**Facultad
de
Ciencias**

Dinámica en dimensión uno: estudio de los homeomorfismos de la circunferencia

Dimension one dynamics: study of the circle homeomorphisms

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: David Senovilla Sanz

Directora: Nuria Corral Pérez

Junio - 2019

A los que me han aguantado durante todos estos años con especial mención a Toraya.
A Nuria por su cantidad no numerable de correciones a este trabajo.

Resumen

H. Poincaré introdujo el estudio de la dinámica de los homeomorfismos de la circunferencia en su intento de clasificar las soluciones de las ecuaciones diferenciales definidas sobre el toro. Estas investigaciones dieron lugar al problema de describir la estructura de estos homeomorfismos. Poincaré introdujo el principal invariante para el estudio de su dinámica denominado "número de rotación".

En este trabajo mostramos un estudio de la dinámica de los homeomorfismos de la circunferencia viendo que propiedades se pueden describir a partir del número de rotación. También se estudiarán las propiedades del grupo de homeomorfismos de la circunferencia que preservan la orientación.

Palabras clave: Grupo de Homeomorfismos, Circunferencia, Número de rotación, Conjunto de Cantor.

Abstract

H. Poincaré introduced the study of the circle homeomorphisms dynamics in his attempt to classify the solutions to differential equations defined on the torus. These researches brought the problem to describe the structure of these homeomorphisms. Poincaré introduced the main invariant in the study of its dynamics called "rotation number".

In this project we show an study of the circle homeomorphisms dynamics noticing at those propierties that can be described by the rotation number. Furthermore, we will study those propierties of the circle homeomorphisms which preserves the orientation group.

Key words: Homeomorphisms Group, Circle, Rotation number, Cantor set.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En este trabajo se va a analizar el comportamiento de los sistemas dinámicos de la circunferencia restringiéndonos al caso en que son homeomorfismos. En concreto vamos a formalizar y estudiar el comportamiento de una trayectoria definida por un homeomorfismo y vamos a ver en que casos su comportamiento se asemeja al de aplicaciones más familiares, las rotaciones y en que casos podemos transformar (mediante conjugación) a uno de estos homeomorfimos en una rotación.

Un sistema dinámico puede ser continuo o discreto. En el caso discreto, un sistema dinámico es una aplicación $f : X \longrightarrow X$ en el que la n-ésima iteración consiste en $f^n = f \circ f^{n-1}$ con f^0 la identidad. Este tipo de sistemas recibe el nombre de *mapa*.
En el caso continuo, tendremos un conjunto de aplicaciones $\{f^t : X \longrightarrow X\}$, con t recorriendo los reales o los reales no negativos, que forma grupo o semigrupo respectivamente respecto de la operación composición y de nuevo f^0 es la identidad. Un sistema continuo también recibe el nombre de *flujo*. Es claro que si consideramos un homeomorfismo de la circunfencia en sí misma, obtenemos un mapa.

La motivación para entender los homeomorfismos de la circunferncia vistos desde el punto de vista de la dinámica, surge del interés de Poincaré a la hora de estudiar el comportamiento de las ecuaciones diferenciales sobre el toro. Vio que al estudiar la trayectoria de un punto por la solución de la ecuación, es decir la trayectoria de un punto obtenida a partir del flujo dado por la ecuación diferencial, esta al volver a cruzar el meridiano que pasaba por el punto de partida, definía una aplicación de la circunferencia en sí misma, ver figura 1.1. A esta aplicación posteriormente se la denomino aplicación de primer retorno de Poincaré. Esta aplicación se ha generalizado a los sistemas dinámicos en general y es de gran interés debido a la información que se extrae de esta sobre el sistema en cuestión.

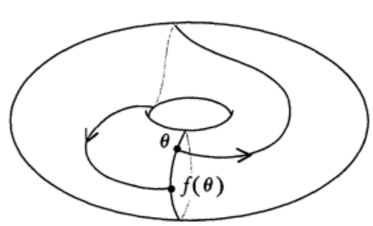

Figura 1.1: Trayectoria de un punto pasando por el mismo paralelo [13].

A continuación detallamos el contenido de esta memoria.

