

Facultad de Ciencias

LOS TEOREMAS DE GAUSS-BONNET (Gauss-Bonnet Theorems)

Trabajo de Fin de Grado para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Pablo Gómez Nicolás

Director: Fernando Etayo Gordejuela

Junio - 2019

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mi director, Fernando Etayo, todo lo que se ha implicado en este trabajo: tanto en las tutorías en las que me ha resuelto dudas (muchas de ellas sin avisarle previamente) como en las que ha tenido que calmar mis agobios y nervios. Me quedo con las reflexiones sobre la importancia de cerrar y acotar las cosas, no sólo para obtener conjuntos compactos en \mathbb{R}^n sino también en otros aspectos de la vida. He aprendido muchas cosas de ti, a nivel académico y personal. No soy capaz de imaginar cómo habría sido este camino acompañado por otra persona.

También debo dar las gracias a otras muchas personas de la Universidad de Cantabria. A quienes pusieron en marcha el Doble Grado y posteriormente tuvieron que buscar soluciones en los momentos de caos. A todos los profesores que tanto dentro como fuera de clase sirvieron como inspiración y me hicieron dudar de todo lo que conocía. Al resto de personal de la facultad: desde la cafetería, donde he recuperado fuerzas con una cantidad numerable de cafés, hasta la biblioteca, donde me han retirado infinitas sanciones por devolver libros con retraso. Gracias a todos ellos.

Por supuesto, aquí deben aparecer todos mis compañeros del Doble Grado. Se suele decir que la unión hace la fuerza, y durante estos cinco años he tenido el privilegio de comprobar que eso es cierto. Sois los mejores compañeros de viaje que podría haber tenido, y no cambiaría por nada todo lo que he vivido con vosotros.

Finalmente, nunca podré agradecer lo suficiente a mi familia por todo el apoyo moral que me han dado, tanto en la realización de este trabajo como en toda la carrera. Vosotros sois quienes habéis tenido que aguantar mis mayores momentos de bloqueo mental, y siempre habéis estado ahí para darme las fuerzas que necesitaba. Incondicionalmente me habéis apoyado hasta el final. Sé que no lo suelo decir con frecuencia, pero muchas gracias por todo.

Resumen/Abstract

Los teoremas de Gauss-Bonnet

La versión local del teorema de Gauss-Bonnet para superficies muestra la conexión entre la curvatura de Gauss en la región encerrada por una curva, la curvatura geodésica del borde de la región y sus ángulos. A partir de este teorema se puede enunciar una versión global para superficies compactas, que relaciona la curvatura de Gauss de la superficie con su característica de Euler, un concepto topológico.

Este trabajo aborda la demostración de estos dos teoremas, para lo cual será necesario utilizar principalmente herramientas propias de la geometría diferencial. Este teorema se conectará con el teorema de Poincaré-Hopf, el cual relaciona el concepto de índice de un campo vectorial tangente a la superficie en un cero aislado con su característica de Euler. También se estudiará la relación existente entre la característica de Euler y las funciones de Morse. Finalmente se comentarán algunas consecuencias de este teorema. Entre ellas destaca el teorema de los defectos angulares de Descartes, que se podría considerar una versión límite del teorema de Gauss-Bonnet.

Palabras clave: Curvatura de Gauss, aplicación de Gauss, curvatura geodésica, característica de Euler, índice de un campo vectorial, función de Morse, defecto angular.

Gauss-Bonnet theorems

The local version of the Gauss-Bonnet theorem for surfaces shows the connection between the Gauss curvature in the region bounded by a curve, the geodesic curvature of the boundary of the region and its angles. From this theorem, it can be stated a global version for compact surfaces, that links the Gauss curvature in the surface with its Euler characteristic, a topological concept.

This dissertation tackles the proof of these two theorems, for which it will be necessary to use tools mostly from differential geometry. This theorem will be connected with the Poincaré-Hopf theorem, that relates the concept of index of a tangent vector field at an isolated zero with the Euler characteristic of the surface. It will alse be examined the relation between the Euler characteristic and Morse functions. Finally some consequences of this theorem will be discussed. Among them the Descartes theorem on total angular defect stands out, which could be considered a limit version of Gauss-Bonnet theorem.

Key words: Gauss curvature, Gauss map, geodesic curvature, Euler characteristic, index of a vector field, Morse function, angular defect.

Índice general

Agradecimientos I Resumen/Abstract I 1. Introducción y estructura I 2. Teorema de Gauss-Bonnet para superficies en R ³ I 2.1. Notación y conceptos previos I 2.1.1. Conceptos generales geométricos sobre superficies I 2.1.2. Transporte paralelo I 2.1.3. Entornos coordenados geodésicos I 2.1.4. Conceptos generales topológicos I 2.3. Teorema global de Gauss-Bonnet I 3.1. Entornos tubulares I 3.1. Entornos tubulares I
Resumen/Abstract I 1. Introducción y estructura Image: Structura 2. Teorema de Gauss-Bonnet para superficies en ℝ ³ 2.1. 2.1. Notación y conceptos previos
 Introducción y estructura Teorema de Gauss-Bonnet para superficies en R³ Notación y conceptos previos Conceptos generales geométricos sobre superficies Transporte paralelo Transporte paralelo Entornos coordenados geodésicos Conceptos generales topológicos Teorema local de Gauss-Bonnet Teorema global de Gauss-Bonnet Aproximación de Poincaré-Hopf Lentornos tubulares
 2. Teorema de Gauss-Bonnet para superficies en R³ 2.1. Notación y conceptos previos
 2.1. Notación y conceptos previos
 2.1.1. Conceptos generales geométricos sobre superficies
 2.1.2. Transporte paralelo
 2.1.3. Entornos coordenados geodésicos 2.1.4. Conceptos generales topológicos 2.2. Teorema local de Gauss-Bonnet 2.3. Teorema global de Gauss-Bonnet 3. Aproximación de Poincaré-Hopf 3.1. Entornos tubulares 2.2. Conceptos generales topológicos 2.3. Teorema global de Gauss-Bonnet 2.4. Conceptos generales topológicos 2.5. Conceptos generales topológicos 2.6. Conceptos generales topológicos 2.7. Teorema global de Gauss-Bonnet 2.8. Conceptos generales topológicos 2.9. Conceptos generales topoló
2.1.4. Conceptos generales topológicos 2.2. 2.2. Teorema local de Gauss-Bonnet 2.3. 2.3. Teorema global de Gauss-Bonnet 2.3. 3. Aproximación de Poincaré-Hopf 2.3. 3.1. Entornos tubulares 2.3.
 2.2. Teorema local de Gauss-Bonnet 2.3. Teorema global de Gauss-Bonnet 3. Aproximación de Poincaré-Hopf 3.1. Entornos tubulares 2.2. Contractional de local de local
 2.3. Teorema global de Gauss-Bonnet
3. Aproximación de Poincaré-Hopf 3.1. Entornos tubulares
3.1. Entornos tubulares
3.2. Grado de una aplicación entre superficies compactas
3.3. Índice de un campo en un cero aislado
3.4. Teorema de Poincaré-Hopf
3.5. Funciones de Morse
4. Consecuencias del teorema de Gauss-Bonnet
4.1. Teorema de Hadamard
4.2. Las tres geometrías
4.3. Teorema de los defectos angulares de Descartes
5. Conclusiones
Bibliografía
Anexo I. Otros teoremas que relacionan geometría con topología
Anevo II Generalizaciones del teorema de Gauss-Bonnet
II 1 Orbifolds
II 2 Variedades de cualquier dimensión

Capítulo 1

Introducción y estructura

Estoy seguro de que la gran mayoría de lectores han jugado en su infancia (y quizá también en la edad adulta) con pompas de jabón. Estas películas compuestas por agua y jabón son capaces de fascinar tanto a niños como a adultos por sus formas cambiantes y su iridiscencia. Utilizando un pompero comercial para niños se pueden crear bonitas esferas de pequeños tamaños, pero los artistas callejeros utilizan material capaz de crear figuras mucho mayores y de formas variadas. Normalmente las personas que ven estos espectáculos se limitan a disfrutar de las sorprendentes figuras de las pompas. Sin embargo, los matemáticos tendemos (por deformación profesional) a ver el mundo con otros ojos. Dentro del marco de las variedades diferenciables, las películas formadas por el jabón se podrían clasificar como 2-variedades riemannianas o superficies regulares¹ inmersas en \mathbb{R}^3 .

Estas estructuras se pueden estudiar mediante diferentes técnicas matemáticas. Una posibilidad es analizar cómo se curva la superficie en cada punto con herramientas de geometría diferencial. Las tres pompas que aparecen en la Figura 1.1 se curvan de maneras muy diferentes en su superficie: a la izquierda, por ejemplo, parece que la curvatura cambia en cada punto de la pompa, mientras que en la esfera de la derecha la curvatura se mantiene constante. Por otra parte, estas pompas también se pueden analizar desde el punto de vista de la topología algebraica. Si uno observase la evolución temporal de la pompa de la izquierda de la Figura 1.1, ésta se deformaría poco a poco (suponiendo que no se rompiera), pasando por formas similares a la de la pompa central, hasta adoptar una forma esférica. Desde el punto de vista físico, la esfera proporciona la configuración de mínima energía para las moléculas de jabón. Desde el punto de vista de la topología algebraica, esta deformación continua de una superficie a otra indicaría que sus estructuras topológicas son equivalentes: como ninguna de las pompas está agujereada es posible transformar una en otra de manera continua.



FIGURA 1.1: Todas estas pompas de jabón tienen una estructura topológica similar, a pesar de que la curvatura de la superficie es muy diferente si se analiza punto a punto

Surge entonces una pregunta de manera natural: ¿existe alguna nexo de unión entre los dos estudios? Es decir, ¿se puede conectar de alguna manera la curvatura de una superficie en cada punto con el número de agujeros que ésta presenta? La respuesta no es evidente a simple vista, ya que una superficie puede curvarse de maneras extravagantes independientemente de sus agujeros. Sin embargo,

¹Durante el desarrollo de este trabajo, se ha optado por la nomenclatura "superficies regulares" en lugar de "2variedades", ya que se considera que este término es más accesible e intuitivo.

este nexo existe y se conoce como el teorema de Gauss-Bonnet: si se llama K(p) a la curvatura (de Gauss) de una superficie compacta sin borde M en el punto p y se integra en toda la superficie, el resultado que se obtiene encierra información sobre la topología de la superficie. En concreto,

$$\iint_M K(p) dA = 2\pi \chi(M)$$

siendo $\chi(M)$ un número entero, conocido como característica de Euler, que está relacionado con la cantidad de agujeros de la superficie. Este teorema, en apariencia sencillo, es muy profundo por ser capaz de unir dos disciplinas matemáticas aparentemente inconexas.

Aunque este teorema se conozca como "teorema de Gauss-Bonnet", este nombre no es del todo correcto: el enunciado presentado por Gauss en 1827 se corresponde a un caso específico para triángulos geodésicos, mientras que la versión de Bonnet enunciada en 1848 tiene carácter local. En realidad, fue von Dyck quien presentó la versión global que se acaba de presentar [14].

En este trabajo se estudiará en profundidad el teorema de Gauss-Bonnet. El título del trabajo no se ha elegido al azar: el plural en la palabra "teoremas" indica que se van a estudiar las diferentes variantes de este enunciado utilizando varios enfoques.

En el Capítulo 2 se estudiarán tanto la versión local del teorema de Gauss-Bonnet como su versión global. Para ello, se introducen en el capítulo todos los conceptos que se manejarán en las demostraciones y se establece su notación. La principal fuente bibliográfica manejada para esta parte es [9].

En el Capítulo 3 se analiza el teorema utilizando un punto de vista distinto. Para ello, se introduce la noción del índice de un campo vectorial en un punto definido sobre una superficie. A partir de este concepto, se llegará a una nueva versión del teorema global de Gauss-Bonnet. Esta versión del teorema está a su vez relacionada con el teorema de Poincaré-Hopf, que relaciona los índices de un campo vectorial con la característica de Euler. También se estudiarán las funciones de Morse y sus propiedades. En este caso, se ha utilizado principalmente [10] como referencia.

Finalmente, en el Capítulo 4 se verán diferentes aplicaciones y consecuencias del teorema de Gauss-Bonnet. Se utilizará el resultado en el estudio de un tipo de superficies conocidas como ovaloides, se estudiará su relación con las geometrías no euclidianas y se analizará el teorema de los defectos angulares de Descartes, que se mostrará como una versión límite del teorema de Gauss-Bonnet. Las referencias manejadas para este capítulo son más variadas, pero un buen punto de inicio sería [1].

Se incluyen en este trabajo dos anexos: uno de ellos es una recopilación de teoremas que, al igual que el teorema de Gauss-Bonnet, buscan relaciones entre la curvatura de una superficie y su topología; el otro recoge generalizaciones del teorema de Gauss-Bonnet para variedades de mayor dimensión.

Para la elaboración de este trabajo, se han manejado principalmente conceptos y herramientas del ámbito de la geometría diferencial, tanto a nivel local como global. Algunas de estas herramientas son, por ejemplo, el cálculo con tensores en coordenadas locales. También ha sido necesario manejar conceptos de topología algebraica, aunque en mucha menor medida. Para algunas demostraciones también se han empleado resultados relacionados con el cálculo vectorial. Entre otros conceptos manejados, cabe destacar la curvatura de Gauss, la aplicación de Gauss, la curvatura geodésica de una curva, la característica de Euler, el índice de un campo vectorial y el defecto angular de un poliedro.

Entendiendo que el eje central de este trabajo es un resultado estudiado en profundidad en la bibliografía, el trabajo no incluye resultados novedosos. Sin embargo, algunas de las demostraciones se han realizado desde cero por no encontrarse en la bibliografía consultada, como es el caso de la demostración del teorema para superficies compactas con borde. También se entiende que tanto la estructura del trabajo como la manera de introducir temas y relacionar conceptos son originales. Por último, todas las figuras del trabajo (a excepción de las de este capítulo y el Anexo II) son también una aportación original. Estas figuras se han creado con Matlab.

Capítulo 2

Teorema de Gauss-Bonnet para superficies en \mathbb{R}^3

El desarrollo de este trabajo tiene como punto de partida la demostración del teorema de Gauss-Bonnet para superficies inmersas en \mathbb{R}^3 . La belleza de este teorema reside en que relaciona la curvatura de Gauss, un concepto puramente geométrico que indica cómo se curva una superficie en cada uno de sus puntos, con la característica de Euler, un concepto relacionado con la topología de la superficie y que se obtiene a partir de triangulaciones. Por tanto, este teorema es un buen ejemplo de cómo las diferentes disciplinas matemáticas se relacionan entre sí, sin estar aisladas del resto de áreas.

Para desarrollar los contenidos de este capítulo se han seguido [9] y [10] como referencias básicas. Aun así, los temas que se tratan aparecen recogidos en cualquier otro libro sobre geometría de curvas y superficies, como por ejemplo [2].

2.1. Notación y conceptos previos

Se comienza este capítulo estableciendo los conceptos y la notación necesaria para poder demostrar el teorema local o fórmula de Gauss-Bonnet y el teorema (global) de Gauss-Bonnet. Las definiciones de algunos de los conceptos no se darán explicitamente por considerarse suficientemente conocidas (por ejemplo, la definición de superficie regular o plano tangente) y se establecerá únicamente su notación. Por otra parte, algunos resultados básicos no se demostrarán por haber sido estudiados en cursos previos. Tanto [9] como [10] cubren estas definiciones y demostraciones casi completamente. Otros temas en los cuales no se ha profundizado tanto durante la carrera, ya sea por no haberlos estudiado previamente o por no haber demostrado ciertos resultados útiles, se tratarán con mayor atención (por ejemplo, los entornos coordenados geodésicos).

2.1.1. Conceptos generales geométricos sobre superficies

Notación 2.1. Se consideran los siguientes conceptos relacionados con superficies en \mathbb{R}^3 :

- (I) Se representará una *superficie regular* en \mathbb{R}^3 con la letra M.
- (II) Una parametrización o superficie simple que cubra un entorno de un punto $p \in M$ se escribirá como $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^3$, donde $U \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto abierto, $p \in \mathbf{f}(U) \subset M$ y u^1 , u^2 son los parámetros de los que depende \mathbf{f} .
- (III) Cuando **f** es de clase C^k para k lo suficientemente grande, se utilizará la notación $\mathbf{f}_i = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u^i}$,

$$\mathbf{f}_{ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial u^j \partial u^i}$$
, etc. $(i, j = 1, 2)$.

(IV) El *plano tangente* a M en el punto $p = \mathbf{f}(a, b)$ se representará como $T_p M$. El *vector normal* a M en p vendrá dado por

$$\boldsymbol{N}(a,b) = \frac{\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2}{\|\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2\|}(a,b)$$

(V) Cada vector tangente a M en $p = \mathbf{f}(a, b)$ se representará en función de $\{\mathbf{f}_1(a, b), \mathbf{f}_2(a, b)\}$, base de $T_p M$ por la parametrización, como $\mathbf{X} = X^i \mathbf{f}_i(a, b)$ (aquí se utiliza el convenio de sumación de Einstein¹).

Notación 2.2. Dada una superficie simple $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^3$ en M y $p \in \mathbf{f}(U)$, se especifica la notación de los siguientes conceptos (todos los índices pueden tomar los valores 1 y 2):

- Los coeficientes del tensor métrico se escribirán como g_{ij} = ⟨**f**_i, **f**_j⟩ (⟨·, ·⟩ denota el producto escalar usual en ℝ³). La aplicación bilineal definida positiva determinada por la matriz (g_{ij}) en la base de T_pM por la parametrización, conocida como primera forma fundamental o tensor métrico, se representará como g(X, Y) con X, Y ∈ T_pM. La inversa de (g_{ij}) se denotará mediante (g_{ij})⁻¹ = (g^{kl}).
- (II) Los coeficientes de la segunda forma fundamental se escribirán como $L_{ij} = \langle \mathbf{f}_{ij}, \mathbf{N} \rangle$. La aplicación bilineal asociada a la matriz (L_{ij}) en la base de T_pM por la parametrización, conocida como segunda forma fundamental, se denotará por $L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ para los vectores $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_pM$.
- (III) Los símbolos de Christoffel se escribirán como $\Gamma^{k}_{ij} = \langle \mathbf{f}_{ij}, \mathbf{f}_{l} \rangle g^{lk}$.
- (IV) Se denominarán como delta de Kronecker a los símbolos

$$\delta^{i}_{\ j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

La aplicación lineal con matriz asociada $(\delta^i_{\ i})$ es la aplicación identidad Id: $T_p M \to T_p M$.

Estos conceptos, manejados aquí para superficies regulares inmersas en \mathbb{R}^3 , se pueden generalizar para variedades de mayor dimensión. Cuando a una variedad diferenciable M de dimensión n se le asigna un campo tensorial g de tipo (0, 2) simétrico y definido positivo, que se puede expresar en coordenadas locales como $g = g_{ij}\mathbf{f}_i^* \otimes \mathbf{f}_j^*$ (\mathbf{f}_i^* es el dual de \mathbf{f}_i), se dice que (M, g) es una variedad riemanniana². Para superficies regulares en \mathbb{R}^3 , la métrica riemanniana asignada es la inducida por el producto escalar en el espacio euclideo \mathbb{R}^3 . Por otra parte, los símbolos de Christoffel definidos anteriormente corresponden a la *conexión de Levi-Civita* de la superficie M como variedad riemanniana, la cual es la única conexión métrica libre de torsión que existe para la variedad. Finalmente, la segunda forma fundamental es un concepto que aparece cuando se trata con subvariedades inmersas en otra variedad: descomponiendo la conexión de Levi-Civita de la variedad en una parte tangente a la subvariedad y en otra normal a ésta, el tensor (0, 2) que se obtiene a partir de la componente normal se conoce como segunda forma fundamental.

Tal y como se definen los anteriores conceptos, y sabiendo que $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{N}\}$ es base de \mathbb{R}^3 en cualquier punto de $\mathbf{f}(U)$, se pueden deducir rápidamente las fórmulas de Gauss-Codazzi para \mathbf{f}_{ij} . También se puede demostrar sin mucha complicación que los símbolos de Christoffel son intrínsecos, esto es, dependen únicamente de la primera forma fundamental. Se enuncian estas fórmulas sin su demostración:

¹De ahora en adelante se aplicará el convenio de sumación de Einstein cuando sea posible. Dicho de otro modo, se eliminaran los símbolos de suma $\sum y$ se considerará que se suman los términos a lo largo de un índice cuando éste aparezca como superíndice y subíndice de términos que se multiplican. En el caso anterior, se escribe $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{2} X^i \mathbf{f}_i = X^i \mathbf{f}_i$.

²En la expresión en coordenadas locales del tensor g también se utiliza convenio de sumación de Einstein, aunque aparezcan los índices i, j sólo como subíndices. La suma toma valores de 1 a n.

Proposición 2.3 (Fórmulas de Gauss-Codazzi). Sea $f: U \to \mathbb{R}^3$ una superficie simple en M. Entonces, las derivadas \mathbf{f}_{ij} se pueden escribir como

$$\mathbf{f}_{ij} = L_{ij} \mathbf{N} + \Gamma^k_{\ ij} \mathbf{f}_k \tag{2.1}$$

Proposición 2.4. Sea $\mathbf{f}: U \to \mathbb{R}^3$ una superficie simple en M y g_{ij} los coeficientes de su tensor métrico. Entonces,

$$\Gamma^{k}_{\ ij} = \frac{1}{2}g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial u^{i}} + \frac{\partial g_{il}}{\partial u^{j}} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^{l}}\right)$$
(2.2)

Las superficies regulares M se pueden estudiar a partir de las curvas cuya imagen está contenida en ellas. Si se tiene una superficie simple $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^3$ tal que una curva regular (esto es, diferenciable con derivada no nula) $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ está contenida en ella (es decir, $\boldsymbol{\gamma}(I) \subset \mathbf{f}(U)$), se podrá escribir $\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbf{f}(\gamma^1(t), \gamma^2(t))$. Aplicando la regla de la cadena, se ve que la segunda derivada de $\boldsymbol{\gamma}$ es

$$\boldsymbol{\gamma}^{\prime\prime} = \mathbf{f}_{ij}(\gamma^i)^{\prime}(\gamma^j)^{\prime} + \mathbf{f}_i(\gamma^i)^{\prime\prime}$$
(2.3)

Por otra parte, se puede suponer que $\gamma(s)$ está *parametrizada por el arco* ($\|\gamma'(s)\| = 1$) ya que cualquier curva regular se puede parametrizar de este modo³. Entonces, la tangente $t(s) = \gamma'(s)$ a la curva es perpendicular a su derivada, o sea, $\langle t(s), \gamma''(s) \rangle = 0$. Por tanto, llamando $S = N \times t$ al *vector normal intrínseco* a γ , también se puede escribir

$$\gamma'' = \kappa_n N + \kappa_g S \tag{2.4}$$

donde a κ_n y κ_g se les denomina *curvatura normal* y *curvatura geodésica* de γ respectivamente. Si se igualan las Ecs. (2.3) y (2.4) y se aplican las fórmulas de Gauss-Codazzi dadas en la Ec. (2.1) se obtiene el siguiente resultado:

Proposición 2.5. Sea $\mathbf{f}: U \to \mathbb{R}^3$ una superficie simple en M y $\gamma(s) = \mathbf{f}(\gamma^1(s), \gamma^2(s))$ una curva parametrizada por el arco en $\mathbf{f}(U)$. Entonces,

$$\kappa_g \boldsymbol{S} = \left[(\gamma^k)'' + \Gamma^k_{\ ij} (\gamma^i)' (\gamma^j)' \right] \mathbf{f}_k \tag{2.5}$$

$$\kappa_n = L(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = L_{ij}(\gamma^i)'(\gamma^j)'$$
(2.6)

Se analiza en primer lugar el concepto de curvatura geodésica. De entre todas las curvas que se pueden trazar dentro de una superficie M, producen gran interés aquéllas que, vistas desde dentro de la superficie, no se tuercen. Además, sería útil poder construir estas curvas a partir de unas condiciones iniciales dadas.

Definición 2.6. Una curva contenida en una superficie M se llama *geodésica* si su curvatura geodésica se anula en todos los puntos, es decir, $\kappa_g \equiv 0$.

En la Figura 2.1 se han representado varias geodésicas diferentes sobre un cilindro. Estas geodésicas son circunferencias, rectas y hélices. A partir de la Ec. (2.5) se puede deducir una forma de saber si una curva es o no es una geodésica.

Proposición 2.7. Sea $\mathbf{f}: U \to \mathbb{R}^3$ una superficie simple en M y $\gamma(s) = \mathbf{f}(\gamma^1(s), \gamma^2(s))$ una curva parametrizada por el arco en $\mathbf{f}(U)$. γ es geodésica si y sólo si se cumple la siguiente igualdad para k = 1, 2:

$$(\gamma^{k})'' + \Gamma^{k}_{\ ij}(\gamma^{i})'(\gamma^{j})' = 0 \tag{2.7}$$

Utilizando el sistema de ecuaciones dado en la Ec. (2.7) e imponiendo unas determinadas condiciones iniciales, se tendría un sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales que, por el teorema de Peano-Picard, tendría una única solución. Se enuncia entonces el siguiente teorema:

³Se utilizará la letra s como variable para curvas parametrizadas por el arco, mientras que la letra t se reservará para curvas que no cumplan necesariamente este requisito.



FIGURA 2.1: Diferentes geodésicas sobre la superficie del cilindro

Teorema 2.8. Sea p un punto en una superficie simple $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{X} = X^i \mathbf{f}_i$ un vector unitario en $T_p M$. Entonces existe una única geodésica $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ para ciertos a, b con a < 0 < b, dominio de definición maximal y parametrizada por el arco tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = \mathbf{X}$.

Tras este pequeño recordatorio sobre la curvatura geodésica κ_g , se habla ahora de la curvatura normal κ_n . La curvatura normal de una curva en M será la que ayude a medir cómo se está curvando la superficie. Como trabajar con todas las curvas contenidas en M es poco práctico, se va a introducir una aplicación conocida como el endomorfismo de Weingarten, la cual está íntimamente relacionada con la aplicación de Gauss. Pero antes de definir el endomorfismo de Weingarten, se establecen las definiciones y notación que se van a utilizar:

Definición 2.9. Sean M, M' dos superficies y $F: M \to M'$ una aplicación.

- (I) Se dice que F es diferenciable en p ∈ M si para cualquier par f, f' de superficies simples f: U → ℝ³ en M que contiene a p y f': U' → ℝ³ en M' que contiene a F(p) resulta que (f')⁻¹ ∘ F ∘ f: U → U' es diferenciable en f⁻¹(p). En general, se dirá que F es diferenciable si lo es en todo punto de M.
- (II) Se define la *aplicación tangente* o *diferencial* en el punto $p \in M$, $(F_*)_p \colon T_pM \to T_{F(p)}M'$, como sigue: si $\boldsymbol{\alpha} \colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$ es una curva en M con $\boldsymbol{\alpha}(0) = p$ y $\boldsymbol{\alpha}'(0) = \boldsymbol{X} \in T_pM$, se toma $(F_*)_p(\boldsymbol{X}) = (F \circ \boldsymbol{\alpha})'(0) \in T_{f(p)}M'$.
- (III) Dada una función diferenciable $f: M \to \mathbb{R}$, se dirá que $p \in M$ es un *punto crítico* de f si $(f_*)_p = 0$.

Definición 2.10. Sea $\mathbf{f}: U \to \mathbb{R}^3$ una superficie simple. Se denotará a la *aplicación de Gauss* en $\mathbf{f}(U)$ como $\boldsymbol{\nu}: U \to \mathbb{S}^2$ donde \mathbb{S}^2 es la esfera unidad en \mathbb{R}^3 . Esta aplicación asigna a cada punto de f(U) un vector unitario normal a la superficie de forma continua.

