



**Facultad
de
Ciencias**

**CURVAS PLANAS CON
PROPIEDADES FÍSICAS O
GEOMÉTRICAS ESPECIALES Y
ÚTILES**

(Plane curves with special and useful physical or
geometrical properties)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Igor Sierra Fernández

Director: Mario Alfredo Fioravanti Villanueva

Junio 2019

Índice general

Introducción	5
1. La cicloide	6
1.1. Ecuaciones paramétricas	7
1.2. Tipos de cicloide	8
1.3. Longitud de arco de la cicloide	9
1.4. Área bajo el arco de la cicloide	10
1.5. La evoluta de la cicloide	10
1.6. La curvatura de la cicloide	12
1.7. La propiedad tautócrona de la curva cicloide	14
1.8. La curva Braquistócrona de Johann Bernoulli	16
1.9. Varias aplicaciones de la cicloide	20
2. Catenaria	21
2.1. Ecuación de la catenaria	22
2.2. La catenaria y la parábola	26
2.3. Consecuencias geométricas	27
2.4. Longitud de la catenaria	28
2.5. La catenaria en la arquitectura	29
2.6. La evolvente de la catenaria	32
3. La tractriz	34
3.1. Ecuación cartesiana	35
3.2. Ecuaciones paramétricas	36
3.3. Longitud de arco de la tractriz	36
4. Clotoide o espiral de Cornú	38
4.1. Ley de curvatura de la clotoide	40
4.2. Ecuaciones paramétricas	41

Resumen

Se van a estudiar varias curvas planas que han despertado el interés de ingenieros, físicos y matemáticos a lo largo de la historia, ya sean por sus propiedades físicas o geométricas, siendo útiles en aplicaciones prácticas.

Las curvas que se van a estudiar son la cicloide, la catenaria, la tractriz y la clotoide o espiral de Cornú. Algunas de ellas están relacionadas entre sí, como la catenaria y la tractriz, que lo veremos más adelante.

De cada curva se van a presentar parametrizaciones y se explicarán algunas de sus propiedades físicas y geométricas más importantes. Además, se mencionará parte de su historia y quienes estudiaron dichas curvas.

Abstract

The objective of this work is to study some curves that have aroused the interest of engineers, physicists and mathematicians along the history, either by its physical or geometric properties, being useful in practical applications.

These curves are the cycloid, the catenary, the tractrix and the Cornu spiral or clothoid. We will show that some of them are related to each other, like the catenary and the tractrix. The parameterizations of each curve will be shown and some of its most important properties will be explained. In addition, we will briefly mention part of its history and those scientists who studied these curves.

Introducción

El estudio de las curvas planas puede realizarse desde múltiples enfoques y existe en una gran cantidad de ejemplos de curvas con propiedades variadas e interesantes. Teniendo en cuenta las limitaciones de tiempo y espacio, para este trabajo hemos escogido algunas curvas que han despertado el interés de matemáticos, físicos e ingenieros, debido a sus particulares propiedades geométricas y físicas. Algunas de estas curvas, son la solución de problemas físicos y otras resultan tienen un papel importante en la seguridad y el diseño de carreteras, o en el diseño de cierta clase de arcos arquitectónicos.

Este trabajo va estar repartido en cuatro capítulos, tratando cada capítulo una curva plana diferente. En todos los capítulos haremos referencias históricas.

En el primer capítulo vamos a estudiar la cicloide, empezando por una descripción de la curva y su historia. Veremos como se obtienen sus ecuaciones paramétricas, además expondremos brevemente tipos de cicloide que hay. También vamos a ver diferentes propiedades, como cual es la longitud del arco de la cicloide, el área encerrada bajo la cicloide, su evoluta y curvatura. Añadiremos al capítulo dos propiedades fundamentales de la cicloide, que son que la curva posee las propiedades tautócrona y braquistócrona.

En el segundo capítulo abordaremos la curva catenaria, una curva muy interesante desde el punto de vista arquitectónico. Enunciaremos su ecuación, veremos su relación con la parábola, calcularemos su longitud y denotaremos varias consecuencias geométricas interesantes. Además veremos como su evolvente es la tractriz, y veremos, mediante ejemplos, su importancia en la arquitectura.

En el tercer capítulo introduciremos las curvas de persecución a partir de la curva tractriz. Veremos sus ecuaciones cartesianas y paramétricas.

En el cuarto y último capítulo vamos a estudiar la clotoide o espiral de Cornu, viendo que es una curva de transición muy útil a la hora de realizar trazados de caminos y carreteras gracias a la propiedad geométrica que hace que esta curva sea especial.

Las figuras geométricas que aparecen en el trabajo han sido realizadas con el programa GeoGebra o Mathematica, y los archivos se incluyen en el CD que se entrega con él.

Capítulo 1

La cicloide

La Cicloide es definida como la curva plana que es descrita físicamente por la trayectoria de un punto de una circunferencia que, sin deslizarse, rueda sobre una recta horizontal. [12]

Pensando en el punto de contacto de la circunferencia con la recta horizontal en el instante inicial del comienzo del rodamiento, observamos que este punto describe un arco hasta volver a tocar de nuevo la recta horizontal sobre la cual se produce la rodadura de la circunferencia. Este arco, pues, estará encerrando un área plana sobre dicha recta horizontal en el intervalo $[0, 2\pi R]$, siendo R el radio de la circunferencia descrita. Si el círculo sigue rodando sobre la recta horizontal sin deslizamiento, vemos, naturalmente que el trazado es periódico, como apreciamos en la siguiente imagen.

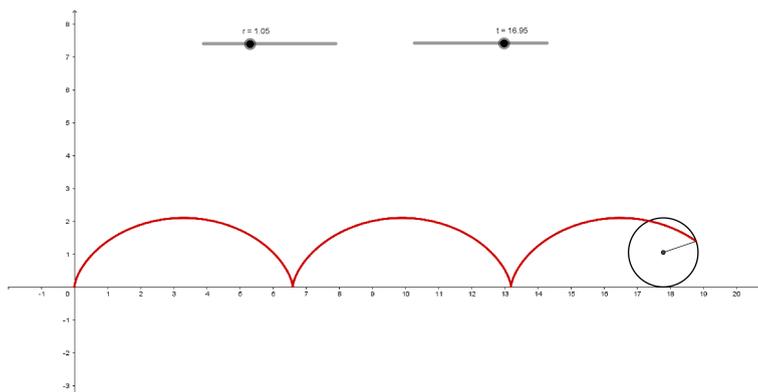


Figura 1.1: Cicloide

Aunque la curva en sí era conocida por los griegos, las propiedades más importantes fueron descubiertas por Galileo Galilei (1564-1642) y por Christiaan Huygens (1629-1695) en relación con problemas de mecánica. Las frecuentes disputas entre matemáticos del siglo XVII causaron que la cicloide fuese conocida como la Helena de los geómetras. Varios son los candidatos a ser los descubridores de la cicloide, desde Nicolás de Cusa (1401-1464) cuando estu-

diaba el área de un círculo mediante integración; Marin Mersenne (1588-1648), quien dio la primera definición acertada de la cicloide y además declaró alguna propiedad básica, como que la longitud de la base es igual a la circunferencia del círculo rodante, hasta Galileo, quien dio nombre a la cicloide en 1599. Además de los científicos mencionados también fueron muy importantes los hermanos Johann y Jacob Bernoulli, Christopher Wren, Gottfried Leibniz, Isaac Newton, René Descartes y Guillaume de l'Hôpital. [13]

En este capítulo vamos a ver las ecuaciones paramétricas de la cicloide y cómo se llega a ellas, la longitud de arco de la cicloide, el área encerrada bajo el arco de la cicloide, la curvatura y la evoluta de la cicloide, además de varias propiedades importantes, como que la cicloide cumple las propiedades de ser tautócrona y braquistócrona.

1.1. Ecuaciones paramétricas

Si la cicloide se genera mediante una circunferencia de radio R que se apoya sobre el eje de abscisas en el origen, su descripción en forma paramétrica viene dada por:

$$\begin{cases} x = R(\alpha - \sin(\alpha)) \\ y = R(1 - \cos(\alpha)) \end{cases} \quad (1.1)$$

dónde α es un parámetro real, correspondiente al ángulo girado por el círculo rodante.

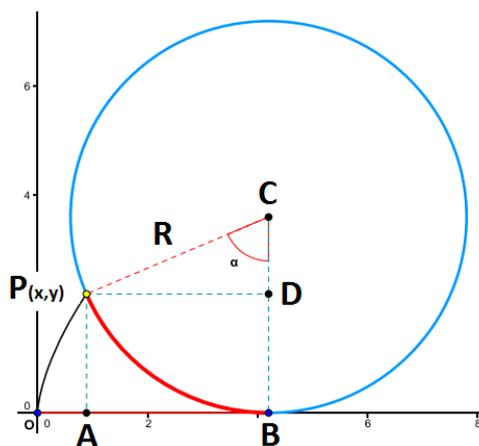


Figura 1.2:

Demostración. Para obtener las ecuaciones paramétricas de la Cicloide bastará tener en cuenta en la figura (1.2) que, puesto que la circunferencia no se desliza, sino que rueda, el arco PB y la distancia rectilínea OB coinciden: $OB = \text{arco}(PB)$.

