



*Facultad
de
Ciencias*

LA VARIEDAD GRASSMANNIANA
(GRASSMANNIAN MANIFOLD)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al
GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Mauricio André Garcés Sandoval

Director: Fernando Etayo Gordejuela

junio - 2019

Resumen

En este trabajo introduciremos la variedad de Grassmann o Grassmanniana y la veremos desde distintos puntos de vista de las Matemáticas. La Grassmanniana se define como el conjunto de subespacios vectoriales de dimensión k de un espacio vectorial de dimensión n . Admite estructura de variedad diferenciable compacta y conexa de dimensión $k(n - k)$. Es además un espacio homogéneo, es decir, es cociente de un grupo de Lie sobre un subgrupo de Lie cerrado. Es un objeto matemático muy rico en propiedades topológicas, geométricas y algebraicas. Además, se presentan las principales propiedades de esta variedad, tanto en el caso real como en el complejo, incluyendo su relación con la variedad de Stiefel y con el espacio proyectivo. Y por último se usa el embebimiento de Plücker para ver a la variedad Grassmanniana como conjunto algebraico.

Palabras clave: Grassmanianna, Grassmann, proyectivo, variedad, diferenciable.

Abstract

In this work we will introduce the Grassmannian manifold or Grassmannian and will see it from the different points of view of Mathematics. The Grassmannian is defined as the set of vector subspaces of dimension k of a vector space of dimension n . It is a compact and connected smooth manifold of dimension $k(n - k)$. It is also a homogeneous space, i.e. it is the quotient of a Lie group over a closed Lie subgroup. It is a mathematical object with a lot of topological, geometric and algebraic properties. In addition, we present the main properties of this variety, both in the real case and in the complex case, including its relationship with the Stiefel variety and with the projective space. And finally, Plücker's embedding is used to see the Grassmannian variety as an algebraic set.

Key words: Grassmanianna, Grassmann, proyectivo, variedad, diferenciable.

Índice

1. Introducción	1
1.1. Notación	3
2. El espacio proyectivo	3
2.1. Espacio proyectivo y subespacios proyectivos	3
2.2. El espacio proyectivo real	4
3. Espacios homogéneos	6
3.1. Grupos y Álgebras de Lie	6
3.2. El espacio proyectivo complejo	7
3.3. Grupos Clásicos	9
3.4. Espacios homogéneos	9
4. La Variedad de Grassmann	12
4.1. Grassmannianas reales	12
4.2. La variedad de Grassmann vista como espacio homogéneo	17
4.2.1. Difeomorfismo entre $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ y $Gr_{n-k,n}(\mathbb{R})$	23
4.2.2. Propiedades topológicas de la Grassmanniana	24
4.2.3. La Grassmanniana orientada	24
4.3. La Grassmanniana compleja	25
4.4. Correlaciones en el espacio proyectivo	28
5. Variedad de Stiefel y su relación con la de Grassmann	32
5.1. La Variedad de Stiefel vista como espacio homogéneo	32
5.2. Relación con la Variedad de Grassmann	34
5.3. Proyecciones y simetrías.	35
5.3.1. Proyecciones.	35
5.3.2. Simetrías o reflexiones.	35
6. Embebimiento de Plücker	37
6.1. Álgebra exterior	37
6.2. Embebimiento de Plücker	38
6.3. Coordenadas locales en la variedad de Grassmann	46
6.4. Relaciones de Plücker	48

1. Introducción

En el presente Trabajo Fin de Grado vamos a describir el conjunto de todos los subespacios vectoriales de una misma dimensión k de un espacio vectorial $\mathbb{K}^n$ de dimensión n , es decir, la Grassmanniana $Gr_{k,n}(\mathbb{K})$. Vamos a usar siempre el espacio vectorial $\mathbb{K}^n$ sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dicho conjunto tiene la propiedad de ser un espacio topológico, una variedad diferenciable y una variedad algebraica que tiene propiedades topológicas, algebraicas y geométricas muy ricas. En particular, la variedad de Grassmann generaliza el concepto de espacio proyectivo ya que cuando $k = 1$, tenemos que $Gr_{1,n}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}\mathbb{P}^{n-1}$. Obsérvese que estamos dando un paso de abstracción significativo: cada subespacio de dimensión k de $\mathbb{K}^n$ lo vemos como un punto de un nuevo espacio matemático, la Grassmanniana. Estudiaremos los casos $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ y $\mathbb{V} = \mathbb{C}^n$ y dotaremos a la Grassmanniana $Gr_{k,n}(\mathbb{K})$ de diferentes estructuras, como acabamos de indicar.

El precursor de dicha variedad es Hermann Günther Grassmann (1809 – 1877), un matemático alemán del siglo XIX. Grassmann es considerado un polímata porque además de dedicarse a las matemáticas, también ejerció de físico, humanista y editor. En su obra maestra *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*, más conocido como *Ausdehnungslehre*, que se puede traducir como “teoría de la extensión” o “teoría de las magnitudes extensivas” habla sobre el álgebra exterior que se usa en la geometría diferencial y que nos servirá para definir de un modo algebraico la Grassmanniana. Dicha obra pasó inadvertida hasta después de su muerte y logró su auge con la Teoría de la Relatividad de Einstein.

En el primer capítulo de esta memoria definimos espacio proyectivo y damos un pequeño resumen de sus propiedades (por ejemplo la Proposición 2.3 que habla de proyectivización que es muy importante a lo largo del trabajo). El espacio proyectivo es el conjunto de todas las rectas vectoriales de un espacio vectorial de dimensión n . Veremos con cierto detalle los espacios proyectivos reales y complejos, que son variedades diferenciables gracias a los Teoremas 2.5 y 3.6, con importantes propiedades topológicas. Hay una notable diferencia entre el espacio proyectivo real y el complejo: el real se puede obtener como cociente de la esfera por la acción de un grupo propiamente discontinuo de difeomorfismos y el complejo es cociente de la esfera y del grupo de Lie de los complejos de norma uno, es decir, la circunferencia. Por este motivo posponemos el estudio del espacio proyectivo complejo hasta después del estudio de los grupos de Lie.

En el siguiente capítulo hablaremos sobre los grupos de Lie¹ que son variedades diferenciables reales o complejas con estructura de grupo y tal que las operaciones de grupo son diferenciables (o analíticas). Una vez definidos los grupos de Lie toca hablar de las variedades homogéneas que son los cocientes de grupos de Lie sobre subgrupos cerrados de los mismos. Daremos el Teorema 3.11 que va a ser de gran ayuda para ver que por

¹llamadas así en honor al matemático noruego Mario Sophus Lie (1842 - 1899).

ejemplo el espacio proyectivo real y la Grassmanniana real tienen estructura de variedad homogénea.

Los dos siguientes capítulos tratan sobre las Grassmanniana y la variedad de Stiefel. La Grassmanniana es el conjunto de todos los subespacios vectoriales de una misma dimensión de un espacio vectorial. Cada elemento se puede representar en forma de matriz y por ello se puede trabajar con dichas matrices como veremos en la Proposición 4.2. Definimos la Grassmanniana real y compleja y a continuación vemos que la Grassmanniana real (o compleja) es un espacio homogéneo (así le damos estructura de variedad diferenciable) y además si estamos en un espacio vectorial n -dimensional, la Grassmanniana de k -planos es difeomorfa a la de $(n - k)$ -planos y estudiaremos también algunas propiedades topológicas importantes. Además de esto, la Grassmanniana tiene un recubrimiento llamado Grassmanniana orientada, como veremos en la Definición 4.13. Una vez conocida la variedad de Grassmann, podemos usarla para estudiar las correlaciones de un espacio proyectivo, que son aplicaciones biyectivas con unas propiedades particulares que tenemos en la Definición 4.18. Gracias a esta teoría de correlaciones podemos observar que conceptos totalmente distintos son básicamente iguales (en el Ejemplo 4.20 tenemos que una recta y sus puntos y un haz de hiperplanos cumplen esta propiedad), podemos definir el principio de dualidad y la polaridad de una cuádrica. En resumen usamos la Grassmanniana en geometría proyectiva de una forma particular.

Por otro lado, la variedad de Stiefel es conjunto de las k -bases de un espacio vectorial. Observamos que también es un espacio homogéneo y su relación con la variedad de Grassmann. Una vez estudiado esto y gracias las proyecciones y simetrías que definiremos, podemos ver la Grassmanniana como un conjunto de matrices que tienen una propiedades especial.

Después, en el sexto capítulo, se resume la teoría del álgebra de exterior (o de Grassmann) y con ello se puede dotar a la Grassmanniana de estructura de variedad proyectiva (gracias a la Proposición 6.14). Hay que decir en este capítulo que el matemático alemán Julius Plücker (1801 - 1868) es de gran ayuda ya que sus trabajos en geometría proyectiva nos dan la noción de coordenadas de Plücker la cual se introdujo luego en el estudio de la Grassmanniana.

Como se ha visto por la descripción de la memoria que acabamos de hacer, hemos introducido un objeto matemático, la Grassmanniana, y lo hemos estudiado desde diversos puntos de vista: topológico, algebraico como cociente de grupos, como variedad diferenciable y como variedad algebraica. Y lo hemos puesto en relación con la geometría proyectiva, sirviéndonos incluso para explicar la noción de correlación proyectiva y el principio de dualidad. Entendemos que la aproximación que hemos hecho no se circunscribe a la propia de una única asignatura sino que hemos necesitado el manejo de conceptos y resultados de varias. Hemos detallado las demostraciones de los resultados más ajenos a nuestra propia formación y hemos incluido ejemplos concretos (como el de la cuádrica de Klein que es

fundamental en el último capítulo y que nos ayuda a estudiar de un modo algebraico a la Grassmanniana) que nos han hecho más clara la teoría expuesta.

1.1. Notación

Vamos a detallar cierta notación que vamos a usar a lo largo del trabajo.

- $\mathbb{K}$ cuerpo, que será siempre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{K}^n$ espacio vectorial de dimensión k sobre $\mathbb{K}$.
- $P(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{K}\mathbb{P}^n$ espacio proyectivo de dimensión n .
- $Gr_{k,n}(\mathbb{K})$ la Grassmanniana de subespacios de dimensión k de $\mathbb{K}^n$.
- $\mathbb{G}r_{k,n}(\mathbb{K})$ la Grassmanniana de subespacios proyectivos de dimensión proyectiva k de $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$.

2. El espacio proyectivo

Comenzamos recordando la definición de espacio proyectivo, ya que vamos a identificar a los espacios proyectivos reales (y complejos) con las Grassmannianas reales (y complejas) a lo largo del trabajo. Hemos hecho uso de [10] en este capítulo.

Por otra parte, las propiedades de dichos espacios son útiles para ver las propiedades de las Grassmannianas, por ejemplo, la proyectivización es muy importante.

2.1. Espacio proyectivo y subespacios proyectivos

Definición 2.1 (Espacio proyectivo). *El espacio proyectivo asociado a un espacio vectorial $\mathbb{X}$ sobre un cuerpo K es el conjunto de todas las rectas vectoriales de $\mathbb{X}$. Se denota por $P = P(\mathbb{X})$. La dimensión del espacio proyectivo $P(\mathbb{X})$ es: $\dim(P(\mathbb{X})) = \dim(\mathbb{X}) - 1$.*

El espacio proyectivo también se puede definir como las clases de equivalencia de los vectores no nulos de $\mathbb{X}$, con la relación $\hat{u} \sim \hat{v} \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0, \hat{u} = \lambda \hat{v}$. Así, si $\hat{v} \in \mathbb{X} - 0$, su correspondiente punto proyectivo será designado como $v = \langle \hat{v} \rangle \in P(\mathbb{X})$.

Definición 2.2 (Subespacio proyectivo). *Sea $\mathbb{Y}$ un subespacio vectorial de un espacio vectorial $\mathbb{X}$, entonces se dice que $P(\mathbb{Y})$ es un subespacio proyectivo de $P(\mathbb{X})$.*

A los subespacios proyectivos de dimensión cero se les llama *puntos proyectivos*, a los de dimensión uno se les llama *rectas proyectivas*, a los de dimensión dos se les llama *planos proyectivos* y a los de dimensión $n - 1$ (donde la dimensión de $P(\mathbb{X})$ es n) se les llama *hiperplanos proyectivos*.

A la aplicación que hace corresponder cada subespacio vectorial $\mathbb{X}$ con el subespacio proyectivo $P(\mathbb{X})$ se le llama *proyectivización*.

Así se tiene la siguiente:

Proposición 2.3. *La proyectivización de subespacios lineales es una aplicación biyectiva entre el conjunto de subespacios lineales de $\mathbb{X}$ y el de subespacios proyectivos de $P(\mathbb{X})$, que respeta los contenidos, intersecciones arbitrarias y sumas finitas de subespacios.*

Demostración. Ver [10]. □

Observación 2.4. *Este resultado será importante cuando estudiemos la Grassmanniana porque permite identificar la Grassmanniana de subespacios vectoriales de dimensión k de un espacio vectorial con la Grassmanniana de subespacios proyectivos de dimensión $k - 1$ del proyectivizado del espacio vectorial.*

2.2. El espacio proyectivo real

El espacio proyectivo real tiene importantes propiedades topológicas y además es una variedad diferenciable como veremos a continuación. Como la Grassmanniana es una generalización del espacio proyectivo, vamos a comprobar luego que la Grassmanniana también tiene propiedades topológicas y además está dotada de una estructura de variedad diferenciable con la que trabajaremos después.

Para estudiar el espacio proyectivo real, vamos a enunciar y demostrar el siguiente teorema² ya que es importante para demostrar que el espacio proyectivo real es una variedad diferenciable. No es la única manera de demostrarlo³ pero creemos que es la manera más sencilla.

Teorema 2.5 (Teorema de la Variedad Cociente para grupos discretos). *Sean G un grupo discreto (a lo sumo numerable) y N una variedad diferenciable n -dimensional. Además, sea la aplicación*

$$\begin{aligned} \eta : G \times N &\longrightarrow N \\ (g, n) &\longmapsto \eta(g, n) = gn \end{aligned}$$

una acción propiamente discontinua, es decir, que satisface las tres condiciones siguientes:

1) *La aplicación*

$$\begin{aligned} \eta_g : N &\longrightarrow N \\ n &\longmapsto \eta_g(n) = gn \end{aligned}$$

es diferenciable $\forall g \in G$, por lo que es un difeomorfismo con $\eta_g^{-1} = \eta_{g^{-1}}$ y $gU = \eta_g(U) \subset N$ es abierto si lo es $U \subset N$.

2) *Para todo $n \in N$ existe un entorno abierto $U \subset N$ de n tal que $gU \cap U = \emptyset$, $\forall g \in G \setminus \{e\}$, por lo que la acción es libre, es decir, $gn \neq n$, $\forall g \in G \setminus \{e\}$ y $\forall n \in N$.*

²Podemos encontrarlo en [3].

³Basta dotar a dicho conjunto de un atlas maximal como sigue en [1, Capítulo 2].

3) Para todo par de puntos $n, m \in N$ que estén en órbitas distintas, es decir, $[n] \neq [m]$, existen dos entornos $U, V \subset N$ de n y m , respectivamente, tales que $(gU) \cap V = \emptyset$, $\forall g \in G$.

Entonces el espacio cociente $N/G = \{[n] : n \in N\}$ tiene una única estructura de variedad diferenciable con la misma dimensión que N .

Demostración. Primeramente notemos que $n \sim gn$ con $g \in G, n \in N$, es una relación de equivalencia en N y que sus clases de equivalencia son las órbitas $[n] = Gn = \{gn : g \in G\} \subset N, n \in N$, de la acción $\eta : G \times N \rightarrow N$.

Además,

$$\begin{aligned} \pi : N &\longrightarrow N/G \\ n &\longmapsto \pi(n) = [n] \end{aligned}$$

es continua y sobreyectiva, en donde el subconjunto $V \subset N/G$ es abierto si $\pi^{-1}(V) \subset N$ es abierto. La condición 2) implica que π es abierta, pues si $U \subset N$ es abierto, lo son $gU = \eta_g(U) \subset N, \forall g \in G$, entonces $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} gU \subset N$ es abierto, de donde $\pi(U) \subset N/G$ es abierto.

Por otro lado, la condición 3) implica que el espacio N/G es Hausdorff.

Por último, de la condición 2) se tiene que, para todo punto $t = [p] \in N/G$ con $p \in N$, existe una carta (U, φ) de N en p tal que $gU \cap U = \emptyset, \forall g \in G \setminus \{e\}$, de donde $V = \pi(U) \subset N/G$ es un entorno no abierto de t tal que $\pi^{-1}(V) = \bigcup_{g \in G} gU$ es una unión disjunta de abiertos $gU \subset N$ tales que

$$\pi|_{gU} : gU \longrightarrow V = \pi(U)$$

es un homeomorfismo, $\forall g \in G$. Por tanto,

$$\varphi \circ (\pi|_U)^{-1} : V \longrightarrow U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$$

es un homeomorfismo.

Por lo tanto, N/G es una variedad diferenciable n -dimensional satisfaciendo las condiciones requeridas, cuya estructura diferenciable está definida por el atlas de N/G cuyas cartas son de la forma $(V, \psi) = (\pi(U), \varphi \circ (\pi|_U)^{-1})$. □

Como hemos podido comprobar a lo largo de la carrera, en algunas asignaturas como por ejemplo, Variedades Diferenciables, el plano proyectivo real se puede definir como cociente de la esfera de la siguiente manera:

Sean $p, q \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, escribimos $p \sim q$ si bien $p = q$ o bien $p = -q$ (o como se dice, p y q son puntos antipodales de la esfera $\mathbb{S}^n$). Es trivial ver que la anterior relación “ $\sim$ ” es una relación de equivalencia en la esfera $\mathbb{S}^n$, por lo tanto tenemos que:

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{RP}^n = \mathbb{S}^n / \sim$$

Ahora sea $\pi : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n$, $p \longrightarrow \pi(p) = [x] = \{-x, x\}$ la proyección canónica, sabemos por topología general que π es una aplicación continua y sobreyectiva. Y por lo tanto, se tiene que el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ es un espacio **conexo** y **compacto** como la esfera $\mathbb{S}^n$.