En el siguiente capítulo de este trabajo, vamos a hacer un repaso de ciertos conceptos de topología algebraica y particularizaremos para el caso de interés, es decir, la circunferencia. Este trabajo se encuentra dentro del campo de la dinámica topológica, es decir, estudiaremos propiedades de la dinámica de un sistema desde la topología. En este segundo capítulo introduciremos conceptos pertenecientes a esta disciplina como pueden ser los denominados puntos límites y veremos algunas propiedades de estos.

En el tercer capítulo nos centraremos en la clasificación de los homeomorfimos de la circunferencia según un invariante que definiremos, denominado número de rotación y estudiaremos sus propiedades. Este concepto será clave a lo largo del trabajo. A lo largo de este capítulo nos apoyaremos en los conceptos definidos en el capítulo anterior. Si consideramos los homeomorfismos de la circunferencia como sistemas dinámicos, veremos que dicho invariante nos aporta información de la dinámica de estos homeomorfismos. A modo de ejemplo, veremos como la dinámica de un sistema con un número de rotación racional es totalmente diferente a la de uno cuyo número de rotación es irracional.

Finalmente, en el último capítulo estudiaremos el comportamiento de varios de estos homeomorfismos, atendiendo a dos factores: la topología de dicho conjunto de aplicaciones y su estructura como grupo. Juntando ambos campos, seremos capaces de generalizar ideas vistas en el tercer capítulo. Veremos condiciones bajo las que un grupo de homeomorfismos se puede ver como un grupo de rotaciones o como la dinámica de estos se asemeja a la de un único homeomorfismo. Durante este capítulo además se hará a modo de recordatorio un breve repaso de conceptos sobre teoría de la medida que nos serán de gran utilidad.

Capítulo 2

Preliminares

A modo de aclaración, en este trabajo se considera al 0 como un elemento de los números naturales. Cuando haya ambigüedad en la notación, usaremos que $f^{\circ n}$ para denotar la n-ésima composicón en lugar de f^n.

En esta sección se va a probar que todos los homeomorfismos de la circunferencia en sí misma se pueden transformar por composición de aplicaciones en una rotación.

2.1. Homeomorfismos de $\mathbb{S}^1$ y sus levantamientos

Comencemos definiendo una serie de conceptos imprescindibles para el desarrollo de este trabajo, el objetivo inicial es relacionar el espacio $\mathbb{S}^1$ con la recta real con el fin de poder de trabajar con funciones reales. Esta idea se puede hacer porque $\mathbb{R}$ es un espacio recubridor de $\mathbb{S}^1$. Concepto que procedemos a definir y del que se darán algunas propiedades de interés cuyas demostraciones se pueden encontrar en [8].

Definición 2.1.1. *Sean (X, τ_X) y (E, τ_E) dos espacios topológicos. Se dice que E es un* espacio recubridor *de X si existe una aplicación $p : E \longrightarrow X$, con las siguientes propiedades:*

1. *p es continua.*
2. *p es sobreyectiva.*
3. *Para cada $x \in X$, existe U entorno abierto de x, tal que $p^{-1}(U) = \cup_{i\in I} V_i$ con V_i abiertos de E, disjuntos dos a dos y tales que $p|_{V_i} : V_i \longrightarrow U$ es un homeomorfismo para todo $i \in I$. Al entorno U se le denomina* abierto trivializante.

Si se consideran los espacios $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}^1$, ambos con la topología usual, se comprueba que la siguiente aplicación es de recubrimiento.

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1; \qquad p(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t)) \tag{2.1}$$

Si consideramos un abierto conexo en $\mathbb{S}^1$, intuitivamente vemos que su contraimagen es de la forma dada por la figura 2.1 que cumple las propiedades deseadas.