Así, pues, para un punto genérico cualquiera $P(x,y)$ de la Cicloide, se tiene,

llamando R al radio de la circunferencia y α al ángulo en el centro:

$$x = \overline{OB} - \overline{AB} = d(O, B) - d(A, B)$$

$$y = \overline{BC} - \overline{DC} = d(B, C) - d(D, C)$$

y sustituyendo las distancias, obtenemos:

$$\begin{cases} x = \alpha R - R \sin(\alpha) = R(\alpha - \sin(\alpha)) \\ y = R - R \cos(\alpha) = R(1 - \cos(\alpha)) \end{cases}$$

que son las ecuaciones paramétricas de la curva. □

1.2. Tipos de cicloide

Vamos a enumerar los diferentes tipo de cicloide que hay, que van a depender de donde se encuentra el punto P respecto de la circunferencia generatriz. Siendo R el radio de la circunferencia, y b la distancia desde el centro de la circunferencia al punto P . Tenemos:

- Cicloide común: si P pertenece a la circunferencia generatriz, es decir cuando $R = b$.
- Cicloide acortada: si P se encuentra en el interior de la circunferencia generatriz, $b < R$. Figura 1.3
- Cicloide alargada: si P está en el exterior de la circunferencia generatriz, $b > R$. Figura 1.4

Las cicloides acortada y alargada tienen como ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = R\alpha - b \sin(\alpha) \\ y = R - b \cos(\alpha) \end{cases}$$

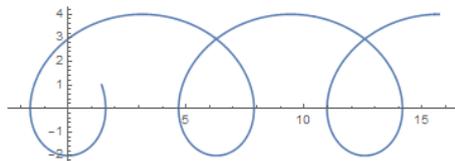


Figura 1.3: Cicloide alargada

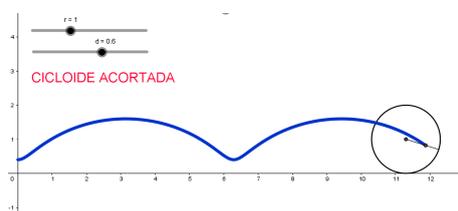


Figura 1.4: Cicloide acortada

1.3. Longitud de arco de la cicloide

Definición 1.1. La longitud de un arco de curva parametrizada entre dos puntos, A y B , se puede calcular mediante la integral definida:

$$L = \int_A^B \sqrt{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2} d\alpha \quad (1.2)$$

Teorema 1.2. La longitud de un arco de cicloide es ocho veces la longitud del radio

Demostración. Aplicando la fórmula (1.2) al caso del arco de cicloide entre los puntos $(0, 0)$ y $(2\pi R, 0)$, sabiendo que $\frac{dx}{d\alpha} = R(1 - \cos(\alpha))$ y $\frac{dy}{d\alpha} = R\sin(\alpha)$, es:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(R(1 - \cos(\alpha)))^2 + (R\sin(\alpha))^2} d\alpha \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2R^2(1 - \cos(\alpha))} d\alpha = R\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos(\alpha)} d\alpha \end{aligned}$$

y, de la fórmula del ángulo mitad:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}} \quad (1.3)$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} L &= R\sqrt{2}\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha = 2R^2[-\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)]\Big|_0^{2\pi} \\ &= 4R[-\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) + \cos(0)] = 4R(1 + 1) = 8R \end{aligned}$$

□

Por lo tanto, hemos obtenido que la longitud de un arco de cicloide resulta ser 8 veces la longitud del radio del círculo generador, cómo ya probó en 1658 el arquitecto y matemático inglés Christopher Wren (1632-1723).

1.4. Área bajo el arco de la cicloide

Una vez sabido cual es la longitud de arco de la cicloide, nos preguntamos cual es el área bajo el arco de la cicloide. Este problema se lo propuso en 1628 Mersenne a Gilles Roberval (1602-1675), quien aunque al principio no lo resolvió, en 1634 si lo hizo, escribiendo orgulloso a Descartes para contárselo.

Proposición 1.3. *Si una curva C viene dada por las ecuaciones $x = x(\alpha)$, $y = y(\alpha)$ con $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$, y estas funciones definen entre los puntos de abscisas $a = x(\alpha_1)$ y $b = x(\alpha_2)$ una función $y = f(x)$ integrable, entonces el área encerrada entre la curva C y el eje OX es:*

$$A = \int_a^b |f(x)| dx = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} |y(\alpha)x'(\alpha)| d\alpha \quad (1.4)$$

[4]

Proposición 1.4. *El área encerrada bajo el arco de una cicloide es 3 veces el área del círculo que lo genera.*

Demostración. En nuestro caso tenemos que $a = 0$ y $b = 2\pi R$, $y(\alpha) = R(1 - \cos(\alpha))$ y $x'(\alpha) = R(1 - \cos(\alpha))$, sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi R} |f(x)| dx = \int_0^{2\pi} R(1 - \cos(\alpha))R(1 - \cos(\alpha)) d\alpha \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos(\alpha))^2 d\alpha = R^2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2(\alpha) - 2\cos(\alpha)) d\alpha \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1 + \cos(\alpha)}{2} - 2\cos(\alpha)\right) d\alpha = R^2 \int_0^{2\pi} \frac{3 - 3\cos(\alpha)}{2} d\alpha \\ &= \frac{3}{2} R^2 [\alpha - \sin(\alpha)] \Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{2} R^2 2\pi = 3R^2\pi \end{aligned}$$

Y hemos obtenido que el área encerrado bajo el arco de la cicloide es $A = 3R^2\pi$, es decir, es tres veces el área del círculo que lo genera. \square

1.5. La evoluta de la cicloide

Definición 1.5. *Se llama evoluta de una curva C dada, al lugar geométrico de los centros de curvatura de C . Sea la curva formada por el conjunto de puntos (x, y) donde x e y son funciones dependientes de una variable α . Entonces se puede escribir las coordenadas de la evoluta de la forma:*

$$(X, Y) = \left(x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}, y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}\right) \quad (1.5)$$

donde a cada (x, y) - o lo que es lo mismo, a un valor de α que determina un punto de la curva - le corresponde un centro de curvatura (X, Y) en función de ese α . [1]

Recordamos que las ecuaciones paramétricas de la cicloide son:

$$\begin{cases} x = R(\alpha - \sin(\alpha)) \\ y = R(1 - \cos(\alpha)) \end{cases} \quad (1.6)$$

Una vez definida la evoluta de una curva y recordado las ecuaciones paramétricas de la cicloide, vamos a ver cual es la evoluta de la cicloide usando (1.5). Para ello, hallamos la derivada primera de las ecuaciones paramétricas de la cicloide con respecto el parámetro α :

$$\begin{cases} x' = R(1 - \cos(\alpha)) \\ y' = R\sin(\alpha) \end{cases}$$

y la segunda derivada:

$$\begin{cases} x'' = R\sin(\alpha) \\ y'' = R\cos(\alpha) \end{cases}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= R^2(1 + \cos^2(\alpha) - 2\cos(\alpha)) + R^2\sin^2(\alpha) \\ &= R^2(1 + \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) - 2\cos(\alpha)) = 2R^2(1 - \cos(\alpha)) \end{aligned}$$

y además,

$$\begin{aligned} x'y'' - x''y' &= R(1 - \cos(\alpha))R\cos(\alpha) - R\sin(\alpha)R\sin(\alpha) \\ &= R^2(\cos(\alpha) - \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) = R^2(\cos(\alpha) - 1) \end{aligned}$$

Ahora podemos despejar (1.5):

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x = R(\alpha - \sin(\alpha)) - R\sin(\alpha) \frac{2R^2(1 - \cos(\alpha))}{R^2(\cos(\alpha) - 1)} \\ y = R(1 - \cos(\alpha)) + R(1 - \cos(\alpha)) \frac{2R^2(1 - \cos(\alpha))}{R^2(\cos(\alpha) - 1)} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} = R(\alpha - \sin(\alpha)) + 2R\sin(\alpha) = R(\alpha + \sin(\alpha)) \\ = R(1 - \cos(\alpha)) - 2R(1 - \cos(\alpha)) = R(\cos(\alpha) - 1) \end{cases} \end{aligned}$$

Luego, hemos obtenido que las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la cicloide son:

$$\begin{cases} x = R(\alpha + \sin(\alpha)) \\ y = R(\cos(\alpha) - 1) \end{cases} \quad (1.7)$$

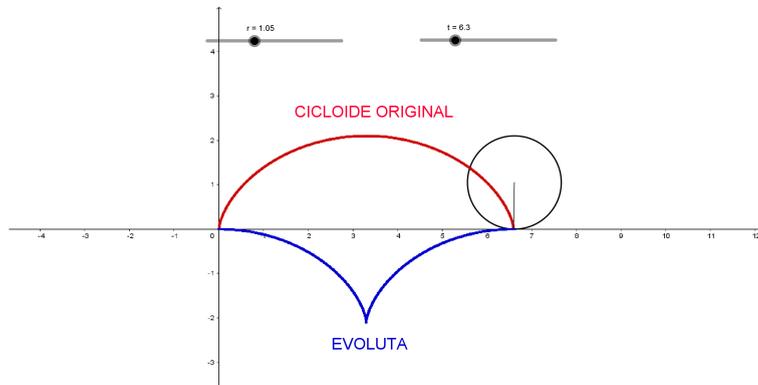


Figura 1.5: Evoluta de la cicloide

Si observamos las ecuaciones obtenidas, podemos apreciar que son bastante parecidas a las de la cicloide, por lo que nos surge la duda de si la evoluta de la cicloide es también una cicloide. Por ello, vamos a comprobar si se cumple. Para ello, partiendo de (1.6), trasladamos el origen al punto $(x, y) = (\pi R, -2R)$:

$$\begin{cases} \hat{x} = x + \pi R = R(\alpha - \sin(\alpha)) + \pi R \\ \hat{y} = y - 2R = R(1 - \cos(\alpha)) - 2R \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{x} = R(\alpha + \pi) - R\sin(\alpha) = R(\alpha + \pi) + R\sin(\alpha + \pi) \\ \hat{y} = -R(1 + \cos(\alpha)) = -R + R\cos(\alpha + \pi) \end{cases}$$

Realizamos un cambio de variable: $\alpha' = \alpha + \pi$, y obtenemos:

$$\begin{cases} \hat{x} = R(\alpha' + \sin(\alpha')) \\ \hat{y} = R(\cos(\alpha') - 1) \end{cases} \quad (1.8)$$

que son las ecuaciones de la evoluta de la cicloide.

Por lo que podemos afirmar que la evoluta de una cicloide es una cicloide.

1.6. La curvatura de la cicloide

En esta sección del capítulo vamos a estudiar la curvatura de la cicloide.

Lema 1.6. *Dada una curva parametrizada $r(\alpha)$ según un parámetro cualquiera α , se define la curvatura como una medida del cambio de dirección del vector tangente a una curva, cuanto más rápido cambia éste a medida que nos desplazamos a lo largo de la curva, se dice que es más grande la curvatura. Para una curva parametrizada cualquiera la curvatura es igual a:*

$$\kappa(\alpha) = \frac{\|r'(\alpha) \times r''(\alpha)\|}{\|r'(\alpha)\|^3} \quad (1.9)$$

donde se tiene que

$$\|r'(\alpha)\|^3 = \left(\sqrt{x'(\alpha)^2 + y'(\alpha)^2}\right)^3 \quad (1.10)$$

y

$$\|r'(\alpha) \times r''(\alpha)\| = \begin{vmatrix} x'(\alpha) & y'(\alpha) \\ x''(\alpha) & y''(\alpha) \end{vmatrix} = x'(\alpha)y''(\alpha) - y'(\alpha)x''(\alpha) \quad (1.11)$$

Proposición 1.7. La curvatura de la cicloide es $\kappa = \frac{-1}{4R} \csc\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Demostración. Nuestra curva, la cicloide está parametrizada como $r(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha))$, y tiene por ecuaciones paramétricas las definidas anteriormente (1.1).