Por lo tanto, para ver que es variedad diferenciable, basta usar el Teorema 2.5 por el cual tenemos:

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{S}^n / \mathbb{S}^0$$

donde $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$

Observación 2.6. Como hemos visto en la definición de espacio proyectivo, podemos definir $\mathbb{RP}^n$ como las clases de equivalencia de los vectores no nulos de $\mathbb{R}^{n+1}$, con la relación $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0, x = \lambda y$, pero lo hacemos con la esfera (restringiendo a ella la misma relación de equivalencia) ya que es más cómoda para estudiar sus propiedades topológicas.

Observación 2.7. Por otro lado, no podemos dar estructura de variedad diferenciable al espacio proyectivo complejo $\mathbb{CP}^n$ con este teorema ya que es el cociente de la esfera $\mathbb{S}^{2n+1}$ y $\mathbb{S}^1$ y este último no es un grupo discreto o numerable, para poder hacer esto vamos a dar otro teorema más general que también nos vale para el espacio proyectivo real. Pero lo haremos después de definir lo que es un grupo de Lie ya que nos es necesario.

3. Espacios homogéneos

Los espacios proyectivos que acabamos de estudiar y las variedades Grassmannianas que estudiaremos más adelante son espacios homogéneos, esto es, cocientes de un grupo de Lie por un subgrupo cerrado. Por tanto vamos a repasar estos conceptos. Tenemos que decir que la mayoría de la información la hemos sacado de [12].

3.1. Grupos y Álgebras de Lie

Como los grupos y álgebras de Lie tienen muchas propiedades, aquí solo veremos algunas, que nos ayudarán a comprender este trabajo.

Definición 3.1 (Grupo de Lie). *Un grupo de Lie es una variedad diferenciable G , con tiene estructura de grupo, tal que las siguientes aplicaciones*

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (a, b) & \longmapsto & ab \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ a & \longmapsto & a^{-1} \end{array}$$

son diferenciables. Denotaremos con $e \in G$ al elemento neutro del grupo y con notación multiplicativa la operación del grupo.

Ejemplo 3.2 (Ejemplos de grupos de Lie). *Algunos ejemplos son:*

- El espacio Euclídeo $\mathbb{R}^n$ es un grupo de Lie bajo la suma vectorial.
- $\mathbb{C}^*$ es un grupo de Lie bajo la multiplicación.
- La circunferencia $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^*$ es un grupo de Lie bajo la multiplicación inducida de $\mathbb{C}^*$.

◇

Definición 3.3 (Subgrupo de Lie). (H, φ) es un subgrupo de Lie de un grupo de Lie G si:

- i) H es un grupo de Lie,
- ii) (H, φ) es una subvariedad de G ,
- iii) $\varphi : H \longrightarrow G$ es un homomorfismo de grupos.

Definición 3.4 (Subgrupo de Lie cerrado). (H, φ) se dice que es un subgrupo cerrado de Lie si, además de lo anterior, $\varphi(H)$ es un subconjunto cerrado de G .

3.2. El espacio proyectivo complejo

Vamos a dar una generalización del Teorema 2.5 que es el teorema de la variedad cociente para después poder definir el espacio proyectivo complejo y ver sus distintas propiedades. Antes definamos lo que es una acción libre y propia de un grupo de Lie en una variedad diferenciable.

Definición 3.5. Sea η una acción de un grupo de Lie G en una variedad diferenciable M , entonces:

- η es **libre** si $g \cdot m = m \ \forall m \in M$ si, y solo si, $g = e$ con e el neutro de G .
- Suponiendo que η es continua, η se dice que es **propia** si la aplicación $G \times M \rightarrow M \times M$ dada por $(g, m) \mapsto (g \cdot m, m)$ es una aplicación propia. Ahora que una aplicación cualquiera entre espacios topológicos $f : M \rightarrow N$ sea propia, significa que para todo compacto $K \subset N$, la imagen inversa $f^{-1}(K)$ es compacto.

Teorema 3.6 (Variedad Cociente). Sea G un grupo de Lie que actúa suave (diferenciable), libre y propiamente en una variedad diferenciable M . Entonces el espacio de órbitas M/G es una variedad diferenciable con $\dim(M/G) = \dim(M) - \dim(G)$.

Demostración. La demostración la encontramos en [6, Teorema 9.16]. □

Definamos el espacio proyectivo complejo $\mathbb{CP}^n$ como las clases de equivalencia de los vectores no nulos de $\mathbb{C}^{n+1}$, con la relación $z \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}, z = \lambda w$. Podemos entonces restringir esta relación a la esfera $\mathbb{S}^{2n+1}$ y nos queda la relación $z \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}, z = \lambda w$ con $z, w \in \mathbb{S}^{2n+1}$. Ahora los elementos del conjunto cociente $\mathbb{S}^{2n+1} / \sim$

son de las clases $[x] = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{C}\}$ y como $\lambda x \in \mathbb{S}^{2n+1}$, $1 = \|\lambda x\| = \|\lambda\| \|x\| = \|\lambda\|$, por lo que $\lambda \in \mathbb{S}^1$. Así tenemos la definición de espacio proyectivo complejo: $\mathbb{CP}^n := \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$.

Por lo tanto, ahora podemos dar al espacio proyectivo complejo estructura de variedad diferenciable. Vamos a ver que el conjunto $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ tiene estructura de variedad diferenciable usando el Teorema anterior.

Consideremos $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ y $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ y definamos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \eta: \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{2n+1} &\longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1} \\ (\lambda, x) &\longmapsto \eta(\lambda, x) = \lambda x = (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) \end{aligned}$$

la cual está bien definida. Ahora veamos que dicha aplicación es una acción y además que cumple las condiciones del Teorema anterior.

■ η es acción: Sean $\lambda, \gamma \in \mathbb{S}^1$ y $x \in \mathbb{S}^{2n+1}$, tenemos:

$$\text{i) } \lambda(\gamma x) = \lambda(\gamma x_0, \dots, \gamma x_n) = (\lambda \gamma x_0, \dots, \lambda \gamma x_n) = (\lambda \gamma)x.$$

ii) Sea $1 \in \mathbb{S}^1$ el elemento neutro, $\forall x \in \mathbb{S}^{2n+1}$ tenemos que

$$1x = (1x_0, \dots, 1x_n) = (x_0, \dots, x_n) = x$$

■ η es diferenciable porque coordenada a coordenada es diferenciable.

■ η es propia: Sabemos que $\mathbb{S}^1$ es un grupo de Lie compacto y como η es continua, η es propia⁴.

■ η es libre: Veamos que $\lambda x = x \Leftrightarrow \lambda = 1$:

$\Rightarrow$ Supongamos que $\lambda x = x \Rightarrow \lambda x_i = x_i \ \forall i \Rightarrow \lambda x_i - x_i = 0$ y esto ocurre cuando $\lambda = 1$.

$\Leftarrow$ Trivial.

Por lo tanto, aplicando el Teorema 3.6, tenemos que $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ es una variedad diferenciable cuya dimensión real es $\dim(\mathbb{S}^{2n+1}) - \dim(\mathbb{S}^1) = 2n+1-1 = 2n$, es decir, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1) = n$. Y por lo tanto, el espacio proyectivo complejo también es una variedad diferenciable compleja n -dimensional.

Observación 3.7. Hemos visto que los espacios proyectivos reales y complejos (de cualquier dimensión) son compactos y conexos porque la proyección canónica es una aplicación continua desde la correspondiente esfera.

⁴Ver [6, Corolario 9.14] que dice: Cualquier acción continua de un grupo de Lie compacto en una variedad diferenciable es propia.

3.3. Grupos Clásicos

En esta sección vamos a hablar sobre algunos grupos de matrices que son importantes para nuestro trabajo. Estos grupos tienen unas propiedades básicas (que no vamos a demostrar) las cuales nos van a servir para demostrar algunos resultados posteriores. En primer lugar tenemos que recordar que $\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{K})$ es el conjunto de las matrices de tamaño $k \times n$ con $k, n > 0$ y con coeficientes en $\mathbb{K}$ que es cuerpo ($\mathbb{K}$ será $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

El grupo general lineal $GL(n, \mathbb{K})$ que es el conjunto de matrices con determinante distinto de cero es un grupo de Lie real o complejo que tiene dimensión real o compleja n^2 . Se sabe que $GL(n, \mathbb{C})$ es conexo y que $GL(n, \mathbb{R})$ tiene dos componentes conexas.

El grupo ortogonal $O(n, \mathbb{R})$ es el conjunto de matrices de $GL(n, \mathbb{R})$ con determinante no nulo y el grupo $SO(n, \mathbb{R})$ que es el conjunto de matrices de $O(n, \mathbb{R})$ con determinante 1 son grupos de Lie reales, compactos y de dimensión $\frac{n(n-1)}{2}$. Además, $O(n, \mathbb{R})$ tiene dos componentes conexas donde $SO(n, \mathbb{R})$ es una de ellas.

El grupo unitario $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : AA^* = Id\}$ es un grupo de Lie de dimensión n^2 , donde A^* es la matriz traspuesta conjugada de A , además es compacto y conexo. Y el grupo unitario especial $SU(n)$ que es el conjunto de matrices unitarias con determinante 1 es un grupo de Lie de dimensión $n^2 - 1$, además, es compacto, conexo y simplemente conexo.

3.4. Espacios homogéneos

Teorema 3.8. *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo de Lie G y sea $G/H := \{\sigma H : \sigma \in G\}$, es decir, el conjunto de clases a izquierda módulo H . Sea*

$$\begin{aligned} \pi: G &\longrightarrow G/H \\ \sigma &\longmapsto \pi(\sigma) = \sigma H \end{aligned}$$

la proyección canónica. Entonces G/H tiene una estructura de variedad diferenciable tal que:

- a) π es $\mathcal{C}^\infty$
- b) Si $\sigma H \in G/H$ existe un entorno W de σH y una aplicación ($\mathcal{C}^\infty$) $\tau: W \longrightarrow G$ tal que $\pi \circ \tau = id$

Además, se cumple que: $\dim(G/H) = \dim(G) - \dim(H)$

Definición 3.9 (Variedades homogéneas). *Sean G un grupo de Lie y H un subgrupo cerrado de G . Entonces las variedades de la forma G/H donde la estructura de variedad diferenciable es la única que satisface las condiciones a) y b) del teorema anterior, se llaman **variedades homogéneas**.*

Definición 3.10. Con las notación de la definición anterior y además sea M un conjunto cualquiera. Sea

$$\begin{aligned}\eta: G \times M &\longrightarrow M \\ (\sigma, m) &\longmapsto \eta(\sigma, m) = \sigma m\end{aligned}$$

una acción a izquierda de G sobre M . Por lo tanto, para cada $\sigma \in G$ sea

$$\begin{aligned}\eta_\sigma: M &\longrightarrow M \\ m &\longmapsto \eta_\sigma(m) = \eta(\sigma, m) = \sigma m\end{aligned}$$

la cual es una biyección de M .

La acción η se dice que es **efectiva** si $e \in G$ (elemento neutro) es el único elemento tal que $\eta_e = \text{id}_M$. La acción se dice que es **transitiva** si para $m, n \in M$ existe un $\sigma \in G$ tal que $\eta_\sigma(m) = n$.

Por último, sea $m_0 \in M$ el **grupo de isotropía en m_0** (estabilizador de m_0)

$$\text{Iso}_G(m_0) = \{\sigma \in G: \eta_\sigma(m_0) = m_0\}$$

es un subgrupo cerrado de G .

Teorema 3.11. Sea

$$\begin{aligned}\eta: G \times M &\longrightarrow M \\ (\sigma, m) &\longmapsto \eta(\sigma, m) = \sigma m\end{aligned}$$

una acción (a izquierda) transitiva de un grupo de Lie G sobre una variedad diferenciable M . Sea $m_0 \in M$ y sea H el grupo de isotropía en m_0 .

Definimos la aplicación:

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}: G/H &\longrightarrow M \\ \sigma H &\longmapsto \tilde{\beta}(\sigma H) = \eta_\sigma(m_0)\end{aligned}$$

Entonces, $\tilde{\beta}$ es un difeomorfismo.

Ejemplo 3.12. Veamos que los espacios proyectivos real y complejo son variedades homogéneas:

i) En primer lugar veamos el real:

Sea $\mathbb{RP}^n$ el espacio proyectivo real de dimensión n y sea $G := SO(n+1, \mathbb{R})$. Definimos la siguiente aplicación la cual es una acción transitiva:

$$\begin{aligned}\eta: G \times \mathbb{S}^n &\longrightarrow \mathbb{S}^n \\ (A, x) &\longmapsto \eta(A, x) = Ax\end{aligned}$$

Además, mediante la proyección

$$\begin{aligned}\pi: \mathbb{S}^n &\longrightarrow \mathbb{RP}^n = \mathbb{S}^n / \mathbb{S}^0 \\ x &\longmapsto [x]\end{aligned}$$

se induce una acción transitiva:

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}: G \times \mathbb{RP}^n &\longrightarrow \mathbb{RP}^n \\ (A, [x]) &\longmapsto \tilde{\eta}(A, [x]) = [Ax]\end{aligned}$$

Por último, calculamos el grupo de isotropía de $[e_{n+1}]$ y tenemos:

$$H = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & \det(A) \end{array} \right) : A \in O(n, \mathbb{R}) \right\} \cong O(n, \mathbb{R})$$

por lo tanto, $\mathbb{RP}^n$ es difeomorfo a $SO(n+1, \mathbb{R})/O(n, \mathbb{R})$

ii) Ahora veamos el complejo:

Sea $\mathbb{CP}^n$ el espacio proyectivo real de dimensión n y sea $G := SU(n+1)$. Definimos la siguiente aplicación la cual es una acción transitiva:

$$\begin{aligned}\eta: G \times (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) &\longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \\ (A, z) &\longmapsto \eta(A, z) = Az\end{aligned}$$

Además, mediante la proyección

$$\begin{aligned}\pi: \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{CP}^n \\ z &\longmapsto [z]\end{aligned}$$

se induce una acción transitiva:

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}: G \times \mathbb{CP}^n &\longrightarrow \mathbb{CP}^n \\ (A, [z]) &\longmapsto \tilde{\eta}(A, [z]) = [Az]\end{aligned}$$

Por último, calculamos el grupo de isotropía de $[e_{n+1}]$ y tenemos:

$$H = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1/\det(A) \end{array} \right) : A \in U(n) \right\} \cong U(n)$$

por lo tanto, $\mathbb{CP}^n$ es difeomorfo a $SU(n+1)/U(n)$. $\diamond$

Observación 3.13. Ahora como observación tenemos que decir que todo espacio homogéneo es un fibrado principal ⁵ ya que si tomamos G un grupo de Lie y H un subgrupo cerrado de G , la proyección canónica de G a G/H define un H -fibrado principal. Para comprobar esto, basta comprobar las 3 condiciones de la definición de fibrado principal, la primera y segunda son de fácil comprobación pero la tercera hay que buscarla en [4, Ejemplo 5.1].

⁵Un **fibrado principal** sobre una variedad diferenciable M con grupo G consiste en una variedad P y una acción de G en P satisfaciendo: (1) G actúa libremente sobre P a la derecha; (2) M es el espacio cociente de P mediante la relación de equivalencia inducida por G , $M = P/G$, y la proyección canónica π de P en M es diferenciable; (3) P es localmente trivial, es decir, todo punto $x \in M$ tiene un entorno U tal que $\pi^{-1}(U)$ es difeomorfo a $U \times G$.

4. La Variedad de Grassmann

En este capítulo del trabajo vamos a hablar de la Grassmanniana, la cual tiene relación con el, ya introducido antes, espacio proyectivo y además tiene unas propiedades particulares, las cuales no hemos visto a lo largo de nuestro grado.

Definición 4.1 (Variedad Grassmanniana). *Sea $\mathbb{K}^n$ un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, el conjunto de todos los subespacios vectoriales k -dimensionales es la variedad Grassmanniana de k -planos en $\mathbb{K}^n$ y se escribe $Gr_{k,n}$ o $Gr_{k,n}(\mathbb{K})$ o $Gr_{k,n}(\mathbb{K}^n)$.*

Nosotros fijaremos la notación $Gr_{k,n}(\mathbb{K})$ para referirnos a la Variedad Grassmanniana.

Como hemos empezado hablando de los espacios proyectivos $\mathbb{RP}^n$, tenemos que decir que podemos ver dichos espacios como Grassmannianas de rectas, es decir, si $k = 1$, $Gr_{1,n}(\mathbb{R}) = \mathbb{RP}^{n-1}$.

Además tenemos que las Grassmannianas lineales son de la forma:

$$Gr_{k,n}(\mathbb{K}) := \{\text{subespacios vectoriales de dimensión } k \text{ de } \mathbb{K}^n\}, \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$$

y usando la Proposición 2.3 a cada subespacio proyectivo de dimensión k de $\mathbb{KP}^n$ le corresponde biyectivamente un subespacio vectorial de dimensión $k + 1$ de $\mathbb{K}^{n+1}$. Entonces las Grassmannianas proyectivas de la forma:

$$\mathbb{G}r_{k,n}(\mathbb{K}) := \{\text{subespacios proyectivos de dimensión } k \text{ de } \mathbb{KP}^n\}, \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$$

de este modo llegamos a la biyección:

$$\mathbb{G}r_{k,n}(\mathbb{K}) \equiv Gr_{k+1,n+1}(\mathbb{K})$$

Para abreviar, a un subespacio vectorial de dimensión k lo llamaremos k -plano.

4.1. Grassmannianas reales

La Grassmanniana real $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ se compone de los k -planos de $\mathbb{R}^n$ como hemos dicho antes. Lo que vamos a hacer es mostrar dichos k -planos de otra forma la cual nos hará más fácil el estudio de $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$.

Proposición 4.2. *Todo k -plano se puede representar en forma de matriz de tamaño $k \times n$ la cual tiene rango k . Además, cualquier matriz de tamaño $k \times n$ y rango k define un k -plano de $\mathbb{R}^n$*

Demostración. Todo k -plano M de $\mathbb{R}^n$ se puede representar en forma de matriz de tamaño $k \times n$ ya que si $\{v_1, \dots, v_k\}$ es una base de M basta poner cada vector v_i como una fila de dicha matriz, por lo tanto tenemos una matriz $k \times n$ de rango k ya que los vectores v_i son linealmente independientes.