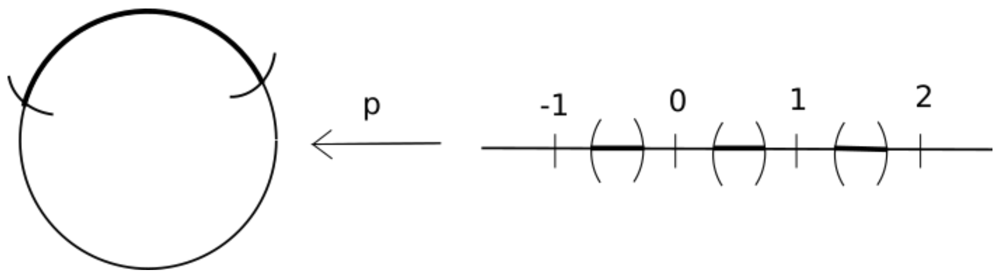

Figura 2.1: Esquema de la contraimagen de los abiertos de $\mathbb{S}^1$ por p.

Definición 2.1.2. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua y (E, p) un espacio recubridor de Y. Se denomina* levantamiento *de f a una aplicación continua $F : X \longrightarrow E$ tal que $f = p \circ F$.*

Dados $x_0 \in X$, $e_0 \in E$ e $y_0 \in Y$, con $f(x_0) = y_0 = p(e_0)$, si Y es conexo y localmente conexo por caminos, la condición necesaria y suficiente para que exista un levantamiento $F : X \longrightarrow E$ tal que $F(x_0) = e_0$ es la siguiente relación entre grupos fundamentales:

$$f_*(\pi_1(X, x_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0)) \tag{2.2}$$

siendo f_* y p_* las aplicaciones inducidas entre grupos fundamentales por f y p respectivamente. Además una vez fijado $F(x_0) = e_0$, si la aplicación existe, es única.
Recordemos que el grupo fundamental se obtiene como el conjunto de clases de lazos[1] con la relación "ser homótopos con los extremos fijos". A modo de recordatorio hacemos un repaso de algunos conceptos relacionados con la teoría de la homotopía.

Definición 2.1.3. *Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ dos aplicaciones continuas, diremos que son* homótopas*, si existe una aplicación continua $H : X \times [0, 1] \longrightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = g(x)$ y $H(x, 1) = f(x)$ para cualquier $x \in X$.*

Definición 2.1.4. *Sea X un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto, diremos que A es un* retracto de deformación *si existe una aplicación continua $r : X \longrightarrow A$ tal que $r|_A$ es la identidad y que sea homótopa a la identidad sobre X.*

Una propiedad de interés es de los retractos de deformación es la siguiente.

Proposición 2.1.5. *Sea $A \subset X$ un retracto de deformación, entonces los grupos de homotopía son isomorfos, es decir dado $a \in A$, entonces $\pi_1(X, a) \equiv \pi_1(A, a)$.*

Es decir tenemos que hay una similitud entre ambas topologías.

Debido a que el objetivo de este trabajo es el estudio de los homeomorfismos de la circunferencia $\mathbb{S}^1$, usaremos los levantamientos de estos. En concreto dada una aplicación $g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ continua, podemos considerar un levantamiento G de la aplicación $g \circ p$, obteniendo el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{S}^1 \arrow[r, "g"] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

[1]Un lazo en un espacio topológico es un camino en el que los extremos coinciden.

Por simplicidad y siguiendo la bibliografía empleada en lugar de decir que G es un levantamiento de $g \circ p$, diremos simplemente que G es un levantamiento de g (ver [1]).
Estos levantamientos siempre existen, ya que $\mathbb{R}$ es simplemente conexo, es decir que su grupo fundamental es el trivial y por tanto se tiene que para cualquier aplicación continua $g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$, se cumple la condición de (2.2).

$$\{0\} = (g \circ p)_*(\{0\}) \subset p_*(\{0\}) = \{0\}$$

Observación 2.1.6. Se puede ver la circunferencia $\mathbb{S}^1$ como el intervalo [0,1] con los extremos identificados donde el conjunto de clases de equivalencia tiene una biyección natural con el conjunto [0,1), tenemos que $g(x) \equiv G(x) \bmod 1$ y en concreto $p(x) = x \bmod 1$. A menudo utilizaremos estas representaciones por simplicidad. En este caso la topología de la circunferencia se puede ver como la obtenida a partir de la siguiente métrica:

$$d(x, y) = \text{mín}\{|x - y|, 1 - |x - y|\}$$

Donde x, y se ven como elementos de [0,1). Ver que se trata de una métrica consiste en un mero ejercicio de comprobación.

