lambda) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \begin{cases} D(\overline{\lambda})^* & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{D}, \\ \Delta(\lambda)\widehat{D}(-\lambda) & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{C}_+. \end{cases}$$

Podemos escribir entonces la expresión para la matriz hermitiana X de la siguiente forma

$$\frac{\widetilde{D}(\lambda)\widetilde{D}(\omega)^* - \widetilde{N}(\lambda)\widetilde{N}(\omega)^*}{\rho_\omega(\lambda)} = \widetilde{\Phi}(\lambda) X \widetilde{\Phi}(\omega)^*,$$

donde

$$\widetilde{\Phi}(\lambda) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \begin{cases} \frac{\Delta(\lambda)}{\lambda} \widehat{\Phi}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{D}, \\ \Delta(\lambda)\widehat{\Phi}(-\lambda) & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{C}_+. \end{cases}$$

Denotemos además como

$$\gamma \overset{\mathsf{def}}{=} \dim(\ker \mathbf{p}\widetilde{N}^*|_{\mathbf{H^2_m}} \cap \ker \mathbf{p}\widetilde{D}^*|_{\mathbf{H^2_m}}),$$
$$\kappa \overset{\mathsf{def}}{=} \dim(\ker \mathbf{p}\widetilde{N}^*|_{\mathbf{H^2_m}}).$$

Se asumirá en adelante que $0 < \gamma < \kappa$. Si $\gamma = 0$ o $\gamma = \kappa$, al igual que en el Paso 1, la demostración ha de ser modificada de forma obvia. Sea $g_1(\lambda), \ldots, g_\gamma(\lambda)$ una base de

$$\ker \mathbf{p}\widetilde{N}^*|_{\mathbf{H^2_m}} \cap \ker \mathbf{p}\widetilde{D}^*|_{\mathbf{H^2_m}}$$

y sea $g_{\gamma+1}(\lambda), \ldots, g_\kappa(\lambda)$ una base del complemento ortogonal

$$\ker \mathbf{p}\widetilde{N}^*|_{\mathbf{H^2_m}} \ominus (\ker \mathbf{p}\widetilde{N}^*|_{\mathbf{H^2_m}} \cap \ker \mathbf{p}\widetilde{D}^*|_{\mathbf{H^2_m}}).$$

Sean $u_1, \ldots, u_\kappa \in \mathbb{C}^d$ definidos por

$$u_j^*\omega = \langle \widehat{\Phi}\omega, g_j \rangle_{\mathbf{H^2_m}}, \quad \forall\, \omega \in \mathbb{C}^d, 1 \leq j \leq \kappa,$$

entonces las fórmulas

$$X u_j = 0, \quad j = 1, \ldots, \gamma, \tag{3.11}$$

$$\left(\sum_{l=\gamma+1}^{\kappa} \overline{c}_l u_l^* \right) X \left(\sum_{j=\gamma+1}^{\kappa} c_j u_j \right) = \left\| \mathbf{p}\widetilde{D}^* \sum_{j=\gamma+1}^{\kappa} c_j g_j \right\|^2_{\mathbf{H}^2_m} \tag{3.12}$$

pueden ser verificadas para todo valor de las constantes $c_{\gamma+1}, \ldots, c_\kappa$, de la misma manera como se hizo en el Paso 1.

Paso 3. Afirmamos que los vectores $v_1, \ldots, v_\beta, u_1, \ldots, u_\kappa$ son linealmente independientes. Para ello, asumimos que $c_1, \ldots, c_\beta, d_1, \ldots, d_\kappa \in \mathbb{C}$ son tales que

$$\sum_{j=1}^{\beta} c_j v_j + \sum_{l=1}^{\kappa} d_l u_l = 0.$$

Denotando

$$f(\lambda) \overset{\mathsf{def}}{=} \sum_{j=1}^{\beta} c_j f_j(\lambda) \in \ker \mathbf{p}\widehat{N}^*|_{\mathbf{H^2_m}}, \quad g(\lambda) \overset{\mathsf{def}}{=} \sum_{l=1}^{\kappa} d_l g_l(\lambda) \in \ker \mathbf{p}\widetilde{N}^*|_{\mathbf{H^2_m}},$$