Lo realmente importante de la aplicación que se acaba de definir es su continuidad. En el caso de una superficie simple, siempre se puede definir esta aplicación (se verá un poco más adelante que hay superficies en las que esto no es así). Una forma de definir la aplicación es tomar el vector normal unitario N del que se ha hablado al comienzo de la subsección, pero también se podría tomar -N. Por tanto, la elección de una aplicación de Gauss no es única, existen dos orientaciones posibles.

Con la notación establecida, se define el endomorfismo de Weingarten:

Definición 2.11. Sea $\mathbf{f}: U \to \mathbb{R}^3$ una superficie simple en M. Para $p \in \mathbf{f}(U)$, se define el *endo*morfismo de Weingarten como la aplicación $\mathcal{L}: T_pM \to T_pM$ tal que a cada $\mathbf{X} \in T_pM$ le asigna $\mathcal{L}(\mathbf{X}) = -(\boldsymbol{\nu}_*)_p(\mathbf{X})$.

En la siguiente proposición se recogen algunas características sobre \mathcal{L} :

Proposición 2.12. *Bajo las condiciones de la Definición 2.11, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- (I) \mathcal{L} esta bien definida, en otras palabras, es un endomorfismo.
- (II) (Ecuaciones de Weingarten) Si $\mathcal{L}(\mathbf{f}_i) = L^k_{\ i} \mathbf{f}_k$, se tiene que

$$\mathbf{N}_i = -\mathcal{L}(\mathbf{f}_i) = -L^k_{\ i} \mathbf{f}_k \tag{2.8}$$

(III) La matriz de \mathcal{L} en la base $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ de T_pM viene dada por el producto de (L_{ij}) con (g^{kl}) , es decir,

$$L^k_{\ i} = L_{ij}g^{jk} \tag{2.9}$$

(IV) Para $X, Y \in T_pM$, se cumple

$$L(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \langle \mathcal{L}(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{Y} \rangle = \langle \boldsymbol{X}, \mathcal{L}(\boldsymbol{Y}) \rangle$$
(2.10)

De este último resultado se deduce que el endomorfismo de Weingarten es autoadjunto, por lo que se podrá diagonalizar. Si se buscan los autovalores y autovectores de \mathcal{L} y se aplican las Ecs. (2.6) y (2.10) se puede comprobar que los autovalores κ_1 y κ_2 están asociados a unos autovectores $X_{(1)}$ y $X_{(2)}$ que son perpendiculares entre sí. Cada uno de estos autovalores corresponde a la curvatura normal en p de las curvas contenidas en la superficie que pasan por p y cuya tangente en dicho punto es $X_{(1)}$ y $X_{(2)}$ respectivamente. Además, estas curvaturas coinciden con la mínima y la máxima curvatura normal que puede tener una curva en el punto de interés.

Definición 2.13. Se denominan *curvaturas principales* a los autovalores κ_1 y κ_2 del endomorfismo \mathcal{L} . Sus autovectores asociados se llaman *direcciones principales*.

Dos invariantes de un endomorfismo son su determinante y su traza. Por tanto, a partir de estos valores se pueden definir dos conceptos de gran interés, uno de las cuales juega un papel principal en el teorema de Gauss-Bonnet:

Definición 2.14. Se denomina *curvatura de Gauss* de M en un punto $p \in M$ a $K = \det(\mathcal{L}) = \kappa_1 \kappa_2$. Igualmente, se llama *curvatura media* a $H = \text{Tr}(\mathcal{L})/2 = (\kappa_1 + \kappa_2)/2$.

La interpretación geométrica de H se deduce de su propio nombre y su definición; sin embargo, para la curvatura de Gauss K su significado no es tan claro. Su interpretación se puede deducir a partir de la aplicación de Gauss. Para ello, se da la siguiente definición:

Definición 2.15. Sea $f: U \to \mathbb{R}^3$ una superficie simple y $R \subset f(U)$ un subconjunto de esta superficie. Se define el *área* de R como

$$A(R) = \iint_{\mathbf{f}^{-1}(R)} \sqrt{\det(g)} du^1 du^2$$
(2.11)

donde el elemento $\sqrt{\det(g)} du^1 du^2$ se suele denotar como dA.

A partir de esta definición, se puede justificar geométricamente el significado de K: esta curvatura en el punto p se puede ver como el límite del cociente $A(\nu(R))/A(R)$ $(p \in R)$ cuando $R \to \{p\}$, donde ν denota la aplicación de Gauss en la superficie simple **f**.

Ya que se ha sacado a colación el concepto de la aplicación de Gauss, se aprovecha para definir algunos conceptos relativos a la orientación de superficies y curvas.

Definición 2.16. Una superficie M se dice que es *orientable* si se puede definir una aplicación de Gauss $\nu \colon M \to \mathbb{S}^2$ globalmente en M. En caso contrario, la superficie se denomina *no orientable*.

En la Figura 2.2 se han representado dos superficies. A la izquierda se tiene la esfera S^2 . Esta superficie es orientable: una elección de campo normal es la que se señala en la figura en algunos de



FIGURA 2.2: Representación de una superficie orientable y una no orientable, así como de vectores normales a éstas

los puntos (el vector normal coincide con el de posición). Sin embargo, la superficie de la derecha es un ejemplo típico de superficie no orientable: se trata de la banda de Möbius. Gráficamente se ha representado un intento de campo normal a lo largo de una curva en la superficie, llegando a un punto en el que se encuentra una discontinuidad.

Tener una orientación definida en una superficie es útil para calcular ángulos entre vectores. Si $X, Y \in T_p M$, el ángulo θ que forman se define como $\cos \theta = \langle X, Y \rangle / ||X|| ||Y||$, siendo el signo de θ el correspondiente del producto mixto $\langle X \times Y, N \rangle$. Este ángulo se escribirá como $\triangleleft(X, Y)$.

Definición 2.17. Sea M una superficie. Un subconjunto $R \subset M$ se llamará *región* en M si es un conjunto abierto y conexo por caminos en M. Una curva γ en M se dirá que *encierra* la región R si la imagen de γ es la frontera de R y, además, el vector normal intrínseco a γ , S, apunta hacia el interior de R en aquellos puntos en los que está definido y -S hacia $M \setminus \overline{R}$.

Si γ encierra una región R, se dirá ocasionalmente que la parametrización de la curva es una *orientación positiva* o *antihoraria* de la frontera de R. Una región puede tener varias componentes conexas en el borde.

Para finalizar esta subsección se tratará el teorema Egregio de Gauss. En la demostración del teorema local de Gauss-Bonnet se va a disponer únicamente de la información contenida en el tensor métrico de una superficie simple. Por tanto, sería bueno saber si la curvatura de Gauss K se puede calcular en función de (g_{ij}) y, en caso afirmativo, saber cómo hacerlo. Para ello se dispone del teorema Egregio de Gauss, el cual afirma que la curvatura de Gauss sí se puede calcular a partir de este tensor. Para aproximarse a dicho teorema y obtener un método para calcular K, se va a introducir un nuevo tensor, conocido como el tensor de curvatura de Riemann. Se considera una superficie regular M y una superficie simple $\mathbf{f}: U \to \mathbb{R}^3$ contenida en M.

Definición 2.18. Se define el *tensor de curvatura de Riemann* como el tensor cuyos coeficientes R^{l}_{ijk} (con $1 \le i, j, k, l \le 2$) vienen dados por

$$R^{l}_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^{l}_{ik}}{\partial u^{j}} - \frac{\partial \Gamma^{l}_{ij}}{\partial u^{k}} + \Gamma^{p}_{ik} \Gamma^{l}_{pj} - \Gamma^{p}_{ij} \Gamma^{l}_{pk}$$
(2.12)

El tensor de curvatura de Riemann depende de los símbolos de Christoffel. Éstos dependen a su vez del tensor métrico, por lo que el tensor de curvatura de Riemann es un concepto intrínseco. Nuevamente, este concepto se puede generalizar a variedades diferenciables de dimensión mayor: en realidad, estos símbolos son los asociados al tensor de curvatura R, de tipo (1,3), cuya expresión en coordenadas locales es $R = \mathbf{f}_l R^l_{iik} \mathbf{f}_i^* \otimes \mathbf{f}_k^*$. Este tensor está relacionado con la conexión de la

variedad riemanniana; en concreto, la Ec. (2.12) se corresponde al tensor de curvatura asociado a la conexión de Levi-Civita de la variedad. Se presentan a continuación varios resultados que serán útiles a la hora de deducir una manera de calcular K.

Proposición 2.19. Bajo las condiciones dadas anteriormente y para cualquier i, j, k, l,

$$R^{l}_{ijk} = L_{ik}L^{l}_{j} - L_{ij}L^{l}_{k}$$
(2.13)

Demostración. Para realizar esta demostración se va a suponer que **f** es al menos de clase C^3 , con lo que $\mathbf{f}_{ijk} = \mathbf{f}_{ikj}$. Se calcularán ambas derivadas explícitamente a partir de las fórmulas de Gauss-Codazzi y se aplicarán estas mismas fórmulas junto a las ecuaciones de Weingarten dadas en la Ec. (2.8) para organizar el resultado en función de la base { $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, N$ }.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{ijk} &= \frac{\partial \mathbf{f}_{ij}}{\partial u^k} = \frac{\partial L_{ij}}{\partial u^k} \mathbf{N} + L_{ij} \mathbf{N}_k + \frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial u^k} \mathbf{f}_l + \Gamma^l_{ij} \mathbf{f}_{lk} \\ &= \frac{\partial L_{ij}}{\partial u^k} \mathbf{N} - L_{ij} L^l_k \mathbf{f}_l + \frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial u^k} \mathbf{f}_l + \Gamma^l_{ij} \left(L_{lk} \mathbf{N} + \Gamma^p_{\ lk} \mathbf{f}_p \right) \\ &= \left(\frac{\partial L_{ij}}{\partial u^k} + \Gamma^l_{\ ij} L_{lk} \right) \mathbf{N} + \left(\frac{\partial \Gamma^l_{\ ij}}{\partial u^k} - L_{ij} L^l_k + \Gamma^p_{\ ij} \Gamma^l_{\ pk} \right) \mathbf{f}_l \\ \mathbf{f}_{ikj} &= \left(\frac{\partial L_{ik}}{\partial u^j} + \Gamma^l_{\ ik} L_{lj} \right) \mathbf{N} + \left(\frac{\partial \Gamma^l_{\ ik}}{\partial u^j} - L_{ik} L^l_j + \Gamma^p_{\ ik} \Gamma^l_{\ pj} \right) \mathbf{f}_l \end{aligned}$$

Por las condiciones de diferenciabilidad impuestas, los coeficientes que acompañan a cada vector de la base son iguales para \mathbf{f}_{ijk} y \mathbf{f}_{ikj} . Tomando los coeficientes de \mathbf{f}_l ,

$$\frac{\partial \Gamma^{l}_{ij}}{\partial u^{k}} - L_{ij}L^{l}_{\ k} + \Gamma^{p}_{\ ij}\Gamma^{l}_{\ pk} = \frac{\partial \Gamma^{l}_{\ ik}}{\partial u^{j}} - L_{ik}L^{l}_{\ j} + \Gamma^{p}_{\ ik}\Gamma^{l}_{\ pj}$$

Si se reescribe esta ecuación convenientemente, se llega a

$$\frac{\partial \Gamma^{l}_{ik}}{\partial u^{j}} - \frac{\partial \Gamma^{l}_{ij}}{\partial u^{k}} + \Gamma^{p}_{ik} \Gamma^{l}_{pj} - \Gamma^{p}_{ij} \Gamma^{l}_{pk} = L_{ik} L^{l}_{j} - L_{ij} L^{l}_{k}$$

El término de la izquierda corresponde con la Ec. (2.12), con lo que queda probada la proposición.

A partir de esta expresión extrínseca de un concepto puramente intrínseco como es el tensor de curvatura de Riemann se procede a probar el teorema Egregio de Gauss:

Teorema 2.20 (Teorema Egregio de Gauss). La curvatura de Gauss de una superficie es intrínseca. **Demostración.** Por la Ec. (2.13) se tiene que $R_{ijk}^l = L_{ik}L_j^l - L_{ij}L_k^l$. Si se multiplica por g_{lm} , se suma en l y se desarrolla aplicando la Ec. (2.9) se llega a

$$R^{l}_{ijk}g_{lm} = L_{ik}L^{l}_{j}g_{lm} - L_{ij}L^{l}_{k}g_{lm} = L_{ik}L_{jp}g^{pl}g_{lm} - L_{ij}L_{kp}g^{pl}g_{lm}$$

= $L_{ik}L_{jp}\delta^{p}_{\ m} - L_{ij}L_{kp}\delta^{p}_{\ m} = L_{ik}L_{jm} - L_{ij}L_{km}$

Eligiendo los valores i = k = 1 y j = m = 2,

$$R^{l}_{121}g_{l2} = L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21} = \det(L) = \det(\mathcal{L})\det(g) = K\det(g)$$

Sin más que despejar K, queda demostrado el teorema.

Corolario 2.21. La curvatura de Gauss se puede calcular como

$$K = \frac{R_{121}^{l}g_{l2}}{\det(g)}$$
(2.14)

2.1.2. Transporte paralelo

Para demostrar el teorema local de Gauss-Bonnet se necesitará construir un campo vectorial paralelo a lo largo de una curva y trabajar con él. Sin embargo, se debe estar seguro de que se puede construir dicho campo dadas unas determinadas condiciones iniciales. Por tanto, en esta parte se introducen los conceptos necesarios para resolver este problema.

Sea M una superficie regular, $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^3$ una superficie simple en M y $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva contenida en $\mathbf{f}(U)$ definida en un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$. Entonces, como ya se ha visto anteriormente, se puede escribir $\gamma(t) = \mathbf{f}(\gamma^1(t), \gamma^2(t))$. Dentro del contexto de las superficies inmersas en \mathbb{R}^3 se puede generalizar el concepto de paralelismo que se tenía en el plano. Para ello, se definen los campos vectoriales a lo largo de una curva en M.

Definición 2.22. Un *campo vectorial* a lo largo de γ es una aplicación $X : I \to \mathbb{R}^3$ que a cada $t \in I$ le asigna un vector $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$. Se dice que este campo vectorial es *diferenciable* si lo es la aplicación que lo define (sólo se estudia la diferenciabilidad en los puntos del interior de I).

Para que, desde un punto de vista intrínseco, no se pudiera detectar ninguna variación en la dirección del campo vectorial al recorrer la curva, la componente tangencial de dX/dt debería ser nula, esto es, dX/dt debería ser normal a M. Esta observación motiva la siguiente definición:

Definición 2.23. Un campo vectorial X diferenciable en γ es *paralelo* a lo largo de γ si dX/dt es perpendicular a M.

Se necesita plantear una ecuación diferencial para que, a partir de unas condiciones iniciales dadas, se pueda crear un campo vectorial paralelo a lo largo de una curva. La siguiente proposición será de ayuda:

Proposición 2.24. Sea X un campo vectorial a lo largo de una curva regular γ definido como $X = X^i \mathbf{f}_i$. Entonces, X es paralelo a lo largo de γ si y sólo si se cumple lo siguiente para k = 1, 2:

$$\frac{dX^k}{dt} + \Gamma^k_{\ ij} X^i \frac{d\gamma^j}{dt} = 0 \tag{2.15}$$

Demostración. Se calcula en primer lugar dX/dt, aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \frac{dX^i}{dt}\mathbf{f}_i + X^i\mathbf{f}_{ij}\frac{d\gamma^j}{dt}$$

X será paralelo a lo largo de γ si y solo si para l = 1, 2, $\langle dX/dt, \mathbf{f}_l \rangle = 0$. Desarrollando esta expresión,

$$\left\langle \frac{dX^{i}}{dt}\mathbf{f}_{i},\mathbf{f}_{l}\right\rangle + \left\langle X^{i}\frac{d\gamma^{j}}{dt}\mathbf{f}_{ij},\mathbf{f}_{l}\right\rangle = 0$$

Introduciendo el tensor métrico, se tiene que

$$\frac{dX^{i}}{dt}g_{il} + X^{i}\frac{d\gamma^{j}}{dt}\langle \mathbf{f}_{ij}, \mathbf{f}_{l} \rangle = 0$$
(2.16)

Se va a suponer que X es paralelo a lo largo de γ , esto es, que se cumple la Ec. (2.16). Si se multiplica esta ecuación por g^{lk} y se suma en l,

$$\frac{dX^{i}}{dt}g_{il}g^{lk} + X^{i}\frac{d\gamma^{j}}{dt}\langle \mathbf{f}_{ij}, \mathbf{f}_{l}\rangle g^{lk} = \frac{dX^{i}}{dt}\delta^{k}{}_{i} + X^{i}\frac{d\gamma^{j}}{dt}\langle \mathbf{f}_{ij}, \mathbf{f}_{l}\rangle g^{lk} = \frac{dX^{k}}{dt} + \Gamma^{k}{}_{ij}X^{i}\frac{d\gamma^{j}}{dt} = 0$$
para $k = 1, 2$.

Se supone ahora que la Ec. (2.15) es cierta. Entonces, sin más que multiplicar por g_{kl} y sumar en k,

$$\frac{dX^k}{dt}g_{kl} + X^i \frac{d\gamma^j}{dt} \langle \mathbf{f}_{ij}, \mathbf{f}_m \rangle \delta^m_l = \frac{dX^k}{dt} g_{kl} + X^i \frac{d\gamma^j}{dt} \langle \mathbf{f}_{ij}, \mathbf{f}_l \rangle$$

para l = 1, 2, con lo cual queda probado el resultado.

Teorema 2.25. Sea $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva en M, y X_0 un vector tangente a M en $\gamma(t_0)$. Entonces, existe un único campo vectorial X paralelo a lo largo de γ con $X(t_0) = X_0$.

Demostración. Se va a suponer que la curva γ es regular y se encuentra contenida en una superficie simple $\mathbf{f}: U \to \mathbb{R}^3$.

Se tiene $\gamma(t) = \mathbf{f}(\gamma^1(t), \gamma^2(t))$. Para k = 1, 2 se consideran los problemas de valores iniciales

$$\begin{cases} \frac{dX^k}{dt}(t) = -\Gamma^k_{ij} \left(\gamma^1(t), \gamma^2(t)\right) X^i(t) \frac{d\gamma^j}{dt}(t) \\ X^k(t_0) = X_0^k \end{cases}$$

Si se aplica el teorema de Picard para la existencia y unicidad de solución, este problema de valores iniciales tiene una única solución para valores de t lo suficientemente cercanos a t_0 . Esta solución es un campo paralelo a lo largo de γ .

En el caso de que la curva considerada sea regular pero no esté contenida en una superficie simple, se puede dividir la curva en varios fragmentos, cada uno de ellos contenido en una superficie simple. Aplicando el razonamiento anterior a cada uno de estos fragmentos se tendría construído el campo vectorial. Por último, si la curva no es regular, esta se podrá dividir en varios fragmentos, cada uno de ellos diferenciables, con lo que también estaría demostrado el resultado.

Definición 2.26. Se llama *transporte paralelo* de X_0 a lo largo de γ al único campo vectorial X(t) paralelo a lo largo de γ con $X(t_0) = X_0$.



FIGURA 2.3: Campo paralelo a lo largo de una curva en la esfera \mathbb{S}^2

En la Figura 2.3 se ha representado el transporte paralelo de un vector tangente a uno de los polos de la esfera \mathbb{S}^2 a lo largo de una curva cerrada. Este ejemplo sirve para ilustrar que, cuando la curva es cerrada o tiene autointersecciones, puede haber puntos de la superficie sobre los cuales el campo no esté definido de forma única, como ocurre en la Figura 2.3 en el polo de \mathbb{S}^2 . Esto ocurre debido a que realmente el campo paralelo se define en función del parámetro del que depende la curva y no en función de los puntos de la superficie.

El concepto del transporte paralelo motiva la aparición de lo que se conoce como holonomía de una variedad. Para variedades riemannianas, esta noción aparece cuando se toma un punto $p \in M$ de la variedad y, utilizando la conexión de Levi-Civita, se estudian los campos paralelos para cada curva regular a trozos cerrada con base en p. Si se transporta un campo vectorial y se compara el vector de inicio con el final se podrá comprobar que, como pasa en la Figura 2.3, no tienen por qué ser iguales. Al trabajar con la conexión de Levi-Civita, la aplicación $\tau : T_pM \to T_pM$ que asigna a cada vector de T_pM el vector final del transporte paralelo define una isometría, luego se podrá asignar a cada curva regular a trozos un elemento del grupo ortogonal O(n) siendo n la dimensión de la variedad. Se define entonces el grupo de holonomía de la variedad como aquel cuyos elementos son las matrices ortogonales asociadas a los posibles transportes paralelos. Para las variedades más comunes el grupo de holonomía es O(n) (SO(n) si la variedad es orientable). Aun así, estos no son los únicos grupos posibles: según el grupo que tenga asociado la variedad, las propiedades de ésta cambiarán.

2.1.3. Entornos coordenados geodésicos

En la fórmula de Gauss-Bonnet se trabajará con un tipo especial de parametrizaciones, conocidos como entornos coordenados geodésicos. La característica principal de un entorno coordenado geodésico $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^3$ es que las curvas $\mathbf{f}(u^1, b)$ dejando b fijo son geodésicas (en general, si se fija a las curvas $\mathbf{f}(a, u^2)$ no serán geodésicas). Se formaliza la definición:

Definición 2.27. Sea $\mathbf{f}: U \to \mathbb{R}^3$ una superficie simple. Se dice que \mathbf{f} es un *entorno coordenado* geodésico si $g_{11} \equiv 1$ y $g_{12} = g_{21} \equiv 0$. Además, si existe una curva $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$ en $\mathbf{f}(U)$ definida en un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$, de manera que hay un *a* tal que la imagen de γ está contenida en la imagen de la curva $\mathbf{f}(a, u^2)$, se dice que \mathbf{f} es un *entorno coordenado geodésico a lo largo de* γ .



FIGURA 2.4: Entorno coordenado geodésico a lo largo de una curva en un plano

Lo interesante de este tipo de superficies simples es que, partiendo de una curva no cerrada α , se puede construir un entorno coordenado geodésico f de tal forma que la curva $f(a, u^2)$ para un *a* fijo que pase por un punto de la traza de α sea la propia α . La idea para construir la parametrización es utilizar geodésicas perpendiculares a la curva. En la Figura 2.4 se ilustra esta idea tomando como curva de referencia una parábola en un plano. Con líneas discontinuas se han representado las imágenes de las curvas $f(a, u^2)$ y $f(u^1, b)$ para valores *a*, *b* constantes. Efectivamente se comprueba que las curvas $f(u^1, b)$, correspondientes a las rectas, son geodésicas, mientras que el resto no lo son. La siguiente proposición recoge el método de construcción de este tipo de superficies simples:

Teorema 2.28. Sea M una superficie y $\alpha \colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular simple (es decir, sin autointersecciones) en M no cerrada definida en un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$. Entonces, existe un entorno coordenado geodésico $\mathbf{f} \colon U \to \mathbb{R}^3$ en M a lo largo de α .

Demostración. Se puede suponer que la curva α realmente está definida en un intervalo abierto I' que contiene a I. Por lo tanto, se toma un intervalo [a, b] como entorno de trabajo, de manera que $I \subset [a, b] \subset I'$. Sea t el parámetro que define a α .

Se considera el campo vectorial $\mathbf{X} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ sobre $\boldsymbol{\alpha}$ definido como $\mathbf{X}(t) = -\mathbf{S}(t)$, donde $\mathbf{S} = \mathbf{N} \times \boldsymbol{\alpha}' / \| \boldsymbol{\alpha}' \|$ es el vector normal intrínseco a $\boldsymbol{\alpha}$ y \mathbf{N} es una elección continua del vector normal a M (existe porque $\boldsymbol{\alpha}$ es no cerrada y simple). Para cada $t \in [a, b]$ se llama $\boldsymbol{\alpha}_t(s)$ a la única geodésica tal que $\boldsymbol{\alpha}_t(0) = \boldsymbol{\alpha}(t)$ y $(d\boldsymbol{\alpha}_t/ds)(0) = \mathbf{X}(t)$ (esta geodésica existe por el Teorema 2.8).

Se llama $\mathbf{f}(s,t) = \boldsymbol{\alpha}_t(s)$. Se comprueba en qué condiciones \mathbf{f} parametriza una superficie simple. Como $\boldsymbol{\alpha}_t$ es solución de una ecuación diferencial, las condiciones de continuidad y diferenciabilidad para que **f** sea una superficie simple se cumplen. Por ser [a, b] un intervalo cerrado, también se puede encontrar un $\delta > 0$ tal que **f** es inyectiva en $[-\delta, \delta] \times [a, b]$. Calculando las derivadas $\mathbf{f}_1(0, t) = \mathbf{X}(t)$ y $\mathbf{f}_2(0, t) = \boldsymbol{\alpha}'(t)$, se comprueba que $(\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2)(0, t) = \|\boldsymbol{\alpha}'\| \mathbf{N}(t)$, resultado que no se anula por ser $\boldsymbol{\alpha}$ regular. Por tanto, se puede encontrar un ϵ con $0 < \epsilon \le \delta$ tal que $\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2 \ne 0$ en $[-\epsilon, \epsilon] \times [a, b]$. Con todo esto, se concluye que $\mathbf{f}: (-\epsilon, \epsilon) \times (a, b) \to \mathbb{R}^3$ es una superficie simple.

Por último, se debe probar que **f** es un entorno coordenado geodésico a lo largo de α . Por ser α_t geodésica parametrizada por el arco, $||d\alpha_t/ds|| = 1$ luego $g_{11} \equiv 1$. Si se deriva g_{12} con respecto a s, se tiene

$$rac{\partial g_{12}}{\partial s} = \langle \mathbf{f}_{11}, \mathbf{f}_2
angle + \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_{12}
angle$$

Como α_t es geodésica, \mathbf{f}_{11} es perpendicular a M luego $\langle \mathbf{f}_{11}, \mathbf{f}_2 \rangle = 0$. Por otra parte, derivando g_{11} con respecto a s se llega a que $\langle \mathbf{f}_{12}, \mathbf{f}_1 \rangle = 0$. Con todo esto se tiene que g_{12} es constante con respecto a s. Para s = 0, $\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle (0, t) = \langle \boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{X} \rangle (t) = 0$, por lo que $g_{12} \equiv 0$. Si se toman valores de t dentro del intervalo I, entonces se tiene que $\mathbf{f}(0, t) = \boldsymbol{\alpha}_t(0) = \boldsymbol{\alpha}(t)$, con lo que se finaliza la demostración. \Box

2.1.4. Conceptos generales topológicos

En este trabajo se está estudiando un punto de unión entre dos ramas de las matemáticas: la geometría diferencial y la topología. Por tanto, sería ilógico no dedicar un momento a definir las nociones topológicas que entran en juego en los enunciados y demostraciones de los teoremas, si bien el carácter general del trabajo está más orientado hacia la geometría diferencial. En concreto, se van a introducir algunos conceptos relacionados con el grupo fundamental de un espacio topológico y triangulaciones de éste. La descripción que se hará de estas ideas será más bien somera ya que se han estudiado con más detalle a lo largo del grado en Matemáticas. Si se quiere profundizar en algunos aspectos, se puede consultar [8] o [11], de donde se han extraído todos los conceptos.