Procedemos a estudiar la curvatura de la cicloide usando (1.10):

$$\begin{aligned} \|r'(\alpha)\|^3 &= \left(\sqrt{R^2(1 + \cos^2(\alpha) - 2\cos(\alpha)) + R^2\sin^2(\alpha)}\right)^3 \\ &= \left(\sqrt{2R^2(1 - \cos(\alpha))}\right)^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3 R^3(1 - \cos(\alpha))\sqrt{(1 - \cos(\alpha))} \end{aligned}$$

y usamos (1.11):

$$\begin{aligned} \|r'(\alpha) \times r''(\alpha)\| &= \begin{vmatrix} R(1 - \cos(\alpha)) & R\sin(\alpha) \\ R\sin(\alpha) & R\cos(\alpha) \end{vmatrix} \\ &= R(1 - \cos(\alpha))R\cos(\alpha) - R\sin(\alpha)R\sin(\alpha) \\ &= R^2\cos(\alpha) - R^2 = R^2(\cos(\alpha) - 1) \end{aligned}$$

Ahora, despejando en la fórmula de la curvatura (1.9)

$$\begin{aligned} \kappa(\alpha) &= \frac{R^2(\cos(\alpha) - 1)}{(\sqrt{2})^3 R^3(1 - \cos(\alpha))\sqrt{(1 - \cos(\alpha))}} \\ &= \frac{-1}{(\sqrt{2})^3 R\sqrt{1 - \cos(\alpha)}} \\ &= \frac{-1}{(\sqrt{2})^3 R\sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{-1}{4R\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{-1}{4R} \csc\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned}$$

donde he usado la fórmula del ángulo medio (1.3).

Por lo que que concluimos que la curvatura de la cicloide es

$$\kappa(\alpha) = \frac{-1}{4R} \csc\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

□

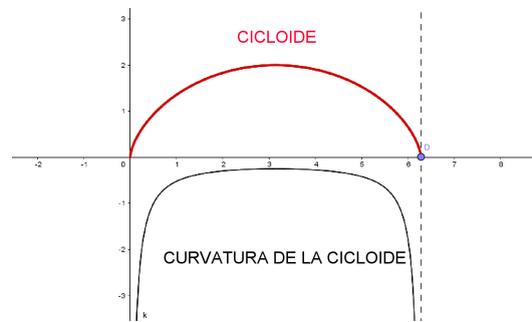


Figura 1.6: Cicloide y su curvatura

1.7. La propiedad tautócrona de la curva cicloide

La propiedad tautócrona de la cicloide, una cuenta que se desliza por la curva y alcanza la parte inferior en el mismo tiempo, sin importar de qué punto de la curva parta, fue descubierta por el científico holandés Christiaan Huygens (1629-1695). La publicó en 1673 en su tratado de la teoría de los relojes de péndulo, y era de conocimiento general entre los matemáticos de finales del siglo XVII. Cuando Johann Bernoulli publicó su descubrimiento sobre la braquistócrona, curva que veremos en la siguiente sección, en 1696, se expresó con las siguientes palabras [2]:

Con justicia admiramos a Huygens por ser el primero en descubrir que una partícula pesada se desliza por una cicloide común en el mismo tiempo sin importar de qué punto de la cicloide inicie su movimiento. Pero se quedarán petrificados de asombro cuando les diga que esta cicloide, la tautócrona de Huygens, es nuestra necesaria braquistócrona



Figura 1.7: Christiaan Huygens

Vamos a calcular el tiempo que tarda en llegar una bola al punto mínimo de

la cicloide en caída libre, dando igual el punto inicial desde donde parta. [12]
Podemos expresar la velocidad del desplazamiento del punto como la variación de arco s de la cicloide con respecto al tiempo

$$v = \frac{ds}{dt}, \tag{1.12}$$

o cómo el movimiento en caída libre

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{1.13}$$

Iguando ambas ecuaciones, obtenemos:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gh}$$

y despejando

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gh}}$$

Por lo que podemos obtener el tiempo resolviendo la siguiente integral:

$$t = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\sqrt{2gh}} \tag{1.14}$$

Para resolver la integral, primero hallamos ds

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2} d\alpha$$

$$= \sqrt{(R(1 - \cos(\alpha)))^2 + (R\sin(\alpha))^2} d\alpha = \sqrt{2R^2(1 - \cos(\alpha))} d\alpha$$

y usando (1.3)

$$= 2R\sqrt{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} d\alpha = 2R\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha$$

y segundo hallamos h

$$h = y(\phi) - y(\alpha) = R(\cos(\phi) - 1) - R(\cos(\alpha) - 1) = R(\cos(\phi) - \cos(\alpha))$$

$$= R\left(2\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) - 1 - \left(2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1\right)\right) = 2R\left(\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

Ahora, con lo que acabamos de obtener, podemos sustituir e integrar (1.14)

$$t = \int_{\phi}^{\pi} \frac{2R\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha}{\sqrt{2g2R\left(\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{\phi}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha}{\sqrt{\left(\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}}$$

Realizamos un cambio de variable para facilitar la integral:

$$\begin{aligned} x = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &\Rightarrow dx = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha \\ &= 2\sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{\cos(\frac{\phi}{2})} \frac{dx}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) - x^2}} = 2\sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\ &= 2\sqrt{\frac{R}{g}} [\arcsin(u)] \Big|_0^1 = \sqrt{\frac{R}{g}} \pi \end{aligned}$$

Podemos concluir que el tiempo de descenso de una bola por la cicloide desde cualquier punto de partida de la curva es $t = \sqrt{\frac{R}{g}} \pi$

1.8. La curva Braquistócrona de Johann Bernoulli

La palabra braquistócrona proviene del griego Braquisto, que significa el más breve, y Chronos, que significa tiempo.

Vamos a ver el problema de la curva Braquistócrona, un problema que fue propuesto por el suizo Johann Bernoulli (1667-1748) en junio de 1696 en la revista Acta Eruditorum. Dicho problema fue un desafío para el resto de la comunidad matemática. El enunciado del problema fue el siguiente:

”Determinar la curva, entre las infinitas posibles, por la que un cuerpo desciende en el menor tiempo posible entre dos puntos que no están ni en posición vertical ni horizontal, movido únicamente por efecto de la gravedad”

Este problema, también llamado problema de la curva de tiempo más breve, fue considerado cerca de setenta años antes por Galileo Galilei, quien, sin poseer la potente herramienta del cálculo infinitesimal de Leibniz, propuso erróneamente que dicha curva debía de ser un arco de circunferencia. [11]

Dicho problema propuesto por Johann, debía ser resuelto en un plazo de tiempo limitado hasta finales de 1696. Después de un año, se recibieron cinco propuestas, las de Jacob y Johann Bernoulli, la de Leibniz, la del marqués de L'Hopital, quien no propuso que la solución era la cicloide, y la de Newton. Newton también resolvió el problema, enviando la solución de manera anónima en Philosophical Transactions, una brillante y escueta propuesta que concluía

que la curva Braquistócrona era la cicloide. Que enviase la solución de manera anónima no impidió que Bernoulli supiese que era él, ya que según él, reconoció al león por sus garras. [2]

El método de resolución propuesto por Jakob Bernoulli era mucho más general que la solución propuesta por su hermano Johann, y ejerció una profunda influencia en Leonhard Euler, quien, junto a Lagrange, instauraría las bases del Cálculo de Variaciones.

Vamos a ver la solución dada por Johann Bernoulli, que apareció en Acta Eruditorum bajo el nombre:

La curvatura de un rayo en un medio no uniforme

Demostración. Johann toma en consideración un problema de óptica que aparentemente no tiene relación con el problema de la braquistócrona.

Enuncia el principio del menor tiempo de Fermat, que dice que la luz va de un punto A a un punto B siguiendo la trayectoria que requiere menor tiempo. Este principio se aplica para encontrar la trayectoria de un rayo de luz en un medio de densidad variable, donde, en general, la luz se desplazará en curvas en lugar de líneas rectas, debido a la variación de la velocidad.

La ley de Snell es una fórmula utilizada para calcular el ángulo de refracción de la luz al atravesar una superficie de separación entre dos medios de propagación de la luz con índice de refracción distinto. Dicha ley afirma que la multiplicación del índice de refracción por el seno del ángulo de incidencia respecto a la normal es una constante para cualquier rayo de luz incidiendo sobre la superficie separatriz de dos medios

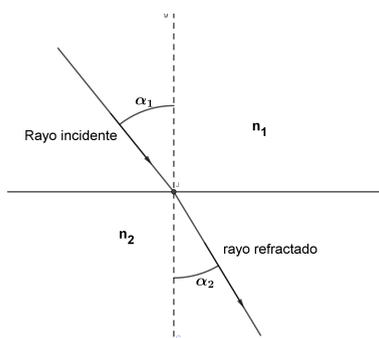


Figura 1.8: Refracción

Fórmulas Ley de Snell:

$$n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2), n_1 = c/v_1, n_2 = c/v_2 \Rightarrow \frac{\sin(\alpha_1)}{v_1} = \frac{\sin(\alpha_2)}{v_2}$$

donde n_1, n_2 son índices de refracción en sus superficies, c velocidad de la luz y v_1, v_2 velocidad en sus superficies

Volviendo a la demostración, suponiendo un medio óptico estratificado, en

cada capa la velocidad de la luz es constante, y la velocidad varía de capa a capa. En el caso de que la velocidad del rayo de luz que desciende aumentara, se refractará cada vez más alejado de la vertical. Aplicando la ley de Snell:

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{v_1} = \frac{\sin(\alpha_2)}{v_2} = \frac{\sin(\alpha_3)}{v_3} = \dots$$

y considerando, que las capas son cada vez más delgadas y numerosas, entonces en el límite, la velocidad de la luz, conforme desciende el rayo va a verificar que:

$$\frac{\sin(\alpha)}{v} = cte \quad (1.15)$$

Ahora suponemos que un cuerpo que desciende de A a B, puede escoger la trayectoria como lo hace un rayo de luz, empleando el menor tiempo posible (Fermat).