tenemos que

$$\langle \widehat{\Phi}\omega, f \rangle_{\mathbf{H}^2_m} + \langle \widetilde{\Phi}\omega, g \rangle_{\mathbf{H}^2_m} = 0$$

para todo $\omega \in \mathbb{C}^d$. Luego, si escribimos

$$f = p_1 + \Delta q_1, g = p_2 + \Delta q_2 \quad \text{donde} \quad p_1, p_2 \in \mathbf{H}^2_m \ominus \Delta \mathbf{H}^2_m, q_1, q_2 \in \mathbf{H}^2_m,$$

entonces se comprueba fácilmente que

$$\langle \widehat{\Phi}\omega, \Delta q_1 \rangle = \langle \widetilde{\Phi}\omega, \Delta q_2 \rangle = 0$$

y por tanto, como las columnas de $\widehat{\Phi}$ forman una base de $\mathbf{H}^2_m \ominus \Delta \mathbf{H}^2_m$,

$$-p_1(\lambda) = \begin{cases} \frac{\Delta(\lambda)}{\lambda} p_2\left(\frac{1}{\lambda}\right) & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{D}, \\ \Delta(\lambda) p_2(-\lambda) & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{C}_+. \end{cases}$$

Como $\widehat{N}^* f(\lambda) \in (\mathbf{H}^2_m)^\perp$ y

$$\widehat{N}(\lambda)^* \Delta(\lambda) = \begin{cases} N(\lambda) & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{D} \text{ y } \lambda \in \partial, \\ N(\lambda)\delta(\lambda)^{-1} & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{C}_+ \text{ y } \lambda \in \partial, \end{cases}$$

entonces

$$\begin{cases} N(\lambda)\left(-\frac{1}{\lambda} p_2\left(\frac{1}{\lambda}\right) + q_1(\lambda)\right) \in (\mathbf{H}^2_m)^\perp & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{D}, \\ N(\lambda)\delta(\lambda)^{-1}(-p_2(-\lambda) + q_1(\lambda)) \in (\mathbf{H}^2_m)^\perp & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{C}_+, \end{cases}$$

lo que es lo mismo que

$$\begin{cases} N\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(p_2(\lambda) - \frac{1}{\lambda} q_1\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \in \mathbf{H}^2_m & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{D}, \\ N(\lambda)\delta(\lambda)^{-1}(p_2(-\lambda) - q_1(\lambda)) \in (\mathbf{H}^2_m)^\perp & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{C}_+. \end{cases}$$

Por otro lado, como $\widetilde{N}^* g(\lambda) \in (\mathbf{H}^2_m)^\perp$ y

$$\widetilde{N}(\lambda)^* = \begin{cases} N\left(\frac{1}{\lambda}\right) & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{D} \text{ y } \lambda \in \partial, \\ N(-\lambda)\delta(-\lambda)^{-1} & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{C}_+ \text{ y } \lambda \in \partial, \end{cases}$$

entonces tenemos que

$$\begin{cases} N\left(\frac{1}{\lambda}\right)(p_2(\lambda) + \Delta(\lambda) q_2(\lambda)) \in (\mathbf{H}^2_m)^\perp & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{D}, \\ N(-\lambda)\delta(-\lambda)^{-1}(p_2(\lambda) + \Delta(\lambda) q_2(\lambda)) \in (\mathbf{H}^2_m)^\perp & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{C}_+, \end{cases}$$

que es lo mismo que

$$\begin{cases} N\left(\frac{1}{\lambda}\right)(p_2(\lambda) + \Delta(\lambda) q_2(\lambda)) \in (\mathbf{H}^2_m)^\perp & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{D}, \\ N(\lambda)\delta(\lambda)^{-1}(p_2(-\lambda) + \Delta(-\lambda) q_2(-\lambda)) \in \mathbf{H}^2_m & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{C}_+. \end{cases}$$