Definición 2.29. Sean X, Y dos espacios topológicos cualesquiera y $f, g: X \to Y$ dos aplicaciones continuas. Se dice que f y g son *aplicaciones homótopas* si se puede definir una aplicación continua $H: X \times [0, 1] \to Y$ que se denomina *homotopía* tal que

$$H(x,0) = f(x) \qquad \qquad H(x,1) = g(x)$$

Definición 2.30. Sea M un espacio topológico cualquiera y $\alpha, \beta \colon [0,1] \to M$ dos caminos en M, tales que $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ y $\alpha(1) = \beta(1) = x_1$. Se dice que α y β son caminos homótopos si se puede definir una aplicación continua $H \colon [0,1] \times [0,1] \to M$ que se denomina homotopía de caminos tal que

$$H(s,0) = \alpha(s)$$
 $H(0,t) = x_0$
 $H(s,1) = \beta(s)$ $H(1,t) = x_1$

La relación "ser caminos homótopos" es una relación de equivalencia. Esta noción de homotopía se puede extender a aplicaciones definidas entre dos espacios topológicos cualesquiera.

Definición 2.31. Sea M un espacio topológico y $\alpha, \beta \colon [0,1] \to M$ dos caminos en M con puntos de inicio y llegada $\alpha(0) = x_0, \alpha(1) = \beta(0) = x_1$ y $\beta(1) = x_2$. Se define el *producto* $\alpha * \beta$ como el camino definido por

$$(\boldsymbol{\alpha} \ast \boldsymbol{\beta})(s) = \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}(2s) & \text{si } 0 \le s \le 1/2\\ \boldsymbol{\beta}(2s-1) & \text{si } 1/2 \le s \le 1 \end{cases}$$

Estas dos últimas definiciones que se han dado se pueden aplicar al caso concreto de los lazos, caminos con mismo punto de inicio y de llegada. Además, al conjunto de las clases de equivalencia de lazos homótopos se le puede dotar de una estructura de grupo mediante la operación * que se define como $[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$.

Definición 2.32. Sea M un espacio topológico y x_0 un punto de M. El grupo formado por las clases de homotopía de los lazos con base en x_0 mediante la operación * se denomina grupo fundamental de M relativo a x_0 , y se denota $\pi_1(M, x_0)$.

En el caso en el que el espacio topológico sea conexo por caminos, existe un isomorfismo entre los grupos fundamentales $\pi_1(M, x_0)$ y $\pi_1(M, x_1)$ para cualesquiera $x_0, x_1 \in M$.

Hay un caso concreto en el cual el grupo fundamental de un espacio topológico será muy sencillo. Este es el caso en el cual todos los lazos son homótopos entre sí. En esta situación, el grupo fundamental será trivial: $\pi_1(M, x_0) = \{[c_{x_0}]\}$, donde c_{x_0} es el lazo constante en x_0 .

Definición 2.33. Sea M un espacio topológico, y $\pi_1(M, x_0)$ su grupo fundamental relativo a x_0 .

- (I) Un lazo basado en x_0 se dice *homotópicamente nulo* si es homótopo al lazo constante en x_0 .
- (II) Si M es conexo por caminos y su grupo fundamental es el trivial (esto es, cualquier lazo es homotópicamente nulo), M se dice que es *simplemente conexo*.

Se habla ahora de uno de los dos términos en torno al cual gira el teorema de Gauss-Bonnet. Este concepto es la característica de Euler, y para definirlo se necesita hablar de triangulaciones en superficies compactas.

Definición 2.34. Sea M una superficie compacta. Una *triangulación* de M consiste en una familia finita de subconjuntos cerrados $\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ que recubren M, y una familia de homeomorfismos $\varphi_i \colon T'_i \to T_i$ donde cada T'_i es un triángulo en el plano \mathbb{R}^2 . Cada T_i se denomina *triángulo*, y las imágenes de los vértices y aristas de los triángulos planos T'_i se llaman asimismo vértices y aristas respectivamente. Además, para $i \neq j, T_i \cap T_j$ es el vacío, un único vértice o una única arista completa.

Radó probó en 1925 que cualquier superficie cerrada es triangulable. A partir de la triangulación de una superficie compacta se puede definir el concepto de interés. Para ello, se consideran los siguientes valores obtenidos a partir de una triangulación $\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ de M:

f = número total de caras (triángulos) de la triangulación

e =número total de aristas de la triangulación

v = número total de vértices de la triangulación

Definición 2.35. Se define la *característica de Euler* de M, $\chi(M)$, como

$$\chi(M) = f - e + v \tag{2.17}$$

La forma de denotar la característica de Euler, $\chi(M)$, sugiere que ésta no depende de la triangulación elegida. En efecto, esto es así, como indica el siguiente teorema:

Teorema 2.36. La característica de Euler es un invariante topológico de la superficie, esto es, se conserva bajo homeomorfismos y no depende de la triangulación elegida.

Demostración. Para consultar una demostración de este teorema se recomienda la referencia [8]. 🗌



FIGURA 2.5: Dos posibles triangulaciones para el toro \mathbb{T}^2

En la Figura 2.5 aparecen dos posibles triangulaciones para el toro \mathbb{T}^2 (en estos diagramas, se entiende que los lados exteriores de la figura con nombres iguales son equivalentes, y se unen siguiendo la orientación indicada por las flechas). En ambos casos, la característica de Euler que se obtiene mediante estas triangulaciones es $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$, lo cual es acorde con el enunciado del Teorema 2.36.

Si se trata con una superficie M inmersa en \mathbb{R}^3 , compacta y sin borde, hay un resultado, generalizado por Samelson para hipersuperficies inmersas en \mathbb{R}^n , que afirma que M es orientable:

Teorema 2.37 (Teorema de Samelson). Una variedad diferenciable no orientable (sin borde) de dimensión n - 1 no es inmersible en \mathbb{R}^n mediante un embedding⁴. En concreto, no existen superficies regulares compactas inmersas en \mathbb{R}^3 no orientables.

Es evidente que el teorema de Samelson se cumple para variedades sin borde: un claro contraejemplo es la banda de Möbius, mostrada en la Figura 2.2. Se enuncia ahora el teorema de clasificación de superficies compactas:

Teorema 2.38 (Teorema de clasificación de superficies compactas). Una superficie compacta es homeomorfa a una esfera o a la suma conexa de varios toros si es orientable. Si es no orientable, es homeomorfa a la suma conexa de varios planos proyectivos.

La característica de Euler de una superficie compacta dependerá entonces de la superficie a la cual es homeomorfa según el teorema de clasificación. En el caso de que la superficie tenga borde, la característica de Euler dependerá también del número de componentes conexas del borde. Se enuncia un último teorema en el que se recogen estos detalles:

Teorema 2.39. Sea M una superficie compacta, no necesariamente inmersa en \mathbb{R}^3 .

- (I) Si M no tiene borde y es orientable, entonces $\chi(M) = 2 2g$, donde g es el número de toros que participan en la suma conexa (si M es homeomorfa a la esfera, g = 0).
- (II) Si M no tiene borde y es no orientable, su característica de Euler es $\chi(M) = 2 g$, donde g es el número de planos proyectivos que se suman.
- (III) Si M tiene k componentes conexas en el borde y \widetilde{M} es la superficie obtenida al pegar un disco a lo largo de cada una de estas componentes, entonces $\chi(M) = \chi(\widetilde{M}) - k$.

Al valor g que se relaciona con la característica de Euler de superficies sin borde se le llama *género* de la superficie. En el caso de que una superficie sea orientable, el género indica el número de "asas" o de "agujeros" que tiene la superficie.

2.2. Teorema local de Gauss-Bonnet

Sólo queda enunciar unas últimas definiciones y resultados antes de (por fin) ver el primero de los teoremas que dan nombre a este trabajo. Estos enunciados están más relacionados con el área del cálculo integral vectorial; en concreto, se enunciará una versión del teorema de Green, la cual intervendrá momentáneamente en la demostración del teorema local de Gauss-Bonnet.

En primer lugar, se hace un pequeño inciso sobre términos relacionados con variaciones angulares. Se considera una curva regular a trozos γ cerrada simple, con $\gamma(0) = \gamma(L)$, tal que γ encierra una región R, y un campo vectorial diferenciable Z a lo largo de γ . Si se define un campo vectorial unitario V diferenciable sobre \overline{R} (en realidad se debería definir sobre un abierto que contiene a \overline{R}) se toma el ángulo $\alpha = \triangleleft(V(\gamma(t)), Z(t))$. Este ángulo es diferenciable por serlo los campos que entran en juego en su definición.

Definición 2.40. Se denomina *variación total angular* del campo Z a lo largo de γ con respecto a V a $\delta_V \alpha = \int_0^L (d\alpha/dt) dt$.

⁴Una aplicación $F: M \to N$ entre dos variedades diferenciables M, N se denomina *embedding* si es diferenciable, inyectiva y además la aplicación diferencial $(F_*)_p: T_pM \to T_{F(p)}N$ es inyectiva para todo $p \in M$.

El hecho de que esta variación dependa del campo unitario V elegido es algo que no parece muy deseable. Sin embargo, hay un caso en concreto en el cual esto no ocurre:

Proposición 2.41. Si γ encierra una región R y γ es homotópicamente nula en R, entonces $\delta_{V}\alpha$ no depende de la elección de V. En este caso se escribe $\delta_{V}\alpha = \delta\alpha$.

Demostración. Sean V, W dos campos vectoriales unitarios. Entonces, si se suman ángulos, se tiene $\alpha = \sphericalangle(V, Z) = \sphericalangle(V, W) + \sphericalangle(W, Z) + 2\pi n = \theta + \beta + 2\pi n$ para un $n \in \mathbb{Z}$. Esto implica que $d\alpha/dt = d\theta/dt + d\beta/dt$, por lo que hay que probar que

$$\int_0^L \frac{d\theta}{dt} dt = 0$$

Teniendo en cuenta que $V(\gamma(0)) = V(\gamma(L))$ y $W(\gamma(0)) = W(\gamma(L))$, necesariamente $\delta \theta = 2\pi r$ para un determinado $r \in \mathbb{Z}$.

Como γ es homotópicamente nula, entonces existe una familia de curvas cerradas $\gamma_s(t)$ para $s \in [0, 1]$ tales que $\gamma_0 = \gamma$ y γ_1 es un lazo constante. Cada una de las curvas es regular a trozos (a excepción de γ_1) por serlo γ y por tratarse de una transformación continua, luego la variación angular de θ en cada caso será $\delta \theta_s = \int_{\gamma_s} (d\theta/dt) dt = 2\pi r_s$ es continua en s. Por ser $2\pi r_s$ un conjunto discreto de múltiplos de 2π y ser $\delta \theta_s$ continua, necesariamente debe tomar un valor constante. Por tanto, si se toma el límite $s \to 1$, se comprueba que necesariamente $\delta \theta_s = 0$ para todo $s \in [0, 1]$. Con esto queda probado el resultado.

Se enuncia ahora el teorema de Green en la forma en la que se utilizará en la demostración de la Fórmula de Gauss-Bonnet (para más información, se puede consultar [7]):

Teorema 2.42 (Teorema de Green). Sea $X = X^i \mathbf{f_i}$ un campo vectorial definido en una región R de una superficie simple $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^3$ y ∂R el borde de R, parametrizado antihorariamente. Entonces, se cumple la siguiente igualdad:

$$\int_{\partial R} (X^1 du^1 + X^2 du^2) = \iint_R \left(\frac{dX^2}{du^1} - \frac{dX^1}{du^2}\right) du^1 du^2$$
(2.18)

Con todos los conceptos que se han introducido hasta el momento, se puede enunciar y demostrar la fórmula o teorema local de Gauss-Bonnet.

Teorema 2.43 (Teorema local de Gauss-Bonnet). Sea γ una curva cerrada regular a trozos contenida en un entorno coordenado geodésico $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^3$ simplemente conexo de la superficie M, y que encierra una región R. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ los ángulos que forman los vectores tangentes en los puntos singulares de la curva. Entonces,

$$\iint_{R} K(p) dA + \int_{\gamma} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 2\pi$$
(2.19)

Demostración. En un entorno coordenado geodésico, los coeficientes del tensor métrico son $g_{11} = 1$, $g_{12} = g_{21} = 0$ y $g_{22} = h^2$. Por tanto, $det(g) = h^2$, $g^{11} = 1$, $g^{12} = g^{21} = 0$ y $g^{22} = 1/h^2$. Por la Ec. (2.2) que relaciona los símbolos de Christoffel con los coeficientes g_{ij} , se tiene que

$$\Gamma^{1}_{11} = \Gamma^{2}_{11} = \Gamma^{1}_{12} = \Gamma^{1}_{21} = 0 \qquad \Gamma^{1}_{22} = -\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^{1}} = -hh_{1}$$

$$\Gamma^{2}_{12} = \Gamma^{2}_{21} = \frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^{1}} = \frac{h_{1}}{h} \qquad \Gamma^{2}_{22} = \frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^{2}} = \frac{h_{2}}{h}$$

Para calcular la curvatura de Gauss a partir de estos términos se calculan los coeficientes del tensor de curvatura de Riemann de interés (sólo se calcula R^2_{121}), aplicando la Ec. (2.12):

$$R^{2}_{121} = -\frac{\partial\Gamma^{2}_{12}}{\partial u^{1}} - \Gamma^{2}_{12}\Gamma^{2}_{21} = \frac{(h_{1})^{2} - h_{11}h}{h^{2}} - \frac{h_{1}^{2}}{h^{2}} = \frac{-h_{11}}{h}$$

Por tanto, por la Ec. (2.14) se deduce que la curvatura de Gauss en un entorno coordenado geodésico es $K = -h_{11}/h$.

No hay problema en asumir que la curva γ está parametrizada por el arco (en cada una de las partes en las que es regular) ya que ninguno de los resultados depende de la parametrización. Por tanto, sea $\gamma(s) = \mathbf{f}(\gamma^1(s), \gamma^2(s))$ la curva en $\mathbf{f}(U)$ y $\mathbf{t} = \gamma'$ el vector tangente unitario a γ . Se considera un campo paralelo unitario \mathbf{P} a lo largo de γ empezando desde un punto de unión cualquiera de la curva (\mathbf{P} existe por el Teorema 2.25). Se definen los siguientes ángulos a lo largo de la curva considerada: $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{f}_1, \mathbf{t}), \ \phi = \sphericalangle(\mathbf{f}_1, \mathbf{P}) \ y \ \theta = \sphericalangle(\mathbf{P}, \mathbf{t})$. Entonces, $\alpha = \phi + \theta + 2\pi n \text{ con } n \in \mathbb{Z}$, luego $d\alpha/ds = d\phi/ds + d\theta/ds$.

Como \mathbf{f}_1 y \boldsymbol{P} son unitarios, $\cos \phi = \langle \mathbf{f}_1, \boldsymbol{P} \rangle$. Derivando respecto a la variable *s*, se tiene que $-\phi' \sin \phi = \langle \mathbf{f}'_1, \boldsymbol{P} \rangle + \langle \mathbf{f}_1, \boldsymbol{P}' \rangle$. Como \boldsymbol{P} es un campo vectorial paralelo a lo largo de la curva, su derivada es perpendicular a *M* luego $\langle \mathbf{f}_1, \boldsymbol{P}' \rangle = 0$ y $-\phi' \sin \phi = \langle \mathbf{f}'_1, \boldsymbol{P} \rangle$. Desarrollando $\mathbf{f}'_1 = (\gamma^i)' \mathbf{f}_{1i}$ y aplicando las fórmulas de Gauss-Codazzi dadas en la Ec. (2.1),

$$-\phi'\sin\phi = \langle \mathbf{f}'_1, \mathbf{P} \rangle = \langle (\gamma^i)' \mathbf{f}_{1i}, \mathbf{P} \rangle = (\gamma^i)' \langle L_{1i} \mathbf{N} + \Gamma^k_{\ 1i} \mathbf{f}_k, \mathbf{P} \rangle = (\gamma^i)' \langle \Gamma^k_{\ 1i} \mathbf{f}_k, \mathbf{P} \rangle$$

Utilizando las expresiones obtenidas anteriormente para los símbolos de Christoffel,

$$-\phi'\sin\phi = (\gamma^2)'\frac{h_1}{h}\langle \mathbf{f}_2, \boldsymbol{P}\rangle$$
(2.20)

Por ser $g_{12} = 0$, además se tiene que $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2/\|\mathbf{f}_2\|\}$ es una base ortonormal de T_pM para cualquier punto $p \in \mathbf{f}(U)$, por lo que cualquier $\mathbf{X} \in T_pM$ será $\mathbf{X} = \langle \mathbf{X}, \mathbf{f}_1 \rangle \mathbf{f}_1 + \langle \mathbf{X}, \mathbf{f}_2/\|\mathbf{f}_2\| \rangle \mathbf{f}_2/\|\mathbf{f}_2\|$. En el caso concreto de \mathbf{P} , se escribe

$$oldsymbol{P} = \langle oldsymbol{P}, oldsymbol{\mathrm{f}}_1
angle oldsymbol{\left\langle} oldsymbol{P}, oldsymbol{\mathrm{f}}_2 oldsymbol{\|\mathrm{f}}_2 oldsymbol{\|\mathrm{f}$$

Como $\langle \mathbf{P}, \mathbf{f}_1 \rangle = \cos \phi$ y \mathbf{P} es unitario entonces $\langle \mathbf{P}, \mathbf{f}_2 \rangle / \|\mathbf{f}_2\| = \langle \mathbf{P}, \mathbf{f}_2 \rangle / h = \sin \phi$. Utilizando esta igualdad en la Ec. (2.20), se tiene que $\phi' = -h_1(\gamma^2)'$. Como el entorno coordenado geodésico es simplemente conexo, se tiene que la variación total angular $\delta \phi$ es

$$\delta\phi = \int_{\gamma} \phi' ds = -\int_{\gamma} h_1(\gamma^2)' ds = -\int_{\gamma} h_1 d\gamma^2 = -\int_{\gamma} h_1 du^2 \tag{2.21}$$

Análogamente al proceso seguido para ϕ , se puede ver que $\cos \theta = \langle t, P \rangle$ luego

$$- heta'\sin heta=\langle t',oldsymbol{P}
angle+\langle t,oldsymbol{P}'
angle=\langle t',oldsymbol{P}
angle$$

por ser P paralelo a lo largo de γ . Utilizando la Ec. (2.4) para trabajar con la curvatura geodésica,

$$\kappa_g = \langle oldsymbol{N} imes oldsymbol{t}, oldsymbol{t} imes oldsymbol{t}'
angle = rac{\langle oldsymbol{P} imes oldsymbol{t}, oldsymbol{t} imes oldsymbol{t}' imes oldsymbol{t}'
angle = rac{\langle oldsymbol{P}, oldsymbol{t} imes oldsymbol{t}
angle = rac{\langle oldsymbol{P}, oldsymbol{t} imes oldsymbol{t}
angle = rac{\langle oldsymbol{P}, oldsymbol{t} imes oldsymbol{T}
angle = rac{\langle oldsymbol{P}, oldsymbol{t} imes oldsymbol{N}
angle = oldsymbol{T}
angle = rac{\langle oldsymbol{T}, oldsymbol{T} imes oldsymbol{P}, oldsymbol{T}
angle = oldsymbol{T}
angle = rac{\langle oldsymbol{P}, oldsymbol{T}
angle = oldsymbol{T}
angle
angle = oldsymbol{T}
angle
angle = rac{\langle oldsymbol{P}, oldsymbol{T}
angle = oldsymbol{T}
angle
angle
angle
angle
angle
angle
angle
angle = oldsymbol{T}
angle
angle$$

Por tanto, integrando a lo largo de la curva,

$$\delta\theta = \int_{\gamma} \theta' ds = \int_{\gamma} \kappa_g ds \tag{2.22}$$

Como $\alpha' = \phi' + \theta'$, entonces $\int_{\gamma} \alpha' ds = \int_{\gamma} \phi' ds + \int_{\gamma} \theta' ds$. Teniendo en cuenta los puntos de singularidad de la curva γ y los ángulos α_i que forma el vector tangente en estos puntos, por las Ecs. (2.21) y (2.22),

$$\int_{\gamma} \alpha' ds + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = -\int_{\gamma} h_1 du^2 + \int_{\gamma} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$
(2.23)

El término de la izquierda de la igualdad corresponde con la variación angular del vector tangente ta lo largo de la curva γ teniendo en cuenta los saltos en los ángulos α_i para i = 1, 2, ..., n. Como γ está encerrando la región R, se tiene que $\int_{\gamma} \alpha' ds + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 2\pi$.

Finalmente, aplicando la Ec. (2.18) del teorema de Green, las expresiones obtenidas para la curvatura de Gauss y la Ec. (2.11) para expresar dA,

$$-\int_{\gamma} h_1 du^2 = -\iint_R h_{11} du^1 du^2 = \iint_R \frac{-h_{11}}{h} h du^1 du^2 = \iint_R K(p) dA$$

Con todo esto, la Ec. (2.23) se transforma en $2\pi = \iint_R K(p) dA + \int_{\gamma} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^n \alpha_i$, con lo que queda demostrado el teorema.

2.3. Teorema global de Gauss-Bonnet

El único teorema visto hasta ahora con el mismo sobrenombre que el título del trabajo tiene una índole local. Este resultado es muy útil a la hora de encontrar otro enunciado sorprendente, de carácter global, que une la característica de Euler, introducida en la Definición 2.35, con la curvatura de Gauss, introducida en la Definición 2.14.

Teorema 2.44 (Teorema de Gauss-Bonnet). Sea M una superficie compacta sin borde con característica de Euler $\chi(M)$ y curvatura de Gauss K. Entonces,

$$\iint_{M} K(p) dA = 2\pi \chi(M) \tag{2.24}$$

Demostración. Se considera una triangulación de la superficie $\{T_1, \ldots, T_n\}$ tal que todas las aristas son geodésicas y cada uno de los triángulos se pueda introducir dentro de un entorno coordenado geodésico simplemente conexo. En cada uno de estos triángulos se podrá aplicar el teorema local de Gauss-Bonnet. Llamando α_{i1} , α_{i2} , α_{i3} a cada uno de los ángulos formados por las tangentes en los vértices de cada triángulo y β_{i1} , β_{i2} , β_{i3} a los ángulos interiores, como sólo se cambia una tangente de signo entonces $\alpha_{ij} = \pi - \beta_{ij}$ para j = 1, 2, 3. Además, como las curvas que forman las aristas son geodésicas, el término de la izquierda de la Ec. (2.24) se puede desarrollar como sigue:

$$\iint_{M} K(p) dA = \sum_{i=1}^{n} \iint_{T_{i}} K(p) dA = \sum_{i=1}^{n} \left(2\pi - \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(2\pi - \sum_{j=1}^{3} (\pi - \beta_{ij}) \right)$$
$$= 2\pi n - 3\pi n + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{3} \beta_{ij}$$

Se analiza cada uno de los sumandos. En primer lugar, n es el número total de triángulos que componen la triangulación, luego coincide con el número de caras: n = f. En cuanto a las aristas, cada una de ellas pertenece a dos triángulos. Por tanto, el número total de aristas será e = 3n/2 y $3\pi n = 2\pi e$. Finalmente, en cada uno de los vértices los ángulos interiores que participan suman 2π , luego $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{3} \beta_{ij} = 2\pi v$. Con esto, por la Ec. (2.17),

$$\iint_{M} K(p) dA = 2\pi n - 3\pi n + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{3} \beta_{ij} = 2\pi (f - e + v) = 2\pi \chi(M)$$

con lo que se da por completada la demostración.

Hay un aspecto básico que se ha asumido en esta demostración, y es el hecho de que se puede encontrar una triangulación en la que cada triángulo cumpla los requisitos que pide el teorema local de Gauss-Bonnet. Esto se puede hacer sin más que partir de una triangulación cualquiera e ir dividiendo cada triángulo en otros de menor tamaño. Los entornos coordenados geodésicos simplemente conexos se pueden generar utilizando las propias aristas de los triángulos y aplicando el Teorema 2.28.

También se ha asumido que las aristas de los triángulos son geodésicas, pero en realidad esto no es totalmente necesario. Aplicando el teorema local de Gauss-Bonnet a cada uno de los triángulos T_i , la contribución $\int_{\gamma} \kappa_g ds$ de cada arista se anulará al hacer la suma para toda la triangulación. Esto se debe a que cada una de las aristas se recorre en ambos sentidos, uno por cada uno de los triángulos a los que pertenece la arista. Por tanto, la suma de estas integrales resultará ser cero.

A la integral $\iint_M K(p) dA$ se le denomina *curvatura íntegra* de la superficie M. Con el resultado que se acaba de probar y con ayuda del teorema de clasificación de superficies compactas se puede comprobar de que, a pesar de que a priori podría parecer que los valores que toma $\iint_M K(p) dA$ podrían tratarse de cualquier número real, en realidad sólo puede tomar un conjunto numerable de valores, en concreto un subconjunto de múltiplos enteros de 2π .

Este teorema se puede enunciar también para superficies con borde. Para ello, habrá que modificar ligeramente la demostración previa y tener en cuenta que al realizar la triangulación de la superficie el borde de la superficie se dividirá en varias aristas de los triangulos.

Teorema 2.45 (Teorema de Gauss-Bonnet para superficies con borde). Sea M una superficie compacta orientable con borde ∂M , característica de Euler $\chi(M)$ y curvatura de Gauss K. Entonces,

$$\iint_{M} K(p) dA + \int_{\partial M} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 2\pi \chi(M)$$
(2.25)

donde cada una de las componentes conexas del borde ∂M se recorre siguiendo una curva regular a pedazos parametrizada antihorariamente, y α_i son los ángulos que forman los vectores tangentes en los puntos singulares de la curva.

Demostración. Se considera en primer lugar una triangulación $\{T_1, \ldots, T_m\}$ de la superficie M, de tal manera que todas las aristas de los triángulos (a excepción, claro, de las partes que forman parte del borde de la superficie) sean geodésicas y se pueda introducir cada T_i en un entorno coordenado geodésico simplemente conexo. Además, se elige esta triangulación de forma que cada uno de los puntos singulares del borde de la superficie correspondan a vértices de algún triángulo. Para cada uno de estos triángulos se aplicará el teorema local de Gauss-Bonnet. Si se llama $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}$ a los ángulos que forman los vectores tangentes en cada uno de los vértices del triángulo T_i $(i = 1, \ldots, m)$ al recorrerlo como una curva cerrada, y $\beta_{i1}, \beta_{i2}, \beta_{i3}$ a los ángulos interiores al triángulo, $\alpha_{ij} = \pi - \beta_{ij}$ con j = 1, 2, 3. Desarrollando el término de la izquierda de la Ec. (2.25),

$$\iint_{M} K(p) dA = \sum_{i=1}^{m} \iint_{T_{i}} K(p) dA = \sum_{i=1}^{m} \left(2\pi - \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} \right) - \int_{\partial M} \kappa_{g} ds$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \left(2\pi - \sum_{j=1}^{3} (\pi - \beta_{ij}) \right) - \int_{\partial M} \kappa_{g} ds = 2\pi m - 3\pi m + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{3} \beta_{ij} - \int_{\partial M} \kappa_{g} ds$$

Como m es igual al número de caras, $2\pi m = 2\pi f$. Por otra parte, si se llama a al número de aristas que forman parte del borde de la superficie, como las aristas que pertenecen al interior de la superficie pertenecen a dos triángulos y las aristas del borde únicamente a uno entonces el total de aristas será e = (3m - a)/2 + a = (3m + a)/2 y $3\pi m = 2\pi e - \pi a$.

Finalmente, el número de vértices que pertenecen al borde de la superficie es igual al de aristas. Si se llama v_0 al número de vértices que hay en el interior de la superficie, entonces $v = v_0 + a$.