El principio de conservación de energía dice que la velocidad alcanzada en un nivel dado queda determinada por su pérdida de energía potencial que se transformará en energía cinética

$$\frac{mv^2}{2} = mgy$$

es decir, la velocidad es proporcional a la raíz cuadrada de la distancia desde donde cae,

$$v = \sqrt{2gy} = k\sqrt{y}$$

y usando (1.15)

$$\sin(\alpha) = K\sqrt{y}$$

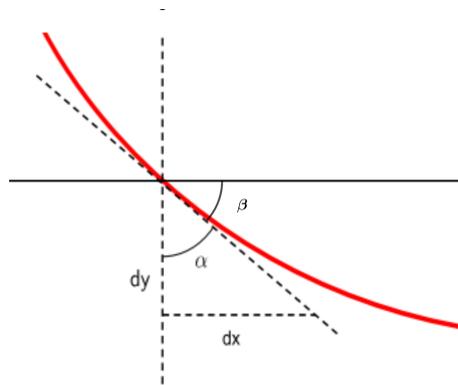


Figura 1.9: •

$$y = f(x) \quad \tan(\beta) = \frac{dy}{dx} \quad \alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) = \cos(\beta) &= \frac{1}{\sec(\beta)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\beta)}} \\ \Rightarrow \sin(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = K\sqrt{y} \end{aligned}$$

obtenemos :

$$y\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = C$$

que es la ecuación diferencial de la braquistócrona según Johann Bernoulli, donde C es una constante.

Ahora, vamos a operar con los diferenciales, despejando para ver que ciertamente estamos ante la ecuación de la cicloide.

$$dx = \left(\frac{y}{C-y}\right)^{1/2} dy \quad (1.16)$$

Efectuamos el cambio de variable: $\tan(\phi) = \left(\frac{y}{C-y}\right)^{1/2}$.

Por lo que sustituyendo en (1.16) $dx = \tan(\phi)dy$.

Además

$$\begin{aligned} y = f(x) &= (C-y)^{1/2}\tan^2(\phi) \\ \Rightarrow y(1 + \tan^2(\phi)) &= C\tan^2(\phi) \\ \Rightarrow y &= C\sin^2(\phi) \end{aligned}$$

y tenemos que:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} dy = 2C\sin(\phi)\cos(\phi)d\phi \\ dx = 2C\sin^2(\phi)d\phi \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} dy = 2C\sin(\phi)\cos(\phi)d\phi \\ dx = C(1 - \cos(2\phi))d\phi \end{cases} \end{aligned}$$

Integramos lo anterior:

$$\int dx = \int C(1 - \cos(2\phi))d\phi \Rightarrow x = \frac{C}{2}(2\phi - \sin(2\phi)) + C_1,$$

imponiendo las condiciones iniciales $(x,y)=(0,0)$; $\phi=0$ obtenemos $C_1=0$.

$$\text{Luego, } x = \frac{C}{2}(2\phi - \sin(2\phi)) \text{ y } y = C\sin^2(\phi) = \frac{C}{2}(1 - \cos(2\phi)),$$

y cambiando $\frac{C}{2} = R$ y $2\phi = \theta$, llegamos a $(x, y) = (R(\theta - \sin(\theta)), R(1 - \cos(\theta)))$ que son las ecuaciones paramétricas de la cicloide.

Por lo tanto la curva por la que un cuerpo desciende en el menor tiempo posible entre dos puntos que no están ni en posición vertical ni horizontal movido únicamente por el efecto gravedad, es la cicloide \square

1.9. Varias aplicaciones de la cicloide

La cicloide se encuentra aplicada en la arquitectura, como por ejemplo en el Museo de Arte Kimbell en la ciudad de Fort Worth, Texas, EE. UU. Museo que alberga una pequeña pero exquisita colección de arte de Europa, Asia y de las culturas precolombinas.

En el ámbito de la mecánica, se han utilizado tradicionalmente las curvas cicloides en el diseño de engranajes hasta principios del siglo XX. Aun se usan en mecanismos de relojería.

Un uso práctico es el diseño de ciertos toboganes. En las pistas de skate se puede apreciar que su estructura esta formada por dos cicloides, siendo los extremos, y una base plana por la que se desliza el skater una vez bajado por la cicloide. Los hechos con forma de cicloide se utilizaron en la industria aeronáutica, pues se requería una forma apropiada de salir deslizándose desde un avión en caso de emergencia.

Capítulo 2

Catenaria

Definimos la catenaria como la curva ideal descrita por una cadena que se encuentra colgada fijada por sus dos extremos y está sometida a un campo gravitatorio uniforme. La catenaria puede ser confundida con la parábola. Es una curva que se describe bajo el propio peso del elemento, por lo que tiene la característica de ser el lugar geométrico de los puntos donde las tensiones horizontales del cable se compensan y por ello carece de tensiones laterales por lo que la cadena permanece inmóvil sin desplazarse hacia los lados. Las fuerzas que actúan son una fuerza vertical, la de la gravedad, y la tensión de la cadena en cada punto que es la que la mantiene estirada.

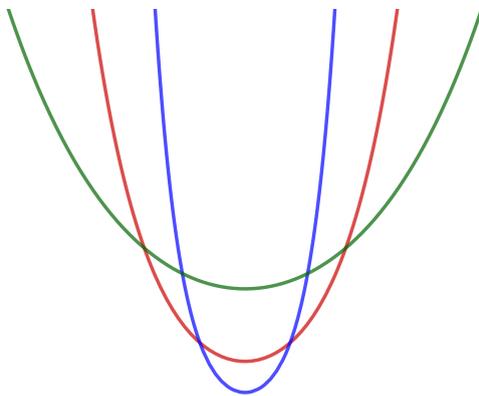


Figura 2.1: Catenarias

La ecuación de la catenaria fue obtenida por Leibniz, Huygens y Johann Bernoulli en 1691, quienes respondieron a un desafío presentado por Jacob Bernoulli para encontrar la ecuación de la 'curva de la cadena'. [13]

Aunque la ecuación de la catenaria fue obtenida por los científicos mencionados anteriormente, esta curva fue estudiada a lo largo de la historia, ya que creaba fascinación entre los matemáticos y físicos la forma que adoptaba una cuerda que se combaba bajo su propio peso. En los libros de Leonardo da Vinci se

pueden encontrar notas y esquemas de cadenas colgando. Tal fue la dificultad de resolver el problema de dicha curva, que Galileo Galilei (1564-1642) publicó en sus *Diálogos sobre dos nuevas ciencias* en el año 1638 que la cadena cogía forma de una parábola. Joachim Jungius (1587-1657) un filósofo, matemático y naturalista alemán, quien usó las matemáticas como modelo para las ciencias naturales, probó en 1669 que una cadena colgante no adoptaba la forma de una parábola, refutando así la publicación de Galileo.

La solución al problema llegaría en 1691, después de que el matemático suizo Jacob Bernoulli (1655-1705) propusiese en 1690 en la prestigiosa revista científica *Acta Eruditorum*, descubrir qué fórmula matemática definía la verdadera forma de la curva de la cadena colgante. La ecuación fue obtenida en 1691 como respuesta a la propuesta de Jacob, de forma independiente, por Johann Bernoulli (1667-1748) hermano menor de Jacob, con el que tenía gran rivalidad, y por Gottfried Leibniz (1646-1716) y Christiaan Huygens. Huygens fue el que por primera vez se refirió a esta familia de curvas como catenaria en una carta enviada a Leibniz.

Leonard Euler (1707-1783) demostró en 1744 que una catenaria que giraba en torno a su asíntota que genera la única superficie mínima de revolución, la catenoide.

Antonio Gaudí (1852-1926) que fue un arquitecto español reconocido internacionalmente como uno de los expertos más prodigiosos de su disciplina, además de uno de los máximos exponentes del modernismo, tuvo como uno de sus elementos más empleados la curva catenaria. Además, fue el primero en utilizar este elemento en la arquitectura común. La utilización de arcos catenarios en obras como la Casa Milà, el Colegio de las Teresianas, la capilla de la Colonia Güell o la Sagrada Familia permite a Gaudí dotar a sus estructuras de un elemento de gran resistencia.

2.1. Ecuación de la catenaria

Antes de entrar a calcular la ecuación de la catenaria, vamos a introducir la ecuación de la longitud del arco.

Definición 2.1. *Llamemos $y(x)$ a la función definida sobre un intervalo $[x_0, x_1]$ y sujeta a las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$. Además exigimos que su longitud sea igual a un valor prefijado L , es decir, que*

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = L$$

Más en general, consideramos la longitud de arco $s : [x_0, x_1] \rightarrow [0, L]$ dada por:

$$s(x) = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \quad (2.1)$$

que es una función creciente y derivable.

Para llegar a la ecuación de la catenaria vamos a plantear un problema, el problema de una cadena flexible, de un metal pesado, atada firmemente a una altura igual por ambos extremos, que cuelga bajo la influencia de su propio peso. Este problema es un problema clásico de la ingeniería mecánica, y su solución va a implicar el cálculo, la física elemental y las ecuaciones diferenciales. [2]

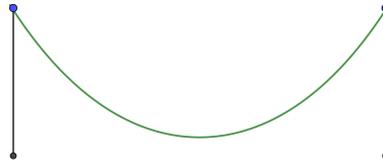


Figura 2.2: Cadena flexible

Empezamos analizando una sección de la cadena entre los puntos A y B , como indicamos en la figura 2.3 donde $B = (x, y)$ es un punto variable y A su punto más bajo en la cadena.

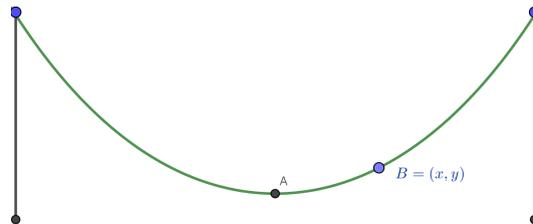


Figura 2.3: Dos puntos en la cadena flexible

Viendo la Figura 2.4 tenemos:

- T_1 , la tensión horizontal en A
 - T_2 , la componente de la tensión tangente a la cadena en B
 - w , el peso de la cadena por unidad de longitud
- T_1, T_2, w son números, mostrados en la siguiente imagen (2.4)

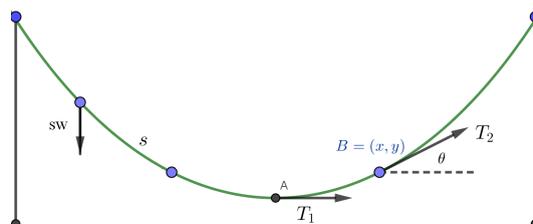


Figura 2.4: La cadena y sus componentes

Notemos que si s es la longitud de la cadena entre dos puntos dados, entonces sw va a representar la fuerza descendente de gravedad en esta sección de la cadena, como indicamos en la figura (2.4). Vamos a usar θ para indicar el

ángulo que la tangente a la cadena en B forma con la horizontal.