Luego como

$$\begin{cases} N\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Delta(\lambda) = \widehat{N}(\overline{\lambda})^* & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{D}, \\ \delta(\lambda)^{-1}\Delta(-\lambda) = \left(\delta(\overline{\lambda})^*\right)^{-1} & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{C}_+, \end{cases}$$

se concluye que

$$\begin{aligned} N\left(\frac{1}{\lambda}\right)p_2(\lambda) &= \frac{1}{\lambda}N\left(\frac{1}{\lambda}\right)q_1\left(\frac{1}{\lambda}\right) - \widehat{N}(\overline{\lambda})^*q_2(\lambda) \\ &= \frac{1}{\lambda}N\left(\frac{1}{\lambda}\right)q_1\left(\frac{1}{\lambda}\right) - N\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Delta(\lambda)q_2(\lambda) \quad \text{si } \Omega_+ = \mathbb{D}, \\ N(\lambda)\delta(\lambda)^{-1}p_2(-\lambda) &= N(\lambda)(\delta(\lambda)^{-1}q_1(\lambda) - \left(\delta(\overline{\lambda})^*\right)^{-1}q_2(-\lambda)) \\ &= N(\lambda)(\delta(\lambda)^{-1}q_1(\lambda) - \delta(\lambda)^{-1}\Delta(-\lambda)q_2(\lambda)) \quad \text{si } \Omega_+ = \mathbb{C}_+, \end{aligned}$$

y por tanto que

$$\begin{cases} p_2(\lambda) = \frac{1}{\lambda}q_1\left(\frac{1}{\lambda}\right) - \Delta(\lambda)q_2(\lambda)) & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{D}, \\ p_2(\lambda) = q_1(-\lambda) - \Delta(\lambda)q_2(\lambda)) & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{C}_+. \end{cases}$$

Pero como $p_2 \in \mathbf{H}^2_m \ominus \Delta\mathbf{H}^2_m$, mientras que $q_2 \in \mathbf{H}^2_m$ y

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda}q_1\left(\frac{1}{\lambda}\right) \in (\mathbf{H}^2_m)^\perp & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{D}, \\ q_1(-\lambda) \in (\mathbf{H}^2_m)^\perp & \text{si } \Omega_+ = \mathbb{C}_+, \end{cases}$$

se tiene que $q_1 = q_2 = p_1 = p_2 = f = g = 0$, y por tanto que

$$c_1 = \cdots = c_\beta = d_1 = \cdots = d_\kappa = 0.$$

Paso 4. Teniendo en cuenta las ecuaciones (3.9) y (3.11), los vectores $v_1, \ldots, v_\alpha, u_1, \ldots, u_\gamma$ generan un subespacio del núcleo de X. Por otra parte, los vectores $v_{\alpha+1}, \ldots, v_\beta$ ($u_{\gamma+1}, \ldots, u_\kappa$ respectivamente) generan un subespacio estrictamente negativo (positivo respectivamente) de $\mathbb{C}^m$ con respecto al producto interno indefinido $[u, v] = v^*Xu$.

Supongamos por el contrario que existen un conjunto de constantes $c_{\alpha+1}, \ldots, c_\beta$ tal que

$$(\sum_{l=\alpha+1}^{\beta} \overline{c_l}v_l^*)X(\sum_{j=\alpha+1}^{\beta} c_jv_j) = 0.$$

Luego, en vista de (3.10), la función

$$f = \sum_{j=\alpha+1}^{\beta} c_jf_j$$

pertenece a $\ker \mathbf{p}\widehat{D}^*|_{\mathbf{H}^2_m}$. Por otro lado, por definición de las f_j, f también pertenece a

$$\ker\, \mathbf{p}\widehat{N}^*|_{\mathbf{H}^2_m} \ominus (\ker \mathbf{p}\widehat{N}^*|_{\mathbf{H}^2_m} \cap \ker \mathbf{p}\widehat{D}^*|_{\mathbf{H}^2_m}).$$

Esto significa que

$$f \in (\ker \mathbf{p}\widehat{N}^*|_{\mathbf{H}^2_m} \cap \ker \mathbf{p}\widehat{D}^*|_{\mathbf{H}^2_m}) \cap (\ker \mathbf{p}\widehat{N}^*|_{\mathbf{H}^2_m} \cap \ker \mathbf{p}\widehat{D}^*|_{\mathbf{H}^2_m})^{\perp}$$

y por tanto $f = 0$. Luego, como las funciones $f_{\alpha+1}, \ldots, f_\beta$ son linealmente independientes los coeficientes se anulan, es decir $c_{\alpha+1} = \cdots = c_\beta = 0$. Esto demuestra la primera afirmación, la segunda se realiza de forma similar.