FIGURA 2.6: Representación del razonamiento seguido en la demostración para el tratamiento de los ángulos interiores de los vértices del borde

Para los vértices del interior de la superficie la suma de los ángulos correspondientes a éstos suman 2π . En el caso de los correspondientes al borde, la suma de estos ángulos estará relacionada con el ángulo que forman las tangentes en dicho punto: será justamente π menos este ángulo. Si el vértice no corresponde a un punto singular, las tangentes serán iguales luego el ángulo será cero. En el caso de los puntos singulares, el ángulo será precisamente uno de los α_k con $k = 1, \ldots, n$ mencionados en el enunciado. Todo esto se puede apreciar con más detalle en la Figura 2.6, en la que se muestra un caso de una superficie con un borde que tiene un punto singular. Entonces,

$$\iint_{M} K(p) dA + \int_{\gamma} \kappa_{g} ds = 2\pi m - 3\pi m + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{3} \beta_{ij} = 2\pi f - 2\pi e + \pi a + 2\pi v_{0} + \pi a - \sum_{k=0}^{n} \alpha_{k}$$
$$= 2\pi (f - e + v) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_{k} = 2\pi \chi(M) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_{k}$$

De esta manera, se llega a la identidad presentada en la Ec. (2.25).

Hasta ahora, únicamente se ha analizado el caso correspondiente a superficies orientables ya que, por el Teorema 2.37, en \mathbb{R}^3 todas las superficies compactas (sin borde) son orientables, luego el teorema global de Gauss-Bonnet sólo se aplica a este tipo de estructuras. Sin embargo, ¿qué ocurre con las superficies no orientables con borde? ¿El teorema de Gauss-Bonnet es válido en este caso? En las Secciones 0 y 1 del artículo [12] de Palais se da una respuesta afirma a esta pregunta. Para ello, hace notar que la integral de la curvatura de Gauss en realidad se hace con respecto a una medida, por lo que la orientabilidad no influye en el resultado.

Ese mismo artículo también muestra una generalización para variedades compactas de dimensión par, tanto orientables como no orientables. Para obtener resultados para variedades con borde, utiliza técnicas de pegado de variedades por su borde mediante "embeddings", eliminar partes de subvariedades, etc. Para ello, se necesita que la dimensión de las variedades implicadas sea la misma. Todas estas técnicas sofisticadas se pueden aplicar para superficies regulares con borde. Para las superficies orientables, se podrán pegar discos a cada componente conexa del borde para obtener una superficie inmersa en \mathbb{R}^3 compacta. En el caso de las superficies no orientables se puede llevar a cabo el mismo procedimiento, pero la superficie resultante no admitiría una inmersión isométrica en \mathbb{R}^3 . También se pueden separar discos de superficies inmersas en \mathbb{R}^3 , aumentando así en uno el número de componentes conexas del borde.

Por último, cabe destacar el punto 1.6 del artículo, en el cual se enuncia un teorema que, aplicado a superficies regulares compactas, tiene como resultado el Teorema 2.39. El teorema del artículo se puede considerar una generalización para el cálculo de la característica de Euler de variedades de mayor dimensión cuando se pegan o despegan por sus bordes.

Capítulo 3

Aproximación de Poincaré-Hopf

En el capítulo anterior se ha utilizado un concepto topológico fundamental para presentar el teorema de Gauss-Bonnet: la característica de Euler. En este capítulo se presenta una forma alternativa de enunciar este teorema. Para ello, se emplea el concepto de índice de un campo vectorial tangente a una superficie. El teorema de Poincaré-Hopf relaciona el índice de un campo vectorial con la característica de Euler de la superficie sobre la cual está definido. Nuevamente, se están relacionando conceptos de naturaleza distinta, lo cual está en sintonía con la filosofía de este trabajo: tomar conceptos de áreas que parecen estar alejadas entre sí y encontrar las importantes relaciones que los unen.

Para el desarrollo de la mayoría de conceptos de este capítulo se ha utilizado [10] como principal referencia bibliográfica.

3.1. Entornos tubulares

En este capítulo adquirirán especial relevancia las aplicaciones diferenciables entre superficies compactas. Pero antes de hablar de éstas y de sus grados, se va a introducir en esta sección un concepto teórico muy similar a los entornos coordenados geodésicos, estudiados en el Capítulo 2. Este tema está relacionado con un tipo de entorno de una superficie orientable. Estas construcciones aparecerán varias veces en las demostraciones de los teoremas que se introducirán en este capítulo debido a su utilidad a la hora de probar propiedades globales de las superficies.

Sea M una superficie. Por estar trabajando inmersos en \mathbb{R}^3 como espacio métrico, se pueden definir fácilmente entornos de M: eligiendo un r > 0 cualquiera, se define $B_r(M)$ como

$$B_r(M) = \{ p \in \mathbb{R}^3 \colon \operatorname{dist}(p, M) < r \}$$

donde la distancia entre p y M es dist $(p, M) = \inf_{q \in M} ||p - q||$. Claramente $B_r(M)$ es un entorno abierto de M. Este conjunto también se puede definir utilizando segmentos normales a M bajo la hipótesis de que M sea una superficie cerrada. Para ello, se definen los segmentos abiertos normales a M en $p \in M$ y de radio r > 0:

$$N_r(p) = \{p + t\mathbf{N}(p) \colon t \in (-r, r)\}$$

Para definir este conjunto, se ha elegido un vector unitario N normal a la superficie. Por cómo se ha definido $N_r(p)$, la orientación del vector no es relevante, por lo que no es necesario que M sea orientable. Los dos subconjuntos definidos se pueden relacionar entre sí.

Lema 3.1. Sea M una superficie cerrada. Entonces, el entorno abierto $B_r(M)$ con r > 0 coincide con la unión de todos los segmentos abiertos normales a M en cada uno de los puntos de la superficie y de radio r, esto es, $B_r(M) = N_r(M) = \bigcup_{p \in M} N_r(p)$.

Demostración. Si $q \in N_r(M)$, entonces $q \in N_r(p)$ para un determinado $p \in M$. Claramente $dist(q, M) \leq ||p - q|| < r \text{ luego } q \in B_r(M)$. Por otra parte, si $q \in B_r(M)$ se considera la función

distancia a $q, h_q: M \to \mathbb{R}$, definida como $h_q(p) = ||p - q||$. Como h_q es una función coerciva (es decir, $|h_q(p)| \to \infty$ cuando $||p|| \to \infty$) definida sobre un conjunto cerrado, hay un $p_0 \in M$ en el que h_q alcanza el mínimo. Además, si se calcula la aplicación diferencial de h_q en cualquier punto¹ se obtiene $(h_{q*})_p(\mathbf{X}) = \langle \mathbf{X}, p - q \rangle / ||p - q||$. En el mínimo de h_q esta diferencial se debe anular para todo $\mathbf{X} \in T_{p_0}M$, luego $p_0 - q$ es perpendicular a $T_{p_0}M$. Como $q \in B_r(M)$, $||p_0 - q|| < r$ con lo que se tiene que $q \in N_r(p_0)$, concluyendo así la demostración.

Si se consigue que todos los segmentos normales a la superficie no se intersequen entre sí, entonces este entorno se podrá visualizar como un producto de la superficie por un intervalo abierto de \mathbb{R} . Intuitivamente, se puede suponer que esto se conseguirá eligiendo un r > 0 lo suficientemente pequeño. Si M es orientable, para visualizar $N_r(M)$ como este producto se define la aplicación $F: M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(p,t) = p + t\boldsymbol{\nu}(p) \tag{3.1}$$

donde $\nu \colon M \to \mathbb{S}^2$ es una aplicación de Gauss de M. Esta aplicación es diferenciable y su imagen es $F(M \times (-r, r)) = N_r(M)$ para todo r > 0. A partir de esta aplicación se da la definición de entorno tubular.

Definición 3.2. Sea M una superficie orientable. La unión de todos los segmentos abiertos normales a M en cada $p \in M$ y de radio r > 0, $N_r(M)$, se llama *entorno tubular* de M de radio r si es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^3 y la aplicación F definida en la Ec. (3.1) es un difeomorfismo.

Se quiere probar la existencia de estos entornos bajo ciertas condiciones. Primero se analiza de forma local, y más adelante de manera global.

Proposición 3.3. Para cada punto p de una superficie M cualquiera, existe un entorno abierto orientable V y un r > 0 tal que $N_r(V)$ es un entorno tubular de V.

Demostración. Se puede tomar una superficie simple $\mathbf{f}(U) \subset M$ que contenga al punto p como entorno de trabajo. En esta superficie simple se elige una aplicación de Gauss $\boldsymbol{\nu}$. Se calcula en primer lugar la aplicación diferencial de F en $\mathbf{f}(U) \times \mathbb{R}$. Tal y como está definida en la Ec. (3.1) y utilizando la notación de la Definición 2.9, si $\boldsymbol{\alpha} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbf{f}(U)$ es una curva en $\mathbf{f}(U)$ con $\boldsymbol{\alpha}(0) = p$ y $\boldsymbol{\alpha}'(0) = \boldsymbol{X}$,

$$(F_*)_{(p,s)}(\boldsymbol{X},a) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(\boldsymbol{\alpha}(t), s+ta) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(\boldsymbol{\alpha}(t) + t\boldsymbol{\nu}\left(\boldsymbol{\alpha}(t)\right) \right) = \boldsymbol{X} + a\boldsymbol{\nu}(p)$$

Eligiendo s = 0, $(F_*)_{(p,0)}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X}$ y $(F_*)_{(p,0)}(0, 1) = \boldsymbol{\nu}(p)$ luego $(F_*)_{(p,0)}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, con dominio $T_pM \times \mathbb{R}$. Si se aplica el teorema de la función inversa, se puede encontrar un entorno abierto $V \subset \mathbf{f}(U)$ de p y un r > 0 tal que la restricción de F a $V \times (-r, r)$ es un difeomorfismo con imagen $F(V \times (-r, r)) = N_r(V)$, con lo que la proposición es cierta. \Box

A partir de esta proposición se hará una demostración para cualquier subconjunto relativamente compacto (es decir, con clausura compacta) de una superficie cualquiera. Para ello, se utilizarán los recubrimientos correspondientes a la clausura del subconjunto de interés. Se expresa así el siguiente teorema de existencia:

Teorema 3.4. Sea M una superficie orientable, con aplicación de Gauss $\nu : M \to \mathbb{S}^2$, $y \ R \subset M$ un subconjunto relativamente compacto de M. Existe un r > 0 de forma que $N_r(R)$ es un entorno tubular de R, es decir, $N_r(R)$ es abierto en \mathbb{R}^3 y la aplicación $F : R \times (-r, r) \to N_r(R)$, definida para cada $(p, t) \in R \times (-r, r)$ como $F(p, t) = p + t\nu(p)$, es un difeomorfismo. En particular, si Mes una superficie compacta existe un r > 0 tal que $N_r(M)$ es un entorno tubular de M.

Demostración. Como \overline{R} es compacto, se puede recubrir mediante un número finito de subconjuntos abiertos. Además, por la Proposición 3.3, se pueden elegir estos subconjuntos abiertos de forma que cada uno de ellos tenga asociado un entorno tubular. Eligiendo $\epsilon > 0$ el menor radio de todos estos

¹En la Sección 3.5 de este capítulo se analiza en profundidad esta función.

entornos tubulares, se toma la aplicación $F \colon R \times (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3$ definida como en la Ec. (3.1). Se quiere elegir un $r \in (0, \epsilon)$ que haga que la restricción de F a $R \times (-r, r)$ sea inyectiva.

Si se supone que no existe un r > 0 como el que se busca, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se podrían encontrar unos $p_n, q_n \in R$ con $p_n \neq q_n$ y $N_{1/n}(p_n) \cap N_{1/n}(q_n) \neq \emptyset$. Por ser \overline{R} un subconjunto compacto, se pueden encontrar subsucesiones de $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergentes en \overline{R} . Digamos que estas subsucesiones son $(p_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ y $(q_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, y que existen $p, q \in \overline{R}$ tales que

$$\lim_{k\to\infty}p_{n_k}=p\qquad\qquad \lim_{k\to\infty}q_{n_k}=q$$

También se puede elegir un $r_k \in N_{1/n_k}(p_{n_k}) \cap N_{1/n_k}(q_{n_k})$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\|p_{n_k} - q_{n_k}\| \le \|p_{n_k} - r_k\| + \|r_k - q_{n_k}\| < \frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_k} = \frac{2}{n_k} \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

luego los dos límites coinciden: p = q. Por la Proposición 3.3 se puede encontrar un entorno $V \subset \overline{R}$ de p = q y un $\delta > 0$ tal que $N_{\delta}(V)$ es un entorno tubular de V. Sin embargo, también se podrá encontrar un $k_0 \in \mathbb{N}$ a partir del cual, para $k \ge k_0$, $p_{n_k}, q_{n_k} \in V$ y $1/n_k < \delta$. Por tanto,

$$N_{1/n_k}(p_{n_k}) \cap N_{1/n_k}(q_{n_k}) \subset N_{\delta}(p_{n_k}) \cap N_{\delta}(q_{n_k}) = \emptyset$$

por ser $N_{\delta}(V)$ un entorno tubular, lo cual supone una clara contradicción. Por tanto, se concluye que existe un r > 0 tal que $F : R \times (-r, r) \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva y un difeomorfismo local. Como su imagen es precisamente $N_r(R)$, es un difeomorfismo sobre su imagen y el enunciado es cierto.



FIGURA 3.1: Entorno tubular de una superficie. Los límites del entorno tubular aparecen con color amarillento.

En la Figura 3.1 se han representado los límites de un entorno tubular para una superficie determinada. Toda la región comprendida entre las dos superficies amarillentas formaría un entorno tubular de la superficie. Esta figura deja entrever que, si se tiene un entorno tubular $N_r(M)$ de M y se fija un $t \in (-r, r)$, el conjunto $F_t(M) = F(M, t)$ para la aplicación F definida anteriormente debería ser una superficie. Como la aplicación F definida en la Ec. (3.1) es un difeomorfismo, entonces para cualquier $t \in (-r, r)$ fijo, la aplicación $F_t: M \to N_r(M)$, definida como

$$F_t(p) = F(p,t) = p + t\boldsymbol{\nu}(p)$$

es un homeomorfismo sobre su imagen. Por otra parte, si se fija un $p \in M$ y se elige la base formada por las direcciones principales $\{X_{(1)}, X_{(2)}\} \subset T_pM$, entonces

$$(F_{t*})_p(\mathbf{X}_{(i)}) = \mathbf{X}_{(i)} + t(\mathbf{\nu}_*)_p(\mathbf{X}_{(i)}) = (1 - t\kappa_i)\mathbf{X}_{(i)}$$

donde κ_1, κ_2 son las curvaturas principales, luego (F_{t*}) es inyectiva. Sin mucha dificultad, utilizando parametrizaciones en la superficie M y componiéndolas mediante F_t se puede comprobar que, bajo estas condiciones, $F_t(M)$ es una superficie. Esta superficie se denotará M_t para cada $t \in (-r, r)$ y se denominará superficie paralela a M a distancia t.

3.2. Grado de una aplicación entre superficies compactas

El índice de un campo vectorial es un caso particular de lo que se conoce como el grado de una aplicación entre superficies. Por lo tanto, se dan las definiciones necesarias para poder hablar de este concepto.

Definición 3.5. Sean $M \neq M'$ dos superficies compactas orientables, con aplicaciones de Gauss $\nu: M \to \mathbb{S}^2 \neq \nu': M' \to \mathbb{S}^2$ respectivamente. Si se tiene una aplicación diferenciable $\phi: M \to M'$ entre estas dos superficies, se define el *jacobiano* de ϕ como la función Jac $\phi: M \to \mathbb{R}$, definida para cada $p \in M$ como

$$(\operatorname{Jac}\phi)(p) = \det((\phi_*)_p(e_1), (\phi_*)_p(e_2), \nu'(\phi(p)))$$
(3.2)

siendo $\{e_1, e_2\}$ una base ortonormal orientada positiva (con respecto a ν) de $T_p M$.

El jacobiano de una aplicación diferenciable tiene un papel muy importante en la fórmula de cambio de variable. Como se utilizarán cambios de variable con frecuencia a lo largo del trabajo, se enuncia aquí el resultado en forma de teorema sin demostración.

Teorema 3.6 (Fórmula de cambio de variable). Sea $\phi: M \to M'$ un difeomorfismo entre dos superficies M, M'. Entonces, para cada función continua $f: M' \to \mathbb{R}$ se cumple la siguiente igualdad:

$$\iint_{M'} f(q) dA' = \iint_{M} (f \circ \phi)(p) |(\operatorname{Jac} \phi)(p)| dA$$
(3.3)

Si Jac ϕ es positivo se puede omitir el valor absoluto. Si ϕ es sólo un difeomorfismo local suprayectivo y Jac $\phi > 0$, entonces

$$\iint_{M'} f(q) dA' \le \iint_{M} (f \circ \phi)(p) (\operatorname{Jac} \phi)(p) dA$$
(3.4)

Definición 3.7. En las condiciones de la Definición 3.5, se define el *grado* de la aplicación ϕ como el número

$$\deg \phi = \frac{1}{A(M')} \iint_{M} (\operatorname{Jac} \phi)(p) dA$$
(3.5)

siendo A(M') el área de la superficie M'.

Para calcular A(M') se utiliza la Ec. (2.11) del Capítulo 2. En algunos casos en los que la aplicación ϕ cumple unas características determinadas estas definiciones cobran especial interés. Si ϕ es un difeomorfismo entre M y M' es inmediato ver que, dependiendo de si ϕ conserva o invierte la orientación, Jac ϕ tomará sólo valores positivos o sólo negativos respectivamente. Entonces, aplicando la fórmula del cambio de variable (Ec. (3.3)) a la Ec. (3.5),

$$\deg \phi = \begin{cases} +1 & \text{si } \phi \text{ mantiene la orientación} \\ -1 & \text{si } \phi \text{ invierte la orientación} \end{cases}$$

Otro caso importante es en el que ϕ es la propia aplicación de Gauss $\nu \colon M \to \mathbb{S}^2$ sobre una superficie compacta M. Lo más lógico es utilizar la orientación dada por la propia ν . Por tanto, fijando esta orientación y eligiendo para cada $p \in M$ la base ortonormal orientada positiva $\{X_{(1)}, X_{(2)}\}$ definida por las direcciones principales, por la Ec. (3.2) y por cómo se define la aplicación de Weingarten,

$$(\operatorname{Jac}\boldsymbol{\nu})(p) = \det((\boldsymbol{\nu}_*)_p(\boldsymbol{X}_{(1)}), (\boldsymbol{\nu}_*)_p(\boldsymbol{X}_{(2)}), \boldsymbol{\nu}(p)) = \kappa_1(p)\kappa_2(p)\det(\boldsymbol{X}_{(1)}, \boldsymbol{X}_{(2)}, \boldsymbol{\nu}(p)) = K(p)$$

obteniendo la curvatura de Gauss K como el producto de las curvaturas principales $\kappa_1 \kappa_2$. Por lo tanto, el grado de la aplicación de Gauss es

$$\deg \boldsymbol{\nu} = \frac{1}{4\pi} \iint_M K(p) dA$$

También es interesante ver el caso en el que se elige un campo vectorial diferenciable (no necesariamente tangente) $\mathbf{X} \colon M \to \mathbb{R}^3$ sobre M que no se anula en ningún punto. Si se divide cada vector por su norma se obtendrá un campo vectorial unitario, lo cual se puede visualizar como una aplicación diferenciable entre las superficies $M \neq \mathbb{S}^2$. Se calcula la diferencial de la aplicación $\mathbf{X}/\|\mathbf{X}\| \colon M \to \mathbb{S}^2$. Para ello se aplica la Definición 2.9: se toma una curva $\boldsymbol{\alpha} \colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$ con $\boldsymbol{\alpha}(0) = p \neq \boldsymbol{\alpha}'(0) = \boldsymbol{v} \in T_p M$. Aplicando la definición y la regla de la cadena,

$$\left(\frac{\boldsymbol{X}}{\|\boldsymbol{X}\|}_{*}\right)_{p}(\boldsymbol{v}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \frac{\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha}(t))}{\|\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha}(t))\|} = \frac{1}{\|\boldsymbol{X}(p)\|}(\boldsymbol{X}_{*})_{p}(\boldsymbol{v}) + C_{p}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{X}(p)$$

siendo $C_p(v)$ un número que depende de p y v. Por tanto, por la definición de jacobiano, si se elige una base ortonormal orientada positiva $\{e_1, e_2\}$,

$$(\operatorname{Jac} \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|})(p) = \frac{1}{\|\mathbf{X}(p)\|^3} \operatorname{det}((\mathbf{X}_*)_p(\mathbf{e}_1), (\mathbf{X}_*)_p(\mathbf{e}_2), \mathbf{X}(p))$$

En consecuencia, el grado del campo vectorial normalizado será igual a la integral de este jacobiano dividido por 4π (el área de \mathbb{S}^2).

En un primer vistazo, es complicado encontrar el significado geométrico que se le puede dar al concepto de grado de una aplicación entre superficies. Para encontrar esta representación, se da una nueva definición relacionada con un subconjunto de puntos de interés que dependen de la aplicación.

Definición 3.8. Sea $\phi: M \to M'$ una aplicación diferenciable entre dos superficies compactas orientables M y M'. Se dice que $q \in M'$ es un *valor regular* de ϕ si para cada $p \in \phi^{-1}(\{q\}), (\phi_*)_p$ es un isomorfismo entre T_pM y T_qM' o, equivalentemente, $(\operatorname{Jac} \phi)(p) \neq 0$.

La equivalencia dada al final de la definición puede no resultar evidente. En primer lugar, si $(\phi_*)_p$ es un isomorfismo entre T_pM y T_qM' y $\{e_1, e_2\}$ una base de T_pM , entonces su imagen por $(\phi_*)_p$ forma una familia linealmente independiente luego $|\operatorname{Jac} \phi(p)| = ||(\phi_*)_p(e_1) \times (\phi_*)_p(e_2)|| \neq 0$. Por otra parte, si $|\operatorname{Jac} \phi| \neq 0$, las imágenes de la base ortonormal elegida son linealmente independientes y ninguna de ellas es nula, por lo que $(\phi_*)_p$ es un isomorfismo.

Con esta definición y con el teorema de la función inversa se tiene que el número de preimágenes de un valor regular de una aplicación diferenciable es finito por ser M y M' compactas. Por tanto, se define el siguiente concepto local:

Definición 3.9. En las condiciones anteriores, se define el *grado local* de la aplicación ϕ en un valor regular q y se denota como deg (ϕ, q) al número entero

$$\deg(\phi, q) = \sum_{p \in \phi^{-1}(\{q\})} \begin{cases} +1 & \text{si } (\operatorname{Jac} \phi)(p) > 0\\ -1 & \text{si } (\operatorname{Jac} \phi)(p) < 0 \end{cases}$$
(3.6)

A partir de esta definición se puede crear una aplicación cuyo dominio sea el conjunto de valores regulares de ϕ y cuya imagen esté contenida en \mathbb{Z} . La relación entre esta aplicación y el grado de ϕ se recoge en la siguiente proposición:

Proposición 3.10. Sea $\phi: M \to M'$ una aplicación diferenciable entre dos superficies compactas orientables M y M', y sea $R \subset M'$ el conjunto de valores regulares de ϕ . Entonces, la aplicación

 $\deg(\phi, \cdot) \colon R \to \mathbb{Z}$, definida en la Ec. (3.6), es constante en cada una de las componentes conexas de R. Además, es integrable en M' y

$$\deg \phi = \frac{1}{A(M')} \iint_{M'} \deg(\phi, q) dA'$$
(3.7)

Demostración. Para demostrar que $\deg(\phi, \cdot)$ es integrable en M' y la veracidad de la Ec. (3.7) habría que introducir varios temas sobre integrabilidad en superficies que, en este caso concreto, no tienen un gran interés más allá de esta demostración. Para ver una explicación exahustiva sobre estos temas se recomienda leer el Capítulo 5 de [10].

Por tanto, se demostrará únicamente que en cada componente conexa de R la aplicación $\deg(\phi, \cdot)$ es constante. R es un conjunto abierto, por lo que basta con probar que $\deg(\phi, \cdot)$ es localmente constante. Se toma $q \in R$ y el conjunto de antiimagenes $\phi^{-1}(\{q\}) = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Como $(\operatorname{Jac} \phi)(p_i) \neq 0$ para cada $i = 1, \ldots, n$, entonces cada $(\phi_*)_{p_i} : T_{p_i}M \to T_qM'$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Aplicando el teorema de la función inversa, se pueden encontrar abiertos U_1, \ldots, U_n en My V_1, \ldots, V_n en M' que cumplen que $\phi|_{U_i}$ es un difeomorfismo entre U_i y V_i . Además, por ser MHaussdorf, se pueden elegir los conjuntos U_i disjuntos dos a dos.

Como $q \in V_i$ para todo i = 1, ..., n y cada V_i es abierto, se puede encontrar un abierto V conexo tal que $q \in V \subset V_1 \cap ... \cap V_n$, luego $\phi^{-1}(V) \subset U_1 \cup ... \cup U_n$. Llamando $W_i = U_i \cap \phi^{-1}(V)$, se llega a que cada valor regular $q \in R$ tiene un entorno abierto conexo $V \subset M'$ de tal manera que $\phi^{-1}(V) = W_1 \cup ... \cup W_n$, donde los conjuntos $W_i \subset M$ son disjuntos dos a dos, abiertos y conexos, y además $\phi|_{W_i}$ es un difeomorfismo de W_i a V. Por tanto, cada elemento de V tiene exactamente n antiimagenes por ϕ , y para cada uno de los W_i se mantiene o se invierte la orientación de igual forma en todos sus puntos porque el jacobiano no cambia de signo en cada conjunto, por lo que deg (ϕ, \cdot) es constante en V. Con ello queda probado que deg (ϕ, \cdot) es localmente constante, lo que implica que es constante en cada una de sus componentes conexas.

Esta proposición que se acaba de probar muestra una forma de visualizar el significado de la aplicación deg ϕ . Por la Ec. (3.7), se ve que esta aplicación es una especie de promedio del número de antiimagenes de cada punto de M' por ϕ , contándose con signo positivo o negativo según si se conserva o se invierte la orientación de la superficie por ϕ .

A continuación se hablará de una importante propiedad relativa a los grados de varias aplicaciones diferenciables definidas sobre diferentes superficies. Pero para ello se necesita nombrar antes varios conceptos útiles:

Definición 3.11. Se dice que un subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un *dominio regular* si Ω es abierto, acotado y conexo, y su frontera $\partial\Omega$ es una superficie compacta (no necesariamente conexa). En esta situación también se dice que Ω es el *dominio interior* de $\partial\Omega$.

Definición 3.12. Sea Ω un dominio regular con frontera $\partial \Omega = M$. Se dice que una orientación de Mdada por la aplicación de Gauss $\boldsymbol{\nu} \colon M \to \mathbb{S}^2$ es una *orientación interior* para M si para todo $p \in M$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la semirrecta $s \colon [0, \epsilon) \to \mathbb{R}^3$ definida como $s(t) = p + t\boldsymbol{\nu}(p)$ está contenida en Ω . Por el contrario, si la semirrecta está contenida en $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ se dice que la orientación elegida es una *orientación exterior* para M.

También se debe hablar mínimamente de la divergencia de un campo vectorial para poder entender la demostración del resultado de interés.

Definición 3.13. Sea $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial diferenciable definido en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Se define la *divergencia* del campo como la función div $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $(\operatorname{div} \mathbf{X})(p) = \operatorname{Tr}(\mathbf{X}_*)_p$ para cada $p \in \Omega$.