La **Primera ley de Newton** dice que un objeto en reposo permanece en reposo o, si está en movimiento, permanece en movimiento a una velocidad constante, a menos que una fuerza externa neta actúe sobre él.

Utilizando la primera ley de Newton, podemos igualar las componentes horizontales de la fuerza para obtener:

$$T_1 = T_2 \cos(\theta) \quad (2.2)$$

De la misma manera, igualamos las componentes verticales de la fuerza para obtener:

$$sw = T_2 \sin(\theta) \quad (2.3)$$

Ahora, procedemos a dividir el miembro derecho de la ecuación (2.3) entre el miembro derecho de la ecuación (2.2), y el miembro izquierdo de la ecuación (2.3) entre el miembro izquierdo de la ecuación (2.2), e igualando obtenemos:

$$\frac{sw}{T_1} = \tan(\theta)$$

Vamos a pensar ahora que la cadena en suspensión es la gráfica de una función, para ser así y una función de x . Por lo que y' en B es igual a $\tan(\theta)$ y podemos reescribir la ecuación anterior:

$$y' = \frac{sw}{T_1}$$

Simplificamos esta ecuación cambiando de notación, siendo $q = y'$, teniendo:

$$q(x) = s(x) \frac{w}{T_1} \quad (2.4)$$

Ahora, si Δx es un incremento de x , entonces $\Delta q = q(x + \Delta x) - q(x)$ va a ser el incremento de q , y $\Delta s = s(x + \Delta x) - s(x)$ es el incremento de s . Como indicamos en la siguiente figura, Δs se aproxima por medio de:

$$\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (y' \Delta x)^2} = \sqrt{1 + (y')^2} \Delta x = \sqrt{1 + q^2} \Delta x$$

Por lo que sustituyendo en (2.4), tenemos que:

$$\Delta q \approx \frac{w}{T_1} \Delta s \approx \frac{w}{T_1} \sqrt{1 + q^2} \Delta x$$

Dividiendo entre Δx y haciendo que Δx tienda a 0 se obtiene la ecuación

$$\frac{dq}{dx} = \frac{w}{T_1} \sqrt{1 + q^2}$$

que podemos reescribir como

$$\int \frac{dq}{\sqrt{1 + q^2}} = \frac{w}{T_1} \int dx$$

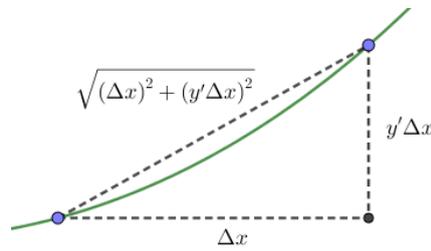


Figura 2.5:

Integramos el miembro izquierdo de la ecuación, utilizando la sustitución $u = \tan(\psi)$ o utilizando funciones trigonométricas hiperbólicas, obteniendo:

$$\arcsin(q) = \frac{w}{T_1}x + C$$

Sabemos que la cadena posee una tangente horizontal en $x = 0$ que es donde se encuentra el punto A en la primera figura. Por lo tanto, $q(0) = y'(0) = 0$. Sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos que $C = 0$. Siendo nuestra solución:

$$\arcsin(q(x)) = \frac{w}{T_1}x$$

o bien

$$q(x) = \sinh\left(\frac{w}{T_1}x\right)$$

o

$$\frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{w}{T_1}x\right) \quad (2.5)$$

Por último, integrando (2.5):

$$y(x) = \frac{T_1}{w} \cosh\left(\frac{w}{T_1}x\right) + D$$

donde D es una constante de integración, que puede determinarse a partir de la altura h_0 del punto A desde el eje x

$$h_0 = y(0) = \frac{T_1}{w} \cosh(0) + D$$

y

$$D = h_0 - \frac{T_1}{w}$$

Finalmente, tenemos que nuestra cadena colgante queda definida por la siguiente ecuación:

$$y(x) = \frac{T_1}{w} \cosh\left(\frac{w}{T_1}x\right) + h_0 - \frac{T_1}{w} \quad (2.6)$$

Por lo que hemos llegado a la ecuación de la *catenaria*

Si tomamos el mínimo de la catenaria en el punto $(x, y) = (0, h_0)$, tenemos que la ecuación de la catenaria es:

$$y(x) = \frac{T_1}{w} \cosh\left(\frac{w}{T_1}x\right) \quad (2.7)$$

y haciendo un cambio de variables, donde $h_0 = \frac{T_1}{w}$, se tiene:

$$y(x) = h_0 \cosh\left(\frac{x}{h_0}\right) = \frac{h_0}{2} \left(e^{\frac{x}{h_0}} + e^{-\frac{x}{h_0}} \right) \quad (2.8)$$

Podemos concluir que este caso se puede extender para todo $x \in [x_0, x_1]$ sin que sea necesario que los extremos estén a la misma altura, es decir, no es necesario que $y(x_0)$ sea igual que $y(x_1)$

2.2. La catenaria y la parábola

En esta sección vamos a hablar de las similitudes y diferencias de la catenaria y la parábola.

Para ello, vamos a incluir una gráfica en la que vamos a tener dibujadas una catenaria y una parábola con el mismo vértice y el mismo eje de simetría. [14]

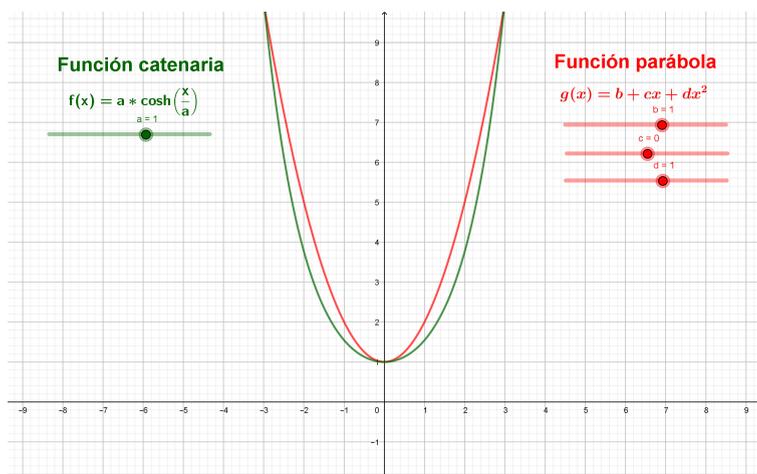


Figura 2.6: Catenaria y parábola

Observando la imagen, vemos a simple vista que ambas curvas son muy parecidas, por lo que entendemos que Galileo Galilei y otros matemáticos errasen al afirmar que la cadena fijada sobre dos puntos a la misma altura colgada sobre su propio peso era una parábola.

Desarrollando en serie de Taylor, la ecuación de la catenaria (2.8), observamos que

$$y(x) = h_0 + \frac{1}{2h_0}x^2 + O(x^4)$$

corresponde a la ecuación de la parábola más un elemento de cuarto orden, donde la ecuación de la parábola es:

$$g(x) = a + bx + cx^2$$

con a, b y c parámetros reales. Esto es la razón de que ambas curvas sean tan parecidas al representarse en una gráfica en el entorno de cero, notando más su diferenciación según aumentan los valores en el entorno.

Ocurre también que dichas curvas tienen además una curiosa relación, que es que si hiciésemos rotar una parábola apoyada sobre el eje de abscisas su foco dibujaría una curva catenaria.

2.3. Consecuencias geométricas

Vamos a mencionar un par de teoremas interesantes acerca de la catenaria, partiendo de la ecuación de la catenaria $y(x) = h_0 \cosh\left(\frac{x}{h_0} + c_1\right)$, con c_1 valor real. [6]

Teorema 2.2. Sean $y(x)$, $\hat{y}(x)$ dos catenarias en un intervalo $[x_0, x_1]$ tales que $y(x_0) = \hat{y}(x_0)$ y $y(x_1) = \hat{y}(x_1)$. Entonces existe un $\varepsilon \in [x_0, x_1]$ tal que $y'(\varepsilon) = \hat{y}'(\varepsilon)$.

Demostración. Suponemos primero que $y(x_0) = y(x_1)$. Por el teorema de Rolle sabemos que $\exists \varepsilon \in [x_0, x_1]$ tal que $y'(\varepsilon) = 0$, teniendo en nuestro caso que $y'(\varepsilon) = \sinh\left(\frac{\varepsilon}{h_0} + c_1\right)$ por lo que $\varepsilon = -c_1 h_0$.

Tenemos $\cosh\left(\frac{x_0}{h_0} + c_1\right) = \cosh\left(\frac{x_1}{h_0} + c_1\right)$ por la condición $y(x_0) = y(x_1)$, por lo que $\frac{x_0}{h_0} + c_1 = -\frac{x_1}{h_0} - c_1$ (\cosh función par).

y

$$\varepsilon = -c_1 h_0 = \frac{x_0 + x_1}{2},$$

siendo ε independiente de y , por lo que se tiene que $y'(\varepsilon) = \hat{y}'(\varepsilon) = 0$.

Ahora, si $y(x_0) \neq y(x_1)$, aplicando el teorema de Cauchy, que dice que $\exists \varepsilon \in [x_0, x_1]$ tal que :

$$1 = \frac{y(x_1) - y(x_0)}{\hat{y}(x_1) - \hat{y}(x_0)} = \frac{y'(\varepsilon)}{\hat{y}'(\varepsilon)}$$

Llegando a que $y'(\varepsilon) = \hat{y}'(\varepsilon)$ □

A partir del teorema que acabamos de demostrar, vamos demostrar el siguiente:

Teorema 2.3. *Dos catenarias distintas no pueden tener más de dos puntos en común.*

Demostración. Tenemos dos catenarias, $y(x)$ y $\hat{y}(x)$, supongamos que coinciden en tres puntos $x_1 < x_2 < x_3$. Aplicando el teorema anterior, $\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2$, $x_1 < \varepsilon_1 < x_2 < \varepsilon_2 < x_3$ tales que $y'(\varepsilon_1) = \hat{y}'(\varepsilon_1), y'(\varepsilon_2) = \hat{y}'(\varepsilon_2)$.