Por otro lado, toda matriz A de tamaño $k \times n$ y rango k define un k -plano en $\mathbb{R}^n$ ya que al ser de rango k , los vectores $v_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, k$ que forman las filas de A son linealmente independientes y además, son un sistema de generadores de un k -plano, por lo tanto, forman una base de dicho k -plano. $\square$

Las matrices de tamaño $k \times n$ de rango k forman un subconjunto $\mathcal{A}_{k,n}(\mathbb{R})$ del conjunto de las matrices de tamaño $k \times n$, $\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})$. Por lo tanto a cada matriz $A \in \mathcal{A}_{k,n}(\mathbb{R})$ le corresponde un elemento de la Grassmanniana $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ el cual está generado por las filas de dicha matriz; escribimos $span(A) = span(A_1, \dots, A_k)$ siendo cada A_i la fila i -ésima de A .

Ahora que sabemos que todo k -plano de $\mathbb{R}^n$ tiene una matriz asociada de tamaño $k \times n$ de rango k , nos preguntamos si hay matrices que generen un mismo k -plano. La respuesta esta dada por la siguiente:

Proposición 4.3. Sean $M, N \in \mathcal{A}_{k,n}(\mathbb{R})$, se tiene que M y N generan el mismo k -plano si, y solo si, existe $A \in GL(k, \mathbb{R})$ tal que $AM = N$.

Demostración. Demostraremos las dos implicaciones:

$\Rightarrow$ Sean $M, N \in \mathcal{A}_{k,n}(\mathbb{R})$ y supongamos que M y N generan el mismo k -plano. Tenemos entonces que $span(N) = span(M)$ y por lo tanto, podemos escribir $A_i M = N_i$, $\forall i$ siendo N_i la i -ésima fila de N . Basta formar una matriz A cuyas filas son dichos A_i , la matriz A no es más que un cambio de base, por lo tanto tiene determinante distinto de cero entonces $A \in GL(k, \mathbb{R})$.

$\Leftarrow$ Sean $M, N \in \mathcal{A}_{k,n}(\mathbb{R})$ y $A \in GL(k, \mathbb{R})$. Supongamos que $AM = N$, es decir, $A_i M = N_i$, $\forall i$ con A_i, N_i las filas de A y N respectivamente. Cada $N_i \in span(N)$ entonces $span(N) \subset span(M)$ y como su dimensión es la misma, son iguales. Por lo tanto, definen el mismo k -plano. $\square$

Entonces como conclusión podemos decir que a cada matriz $A \in \mathcal{A}_{k,n}(\mathbb{R})$ le corresponde un k -plano $\Lambda \in Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ y por lo tanto, mediante la Proposición 4.3 podemos decir que: Λ y Σ son el mismo elemento de $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ si, y solo si, existe $A \in GL(k, \mathbb{R})$: $AM = N$, con M y N la representación matricial de Σ y Λ respectivamente.

Observación 4.4. La relación R (que es la relación de la Proposición 4.3) definida en $\mathcal{A}_{k,n}(\mathbb{R})$ es una relación de equivalencia:

$$M \sim N \Leftrightarrow \exists A \in GL(k, \mathbb{R}) : AM = N.$$

Proposición 4.5. *La siguiente aplicación es una biyección:*

$$\tilde{\phi}: \mathcal{A}_{k,n}(\mathbb{R})/R \longrightarrow Gr_{k,n}(\mathbb{R})$$

donde R es la relación de equivalencia antes indicada.

Demostración. Trivial ya que tenemos dos funciones sobreyectivas: $\phi: \mathcal{A}_{k,n}(\mathbb{R}) \longrightarrow Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ que envía $M \mapsto \text{span}(M)$ y la proyección π y además, sabemos que $\phi(M) = \phi(N) \Leftrightarrow N \sim M$, haciendo el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{k,n}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\phi} & Gr_{k,n}(\mathbb{R}) \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\phi} & \\ \mathcal{A}_{k,n}(\mathbb{R})/R & & \end{array}$$

□

Ejemplo 4.6. *Como primer ejemplo, vamos a trabajar en la variedad de Grassmann $Gr_{2,3}(\mathbb{R})$ de dimensión 2 ya que vamos a demostrar con otras técnicas que al multiplicar una matriz representativa de un plano por una matriz del grupo general lineal, nos da como resultado otra matriz representativa del mismo plano. Además vamos a representar gráficamente mediante la herramienta SAGE el plano y los vectores que lo generan. Sea $\Delta \in Gr_{2,3}(\mathbb{R})$, con representación matricial M :*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

con $\text{rang}(M) = 2$. Sea además, $A \in GL(2, \mathbb{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

tenemos pues:

$$A \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 10 & 13 \end{pmatrix} = N$$

Entonces, podemos observar que $\text{rang}(N) = 2$. Solo nos falta ver que generan el mismo 2-plano, es decir, que la dimensión de la suma de los espacios que generan las filas de M y N es la misma que la dimensión de ellos. Entonces comprobando, nos sale que:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 10 & 13 \end{pmatrix} = 2$$

Por lo tanto, M y N generan el mismo 2-plano de $\mathbb{R}^3$, es decir, son el mismo elemento de $Gr_{2,3}(\mathbb{R})$.

Por otro lado, sean los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (1, 1, 1)$ los generadores del plano Δ , tenemos que las ecuaciones paramétricas de dicho plano son:

$$(x, y, z) = \lambda(1, 2, 3) + \mu(1, 1, 1)$$

es decir, tenemos:

$$\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3\lambda + \mu \end{cases}$$

Ahora hallamos la ecuación implícita de Δ :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x + 2y - z = 0$$

por lo tanto,

$$\Delta = \{-x + 2y - z = 0\}$$

Con una simple comprobación podemos observar que $\vec{u}, \vec{v} \in \Delta$ y además que $\vec{w} = (3, 4, 5)$, $\vec{t} = (7, 10, 13) \in \Delta$, por lo tanto cada par de vectores que genera el mismo plano Δ . Podemos observar una gráfica de dichos vectores y del plano en la Figura 1.

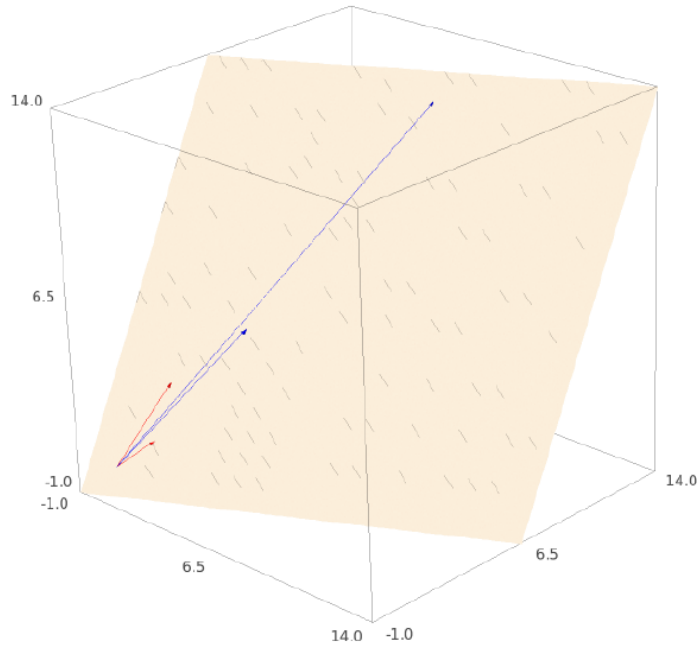


Figura 1: Gráfica del 2-plano $-x + 2y - z = 0$ con los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en rojo (los más pequeños) y los vectores $\vec{w}$ y $\vec{t}$ en azul (los más grandes).

◇

Ejemplo 4.7. Ahora trabajemos en $Gr_{3,5}(\mathbb{R})$. Sea $\Omega \in Gr_{3,5}(\mathbb{R})$, con representación matricial M :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 10 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

cuyo rango es 3. Por otro lado, sea $A \in GL(3, \mathbb{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

haciendo el producto de matrices tenemos:

$$A \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 10 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 14 & 7 & 6 & 8 \\ 1 & 11 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = N$$

Entonces, como antes, podemos observar que $\text{rang}(N) = 3$. Solo nos falta ver que generan el mismo 3-plano, es decir, que la dimensión de la suma de los espacios que generan las filas de M y N es la misma que la dimensión de ellos. Entonces comprobando, nos sale que:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 10 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 14 & 7 & 6 & 8 \\ 1 & 11 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Por lo tanto, M y N generan el mismo 3-plano Ω de $\mathbb{R}^5$, es decir, son el mismo elemento de $Gr_{3,5}(\mathbb{R})$. $\diamond$

Observación 4.8. La variedad de Grassmann $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ también puede considerarse como el espacio de esferas de centro 0 y de dimensión $k - 1$ contenidas en la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$, correspondiendo estas unívocamente a los subespacios vectoriales de dimensión k de $\mathbb{R}^n$.

Observación 4.9. Por otro lado, podemos ver que existe una biyección entre $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ y $Gr_{n-k,n}(\mathbb{R})$ dada por la ortogonalidad de espacios vectoriales, es decir, podemos ver que la siguiente aplicación es una biyección:

$$\begin{aligned} \circ^\perp: \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbb{W} &\longmapsto \mathbb{W}^\perp \end{aligned}$$

donde $\mathbb{W}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{W}^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n: \langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in \mathbb{W}\}$ es el complemento ortogonal de $\mathbb{W}$.

Está claro que la ortogonalidad es una biyección ya que para $\mathbb{W}$ subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ se tiene que $\mathbb{R}^n = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^\perp$.

Ahora, sean $\mathbb{W}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensión k con lo cual tendrá una base $\{v_1, \dots, v_k\}$, dichos vectores de la base generarán un k -plano de $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$, entonces tenemos la biyección:

$$\begin{aligned} \phi: \quad Gr_{k,n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow Gr_{n-k,n}(\mathbb{R}) \\ \langle v_1, \dots, v_k \rangle &\longmapsto \langle v_1, \dots, v_k \rangle^\perp = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle \end{aligned}$$

con $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ un conjunto de vectores que forman base de algún subespacio vectorial $\mathbb{W}'$ en $\mathbb{R}^n$, por lo tanto dicha base forma un elemento de $Gr_{n-k,n}(\mathbb{R})$ ya que son un $(n-k)$ -plano.

La biyección ϕ es clara ya que es el complemento ortogonal de un subespacio vectorial: $\langle v_1, \dots, v_k \rangle \oplus \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle = \mathbb{R}^n$.

4.2. La variedad de Grassmann vista como espacio homogéneo

Lo que vamos a hacer ahora es identificar la Grassmanniana con un espacio homogéneo. Como hemos visto antes, $O(n, \mathbb{R})$ es un grupo de Lie de dimensión $\frac{n(n-1)}{2}$. Sea $0 \leq k \leq n$, sabemos que cada espacio k -dimensional $\Theta \subset \mathbb{R}^n$ está generado por k vectores linealmente independientes $u_1, \dots, u_k$, es decir, $\Theta = \text{span}(u_1, \dots, u_k)$. Definimos la aplicación:

$$\begin{aligned} \phi: \quad O(n, \mathbb{R}) \times Gr_{k,n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow Gr_{k,n}(\mathbb{R}) \\ (R, \Theta) &\longmapsto \phi(R, \Theta) = \text{span}(Ru_1, \dots, Ru_k) \end{aligned}$$

la cual es una acción transitiva de $O(n, \mathbb{R})$ sobre $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$.

- Veamos que ϕ está bien definida. Supongamos que $\Theta = \text{span}(u_1, \dots, u_k)$, para otros k vectores linealmente independientes $v_1, \dots, v_k$ se tiene que:

$$v_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} u_j, \quad 1 \leq i \leq k$$

para algunos $a_{ij} \in \mathbb{R}$, y entonces

$$Rv_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} Ru_j, \quad 1 \leq i \leq k$$

lo que demuestra que

$$\text{span}(Ru_1, \dots, Ru_k) = \text{span}(Rv_1, \dots, Rv_k)$$

lo que implica que la acción está bien definida.

- ϕ es una acción: trivial usando el producto de matrices.

- ϕ es transitiva: Sean $\Theta, \Lambda \in Gr_{k,n}(\mathbb{R})$. Sabemos que Θ tiene una base ortonormal⁶ $\{u_1, \dots, u_k\}$ la cual la podemos completar⁷ hasta formar una base $\{u_1, \dots, u_n\}$ ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Hacemos lo mismo para Λ el cual tiene como base ortonormal $\{v_1, \dots, v_k\}$ la cual completamos hasta llegar a $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Ahora, respecto de la base ortonormal $(u_1, \dots, u_n)$ la matriz de la aplicación lineal que envía $u_i \rightarrow v_i$ es ortogonal.

Ahora vamos a encontrar el estabilizador (grupo de isotropía) de un k -plano. Sea Γ_0 el subespacio generado por los k primeros vectores de la base canónica $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, es decir, $\Gamma_0 = \text{span}(e_1, \dots, e_k)$. Veamos que el grupo de isotropía de Γ_0 está dado por:

$$Iso_{O(n, \mathbb{R})}(\Gamma_0) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \in O(n, \mathbb{R}) : A \in O(k, \mathbb{R}) \text{ y } B \in O(n-k, \mathbb{R}) \right\} \quad (1)$$

Para ver que se cumple esta igualdad, primero recordemos la definición de grupo de isotropía o estabilizador en este caso:

$$Iso_{O(n, \mathbb{R})}(\Gamma_0) = \{X \in O(n, \mathbb{R}) : \text{span}(Xe_1, \dots, Xe_k) = \text{span}(e_1, \dots, e_k)\}$$

por lo tanto, tenemos que demostrar una igualdad de conjuntos (1), lo hacemos por doble contención:

$\subseteq$ Sea $X \in Iso_{O(n, \mathbb{R})}(\Gamma_0)$, tenemos que $X \in O(n, \mathbb{R})$ con $\text{span}(Xe_1, \dots, Xe_k) = \text{span}(e_1, \dots, e_k)$. Llamamos a las columnas de X como $X_1, \dots, X_n$, entonces tenemos que $\text{span}(X_1, \dots, X_k) = \text{span}(e_1, \dots, e_k)$ y por lo tanto, X_i es proporcional a e_i para $1 \leq i \leq k$. Tenemos la matriz X :

$$X = \left(\begin{array}{c|c} \bar{X}_{k \times k} & \tilde{X}_{k \times (n-k)} \\ \hline 0_{(n-k) \times k} & \hat{X}_{(n-k) \times (n-k)} \end{array} \right)$$

y como sabemos que $X \in O(n, \mathbb{R})$, $XX^t = Id_{n \times n}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} XX^t &= \left(\begin{array}{c|c} \bar{X}_{k \times k} & \tilde{X}_{k \times (n-k)} \\ \hline 0_{(n-k) \times k} & \hat{X}_{(n-k) \times (n-k)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \bar{X}_{k \times k}^t & 0_{k \times (n-k)} \\ \hline \tilde{X}_{(n-k) \times k}^t & \hat{X}_{(n-k) \times (n-k)}^t \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} \bar{X}\bar{X}^t + \tilde{X}\tilde{X}^t & \tilde{X}\hat{X}^t \\ \hline \hat{X}\tilde{X}^t & \hat{X}\hat{X}^t \end{array} \right) \\ &= Id_{n \times n} \end{aligned}$$

⁶Todo espacio vectorial (finito dimensional) con producto interno tiene una base ortonormal.

⁷Gracias al Teorema de completación de bases.

y esto implica que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{X}\bar{X}^t + \tilde{X}\tilde{X}^t = Id_{k \times k} \\ \tilde{X}\hat{X}^t = 0 \\ \hat{X}\tilde{X}^t = 0 \\ \hat{X}\hat{X}^t = Id_{(n-k) \times (n-k)} \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \bar{X}\bar{X}^t = Id_{k \times k} \\ \tilde{X} = 0 \\ \hat{X}\hat{X}^t = Id_{(n-k) \times (n-k)} \end{array} \right.$$

y por lo tanto, la matriz X es de la forma:

$$X = \left(\begin{array}{c|c} \bar{X}_{k \times k} & 0_{k \times (n-k)} \\ \hline 0_{(n-k) \times k} & \hat{X}_{(n-k) \times (n-k)} \end{array} \right)$$

con $\bar{X} \in O(k, \mathbb{R})$ y $\hat{X} \in O(n-k, \mathbb{R})$ como queríamos.

$\supseteq$ Sea $C = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \in O(n, \mathbb{R})$, con $A \in O(k, \mathbb{R})$ y $B \in O(n-k, \mathbb{R})$. Tenemos

que $Ce_i = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{k,i} \end{pmatrix}$ para $1 \leq i \leq k$ donde cada $a_{i,j}$ es un elemento de la matriz

A . Y además, $\text{span}(Ce_1, \dots, Ce_k) = \mathbb{R}^k$ ya que A es ortogonal y por lo tanto, $\text{span}(Ce_1, \dots, Ce_k) = \text{span}(e_1, \dots, e_k) = \mathbb{R}^k$. Con lo que queda demostrada la igualdad de conjuntos.

Por lo tanto, identificamos $Iso(\Gamma_0)$ con $O(k, \mathbb{R}) \times O(n-k, \mathbb{R}) (= P$ lo llamamos así por comodidad) y entonces definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}: \quad O(n, \mathbb{R})/P &\longrightarrow Gr_{k,n}(\mathbb{R}) \\ R(P) &\longmapsto \tilde{\beta}(R(P)) = \phi_R(\Gamma_0) \end{aligned}$$

la cual es una biyección⁸, usando la Definición 3.10.