Si se elige la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ en \mathbb{R}^3 y se escribe $X = X^i e_i$, entonces la definición anterior es equivalente a la expresión

div
$$\mathbf{X} = \frac{\partial X^1}{\partial x} + \frac{\partial X^2}{\partial y} + \frac{\partial X^3}{\partial z}$$
 (3.8)

La definición de este concepto va cogida de la mano de un célebre teorema conocido como teorema de la divergencia, el cual relaciona la integral de la divergencia de un campo en un dominio Ω con una integral en la frontera del dominio (para más información, se puede consultar [7]).

Teorema 3.14 (Teorema de la divergencia). Sea Ω un dominio regular cuya frontera $\partial\Omega$ es la superficie M. Si $\mathbf{X} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial, entonces

$$\iiint_{\Omega} (\operatorname{div} \boldsymbol{X})(p) dV = \iint_{M} \langle \boldsymbol{X}(p), \boldsymbol{\nu}(p) \rangle dA$$
(3.9)

donde $\nu: M \to \mathbb{S}^2$ es la aplicación de Gauss relativa a la orientación exterior de la superficie M^2 .

Tras dar estas definiciones y resultados se está en condiciones de enunciar el teorema de interés, el cual relaciona el grado de varias aplicaciones diferenciables sobre varias superficies cuando se pueden extender a un dominio regular.

Teorema 3.15. Sea Ω un dominio regular en \mathbb{R}^3 cuya frontera $\partial \Omega = M_1 \cup \ldots \cup M_n$ es una unión de n superficies compactas y conexas, disjuntas dos a dos. Si se elige otra superficie compacta M' y una aplicación diferenciable $\phi: \overline{\Omega} \to M'$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \deg \phi|_{M_i} = 0 \tag{3.10}$$

donde se toma una orientación cualquiera de M' y para las superficies M_i con i = 1, ..., n la orientación interior o la exterior relativa a Ω (en todas se toma la misma).

Demostración. Se toma una orientación cualquiera en la superficie M' dada por la aplicación de Gauss $\nu' \colon M' \to \mathbb{S}^2$ y se define a partir de ésta un campo vectorial diferenciable X_{ϕ} en $\overline{\Omega}$ como

$$\boldsymbol{X}_{\phi} = \det(\boldsymbol{\nu}' \circ \phi, \phi_2, \phi_3) \boldsymbol{e}_1 + \det(\boldsymbol{\nu}' \circ \phi, \phi_3, \phi_1) \boldsymbol{e}_2 + \det(\boldsymbol{\nu}' \circ \phi, \phi_1, \phi_2) \boldsymbol{e}_3$$

donde $\{e_1, e_2, e_3\}$ es la base canónica en \mathbb{R}^3 y los subíndices 1, 2, 3 en ϕ se refieren a las derivadas parciales respecto a x, y, z. La divergencia de este campo vectorial es, por la Ec. (3.8),

div
$$\mathbf{X}_{\phi} = \frac{\partial}{\partial x} \det(\mathbf{\nu}' \circ \phi, \phi_2, \phi_3) + \frac{\partial}{\partial y} \det(\mathbf{\nu}' \circ \phi, \phi_3, \phi_1) + \frac{\partial}{\partial z} \det(\mathbf{\nu}' \circ \phi, \phi_1, \phi_2)$$

Se desarrolla el primer sumando:

$$\frac{\partial}{\partial x} \det(\boldsymbol{\nu}' \circ \phi, \phi_2, \phi_3) = \det((\boldsymbol{\nu}' \circ \phi)_1, \phi_2, \phi_3) + \det(\boldsymbol{\nu}' \circ \phi, \phi_{12}, \phi_3) + \det(\boldsymbol{\nu}' \circ \phi, \phi_2, \phi_{13})$$

Análogamente para los otros dos, y por el teorema de Schwarz de la igualdad de las derivadas cruzadas, se tiene que la divergencia del campo es

$$\operatorname{div} \boldsymbol{X}_{\phi} = \operatorname{det}((\boldsymbol{\nu}' \circ \phi)_1, \phi_2, \phi_3) + \operatorname{det}((\boldsymbol{\nu}' \circ \phi)_2, \phi_3, \phi_1) + \operatorname{det}((\boldsymbol{\nu}' \circ \phi)_3, \phi_1, \phi_2)$$

² Tanto este teorema como el teorema de Green (Teorema 2.42) se pueden considerar un caso particular de un teorema más general, conocido como teorema de Stokes. Este teorema afirma que si M es una variedad de dimensión n, orientable y con frontera ∂M , y ω es una (n-1)-forma diferencial en M, entonces $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$. En el caso del teorema de Green se integra una 1-forma en el borde ∂M y una 2-forma en la superficie M, mientras que en el teorema de la divergencia se integra una 3-forma en el dominio regular Ω y una 2-forma en su frontera $\partial \Omega = M$. Para ver una demostración de este teorema y, en general, más información sobre el cálculo integral en variedades, se recomienda la referencia [13].

Si se analizan los términos que participan en los determinantes, $\phi_j(p) = (\phi_*)_p(e_j) \in T_{\phi(p)}M'$, y $(\boldsymbol{\nu}' \circ \phi)_j = ((\boldsymbol{\nu}' \circ \phi)_*)_p(e_j) = (\boldsymbol{\nu}'_*)_{\phi(p)}[(\phi_*)_p(e_j)] \in T_{\phi(p)}M'$ para j = 1, 2, 3 por ser $(\boldsymbol{\nu}'_*)_p$ un endomorfismo. Por tanto, los tres vectores que aparecen en cada determinante son coplanarios, luego el determinante se anula y \boldsymbol{X}_{ϕ} es un campo vectorial con divergencia cero.

Por otra parte, se comparan las aplicaciones bilineales antisimétricas definidas para cada $p \in \overline{\Omega}$:

$$(u,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longmapsto \det(\boldsymbol{X}_{\phi}(p), u, v)$$
$$(u,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longmapsto \det(\boldsymbol{\nu}'(\phi(p)), (\phi_*)_p(u), (\phi_*)_p(v))$$

Se calculan las imágenes de los vectores de la base canónica por la primera de las aplicaciones:

$$det(\boldsymbol{X}_{\phi}, \boldsymbol{e}_{1}, \boldsymbol{e}_{2}) = \langle \boldsymbol{X}_{\phi}, \boldsymbol{e}_{3} \rangle = det(\boldsymbol{\nu}' \circ \phi, \phi_{1}, \phi_{2})$$
$$det(\boldsymbol{X}_{\phi}, \boldsymbol{e}_{2}, \boldsymbol{e}_{3}) = \langle \boldsymbol{X}_{\phi}, \boldsymbol{e}_{1} \rangle = det(\boldsymbol{\nu}' \circ \phi, \phi_{2}, \phi_{3})$$
$$det(\boldsymbol{X}_{\phi}, \boldsymbol{e}_{3}, \boldsymbol{e}_{1}) = \langle \boldsymbol{X}_{\phi}, \boldsymbol{e}_{2} \rangle = det(\boldsymbol{\nu}' \circ \phi, \phi_{3}, \phi_{1})$$

Como las imágenes de los elementos de la base coinciden en ambas aplicaciones, estas deben ser iguales.

Se aplica ahora la Ec. (3.9) dada en el teorema de la divergencia. Como la frontera del dominio Ω es $M_1 \cup \ldots \cup M_n$ y la divergencia se anula en todo punto, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \iint_{M_{i}} \langle \boldsymbol{X}_{\phi}(p), \boldsymbol{\nu}_{i}(p) \rangle dA_{i} = 0$$

donde $\nu_i \colon M_i \to \mathbb{S}^2$ es la aplicación de Gauss en cada una de las componentes de $\partial\Omega$. Si se elige un $p \in M_i$ para un *i* cualquiera y $\{e_1^i, e_2^i\}$ una base ortonormal de T_pM_i orientada positivamente con respecto a ν_i , entones

$$\langle \boldsymbol{X}_{\phi}, \boldsymbol{\nu}_{i} \rangle(p) = \langle \boldsymbol{X}_{\phi}(p), \boldsymbol{e}_{1}^{i} \times \boldsymbol{e}_{2}^{i} \rangle = \det(\boldsymbol{X}_{\phi}(p), \boldsymbol{e}_{1}^{i}, \boldsymbol{e}_{2}^{i}) = \det(\boldsymbol{\nu}'(\phi(p)), (\phi_{*})_{p}(\boldsymbol{e}_{1}^{i}), (\phi_{*})_{p}(\boldsymbol{e}_{2}^{i}))$$

siendo este último término igual a $(\operatorname{Jac} \phi|_{M_i})(p)$. En consecuencia, se obtiene la igualdad

$$\sum_{i=1}^n \iint_{M_i} (\operatorname{Jac} \phi|_{M_i})(p) dA_i = 0$$

con lo que se tiene que la suma de los grados de las restricciones $\phi|_{M_i}$ se anula.

Corolario 3.16. Si una aplicación diferenciable $\phi: M \to M'$ entre dos superficies compactas y conexas se puede extender de forma diferenciable a la clausura del dominio regular que encierra M, entonces deg $\phi = 0$.

Demostración. Es una aplicación directa del Teorema 3.15 al dominio encerrado por M.

Una importante consecuencia que se deriva del Teorema 3.15 es la igualdad del grado de dos aplicaciones que son homótopas. Este hecho será crucial para demostrar una nueva versión del teorema de Gauss-Bonnet. En relación a este hecho, se recoge el siguiente resultado:

Proposición 3.17. Sean $M \ y \ M'$ dos superficies compactas orientables, $y \ \phi, \psi M \rightarrow M'$ dos aplicaciones diferenciables. Entonces, si $\phi \ y \ \psi$ son homótopas mediante una homotopía diferenciable, $\deg \phi = \deg \psi$.

Demostración. Se toma como hipótesis de partida que existe una homotopía diferenciable, que se llamará $H: M \times [0, 1] \rightarrow M'$, con $H(p, 0) = \phi(p)$ y $H(p, 1) = \psi(p)$. Se puede tomar un r > 0 lo suficientemente pequeño como para que $N_{2r}(M)$ sea un entorno tubular de M (este r existe por el Teorema 3.4). Se denota por M_r a la superficie paralela a M a distancia r y que pertenece al dominio

interior acotado por M, que se denotará como Ω (para ello basta con tomar la orientación interior al definir la aplicación de Gauss ν en M y utilizar esta orientación al definir F como en la Ec. (3.1)). Si se denomina Ω_r al dominio interior acotado por M_r , el conjunto $\Gamma = \Omega \setminus \overline{\Omega_r}$ es un dominio regular con frontera $\partial \Gamma = M \cup M_r$.

Cada punto de $\overline{\Gamma}$ es imagen por el difeomorfismo $F: M \times (-2r, 2r) \to N_{2r}(M)$, definido en la Ec. (3.1), por un único $(p, t) \in M \times [0, r]$. Por tanto, se define la aplicación $G: \overline{\Gamma} \to M'$ a partir de este par (p, t):

$$G(F(p,t)) = H(p,\frac{t}{r})$$

G es una aplicación diferenciable por serlo F y H. Si se aplica el resultado del Teorema 3.15 a esta aplicación y se toman las orientaciones interiores de M y M_r con respecto a Ω y a Ω_r , entonces

$$\deg G|_M = \deg G|_{M_r}$$

Tal y como se ha definido la aplicación $G, G|_M = H(\cdot, 0) = f$ y $G|_{M_r} = \psi \circ F_r^{-1}$ siendo esta última aplicación la inversa de $F_r(p) = F(p, r)$. Como F_r mantiene la orientación, por la fórmula del cambio de variable dada en la Ec. (3.3) es inmediato que $\deg(\psi \circ F_r^{-1}) = \deg \psi$, luego $\deg \phi = \deg \psi$. \Box

3.3. Indice de un campo en un cero aislado

A partir del concepto del grado de una aplicación entre superficies se puede introducir un concepto de gran interés para campos vectoriales. Este concepto es el del índice de un campo vectorial en un cero aislado. Se define en primer lugar este concepto para campos vectoriales definidos en un abierto de \mathbb{R}^3 y, más adelante, para campos tangentes sobre superficies.

Definición 3.18. Sea $A \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto y $X : A \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial diferenciable. Un punto $a \in A$ es un posible *cero aislado* del campo X si existe un entorno $U \subset A$ de a tal que X no se anula en $U \setminus \{a\}$. Si se elige un r > 0 de manera que la esfera centrada en a y de radio r, $\mathbb{S}^2_r(a)$, esté contenida en U, se define el *índice* del campo vectorial X en a como

$$i(\boldsymbol{X}, a) = \deg \frac{\boldsymbol{X}}{\|\boldsymbol{X}\|} \Big|_{\mathbb{S}^2_r(a)}$$
(3.11)

Se analiza esta definición para comprobar que no hay errores. Como X/||X|| es un campo unitario que no se anula en $\mathbb{S}_r^2(a)$, el campo $X/||X||: \mathbb{S}_r^2(a) \to \mathbb{S}^2$ es una aplicación diferenciable entre superficies compactas, por lo que tiene sentido hablar de su grado. Además, i(X, a) no depende del r > 0 elegido: si se toman $r_1 > r_2 > 0$ que cumplan las condiciones del enunciado y se aplica el Teorema 3.15 utilizando la misma orientación (interior o exterior) en $\mathbb{S}_{r_1}^2(a)$ y $\mathbb{S}_{r_2}^2(a)$, como entre ambas superficies se encierra un dominio regular $\Omega = B_{r_1}(a) \setminus \overline{B}_{r_2}(a)$ se cumplirá que

$$\left. \operatorname{deg} rac{oldsymbol{X}}{\|oldsymbol{X}\|}
ight|_{\mathbb{S}^2_{r_1}(a)} = \left. \operatorname{deg} rac{oldsymbol{X}}{\|oldsymbol{X}\|}
ight|_{\mathbb{S}^2_{r_2}(a)}$$

En el caso de que el campo no se anule en a, es muy sencillo comprobar el valor de su índice.

Lema 3.19. Si X es un campo vectorial diferenciable tal que $X(a) \neq 0$, entonces i(X, a) = 0.

Demostración. Si $X(a) \neq 0$ el campo X/||X|| está bien definido sobre la bola cerrada centrada en *a* y de radio r > 0, por lo que aplicando el Corolario 3.16 se obtiene i(X, a) = 0.

También es importante analizar otro caso en el que se puede calcular el índice del campo vectorial. Supongamos que $a \in A$ es un cero del campo, es decir, X(a) = 0. Se dirá que X es un *campo no* degenerado en a cuando $(X_*)_a \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cumple que $\det(X_*)_a \neq 0$. En este caso, aplicando el teorema de la función inversa se comprueba que a es un cero aislado del campo X. Si X es no degenerado en cada uno de sus ceros, se dirá simplemente que es *no degenerado*. Para un campo no degenerado, el conjunto de ceros será discreto.

Lema 3.20. Sea X un campo no degenerado. Entonces, en cada uno de los ceros $a \in A$ el índice del campo será

$$i(\boldsymbol{X}, a) = \begin{cases} +1 & \text{si } \det(\boldsymbol{X}_*)_a > 0\\ -1 & \text{si } \det(\boldsymbol{X}_*)_a < 0 \end{cases}$$

Demostración. En la anterior sección se ha calculado el jacobiano para un campo vectorial unitario. A partir de ese cálculo, se tiene que el índice en un cero aislado es

$$i(\mathbf{X}, a) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathbb{S}_r^2(a)} \frac{1}{\|\mathbf{X}(p)\|^3} \det((\mathbf{X}_*)_p(\mathbf{e}_1), (\mathbf{X}_*)_p(\mathbf{e}_2), \mathbf{X}(p)) dA'$$

donde $\{e_1, e_2\} \subset T_p \mathbb{S}_r^2(a)$ forman una base ortonormal orientada positiva con respecto a la aplicación de Gauss exterior. Si se hace un cambio de variable mediante el difeomorfismo de \mathbb{S}^2 a $\mathbb{S}_r^2(a)$ dado por $p \mapsto a + rp$,

$$i(\mathbf{X}, a) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathbb{S}^2} \frac{r^2}{\|\mathbf{X}(a+rp)\|^3} \det((\mathbf{X}_*)_{a+rp}(\mathbf{e}_1), (\mathbf{X}_*)_{a+rp}(\mathbf{e}_2), \mathbf{X}(a+rp)) dA$$

Esta igualdad se cumple para cualquier valor de r lo suficientemente pequeño. Para eliminar la dependencia del integrando con r, se calcula el límite del siguiente cociente cuando r tiende a cero:

$$\lim_{r \to 0} \frac{\boldsymbol{X}(a+rp)}{r} = (\boldsymbol{X}_*)_a(p)$$

Este límite no se anula porque a es un cero no degenerado. Reorganizando el integrando en función de este límite, el índice del campo en a será

$$i(\mathbf{X}, a) = \frac{\det(\mathbf{X}_*)_a}{4\pi} \iint_{\mathbb{S}^2} \frac{1}{\|(\mathbf{X}_*)_a(p)\|^3} dA$$

Se va a calcular el valor de la integral. Para ello, se va a utilizar como cambio de variable el difeomorfismo $\phi \colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ que a cada $p \in \mathbb{S}^2$ le asigna el valor $(X_*)_a(p)/||(X_*)_a(p)||$, también en \mathbb{S}^2 . Esta aplicación es un difeomorfismo por ser X no degenerado en a y ser la restricción de una aplicación diferenciable en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Si se calcula la aplicación diferencial $(\phi_*)_p \colon T_p \mathbb{S}^2 \to T_p \mathbb{S}^2$, se obtiene

$$(\phi_*)_p(v) = \frac{(X_*)_a(v)}{\|(X_*)_a(p)\|} - \frac{\langle (X_*)_a(v), (X_*)_a(p) \rangle}{\|(X_*)_a(p)\|^3} (X_*)_a(p)$$

Con esto, utilizando una base ortonormal $\{e_1, e_2\} \subset T_p \mathbb{S}^2$, el valor absoluto del jacobiano de ϕ será

$$|\operatorname{Jac}\phi(p)| = \frac{1}{\|(\boldsymbol{X}_*)_a(p)\|^3} |\operatorname{det}((\boldsymbol{X}_*)_a(\boldsymbol{e}_1), (\boldsymbol{X}_*)_a(\boldsymbol{e}_2), (\boldsymbol{X}_*)_a(p))| = \frac{|\operatorname{det}(\boldsymbol{X}_*)_a|}{\|(\boldsymbol{X}_*)_a(p)\|^3}$$

Aplicando la fórmula de cambio de variable a la integral, se obtiene

$$i(\mathbf{X}, a) = \frac{\det(\mathbf{X}_*)_a}{4\pi} \iint_{\mathbb{S}^2} \frac{1}{\|(\mathbf{X}_*)_a(p)\|^3} dA = \frac{\det(\mathbf{X}_*)_a}{|\det(\mathbf{X}_*)_a|}$$

lo cual confirma el enunciado.

Se habla ahora de todos estos conceptos para campos vectoriales tangentes a superficies orientables. **Definición 3.21.** Sea M una superficie orientable con aplicación de Gauss asociada $\boldsymbol{\nu} \colon M \to \mathbb{S}^2$ y $\boldsymbol{V} \colon M \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial diferenciable tangente a M, es decir, $\boldsymbol{V}(p) \in T_p M$ para todo $p \in M$. Se dice que $a \in M$ es un posible *cero aislado* de \boldsymbol{V} cuando se puede encontrar un entorno $U \subset M$ de a tal que \boldsymbol{V} no se anula en $U \setminus \{a\}$. Si se toma un entorno tubular de $U, N_r(U), y$ un $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño para que la bola $B_{\epsilon}(a) \subset N_r(U)$, se define el campo $\boldsymbol{X} \colon B_{\epsilon}(a) \to \mathbb{R}^3$ como

$$\boldsymbol{X}(F(p,t)) = \boldsymbol{V}(p) + t\boldsymbol{\nu}(p)$$
(3.12)

donde la aplicación F se ha introducido en la Ec. (3.1). Se define entonces el *índice* de V como

$$i(\boldsymbol{V}, a) = i(\boldsymbol{X}, a)$$

Nuevamente se analiza que esta definición tenga sentido. Al igual que en el caso de los campos definidos en abiertos de \mathbb{R}^3 , no es relevante el entorno U elegido. Por tanto, se puede elegir lo suficientemente pequeño como para poder construir correctamente un entorno tubular. De igual manera, tampoco depende de r. El campo X es diferenciable y no se anula en ningún punto de $B_r(a)$ (a excepción quizás del propio a) por lo que a es un posible cero aislado de X y tiene sentido hablar de su índice en a.



FIGURA 3.2: Representación de varios campos vectoriales en el plano con diferentes índices en un punto

En la Figura 3.2 se han representado varios campos vectoriales sobre un plano. Para cada uno de estos campos, índice en el punto central toma un valor distinto: en la imagen central, el campo vectorial no tiene ningún cero luego $i(\mathbf{X}, p) = 0$; para las otras cuatro, el campo vectorial se anula en un punto de la figura, pero los índices en dicho cero aislado son distintos en cada caso.

En base a la definición se calcula el índice del campo vectorial V en algunos casos concretos de interés.

Proposición 3.22. Sea V un campo vectorial diferenciable tangente a M. Si $V(p) \neq 0$ para un $p \in M$ entonces i(V, p) = 0. Por el contrario, si V(p) = 0 entonces $(V_*)_p$ es un endomorfismo sobre T_pM . Si el campo V es no degenerado en p, entonces p es un cero aislado de V y

$$i(\mathbf{V}, p) = \begin{cases} +1 & \text{si } \det(\mathbf{V}_*)_p > 0\\ -1 & \text{si } \det(\mathbf{V}_*)_p < 0 \end{cases}$$

Si la superficie es compacta y V es no degenerado, el número de ceros es finito luego la suma de los índices de los ceros de V es un número entero.

Demostración. La parte de la proposición relacionada con los puntos en los que el campo no se anula se deduce directamente del Lema 3.19. Por otra parte, si se analiza el caso en el que p es un cero del campo, por ser V tangente a la superficie entonces tomando $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M \operatorname{con} \alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v \in T_p M$,

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left\langle (\boldsymbol{V} \circ \boldsymbol{\alpha})(t), (\boldsymbol{\nu} \circ \boldsymbol{\alpha})(t) \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{\nu}(p), (\boldsymbol{V}_*)_p(\boldsymbol{v}) \right\rangle$$

luego la imagen de $(V_*)_p$ está contenida en T_pM y se puede ver como un endomorfismo. El índice del campo se deduce si se relacionan la no degeneración de V y X: como $X|_{B_r(a)\cap M} = V|_{B_r(a)\cap M}$ se tiene $(X_*)_p|_{T_pM} = (V_*)_p$. Además, como $X(p + t\nu(p)) = V(p) + t\nu(t)$, entonces se cumple que $(X_*)_p(\nu(p)) = \nu(p)$. Con todo esto, se tiene que $\det(X_*)_p = \det(V_*)_p$.

Finalmente, el hecho de que en una superficie compacta hay un número finito de ceros se demuestra rápidamente por reducción al absurdo. Si se supone que no es finito, se puede elegir una sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ceros, los cuales serán aislados por ser V un campo no degenerado. Como M es compacta, existirá una subsucesión de ceros $(p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a a, también un cero aislado. Sin embargo, esto no es posible porque para cada entorno abierto U de a existiría un $k_0 \in \mathbb{N}$ a partir del cual a_{n_k} pertenecería a U, lo cual supone una contradicción. Con esto se demuestra que hay un número finito de ceros cuando el campo es no degenerado y se define sobre una superficie compacta, con lo que la suma de los índices será un valor en \mathbb{Z} .



FIGURA 3.3: Representación de campos vectoriales diferenciables tangentes a dos superficies compactas

En la Figura 3.3 se han representado campos vectoriales tangentes sobre dos superficies compactas. En el primer caso se ha hecho la representación sobre la esfera \mathbb{S}^2 mientras que en el segundo se ha elegido el toro \mathbb{T}^2 . Como se puede comprobar en el caso de la esfera, hay un punto en el cual el campo definido se anula, el cual coincide con uno de los polos (en realidad se anula sobre los dos polos, pero en la figura solamente se puede ver uno de ellos). Esto concuerda con el teorema de la bola peluda de Brouwer: para un campo vectorial tangente a \mathbb{S}^2 siempre se puede encontrar un punto de la superficie en que el campo se anula. Sin embargo, en el caso del toro esto no es así: el campo definido en la figura no se anula en ninguno de los puntos de la superficie. Esto es algo imposible de hacer en \mathbb{S}^2 . Estas diferencias son realmente importantes y jugarán un papel fundamental en el teorema de Gauss-Bonnet.

3.4. Teorema de Poincaré-Hopf

Con todos los contenidos que se han estudiado en este capítulo, se puede enunciar una nueva versión del teorema de Gauss-Bonnet, que en este caso utiliza el concepto de índices de campos vectoriales en lugar del de característica de Euler.

Teorema 3.23 (Teorema de Gauss-Bonnet). Sea M una superficie compacta sin borde en \mathbb{R}^3 y V un campo vectorial diferenciable tangente a M que sólo tiene ceros aislados. Entonces,

$$\iint_{M} K(p) dA = 2\pi \sum_{p \in M} i(\mathbf{V}, p)$$
(3.13)

siendo K(p) la curvatura de Gauss en cada punto de la superficie.

Demostración. Se supondrá por simplicidad que M es conexa, ya que en el resto de casos la aditividad de las integrales con respecto a las componentes conexas no cambiaría el resultado. Como M es una superficie compacta, el número de ceros de V será finito. Se denotan estos ceros como $\{p_1, \ldots, p_n\}$. Por ser M compacta, también se podrá encontrar un cierto r > 0 para el cual se puede definir un entorno tubular $N_{2r}(M)$. Mediante la aplicación $F: M \times (-2r, 2r) \rightarrow N_{2r}(M)$, cuya definición aparece en la Ec. (3.1), se considera el dominio regular $\Omega_{2r} = F(M \times (-r, r))$. Este dominio regular tiene como frontera las superficies M_r y M_{-r} . Cabe señalar que, para definir la aplicación F, se ha debido elegir con anterioridad una aplicación de Gauss $\nu: M \rightarrow \mathbb{S}^2$ (en este caso, se ha elegido la orientación interior).