Explícitamente:

$$\begin{cases} \sinh\left(\frac{\varepsilon_1}{h_0} + c_1\right) = \sinh\left(\frac{\varepsilon_1}{\hat{h}_0} + \hat{c}_1\right) \\ \sinh\left(\frac{\varepsilon_2}{h_0} + c_1\right) = \sinh\left(\frac{\varepsilon_2}{\hat{h}_0} + \hat{c}_1\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\varepsilon_1}{h_0} + c_1 = \frac{\varepsilon_1}{\hat{h}_0} + \hat{c}_1 \\ \frac{\varepsilon_2}{h_0} + c_1 = \frac{\varepsilon_2}{\hat{h}_0} + \hat{c}_1 \end{cases}$$

Como $\frac{x}{h_0} + c_1 = \frac{x}{\hat{h}_0} + \hat{c}_1$, son dos rectas que coinciden en dos puntos, luego son iguales, por lo que tenemos que $h_0 = \hat{h}_0$ y $c_1 = \hat{c}_1$, luego las dos catenarias son idénticas. \square

Como consecuencia del teorema anterior, podemos afirmar que dos catenarias con extremos comunes en $[x_0, x_1]$ no van a poder cortarse dentro del intervalo.

2.4. Longitud de la catenaria

Utilizando la ecuación de la definición (2.1) de la longitud del arco, vamos a calcular cual es la longitud de la catenaria.

En nuestro caso tenemos la función $y(x) = h_0 \cosh\left(\frac{x}{h_0}\right)$

Derivamos $y(x)$ con respecto de x :

$$y'(x) = \sinh\left(\frac{x}{h_0}\right)$$

Aplicando (2.1) en el intervalo $[0, x]$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^x \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \int_0^x \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{h_0}\right)} dx \\ &= \int_0^x \sqrt{\cosh^2\left(\frac{x}{h_0}\right)} dx = \int_0^x \cosh\left(\frac{x}{h_0}\right) dx \\ &= h_0 \sinh\left(\frac{x}{h_0}\right) \Big|_0^x = h_0 \sinh\left(\frac{x}{h_0}\right) \end{aligned}$$

Por lo que la longitud del arco, con el origen en el mínimo es:

$$L = h_0 \sinh\left(\frac{x}{h_0}\right)$$

2.5. La catenaria en la arquitectura

La catenaria ha tenido un gran impacto en la arquitectura, sobre todo de la mano de Antonio Gaudí. Antes de que Gaudí usase la catenaria en sus obras, ya en la antigüedad, concretamente en Oriente se construyeron intuitivamente arcos estables con la curvatura de las catenarias invertidas mientras que en la cultura occidental diseñaban sus arcos de maneras menos eficientes. [14]

Un ejemplo de que en la antigüedad se construyeron arcos estables de manera intuitiva con la curvatura de la catenaria invertida es el Gran Arco de Ctesifonte o Taq-i Kisra, que es el único resto visible de la antigua ciudad de Ctesifonte en la antigua Persia, actual Irak. Podemos verlo en la siguiente imagen:

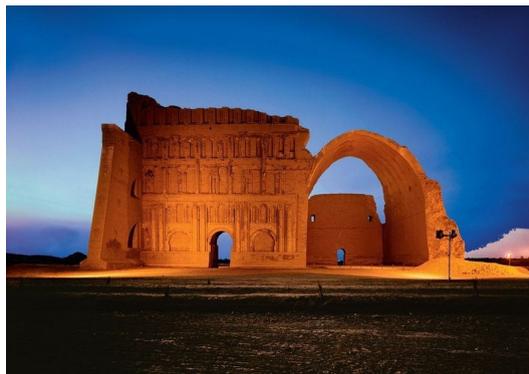


Figura 2.7: Taq Kasra, el arco de Ctesifonte

La catenaria es un ejemplo de la reflectividad que hay entre estructuras traccionarias y las comprimidas, lo que permite que un arco en forma de catenaria invertida sea precisamente la forma que minimiza los esfuerzos de compresión sobre dicho arco. El arco catenario es el arco que reproduce exactamente la morfología de una curva catenaria invertida. Todas las características matemáticas de la catenaria se conservan al ser invertida. Además, del arco catenario se derivan los arcos funiculares que tienen también óptimas características constructivas y que se pueden obtener con facilidad reproduciendo (invertidos) los efectos de cargas puntuales sobre una curva catenaria. [15]

Los arcos funiculares se obtienen cuando, de un arco catenario se suspenden diferentes cargas puntuales. Para la obtención de este arco se debe fijar un cordel o cadena fija permitiendo su arqueamiento, luego se disponen cargas puntuales hasta conseguir la forma deseada. Al final, invertimos la curva y la usamos para usos arquitectónicos

Antonio Gaudí que es uno de los grandes arquitectos de todos los tiempos, se diferencia del resto de arquitectos de su época en que hay una preocupación desde el inicio, por el diseño de una estructura estable y no una mera comprobación de estabilidad a posteriori. El interés en construir estructuras estables, además de una buena formación técnica, es lo que provoca que emplee los arcos catenarios y parabólicos desde un principio.

El uso de arcos catenarios por Gaudí también era porque los encontraba estéticamente satisfactorios, ya que empleaba los arcos con profusión en lugares donde otras soluciones estructurales hubieran sido posibles. Él, mismamente dijo que la catenaria transmitía elegancia y daba espiritualidad al arco. Para Gaudí la naturaleza era un referente, y la catenaria es una forma natural.

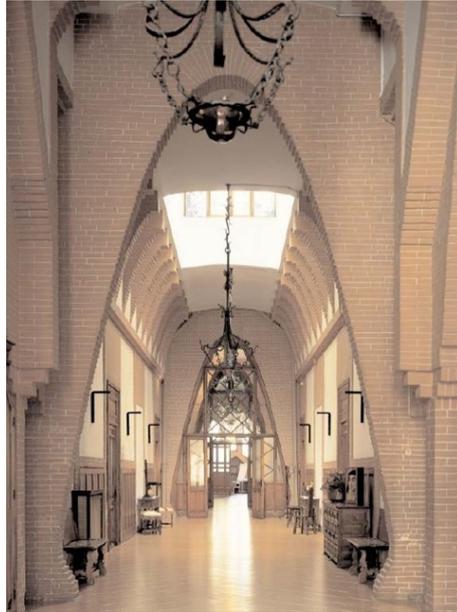


Figura 2.8: Colegio de las Teresianas

Gaudí también utilizaba frecuentemente algunos recursos como la simetrización y sobre todo la traslación de los arcos para conseguir efectos especiales. Como se aprecia en los largos pasillos del colegio de las Teresianas, en la siguiente imagen.



Figura 2.9: Pasillo del colegio de las teresianas con traslación de catenarias

Vamos a ver varios ejemplos de edificios donde aparece la catenaria, como el Arco de Gateway, la Antigua Reserva Federal de Minneapolis y el Kingdom Centre de Arabia Saudita.

El Arco Gateway de San Luis (Misuri, Estados Unidos) que es un monumento conmemorativo, es quizás la obra arquitectónica con forma de arco catenario más conocida del siglo XX. Esta obra es una maravilla de la construcción teniendo cuenta que fue realizado entre 1963 y 1965, época anterior a los ordenadores. Es obra del arquitecto norteamericano de origen finlandés Eero Saarinen y tiene una altura de 192 metros, siendo el monumento de acero inoxidable más alto del mundo.



Figura 2.10: Arco Gateway (San Luis, Misuri)

Otra obra moderna en la que aparece el arco catenario, es la Reserva Federal de Mineapolis en Estados Unidos. Es una obra del arquitecto de origen letón Gunnar Birkerts y el diseño está basado en un puente colgante. La obra consiste en dos grandes estructuras laterales de hormigón separadas 100 metros una de la otra que sirven de soporte en las que se anclan dos inmensos cables en forma de catenaria que sustentan la estructura del edificio de 11 pisos, siendo la fachada el lugar en el que se reproduce la curva catenaria resaltando el sistema constructivo empleado.

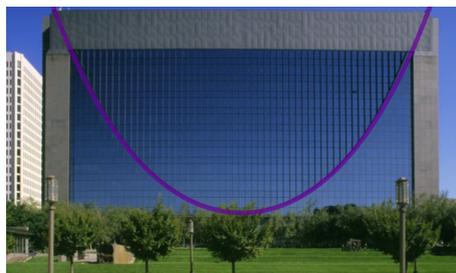


Figura 2.11: Antigua Reserva Federal de Minneapolis, Estados Unidos

Yéndonos al caso en el que el uso de la catenaria sea más estético que estructural, podemos fijarnos en el Kingdom Centre en la capital de Arabia Saudita,

situado en la ciudad de Riad. Es una obra del arquitecto Scott Berry y tiene una altura de 302 metros, siendo el quinto edificio más alto del país. A su curva catenaria se han referido como "un collar para la ciudad de Riad". Pertenece a la familia real Saudita.



Figura 2.12: Kingdom Centre (Riad, Arabia Saudita)

2.6. La evolvente de la catenaria

Vamos a ver cual es la evolvente de la catenaria, pero antes vamos a ver la definición de evolvente.

La operación de calcular evolventes de una curva se puede considerar la inversa de la operación de cálculo de la evoluta. [1]

Definición 2.4. Dada la curva $c : t \rightarrow c(t) \in \mathbb{R}^2$ sin estar parametrizada por el arco, la evolvente de la curva c viene dada por:

$$\alpha(t) = c(t) - s(t) \frac{c'(t)}{|c'(t)|} \quad (2.9)$$

donde $s : t \rightarrow s(t) = \int_{\tau}^t |c'(\varepsilon)| d\varepsilon \in J \subseteq \mathbb{R}^2$ con τ valor real

Lema 2.5. La evolvente de catenaria es la tractriz.

Demostración. Sean las ecuaciones paramétricas de la catenaria $c(t) = \left(t, h_0 \cosh \left(\frac{x}{h_0} \right) \right)$ con t valor real.

Utilizando la fórmula de la evolvente (2.9) a partir del punto $t = 0$, se tiene:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + \sinh^2(\varepsilon)} d\varepsilon = \int_0^t \cosh(\varepsilon) d\varepsilon = \sinh(t)$$

y sustituyendo

$$\alpha(t) = \left(t, \cosh(t) \right) - \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} \left(1, \sinh(t) \right) = \left(t - \tanh(t), \frac{1}{\cosh(t)} \right)$$

que son las ecuaciones paramétricas de la tractriz como vamos a ver en el siguiente capítulo □

Capítulo 3

La tractriz

En este capítulo, vamos a exponer la *tractriz*, una curva definida como la trayectoria de un punto P arrastrado por otro punto A que se desliza en línea recta, manteniéndose a una distancia constante d . La tractriz puede ser definida de una manera más coloquial como la curva trazada por un perro arrastrado mediante una correa tensa e inextensible por su amo, que camina a lo largo de una recta que está inicialmente perpendicular a la correa [16]. Esto provoca que la tractriz sea también llamada la curva del perro. La palabra tractriz proviene del latín, de la palabra tractum, que significa arrastrar.