Paso 5. En vista de (3.10) y (3.12), y de los pasos 3 y 4 se obtienen la siguientes desigualdades

$$\beta - \alpha \leq \mu_-(X), \quad \alpha + \gamma \leq \mu_0(X), \quad \kappa - \gamma \leq \mu_+(X). \tag{3.13}$$

Luego aplicando el Lema 2.1 se tiene que

$$\beta = \nu_-(N), \quad \kappa = \nu_+(N).$$

Puesto que se cumple que

$$\nu_+(N) = \nu_(N) = d = \mu_(X) + \mu_0(X) + \mu_+(X),$$

entonces en (3.13) solo se satisfacen las igualdades, por lo que se tiene que

$$\nu_-(N) = \alpha + \mu_-(X), \quad \alpha + \gamma = \mu_0(X), \quad \nu_+(N) = \gamma + \mu_+(X). \tag{3.14}$$

Repitiendo los pasos del 1 al 4 con $f \in \ker \mathbf{p}\widehat{D}^*|_{\mathbf{H}^2_m}$, y $g \in \ker \mathbf{p}\widetilde{D}^*|_{\mathbf{H}^2_m}$ teniendo en cuenta que

$$\dim(\ker \mathbf{p}\widehat{D}^*|_{\mathbf{H}^2_m}) = \nu_+(N), \quad \dim(\ker \mathbf{p}\widetilde{D}^*|_{\mathbf{H}^2_m} = \nu_-(N),$$

se obtiene que

$$\nu_-(N) = \gamma + \mu_-(X), \quad \nu_+(N) = \alpha + \mu_+(X).$$

Comparando estas dos últimas ecuaciones con (3.14) se concluye que

$$\nu_\pm = \mu_\pm(X) + \frac{1}{2}\mu_0(X)$$

como se quería demostrar. $\square$

Capítulo 4

Ejemplos y caso particular

En este capítulo se desarrolla un ejemplo para calcular el número de ceros del determinante de una matriz polinomial de orden 2 basado en la demostración del teorema principal en el capítulo anterior, haciendo uso por tanto del conocimiento de dichas raíces. En contraste se analiza un caso especial en el que no se precisa del cálculo de las raíces del determinante, se demuestra que la matriz X obtenida es la misma que en el caso general y se da un ejemplo donde se evidencia esta característica.

4.1. Cálculo de la matriz X usando la demostración del Teorema

Se considera la siguiente matriz polinomial:

$$N(\lambda) = \begin{pmatrix} 2\,\lambda & -\lambda+2 \\ 1 & \lambda^2 - 3\,\lambda + 2 \end{pmatrix},$$

de donde

$$\det(N(\lambda)) = 2\lambda^3 - 6\,\lambda^2 + 5\,\lambda - 2 = 2(\lambda-2)(\lambda - \frac{1}{2}(1+i))(\lambda - \frac{1}{2}(1-i)),$$

por lo que

$$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = \frac{1}{2}(1-i) \text{ y } \alpha_3 = \frac{1}{2}(1+i)$$

son las raíces del determinante.

Considerando que $\Omega_+ = \mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$, fácilmente se verifica que se cumplen las condiciones (2.1) y (2.2). Además se tiene que

$$\delta(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \lim_{\lambda\to\infty} N(\lambda)\delta(\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que también se cumple la condición (2.3). Entonces,

- para $\underline{\alpha_1 = 2}$,

$$b_{\alpha_1}(\lambda) = \frac{\lambda - 2}{1 - 2\lambda},$$

$$N(\alpha_1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_1^* = (1, -4) \quad \Rightarrow \quad u_1^* N(\alpha_1) = 0,$$

$$\Theta_{\alpha_1}(\lambda)^{-1} = \frac{1}{17(\lambda - 2)} \begin{pmatrix} 14\,\lambda - 31 & 12\,(\lambda - 1) \\ 12\,(\lambda - 1) & -31\,\lambda + 14 \end{pmatrix},$$

$$N_1(\lambda) = \Theta_{\alpha_1}(\lambda)^{-1} N(\lambda) = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 28\,\lambda + 6 & 12\,\lambda^2 - 38\,\lambda + 43 \\ 24\,\lambda - 7 & -(31\,\lambda - 2)(\lambda - 1) \end{pmatrix};$$