A partir de ahora por simplicidad, salvo que sea necesario precisar, denotaremos todas las distancias por d. Ahora continuaremos estudiando los levantamientos de aplicaciones continuas de la circunferencia, ya que poseen unas determinadas propiedades que serán relevantes en el trabajo, por lo tanto procedemos a reseñar alguna de ellas.

Observación 2.1.7. Sean $f, g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ dos aplicaciones continuas y sean F y G levantamientos de f y g respectivamente. Se tiene que $F \circ G$ es un levantamiento de $f \circ g$.

Demostración. Tenemos que

$$p \circ F \circ G = f \circ p \circ G = f \circ g \circ p.$$

Es decir tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "p"] & \mathbb{R} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "p"] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\
\mathbb{S}^1 \arrow[r, "g"'] & \mathbb{S}^1 \arrow[r, "f"'] & \mathbb{S}^1
\end{tikzcd}$$

□

Lema 2.1.8. *Sean $g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ una aplicación continua y G un levantamiento, entonces, existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $G(x + 1) = G(x) + k$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y además $G(x + n) = G(x) + nk$ para cualquier entero n.*

Demostración. Tenemos que

$$p \circ G(x) = g \circ p(x) = g \circ p(x + 1) = p \circ G(x + 1).$$

De modo que $G(x + 1) = G(x) + k(x)$ con $k(x) \in \mathbb{Z}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Luego podemos escribir $k(x) = G(x+1) - G(x)$, es decir como diferencia de dos funciones continuas, entonces tenemos que $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ es continua y por tanto es constante.
Para la segunda parte sea $n \in \mathbb{Z}$, se ve de forma inmediata a partir del primer resultado que $G(x + n) = G(x) + nk$. □

Aplicando un razonamiento similar se prueba el siguiente resultado.

Lema 2.1.9. *Sean F y F' dos levantamientos de una misma aplicación $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $F(x) = F'(x) + k$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.*

Desde el punto de vista de la topología algebraica se puede entender el lema 2.1.8 a partir del siguiente concepto.

Definición 2.1.10. *Sea $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ una aplicación continua. Se denomina* grado de la aplicación *f a grado(f)=$f_*(1)$, donde f_* es la aplicación inducida entre los grupos fundamentales $\pi_1(\mathbb{S}^1, b_0)$ con $b_0 \in \mathbb{S}^1$ y $\pi_1(\mathbb{S}^1, f(b_0))$, ambos isomorfos a $\mathbb{Z}$ y donde 1 representa la clase del lazo que da una vuelta a la circunferencia en sentido antihorario.*

La definición 2.1.10 nos dice que el grado de la aplicación se corresponde con la imagen de la clase del lazo que da una vuelta completa a la circunferencia, es decir, con el número de vueltas que da este lazo imagen. Si F es un levantamiento de una aplicación f, el número de vueltas lo medimos a partir de la diferencia $F(x+1) - F(x)$ que como se ha visto en el lema 2.1.8 no depende del punto escogido.
Una propiedad bastante interesante es la de continuidad uniforme, pese a ser un concepto bastante empleado, procedemos a realizar un breve recordatorio de su definición y algún resultado interesante sobre este tipo de funciones (ver [9]).

Definición 2.1.11. *Sea $g : (X, d_X) :\longrightarrow (Y, d_Y)$ una aplicación entre espacios métricos, decimos que g es* uniformemente continua *si dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tales que para cualquier par de puntos $a, b \in X$ tal que $d_X(a, b) < \delta$ se tiene que $d_Y(g(a), g(b)) < \varepsilon$.*

Teorema 2.1.12. *Sea $g : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ una aplicación continua entre espacios métricos. Si X es compacto entonces g es uniformemente continua.*

Observación 2.1.13. Como la circunferencia es un espacio compacto, es claro por el teorema anterior que toda aplicación continua sobre está, es uniformemente continua.

La siguiente proposición nos muestra que la continuidad uniforme se conserva en los levantamientos de aplicaciones de la circunferencia.