Se seleccionan ahora, para cada uno de los ceros p_i (i = 1, ..., n), bolas abiertas centradas en p_i y de radio $r_i > 0$ lo suficientemente pequeño como para que $\overline{B_{r_i}(p_i)} \subset \Omega_{2r}$ y, además, si $i \neq j$ entonces $\overline{B_{r_i}(p_i)} \cap \overline{B_{r_j}(p_j)} = \emptyset$. A partir de esto, se define el siguiente dominio regular Ω :

$$\Omega = \Omega_{2r} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B_{r_i}(p_i)}$$

La frontera de este dominio, $\partial \Omega$, se obtiene como una unión disjunta de superficies compactas:

$$\partial \Omega = M_r \cup M_{-r} \cup \mathbb{S}^2_{r_1}(p_1) \cup \ldots \cup \mathbb{S}^2_{r_n}(p_n)$$

Se considera ahora el campo vectorial que se definió en el caso general en la Ec, (3.12). En esta situación, éste es el campo $X : N_{2r}(M) \to \mathbb{R}^3$ definido a partir de la aplicación F para cada $(p,t) \in M \times (-2r, 2r)$ como

$$\boldsymbol{X}(F(p,t)) = \boldsymbol{V}(p) + t\boldsymbol{\nu}(p)$$

Este campo vectorial está bien definido por ser F un difeomorfismo. Como además V sólo se anula en los puntos $\{p_1, \ldots, p_n\}$, el campo X no se anulará en ningún punto del dominio Ω . Por tanto, se podrá definir el campo unitario $X/||X||: \overline{\Omega} \to \mathbb{S}^2$. Si se aplica el resultado del Teorema 3.15 a X/||X|| como aplicación diferenciable, tomando para cada una de las componentes conexas de $\partial\Omega$ la orientación exterior al dominio regular que encierra cada una de ellas, entonces

$$\operatorname{deg} \frac{\boldsymbol{X}}{\|\boldsymbol{X}\|} \Big|_{M_{-r}} - \operatorname{deg} \frac{\boldsymbol{X}}{\|\boldsymbol{X}\|} \Big|_{M_{r}} = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{deg} \frac{\boldsymbol{X}}{\|\boldsymbol{X}\|} \Big|_{\mathbb{S}^{2}_{r_{i}}(p_{i})}$$
(3.14)

Se va a intentar transformar el campo X/||X|| en uno homótopo a éste, para aplicar así el resultado de la Proposición 3.17. Si se restringe el campo a la superficie paralela M_{ϵ} para un determinado $\epsilon \in (-2r, 2r)$,

$$X|_{M_{\epsilon}} = (V + \epsilon \nu) \circ F_{\epsilon}^{-1}$$

definiendo F_{ϵ} como el difeomorfismo que lleva M en M_{ϵ} al fijar $t = \epsilon$ en la aplicación. Este difeomorfismo conserva la orientación, luego

$$\left. \deg rac{oldsymbol{X}}{\|oldsymbol{X}\|}
ight|_{M_\epsilon} = \deg rac{oldsymbol{V} + \epsilon oldsymbol{
u}}{\|oldsymbol{V} + \epsilon oldsymbol{
u}\|}$$

Se puede comprobar que, según el signo de ϵ (se supone $\epsilon \neq 0$), esta aplicación será homótopa a ν o $-\nu$. En efecto, si $\epsilon > 0$ se define $H_1: M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^2$ como

$$H_1(p,t) = \frac{(t/\epsilon)\mathbf{V} + \boldsymbol{\nu}}{\|(t/\epsilon)\mathbf{V} + \boldsymbol{\nu}\|}$$

En cambio, si $\epsilon < 0$ se tiene la aplicación $H_2 \colon M \times [0,1] \to \mathbb{S}^2$ dada por

$$H_2(p,t) = -\frac{(t/\epsilon)\mathbf{V} + \boldsymbol{\nu}}{\|(t/\epsilon)\mathbf{V} + \boldsymbol{\nu}\|}$$

Para estas aplicaciones $H_1(p, 0) = -H_2(p, 0) = \boldsymbol{\nu}(p)$ y $H_1(p, 1) = H_2(p, 1) = (\boldsymbol{V} + \epsilon \boldsymbol{\nu})/\|\boldsymbol{V} + \epsilon \boldsymbol{\nu}\|$. Además, son continuas. Con todo esto, aplicando la Proposición 3.17, el grado del campo $\boldsymbol{X}/\|\boldsymbol{X}\|$ sobre la superficie M_{ϵ} será

$$\deg \frac{\boldsymbol{X}}{\|\boldsymbol{X}\|} \bigg|_{M_{\epsilon}} = \begin{cases} \ \deg(\boldsymbol{\nu}) & \text{si } \epsilon > 0 \\ \ \deg(-\boldsymbol{\nu}) & \text{si } \epsilon < 0 \end{cases}$$

La primera vez que se habló de grados de aplicaciones en la Sección 3.2 se calculó el grado de la aplicación de Gauss. Aprovechando este cálculo en la Ec. (3.14),

$$\frac{1}{2\pi} \iint_M K(p) dA = \sum_{i=1}^n \left. \operatorname{deg} \frac{\boldsymbol{X}}{\|\boldsymbol{X}\|} \right|_{\mathbb{S}^2_{r_i}(p_i)}$$

El término a la derecha de la igualdad corresponde precisamente con la suma de los índices del campo en cada punto de la superficie, ya que el campo sólo tiene ceros aislados y en el resto de puntos el índice se anula. Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \deg \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|} \Big|_{\mathbb{S}^{2}_{r_{i}}(p_{i})} = \sum_{p \in M} i(\mathbf{V}, p)$$

completando finalmente la demostración.

A partir de esta versión del teorema de Gauss-Bonnet se obtiene un corolario de manera inmediata:

Corolario 3.24. Para cualquier campo vectorial diferenciable y tangente a una superficie compacta en \mathbb{R}^3 que sólo tiene ceros aislados la suma de los índices del campo en cada punto de la superficie es invariante.

Sin embargo, se puede ir más allá de este corolario: si se combina esta versión del teorema de Gauss-Bonnet con la del anterior capítulo, se llega al teorema que da nombre a este capítulo.

Teorema 3.25 (Teorema de Poincaré-Hopf). Cualquier campo vectorial V diferenciable y tangente a una superficie compacta M que sólo tiene ceros aislados cumple que

$$\chi(M) = \sum_{p \in M} i(\mathbf{V}, p) \tag{3.15}$$

donde $\chi(M)$ es la característica de Euler de M.

Como curiosidad, a partir del teorema de Poincaré-Hopf se obtiene fácilmente un teorema enunciado por Brouwer, conocido popularmente como el "teorema de la bola peluda".

Teorema 3.26 (Teorema de la bola peluda). Un campo vectorial tangente a la esfera S^2 necesariamente se anula en algún punto.

Demostración. Basta con aplicar la Ec. (3.15) al caso de la esfera, con $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$.

3.5. Funciones de Morse

Todo el desarrollo teórico que se ha realizado en este capítulo perdería todo el sentido si existiera alguna superficie compacta sobre la que no se pudiera encontrar ningún campo vectorial diferenciable tangente a la superficie con sus ceros aislados. Afortunadamente, existe un tipo de aplicaciones que ayudarán a comprobar que siempre se pueden encontrar estos campos vectoriales. Estas funciones se conocen como funciones de Morse. La mayoría de conceptos y resultados de esta sección se han extraído de [5], adaptándolos para superficies regulares en \mathbb{R}^3 .

Definición 3.27. Sea M una superficie y $f: M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si $p \in M$ es un punto crítico de f, se define el *hessiano* de f en el punto p como la aplicación $H_p f: T_p M \to \mathbb{R}$, definida como sigue: si $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \to M$ es una curva en M con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \mathbf{X} \in T_p M$, entonces

$$(H_p f)(\boldsymbol{X}) = \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} (f \circ \boldsymbol{\alpha})(t)$$
(3.16)

En la definición se pide explícitamente que p sea un punto crítico para definir el hessiano. Esto es algo esencial para que $H_p f$ esté bien definida como se muestra en la siguiente proposición:

Proposición 3.28. En la anterior definición, la aplicación $H_p f: T_p M \to \mathbb{R}$ está bien definida para cualquier punto crítico p de f, es decir, no depende de la elección de α . Además, es una forma cuadrática.

Demostración. Se elige una superficie simple cualquiera $\mathbf{f}: U \to \mathbb{R}^3$ en M que contenga al punto crítico p, de manera que $\mathbf{f}(a,b) = p \in M$, y se elige una curva $\boldsymbol{\alpha}: (-\epsilon,\epsilon) \to M \operatorname{con} \epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño para poder escribir $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{f}(\alpha^1, \alpha^2), \, \boldsymbol{\alpha}(0) = p \, \mathbf{y} \, \boldsymbol{\alpha}'(0) = X^i \mathbf{f}_i = \mathbf{X}$. Entonces, $(f \circ \boldsymbol{\alpha})(t) = (f \circ \mathbf{f})(\alpha^1(t), \alpha^2(t))$. Se calcula la segunda derivada aplicando la regla de la cadena:

$$(f \circ \boldsymbol{\alpha})' = (f \circ \mathbf{f})_1 (\alpha^1)' + (f \circ \mathbf{f})_2 (\alpha^2)'$$

 $(f \circ \boldsymbol{\alpha})'' = (f \circ \mathbf{f})_{11} (\alpha^1)'^2 + 2(f \circ \mathbf{f})_{12} (\alpha^1)' (\alpha^2)' + (f \circ \mathbf{f})_{22} (\alpha^2)'^2 + (f \circ \mathbf{f})_1 (\alpha^1)'' + (f \circ \mathbf{f})_2 (\alpha^2)''$

Si se toma el penúltimo sumando de la expresión anterior y se evalua en t = 0, se obtiene

$$(f \circ \mathbf{f})_1(a,b)(\alpha^1)''(0) = (f_*)_p[(\mathbf{f}_*)_{(a,b)}(1,0)](\alpha^1)''(0) = 0$$

por ser p un punto crítico de la función f. Análogamente, $(f \circ \mathbf{f})_2(a,b)(\alpha^2)''(0) = 0$. Con esto, se llega a

$$H_p f(\mathbf{X}) = (f \circ \boldsymbol{\alpha})''(0)$$

= $(f \circ \mathbf{f})_{11}(a, b)((\alpha^1)'(0))^2 + 2(f \circ \mathbf{f})_{12}(a, b)(\alpha^1)'(0)(\alpha^2)'(0) + (f \circ \mathbf{f})_{22}(a, b)((\alpha^2)'(0))^2$
= $(f \circ \mathbf{f})_{11}(a, b)(X^1)^2 + 2(f \circ \mathbf{f})_{12}(a, b)X^1X^2 + (f \circ \mathbf{f})_{22}(a, b)(X^2)^2$

con lo que quedan probadas las dos afirmaciones de la proposición: $H_p f$ no depende en su definición de la curva α elegida y además es una forma cuadrática.

Por ser $H_p f$ una forma cuadrática, esta aplicación tendrá asociada una matriz simétrica. Esta matriz define una aplicación bilineal simétrica cuya expresión utilizando la parametrización **f** es $((f \circ \mathbf{f})_{ij})$, como se acaba de demostrar. El estudio de las funciones de Morse se basa en la clasificación de los puntos críticos de una función diferenciable, para lo cual la matriz asociada a $H_p f$ será de utilidad. Se enuncian ahora los requisitos que deben cumplir los puntos críticos de f para ser de interés en esta sección.

Definición 3.29. Sea $f: M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable sobre una superficie M y $p \in M$ un punto crítico de f. Se dice que p es un *punto crítico no degenerado* si el determinante de la matriz asociada a $H_p f$ es no nulo, es decir, si la forma cuadrática $H_p f$ es no degenerada.

Definición 3.30. Una función diferenciable $f: M \to \mathbb{R}$ se dice que es una *función de Morse* si todos sus puntos críticos son no degenerados.

Para una función de Morse, los puntos críticos forman un conjunto de puntos aislados, por lo que será un conjunto discreto. Esto se comprobará tras enunciar y demostrar el lema de Morse.

Por ser una matriz simétrica con coeficientes reales, la matriz asociada a $H_p f$ será diagonalizable. Como el determinante esta matriz es no nulo, se tiene que ninguno de sus autovalores será nulo. Se define entonces el *índice* del punto crítico p como la mayor dimensión posible de un subespacio de T_pM para el cual la matriz asociada a H_pf es definida negativa³. El valor del índice coincide entonces con el número de autovalores negativos que tiene la matriz.

En el siguiente lema, conocido como lema de Morse, se recoge un enunciado esencial para la demostración de resultados importantes en el resto de la sección.

Lema 3.31 (Lema de Morse). Si $f: M \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable y $p \in M$ un punto crítico no degenerado, entonces existe una parametrización $\mathbf{f}: U \to \mathbb{R}^3$ en torno a p de manera que

$$(f \circ \mathbf{f})(u^1, u^2) = f(p) - \sum_{i=1}^k (u^i)^2 + \sum_{i=k}^2 (u^i)^2$$
(3.17)

siendo k el índice del punto p.

Demostración. En primer lugar se demuestra que, en el caso de que esta parametrización exista, k necesariamente es el índice de p. Efectivamente, si se calcula la forma de la matriz $((f \circ \mathbf{f})_{ij})$ a partir de la Ec. (3.17), se obtiene una matriz diagonal que contiene k veces el número -2 en su diagonal. Por tanto, la máxima dimensión del subespacio en el cual la matriz es definida negativa es k, por lo que este valor coincide con el índice del punto p.

Se puede asumir que f(p) = 0, ya que las constantes que se suman a f no afectan al comportamiento de los puntos críticos. También se podrá elegir una parametrización $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^3$ que contenga al punto p de manera que $\mathbf{f}(0,0) = p$ y que además $U \subset \mathbb{R}^2$ sea convexo. Para ello, se aplican traslaciones al conjunto U y se reduce su tamaño hasta que sea convexo. Entonces, aplicando el teorema fundamental del cálculo, como f(p) = 0,

$$(f \circ \mathbf{f})(u^1, u^2) = \int_0^1 \frac{d}{dt} (f \circ \mathbf{f})(tu^1, tu^2) dt = \sum_{i=1}^2 u^i \int_0^1 (f \circ \mathbf{f})_i (tu^1, tu^2) dt = u^i g_i(u^1, u^2)$$

donde la función $g_i: U \to \mathbb{R}$ se corresponde con el valor de la integral $\int_0^1 (f \circ \mathbf{f})_i (tu^1, tu^2) dt$. Como p es un punto crítico, $(f_*)_p = 0$ por lo que $(f_*)_p(\mathbf{f}_i) = (f \circ \mathbf{f})_i (0, 0) = 0$. Esto implica que, por la expresión calculada para las funciones g_i ,

$$g_i(0,0) = \int_0^1 (f \circ \mathbf{f})_i(0,0) dt = 0$$

Por tanto, este proceso seguido para expresar $(f \circ \mathbf{f})(u^1, u^2)$ como $u^i g_i(u^1, u^2)$ se puede aplicar de igual forma a cada una de las funciones g_i por separado. De esta manera, se llegaría a

$$(f \circ \mathbf{f})(u^1, u^2) = u^i u^j \tilde{h}_{ij}(u^1, u^2)$$

Se puede definir $h_{ij} = (\tilde{h}_{ij} + \tilde{h}_{ji})/2$ para forzar a la matriz (h_{ij}) a ser simétrica. Si se deriva la función $(f \circ \mathbf{f})$ para comprobar la relación entre las matrices $((f \circ \mathbf{f})_{ij}(0,0))$ y $(h_{ij}(0,0))$, es sencillo llegar a que $(h_{ij}(0,0)) = ((f \circ \mathbf{f})_{ij}(0,0)/2)$ por lo que la matriz $(h_{ij}(0,0))$ es no singular.

Se busca ahora diagonalizar la matriz $(h_{ij}(0,0))$ mediante cambios de coordenadas para obtener la expresión dada en la Ec. (3.17). Se puede suponer en primer lugar que $h_{11}(0,0) \neq 0$ para un entorno del origen $\widetilde{U} \subset U$; en caso contrario, se realiza un cambio de coordenadas lineal para que esto sea así. En esta situación, se lleva a cabo el siguiente cambio de coordenadas:

$$v^{1} = \sqrt{|h_{11}(u^{1}, u^{2})|} \left(u^{1} + u^{2} \frac{h_{12}(u^{1}, u^{2})}{h_{11}(u^{1}, u^{2})} \right)$$
$$v^{2} = u^{2}$$

³Una matriz cuadrada simétrica $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se dice que es *definida positiva* si $x^t Q x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por el contrario, se dice que es *definida negativa* si $x^t Q x < 0$.

Se calculan algunas de las derivadas $\partial v^i / \partial u^j$. Para ello, se supone ahora que el signo de h_{11} es positivo (en caso contrario bastaría con añadir un signo negativo que no afecta en absoluto para los cálculos que se presentan):

$$\frac{\partial v^1}{\partial u^1} = \frac{\partial h_{11}/\partial u^1}{2\sqrt{h_{11}}} \left(u^1 + u^2 \frac{h_{12}}{h_{11}} \right) + \sqrt{h_{11}} \left[1 + u^2 \left(\frac{\partial h_{12}/\partial u^1}{h_{11}} - \frac{h_{12}\partial h_{11}/\partial u^1}{h_{11}^2} \right) \right]$$

Evaluando en el origen, $\partial v^1 / \partial u^1(0,0) = \sqrt{h_{11}} \neq 0$. Como $\partial v^2 / \partial u^1 = 0$ y $\partial v^2 / \partial u^2 = 1$, el determinante de la matriz $(\partial v^i / \partial u^j)$ no se anula luego por el teorema de la función inversa se puede llevar a cabo correctamente el cambio de coordenadas en un entorno del origen $V \subset \hat{U}$. Si se calcula $(v_1)^2$, se obtiene

$$(v_1)^2 = \pm h_{11}(u^1, u^2)(u^1)^2 \pm 2h_{12}(u^1, u^2)u^1u^2 \pm \frac{h_{12}^2(u^1, u^2)}{h_{11}(u^1, u^2)}(u^2)^2$$

donde el signo de los sumandos es positivo si $h_{11} > 0$ y negativo si $h_{11} < 0$. De esta forma, si se llama $\mathbf{g} \colon V \to \mathbb{R}^3$ a la parametrización utilizando las coordenadas v^1, v^2 , la aplicación $(f \circ \mathbf{g})$ adoptaría una forma similar a la mostrada en la Ec. (3.17):

$$(f \circ \mathbf{g})(v^1, v^2) = \pm (v^1)^2 + \hat{h}_{22}(v^1, v^2)(v^2)^2$$

Siguiento un proceso análogo para la variable v^2 se llega a la igualdad buscada.

Tras esta demostración, se ha conseguido caracterizar una función de Morse en coordenadas locales. Se demuestra ahora algo que se había dejado pendiente hace unos párrafos:

Proposición 3.32. Los puntos críticos de una función de Morse forman un conjunto de puntos aislados, lo que implica que el conjunto es discreto.

Demostración. Si se toma un punto crítico $p \in M$ de una función de Morse $f: M \to \mathbb{R}$, por el lema de Morse se puede encontrar una superficie simple $\mathbf{f}: U \to \mathbb{R}^3$ que contiene a p, siendo $\mathbf{f}(0,0) = p$, y en la que se cumple la Ec. (3.17). Para que cada una de las derivadas $(f \circ \mathbf{f})_i$ con i = 1, 2 se anule, es inmediato ver que necesariamente $u^1 = u^2 = 0$ por lo que en la superficie simple elegida solamente hay un punto crítico.

Con un razonamiento totalmente análogo al seguido en la Proposición 3.22 para demostrar que un campo no degenerado tangente a una superficie compacta tenía un número finito de ceros, se puede comprobar que el número de puntos críticos de una función de Morse es finito.

Más allá del propio interés por el conocimiento, por ahora no se ha expuesto ninguna razón contundente por la cual introducir este tipo de funciones en este trabajo. Es más, en realidad no se ha comprobado siquiera si se pueden encontrar funciones con estas características definidas sobre cualquier superficie. Los resultados que se presentan en las siguientes páginas aclararán todas estas dudas.

Sea M una superficie regular inmersa en \mathbb{R}^3 y $r \in \mathbb{R}^3$ un punto cualquiera del espacio que no está en la superficie, es decir, $r \notin M$. Se define sobre M la función distancia a $r, h_r \colon M \to \mathbb{R}$, como

$$h_r(q) = ||q - r|| = \sqrt{\langle q - r, q - r \rangle}$$
 (3.18)

Bajo ciertas condiciones, estas funciones cumplen los requisitos para ser funciones de Morse. Para comprobarlo, se enuncia la siguiente proposición:

Proposición 3.33. *Bajo las condiciones anteriores, y para la función distancia que aparece definida en la Ec.* (3.18), *se cumple lo siguiente:*

(I) Un punto $p \in M$ será un punto crítico de h_r si y sólo si la recta que une p con r es perpendicular a M en p.

(II) Un punto crítico p de h_r es degenerado si y sólo si $h_r(p) = 1/\kappa_1$ o $h_r(p) = 1/\kappa_2$, donde κ_1, κ_2 son las curvaturas principales en el punto p.

Demostración.

Demostración (I): En primer lugar, se calcula la expresión para $(h_{r*})_p$: $T_pM \to \mathbb{R}$ para cualquier punto $p \in M$. Para ello, se elige una curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M \operatorname{con} \alpha(0) = p \operatorname{y} \alpha'(0) = X$:

$$(h_{r*})_p(\boldsymbol{X}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sqrt{\langle \boldsymbol{\alpha}(t) - r, \boldsymbol{\alpha}(t) - r \rangle} = \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}'(0), \boldsymbol{\alpha}(0) - r \rangle}{\sqrt{\langle \boldsymbol{\alpha}(0) - r, \boldsymbol{\alpha}(0) - r \rangle}} = \frac{\langle \boldsymbol{X}, p - r \rangle}{\sqrt{\langle p - r, p - r \rangle}}$$

Con esta igualdad, queda claro que $(h_{r*})_p = 0$ si y sólo si T_pM es perpendicular al vector p - r, esto es, a la recta que une p con r.

Demostración (II): Se toma ahora un punto crítico $p \in M$ y se calcula el hessiano de h_r en p, $H_p h_r$. Se utiliza para ello la misma curva α , suponiendo esta vez que está parametrizada por el arco y que $||\mathbf{X}|| = 1$:

$$(H_p h_r)(\boldsymbol{X}) = \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \sqrt{\langle \boldsymbol{\alpha}(t) - r, \boldsymbol{\alpha}(t) - r \rangle} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}'(t), \boldsymbol{\alpha}(t) - r \rangle}{\sqrt{\langle \boldsymbol{\alpha}(t) - r, \boldsymbol{\alpha}(t) - r \rangle}} \\ = \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}''(0), \boldsymbol{\alpha}(0) - r \rangle + \langle \boldsymbol{\alpha}'(0), \boldsymbol{\alpha}'(0) \rangle}{\sqrt{\langle \boldsymbol{\alpha}(0) - r, \boldsymbol{\alpha}(0) - r \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{\langle \boldsymbol{\alpha}(0) - r, \boldsymbol{\alpha}(0) - r \rangle}} - \langle \boldsymbol{\alpha}''(0), \boldsymbol{N}(p) \rangle \\ = \frac{1}{h_r(p)} - L(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}) = \frac{1}{h_r(p)} - \kappa_n$$

siendo κ_n la curvatura normal en el punto p y dirección X. Para la última igualdad, se han utilizado las Ecs. (2.3) y (2.6). Por la relación entre H_ph_r y la segunda forma fundamental (y, por tanto, con el endomorfismo de Weingarten) se tiene que la base $\{X_{(1)}, X_{(2)}\}$ de T_pM , formada por las direcciones principales en p, diagonalizará la aplicación bilineal simétrica asociada. Por ser ésta una base que diagonaliza la matriz asociada, entonces el punto crítico p será degenerado si y sólo si H_ph_r se anula para una de las direcciones principales, es decir, si $h_r(p) = 1/\kappa_1$ ó $h_r(p) = 1/\kappa_2$, siendo κ_1, κ_2 las curvaturas principales en p. Con esto se concluye la demostración.

A partir de esta proposición se puede demostrar un nuevo enunciado, que afirma que para una superficie regular inmersa en \mathbb{R}^3 el número de funciones de Morse que se pueden definir sobre ella es "muy grande".

Proposición 3.34. Sea M una superficie compacta en \mathbb{R}^3 y $B = \{r \in \mathbb{R}^3 : h_r \text{ es función de Morse}\}$. Entonces, B es un conjunto denso en \mathbb{R}^3 .

Demostración. Se elige un $r \in \mathbb{R}^3$ cualquiera y un entorno abierto $U \subset \mathbb{R}^3$ de r. Si r pertenece a la superficie, se podrá encontrar en U otro punto cualquiera que no esté contenido en M y un entorno de este punto que no se interseque con M. Por tanto, se va a suponer que $r \notin M$ y $U \cap M = \emptyset$. Si $r \in B$ es trivial que $U \cap B \neq \emptyset$. Por tanto, se supone también que $r \notin B$.

El hecho de que r no esté en el conjunto B significa que varios de los puntos críticos de la función h_r , definida en la Ec. (3.18), son degenerados. Al unir cada uno de estos puntos críticos con r, por la Proposición 3.33 se creará un haz de rectas perpendiculares a M que pasen por r y por cada uno de estos puntos críticos. Por otra parte, para estos puntos, su imagen por h_r será igual a la inversa de una de las curvaturas principales en dicho punto.

Por tanto, si se elige una de las rectas perpendiculares a M y se realiza un desplazamiento lo suficientemente pequeño a lo largo de esta recta para no salirse de U (escrito formalmente, se elige un punto crítico p y un $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño para que $\tilde{r} = (1 - \epsilon)r + \epsilon p$ esté en U) entonces p seguiría siendo un punto crítico para $h_{\tilde{r}}$, pero el resto de puntos críticos de h_r que no estuvieran en la recta que une p con r dejarían de serlo para $h_{\tilde{r}}$. Eligiendo además el desplazamiento apropiadamente, se conseguiría que $h_{\tilde{r}}$ fuera distinto a la inversa de cualquiera de las dos curvaturas

principales en p y para cualquier punto que descansase sobre la recta. Realizando este proceso un número finito de veces se encontraría un punto en U que perteneciera a B. Con esto, se tiene que B es denso en \mathbb{R}^3 .

Tras toda esta introducción teórica, se está en situación para poder comprobar que sobre cualquier superficie existe un campo vectorial cuyos ceros son puntos aislados. Este campo vectorial estará muy relacionado con alguna función de Morse. Para comprobarlo, se introduce a continuación la noción de campo gradiente.

Definición 3.35. Sea M una superficie en \mathbb{R}^3 y $f: M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Se define el *campo gradiente* de f como el campo vectorial $\nabla f: M \to \mathbb{R}^3$ tal que para cada $p \in M$, si $\mathbf{X} \in T_p M$ y N es un vector normal a $T_p M$, entonces

$$\langle (\nabla f)(p), \mathbf{X} \rangle = (f_*)_p(\mathbf{X}) \langle (\nabla f)(p), \mathbf{N} \rangle = 0$$
(3.19)

Los ceros de este campo gradiente están íntimamente relacionados con la función de origen; en concreto, la aplicación diferencial y el hessiano de f son de vital importancia para conocer propiedades de ∇f , como se comprueba en la siguiente proposición:

Proposición 3.36. Sea M una superficie en \mathbb{R}^3 y $f: M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones:

- (I) El campo gradiente ∇f tiene sus ceros en los puntos críticos de f.
- (II) Sea $p \in M$ un cero de ∇f . Entonces, el gradiente es no degenerado en p si y sólo si p es un punto crítico no degenerado de f según la Definición 3.29.

Demostración.

Demostración (I): Se obtiene inmediatamente a partir de la Ec. (3.19).

Demostración (II): Se toma un punto $p \in M$ en el que se anule ∇f , y se elige una curva $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \mathbf{X} \in T_p M$. Aplicando la Ec. (3.19),

$$\langle (\nabla f)(\boldsymbol{\alpha}(t)), \boldsymbol{\alpha}'(t) \rangle = \frac{d}{dt} (f \circ \boldsymbol{\alpha})(t)$$

Si se deriva esta expresión y se evalua en t = 0, se deduce que el hessiano de f será

$$(H_p f)(\boldsymbol{X}) = \langle (\nabla f_*)_p(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{X} \rangle + \langle (\nabla f)(p), \boldsymbol{\alpha}''(0) \rangle = \langle (\nabla f_*)_p(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{X} \rangle$$

porque $\nabla f(p) = 0$. Con esta igualdad se demuestra la propiedad.