- para $\underline{\alpha_2 = \frac{1}{2}(1 - i)}$,

$$b_{\alpha_2}(\lambda) = \frac{\lambda - \frac{1}{2}(1 - i)}{1 - \frac{1}{2}(1 + i)\lambda},$$

$$N(\alpha_2) = \tfrac{1}{17} \begin{pmatrix} 20 - 14i & 24 + 13i \\ 5 - 12i & \frac{1}{2}(29 - 2i) \end{pmatrix}, \quad u_1^* = \left(1, -\tfrac{268}{169} - \tfrac{170}{169} i\right) \quad \Rightarrow \quad u_1^* N(\alpha_2) = 0,$$

$$\Theta_{\alpha_2}(\lambda)^{-1} = \frac{1}{765(2\lambda + i - 1)} \begin{pmatrix} -(169i - 1023)\lambda + 596i - 258 & (778i + 634)\lambda - 242i - 974 \\ -(242i - 974)\lambda + 778i - 634 & -(596i + 258)\lambda + 169i + 1023 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} N_2(\lambda) &= \Theta_{\alpha_2}(\lambda)^{-1} N_1(\lambda) \\ &= \frac{1}{765} \begin{pmatrix} -310i + (1290 + 410i)\lambda & 1037 - 499i - (224 - 1099i)\lambda + (217 + 769i)\lambda^2 \\ 425 + 220i + (620 - 620i)\lambda & 1836 - 112i + (-1977 - 248i)\lambda + (579 + 458i)\lambda^2 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

- para $\underline{\alpha_3 = \frac{1}{2}(1 + i)}$,

$$b_{\alpha_3}(\lambda) = \frac{\lambda - \frac{1}{2}(1 + i)}{1 - \frac{1}{2}(1 - i)\lambda},$$

$$N(\alpha_3)=\begin{pmatrix} \frac{12}{17}i+\frac{88}{153} & -\frac{2}{9}i+\frac{152}{153} \\ \frac{44}{153}i+\frac{209}{153} & -\frac{11}{9}i+\frac{33}{34} \end{pmatrix}, \quad u_1^*=\begin{pmatrix} 1, & -\frac{1700}{4147}i-\frac{2104}{4147} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad u_1^*N(\alpha_3)=0,$$

$$\Theta_{\alpha_3}(\lambda)^{-1}=\frac{1}{65025(2\,\lambda-i-1)}\begin{pmatrix} (45617i-6801)\;\lambda-19408i+71826 & (32956i+88132)\;\lambda-79244i-50732 \\ -(79244i-50732)\;\lambda+32956i-88132 & (19408i+71826)\;\lambda-45617i-6801 \end{pmatrix},$$

$$N_3(\lambda)=\Theta_{\alpha_3}(\lambda)^{-1}N_2(\lambda)=$$

$$\frac{1}{1275}\begin{pmatrix} (280i+610)\,\lambda+730i+990 & (702i+929)\,\lambda^2-(2066i+2940)\,\lambda+2032i+2986 \\ -(1460i-1980)\,\lambda+140i-305 & (286i-503)\,\lambda^2+(512i-395)\,\lambda-1124i+1248 \end{pmatrix}.$$

Así tenemos que $D(\lambda)=N_3(\lambda)$, de donde

$$\widehat{D}(\lambda)=\delta(\lambda)D\left(\frac{1}{\overline{\lambda}}\right)^*=\frac{1}{1275}\begin{pmatrix} -(730i-990)\;\lambda-280i+610 & -(140i+305)\;\lambda+1460i+1980 \\ -(2032i-2986)\;\lambda^2+(2066i-2940)\;\lambda-702i+929 & (1124i+1248)\;\lambda^2-(512i+395)\;\lambda-286i-503 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{N}(\lambda)=\delta(\lambda)N\left(\frac{1}{\overline{\lambda}}\right)^*=\begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ (2\,\lambda-1)\lambda & (2\,\lambda-1)(\lambda-1) \end{pmatrix},$$

$$\frac{\widehat{N}(\lambda)\widehat{N}(\omega)^*-\widehat{D}(\lambda)\widehat{D}(\omega)^*}{\rho_\omega(\lambda)}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 & 10(\overline{\omega}+1) \\ 10(\lambda+1) & 44\lambda\overline{\omega}-16\lambda-16\overline{\omega}-1 \end{pmatrix}.$$