Damos entonces una estructura de variedad diferenciable⁹ a $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ a partir de la biyección anterior con $O(n, \mathbb{R})/(O(k, \mathbb{R}) \times O(n-k, \mathbb{R}))$ y de la estructura de variedad diferenciable de dicho conjunto. En efecto, tomemos un atlas $\mathcal{C}^\infty \mathcal{A}$ de $O(n, \mathbb{R})/(O(k, \mathbb{R}) \times O(n-k, \mathbb{R}))$ y basta que lo componamos con $\tilde{\beta}$ (la biyección anterior) para obtener el correspondiente atlas $\mathcal{C}^\infty \tilde{\mathcal{A}}$ de $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) : i \in I\} \Rightarrow \tilde{\mathcal{A}} = \{(\tilde{\beta}(U_i), \varphi_i \circ \tilde{\beta}^{-1}) : i \in I\}$$

así, podemos observar en la siguiente figura cómo se construye el atlas de la Grassmanniana a partir del atlas de $O(n, \mathbb{R})/(O(k, \mathbb{R}) \times O(n-k, \mathbb{R}))$ y de la biyección con dicha variedad:

⁸Tenemos también que $O(n, \mathbb{R})$ es un $(O(k) \times O(n-k))$ -fibrado principal sobre $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$.

⁹Podemos dotar de un atlas y ver que las aplicaciones de transición son difeomorfismos para ver que la variedad de Grassmann es una variedad diferenciable como hacen en [14].

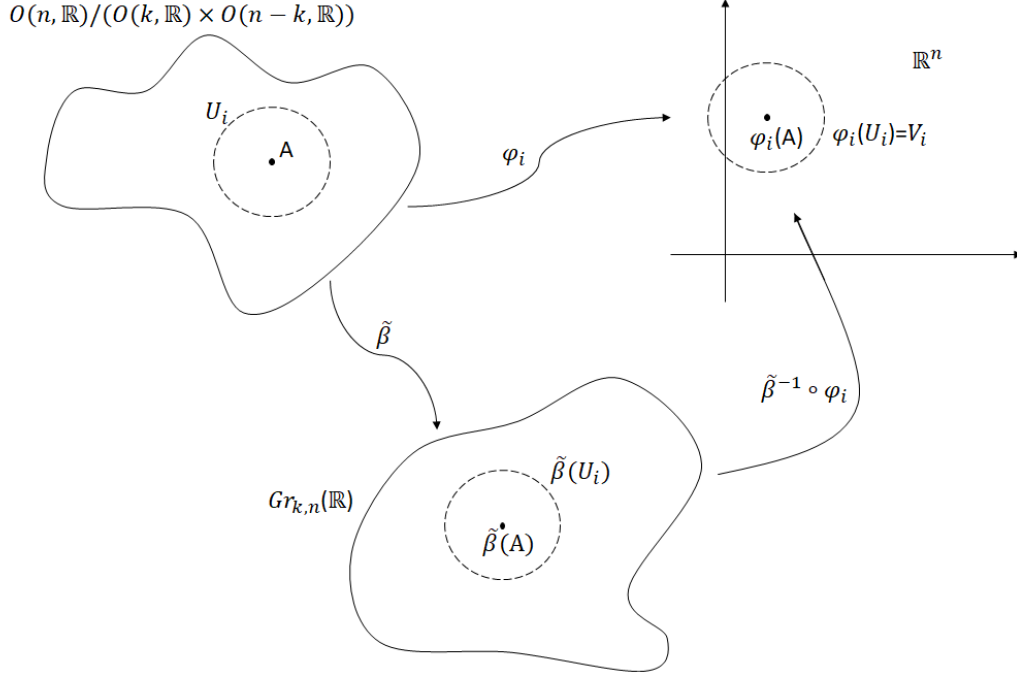


Figura 2: Construcción del atlas de $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$

Podemos comprobar que en verdad es un atlas $\mathcal{C}^\infty$ ya que las aplicaciones $\varphi_i \circ \tilde{\beta}^{-1}$ son inyectivas y además los cambios de coordenadas son difeomorfismos ya que:

$$(\varphi_i \circ \tilde{\beta}^{-1}) \circ (\varphi_j \circ \tilde{\beta}^{-1})^{-1} = \varphi_i \circ \tilde{\beta}^{-1} \circ \tilde{\beta} \circ \varphi_j^{-1} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$$

y como $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ es el cambio de coordenadas del atlas $\mathcal{A}$, es un difeomorfismo.

Y como ya tenemos que la Grassmanniana es una variedad diferenciable, usando el Teorema 3.11 podemos ver que en realidad dicha biyección es un difeomorfismo. Además para calcular su dimensión sabemos que $\dim(O(k, \mathbb{R})) = \frac{1}{2}k(k-1)$, entonces:

$$\begin{aligned} \dim(Gr_{k,n}(\mathbb{R})) &= \dim(O(n, \mathbb{R})) - \dim(O(k, \mathbb{R}) \times O(n-k, \mathbb{R})) \\ &= \dim(O(n, \mathbb{R})) - (\dim(O(k, \mathbb{R})) + \dim(O(n-k, \mathbb{R}))) \\ &= \frac{1}{2}[n(n-1) - k(k-1) - (n-k)(n-k-1)] \\ &= \frac{1}{2}[n^2 - n - k^2 + k - (n^2 - nk - n - nk + k^2 + k)] \\ &= \frac{1}{2}(n^2 - n - k^2 + k - n^2 + 2nk + n - k^2 - k) \\ &= \frac{1}{2}(2kn - 2k^2) \\ &= k(n-k) \end{aligned}$$

Como conclusión, podemos decir que hemos dotado de una estructura de variedad diferenciable a la Grassmanniana $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ cuya dimensión es $k(n-k)$ y además hemos encontrado un difeomorfismo el cual vamos a usar a continuación.

Observación 4.10. *Tenemos que $\mathcal{A}_{k,n}(\mathbb{R})$ es un abierto de $\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})$ que no es más que $\mathbb{R}^{k \times n}$. Por lo tanto $\mathcal{A}_{k,n}(\mathbb{R})$ es una variedad diferenciable. Ahora $GL(k, \mathbb{R})$ actúa sobre $\mathcal{A}_{k,n}(\mathbb{R})$ de tal forma que $\mathcal{A}_{k,n}(\mathbb{R})/GL(k, \mathbb{R})$ es una variedad diferenciable y como es biyectivo con la Grassmanniana $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$, tenemos que la Grassmanniana es una variedad diferenciable. Esto nos lleva a decir que podríamos haber usado el Teorema 3.11 para ver esta variedad es un espacio homogéneo sin haber dotado de estructura de variedad diferenciable a la Grassmanniana antes de usar dicho Teorema. Además las dimensiones coinciden ya que*

$$\dim(\mathcal{A}_{k,n}(\mathbb{R})/GL(k, \mathbb{R})) = nk - k^2 = k(n-k)$$

Observación 4.11. *Sabemos que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^{n^2}$ por lo tanto hereda todas sus propiedades topológicas (ser conexo, Hausdorff, etc.). Como $GL(n, \mathbb{R})$ es subconjunto de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ podemos dotarlo de la topología del subespacio y además, $O(n, \mathbb{R})$ es subconjunto de $GL(n, \mathbb{R})$ por lo tanto, también podemos dotarlo de la topología relativa de subespacio y mediante la proyección canónica:*

$$\pi: O(n, \mathbb{R}) \longrightarrow O(n, \mathbb{R})/(O(k, \mathbb{R}) \times O(n-k, \mathbb{R})) = Gr_{k,n}(\mathbb{R})$$

podemos dotar a $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ de la topología cociente, es decir, $U \subset Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ es abierto si, y solo si, $\pi^{-1}(U)$ es abierto en $O(n, \mathbb{R})$. Así, la topología de $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ es la topología más fina que hace de π una aplicación continua.

Por otro lado, la variedad de Grassmann $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ también es difeomorfa a la variedad homogénea

$$SO(n, \mathbb{R})/H_k, \text{ si } k \leq n-1$$

donde H_k es el subgrupo de $O(k, \mathbb{R}) \times O(n-k, \mathbb{R})$ formado por (A, A') tal que $\det(A) = \det(A')$. Lo vemos:

Como hemos visto antes, $SO(n, \mathbb{R})$ es un grupo de Lie de dimensión $\frac{n(n-1)}{2}$. Sea $0 \leq k \leq n$, sabemos que cada espacio k -dimensional $\Theta \subset \mathbb{R}^n$ está generado por k vectores linealmente independientes $u_1, \dots, u_k$, es decir, $\Gamma = \text{span}(u_1, \dots, u_k)$. Definimos la aplicación:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}: SO(n, \mathbb{R}) \times Gr_{k,n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow Gr_{k,n}(\mathbb{R}) \\ (A, \Gamma) &\longmapsto \bar{\phi}(A, \Gamma) = \text{span}(Au_1, \dots, Au_k) \end{aligned}$$

la cual es una acción transitiva de $SO(n, \mathbb{R})$ sobre $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$.

- *Bien definida:* Lo mismo que hicimos para ver que la Grassmanniana es homeomorfa a $O(n, \mathbb{R})/(O(k, \mathbb{R}) \times O(n-k, \mathbb{R}))$.

- $\bar{\phi}$ es una acción: trivial usando el producto de matrices.
- $\bar{\phi}$ es transitiva: Sean $\Theta, \Lambda \in Gr_{k,n}(\mathbb{R})$. Sabemos que Θ tiene una base ortonormal $\{u_1, \dots, u_k\}$. Si esta base está positivamente orientada no hacemos nada, pero si no, permutamos el primer vector con el segundo y entonces dicha base estaría positivamente orientada. Ahora, tenemos una base ortonormal positivamente orientada de Θ , la prolongamos a una base de $\mathbb{R}^n$ y aplicamos el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt y por lo tanto los k primeros vectores quedan iguales por que ya son ortonormales. Y ahora otra vez vemos si esta base de $\mathbb{R}^n$ está positivamente orientada, si lo está no hacemos nada pero si no lo está, cambiamos el primer vector por el segundo y ya estaría. En conclusión, hemos creado una base ortonormal y positivamente orientada de $\mathbb{R}^n$. Hacemos lo mismo con el k -espacio Λ . Ahora la matriz de cambio de base de la primera base de $\mathbb{R}^n$ a la segunda es ortogonal y además tiene determinante igual a uno porque las bases tienen la misma orientación, por lo tanto la acción es transitiva.

Ahora vamos a encontrar el estabilizador (grupo de isotropía) de un k -plano. Sea Γ_0 el subespacio generado por los k primeros vectores de la base canónica $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, es decir, $\Gamma_0 = \text{span}(e_1, \dots, e_k)$. Veamos que el grupo de isotropía de Γ_0 , $Iso_{SO(n, \mathbb{R})}(\Gamma_0)$, está dado por el siguiente conjunto:

$$\left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \in SO(n, \mathbb{R}) : A \in O(k, \mathbb{R}) \text{ y } B \in O(n-k, \mathbb{R}), \det(A) = \det(B) \right\} \quad (2)$$

Para ver que se cumple esta igualdad, primero recordemos la definición de grupo de isotropía o estabilizador en este caso:

$$Iso_{SO(n, \mathbb{R})}(\Gamma_0) = \{X \in SO(n, \mathbb{R}) : \text{span}(Xe_1, \dots, Xe_k) = \text{span}(e_1, \dots, e_k)\}$$

por lo tanto, tenemos que demostrar una igualdad de conjuntos (2), lo hacemos por doble contención:

$\subseteq$ Sea $X \in Iso_{SO(n, \mathbb{R})}(\Gamma_0)$, tenemos que $X \in SO(n, \mathbb{R})$ con $\text{span}(Xe_1, \dots, Xe_k) = \text{span}(e_1, \dots, e_k)$. Llamamos a las columnas de X como $X_1, \dots, X_n$, entonces tenemos que $\text{span}(X_1, \dots, X_k) = \text{span}(e_1, \dots, e_k)$ y por lo tanto, X_i es proporcional a e_i para $1 \leq i \leq k$. A partir de aquí se sigue como antes y por lo tanto, la matriz X es de la forma:

$$X = \left(\begin{array}{c|c} \bar{X}_{k \times k} & 0_{k \times (n-k)} \\ \hline 0_{(n-k) \times k} & \hat{X}_{(n-k) \times (n-k)} \end{array} \right)$$

con $\bar{X} \in O(k, \mathbb{R})$ y $\hat{X} \in O(n-k, \mathbb{R})$. Además, como $X \in SO(n, \mathbb{R})$, $\det(X) = 1$ y por lo tanto, $\det(\bar{X}) = \det(\hat{X})$, como queríamos.

$\supseteq$ Sea $C = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \in SO(n, \mathbb{R})$, con $A \in O(k, \mathbb{R})$ y $B \in O(n-k, \mathbb{R})$ y con el

mismo determinante. Tenemos que $Ce_i = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{k,i} \end{pmatrix}$ para $1 \leq i \leq k$ donde cada $a_{i,j}$

es un elemento de la matriz A . Y además, $\text{span}(Ce_1, \dots, Ce_k) = \mathbb{R}^k$ ya que A es ortogonal y por lo tanto, $\text{span}(Ce_1, \dots, Ce_k) = \text{span}(e_1, \dots, e_k) = \mathbb{R}^k$. Con lo que queda demostrada la igualdad de conjuntos.

Por lo tanto, identificamos $\text{Iso}(\Gamma_0)$ con H_k que es el conjunto de matrices $A \times B$ con $A \in O(k, \mathbb{R})$ y $B \in O(n-k, \mathbb{R})$ cuyo determinante es el mismo. Entonces definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}: SO(n, \mathbb{R})/H_k &\longrightarrow Gr_{k,n}(\mathbb{R}) \\ R(P) &\longmapsto \tilde{\beta}(R(P)) = \phi_R(\Gamma_0) \end{aligned}$$

la cual es una biyección usando la Definición 3.10.

Damos entonces una estructura de variedad diferenciable a $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ a partir de la biyección anterior con $SO(n, \mathbb{R})/H_k$ y de la estructura de variedad diferenciable de dicho conjunto.

4.2.1. Difeomorfismo entre $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ y $Gr_{n-k,n}(\mathbb{R})$

En la Observación 4.9 vimos que existía una biyección entre las dos Grassmannianas, de hecho existe un difeomorfismo como vamos a comprobar a continuación. Gracias a los resultados anteriores, tenemos el siguiente diagrama que nos ayuda a entender gráficamente el difeomorfismo que vamos a construir:

$$\begin{array}{ccc} Gr_{k,n}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\varphi = \psi_2^{-1} \circ \psi_1} & Gr_{n-k,n}(\mathbb{R}) \\ & \searrow \psi_1 & \downarrow \psi_2 \\ & & O(n, \mathbb{R})/(O(k, \mathbb{R}) \times O(n-k, \mathbb{R})) \end{array}$$

donde ψ_1 y ψ_2 son los difeomorfismos definidos antes entre la variedad de Grassmann y la variedad $O(n, \mathbb{R})/(O(k, \mathbb{R}) \times O(n-k, \mathbb{R}))$, además sabemos que:

$$O(n, \mathbb{R})/(O(k, \mathbb{R}) \times O(n-k, \mathbb{R})) = O(n, \mathbb{R})/(O(n-k, \mathbb{R}) \times O(k, \mathbb{R}))$$

Por lo tanto, podemos observar que φ es un difeomorfismo entre $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ y $Gr_{n-k,n}(\mathbb{R})$, es decir,

$$Gr_{k,n}(\mathbb{R}) \cong Gr_{n-k,n}(\mathbb{R})$$

Observación 4.12. Como sabemos que podemos identificar las Grassmannianas $Gr_{k+1,n+1}(\mathbb{K})$ con $Gr_{k,n}(\mathbb{K})$, tenemos que:

$$Gr_{k,n}(\mathbb{K}) \equiv Gr_{k+1,n+1}(\mathbb{K}) \cong Gr_{n-k,n+1}(\mathbb{K}) \equiv Gr_{n-k-1,n}(\mathbb{K})$$

por ejemplo, cuando $k = 1$ y $n = 3$, tenemos que:

$$Gr_{1,3}(\mathbb{K}) \equiv Gr_{2,4}(\mathbb{K}) \cong Gr_{2,4}(\mathbb{K}) \equiv Gr_{1,3}(\mathbb{K})$$

4.2.2. Propiedades topológicas de la Grassmanniana

Veamos que la variedad de Grassmann es compacta, para ello definimos la proyección canónica:

$$\pi: O(n, \mathbb{R}) \longrightarrow O(n, \mathbb{R}) / (O(k, \mathbb{R}) \times O(n-k, \mathbb{R}))$$

la cual es continua y como $O(n, \mathbb{R})$ es compacto, $O(n, \mathbb{R}) / (O(k, \mathbb{R}) \times O(n-k, \mathbb{R}))$ lo es. Y además como $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ es difeomorfo a este espacio, también es compacto.

Además, como la variedad de Grassmann es difeomorfa a $SO(n, \mathbb{R}) / H_k$, definimos la proyección

$$\pi: SO(n, \mathbb{R}) \longrightarrow SO(n, \mathbb{R}) / H_k$$

la cual es continua y al ser $SO(n, \mathbb{R})$ conexo, $SO(n, \mathbb{R}) / H_k$ también lo es y por lo tanto, $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ es conexa.

4.2.3. La Grassmanniana orientada

Una vez definida la Grassmanniana, vamos a ver mediante la topología algebraica que tiene un espacio recubridor de 2 hojas llamado Grassmanniana orientada:

Definición 4.13 (Grassmanniana orientada). La Grassmanniana orientada $\widetilde{Gr}_{k,n}(\mathbb{R})$ es el conjunto de todos los subespacios vectoriales k -dimensionales de $\mathbb{R}^n$ con una orientación fijada, ya sea positiva, $+$ o negativa, $-$.