Con estos enunciados, se puede ver que el hecho de que siempre se puedan definir funciones de Morse sobre una superficie compacta M implica que existen campos vectoriales tangentes a M con sus ceros aislados, con lo que todo el desarrollo teórico realizado en este capítulo no ha sido en vano. Sin embargo, se puede ser más ambicioso: ya que hay una relación directa entre los puntos críticos de una función de Morse y los ceros no degenerados del campo gradiente asociado, se puede tratar de encontrar una relación entre estos conceptos y, en consecuencia, con la característica de Euler y la curvatura íntegra. Para ello, se enuncia el siguiente teorema:

Teorema 3.37. Sea M una superficie compacta sin borde en \mathbb{R}^3 y $f: M \to \mathbb{R}$ una función de Morse sobre la superficie. Si se denota como ν_k el número de puntos críticos de índice k de f (k = 0, 1, 2), entonces

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{2} (-1)^k \nu_k \tag{3.20}$$

siendo $\chi(M)$ la característica de Euler de la superficie.

Demostración. Se define sobre la superficie M el campo gradiente ∇f . Este campo es diferenciable, tangente a M y con sus ceros aislados por ser f una función de Morse. Si se elige un punto crítico $p \in M$, por la Proposición 3.22 se tiene que

$$i(\nabla f, p) = \begin{cases} +1 & \text{si } \det(H_p f) > 0\\ -1 & \text{si } \det(H_p f) < 0 \end{cases}$$
(3.21)

Por el lema de Morse (Lema 3.31), para cada punto crítico se puede encontrar una parametrización en la que la matriz asociada a la forma cuadrática $H_p f$ sea diagonal, con k elementos iguales a -1 y el resto igual a +1. Por tanto, se tiene que det $(H_p f) = (-1)^k$. Si se aplica el teorema de Poincaré-Hopf y se suman los índices de ∇f para todos los ceros del campo, denotando por ν_k al número de puntos críticos con índice k, entonces por la Ec. (3.21)

$$\chi(M) = \sum_{p \in M} i(\nabla f, p) = \sum_{k=0}^{2} (-1)^{k} \nu_{k}$$

llegando así a la Ec. (3.20) y concluyendo así la demostración.

Capítulo 4

Consecuencias del teorema de Gauss-Bonnet

Tras estudiar el teorema de Gauss-Bonnet desde tres puntos de vista distintos, se analizan ahora diferentes consecuencias derivadas este teorema. En primer lugar, se utilizará el teorema para estudiar un tipo de superficies concretas conocidas como ovaloides y sus propiedades. Tras ello, se relacionará este teorema con otros resultados desarrollados con anterioridad a Gauss y a Bonnet: se comprobará que del teorema se deriva la pérdida de noción de semejanza en geometría elíptica e hiperbólica, y se finalizará el capítulo demostrando el teorema de los defectos angulares de Descartes, el cual se puede pensar como una versión discreta del teorema que da nombre a este trabajo.

4.1. Teorema de Hadamard

Una de las varias aplicaciones que se pueden encontrar para el teorema de Gauss-Bonnet es el estudio de las propiedades de un tipo de superficies conocidas como ovaloides. Estas estructuras son aquellas superficies compactas cuya curvatura de Gauss es positiva en cada punto. Este tipo de construcciones tienen unas propiedades interesantes desde el punto de vista de la convexidad, y su aplicación de Gauss también presenta unas características relevantes, como se verá a continuación. La principal referencia básica consultada para el desarrollo teórico de esta sección es [1].

Definición 4.1. Un *ovaloide* es una superficie regular M compacta y conexa tal que su curvatura de Gauss K es positiva en cada punto de la superficie, esto es, K > 0.



FIGURA 4.1: Representación gráfica de un elipsoide

En la Figura 4.1 aparece un elipsoide. Esta superficie es un ovaloide: sin entrar a realizar los cálculos, la curvatura de Gauss en cada uno de los puntos de la superficie es estrictamente positiva.

Antes de continuar hablando de esta figura, se enuncian un par de lemas que serán relevantes más adelante.

Lema 4.2. Si M es una superficie compacta y conexa con curvatura de Gauss K > 0, entonces M es homeomorfa a la esfera \mathbb{S}^2 .

Demostración. Como M es una superficie compacta y conexa (sin borde), por el teorema de clasificación de superficies compactas se tiene que su característica de Euler será $\chi(M) = 2 - 2g$ siendo g el género de M, que puede tomar valores enteros a partir del cero. Por tanto, $\chi(M) \in \{2, 0, -2, \ldots\}$. Como K(p) > 0 para todo $p \in M$, $\int_M K(p) dA > 0$, luego por el teorema de Gauss-Bonnet necesariamente $\chi(M) = 2$, con lo que M y la esfera \mathbb{S}^2 serán homeomorfas¹.

Lema 4.3. Sea M una superficie cualquiera con curvatura de Gauss K > 0. Si la aplicación de Gauss $\nu \colon M \to \mathbb{S}^2$ es un difeomorfismo local suprayectivo, entonces $4\pi \leq \int_M K(p) dA$.

Demostración. Este resultado se trata de una aplicación directa de la fórmula de cambio de variable, enunciada en el Teorema 3.6, para difeomorfismos locales suprayectivos (Ec. (3.4)). El jacobiano de la aplicación de Gauss es Jac $\nu = K > 0$. Por tanto, sin más que aplicar la fórmula,

$$4\pi = \int_{\mathbb{S}^2} dA' \le \int_M \operatorname{Jac} \boldsymbol{\nu} dA = \int_M K(p) dA$$

Volviendo a la Figura 4.1, se ha representado también el vector normal a la superficie en uno de sus puntos y el plano tangente correspondiente a este punto. Gráficamente se puede ver que, en este punto, el plano tangente deja a toda la superficie menos el propio punto en uno de los semiespacios abiertos en los que divide T_pM a \mathbb{R}^3 . Cuando una superficie cumple esta propiedad para cualquiera de sus puntos, se dice que es *estrictamente convexa*. Si el plano tangente deja a toda la superficie en uno de los semiespacios cerrados en los que divide T_pM a \mathbb{R}^3 para cualquier $p \in M$, la superficie se llama *convexa* (en este caso puede haber puntos de M que toquen T_pM). Esto no es algo casual: por el siguiente teorema, enunciado por Hadamard, se tiene que todos los ovaloides son estrictamente convexos. También se demostrará que la aplicación de Gauss asociada a un ovaloide es un difeomorfismo.

Teorema 4.4 (Teorema de Hadamard). Sea M un ovaloide según la Definición 4.1, esto es, una superficie compacta y conexa con curvatura de Gauss estrictamente positiva en cada punto.

- (I) Para cada $p \in M$, $M \setminus \{p\}$ está contenida en su totalidad en uno de los semiespacios abiertos en los que divide T_pM a \mathbb{R}^3 , es decir, M es estrictamente convexa.
- (II) La aplicación de Gauss $\nu \colon M \to \mathbb{S}^2$ es un difeomorfismo. En consecuencia, M es difeomorfa a la esfera \mathbb{S}^2 .

Demostración.

Demostración (I): En primer lugar, se prueba que si la aplicación de Gauss $\nu: M \to \mathbb{S}^2$ sobre la superficie es inyectiva el enunciado es cierto. Por reducción al absurdo, se supone que existe un $p \in M$ tal que $M \setminus \{p\}$ no está contenido en su totalidad en uno de los semiespacios abiertos en los que \mathbb{R}^3 queda dividido por $T_p M$. Utilizando la aplicación de Gauss, el plano tangente $T_p M$ tendrá ecuación $\langle z - p, \nu(p) \rangle = 0$. La función altura $h: M \to \mathbb{R}$ definida como $h(z) = \langle z - p, \nu(p) \rangle$ es una función definida sobre un compacto que asigna a cada punto z de la superficie la altura con signo a la que se encuentra del plano $T_p M$. Por estar definida sobre un compacto y ser continua, el teorema de Weierstrass afirma que existirán $x, y \in M$ en los que h alcanza su máximo y su mínimo respectivamente. La aplicación h es diferenciable, y su aplicación diferencial para cualquier $q \in M$, $(h_*)_q: T_q M \to \mathbb{R}$, se calcula a partir de la Definición 2.9:

$$(h_*)_q(\boldsymbol{X}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \boldsymbol{\alpha}(t) - p, \boldsymbol{\nu}(p) \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}'(0), \boldsymbol{\nu}(p) \rangle = \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{\nu}(p) \rangle$$
(4.1)

¹Este enunciado tiene una filosofía bastante similar al teorema de Gauss-Bonnet (de hecho se demuestra utilizando este teorema) en cuanto al hecho de tratar de relacionar conceptos geométricos con otros topológicos. En el Anexo I se presentarán más teoremas de la misma índole.

Para un punto crítico de una función, se cumple que la aplicación diferencial en dicho punto es idénticamente nula. Por tanto, por la Ec. (4.1) se deduce que cualquier $X \in T_x M$ es perpendicular a $\nu(p)$, al igual que todo $Y \in T_y M$. Esto implica que los vectores $\nu(p)$, $\nu(x)$ y $\nu(y)$ son paralelos.

Por la hipótesis realizada inicialmente, se puede dar el caso de que haya puntos de M en ambos semiespacios abiertos o que haya varios puntos de M contenidos en el plano T_pM . En el primer supuesto necesariamente debería haber algún punto de M en cada uno de los semiespacios producidos en la división por T_pM , con lo cual h podría tomar tanto valores positivos como negativos. Por ello, el máximo y el mínimo de h se alcanzarían en puntos que se encuentran en semiespacios distintos, luego $x \neq y$, encontrando así una contradicción entre el hecho de que $\nu(p), \nu(x)$ y $\nu(y)$ son paralelos y que ν es inyectiva. En el segundo supuesto, el mínimo (o el máximo, según la elección de ν) de htendría como imagen h(y) = 0. Por suponer que hay varios puntos en T_pM , se puede elegir un $y \neq p$ como mínimo de h, con lo que se llegaría a la misma contradicción que antes. Con todo esto, se puede concluir que estas dos situaciones no se pueden dar, con lo que M cumple la propiedad.

Demostración (II): En el razonamiento anterior se ha supuesto que ν es inyectiva. Se va a probar que, de hecho, ν es un difeomorfismo. En el Capítulo 3 se ha visto que Jac $\nu = K > 0$. Como el jacobiano es no nulo en cada punto de la superficie, se tiene que $(\nu_*)_p$ será un isomorfismo, así que aplicando el teorema de la función inversa se puede restringir a un entorno de p en el cual ν sea un difeomorfismo. Así pues, ν es un difeomorfismo local.

En cuanto a la sobreyectividad de ν , los difeomorfismos locales son funciones abiertas, luego $\nu(M)$ es un abierto en \mathbb{S}^2 . Además, ν por definición es una función continua sobre un compacto, por lo que $\nu(M)$ también es cerrado en \mathbb{S}^2 . Como $\nu(M)$ es no vacío y \mathbb{S}^2 es un espacio conexo, debe ser $\nu(M) = \mathbb{S}^2$.

Por último se prueba la inyectividad de ν . Si se supone que ν no es inyectiva, entonces existirán $p, q \in M$ dos puntos distintos tales que $\nu(p) = \nu(q) = \mathbb{Z}$. Se va a buscar un entorno E de p tal que $\nu(M \setminus E) = \mathbb{S}^2$. Como ν es un difeomorfismo local, entonces se pueden encontrar entornos U y Vde p y q respectivamente, y W_p y W_q de \mathbb{Z} tales que las restricciones de ν a los entornos de p y q, $\nu|_U: U \to W_p$ y $\nu|_V: V \to W_q$, son difeomorfismos. Como M es un espacio Haussdorf, se pueden elegir los entornos de tal manera que $U \cap V = \emptyset$. Tomando $W = W_p \cap W_q, U' = \nu^{-1}(W) \subset U$ y $V' = \nu^{-1}(W) \subset V$, las aplicaciones $\nu|_{U'}: U' \to W$ y $\nu|_{V'}: V' \to W$ son difeomorfismos. Como $\nu(U') = \nu(V')$ y ν es sobreyectiva, se puede tomar E = U'.

Por el Lema 4.2, la curvatura íntegra de la superficie es $\int_M K dA = 4\pi$. Entonces,

$$4\pi = \int_M K dA = \int_{M \setminus E} K dA + \int_E K dA \ge 4\pi + \int_E K dA > 4\pi$$

llegando así a una contradicción. La primera desigualdad se obtiene a partir del Lema 4.3 sobre la superficie $M \setminus E$, ya que $\nu \colon M \setminus E \to \mathbb{S}^2$ es un difeomorfismo local suprayectivo, y la segunda por el hecho de que K > 0. Por tanto, esta contradicción implica que ν necesariamente debe ser inyectiva, con lo que se tiene probado el resultado.

En un primer vistazo, uno podría pensar que la implicación inversa del punto (I) del Teorema 4.4 también es cierta, es decir, que si una superficie es convexa entonces su curvatura de Gauss en cada punto es estrictamente positiva. Sin embargo, esto no es necesariamente cierto. Para comprobar esto, se analiza la superficie de revolución obtenida al rotar la cuártica $\{z = y^4, x = 0\}$ respecto del eje z. Para trabajar con una superficie compacta M, se puede cortar la superficie de revolución de la cuártica a partir de un determinado valor de z y completar la superficie de manera diferenciable mediante el pegado diferenciable de un disco (este procedimiento se ha comentado sin entrar en detalles en el Capítulo 2; para mayor información, se puede consultar el artículo [12]). Una parametrización posible para un entorno del origen viene dada por $\mathbf{f}: (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3$ para un determinado $\epsilon > 0$, definida por $\mathbf{f}(u, v) = (u, v, (u^2 + v^2)^2)$. Se ha representado parte de esta superficie en la Figura 4.2.



FIGURA 4.2: Representación gráfica de parte de la cuártica de revolución

Claramente, f(0,0) = (0,0,0) luego el origen está en M. Se calculan las derivadas de esta parametrización hasta segundo orden:

$\mathbf{f}_1(u,v) = (1,0,4u(u^2+v^2))$	$\mathbf{f}_1(0,0) = (1,0,0)$
$\mathbf{f}_2(u,v) = (0, 1, 4v(u^2 + v^2))$	$\mathbf{f}_2(0,0) = (0,1,0)$
$\mathbf{f}_{11}(u,v) = (0,0,4(u^2+v^2)+8u^2)$	$\mathbf{f}_{11}(0,0) = (0,0,0)$
$\mathbf{f}_{12}(u,v) = (0,0,8uv)$	$\mathbf{f}_{12}(0,0) = (0,0,0)$
$\mathbf{f}_{22}(u,v) = (0,0,4(u^2+v^2)+8v^2)$	$\mathbf{f}_{22}(0,0) = (0,0,0)$

A partir de estos cálculos, está claro que un vector normal a la superficie en el origen es el vector N(0,0) = (0,0,1), luego el plano tangente en dicho punto tendrá ecuación z = 0. En la Figura 4.2 se representa este plano y un vector normal a la superficie en (0,0,0). Para cualquier $(x, y, z) \in M$ distinto al origen, es claro que z > 0 (en concreto, utilizando la parametrización $\mathbf{f}, u^2 + v^2 > 0$ si u o v son no nulos) por lo que el plano tangente en el origen deja todo $M \setminus \{(0,0,0)\}$ en el semiplano z > 0. Por otra parte, como $\mathbf{f}_{11}(0,0) = \mathbf{f}_{12}(0,0) = \mathbf{f}_{22}(0,0) = 0$ entonces $\det(L) = 0$ y, por tanto, la curvatura de Gauss en este punto será K(0,0) = 0. Esto muestra que la implicación contraria a la del Teorema 4.4 no es cierta.

4.2. Las tres geometrías

Se empieza, en esta sección, a relacionar el teorema de Gauss-Bonnet con resultados previos en el tiempo. Para ello, se define un *triángulo geodésico* sobre una superficie M como una región de la superficie delimitada por tres geodésicas. Si se trabaja dentro del plano, es ampliamente conocido que la suma de los ángulos interiores del triángulo debe ser π . Esto no es necesariamente cierto para otras superficies diferentes al plano. Si la suma de los ángulos interiores del triángulo se mayor que π , se define su *exceso angular* como la cantidad con la que esta suma sobrepasa el valor de π ; si, por el contrario, esta suma es menor que π , se llama *defecto angular* a la cantidad necesaria para que esta suma llegue a π .

La geometría plana con la que se trabaja habitualmente es la *geometría euclidiana*, en la cual se cumplen los cinco postulados de Euclides. En estas geometrías, se trabaja sobre 2-variedades con curvatura nula. Cuando una superficie regular M cumple unas determinadas propiedades relacionadas con sus geodésicas, se puede demostrar que su curvatura se anula en cada punto, como declara la siguiente proposición:

Proposición 4.5. Sea M una superficie regular tal que para cada $p \in M$ existe un entorno con dos familias de geodésicas que se intersecan con ángulo constante. Entonces, $K \equiv 0$.

Demostración. Se elige un $p \in M$ y se toma como superficie simple que contiene a p el entorno coordenado geodésico $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^3$ tal que cada conjunto de curvas $\{\mathbf{f}(u^1, b)\}, \{\mathbf{f}(a, u^2)\}$ se corresponde con una de las familias de geodésicas del enunciado. Tomando este entorno lo suficientemente pequeño, se puede asumir que es simplemente conexo.

Se eligen ahora cuatro geodésicas, dos de cada familia, de tal manera que encierren una región R que contenga al punto p. Si se llaman $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ a los ángulos que forman las tangentes de las geodésicas en cada punto de corte, considerando las orientaciones de los vectores y sabiendo que las tangentes se cortan con un ángulo constante, es inmediato que $\beta_i = \pi - \alpha_i$ para i = 1, 2. Por tanto,

$$\iint_R K(p)dA + \sum_{i=1}^2 \alpha_i + \sum_{i=1}^2 \beta_i = \iint_R K(p)dA + 2\pi$$

Aplicando el teorema local de Gauss-Bonnet y sabiendo que ∂R se parametriza con geodésicas, se llega a que $\iint_R K(p) dA = 0$. Esto ocurre para cualquier región que contenga a p y que esté dentro de la parametrización elegida. Por tanto, si se toma el límite $R \to \{p\}$, eligiendo cada vez regiones más pequeñas delimitadas por las geodésicas, se llega a que K(p) = 0 para cualquier $p \in M$. \Box

Si se analizan las características de los triángulos geodésicos dentro de la esfera \mathbb{S}^2 , se puede encontrar una estrecha relación entre sus ángulos interiores y su área. El teorema de Girard establece esta relación.

Teorema 4.6 (Teorema de Girard). Sea T un triángulo geodésico contenido en la esfera \mathbb{S}^2 . Si se llaman β_1 , β_2 , β_3 a los ángulos interiores del triángulo, entonces el área del triángulo A(T) es igual al exceso angular del triángulo, esto es,

$$A(T) = \sum_{i=1}^{3} \beta_i - \pi$$
(4.2)

Demostración. Es una aplicación directa del teorema local de Gauss-Bonnet. Por ser un triángulo geodésico, $\kappa_g = 0$ en cada punto del borde del triángulo. Como los ángulos exteriores son $\alpha_i = \pi - \beta_i$ para i = 1, 2, 3 y la curvatura de Gauss de \mathbb{S}^2 es K = 1 en cualquier punto del interior del triángulo, entonces

$$\iint_{T} K(p) dA + \int_{\partial T} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i = A(T) + \sum_{i=1}^{3} (\pi - \beta_i) = A(t) + 3\pi - \sum_{i=1}^{3} \beta_i$$

Igualando esto a 2π , se obtiene inmediatamente la Ec. (4.2).

El teorema de Girard tiene importantes consecuencias para la geometría sobre la esfera: en esta superficie se pierde el concepto de semejanza de triángulos. Es decir, no se pueden trazar dos triángulos geodésicos dentro de una esfera que tengan diferentes áreas y los mismos ángulos interiores. Esto es algo que ocurre en lo que se conoce como *geometrías no euclidianas*. Estas variedades son aquellas en las que se cumplen todos los postulados de Euclides a excepción del quinto, el cual establece que "si cayendo una linea recta sobre dos lineas rectas hiciere los ángulos interiores y de una misma parte menores que dos rectos, aquellas lineas rectas extendidas en infinito, es necesario que concurran hacia aquella parte en la cual estan los ángulos menores que dos rectos".

El caso de la esfera que se acaba de tratar es únicamente uno de los varios modelos que existen de lo que se conoce como *geometría elíptica*: para estas geometrías no euclidianas, el tensor métrico asociado proporciona una curvatura positiva. La esfera es un modelo local; a nivel global, el plano proyectivo es un modelo de geometría elíptica. Si el tensor métrico fuera tal que la curvatura fuera negativa, se entraría en el campo de la *geometría hiperbólica*. En estas geometrías tampoco se cumple el quinto postulado de Euclides. Para este tipo de geometrías también hay varios modelos, pero ninguno de ellos es inmersible de modo completo en \mathbb{R}^3 . Un modelo existente para el plano hiperbólico

es el semiplano superior de Poincaré, en el cual al semiplano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ se le dota del tensor métrico de Lobachevski definido por $g_{11} = g_{22} = 1/y^2$ y $g_{12} = g_{21} = 0$. A partir del teorema egregio de Gauss se puede comprobar que la curvatura de Gauss en este caso es K = -1. En este caso en concreto, la curvatura de Gauss es idénticamente K = -1. Un análogo al teorema de Girard para la geometría hiperbólica fue enunciado por Lambert, en el cual se utiliza el defecto angular en lugar del exceso.

Teorema 4.7 (Teorema de Lambert). Sea T un triángulo geodésico contenido en una superficie Men la que la curvatura de Gauss es constantemente K = -1. Si se llaman β_1 , β_2 , β_3 a los ángulos interiores del triángulo, entonces el área del triángulo A(T) es igual al defecto angular del triángulo, es decir,

$$A(T) = \pi - \sum_{i=1}^{3} \beta_i$$
 (4.3)

Demostración. Basta con aplicar directamente la Ec. (2.19) del teorema local de Gauss-Bonnet. Como el triángulo es geodésico, $\kappa_g = 0$ en ∂T . Los ángulos exteriores son $\alpha_i = \pi - \beta_i$ para i = 1, 2, 3 luego

$$\iint_{T} K(p) dA + \int_{\partial T} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i = -A(T) + \sum_{i=1}^{3} (\pi - \beta_i) = -A(t) + 3\pi - \sum_{i=1}^{3} \beta_i$$

Igualando esto a 2π , se llega inmediatamente a la Ec. (4.3).



FIGURA 4.3: Representación de triángulos geodésicos para diferentes geometrías

En la Figura 4.3 se ha hecho una representación sencilla para poder visualizar las diferencias de los triángulos entre las tres geometrías consideradas: la geometría plana o euclidiana, la geometría elíptica y la geometría hiperbólica. En cada caso, las sumas de los ángulos de los triángulos es diferente.

4.3. Teorema de los defectos angulares de Descartes

Hasta ahora, en este trabajo se han estudiado superficies diferenciables y se ha conectado su curvatura de Gauss con la superficie compacta a la cual es homeomorfa. Para ello, se ha empleado la característica de Euler. Sin embargo, hay espacios topológicos que son homeomorfos a superficies compactas y que no se pueden estudiar dentro de este marco. Un ejemplo de especial relevancia son los poliedros convexos: para cada uno de estos espacios topológicos se puede calcular la característica de Euler sin dificultades, pero la superficie no es diferenciable en sus aristas y vértices por lo que no se puede tratar con las técnicas de geometría diferencial utilizadas hasta ahora. Sin embargo, se puede encontrar un enunciado análogo al teorema de Gauss-Bonnet para este tipo de figuras. Para encontrar este resultado, se tendrá que viajar atrás en el tiempo hasta la época de Descartes, anterior a Gauss y a Bonnet.

Para motivar la aparición del teorema, se va a trabajar con uno de los poliedros más comunes: el cubo. Este sólido plátonico, formado por seis caras cuadradas, evidentemente no se trata de una superficie, ya que se encuentran problemas de diferenciabilidad en sus aristas y en sus vértices. Sin

embargo, se puede encontrar una sucesión de superficies regulares cuyo límite sea este poliedro. Se define la función $F_n \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que a cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se asigna el valor

$$F_n(x, y, z) = x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} - 1$$

Esta función es diferenciable por tratarse de un polinomio. Además, como para cada $p \in F_n^{-1}(\{0\})$ la aplicación diferencial $(F_{n*})_p \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es no nula, cada uno de los conjuntos $M_n = F_n^{-1}(\{0\})$ se tratará de una superficie regular.



FIGURA 4.4: Representación del conjunto M_n para diferentes valores de n

En la Figura 4.4 se ha representado el conjunto M_n para varios valores de n. En la última de estas representaciones se puede comprobar que, cuando $n \to \infty$, M_n parece aproximarse al cubo, el cual se denotará como C. En efecto, $M_n \xrightarrow{n \to \infty} C$ debido a la convergencia de las normas involucradas $\|\cdot\|_n \xrightarrow{n \to \infty} \|\cdot\|_{\infty}^2$. Sin entrar en rigor, al observar las imágenes uno se da cuenta de que hay partes de la esfera que se "aplanan", las cuales corresponderán más adelante a las caras del cubo. En otros puntos parece que en una de las direcciones principales de la superficie aumenta la curvatura; sin embargo, en la otra dirección principal la curvatura normal se acerca rapidamente a cero, por lo que da la sensación de que en estos puntos la curvatura de Gauss también se anulará. Por tanto, sólo restan los puntos que corresponden a los vértices de C cuando $M_n \xrightarrow{n \to \infty} C$: en esos lugares, la curvatura de Gauss crece con n.

Daría por tanto la impresión de que, al trabajar con un poliedro, toda la curvatura de Gauss se "concentraría" en sus vértices. Para ver que esto es así, se introduce un nuevo concepto. Un punto de un poliedro se dirá que es *euclídeo* si admite un entorno isométrico a un disco del plano \mathbb{R}^2 . Claramente, cualquier punto del interior de las caras del poliedro es euclídeo. También los puntos del interior de las aristas serían euclídeos, ya que las dos caras que tienen en común dicha arista se podrán desarrollar en el plano. Sin embargo, los vértices no son puntos euclídeos: al tratar de hacer un desarrollo plano del poliedro en dicho vértice el disco no se podrá "completar".

Por tanto, si se quiere estudiar un teorema análogo al teorema de Gauss-Bonnet para poliedros, el foco de atención se debería poner sobre los vértices. Se define entonces una noción que será esencial para el teorema de interés.

Definición 4.8. Sea C un poliedro en \mathbb{R}^3 . Para cada vértice $\{p_1, \ldots, p_v\}$ se define su *defecto angular* como la diferencia entre 2π y la suma de los ángulos formados por cada dos aristas consecutivas que concurren en el vértice. Se denotará como Δ_i para $i = 1, \ldots, v$.

Para el ejemplo del cubo comentado anteriormente, en cada vértice concurren tres caras que forman ángulos de $\pi/2$ cada una. Por tanto, el defecto angular en cada uno de los vértices del poliedro será $\Delta_i = 2\pi - 3\pi/2 = \pi/2$.

A partir del concepto de defecto angular se puede demostrar un resultado que se puede ver como un caso límite o discreto del teorema de Gauss-Bonnet. En este caso, el concepto de curvatura de

²En \mathbb{R}^n , se entiende $||x||_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \mathbf{y} ||x||_{\infty} = \max\{|x_i|: i = 1, \dots, n\}$. Siempre que no se indique lo contrario, se trabaja con la norma euclídea $||\cdot||_2$.

la superficie queda reemplazado por los defectos angulares de cada vértice. Por otra parte, cualquier poliedro convexo C es homeomorfo a la esfera \mathbb{S}^2 , por lo que sus características de Euler serán iguales³. Juntando estas observaciones, se enuncia el siguiente teorema.