Proposición 2.1.14. *Sean $g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ una aplicación continua y G un levantamiento de g, entonces G es uniformemente continua.*

Demostración. Sabemos que $G|_{[-1,1]}$ es continua por serlo sobre toda la recta real. Por tanto aplicando el teorema 2.1.12, por ser $[-1, 1]$ compacto, $G|_{[-1,1]}$ es uniformememte continua. Luego sabemos que dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que para cualquier par de puntos $x, y \in [-1, 1]$ tales que $|x - y| < \delta$ entonces $|G(x) - G(y)| < \varepsilon$. Luego dado $\varepsilon > 0$, tenemos asociado un $\delta > 0$. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $|a - b| < \min\{\delta, 1\}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $a < b$. Tenemos que $b = [b] + \gamma_b$ donde $[b]$ es la parte entera de b y llamamos $\gamma_a = a - [b]$. Se cumple que $\gamma_a, \gamma_b \in [-1, 1]$ y $|\gamma_a - \gamma_b| < \delta$, por tanto $|G(\gamma_a) - G(\gamma_b)| < \varepsilon$. Por el lema 2.1.8 sabemos que existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $G(x + n) = G(x) + kn$ para cualquier x real y n entero. Por tanto

$$|G(\gamma_a) - G(\gamma_b)| = |G(a) - G(b)| < \varepsilon$$

Quedando probada la continuidad uniforme de G. □

Un caso particular que estudiaremos con detenimiento es aquel en el que $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ es un homeomorfismo y F un levantamiento suyo, de manera que F es una función creciente, en tal caso diremos que f *preserva la orientación.*

Proposición 2.1.15. *Si $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ es un homeomorfismo que preserva la orientación, se tiene que un levantamiento F cumple la siguiente propiedad: $F(x+1) = F(x)+1$ para todo número real x.*

Demostración. Por el lema 2.1.8 sabemos que $F(x+1) = F(x)+k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Falta ver que $k \equiv 1$. Como F es creciente no puede darse que $k < 0$. Como f es homeomorfismo y p es de recubrimiento y por tanto es homeomorfismo local, se tiene que F es localmente inyectiva. Si $k = 0$, se tendría que $F \equiv cte$ por ser creciente, en contra de esa inyectividad local.
Finalmente supongamos que $k > 1$, entonces por continuidad existe $y \in (x, x+1)$ tal que $F(y) = F(x)+1$. Luego $f \circ p(x) = p \circ F(x) = p(F(x)+1) = p \circ F(y) = f \circ p(y)$, en contra de que $f \circ p|_{[x,x+1)}$ es inyectiva para cualquier x real. □

De igual manera se prueba que si un homeomorfismo g no preserva la orientación se tiene que $grado(g) = -1$. Es decir los homeomorfismos convierten un lazo que da una vuelta a la circunferencia en otro lazo que también da una vuelta. En el caso de que la aplicación preserve la orientación, el sentido de giro en el lazo de salida y el imagen es el mismo, por el contrario si la aplicación no preserva la orientación se tiene que los sentidos de giro cambian. Luego para cualquier homemorfismo de la circunferencia h, se cumple que $grado(h) = \pm 1$ (ver [14]).

Observación 2.1.16. Notemos que la relación $F(x+1) = F(x)+1$ mostrada en la proposición 2.1.15 para levantamientos de homeomorfismos que preservan la orientación y más en general en relación con el lema 2.1.8 para los levantamientos de dos aplicaciones con el mismo grado provoca que

$$\max_{x\in[0,1]}\{|F(x) - G(x)\} = \max_{x\in\mathbb{R}}\{|F(x) - G(x)\}$$

Denotaremos por $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ al conjunto de homeomorfismos de la circunferencia que preservan la orientación y a los que no preservan la orientación por $Homeo_-(\mathbb{S}^1)$.
Al tener un conjunto de funciones continuas sobre un espacio métrico, entonces podemos definir una topología sobre nuestro conjunto.

Definición 2.1.17. *Sea (X, d_X) un espacio métrico compacto, definimos sobre el conjunto $C(X)$ de funciones continuas de X en sí mismo, la siguiente métrica*

$$d(f,g) = \max_{y\in X}\{d_X(f(y), g(y))\} \qquad f, g \in C(X)$$

La topología inducida la denominamos topología de convergencia uniforme *o* topología C^0*.*

Proposición 2.1.18. *La función dada en la definición 2.1.17 es efectivamente una métrica.*

Demostración. Un espacio métrico compacto es cerrado y acotado, por lo tanto se tiene que el máximo siempre es una cantidad finita y la función está bien definida.
Es obvio que $d(f,g) \geq 0$ para cualquier par de funciones $f, g \in C(X)$ y se da la igualdad $d(f,g) = 0$ si y solo si $f = g$.