Los elementos de $\widetilde{Gr}_{k,n}(\mathbb{R})$ son de la forma: $(\Gamma, \text{orientación})$. Por ejemplo, el mismo k -plano con distinta orientación son dos elementos de la Grassmanniana orientada: $(\Gamma, +) \neq (\Gamma, -)$. Sabemos que $\mathbb{S}^0$ actúa sobre la Grassmanniana orientada y además dicha acción es propiamente discontinua. Entonces por el resultado [5, Teorema 17.1] tenemos que $p: \widetilde{Gr}_{k,n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \widetilde{Gr}_{k,n}(\mathbb{R}) / \mathbb{S}^0$ es un recubrimiento. Donde

$$\widetilde{Gr}_{k,n}(\mathbb{R}) / \mathbb{S}^0 = \{[(\Lambda, \text{orientación})]: (\Lambda, \text{orientación}) \in \widetilde{Gr}_{k,n}(\mathbb{R})\}$$

y además,

$$[(\Lambda, \text{orientación})] = \{(\Lambda, +), (\Lambda, -)\}.$$

Por lo tanto, podemos identificar a $\widetilde{Gr}_{k,n}(\mathbb{R})/\mathbb{S}^0$ con la Grassmanniana $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ y podemos ver la aplicación p como:

$$p: \widetilde{Gr}_{k,n}(\mathbb{R}) \longrightarrow Gr_{k,n}(\mathbb{R})$$

Y por último, como tenemos una aplicación de recubrimiento, $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ conexo y el cardinal de las fibras de p es 2 ya que $p^{-1}(\Lambda) = \{(\Lambda, +), (\Lambda, -)\}$. Tenemos que el recubrimiento tiene 2 hojas.

De modo similar a como hemos determinado la estructura de la Grassmanniana como espacio homogéneo se prueba que:

Teorema 4.14. *La Grassmanniana orientada tiene estructura de espacio homogéneo mediante el siguiente difeomorfismo con el espacio homogéneo $SO(n, \mathbb{R})/(SO(k, \mathbb{R}) \times SO(n-k, \mathbb{R}))$:*

$$\widetilde{Gr}_{k,n}(\mathbb{R}) \cong SO(n, \mathbb{R})/(SO(k, \mathbb{R}) \times SO(n-k, \mathbb{R}))$$

4.3. La Grassmanniana compleja

Si tomamos el cuerpo $\mathbb{C}$ y definimos la variedad Grassmanniana a partir del espacio vectorial $\mathbb{C}^n$, tenemos que:

$$Gr_{k,n}(\mathbb{C}) := \{\text{subespacios vectoriales de dimensión } k \text{ de } \mathbb{C}^n\}$$

En este caso procedemos de forma similar al caso real para ver que tiene estructura de variedad diferenciable y que además de identificarla con un espacio homogéneo, es difeomorfo a él. También es compacto y conexo y además existe un difeomorfismo entre las Grassmannianas complejas $Gr_{k,n}(\mathbb{C})$ y $Gr_{n-k,n}(\mathbb{C})$. El espacio homogéneo con el que identificamos a la variedad de Grassmann compleja es:

$$Gr_{k,n}(\mathbb{C}) \cong U(n)/(U(k) \times U(n-k))$$

donde $U(r)$ es el grupo unitario¹⁰.

Como hemos visto antes, $U(n)$ es un grupo de Lie de dimensión n^2 . Sea $0 \leq k \leq n$, sabemos que cada espacio k -dimensional $\Theta \subset \mathbb{C}^n$ está generado por k vectores linealmente independientes $u_1, \dots, u_k$, es decir, $\Theta = \text{span}(u_1, \dots, u_k)$. Definimos la aplicación:

$$\begin{aligned} \phi: \quad U(n) \times Gr_{k,n}(\mathbb{C}) &\longrightarrow Gr_{k,n}(\mathbb{C}) \\ (R, \Theta) &\longmapsto \phi(R, \Theta) = \text{span}(Ru_1, \dots, Ru_k) \end{aligned}$$

la cual es una acción transitiva de $U(n)$ sobre $Gr_{k,n}(\mathbb{C})$.

- Veamos que ϕ está bien definida: Lo mismo que hicimos para ver que la Grassmanniana real es homeomorfa a $O(n, \mathbb{R})/(O(k, \mathbb{R}) \times O(n-k, \mathbb{R}))$.

¹⁰El grupo unitario $U(r)$ es un grupo real (no complejo) aunque sea de matrices complejas.

- ϕ es una acción: trivial usando el producto de matrices.
- ϕ es transitiva: Sean $\Theta, \Lambda \in Gr_{k,n}(\mathbb{C})$. Sabemos que Θ tiene una base ortonormal $\{u_1, \dots, u_k\}$ la cual la podemos completar hasta formar una base $\{u_1, \dots, u_n\}$ ortonormal de $\mathbb{C}^n$. Hacemos lo mismo para Λ el cual tiene como base ortonormal $\{v_1, \dots, v_k\}$ la cual completamos hasta llegar a $\{v_1, \dots, v_n\}$. Ahora, respecto de la base ortonormal $(u_1, \dots, u_n)$ la matriz de la aplicación lineal que envía $u_i \rightarrow v_i$ es unitaria.

Ahora vamos a encontrar el estabilizador (grupo de isotropía) de un k -plano. Sea Γ_0 el subespacio generado por los k primeros vectores de la base canónica $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{C}^n$, es decir, $\Gamma_0 = \text{span}(e_1, \dots, e_k)$. Veamos que el grupo de isotropía de Γ_0 está dado por:

$$Iso_{U(n)}(\Gamma_0) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \in U(n) : A \in U(k) \text{ y } B \in U(n-k) \right\} \quad (3)$$

Para ver que se cumple esta igualdad, primero recordemos la definición de grupo de isotropía o estabilizador en este caso:

$$Iso_{U(n)}(\Gamma_0) = \{X \in U(n) : \text{span}(Xe_1, \dots, Xe_k) = \text{span}(e_1, \dots, e_k)\}$$

por lo tanto, tenemos que demostrar una igualdad de conjuntos (3), lo hacemos por doble contención:

$\subseteq$ Sea $X \in Iso_{U(n)}(\Gamma_0)$, tenemos que $X \in U(n)$ con $\text{span}(Xe_1, \dots, Xe_k) = \text{span}(e_1, \dots, e_k)$. Llamamos a las columnas de X como $X_1, \dots, X_n$, entonces tenemos que $\text{span}(X_1, \dots, X_k) = \text{span}(e_1, \dots, e_k)$ y por lo tanto, X_i es proporcional a e_i para $1 \leq i \leq k$. Tenemos la matriz X :

$$X = \left(\begin{array}{c|c} \bar{X}_{k \times k} & \tilde{X}_{k \times (n-k)} \\ \hline 0_{(n-k) \times k} & \hat{X}_{(n-k) \times (n-k)} \end{array} \right)$$

y como sabemos que $X \in U(n)$, $XX^* = Id_{n \times n}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} XX^* &= \left(\begin{array}{c|c} \bar{X}_{k \times k} & \tilde{X}_{k \times (n-k)} \\ \hline 0_{(n-k) \times k} & \hat{X}_{(n-k) \times (n-k)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \bar{X}_{k \times k}^* & 0_{k \times (n-k)} \\ \hline \tilde{X}_{(n-k) \times k}^* & \hat{X}_{(n-k) \times (n-k)}^* \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} \bar{X}\bar{X}^* + \tilde{X}\tilde{X}^* & \tilde{X}\hat{X}^* \\ \hline \hat{X}\tilde{X}^* & \hat{X}\hat{X}^* \end{array} \right) \\ &= Id_{n \times n} \end{aligned}$$

y esto implica que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{X}\bar{X}^* + \tilde{X}\tilde{X}^* = Id_{k \times k} \\ \tilde{X}\hat{X}^* = 0 \\ \hat{X}\tilde{X}^* = 0 \\ \hat{X}\hat{X}^* = Id_{(n-k) \times (n-k)} \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \bar{X}\bar{X}^* = Id_{k \times k} \\ \tilde{X} = 0 \\ \hat{X}\hat{X}^* = Id_{(n-k) \times (n-k)} \end{array} \right.$$

y por lo tanto, la matriz X es de la forma:

$$X = \left(\begin{array}{c|c} \bar{X}_{k \times k} & 0_{k \times (n-k)} \\ \hline 0_{(n-k) \times k} & \hat{X}_{(n-k) \times (n-k)} \end{array} \right)$$

con $\bar{X} \in U(k)$ y $\hat{X} \in U(n-k)$ como queríamos.

$\supseteq$ Sea $C = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \in U(n)$, con $A \in U(k)$ y $B \in U(n-k)$. Tenemos que

$$Ce_i = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{k,i} \end{pmatrix} \text{ para } 1 \leq i \leq k \text{ donde cada } a_{i,j} \text{ es un elemento de la matriz}$$

A . Y además, $\text{span}(Ce_1, \dots, Ce_k) = \mathbb{C}^k$ ya que A es ortogonal y por lo tanto, $\text{span}(Ce_1, \dots, Ce_k) = \text{span}(e_1, \dots, e_k) = \mathbb{C}^k$. Con lo que queda demostrada la igualdad de conjuntos.

Por lo tanto, identificamos $\text{Iso}(\Gamma_0)$ con $U(k) \times U(n-k)$ (= P lo llamamos así por comodidad) y entonces definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}: U(n)/P &\longrightarrow Gr_{k,n}(\mathbb{C}) \\ R(P) &\longmapsto \tilde{\beta}(R(P)) = \phi_R(\Gamma_0) \end{aligned}$$

la cual es una biyección usando la Definición 3.10.

Damos entonces una estructura de variedad diferenciable a $Gr_{k,n}(\mathbb{C})$ a partir de la biyección anterior con $U(n)/(U(k) \times U(n-k))$ y de la estructura de variedad diferenciable de dicho conjunto.

Además para calcular su dimensión sabemos que $\dim_{\mathbb{R}}(U(k)) = k^2$, entonces:

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}}(Gr_{k,n}(\mathbb{C})) &= \dim(U(n)) - \dim(U(k) \times U(n-k)) \\ &= \dim(U(n)) - (\dim(U(k)) + \dim(U(n-k))) \\ &= n^2 - k^2 - (n-k)^2 \\ &= n^2 - k^2 - (n^2 - 2nk + k^2) \\ &= -2k^2 + 2nk \\ &= 2k(n-k) \end{aligned}$$

y por lo tanto la dimensión compleja¹¹ de la Grassmanniana compleja es $k(n-k)$.

Como conclusión, podemos decir que hemos dotado de una estructura de variedad diferenciable a la Grassmanniana $Gr_{k,n}(\mathbb{C})$ cuya dimensión compleja es $k(n-k)$.

Por otro lado, como el grupo unitario es compacto y conexo, definamos la proyección:

$$\pi: U(n) \longrightarrow U(n)/(U(k) \times O(n-k))$$

¹¹La Grassmanniana compleja es una variedad compleja y no se puede demostrar con el uso de $U(n)$ ya que es un grupo real. Probar esto se escapa de las herramientas de este trabajo.

que es una aplicación continua y por lo tanto, $U(n)/(U(k) \times U(n-k))$ es conexo y compacto. Por lo que la Grassmanniana compleja es compacta y conexa. Además, gracias al difeomorfismo $\tilde{\beta}$, podemos ver que $Gr_{k,n}(\mathbb{C})$ es difeomorfa a $Gr_{n-k,n}(\mathbb{C})$.

4.4. Correlaciones en el espacio proyectivo

Sabemos que la variedad de Grassmann tiene varios campos de aplicación, las propias matemáticas son uno muy importante ya que podemos usar dicha variedad en geometría proyectiva, optimización, topología algebraica, etc. Además, uno de los principales campos de uso es la visión por ordenador. Debido a la finitud de este trabajo no vamos a hablar de la visión por ordenador ya que haría falta otro TFG.

En esta sección vamos a hablar de cómo interviene la Grassmanniana en la geometría proyectiva, en concreto, hablaremos de la dualidad y más en concreto de las correlaciones. Sirven para ver que hay conceptos diferentes que son iguales en su esencia, el Principio de dualidad de algunos teoremas y además podemos ver que la polaridad en cuádricas es un tipo de correlación.

Definición 4.15. *La Grassmanniana de todos los subespacios proyectivos de $P(\mathbb{X}^{n+1})$ es el conjunto de todos los subespacios proyectivos del espacio proyectivo $P(\mathbb{X}^{n+1})$, es decir,*

$$\mathbb{G}r(\mathbb{X}) := \bigcup_{k=-1}^n \mathbb{G}r_{k,n}(\mathbb{X})$$

Observación 4.16. *En el capítulo 2, por la biyección establecida en la Proposición 2.3 existe una identificación entre $\mathbb{G}r_{k,n}(\mathbb{X})$ y $\mathbb{G}r_{k+1,n+1}(\mathbb{X})$ siendo $\mathbb{X}^{n+1}$ un espacio vectorial de dimensión $n+1$.*

Antes de definir correlación vamos a dar un concepto recíproco, la colineación.

Definición 4.17 (Colineación). *Sea $f: P(\mathbb{X}^{n+1}) \rightarrow P(\mathbb{Y}^{m+1})$ una homografía entonces se verifica que $\dim(P(\mathbb{A})) = \dim(f(P(\mathbb{A})))$, con $P(\mathbb{A}) \subset P(\mathbb{X}^{n+1})$. Dicha homografía¹² f induce una aplicación $F: \mathbb{G}r(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{G}r(\mathbb{Y})$ tal que:*

- *respeto las Grassmannianas, es decir, $F(\mathbb{G}r_{k,n}(\mathbb{X})) \subset \mathbb{G}r_{k,m}(\mathbb{Y})$ para todo $k \in \{-1, 0, \dots, n\}$.*
- *respeto los contenidos, es decir, si $P(\mathbb{A}) \subset P(\mathbb{B})$, $F(P(\mathbb{A})) \subset F(P(\mathbb{B}))$.*

Dicho esto, pasamos a definir correlación que no es más que el concepto recíproco, como ya hemos dicho antes.

¹²Cada homografía define de modo directo una colineación.

Definición 4.18 (Correlación). Sean $P(\mathbb{X}^{n+1})$ y $P(\mathbb{Y}^{n+1})$ dos espacios proyectivos de dimensión n . Una correlación es una aplicación biyectiva:

$$G: \text{Gr}(\mathbb{X}) \longrightarrow \text{Gr}(\mathbb{Y})$$

que verifica:

- G invierte las Grassmannianas, es decir, $G(\text{Gr}_{k,n}(\mathbb{X})) \subset \text{Gr}_{n-1-k,n}(\mathbb{Y})$ para todo $k \in \{-1, 0, \dots, n\}$.
- G invierte los contenidos, es decir, si $P(\mathbb{A}) \subset P(\mathbb{B})$, entonces $G(P(\mathbb{A})) \supset G(P(\mathbb{B}))$.

Observación 4.19. Sea $\mathbb{X} = \mathbb{K}^n$ un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Se define el espacio vectorial dual como

$$\mathbb{X}^* := \text{Hom}(\mathbb{X}, \mathbb{K}) := \{f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ es una transformación lineal}\}$$

el cual tiene dimensión n también. Por lo tanto, se llama espacio proyectivo dual a $P(\mathbb{X}^*)$. El motivo de esta observación viene dado porque tenemos que una correlación de $P(\mathbb{X})$ en sí mismo es una colineación de $P(\mathbb{X})$ en $P(\mathbb{X}^*)$.

Pasemos a dar un ejemplo que nos hará entender mejor las correlaciones, sobre todo la frase del principio de la sección que dice que hay conceptos diferentes que son iguales en su esencia. Un **haz de hiperplanos** en un espacio proyectivo $P(\mathbb{X})$ es el conjunto de todos los hiperplanos de $P(\mathbb{X})$ tal que todos contienen el mismo subespacio de una dimensión menos, es decir,

$$\text{Haz de hiperplanos} := \{H \subset P(\mathbb{X}) : \dim(P(\mathbb{X})) \text{ y } S \subset H\}$$

donde $\dim(S) = \dim(P(\mathbb{X})) - 2$. A S se le llama soporte del haz.

Ejemplo 4.20 (Haz de hiperplanos). Sea G una correlación de un espacio proyectivo $P(\mathbb{K}^{n+1})$ de dimensión n en sí mismo y sea $L \subset P(\mathbb{K}^{n+1})$ una recta proyectiva de $P(\mathbb{K}^{n+1})$. Entonces usando la definición de correlación tenemos que:

- Como $G(\text{Gr}_{k,n}(\mathbb{K})) \subset \text{Gr}_{n-1-k,n}(\mathbb{K})$, tenemos que $\dim(G(L)) = n - 1 - \dim(L) = n - 1 - 1 = n - 2$;
- Para todo punto $p \in L$ se tiene $\dim(G(p)) = n - 1 - 0 = n - 1$, por lo tanto podemos ver un punto como un hiperplano;
- Para todo punto $p \in L$ se tiene $G(p) \supset G(L)$.

Por lo tanto, mediante la correlación la recta y sus puntos se han transformado en un haz de hiperplanos. En concreto, a cada punto le corresponde un hiperplano y a la recta en que están los puntos, le corresponde el soporte del haz de hiperplanos. $\diamond$

Veamos las propiedades fundamentales de una correlación, las cuales nos van a ayudar a definir el principio de dualidad que veremos después.

Teorema 4.21. *Sea G una correlación de un espacio proyectivo $P(\mathbb{K}^{n+1})$ de dimensión n en sí mismo y sean $P(\mathbb{A}), P(\mathbb{B}) \subset P(\mathbb{K}^{n+1})$. Entonces:*

- G^{-1} también es correlación;
- $G(P(\mathbb{A}) + P(\mathbb{B})) = G(P(\mathbb{A})) \cap G(P(\mathbb{B}));$
- $G(P(\mathbb{A}) \cap P(\mathbb{B})) = G(P(\mathbb{A})) + G(P(\mathbb{B})).$

Una vez dado este teorema pasemos al Principio de Dualidad, que es muy importante en la geometría proyectiva.

Definición 4.22. *Dado un enunciado proyectivo que sólo involucre relaciones de contenido, suma e intersección de subespacios se llama **enunciado dual** al que se obtiene realizando una correlación, esto es, permutando las relaciones de contenido entre sí y las de suma con intersección.*

Por lo tanto, se tiene:

Teorema 4.23 (Principio de dualidad). *La verdad de un enunciado equivale a la de su dual.*

En el siguiente ejemplo vamos a hallar el dual del teorema de Desargues. En primer lugar enunciamos dicho teorema cuya demostración la podemos encontrar en cualquier libro de geometría proyectiva.

Teorema 4.24 (Desargues). *Sean a, b, c, a', b', c' seis puntos de un plano proyectivo tales que no haya tres alineados y sean:*

$$p = \langle a, b \rangle \cap \langle a', b' \rangle, q = \langle b, c \rangle \cap \langle b', c' \rangle, r = \langle a, c \rangle \cap \langle a', c' \rangle$$

entonces p, q, r están alineados si y solo si las rectas $\langle a, a' \rangle, \langle b, b' \rangle, \langle c, c' \rangle$ son concurrentes.