Teorema 4.9 (Teorema de los defectos angulares de Descartes). Sea C un poliedro convexo con vértices $\{p_1, \ldots, p_v\}$ y respectivos defectos angulares $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_v\}$. Entonces,

$$\sum_{i=1}^{v} \Delta_i = 4\pi \tag{4.4}$$

Demostración. Sea C el poliedro convexo de interés, con f caras, e aristas y v vértices. Si se denota por S_i a la suma de los ángulos concurrentes en cada uno de los vértices (i = 1, ..., v), esta suma se relaciona con el defecto angular del vértice por $\Delta_i = 2\pi - S_i$. Calculando la suma S de todos los ángulos de las caras del poliedro, se tiene que

$$S = \sum_{i=1}^{v} S_i = \sum_{i=1}^{v} (2\pi - \Delta_i) = 2\pi v - \sum_{i=1}^{v} \Delta_i$$
(4.5)

FIGURA 4.5: Descomposición de un polígono en triángulos

Por otra parte, una cara que tiene j aristas se puede descomponer en j triángulos tal y como se ilustra en la Figura 4.5: por ser C convexo, se puede conectar un punto cualquiera del interior de la cara con sus vértices, dividiendo así esta cara en diferentes triángulos. Los ángulos interiores de cada uno de ellos sumarán π , por lo que eliminando el ángulo de 2π que se forma en el interior de la cara del polígono se tiene que la suma de los ángulos de esta cara será $j\pi - 2\pi$. Si se denota por f_j al número de caras con j aristas en el poliedro, donde el valor mínimo para j será 3 y el máximo será k, entonces

$$S = \sum_{j=3}^{k} (j\pi - 2\pi)f_j = \sum_{j=3}^{k} j\pi f_j - \sum_{j=3}^{k} 2\pi f_j = 2\pi e - 2\pi f$$
(4.6)

donde $\sum_{j=3}^{k} jf_j$ es igual a dos veces el número de aristas en *C* porque cada arista pertenece a dos caras distintas, y $f = f_3 + \ldots + f_k$. Igualando las Ecs. (4.5) y (4.6), se llega a la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=1}^{v} \Delta_i = 2\pi (f - e + v) = 2\pi \chi(C)$$

Como $\chi(C) = 2$, queda demostrada la igualdad dada en la Ec. (4.4).

³Esta afirmación se puede demostrar utilizando teoría de grafos planos. Sin embargo, no se dará la demostración por alejarse del objeto de estudio de este trabajo.

Capítulo 5

Conclusiones

Se va a hacer una recopilación con los resultados principales que se han demostrado en este trabajo. En primer lugar, se han demostrado las versiones clásicas del teorema de Gauss-Bonnet, tanto su versión local como global. Estos teoremas relacionan la curvatura íntegra de una superficie Mcon su característica de Euler $\chi(M)$. Aunque se ha comentado anteriormente, se debe hacer especial énfasis en lo sorprendente de este resultado: la curvatura íntegra $\iint_M K(p) dA$ se calcula mediante una integral, por lo que da la sensación de que el resultado debería ser un valor cualquiera en \mathbb{R} . Sin embargo, comprobar que el conjunto de valores que puede tomar esta integral es numerable es algo singular.

La característica de Euler normalmente se calcula mediante triangulaciones. Sin embargo, se ha visto en este trabajo que también se puede conocer mediante otros métodos. En concreto, se han demostrado el teorema de Poincaré-Hopf y una caracterización mediante funciones de Morse. Si se llama X a un campo vectorial involucrado en el teorema de Poincaré-Hopf y ν_k a los ceros de índice k de una función de Morse definida sobre M, entonces

$$\chi(M) = \sum_{p \in M} i(\mathbf{X}, p) = \sum_{k=0}^{2} (-1)^k \nu_k$$

Poder relacionar un concepto como es la curvatura íntegra con otros tres que, a primera vista, parece que no guardan ningún tipo de relación entre sí es un hecho bastante asombroso.

El teorema de Gauss-Bonnet es un ejemplo de lo que hoy en día se llamaría "think outside the box". Esta filosofía, muy venerada dentro del mundo empresarial, implica buscar siempre una nueva perspectiva para afrontar un problema, ir más allá de los límites establecidos. Este teorema es un ejemplo de lo más literal sobre cómo afrontar esta filosofía: para estudiar la curvatura íntegra de una superficie, Gauss y Bonnet traspasaron la frontera establecida en el marco de la geometría diferencial y vieron el problema desde la perspectiva de la topología algebraica, obteniendo así un resultado muy creativo.

Este trabajo se abrió hablando de pompas de jabon, superficies inmersas en el espacio euclideo. Durante el desarrollo, se ha comprobado que, a pesar de que puedan adoptar formas realmente extrañas y con curvaturas interesantes, su estructura topológica seguirá siendo la misma que la esfera (suponiendo que la pompa no tenga otras burbujas pegadas ni en su interior). Por tanto, desde el punto de vista matemático no hay una diferencia importante entre un niño pequeño con un pompero de juguete y un artista callejero haciendo espectáculos; topológicamente, son equivalentes.

Bibliografía

- [1] Angel M. Amores Lázaro. Curso básico de curvas y superficies. Madrid: Sanz y Torres, 2001.
- [2] Manfredo P. do Carmo. Geometría diferencial de curvas y superficies. Madrid: Alianza, 1990.
- [3] Manfredo P. do Carmo. *Riemannian geometry*. 2.^a ed. Boston [etc.]: Birkhäuser, 1992.
- [4] Shiing-Shen Chern. «A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed riemannian manifolds». En: *Ann. of Math.* 45.4 (1944), págs. 7747-752.
- [5] Morris W. Hirsch. *Differential topology*. Nueva York: Springer, 1976.
- [6] Z. Li y B. Lu. *Report on Gauss-Bonnet theorem for 2-orbifold*. [Online; acceso 07-06-2019]. Washington University in St. Louis, 2018.
- [7] Jerrold E. Marsden y Anthony J. Tromba. *Cálculo vectorial*. 5^a edición. Madrid: Pearson Educación, 2004.
- [8] William S. Massey. A basic course in algebraic topology. Nueva York: Springer, 1991.
- [9] Richard S. Millman y George D. Parker. *Elements of differential geometry*. Englewood Hills, N.J.: Prentice-Hall, 1977.
- [10] Sebastián Montiel y Antonio Ros. *Curves and surfaces*. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2005.
- [11] James R. Munkres. *Topología*. 2^a edición. Madrid: Prentice Hall, 2001.
- [12] Richard S. Palais. «A topological Gauss-Bonnet theorem». En: J. Differential Geom. 13.3 (1978), págs. 385-398.
- [13] M. Spivak. Cálculo en variedades. Barcelona: Reverté D.L., 1987.
- [14] Hung-Hsi Wu. «Historical development of the Gauss-Bonnet theorem». En: Sci. China Ser. A 51.4 (2008), págs. 777-784.

Anexo I

Otros teoremas que relacionan geometría con topología

En este anexo se presentan varios teoremas que, al igual que el teorema de Gauss-Bonnet, establecen relaciones entre la geometría de una variedad diferenciable y su topología. Muchos de los teoremas que aquí aparecen están formulados para variedades riemannianas de cualquier dimensión, sin estar restringidos a superficies regulares inmersas en \mathbb{R}^3 . Los enunciados de estos teoremas se han extraído de [2] y [3], aunque se pueden encontrar en la mayoría de libros sobre variedades diferenciables.

Dentro de estos resultados que tienen filosofía "a partir de propiedades geométricas obtengo propiedades topológicas", se pueden diferenciar dos tipos de teoremas: aquellos en los que, utilizando herramientas geométricas, se pueden deducir propiedades topológicas de la variedad; y otros en los que, al forzar a una variedad a cumplir determinadas condiciones geométricas, se obtienen restricciones topológicas concretas. El teorema de Gauss-Bonnet entraría en el primer tipo de resultados: si se conoce la curvatura de Gauss de una superficie en cualquier punto se puede saber a qué superficie compacta es difeomorfa dentro del teorema de clasificación de superficies compactas.

Un enunciado que entraría en el segundo tipo de resultados se enunció y demostró en la Sección 4.1 del Capítulo 4. Este enunciado es el Lema 4.2; se enuncia ahora en forma de teorema para que figure en esta recopilación.

Teorema I.1. Si M es una superficie compacta en \mathbb{R}^3 y conexa con curvatura de Gauss K > 0, entonces M es difeomorfa a la esfera \mathbb{S}^2 .

Este teorema estaría dentro del segundo grupo de resultados porque se estan dando características concretas sobre la curvatura K. La restricción topológica asociada a este teorema se puede hacer más fuerte modificando ligeramente las condiciones del enunciado: si en lugar de hacer que la curvatura de Gauss sea estrictamente positiva se obliga a que sea constante, se obtiene el siguiente teorema, conocido como teorema de la rigidez de la esfera.

Teorema I.2 (Teorema de rigidez de la esfera). Sea M una superficie en \mathbb{R}^3 compacta y conexa, con curvatura de Gauss K constante. Entonces, M es una esfera¹.

La palabra "rigidez" que aparece en el nombre del teorema se refiere a que la esfera no se puede deformar aplicando isometrías². Siendo más precisos, supongamos que se tiene una isometría $F: \mathbb{S}_r^2(a) \to M$ entre la esfera de radio r > 0 y centro a y la superficie M. Como la curvatura permanece invariante frente a isometrías, M tendrá curvatura constante. Además, por ser F continua, como $\mathbb{S}_r^2(a)$ es compacta y conexa también debe serlo M. Entonces, por el teorema que se acaba de enunciar, M debe ser una esfera de radio r (porque K permanece invariante), por lo que $\mathbb{S}_r^2(a)$ no se

¹Como se verá en este anexo al enunciar el teorema de Hilbert, no es necesario pedir que K sea estrictamente positiva.

²Un difeomorfismo $F: M \to M'$ es una isometría si preserva el tensor métrico. Es decir, para cualquier $p \in M$ y para todo $X, Y \in T_pM, g(X, Y) = g'((F_*)_p(X), (F_*)_p(Y)).$

ha deformado mediante la isometría.

Se pasa ahora a enunciar resultados para variedades de cualquier dimensión. Para poder entender alguno de estos teoremas de carácter global, hay que introducir algunos nuevos conceptos.

Definición I.3. Sea M una variedad riemanniana. Para cada punto $p \in M$ se puede definir, eligiendo una bola abierta centrada en el origen y de radio r > 0 lo suficientemente pequeño, $B(r) \subset T_p M$, la *aplicación exponencial* $\exp_p: B(r) \to M$, que a cada $\mathbf{X} \in B(r)$ le asigna $\exp_p(\mathbf{X}) = \gamma_{\mathbf{X}}(1)$, donde γ es la única geodésica en M con $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = \mathbf{X}$.

Esta aplicación es un difeomorfismo local. Es evidente que, dependiendo de la variedad riemanniana, no siempre se podrá definir esta aplicación de manera global. Para el siguiente teorema que se quiere presentar, se necesita que M sea conexa por caminos y la aplicación exponencial se pueda definir globalmente. Surge así esta definición.

Definición I.4. Una variedad riemanniana M conexa por caminos se dice *geodésicamente completa* si para cada $p \in M$ la aplicación exponencial \exp_p se puede definir en todo T_pM .

Se busca también una manera de dotar a una variedad conexa por caminos (no necesariamente geodésicamente completa) de estructura de espacio métrico. Para ello, si se escribe $L(\gamma_{a,b})$ para referirse a la longitud de γ entre los puntos a, b de la curva, se define la aplicación $d: M \times M \to \mathbb{R}$ como

$$d(p,q) = \inf L(\boldsymbol{\gamma}_{p,q})$$

para cualesquiera $p, q \in M$, siendo $\gamma_{p,q}$ curvas diferenciables a trozos que unen p con q. Esta aplicación cumple las propiedades requeridas para que sea una distancia, por lo que M adopta estructura de espacio métrico con la aplicación d. Esta estructura de espacio métrico está tremendamente relacionada con la estructura topológica como variedad diferenciable de M.

Proposición I.5. *La topología inducida por la aplicación d en M coincide con la topología original como variedad diferenciable de M.*

Ahora se está en condiciones de enunciar el teorema de Hopf-Rinow, que habla de la completitud de M como espacio métrico.

Teorema I.6 (Teorema de Hopf-Rinow). Sea M una variedad riemanniana conexa (por caminos). Entonces, las siguientes propiedades son equivalentes:

- (I) Los conjuntos cerrados y acotados de M son compactos.
- (II) *M* es un espacio métrico completo.
- (III) M es geodésicamente completo, o lo que es lo mismo, la aplicación \exp_p está definida en todo T_pM para cualquier $p \in M$.

Además, si se cumplen las condiciones anteriores, para cualquier pareja de puntos $p,q \in M$ se puede encontrar una geodésica que una p con q y minimice las distancias, es decir, con longitud igual a d(p,q).

Este teorema tiene una implicación importante para las superficies regulares conexas por caminos inmersas en \mathbb{R}^3 : como todos los conjuntos cerrados y acotados en \mathbb{R}^3 son compactos, entonces para las superficies regulares cerradas y conexas (por caminos) se tiene el siguiente corolario.

Corolario I.7. Una superficie regular M inmersa en \mathbb{R} , cerrada y conexa, es completa. Por tanto, para dos puntos cualesquiera de la superficie se puede encontrar una geodésica de longitud minimizante que los una.

En realidad, para este trabajo la parte más importante de toda la teoría introducida para hablar de este teorema es que se puede conocer la estructura topológica de la variedad a partir de la estructura

métrica definida por la aplicación d. En este caso, a partir de herramientas geométricas se ha obtenido información relevante sobre la estructura topológica de la variedad riemanniana.

Para los siguientes teoremas, se necesita introducir algún concepto relacionado con la curvatura de una variedad riemanniana. Para ello, se define la curvatura seccional.

Definición I.8. Sea M una variedad riemanniana y $p \in M$ un punto de la variedad. Si se elige un plano cualquiera $\Pi \subset T_p M$, se define la *curvatura seccional* respecto de Π como la curvatura de Gauss de la superficie $\exp_p(\Pi)$ en el punto p (en realidad se debería tomar como dominio un entorno abierto del origen para que \exp_p no dé problemas), siendo \exp_p la aplicación exponencial definida anteriormente. Esta curvatura se denotará como $K(p, \Pi)$.

Esta definición que se acaba de dar es realmente una interpretación geométrica de la curvatura seccional. Para definir el concepto formalmente se debería utilizar el tensor de curvatura de la variedad, pero el cálculo no aporta nada relevante en este anexo.

Se enuncia entonces un teorema conocido como teorema de Hadamard (distinto al que da nombre a la Sección 4.1 del Capítulo 4), que aporta información sobre la estructura topológica de una variedad riemanniana tras imponer ciertas condiciones al signo de la curvatura seccional.

Teorema I.9 (Teorema de Hadamard). Sea M una variedad riemanniana completa y simplemente conexa con curvatura seccional $K(p,\Pi) \leq 0$ para todo $p \in M$ y cualquier $\Pi \subset T_p M$. Entonces M es difeomorfa a \mathbb{R}^n donde $n = \dim M$. En concreto, $\exp_p: T_p M \to M$ es un difeomorfismo.

Este teorema se puede aplicar a las superficies en \mathbb{R}^3 : las superficies regulares M inmersas en \mathbb{R}^3 que sean completas, simplemente conexas y con curvatura de Gauss $K \leq 0$ son difeomorfas a \mathbb{R}^2 .

Para que se cumpla el teorema de Hadamard no es necesario que la curvatura seccional tome un valor constante. Es más, en el caso de superficies inmersas en \mathbb{R}^3 esto no es posible por el teorema de Hilbert.

Teorema I.10 (Teorema de Hilbert). Una superficie M completa con curvatura constante negativa no se puede aplicar en \mathbb{R}^3 mediante una inmersión isométrica.

El teorema de Hilbert demuestra que el plano hiperbólico no admite una inmersión isométrica en \mathbb{R}^3 . Por tanto, los modelos de geometría hiperbólica no se pueden aplicar isométricamente en \mathbb{R}^3 , al contrario de algunos modelos de geometría elíptica como es la esfera \mathbb{S}^2 .

Finalmente, se muestra un último teorema en el que se acota la curvatura seccional de la variedad riemanniana para obtener así información sobre la topología. Este teorema se conoce como teorema de la esfera.

Teorema I.11 (Teorema de la esfera). Sea M una variedad riemanniana compacta y simplemente conexa cuya curvatura seccional toma como valor máximo K_{max} . Si

$$0 < \frac{1}{4}K_{max} < K(p,\Pi) \le K_{max}$$

para cualquier $p \in M$ y $\Pi \subset T_p M$ entonces M es homeomorfa a una esfera.

En el caso específico de superficies inmersas en \mathbb{R}^3 el resultado se aplica correctamente utilizando la curvatura de Gauss. Este teorema sería una versión específica del Teorema I.1, por lo que se demostraría aplicando directamente el teorema de Gauss-Bonnet.

El valor 1/4 elegido en la desigualdad no es un número aleatorio, sino que es una cota que no se puede mejora. Si se toman valores pares para la dimensión n de M, se puede comprobar que el espacio proyectivo complejo $P_n(\mathbb{C})$ es compacto y simplemente conexo, y su curvatura seccional toma valores en el intervalo [1/4, 1] (en concreto alcanza el valor 1/4). Sin embargo, $P_n(\mathbb{C})$ no es homeomorfo a una esfera. Para valores impares de n, la desigualdad $K_{max}/4 < K(p, \Pi)$ se puede sustituir por $K_{max}/4 \leq K(p, \Pi)$ y el teorema seguiría siendo cierto.

Anexo II

Generalizaciones del teorema de Gauss-Bonnet

En este anexo se presentan varios generalizaciones del teorema de Gauss-Bonnet, tanto para objetos similares a superficies regulares en \mathbb{R}^3 como para variedades diferenciables de dimensión superior a 2. El esquema seguido para estructurar la sección ha sido el que sigue el artículo [14].

II.1. Orbifolds

El teorema de Gauss-Bonnet, tal y como se ha enunciado, está restringido a variedades compactas, lo cual asegura que la curvatura íntegra se pueda calcular. Esto hace que el teorema no se pueda aplicar a otras superficies interesantes, como es el cono de una hoja sin el vértice. Si se restringe el dominio del cono, "cortándolo" por la base, añadiendo un borde y también el vértice, se obtendría un conjunto compacto en \mathbb{R}^3 . Sin embargo, sigue sin poder aplicarse el teorema de Gauss-Bonnet a este conjunto, ya que no se trata de una superficie regular (se encuentran problemas de diferenciabilidad en el vértice). Por otra parte, se ha encontrado un caso límite del teorema de Gauss-Bonnet para poliedros utilizando el concepto de defecto angular en sus vértices, por lo que parece lógico pensar que algo similar se puede encontrar para el vértice del cono. Surge así el concepto de *orbifold*, similar al de variedad diferenciable pero con algún añadido. Los siguientes conceptos y resultados se han extraído de [6]. En este anexo se manejarán conceptos de dimensión 2 para que sean más cercanos al resto del trabajo, pero son fácilmente generalizables a cualquier dimensión *n*. Por tratarse de un anexo, muchos conceptos se analizarán desde un punto de vista muy lejano, por lo que se recomienda leer la referencia indicada si se deseea profundizar en el tema.

Un 2-orbifold se puede definir como un espacio Haussdorf M_O dotado con un atlas \mathcal{A} . Dentro de este atlas se encuentran cartas que se definen mediante los elementos $\{\widetilde{U}, G, \phi\}$: \widetilde{U} es un conjunto abierto conexo en \mathbb{R}^2 ; G es un subgrupo finito de O(2), formado por automorfismos diferenciables de \widetilde{U} ; y ϕ : $\widetilde{U} \to U \subset M_O$ es una aplicación continua que induce un homeomorfismo del espacio cociente \widetilde{U}/G en U. Esta definición se puede ver como una generalización de la definición de 2variedad, sin más que tomar el grupo trivial para definir las cartas del atlas. La compatibilidad entre cartas de un mismo atlas estará relacionada con los grupos de automorfismos unidos a ellas. Un ejemplo típico de orbifold es la gota de agua, que se representa en la Figura II.1.

Dentro de la construcción, hay puntos que se quedan invariantes bajo la acción de algunos elementos del grupo de cada carta. Los puntos del orbifold que tienen esta propiedad forman el conjunto de *puntos singulares*. Para el caso de 2-orbifolds compactos, los automorfismos que dejan fijo un punto singular son rotaciones en las que se gira un ángulo de $2\pi/n$ para un determinado $n \in \mathbb{Z}_+$.

El cardinal del conjunto formado por los elementos que dejan invariantes a estos puntos singulares se utiliza al definir la característica de Euler de un 2-orbifold. Lo interesante para estas construcciones



FIGURA II.1: Gota de agua, ejemplo de orbifold [6]

es que, en general, $\chi(M_O)$ no será un número entero sino que tomará un valor racional. También se utiliza dicho cardinal para calcular la integral de la curvatura de Gauss.

Se enuncian entonces las versiones local y global del teorema de Gauss-Bonnet para 2-orbifolds.

Teorema II.1 (Teorema local de Gauss-Bonnet para 2-orbifolds). Para cualquier región U de un 2-orbifold homeomorfa al disco unidad en \mathbb{R}^2 , se tiene

$$\iint_{U} K(p) dA + \int_{\partial U} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 2\pi \chi(U)$$
(II.1)

donde K es la curvatura de Gauss, κ_g la curvatura geodésica del borde cuando se recorre con orientación positiva, α_i son los ángulos que forman los vectores tangente en los puntos singulares de la curva y $\chi(U)$ la característica de Euler de U.

Teorema II.2 (Teorema global de Gauss-Bonnet para 2-orbifolds). Sea M_O un 2-orbifold compacto y sin borde. Entonces,

$$\iint_{M_O} K dA = 2\pi \chi(M_O) \tag{II.2}$$

donde K es la curvatura de Gauss y $\chi(M_O)$ la característica de Euler del orbifold.

II.2. Variedades de cualquier dimensión

En el teorema de Gauss-Bonnet entran en juego dos conceptos importantes: la característica de Euler y la curvatura de Gauss. Para generalizar la característica de Euler a variedades de dimensión mayor, se deben utilizar herramientas relacionadas con la homología de espacios topológicos. Si se tiene un complejo de cadenas asociado a un espacio topológico X, se define el *k-ésimo numero de Betti* β_k del espacio topológico como el rango del *k*-ésimo grupo de homología del complejo de cadenas. Entonces, se puede definir para cualquier espacio topológico la *característica de Euler* como la suma alternada de los números de Betti (cuando esta suma tenga sentido), esto es,

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \beta_k \tag{II.3}$$

Estos números no son independientes entre sí: por ejemplo, si se trabaja con una variedad diferenciable de dimensión n, $\beta_k = \beta_{n-k}$. Esta igualdad tiene un resultado interesante para variedades de dimensión impar: su característica de Euler es $\chi(M) = 0$.

Al trabajar con variedades diferenciables de cualquier dimensión, surgen algunas preguntas de manera natural: ¿el teorema de Poincaré-Hopf se puede aplicar para variedades de cualquier dimensión o sólo se aplica para 2-variedades? ${}_{c}Y$ el acercamiento mediante funciones de Morse? La respuesta a ambas preguntas es afirmativa: los conceptos de índice de un campo vectorial y funciones de Morse sobre una variedad de cualquier dimensión se pueden definir de manera bastante similar a la desarrollada durante este texto. Se enuncian los teoremas generales:

Teorema II.3 (Teorema de Poincaré-Hopf). Sea M una variedad diferenciable compacta y X un campo vectorial diferenciable, tangente a M y con sus ceros aislados. Entonces,

$$\chi(M) = \sum_{p \in M} i(\boldsymbol{X}, p) \tag{II.4}$$

Teorema II.4. Sea M una variedad diferenciable compacta de dimensión $n \ y \ f \colon M \to \mathbb{R}$ una función de Morse definida sobre M. Si se denota como ν_k a los puntos críticos de índice k de la función, entonces

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \nu_k$$
(II.5)

La forma más obvia de generalizar el teorema de Gauss-Bonnet a variedades de dimensión superior es comenzar trabajando con hipersuperficies en \mathbb{R}^{2n+1} (de esta manera, la dimensión de la hipersuperficie será par; en caso contrario se tendría $\chi(M) = 0$). En esta situación se puede hablar de la aplicación de Gauss, ya que la codimensión de la hipersuperficie es 1 por definición. Esta aplicación se puede definir siempre de forma local, y de manera global para algunas hipersuperficies.

Se trabaja con una hipersuperficie M compacta y orientable en \mathbb{R}^{2n+1} . El concepto de curvatura de Gauss se debe sustituir en esta situación por lo que se conoce como *formas de curvatura*, que son 2-formas diferenciales que se pueden obtener a partir del tensor de curvatura R (para variedades de dimensión impar las formas de curvatura se anulan). Si se junta a este tensor el valor del volumen de la esfera \mathbb{S}^{2n} y la aplicación diferencial de la aplicación de Gauss y se realizan varios cálculos, se obtiene un integrando Ω que es el que participa en el enunciado del teorema de Gauss-Bonnet para hipersuperficies. La siguiente versión del teorema fue enunciada por primera vez por Hopf en 1925:

Teorema II.5 (Teorema de Gauss-Bonnet para hipersuperficies). Sea M una hipersuperficie en \mathbb{R}^{2n+1} compacta y orientable. Entonces,

$$\int_{M} \Omega = \chi(M) \tag{II.6}$$

Si se pretende aplicar un procedimiento similar para variedades 2n-dimensionales compactas, orientables e inmersas en \mathbb{R}^{2n+k} , siendo k > 1, se podrá comprobar que hay un problema importante que solventar: en este caso no se puede definir una aplicación de Gauss, ya que la codimensión de la variedad M no es uno. Para solucionar este problema, se puede utilizar un entorno tubular T de la variedad (introducidos en este trabajo en la primera sección del Capítulo 3). Si se asume que k es un número impar, entonces la frontera ∂T del entorno tubular será una hipersuperficie de dimensión par, por lo que se podrá aplicar el teorema de Gauss-Bonnet para hipersuperficies. Se puede relacionar la característica de Euler del entorno tubular con la de la variedad M, al igual que el integrando Ω^T para ∂T con el integrando Ω para M. Esto no es trivial, pero tiene como resultado una nueva generalización del teorema de Gauss-Bonnet.

Teorema II.6 (Teorema de Gauss-Bonnet para variedades inmersas). Sea M una variedad riemanniana compacta y orientable de dimensión 2n en \mathbb{R}^{2n+k} para k > 1. Entonces, se cumple

$$\int_{M} \Omega = \chi(M) \tag{II.7}$$

Actualmente se conoce el teorema de Nash, que establece que cada variedad riemanniana es inmersible mediante un embleding en un espacio euclideo \mathbb{R}^n . Por tanto, en la actualidad bastaría con conocer estas dos versiones del teorema de Gauss-Bonnet para poder aplicarlo a cada variedad riemanniana. Sin embargo, antes de que Nash enunciase este teorema, Chern publicó en 1944 un artículo en el que mostraba un método para calcular Ω para cualquier variedad M, sin necesidad de hacer una inmersión en un espacio euclideo mediante un embedding. El artículo en el que se realizó la demostración es [4], y su enunciado es el siguiente:

Teorema II.7 (Teorema de Gauss-Bonnet-Chern). Sea M una variedad riemanniana compacta y orientable de dimensión par, con característica de Euler $\chi(M)$. Entonces,

$$\int_{M} \Omega = \chi(M) \tag{II.8}$$