Al hablar de la tractriz, estamos hablando de un caso concreto de una curva de persecución, estas curvas son las que describen un objeto que se desplaza a una velocidad v_1 constante y que persigue de manera óptima a otro objeto que se desplaza en línea recta a una velocidad v_2 también constante.

Se conoce que la tractriz fue introducida por Claude Perrault (1613-1688) en 1670. Isaac Newton estudió la curva en 1676 y Christiaan Huygens en 1692, siendo el primero en llamarla así al escribir en una carta a Leibniz. También la estudió Johann Bernoulli. El estudio de la tractriz comenzó con el siguiente problema propuesto a Leibniz [18]:

¿Cuál es el camino de un objeto arrastrado en un plano horizontal por una cadena de longitud constante cuando el extremo de ésta no unido al objeto se mueve a lo largo de una recta en el plano?

Una de las características de la tractriz es que su evoluta es la catenaria. Otra propiedad interesante es que cualquier segmento tangente a la tractriz desde el punto de tangencia hasta la asíntota de la curva tiene longitud constante, de aquí que también sea conocida la curva con el nombre de curva equitangencial. Además, la rotación de la tractriz con respecto al eje Y genera la superficie de revolución denominada pseudoesfera, pues tiene curvatura de Gauss constante negativa. Esta superficie sirve como modelo para la geometría hiperbólica de Lobachevsky.

3.1. Ecuación cartesiana

Vamos a conseguir las ecuaciones cartesianas de la tractriz resolviendo el siguiente problema, que es de naturaleza matemática y carente de los ornamentos del mundo real.

Problema 3.1. *Imaginemos que arrastramos un punto P en el plano XY por una cuerda PT de longitud constante a . Si T parte del origen y se desplaza a lo largo del eje positivo Y , y si P parte del punto $(a, 0)$. Entonces, ¿Cuál es la trayectoria que va a recorrer el punto P ? [2]*

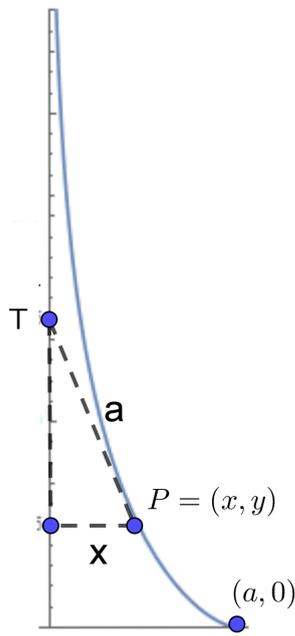


Figura 3.1: Tractriz

Solución Sabemos que la curva descrita por el punto P es la tractriz. Observando la imagen del recorrido realizado por el punto P , vemos que se puede calcular la pendiente de la curva de persecución. Por el enunciado conocemos que el punto inicial de P es $P_0 = (a, 0)$ con a constante y $T_0 = (0, 0)$. En el instante de tiempo t , el punto P se encuentra en (x, y) y T se encontrará en $(0, y_t)$. Sabemos que la pendiente de PT es:

$$y'(x) = -\frac{y_t - y}{x},$$

y como $PT = a$, $a^2 = x^2 + (y_t - y)^2$, despejando $y_t - y = \sqrt{a^2 - x^2}$, y sustituyendo en la ecuación de la pendiente:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

Nos encontramos con la derivada de y con respecto a x y despejando, obtenemos una ecuación diferencial de primer orden separable:

$$\int dy = - \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx$$

Se resuelven las integrales, realizando en la integral de la derecha el cambio de variables $x = a \sin(\phi)$, donde ϕ es el ángulo entre la recta AP y el eje de las ordenadas. Obteniendo:

$$y = a \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right) - \sqrt{a^2 - x^2}$$

que es la ecuación de la tractriz

3.2. Ecuaciones paramétricas

A partir de la ecuación cartesiana de la tractriz y con un par de cambios de variable, usando funciones hiperbólicas, vamos a deducir las ecuaciones paramétricas de la tractriz. [17]

Hemos visto en la sección anterior que la ecuación cartesiana de la tractriz es::

$$y = a \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right) - \sqrt{a^2 - x^2}$$

Siendo $t = \operatorname{arcsech} \left(\frac{x}{a} \right) = \operatorname{cosh}^{-1} \left(\frac{a}{x} \right)$ y $\operatorname{cosh}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \frac{a}{x}$. Teniendo:

$$t = \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right|,$$

$$\operatorname{tanh}(t) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a},$$

y

$$\operatorname{sech}(t) = \frac{x}{a}$$

Despejando, obtenemos que las ecuaciones paramétricas con funciones hiperbólicas son:

$$\begin{cases} x = a \operatorname{sech}(t) = \frac{a}{\operatorname{cosh}(t)} \\ y = a(t - \operatorname{tanh}(t)) \end{cases}$$

3.3. Longitud de arco de la tractriz

Partiendo de la ecuación cartesiana de la tractriz, vamos a calcular cual es su longitud de arco. Para ello vamos a utilizar la ecuación de la definición

(2.1).

Derivamos la ecuación cartesiana respecto x , y obtenemos

$$y'(x) = -\frac{a^2}{x\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$
$$\frac{x^2-a^2}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

Ahora, sustituyendo en (2.1):

$$L = \int_a^x \sqrt{1 + \left(-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)^2} dx = \int_a^x \frac{a}{x} dx = a \ln(a) - a \ln(x) = a \ln\left(\frac{a}{x}\right)$$

Concluimos afirmando que la longitud de arco de la tractriz es $L = a \ln\left(\frac{a}{x}\right)$

Capítulo 4

Clotoide o espiral de Cornú

En este capítulo vamos a introducir las curvas de transición y su importancia a la hora de ser aplicadas, concretamente nos vamos a centrar en la curva conocida como clotoide, también llamada espiral de Euler o espiral de Cornú, en honor del físico francés Marie Alfred Cornu (1841-1902).

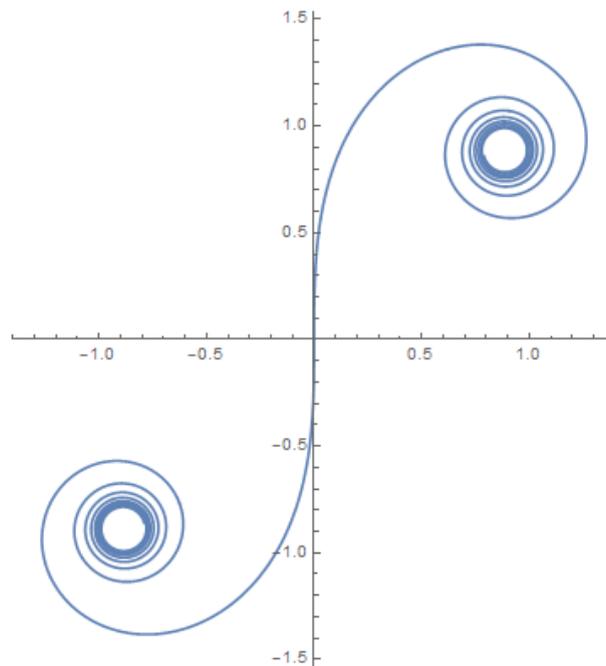


Figura 4.1: La espiral de Cornu o clotoide

La *clotoide* es una de las curvas que pertenece a la familia de las espirales. La definimos como una curva plana descrita por un punto que se desplaza con movimiento uniforme sobre una recta, mientras la recta gira con movimiento uniforme alrededor de uno de sus puntos. Recibe el nombre de clotoide de la palabra griega 'klothó', que significa hilandera. Dicha curva fue creada por Marie Alfred Cornú como un monograma para cálculos de difracción óptica. La

clotoide posee una propiedad que hace que ésta curva sea fundamental a la hora de realizar trazados para carreteras, ferrocarriles... La veremos más adelante.

Las curvas de transición, también llamadas curvas de radio variable, son las curvas matemáticamente calculadas para una sección de carretera o de la vía del ferrocarril, donde una alineación recta cambia a una curva circular, formando una espiral. En otras palabras, son las curvas encargadas de unir tramos rectos con tramos curvos o para conectar tramos circulares de curvaturas distintas.

Los primeros trazados de carretera y vías férreas fueron durante mucho tiempo tramos rectos encadenados con arcos de circunferencia, que eran considerados los mejores caminos por ser los más cortos. Los problemas empezaron a llegar cuando los vehículos y trenes alcanzaron mayor potencia, siendo capaces de ir a más velocidad, siendo ambos transportes más difíciles de controlar en las curvas.

Vamos a ver el problema que nos produce que el trazado sea la unión de una recta con el arco de un círculo, analizar el problema, y ver cual es la solución. Definimos el radio de curvatura en un punto, R_c como el inverso del curvatura en ese punto, $R_c = \frac{1}{\kappa}$, tomándose como infinito cuando $\kappa = 0$. Por lo tanto, a mayor curvatura menor radio. En el caso que mencionábamos anteriormente, un trazado de carretera generado por una recta y el arco de círculo unidos, se produce un cambio brusco en la curvatura κ , ya que en la recta dicha curvatura $\kappa = 0$, y en la circunferencia $\kappa = \frac{1}{R_c}$, donde R_c es el radio de la circunferencia. Por lo que un transporte que recorre este trazado, se encuentra en dificultades al pasar de no sufrir ninguna fuerza centrífuga en la recta a sufrirla en la curva, lo que provoca la pérdida de control del vehículo, ocupando en algunos casos el carril contrario o saliéndose de la calzada, habiendo una falta de seguridad en dicha vía. La fuerza centrífuga viene definida por $F_{c_p} = \frac{mv^2}{R_c} = mv\kappa$, donde m es la masa, v la velocidad y R_c es el radio de curvatura. Si observamos la fórmula, podemos apreciar que contra más pese el vehículo y más rápido vaya, la fuerza centrífuga será mayor. Por otro lado, en la recta la fuerza centrífuga es 0 al ser su curvatura 0 y la fuerza centrífuga será menor en una curva con menor curvatura que una con mayor curvatura.