Ejemplo 4.25. *Ahora, supongamos que tenemos una correlación de $P(\mathbb{K}^3)$ en sí mismo*

con $\dim(P(\mathbb{K}^3)) = 2$. Usando la definición de correlación y sus propiedades tenemos:

$$\begin{array}{lll}
a, b, c, a', b', c' \text{ puntos} & \xrightarrow{G} & L, R, S, L', R', S' \text{ rectas} \\
\langle a, b \rangle & \mapsto & L \cap R = x \\
\langle b, c \rangle & \mapsto & R \cap S = y \\
\langle a, c \rangle & \mapsto & L \cap S = z \\
\langle a', b' \rangle & \mapsto & L' \cap R' = x' \\
\langle b', c' \rangle & \mapsto & R' \cap S' = y' \\
\langle a', c' \rangle & \mapsto & L' \cap S' = z' \\
p = \langle a, b \rangle \cap \langle a', b' \rangle & \mapsto & \langle x, x' \rangle \\
q = \langle b, c \rangle \cap \langle b', c' \rangle & \mapsto & \langle y, y' \rangle \\
r = \langle a, c \rangle \cap \langle a', c' \rangle & \mapsto & \langle z, z' \rangle \\
\langle p, q, r \rangle, \text{ si est\'an alineados} & \mapsto & \langle x, x' \rangle \cap \langle y, y' \rangle \cap \langle z, z' \rangle \\
\left\{ \begin{array}{l} \langle a, a' \rangle \cap \langle b, b' \rangle \cap \langle c, c' \rangle \\ \text{si son concurrentes} \end{array} \right\} & \mapsto & \langle p', q', r' \rangle
\end{array}$$

Por lo tanto el enunciado dual es:

Sean L, R, S, L', R', S' seis rectas del plano proyectivo tales que no haya tres concurrentes y sean:

$$\begin{aligned}
T_1 &= (L \cap R) + (L' \cap R') \\
T_2 &= (R \cap S) + (R' \cap S') \\
T_3 &= (L \cap S) + (L' \cap S')
\end{aligned}$$

tres rectas. Entonces T_1, T_2, T_3 son concurrentes si y solo si, los puntos $L \cap L', R \cap R', S \cap S'$ est\'an alineados.

El teorema de Desargues es autodual, porque queda la misma configuraci\'on de puntos y rectas en el enunciado dado que es su dual. Veamos gr\'aficamente los dos teoremas a continuaci\'on. Tenemos que decir que hemos usado la herramienta GeoGebra para obtener estas figuras.

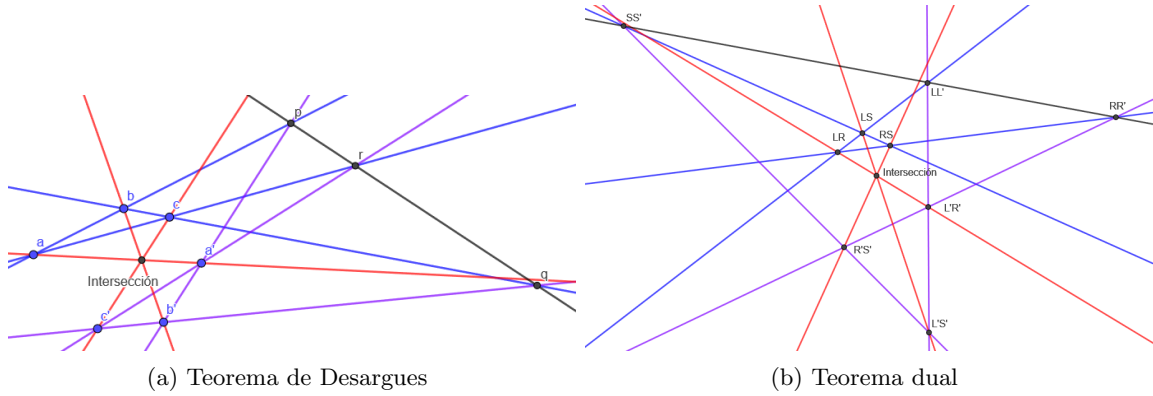


Figura 3: Comparación gráfica del teorema de Desargues y su dual cuando se verifican las hipótesis de cada uno de ellos.

◇

Por otro lado, hay teoremas como el de Pascal cuyo enunciado dual es el teorema de Brianchon, basta usar la polaridad como correlación. Y sólo hace falta demostrar uno de ellos para poder afirmar la veracidad del otro.

5. Variedad de Stiefel y su relación con la de Grassmann

Ahora pasamos a estudiar otro tipo de variedad, la variedad de Stiefel. La variedad de Stiefel está relacionada con las referencias de un espacio vectorial. Dicha variedad también es un espacio homogéneo y está íntimamente relacionada con la variedad de Grassmann. He ahí el motivo de su estudio en este trabajo.

Definición 5.1 (Variedad de Stiefel). *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión n y sea $0 < k \leq n$, se define la Variedad de Stiefel como el conjunto:*

$$S_k(\mathbb{V}) := \{k\text{-bases en } \mathbb{V}\} = \{\bar{w} = (w_1, \dots, w_k) : w_1, \dots, w_k \text{ son l.i. en } \mathbb{V}\}$$

A continuación vamos a identificar a la variedad de Stiefel con un espacio homogéneo como hicimos antes con la de Grassmann. De esta forma vamos a dotar a la variedad de Stiefel con una estructura de variedad diferenciable.

5.1. La Variedad de Stiefel vista como espacio homogéneo

Vamos a identificar la variedad de Stiefel con un espacio homogéneo como hemos hecho antes con la variedad de Grassmann, fijemos una base $e_1, \dots, e_n$ de $\mathbb{V}$ e identifiquemos $\mathbb{V}$ con $\mathbb{R}^n$. Entonces la acción:

$$\begin{aligned} \eta: GL(n, \mathbb{R}) \times S_k(\mathbb{V}) &\longrightarrow S_k(\mathbb{V}) \\ (A, (v_1, \dots, v_k)) &\longmapsto \eta(A, (v_1, \dots, v_k)) = (Av_1, \dots, Av_k) \end{aligned}$$

es transitiva y entonces hallamos el grupo de isotropía de la k -base de los k primeros vectores de la base canónica de $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$, es decir, $e_1, \dots, e_k$.

$$H = Iso_{GL(n, \mathbb{R})}((e_1, \dots, e_k)) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} Id_k & A \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \in GL(n, \mathbb{R}) : B \in GL(n-k, \mathbb{R}) \text{ y } A \in \mathcal{M}_{k \times (n-k)}(\mathbb{R}) \right\}$$

donde $\mathcal{M}_{k \times (n-k)}(\mathbb{R})$ es el espacio de las matrices reales de dimensiones $k \times (n-k)$.

Definimos pues la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}: GL(n, \mathbb{R})/H &\longrightarrow S_k(\mathbb{V}) \\ A(H) &\longmapsto \tilde{\eta}(A(H)) = \eta_A((e_1, \dots, e_k)) \end{aligned}$$

la cual es una biyección (Ver Definición 3.10). Y como en la variedad de Grassmann, mediante esta biyección dotamos de estructura de variedad diferenciable a la variedad de Stiefel $S_k(\mathbb{V})$.

Ahora para calcular la dimensión de la variedad de Stiefel, calcularemos la dimensión de la variedad $GL(k, \mathbb{R})/H$ la cual es $\dim(GL(k, \mathbb{R})) - \dim(H) = k^2 - \dim(H)$, entonces solo nos falta hallar la dimensión de H :

$$\left(\begin{array}{c|c} I & A \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \in GL(k, \mathbb{R}) \Leftrightarrow B \in GL(n-k, \mathbb{R})$$

Por consiguiente:

$$\begin{aligned} \dim(H) &= \dim(\mathbb{R}^{k \times (n-k)}) + \dim(GL(n-k, \mathbb{R})) \\ &= k(n-k) + (n-k)^2 \\ &= n(n-k) \end{aligned}$$

Y entonces, la dimensión de la variedad de Stiefel es:

$$\dim(S_k(\mathbb{V})) = n^2 - n(n-k) = nk$$

entonces $S_k(\mathbb{V}) \simeq GL(n, \mathbb{R})/H$ tiene una estructura de variedad diferenciable de dimensión nk , que es independiente de la base $e_1, \dots, e_n$ de $\mathbb{V}$ elegida.

Por otro lado, sea ahora,

$$\tilde{S}_k(\mathbb{V}) = \{\bar{v} = (v_1, \dots, v_k) : v_i \in \mathbb{V} \text{ con } 1 \leq i \leq k \text{ son vectores ortonormales}\}$$

Fijemos una base ortonormal $e_1, \dots, e_n$ de $\mathbb{V}$, entonces por el mismo razonamiento anterior $\tilde{S}_k(\mathbb{V})$ lo identificamos con $O(n)/O(n-k)$ y por lo tanto, tiene una estructura de variedad diferenciable de dimensión $\frac{k(2n-k-1)}{2}$ que es independiente de la base ortonormal $e_1, \dots, e_n$ de $\mathbb{V}$ elegida.

Para $k = 1$, tenemos:

$$\tilde{S}_1(\mathbb{V}) \simeq O(n)/O(n-1) \simeq \mathbb{S}^{n-1}$$

En particular, $\mathbb{S}^{n-1} = \tilde{S}_1(\mathbb{R}^n)$.

Observación 5.2 (Propiedades topológicas de las variedades de Stiefel). *Llamemos variedad de Stiefel a $S_k(\mathbb{R}^n)$ y variedad de Stiefel de vectores ortonormales a $\tilde{S}_k(\mathbb{R}^n)$. Tenemos que la variedad de Stiefel es no compacta pero la variedad de Stiefel de vectores ortonormales sí lo es, basta ver que la proyección*

$$\pi: O(n, \mathbb{R}) \longrightarrow O(n, \mathbb{R})/O(n-1, \mathbb{R})$$

es continua y como $O(n, \mathbb{R})$ es compacto, $O(n, \mathbb{R})/O(n-1, \mathbb{R}) \simeq \tilde{S}_k(\mathbb{R}^n)$ lo es. Además, por el mismo razonamiento, la variedad de Stiefel de vectores ortonormales es conexa ya que es el cociente de $SO(n, \mathbb{R})$ pero cuando $k < n$.

5.2. Relación con la Variedad de Grassmann

En esta sección vamos a ver que la variedad de Grassmann está relacionada con la variedad de Stiefel. Como bien sabemos, la variedad de Stiefel es el conjunto de las k -bases de un espacio vectorial. Ahora, dichos vectores podemos ponerlos en forma de matriz, es decir, que cada vector de la k -base sea una fila de dicha matriz. Así, trivialmente podemos definir la siguiente biyección la cual nos da la relación buscada:

$$\begin{aligned} \tau: S_k(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathcal{A}_{k,n}(\mathbb{R}) \\ \bar{v} = (v_1, \dots, v_k) &\longmapsto \tau(\bar{v}) = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y como sabemos por la Proposición 4.5 existe una biyección entre $\mathcal{A}_{k,n}(\mathbb{R})/\sim$ y $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ y por lo tanto, la variedad de Grassmann $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ es biyectiva a una variedad cociente de la variedad de Stiefel $S_k(\mathbb{R}^n)/\sim$.

Observación 5.3. *Tenemos otra forma de ver que la variedad de Grassmann es una variedad compacta. Sabemos que $\tilde{S}_k(\mathbb{R}^n) \subset S_k(\mathbb{R}^n)$ y además, cualquier elemento de $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ tiene una base ortonormal. Además, la variedad de Stiefel de vectores ortonormales $\tilde{S}_k(\mathbb{R}^n)$ es compacta, por lo tanto, mediante la proyección*

$$\pi: S_k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S_k(\mathbb{R}^n)/\sim$$

restringida a $\tilde{S}_k(\mathbb{R}^n)$ que es una aplicación continua, tenemos que la variedad de Grassmann es una variedad compacta. Y del mismo modo, sabiendo que la variedad de Stiefel de vectores ortonormales $\tilde{S}_k(\mathbb{R}^n)$ es una variedad conexa cuando $k < n$, mediante la correspondiente proyección podemos ver que la variedad de Grassmann es una variedad compacta cuando $k < n$.

5.3. Proyecciones y simetrías.

En esta sección hemos hecho uso de [8] y [2]. Vamos a dar una biyección entre la Grassmanniana real y un conjunto de matrices con unas propiedades especiales, esto no es más que otra forma de ver dicha variedad. Así pues, sea la variedad de Grassmann $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$.

5.3.1. Proyecciones.

Para cada $\Upsilon \in Gr_{k,n}(\mathbb{R})$, sea $\{u_1, \dots, u_k\}$ una base ortonormal de Υ y consideremos su representación matricial:

$$Q = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k \times n}$$

con $QQ^t = Id$. Entonces la matriz $A = Q^t Q \in GL(n)$ satisfaciendo que $A^t = A$, $A^2 = A$ y que $\text{traza}(A) = k$ es la matriz de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^n$ sobre Υ en la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto podemos definir una biyección entre los conjuntos $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{P}_k(n) := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A^t = A, A^2 = A, \text{traza}(A) = k\} \subseteq Sim(n)$, siendo $Sim(n)$ el conjunto de matrices simétricas $n \times n$:

$$\begin{aligned} g_k : Gr_{k,n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{P}_k(n) \\ \Upsilon &\longmapsto g_k(\Upsilon) = A \end{aligned}$$

5.3.2. Simetrías o reflexiones.

Con las notaciones anteriores, la matriz $B = 2A - Id = 2Q^t Q - Id \in gl(n)$ que satisface que: $B^t = B$, $B^2 = Id$ y $\text{traza}(B) = 2k - n$ es la matriz de reflexión (o simetría):

$$\begin{aligned} S_\Upsilon : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ w &\longmapsto S_\Upsilon(w) = wB \end{aligned}$$

de $\mathbb{R}^n$ respecto del k -plano $\Upsilon \subset \mathbb{R}^n$, en la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Por otro lado, sea

$$\mathcal{R}_{2k-n}(n) := \{B \in GL(n, \mathbb{R}) : B^t = B, B^2 = Id, \text{traza}(B) = 2k - n\}$$

entonces la siguiente aplicación es biyectiva,

$$\begin{aligned} h_k : \mathcal{P}_k(n) &\longrightarrow \mathcal{R}_{2k-n}(n) \\ A = \frac{B+Id}{2} &\longmapsto h_k(A) = B = 2A - Id \end{aligned}$$

y por lo tanto, podemos definir otra aplicación biyectiva

$$\begin{aligned} \tilde{g}_k : Gr_{k,n}(\mathbb{R}) &\xrightarrow{g_k} \mathcal{P}_k(n) \xrightarrow{h_k} \mathcal{R}_{2k-n}(n) \\ \Upsilon = \text{span}(u_1, \dots, u_k) &\longmapsto A = Q^t Q \longmapsto \tilde{g}_k(\Upsilon) = B = 2A - Id \end{aligned}$$

que asocia a cada $\Upsilon \in Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ la matriz B de la reflexión (o simetría) S_Υ de $\mathbb{R}^n$ respecto del k -plano $\Upsilon \subseteq \mathbb{R}^n$.

Observación 5.4. Podemos definir una métrica¹³ (y por lo tanto una topología) en $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$, dicha métrica es conocida como métrica “gap”. En concreto, sean $\Upsilon_1, \Upsilon_2 \in Gr_{k,n}(\mathbb{R})$, definimos la distancia¹⁴ “gap” como:

$$d(\Upsilon_1, \Upsilon_2) = \|g_k(\Upsilon_1) - g_k(\Upsilon_2)\|_2 = \|A_1 - A_2\|_2$$

donde $g_k(\Upsilon_i) = A_i$ es la proyección ortogonal sobre Υ_i , con $i = 1, 2$.

Vamos a ver a continuación un ejemplo de cómo usar las proyecciones, veamos una superficie utilizada en geometría algebraica:

Ejemplo 5.5 (Superficie de Veronese). En primer lugar, tenemos que decir que vamos a seguir la notación anterior. Sea $g_1: \mathbb{RP}^2 \rightarrow \text{Sim}(3) = \mathbb{R}^6$ la aplicación que asocia a cada elemento $\Upsilon \in \mathbb{RP}^2 = Gr_{1,3}(\mathbb{R})$ la matriz A de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre la recta $\Upsilon \subset \mathbb{R}^3$. Probemos es un embebimiento y que $g_1(\mathbb{RP}^2) = \{A \in gl(3): A^t = A, A^2 = A, \text{traza}(A) = 1\} (= \mathcal{P}_1(3))$. Para cada $\Upsilon \in \mathbb{RP}^2$ tenemos la proyección ortogonal $P_\Upsilon: \mathbb{R}^3 \rightarrow \Upsilon \subset \mathbb{R}^3$ sobre dicho 1-plano Υ y además, la aplicación

$$\begin{aligned} g_1: \quad \mathbb{RP}^2 = Gr_{1,3}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{P}_1(3) \\ \Delta &\longmapsto g_1(\Delta) = A \end{aligned}$$

con $\mathcal{P}_1(3) := \{A \in gl(3): A^t = A, A^2 = A, \text{traza}(A) = 1\}$ es biyectiva y la siguiente aplicación sobreyectiva es diferenciable:

$$\begin{aligned} h_1: \quad \mathbb{S}^2 &\xrightarrow{\pi} \mathbb{RP}^2 && \xrightarrow{g_1} \mathcal{P}_1(3) \\ (x, y, z) &\longrightarrow [x : y : z] && \longmapsto A \end{aligned}$$

$$\text{con } A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix} \equiv (x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz).$$

Así, para ver que la aplicación g_1 es un embebimiento con $g_1(\mathbb{RP}^2) = \mathcal{P}_1(3)$, será suficiente probar que la aplicación diferenciable:

$$\begin{aligned} h: \quad \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} &\longrightarrow \mathbb{R}^6 \\ (x, y, z) &\longmapsto h(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz) \end{aligned}$$

es una inmersión. Para ello, sean $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ con $\alpha(0) = (x, y, z)$ y $\alpha'(0) = (v_1, v_2, v_3)$. Supongamos que

$$\begin{aligned} (dh)_{(x,y,z)}(v) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} h(\alpha(t)) \\ &= (2xv_1, 2yv_2, 2zv_3, yv_1 + xv_2, zv_1 + xv_3, zv_2 + yv_3) \\ &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

¹³Además sabemos que todo espacio métrico es Hausdorff, entonces $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ es Hausdorff.