Luego como $m=2, d=3, d_1=1, d_2=2$ se tiene que

$$\widehat{\Phi}(\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

y con esto

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi}(\lambda)X\widehat{\Phi}(\omega)^* &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \overline{\omega} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12}+x_{13}\overline{\omega} \\ x_{21}+x_{31}\lambda & x_{22}+x_{32}\lambda+x_{23}\overline{\omega}+x_{33}\lambda\overline{\omega} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Comparando estas dos últimas ecuaciones nos queda que

$$X = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 & 10 & 10 \\ 10 & -1 & -16 \\ 10 & -16 & 44 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de X son

$$\{2,\ \frac{1}{50}(-7-\sqrt{649}),\ \frac{1}{50}(-7+\sqrt{649})\},$$

por lo que

$$\mu_+(X) = 2,\ \mu_-(X) = 1 \text{ y } \mu_0 = 0.$$

Luego, finalmente se obtiene que

$$\nu_+(N) = \mu_+(X) + \frac{1}{2}\mu_0 = 2 \quad \text{y} \quad \nu_-(N) = \mu_-(X) + \frac{1}{2}\mu_0 = 1.$$

Después de esto se tiene que $\det N(\lambda)$ tiene 2 raíces en Ω_+ y 1 raíz en $\Omega_- = \mathbb{C} \setminus \{\Omega_+ \cup \partial\}$.

4.2. El caso particular $A\lambda + B$

Sea $N(\lambda) = A\lambda + B$, con $\lambda \in \mathbb{D}$, tal que A y B son matrices hermitianas de dimensión $m \times m$ que cumplen que $AB = BA$. Bajo estas condiciones podemos definir $D(\lambda)$ sin la necesidad de hallar la función de valor matricial $\Theta(\lambda)$ de la Proposición 3.1, con el fin de obtener la matriz hermitiana X que satisface (3.6).

Para este caso tenemos que $d_1 = d_2 = \cdots = d_m = 1$ y $d = m$, por lo que

$$\delta(\lambda) = \lambda I_m, \quad \widehat{\Phi}(\lambda) = I_m, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{D}.$$

Luego si tenemos que $D(\lambda) \overset{\mathsf{def}}{=} A + B\lambda$, entonces

$$\widehat{D}(\lambda) = \delta(\lambda) D\left(\frac{1}{\overline{\lambda}}\right)^* = A^*\lambda + B^*, \quad \widehat{N}(\lambda) = \delta(\lambda) N\left(\frac{1}{\overline{\lambda}}\right)^* = A^* + B^*\lambda, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{D}.$$

Proposición 4.1. *Sea $N(\lambda) = A\lambda + B$, con $\lambda \in \mathbb{D}$, tal que A y B son matrices hermitianas de dimensión $m \times m$ que cumplen que $AB = BA$, entonces la matrix que satisface la ecuación (3.6) es $X = A^*A - B^*B$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
\frac{\widehat{N}(\lambda)\widehat{N}(\omega)^* - \widehat{D}(\lambda)\widehat{D}(\omega)^*}{1-\lambda\overline{\omega}} &= \frac{(A^*+B^*\lambda)(A+B\overline{\omega}) - (A^*\lambda+B^*)(A\overline{\omega}+B)}{1-\lambda\overline{\omega}} \\
&= \frac{A^*A + B^*A\lambda + A^*B\overline{\omega} + B^*B\lambda\overline{\omega} - A^*A\lambda\overline{\omega} - B^*A\overline{\omega} - A^*B\lambda - B^*B}{1-\lambda\overline{\omega}} \\
&= \frac{A^*A - B*B - (A^*A - B^*B)\lambda\overline{\omega}}{1-\lambda\overline{\omega}} = A^*A - B^*B.
\end{aligned}$$

Luego, como $\widehat{\Phi}(\lambda) = I_m$ se tiene que $\widehat{\Phi}(\lambda)X\widehat{\Phi}(\omega)^* = X$, por lo que queda demostrada la igualdad.