Luego, buscamos una solución a los problemas que nos ocasiona el trazado. Podemos pensar mirando la fórmula de la fuerza centrífuga, en que si redujésemos la masa del vehículo, la fuerza disminuiría, pero esto no tiene mucho sentido. Como tampoco tiene mucho sentido reducir la velocidad considerablemente al tomar la curva, lo que haría ir mucho más despacio. Otra solución sería aumentar el radio de la circunferencia, pero esto implicaría que la recta fuese más corta.

Para evitar las dificultades, pensamos en añadir entre la recta y la curva circular, otra curva en la que el radio disminuya suavemente desde el infinito, que

es el radio de la recta, hasta el valor correspondiente del principio de la curva circular, lo que sería una curva de transición. Realizaríamos el mismo proceso de manera análoga, para la salida de la curva circular a la recta, en este caso aumentándose el radio. Esto produciría que el cambio de la fuerza centrífuga no fuese brusco, sino suave.

Por lo que podemos concluir que la solución es unir la recta y el arco circular mediante una curva de transición. Además, se puede afirmar que los trazados con curvas de transición diseñados minuciosamente hacen que la fuerza centrífuga crezca y decrezca gradualmente a medida que se entra o se sale de una curva circular, siendo así el trazado cómodo, seguro y fácil de circular por el carril correcto.

Dentro de las diferentes curvas de transición, la curva que mas se ajusta para resolver el problema anterior, es la clotoide o espiral de Cornú, ya que la propiedad que la define es que su radio de curvatura y su distancia recorrida son inversamente proporcionales, y nosotros buscábamos una curva en la que el radio de curvatura fuera disminuyendo a medida que la distancia recorrida fuera aumentando.

En la actualidad, los nuevos trazados de carreteras están diseñados como una sucesión de clotoides, evitando así tramos rectos excesivamente largos que podían llevar a una conducción monótona, lo que puede provocar distracción y riesgo de accidentes. [8] [9]

Vamos a estudiar la clotoide o espiral de Cornú, empezando por la ley de curvatura de la clotoide, que va a ser la propiedad geométrica que defina a la curva; y a obtener su ecuación a partir de las ecuaciones de Fresnel

4.1. Ley de curvatura de la clotoide

Empecemos estudiando la ley de curvatura de la cicloide. [8]

Para ello, vamos a suponer un trazado, que va a ser una curva circular de radio R_c , por el que transita un coche o cualquier otro vehículo, a una velocidad V constante, experimentando una aceleración centrífuga:

$$a_c = \frac{V^2}{R_c} \quad (4.1)$$

Este valor, va a ser el cambio inmediato que se tiene de pasar de una recta a una curva circular y viceversa, ya que en la recta el coche no va a sufrir aceleración centrífuga al ser $a_c = 0$, y entonces el incremento total de aceleración es $\frac{V^2}{R_c}$. Usamos una curva de transición para solucionar el problema, es decir, para buscar una variación constante, progresiva, uniforme o lineal en la aceleración centrífuga.

Tomamos una curva de transición de longitud L_e , produciéndose una variación de la aceleración por unidad de longitud, también llamada aceleración unitaria,

a lo largo de esta curva:

$$a_{cu} = \frac{V^2}{L_e} \quad (4.2)$$

Ahora, calculamos la fuerza centrífuga de un punto cualquiera que se encuentre en la curva de transición entre la recta y la curva, a una distancia l del inicio de la curva de transición, siempre que su radio varíe desde infinito a R_c ,

$$a_{cP} = \frac{V^2}{R} \quad (4.3)$$

Una aceleración, que en función de la unitaria es:

$$a_{cP} = a_{cu}l = \frac{V^2l}{R_cL_e} \quad (4.4)$$

Igualando las dos expresiones anteriores:

$$\frac{V^2}{R} = \frac{V^2l}{R_cL_e}$$

tenemos que

$$\frac{L_e}{R} = \frac{l}{R_c} \Rightarrow R_cL_e = Rl$$

de donde sabemos que L_e y R_c son constantes, luego también lo será el valor de su multiplicación, al que vamos a llamar A^2 , y las ecuaciones anteriores quedan cómo:

$$R_cL_e = Rl = A^2 \quad (4.5)$$

denominada la ecuación (4.5) Ley de curvatura de la clotoide, apreciando que el radio de curvatura R es inversamente proporcional a la longitud L de la curva desde su origen.

Hemos llegado a la propiedad fundamental de la clotoide, gracias a la cual es la curva de transición ideal.

4.2. Ecuaciones paramétricas

En esta sección del capítulo, vamos a intentar hallar las ecuaciones paramétricas de la clotoide. Llamamos $r(s) = (x(s), y(s))$ a la representación paramétrica de la clotoide, donde en cada punto de la curva se va a cumplir que el producto de la longitud del arco recorrido, $l = s$, por el radio de la curvatura $R_c = r$, es igual siempre a A^2 y constante, como hemos visto en la sección anterior. A es el parámetro de la clotoide. [19]

$$R_c l = r s = A^2 \Leftrightarrow r = \frac{A^2}{s} \quad (4.6)$$

Sabemos que la curvatura de la curva es el inverso del radio de la curva, $\kappa = \frac{1}{r}$, y usando en ésta ecuación (4.6) , tenemos:

$$\kappa = \frac{1}{r} = \frac{s}{A^2} \quad (4.7)$$

Tomamos $\phi(s)$ como el ángulo que forma el eje de las abcisas con el vector tangente unitario $\vec{t}(s)$ en el punto $r(s)$ y tenemos que

$$\vec{t}(s) = r'(s) = (\cos(\phi(s)), \sin(\phi(s))) \quad (4.8)$$

derivando con respecto $\phi(s)$

$$\vec{t}'(s) = \phi'(s)(-\sin(\phi(s)), \cos(\phi(s))) = \kappa(s)\vec{n}(s)$$

y tomando normas

$$|\kappa(s)| = |\phi'(s)| = \left| \frac{d\phi}{ds} \right|$$

Entonces, si $\kappa(s)$ y $\phi'(s)$ tienen el mismo signo se cumple que $\kappa(s) = \frac{d\phi}{ds}$, e igualando con (4.7)

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{s}{A^2}$$

Despejamos la igualdad dejando el miembro $d\phi$ a la izqda, integramos a ambos lados, y obtenemos:

$$\int d\phi = \int \frac{s}{A^2} ds \Rightarrow \phi(s) = \frac{s^2}{2A^2}$$

Volviendo a (4.8), vemos que

$$\begin{cases} x'(s) = \cos(\phi(s)) \\ y'(s) = \sin(\phi(s)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(s) - x(s_0) = \int_{s_0}^s \cos(\phi(s)) ds \\ y(s) - y(s_0) = \int_{s_0}^s \sin(\phi(s)) ds \end{cases}$$

Por lo que si tomamos que $s_0 = 0$, el origen $O = (0, 0) = (x(s_0), y(s_0))$ y tomamos el valor obtenido anteriormente para $\phi(s)$, resulta:

$$\begin{cases} x(s) = \int_0^s \cos(\frac{s^2}{2A^2}) ds \\ y(s) = \int_0^s \sin(\frac{s^2}{2A^2}) ds \end{cases}$$

y concluimos que $r(s) = (x(s), y(s)) = (\int_0^s \cos(\frac{s^2}{2A^2}) ds, \int_0^s \sin(\frac{s^2}{2A^2}) ds)$, es decir, que la ecuación de la clotoide viene dada por las integrales de Fresnel.

Bibliografía

- [1] Gray, A. (1998). *Modern differential geometry of curves and surfaces with mathematica* (2nd ed.). Boca Raton [etc.]: CRC Press.
- [2] Simmons, G. F., and Krantz, S. G. (2007). *Ecuaciones diferenciales: Teoría, técnica y práctica*. México D.F: McGraw Hill.
- [3] Zwikker, C. (1963). *The advanced geometry of plane curves and their applications*. New York: Dover.
- [4] Marsden, J. E., and Tromba, A. J. (1998). *Cálculo vectorial* (4^a ed.). México, D.F: Addison-Wesley Longman
- [5] Weisstein, Eric W. (2003) *Cycloid*. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Cycloid.html>
- [6] Ivorra, C. (2019). *La catenaria*. Recuperado de: <https://www.uv.es/ivorra/Libros/Catenaria.pdf>
- [7] Lockwood, E. H. (1967). *A book of curves*. Cambridge University Press.
- [8] Gil, L. (1997). *La espiral de Euler en calles y carreteras*. Medellín, Universidad.
- [9] Orden, D. (2014). *Clotoide, la curva que vela por tu seguridad en carreteras y ferrocarriles* Reportado de: <https://cifrasyteclas.com/clotoide-la-curva-que-vela-por-tu-seguridad-en-carreteras-y-ferrocarriles/>
- [10] Bragado, J. (2019). *La Cicloide Braquistócrona Tautócrona* Reportado de: <http://www.juanbragado.es/ficheros/Mis trabajos para la web/La Cicloide.pdf>
- [11] Díaz, N (2017). *La curva braquistócrona de Johann Bernoulli*. Blog: Historias de Matemáticas. Reportado de: <http://historiasdematematicas.blogspot.com/2017/04/la-curva-braquistocrona-de-johann.html>
- [12] Chinae, C.S. (2019). *La cicloide, una curva de mucho empaque*. from: http://casanchi.com/mat/03_cicloide01.pdf

- [13] O'Connor, J. J., and Robertson, E. F. (2001). *The MacTutor history of mathematics archive*. World Wide Web page|<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/>;(accessed April 22, 2004).
- [14] Universidad Politécnica Madrid. (2019) *La catenaria en la arquitectura*. From: <http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/Fdistancia/PIE/Chip/geométrico/Catenaria.pdf>
- [15] Casiopea. (2019) *Estudio y aplicación de la catenaria*. from: <https://wiki.ead.pucv.cl/index.php/>
- [16] Javier (2014). *La tractriz y la catenaria*. BLOG, from: <http://javier-fg.blogspot.com/2014/05/la-tractriz-y-la-catenaria.html>
- [17] Granados, A.L. (2019). *TRACTRIZ*. PDF, from: <https://www.academia.edu/33337112/Tractriz>
- [18] IES. PEÑACASTILLO. (2019). *Tractriz o curva del perro*. from: <http://ficus.pntic.mec.es/igas0008/Nombre/Propio/pag11.htm>
- [19] Blanc, L. , Checa, E. and Marín, J. (2013). *Una aproximación a la curva de transición Clotoide vista desde Mathematica*. Universitat Politecnica Valencia, Volumen 6(2) No. 9, 2013