¹⁴La norma 2 que usamos está definida como: $\|A\|_2 = (\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2)^{1/2}$.

Entonces, como $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ tenemos que uno de los x, y, z no es cero. Por ejemplo, sea $x \neq 0$, entonces:

$$(2xv_1, 0, 0, xv_2, xv_3, 0) = 0 \Leftrightarrow v_i = 0, \forall i \Rightarrow v = 0$$

Por lo tanto, h es una inmersión. Y además, la subvariedad conexas, compacta 2-dimensional $h(\mathbb{S}^2) = \{(x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz) : (x, y, z) \in \mathbb{S}^2\}$ de $\mathbb{R}^6$ se llama **superficie de Veronese**. Como tenemos que las coordenadas de la superficie son homogéneas y distintas de cero, podemos verla en el espacio proyectivo $\mathbb{RP}^5$ simplemente tomando:

$$\begin{aligned} \tilde{h}: \quad \mathbb{RP}^2 &\longrightarrow \mathbb{RP}^5 \\ [x : y : z] &\longmapsto \tilde{h}([x, y, z]) = [x^2 : y^2 : z^2 : xy : xz : yz] \end{aligned}$$

◇

6. Embebimiento de Plücker

En primer lugar, vamos a hablar sobre la inmersión de Plücker mediante la cual podemos observar a la variedad Grassmanniana $Gr_{k,n}(\mathbb{K})$ como un subvariedad proyectiva del espacio proyectivo $\mathbb{KP}^{\binom{n}{k}-1}$. Esta aplicación hace corresponder a cada k -plano de $Gr_{k,n}(\mathbb{K})$ k coordenadas homogéneas del espacio proyectivo. Tenemos que usar las nociones de álgebra exterior (álgebra de Grassmann), recordemos qué es el álgebra exterior de un espacio vectorial $\mathbb{V}$.

6.1. Álgebra exterior

Vamos a estudiar con brevedad algunas definiciones y propiedades que nos van a ayudar en este capítulo. Hemos hecho uso de [12], [13] en esta sección.

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión n , la k -ésima potencia exterior de $\mathbb{V}$, $\bigwedge^k \mathbb{V}$, es un espacio vectorial que tiene asociado una aplicación ϕ que definimos a continuación:

$$\begin{aligned} \phi: \quad \mathbb{V} \times \overbrace{\cdots}^k \times \mathbb{V} &\longrightarrow \bigwedge^k \mathbb{V} \\ (v_1, \dots, v_k) &\longmapsto \phi(v_1, \dots, v_k) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \end{aligned}$$

llamada multiplicación exterior. Este producto tiene la propiedad de ser multilineal (lineal en todas sus componentes) y antisimétrico, esto es,

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_i \wedge \cdots \wedge v_j \wedge \cdots \wedge v_k = -v_1 \wedge \cdots \wedge v_j \wedge \cdots \wedge v_i \wedge \cdots \wedge v_k \text{ con } i < j$$

y de estas dos propiedades tenemos que se cumple:

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v \wedge \cdots \wedge v \wedge \cdots \wedge v_k = 0$$

Ahora, veamos la siguiente:

Proposición 6.1. Dada una base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ de $\mathbb{V}$, el conjunto:

$$\mathcal{B}_k = \{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$$

es una base de $\bigwedge^k \mathbb{V}$. Por lo tanto, tenemos que:

$$\dim(\bigwedge^k \mathbb{V}) = \binom{n}{k}$$

si $0 \leq k \leq n$. Además, para $k > n$ tenemos que $\bigwedge^k \mathbb{V} = \{0\}$.

Lema 6.2. Sea $\mathbb{W}$ un subespacio vectorial d -dimensional de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ n -dimensional sobre un cuerpo K , además sean $\beta_1 = \{w_1, \dots, w_d\}$ y $\beta_2 = \{v_1, \dots, v_d\}$ dos bases de $\mathbb{W}$. Entonces

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_d = \lambda(w_1 \wedge \dots \wedge w_d)$$

para algún $\lambda \in K$.

Demostración. En primer lugar, realizamos un cambio de base de β_2 en β_1 , es decir, tenemos que:

$$w_j = a_{1j}v_1 + \dots + a_{dj}v_d$$

con $a_{ij} \in K, \forall i, j$. Calculamos entonces:

$$\begin{aligned} w_1 \wedge \dots \wedge w_d &= (a_{11}v_1 + \dots + a_{d1}v_d) \wedge \dots \wedge (a_{1d}v_1 + \dots + a_{dd}v_d) \\ &= \sum_{\sigma \in S_d} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{d\sigma(d)} (v_1 \wedge \dots \wedge v_d) \end{aligned}$$

donde $\text{sgn}(\sigma)$ es la signatura de σ . Entonces vemos que

$$\sum_{\sigma \in S_d} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{d\sigma(d)} = \det(A) := \lambda$$

donde $A = (a_{ij})$ es la matriz de cambio de base. □

6.2. Embebimiento de Plücker

Dada la última propiedad de la sección anterior, pasamos a definir la aplicación de Plücker.

Definición 6.3 (Aplicación de Plücker). Sea $\Lambda \in Gr_{k,n}(\mathbb{K})$ tal que $\{v_1, \dots, v_k\}$ es una base de Λ , se define la aplicación de Plücker de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} p: Gr_{k,n}(\mathbb{K}) &\longrightarrow P(\bigwedge^k \mathbb{K}^n) \\ \Lambda &\longmapsto p(\Lambda) = [v_1 \wedge \dots \wedge v_k] \end{aligned}$$

donde $[v_1 \wedge \dots \wedge v_k]$ es el proyectivo del vector $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$.

Dicha aplicación está bien definida por el Lema 6.2. Ahora vemos un ejemplo para entender mejor la definición, es un ejemplo básico y solo vamos a calcular la imagen de un k -plano.

Ejemplo 6.4. Trabajaremos con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sea la variedad de Grassmann de dimensión 4, $Gr_{2,4}(\mathbb{K})$ y $\Pi \in Gr_{2,4}(\mathbb{K})$ un 2-plano con base $\beta = \{v_1, v_2\}$. Por otro lado, sea $\alpha = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canónica de $\mathbb{K}^4$ entonces podemos escribir:

$$v_j = \sum_{i=1}^4 a_{j,i} e_i, \quad j = 1, 2$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned} p(\Pi) &= \left[\left(\sum_{i=1}^4 a_{1,i} e_i \right) \wedge \left(\sum_{i=1}^4 a_{2,i} e_i \right) \right] \\ &= [(a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1})(e_1 \wedge e_2) + (a_{1,1}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,1})(e_1 \wedge e_3) \\ &\quad + (a_{1,1}a_{2,4} - a_{1,4}a_{2,1})(e_1 \wedge e_4) + (a_{1,2}a_{2,2} - a_{1,3}a_{2,2})(e_2 \wedge e_3) \\ &\quad + (a_{1,2}a_{2,4} - a_{1,4}a_{2,2})(e_2 \wedge e_4) + (a_{1,3}a_{2,4} - a_{1,4}a_{2,3})(e_3 \wedge e_4)] \end{aligned}$$

En conclusión, la imagen de $Gr_{2,4}(\mathbb{K})$ por la aplicación de Plücker está contenida en el espacio proyectivo $P(\bigwedge^2 \mathbb{K}^4)$ que es un espacio 5-dimensional generado por: $\{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4\}$. $\diamond$

Observación 6.5. La Grassmanniana de planos de $\mathbb{R}^4$, $Gr_{2,4}(\mathbb{R})$, se puede identificar en virtud de la Proposición 4.5 y la Observación 4.16 con la Grassmanniana $Gr_{1,3}(\mathbb{R})$ de rectas proyectivas del espacio proyectivo tridimensional.

Proposición 6.6. La aplicación de Plücker p es inyectiva.

Demostración. En primer lugar, definimos la aplicación χ como sigue:

$$\begin{aligned} \chi: P(\bigwedge^k \mathbb{K}^n) &\longrightarrow Gr_{k,n}(\mathbb{K}) \\ [w] &\longmapsto \{v \in \mathbb{K}^n: v \wedge w = 0 \in \bigwedge^{k+1} \mathbb{K}^n\} \end{aligned}$$

y a continuación vamos a demostrar por doble contención que $\chi \circ p = id$, de esta forma p resulta ser inyectiva. Sea $\Xi \in Gr_{k,n}(\mathbb{K})$, vamos a verificar la igualdad: $\Xi = \chi \circ p(\Xi)$.

$\subseteq$ Sea $\{w_1, \dots, w_k\}$ una base de Ξ , tenemos por lo tanto que $p(\Xi) = [w_1 \wedge \dots \wedge w_k]$ y además $\forall w \in \Xi$, $w \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_k = 0$ y entonces $\Xi \subseteq \chi \circ p(\Xi)$.

⊇ Por otro lado, si $v \in \chi \circ p(\Xi)$, $v \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_k = 0$. Extendemos la base $\{w_1, \dots, w_k\}$ a una base de $\mathbb{V}$, $\{w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_n\}$. Escribiendo v en esta base tenemos:

$$v = \sum_{i=1}^n a_i w_i$$

y además,

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i w_i \right) \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_k = 0$$

y usando las propiedades de $\wedge$, concluimos que:

$$a_i = 0 \text{ para } i > k$$

y por lo tanto,

$$v = a_1 w_1 + \cdots + a_k w_k$$

□

De hecho, la aplicación de Plücker p es un embebimiento (Véase [7, Corolario 2.8]). Como p es un embebimiento, sabemos que $Gr_{k,n}(\mathbb{K})$ es homeomorfo a su imagen $p(Gr_{k,n}(\mathbb{K}))$, por lo tanto, podemos ver a dicha variedad de Grassmann como un subespacio proyectivo del espacio proyectivo $P(\bigwedge^k \mathbb{K}^n)$.

Definición 6.7 (Coordenadas de Plücker). *Sean p la aplicación de Plücker, $\Lambda = \text{span}(v_1, \dots, v_k) \in Gr_{k,n}(\mathbb{K})$ y $p(\Lambda) = [v_1 \wedge \cdots \wedge v_k]$, sabemos que podemos escribir $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ de la siguiente forma:*

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$$

y como $[v_1 \wedge \cdots \wedge v_k]$ no puede ser nulo, $a_{i_1 \dots i_k}$ no son todos cero y se dice que son las coordenadas de Plücker del punto $[v_1 \wedge \cdots \wedge v_k]$.

Ejemplo 6.8. En el Ejemplo 6.4, podemos decir que las coordenadas de Plücker del 2-plano Π son:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} & : & a_{1,1}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,1} & : & a_{1,1}a_{2,4} - a_{1,4}a_{2,1} \\ a_{1,2}a_{2,2} - a_{1,3}a_{2,2} & : & a_{1,2}a_{2,4} - a_{1,4}a_{2,2} & : & a_{1,3}a_{2,4} - a_{1,4}a_{2,3} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}\mathbb{P}^5$$

◇

Por otro lado, sabemos que podemos definir la biyección:

$$\begin{aligned} \psi: P(\bigwedge^k \mathbb{K}^n) & \longrightarrow \mathbb{K}\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1} \\ [v] = \left[\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \right] & \longmapsto [\cdots : a_{i_1 \dots i_k} : \cdots] \end{aligned}$$

que envía cada elemento de $P(\bigwedge^k \mathbb{K}^n)$ puesto como combinación lineal de elementos de la base al escalar asociado a cada elemento de dicha base, que en realidad son las coordenadas de Plücker. Dichas coordenadas de Plücker también se pueden calcular de una forma más rápida: supongamos que tenemos $\Delta \in Gr_{k,n}(\mathbb{K})$ cuya matriz asociada es $M \in \mathcal{A}_{k,n}(\mathbb{K})$, definimos como $A_{i_1 \dots i_k}$ a la matriz formada por las columnas $i_1 \dots i_k$ de la matriz A . Tenemos pues $\binom{n}{k}$ matrices y como son cuadradas podemos calcular sus determinantes y entonces cada $\det(A_{i_1 \dots i_k})$ son las coordenadas de Plücker de Δ . Tenemos que se cumple la siguiente igualdad:

$$\det(A_{i_1 \dots i_k}) = a_{i_1 \dots i_k}$$

donde $a_{i_1 \dots i_k}$ está definido en la Definición 6.7.

Ejemplo 6.9. En el Ejemplo 6.4 tenemos que la matriz que identifica al 2-plano es

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \end{pmatrix}$$

entonces calculamos los menores de esta matriz:

$$\begin{aligned} A_{1,2} &= \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} \\ A_{1,3} &= \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{pmatrix} = a_{1,1}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,3} \\ A_{1,4} &= \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,4} \end{pmatrix} = a_{1,1}a_{2,4} - a_{2,1}a_{1,4} \\ A_{2,3} &= \det \begin{pmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} = a_{1,2}a_{2,3} - a_{2,2}a_{1,3} \\ A_{2,4} &= \det \begin{pmatrix} a_{1,2} & a_{1,4} \\ a_{2,2} & a_{2,4} \end{pmatrix} = a_{1,2}a_{2,4} - a_{2,2}a_{1,4} \\ A_{3,4} &= \det \begin{pmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,3} & a_{2,4} \end{pmatrix} = a_{1,3}a_{2,4} - a_{2,3}a_{1,4} \end{aligned}$$

y sus coordenadas de Plücker son:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} & : & a_{1,1}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,3} & : & a_{1,1}a_{2,4} - a_{2,1}a_{1,4} \\ a_{1,2}a_{2,3} - a_{2,2}a_{1,3} & : & a_{1,2}a_{2,4} - a_{2,2}a_{1,4} & : & a_{1,3}a_{2,4} - a_{2,3}a_{1,4} \end{bmatrix} \in \mathbb{KP}^5$$

◇

Ahora vamos a describir la imagen de la aplicación de Plücker, vamos a ver que es un conjunto algebraico formado por los elementos que tienen una propiedad especial (definida a continuación) y por lo tanto es un cerrado en el espacio proyectivo ambiente. Llamamos a partir de ahora $\mathbb{V}$ al espacio vectorial n -dimensional $\mathbb{K}^n$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.

Definición 6.10. Sea $v \in \bigwedge^k \mathbb{V}$, se dice que v es totalmente descomponible o que se descompone totalmente si $v = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ para algunos $v_i \in \mathbb{V}$, para $i = 1, \dots, k$ que sean l.i.

Para probar que la imagen de la aplicación de Plücker es un conjunto algebraico, primero demostremos el siguiente teorema que nos ayudará a ver dichas propiedades de la aplicación de Plücker.

Teorema 6.11. Sea $w \in \bigwedge^r \mathbb{V}$ distinto de cero y sea la aplicación lineal:

$$\begin{aligned} \varphi_w: \quad \mathbb{V} &\longrightarrow \bigwedge^{r+1} \mathbb{V} \\ v &\longmapsto \varphi_w(v) = v \wedge w \end{aligned}$$

entonces $\dim(\ker(\varphi_w)) \leq r$ y se cumple la igualdad si, y solo si, w es totalmente descomponible. Además, si $w = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$, entonces $\ker(\varphi_w) = \text{span}(v_1, \dots, v_r)$

Demostración. En primer lugar definimos una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{V}$ y además, sea $\{e_1, \dots, e_s\}$ una base del $\ker(\varphi_w)$. Como $w \in \bigwedge^r \mathbb{V}$, podemos escribirlo como combinación lineal de elementos de la base:

$$w = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} a_{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$$

y la imagen de e_i por φ_w será:

$$\varphi_w(e_i) = e_i \wedge w = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} \pm a_{i_1 \dots i_r} e_i \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$$

por lo tanto, queremos el $\ker(\varphi_w)$, es decir, los e_i tal que $\varphi_w(e_i) = 0$ y se tiene que $e_i \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} = 0$ si $i \in \{i_1, \dots, i_r\}$ y por otro lado, $a_{i_1 \dots i_r} = 0$ si $i \notin \{i_1, \dots, i_r\}$ para i tal que $1 \leq i \leq s$. Ahora podemos concluir que los $a_{i_1 \dots i_r}$ pueden ser distintos de cero siempre y cuando se cumpla que $\{1, \dots, s\} \subset \{i_1, \dots, i_r\}$ (además al menos hay un $a_{i_1 \dots i_r} \neq 0$ ya que $w \neq 0$) y con estos concluimos que $s \leq r$ y además, podemos escribir $w = (e_1 \wedge \cdots \wedge e_s) \wedge y$ para algún $y \in \bigwedge^{r-s} \mathbb{V}$. Por último, si $r = s$, $w = a_{1, \dots, r}(e_1 \wedge \cdots \wedge e_r)$, es decir, totalmente descomponible.

Por último, si se cumple que $w = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$, sabemos que $\text{span}(v_1, \dots, v_r) \subseteq \ker(\varphi_w)$ y además tienen la misma dimensión, por lo tanto son iguales. $\square$

Por otro lado, tal como hemos definido la aplicación de Plücker, podemos decir que la imagen de la variedad de Grassmann son los elementos de la forma $[w] = [v_1 \wedge \cdots \wedge v_k]$ es decir, los elementos w que son totalmente descomponibles. Vamos a ver que esto es en realidad verdad:

Lema 6.12. Un elemento $[w] \in P(\bigwedge^k \mathbb{V})$ esta en la imagen de $Gr_{k,n}(\mathbb{K})$ por la aplicación de Plücker si, y solo si, w es totalmente descomponible.