□

4.2.1. Ejemplo de cálculo

Sea la siguiente matriz polinomial

$$N(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda-1 \\ \lambda-1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad AB = BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ambas matrices son simétricas con valores reales, por lo que también son hermitianas, y se tiene que

$$\det(N(\lambda)) = -\lambda^2 + 4\lambda + 1 = (\lambda - 2 + \sqrt{5})(\lambda - 2 - \sqrt{5}),$$

por lo que se satisfacen las condiciones (2.1) y (2.2). Además se tiene que

$$\delta(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \lim_{\lambda\to\infty} N(\lambda)\delta(\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y también se cumple la condición (2.3). Entonces,

$$X = A^*A - B^*B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de X son

$$\{2(-1-\sqrt{5}),\ 2(-1+\sqrt{5})\},$$

por lo que

$$\mu_+(X) = 1, \mu_-(X) = 1 \text{ y } \mu_0 = 0.$$

Luego, finalmente se obtiene que

$$\nu_+(N) = \mu_+(X) + \frac{1}{2}\mu_0 = 1 \quad \text{y} \quad \nu_-(N) = \mu_-(X) + \frac{1}{2}\mu_0 = 1.$$

Analicemos este ejemplo siguiendo la demostración del Teorema 3.1.

- Para $\underline{\alpha_1 = 2 - \sqrt{5}}$,

$$b_{\alpha_1}(\lambda) = \frac{\lambda - 2 + \sqrt{5}}{1 - \lambda(2 - \sqrt{5})},$$

$$N(\alpha_1) = \begin{pmatrix} 3 - \sqrt{5} & 1 - \sqrt{5} \\ 1 - \sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}, \quad u_1^* = \left(1, -\tfrac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}-1}\right) \quad \Rightarrow \quad u_1^* N(\alpha_1) = 0,$$

$$\Theta_{\alpha_1}(\lambda)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{5} - (2 - \sqrt{5})\lambda & \lambda - 1 \\ \lambda - 1 & 3 + \sqrt{5} - (3 - \sqrt{5})\lambda \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} N_1(\lambda) &= \Theta_{\alpha_1}(\lambda)^{-1} N(\lambda) \\ &= \frac{1}{5(-2 + \sqrt{5} + \lambda)} \begin{pmatrix} -5 + 4\sqrt{5} + \sqrt{5}\lambda & -(-5 + 3\sqrt{5})(-1 + \lambda) \\ -(-5 + 3\sqrt{5})(-1 + \lambda) & \sqrt{5} + (-5 + 4\sqrt{5}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Para $\underline{\alpha_2 = 2 + \sqrt{5}}$,

$$b_{\alpha_2}(\lambda) = \frac{\lambda - 2 - \sqrt{5}}{1 - \lambda(2 + \sqrt{5})},$$

$$N(\alpha_2) = \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{5} & 1 + \sqrt{5} \\ 1 + \sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}, \quad u_1^* = \left(1, -\tfrac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}+1}\right) \quad \Rightarrow \quad u_1^* N(\alpha_2) = 0,$$

$$\Theta_{\alpha_2}(\lambda)^{-1} = \frac{1}{5(2 + \sqrt{5} - \lambda)} \begin{pmatrix} 5 + 4\sqrt{5} + \sqrt{5}\lambda & -(5 + 3\sqrt{5})(-1 + \lambda) \\ -(5 + 3\sqrt{5})(-1 + \lambda) & \sqrt{5} + (5 + 4\sqrt{5})\lambda \end{pmatrix},$$

$$N_2(\lambda) = \Theta_{\alpha_2}(\lambda)^{-1} N_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 + \lambda & 1 - \lambda \\ 1 - \lambda & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Así tenemos que $D(\lambda) = N_2(\lambda)$, verificando que

$$D(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \lambda = A + B\lambda.$$

Por lo tanto

$$\widehat{D}(\lambda)=\delta(\lambda)D\left(\frac{1}{\overline{\lambda}}\right)^{*}=\begin{pmatrix}\lambda+1 & \lambda-1\\ \lambda-1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=A^{*}\lambda+B^{*},$$

$$\widehat{N}(\lambda)=\delta(\lambda)N\left(\frac{1}{\overline{\lambda}}\right)^{*}=\begin{pmatrix}\lambda+1 & -\lambda+1\\ -\lambda+1 & 2\,\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\lambda=A^{*}+B^{*}\lambda.$$

Luego,

$$\frac{\widehat{N}(\lambda)\widehat{N}(\omega)^{*}-\widehat{D}(\lambda)\widehat{D}(\omega)^{*}}{1-\lambda\overline{\omega}}=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 4 & -4\end{pmatrix},$$

y teniendo en cuenta que $\widehat{\Phi}(\lambda)=I_m$ se tiene que

$$\widehat{\Phi}(\lambda)X\widehat{\Phi}(\omega)^{*}=X=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 4 & -4\end{pmatrix},$$

obteniéndose los mismos resultados que antes.