Demostración. Lo vemos por doble implicación:

- $\Leftarrow$ Supongamos en primer lugar que w es totalmente descomponible, esto es, $w = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$. El espacio generado por dichos vectores v_i , $\text{span}(v_1, \dots, v_k) = \Lambda$ es k -dimensional y por lo tanto es un elemento de $Gr_{k,n}(\mathbb{K})$ y tenemos que $p(\Lambda) = [w]$.
- $\Rightarrow$ Por otro lado, supongamos que $[w] = p(\Lambda)$ con $\Lambda \in Gr_{k,n}(\mathbb{K})$. Supongamos que $\Lambda = \text{span}(u_1, \dots, u_k)$, entonces, $[w] = [u_1 \wedge \cdots \wedge u_k]$ y por lo tanto, $w = \lambda u_1 \wedge \cdots \wedge u_k$ con λ un escalar. Lo que quiere decir que w es totalmente descomponible.

□

Ahora vamos a dar un ejemplo de la imagen de una variedad de Grassmann en concreto, vamos a ver que define una cuádrica llamada la cuádrica de Klein.

Ejemplo 6.13 (Cuádrica de Klein). Sea $k = 2, n = 4$ y consideremos la variedad de Grassmann $Gr_{2,4}(\mathbb{K})$ y su imagen por la aplicación de Plücker, $p(Gr_{2,4}(\mathbb{K})) \subset P(\bigwedge^2 \mathbb{K}^4)$. Como hemos visto en el lema anterior, un elemento $[w] \in p(Gr_{2,4}(\mathbb{K}))$ si y solo si w es totalmente descomponible. Tomemos pues una base $\{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4\}$ de $\bigwedge^2 \mathbb{K}^4$ por lo tanto cada elemento $w \in P(\bigwedge^2 \mathbb{K}^4)$ se puede escribir como:

$$w = a_{12}(e_1 \wedge e_2) + a_{13}(e_1 \wedge e_3) + a_{14}(e_1 \wedge e_4) + a_{23}(e_2 \wedge e_3) + a_{24}(e_2 \wedge e_4) + a_{34}(e_3 \wedge e_4).$$

Ahora si w es totalmente descomponible, se cumple que $w \wedge w = 0$, por lo que:

$$w \wedge w = (a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) = 0 \Rightarrow (a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}) = 0$$

por lo tanto, la imagen $p(Gr_{2,4}(\mathbb{K}))$ satisface la ecuación de la cuádrica homogénea:

$$a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} = 0$$

◇

Proposición 6.14. Con las notaciones anteriores, el conjunto $p(Gr_{k,n}(\mathbb{K}))$ es un conjunto algebraico del espacio proyectivo $P(\bigwedge^k \mathbb{K}^n)$.

Demostración. En primer lugar, en virtud del lema anterior, sabemos que $p(Gr_{k,n}(\mathbb{K}))$ está compuesto por todos los elementos $[w] \in P(\bigwedge^k \mathbb{K}^n)$ tal que los w son totalmente descomponibles. Por el Teorema 6.11 esto implica que $\text{rang}(\varphi_x) = n - k$ lo que quiere decir que todos los menores $n - k + 1$ de la matriz M_{φ_x} se anulan. Esto quiere decir que $p(Gr_{k,n}(\mathbb{K}))$ no es más que el conjunto de ceros de una colección de polinomios homogéneos de grado $n - k + 1$ en las coordenadas de Plücker. Por lo tanto es un conjunto algebraico y es cerrado si dotamos de la topología de Zariski a nuestro espacio. □

Ejemplo 6.15. Continuemos con la variedad $Gr_{2,4}(\mathbb{K})$, sean $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base de $\mathbb{K}^4$ y sea $\{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3 \wedge e_4\}$ una base de $\bigwedge^3 \mathbb{K}^4$. Consideramos un elemento $x \in \bigwedge^2 \mathbb{K}^4$ entonces los podemos escribir como combinación lineal de elementos de la base, es decir,

$$x = a_{12}(e_1 \wedge e_2) + a_{13}(e_1 \wedge e_3) + a_{14}(e_1 \wedge e_4) + a_{23}(e_2 \wedge e_3) + a_{24}(e_2 \wedge e_4) + a_{34}(e_3 \wedge e_4)$$

y la aplicación φ_x tiene como matriz M_{φ_x} :

$$M_{\varphi_x} = \begin{pmatrix} a_{23} & -a_{13} & a_{12} & 0 \\ a_{24} & -a_{14} & 0 & a_{12} \\ a_{34} & 0 & -a_{14} & a_{13} \\ 0 & a_{34} & -a_{24} & a_{24} \end{pmatrix}$$

Ahora, necesitamos que $\text{rang}(M_{\varphi_x}) = 2$ por lo tanto, $p(Gr_{2,4}(\mathbb{K}))$ es el cero común de los menores 3×3 de esta matriz. Haciendo los cálculos podemos observar que 4 de esos menores son cero y los demás son múltiplos del polinomio de grado 2:

$$a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}$$

◇

Para terminar esta sección vamos a hablar de los α -planos y de los β -planos. Llamemos $\mathbb{P}^n$ al espacio proyectivo $P(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{K}\mathbb{P}^n$ siendo $\mathbb{K}^{n+1}$ un espacio vectorial de dimensión $n + 1$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Demostremos que el conjunto de todas las rectas que pasan por un punto dado de $\mathbb{P}^3$ forman un plano de $\mathbb{P}^5$ llamado α -plano y después vamos a ver que el conjunto de todas las rectas que están contenidas en un plano de $\mathbb{P}^3$ forman un plano de $\mathbb{P}^5$ llamado β -plano.

Sea $\mathbb{K}^4$ un espacio vectorial 4-dimensional e identifiquemos $Gr_{2,4}(\mathbb{K})$ con $Gr_{1,3}(\mathbb{K})$. Sea el embebimiento de Plücker:

$$\begin{aligned} p: Gr_{1,3}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{P}^5 \\ A = \text{span}(a, b) &\longmapsto [p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34}] \end{aligned}$$

con $p_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}$. Tenemos que la cuádrica de Klein es $\{p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0\} \subset \mathbb{P}^5$.

Ahora sean los conjuntos:

$$A := \{\text{rectas que pasan por un punto dado } a \in \mathbb{P}^3\} \subset Gr_{1,3}(\mathbb{K})$$

$$B := \{\text{rectas que están contenidas en un plano dado } \Pi \subset \mathbb{P}^3\} \subset Gr_{1,3}(\mathbb{K})$$

veamos su imagen por p .

1. Hallemos en primer lugar $p(A)$. Por sencillez de cálculo vamos a suponer que $a = [1 : 0 : 0 : 0]$ y $b = [b_1 : b_2 : b_3 : b_4]$, sea $R = \text{span}(a, b) \in A$. Por lo tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} p(R) &= \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ b_1 & b_2 \end{array} : \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ b_1 & b_3 \end{array} : \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ b_1 & b_4 \end{array} : \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ b_2 & b_3 \end{array} : \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ b_2 & b_4 \end{array} : \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ b_3 & b_4 \end{array} \right] \\ &= [b_2 : b_3 : b_4 : 0 : 0 : 0] \end{aligned}$$

y por ello,

$$p(A) = \left\{ \begin{array}{l} x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \\ x_6 = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{P}^5$$

entonces $p(A)$ es un subespacio proyectivo de $\mathbb{P}^5$ con $\dim(p(A)) = \dim(\mathbb{P}^5) - 3 = 5 - 3 = 2$, por lo que es un plano. A dicho plano se le llama α -plano.

2. Hallemos en primer lugar $p(B)$. Análogamente vamos a suponer que $\Pi = \{x_1 = 0\}$ y sea $R = \text{span}(a, b) \subset \Pi$ entonces $a = [0 : a_2 : a_3 : a_4]$ y $b = [0 : b_2 : b_3 : b_4]$. Por lo tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} p(R) &= \left[\begin{array}{c|c} 0 & a_2 \\ 0 & b_2 \end{array} : \begin{array}{c|c} 0 & a_3 \\ 0 & b_3 \end{array} : \begin{array}{c|c} 0 & a_4 \\ 0 & b_4 \end{array} : \begin{array}{c|c} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{array} : \begin{array}{c|c} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{array} : \begin{array}{c|c} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{array} \right] \\ &= [0 : 0 : 0 : a_2b_3 - a_3b_2 : a_2b_4 - a_4b_2 : a_3b_4 - a_4b_3] \end{aligned}$$

y por ello,

$$p(\Pi) = \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{P}^5$$

entonces $p(\Pi)$ es un subespacio proyectivo de $\mathbb{P}^5$ con $\dim(p(\Pi)) = \dim(\mathbb{P}^5) - 3 = 5 - 3 = 2$, por lo que es un plano. A dicho plano se le llama β -plano.

Observación 6.16. *Veamos dos observaciones curiosas:*

- *Todo plano contenido en la cuádrica de Klein en un α -plano o un β -plano.*
- *Con las notaciones de antes, un α -plano y un β -plano se cortan en una recta cuando $a \in \Pi$, siendo a el punto de intersección de A y Π el plano de B .*

6.3. Coordenadas locales en la variedad de Grassmann

Consideremos la variedad de Grassmann $Gr_{k,n}(\mathbb{K})$. Un elemento $\Lambda \in Gr_{k,n}(\mathbb{K})$ y su representación matricial la llamamos B . Sin pérdida de generalidad¹⁵, consideremos la coordenada de Plücker $a_{1,\dots,k} \neq 0$, sabemos que se cumple la igualdad $a_{1,\dots,k} = \det(B_{1,\dots,k})$ (donde dicha matriz es la submatriz de la matriz B formada por sus columnas $1, \dots, k$) y como es no nulo, la matriz $B_{1,\dots,k}$ es invertible. Ahora multiplicamos a B por la inversa de la matriz $B_{1,\dots,k}$ es decir,

$$B_\Lambda = B_{1,\dots,k}^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{1,k+1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{k,k+1} & \cdots & b_{k,n} \end{pmatrix} \quad (4)$$

y obtenemos una matriz que genera el mismo k -espacio. Esta matriz es conocida como la matriz canónica del k -espacio Λ . Conocido esto, podemos hallar cada coordenada $b_{i,j}$ a partir de las coordenadas de Plücker de dicho Λ . Veamos como calcularlo:

$$a_{2,3,\dots,r,j} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{1,j} \\ 1 & \cdots & 0 & b_{2,j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r,j} \end{vmatrix} = (-1)^{r+i} b_{1,j}$$

por lo tanto, para hallar todos los $b_{i,j}$ tenemos la fórmula:

$$a_{1,\dots,\hat{i},\dots,r,j} = (-1)^{r+i} b_{i,j} \quad (5)$$

donde $\hat{i}$ quiere decir que la columna i ha sido quitada.

Vamos a ver un ejemplo donde a partir de las coordenadas de Plücker de un k -espacio obtengamos la matriz representativa de dicho espacio:

Ejemplo 6.17. Supongamos que tenemos la Grassmanniana $Gr_{3,5}(\mathbb{R})$, y un elemento Λ en dicho espacio. Ahora sea B su representación matricial:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y entonces sus coordenadas de Plücker son:

$$\begin{aligned} p(\Lambda) &= [-1 : -2 : -4 : -1 : -4 : -4 : 0 : -1 : -2 : -1] \\ &= [1 : 2 : 4 : 1 : 4 : 4 : 0 : 1 : 2 : 1] \end{aligned}$$

¹⁵Los demás casos son equivalentes ya que basta permutar los elementos de la base de $\mathbb{V}$.

donde en la segunda igualdad no hemos hecho más que multiplicar por -1 por comodidad para hacer los cálculos. Ahora pasamos a calcular la matriz canónica de Λ que tendrá la forma:

$$B_{\Lambda} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,5} \\ b_{2,1} & \cdots & b_{2,5} \\ b_{3,1} & \cdots & b_{3,5} \end{pmatrix}$$

entonces tomamos $a_{123} = 1$, por lo tanto podemos poner:

$$B_{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b_{1,4} & b_{1,5} \\ 0 & 1 & 0 & b_{2,4} & b_{2,5} \\ 0 & 0 & 1 & b_{3,4} & b_{3,5} \end{pmatrix}$$

y ahora usando la fórmula (5), tenemos que:

$$a_{234} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_{1,4} \\ 1 & 0 & b_{2,4} \\ 0 & 1 & b_{3,4} \end{vmatrix} = b_{1,4} \quad a_{235} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_{1,5} \\ 1 & 0 & b_{2,5} \\ 0 & 1 & b_{3,5} \end{vmatrix} = b_{1,5}$$

$$a_{124} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & b_{1,4} \\ 0 & 1 & b_{2,4} \\ 0 & 0 & b_{3,4} \end{vmatrix} = b_{3,4} \quad a_{125} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & b_{1,5} \\ 0 & 1 & b_{2,5} \\ 0 & 0 & b_{3,5} \end{vmatrix} = b_{3,5}$$

$$a_{134} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & b_{1,4} \\ 0 & 0 & b_{2,4} \\ 0 & 1 & b_{3,4} \end{vmatrix} = -b_{2,4} \quad a_{135} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & b_{1,5} \\ 0 & 0 & b_{2,5} \\ 0 & 1 & b_{3,5} \end{vmatrix} = -b_{2,5}$$

y por lo tanto, nos queda la matriz:

$$B_{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

y podemos ver que las filas de B y B_{Λ} generan el mismo espacio vectorial ya que tomando $C \in GL(3, \mathbb{R})$ tal que:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tenemos que $CB_{\Lambda} = B$.

◇

6.4. Relaciones de Plücker

Ahora que hemos visto la representación canónica de un k -espacio vectorial, podemos calcular las relaciones de Plücker de una forma más fácil. Supongamos que tenemos la matriz canónica B_Λ como en (4), entonces podemos calcular dichas relaciones cuadráticas como sigue. Tenemos $a_{1,\dots,k} = 1$, entonces podemos tomar:

$$a_{3,\dots,r,j,l} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{1,j} & b_{1,l} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{2,j} & b_{2,l} \\ 1 & \cdots & 0 & b_{3,j} & b_{3,l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r,j} & b_{r,l} \end{vmatrix} = (-1)^r \begin{vmatrix} b_{1,j} & b_{1,l} \\ b_{2,j} & b_{2,l} \end{vmatrix}$$

tenemos por lo tanto,

$$\begin{aligned} a_{3,\dots,r,j,l} &= (-1)^r (b_{1,j}b_{2,l} - b_{1,l}b_{2,j}) \\ &= (-1)^r ((-1)^{r+1}a_{2,3,\dots,r,j}(-1)^{r+2}a_{1,3,\dots,r,l} - (-1)^{r+1}a_{2,3,\dots,r,l}(-1)^{r+2}a_{1,3,\dots,r,j}) \\ &= (-1)^r (a_{1,3,\dots,r,j}a_{2,3,\dots,r,l} - a_{1,3,\dots,r,l}a_{2,3,\dots,r,j}) \end{aligned}$$

tenemos por lo tanto,

$$a_{3,\dots,r,j,l} = (-1)^r (a_{1,3,\dots,r,j}a_{2,3,\dots,r,l} - a_{1,3,\dots,r,l}a_{2,3,\dots,r,j})$$

y homogeneizando esta relación nos queda:

$$a_{3,\dots,r,j,l}a_{1,2,\dots,r} = (-1)^r (a_{1,3,\dots,r,j}a_{2,3,\dots,r,l} - a_{1,3,\dots,r,l}a_{2,3,\dots,r,j})$$

Por ejemplo podemos tomar $n = 4, r = 2, j = 3, l = 4$ y tenemos que:

$$a_{12}a_{34} = a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23}$$

que no es más que la cuádrica de Klein.

Referencias bibliográficas

- [1] F. Brickell, R.S. Clark, *Differentiable Manifolds. An introduction*. Van Nostrand, London 1970.
- [2] Demetrio Domínguez Plata: Apuntes de Geometría Diferencial. Universidad de Cantabria.
- [3] Demetrio Domínguez Plata: Apuntes de Variedades Diferenciables. Universidad de Cantabria.
- [4] Shoshichi Kobayashi, Katsumi Nomizu, *Foundations of differential geometry* Ed. Interscience Publishers, 1963.
- [5] Czes Kosniowski, *Topología algebraica*, Ed. Reverté S.A., 1992.
- [6] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Ed. Springer, 2003.
- [7] Alex Martsinkovsky, Gordana Todorov, Kiyoshi Igusa: *Recent Developments in Representation Theory*, Ed. American Mathematical Society, 10/2016.
- [8] Liviu I. Nicolaescu, *Lectures on the geometry of manifolds*, Ed. World Scientific, 1996.
- [9] Joaquín Olivert Pellicer, *Curso de variedades diferenciables, grupos de Lie y técnicas simpléticas*, Ed. Universitat de Valencia, 2009.
- [10] José M. Rodríguez-Sanjurjo, Jesús M. Ruiz: Geometría Proyectiva. Ed. Addison-Wesley, D.L. 1998.
- [11] Igor Rostislavovich Shafarevich, *Basic algebraic geometry*, Ed. Springer-Verlag, 1994.
- [12] Frank Wilson Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Ed. Springer-Verlag, 1983.
- [13] Takeo Yokonuma, *Tensor spaces and exterior algebra*, Ed. American Mathematical Society, 2008.

Referencias web

- [14] Djordje Baralic. How to understand Grassmannians? Accesible en: https://www.academia.edu/8051964/HOW_TO_UNDERSTAND_GRASSMANNIANS_-Dor_-_de_Barali
- [15] Andreas Gathmann. Grassmannians. Accesible en: <https://www.mathematik.uni-kl.de/~gathmann/class/alggeom-2014/alggeom-2014-c8.pdf>

- [16] Drew A. Hudec. The Grassmannian as a Projective Variety. Accesible en: <http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2007/REUPapers/FINALFULL/Hudec.pdf>
- [17] Ratnadha Kolhatkar: Grassmann Varieties. Universidad McGill. Accesible en: <http://www.math.mcgill.ca/goren/Students/KolhatkarThesis.pdf>
- [18] Evan Merrill Bullock. Grassmannian Notes. Accesible en: <https://math.rice.edu/~evanmb/math465spring11/math465Grassmannians.pdf>
- [19] Dhruv Ranganathan: A Gentle Introduction to Grassmannians. Accesible en: <https://www.math.hmc.edu/~ursula/teaching/math189/finalpapers/dhruv.pdf>
- [20] Joel W. Robbin. The Grassmann Manifold. Accesible en: <http://www.math.wisc.edu/~robbin/761dir/grassmann.pdf>