Capítulo 5

Conclusiones

Los principales resultados de este Trabajo de Fin de Máster son los siguientes:

- Se ha comprendido en su totalidad la demostración del Teorema de H. Dym y D. Volok.
- Se han explicitado con suficiente detalle las partes en la demostración que fueron omitidas en el artículo original de H. Dym y D. Volok y que requieren de ciertos conocimientos avanzados. Debido a esto se describen en esta memoria aspectos esenciales de los Espacios de Hilbert con núcleo reproductor y de los Espacios de Hardy, que se encuentran detrás de la demostración del Teorema de H. Dym y D. Volok.
- Se ha detectado un caso especial donde no se precisa de la manipulación de las raíces del determinante de la matriz considerada para obtener la matriz X y se han mostrado ejemplos donde se comparan ambas aproximaciones, la que aquí se propone y la que está implícita en la demostración del Teorema de H. Dym y D. Volok.
- H. Dym y D. Volok demuestran la existencia de la matriz X pero esta demostración no es constructiva ya que requiere del conocimiento explícito y de la manipulación de las raíces del determinante de la matriz cuyo número de ceros en cierta región se quiere calcular. Por lo tanto, en su estado actual, no se puede usar este resultado para el propósito que se planteaba en la introducción respecto de la aproximación de las raíces del determinante de una matriz polinomial.

Como posibles lineas de trabajo futuras como consecuencias de todo lo aquí desarrollado y expuesto, se deben destacar las siguientes:

- Buscar una demostración del Teorema de H. Dym y D. Volok puramente algebraica y que no requiera del uso de los Espacios de Hardy.
- Si los polinomios en la matriz $N(\lambda)$ tienen coeficientes racionales, ¿las entradas de X también serán racionales? Todo parece indicar que si como consecuencia de la demostración del Teorema 3.1 (y de la forma en la que se construye la matriz D) y de la aplicación del Teorema Fundamental de las Funciones Simétricas .

- Encontrar una algoritmo que permita obtener la matriz X sin necesidad de manipular las raíces del determinante de $N(\lambda)$. Se podrían usar aquí técnicas de evaluación dinámica ([4]) para manipular las raíces del determinante de $N(\lambda)$ pero eso requiere disponer de dicho determinante (con todos los problemas que esto trae consigo).

Bibliografía

[1] Akhiezer, N., Glazman, I.: Theory of Linear Operators in Hilbert Space. Dover Books on Mathematics, Dover Publications (2013)

[2] Arov, D.Z., Dym, H.: J-Contractive Matrix Valued Functions and Related Topics. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press (2008)

[3] Caravantes, J., Diaz-Toca, G., Fioravanti, M., Gonzalez-Vega, L., Necula, I.: An algebraic framework for computing the topology of offsets to rational curves. Computer Aided Geometric Design pp. 28–47 (2017)

[4] D., D.: Algebraic numbers: an example of dynamic evaluation. Journal of Symbolic Computation (18), 429–445 (1994)

[5] Diatta, D., Rouillier, F., Roy, M.: On the computation of the topology of plane curves. Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ISSAC (2014)

[6] Dym, H., Volok, D.: Zero distribution of matrix polynomials. Linear Algebra and its Applications 425, 714–738 (2007)

[7] Dym, H., Young, N.: A schur-cohn theorem for matrix polynomials. Proceeding of the Edinburgh Mathematical Society 33, 337–366 (1990)

[8] Gonzalez-Vega, L., Necula, I.: Efficient topology determination of implicitly defined algebraic plane curves. Computer Aided Geometric Design 19(9), 719–743 (2002)

[9] Martinez-Avendano, R., Rosenthal, P.: An Introduction to Operators on the Hardy-Hilbert Space. Graduate Texts in Mathematics, Springer New York (2007)

[10] Rudin, W.: Real and complex analysis. Mathematics series, McGraw-Hill (1987)