También es claro que $d(f,g)=d(g,f)$.
Probemos la desigualdad triangular. Sean $f,g,h\in C(X)$. Dado $y\in X$, tenemos que por ser d_X distancia se cumple que

$$d_X(f(y),h(y))\leq d_X(f(y),g(y))+d_X(g(y),h(y))$$

Luego

$$\begin{aligned} d(f,h)=\max_{y\in X}\{d_X(f(y),h(y))\}\leq \max_{y\in X}\{d_X(f(y),g(y))+d_X(g(y),h(y))\}\leq \\ \leq \max_{y\in X}\{d_X(f(y),g(y))\}+\max_{y\in X}\{d_X(g(y),h(y))\}=d(f,g)+d(g,h)\end{aligned}$$

Por tanto queda probado el resultado. □

Observación 2.1.19. Claramente está definición se puede restringir al conjunto de homeomorfismos de un espacio métrico compacto como es la circunferencia con la topología heredada de $\mathbb{R}^2$. En este caso se obtiene que la distancia entre dos homeomorfismos de la circunferencia f,g es:

$$d(f,g)=\max_{x\in\mathbb{S}^1}\{\min\{|f(x)-g(x)|,1-|f(x)-g(x)|\}\}=\max_{y\in[0,1]}\{\min\{|F(y)-G(y)|,1-|F(y)-G(y)|\}\}$$

Donde F,G son dos levantamientos de f,g con $F(0),G(0)\in[0,1)$, de esta forma se evitan confusiones entre la circunferencia y el intervalo [0,1). Cuando se trate con distancias, los levantamientos se tomarán con el origen en el intervalo [0,1).
Aunque $\mathbb{R}$ no es compacto, a raíz de la observación 2.1.16, se puede aplicar está misma métrica para los levantamientos de los homeomorfismos de la circunferencia que preservan la orientación. Sean F,G dos levantamientos de f y g respectivamente, tenemos que la distancia de la métrica de convergencia uniforme es la siguiente:

$$d(F,G)=\max_{x\in[0,1]}\{|F(x)-G(x)|\}$$

Lo primero que observamos de la métrica entre homeomorfismos de la circunferecia es que está acotada superiormente por $1/2$, sin embargo, está distancia no está acotada para los levantamientos. Tenemos que si la distancia $d(f,g)<1/2$, entonces

$$d(f,g)=\max_{x\in\mathbb{S}^1}\{|F(x)-G(x)|\}\quad \text{o bien}\quad d(f,g)=\max_{x\in\mathbb{S}^1}\{1-|F(x)-G(x)|\}$$

De no ser así, por continuidad de las funciones $|F(x)-G(x)|$ y $1-|F(x)-G(x)|$, existiría un punto en la que ambas toman el valor $1/2$, en contra con que $d(f,g)<1/2$. Como podemos tomar levantamientos de una misma función, pero separados una constante entera cualquiera, entonces a raíz de esto, si $d(f,g)=\varepsilon<1/2$, podemos tomar dos levantamientos F,G de f y g respectivamente, tales que $d(F,G)=\varepsilon$.

Sigamos con más propiedades de los levantamientos.

Lema 2.1.20. *Sean $f:\mathbb{S}^1\longrightarrow\mathbb{S}^1$ un homeomorfismo y F un levantamiento, entonces F es un homeomorfismo.*

Demostración. Para probar este resultado consideramos dos casos:

1) Supongamos inicialmente que f preserva la orientación. La aplicación F es continua por ser un levantamiento. Además, por ser F creciente, $F[x,x+1) = [F(x), F(x)+1)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$, luego F es sobreyectiva.
Como p restringida a cualquier intervalo de la forma $[y, y+1)$ es una aplicación inyectiva y además se tiene que $p\circ F = f \circ p$ y f es homeomorfismo, entonces $p\circ F|_{[x,x+1)}$ es inyectiva. Por tanto, $F|_{[x,x+1)}$ es inyectiva por serlo la composición y de nuevo utilzando que $F[x, x+1) = [F(x), F(x)+1)$ se llega a que F es inyectiva sobre todo su dominio.
Probemos ahora que F es abierta, para ello tomamos $W \subset \mathbb{R}$ abierto, definimos $V_x = W \bigcap (x, x+1)$ con $x \in \mathbb{R}$, es obvio que $W = \bigcup_{x\in\mathbb{R}} V_x$ y basta probar que $F(V_x)$ es abierto.
Tenemos que $p|_{(y,y+1)}$ es homeomorfismo para cualquier $y \in \mathbb{R}$ y en concreto es abierta. Además se cumple que $F(x, x+1) = (F(x), F(x)+1)$, entonces $F(V_x) \subset (z, z+1)$ para algún $z \in \mathbb{R}$. Por tanto al ser f homeomorfismo y $p \circ F(V_x) = f \circ p(V_x)$, tenemos que $p(F(V_x))$ es abierto y como p es homeomorfismo en el intervalo $(z, z+1)$, entonces $F(V_x)$ es abierto como queríamos ver.

2) Supongamos ahora que f no preserva la orientación, eso quiere decir que F es decreciente. Tomemos la aplicación $t : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \equiv [0,1)$ con $t(x) = -x \bmod 1$, su levantamiento $T(\overline{x}) = -\overline{x}$ es decreciente. De manera que $f \circ t$ preserva la orientación, ya que $F \circ T$ es creciente. Por tanto $F \circ T$ es homeomorfismo y en consecuencia lo es F por serlo también T. □

Observación 2.1.21. Siguiendo la demostración del lema 2.1.20 se ve que verdaderamente se prueba que si $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ es una aplicación continua de grado ± 1, entonces es biyectiva o abierta si y solo si lo es también un levantamiento cualquiera suyo.

Proposición 2.1.22. *Sean f un homeomorfimo y F un levantamiento. Para cualquier entero $k \in \mathbb{Z}$ se cumple que F^k es un levantamiento de f^k, es decir:*

$$p \circ F^k = f^k \circ p \tag{2.3}$$

Demostración. Tenemos que

$$p \circ F^2 = (p \circ F) \circ F = (f \circ p) \circ F = f^2 \circ p.$$

Aplicando inducción queda probado para cualquier número natural. Para probarlo para los negativos usamos que f y F son homeomorfismos tal y como se vio en el lema 2.1.20. Se cumple que

$$f \circ f^{-1} \circ p = p = p \circ F \circ F^{-1} = f \circ p \circ F^{-1}$$

Luego $f^{-1} \circ p = p \circ F^{-1}$. Argumentando de igual manera que para el caso positivo, obtenemos el resultado deseado. De hecho tenemos que F^{-1} es un levantamiento de f^{-1}. □

Observación 2.1.23. Si f preserva la orientación, de la proposición 2.1.15 se obtiene que para cualquier entero k, se verifica que $F(x+k) = F(x)+k$ y por la proposición 2.1.22, además se tiene que $F^n(x+k) = F^n(x)+k$ para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{Z}$.

Procedamos a estudiar la dinámica de estos homeomorfismos, para ello definimos los siguientes conceptos debido a su relevancia en la teoría.

Definición 2.1.24. *Dados una aplicación $f : X \longrightarrow X$ y un punto $y \in X$, el conjunto $Orb_f^+(y) = \{f^n(y) : n \in \mathbb{N}\}$ se denomina* órbita positiva de y por f.
Si la aplicación es invertible se puede considerar el conjunto $\{f^k(x) : k \in \mathbb{Z}\}$ dando lugar a la órbita completa*, denotada por $Orb_f(y)$. Además en este caso llamaremos* órbita negativa *a la órbita positiva de y por f^{-1}, dicho conjunto lo denotaremos por $Orb_f^-(y)$.*

Definición 2.1.25. *Sea $f : X \longrightarrow X$. Se dice que $x \in \mathbb{S}^1$ es un* punto periódico *de f, si existe un número natural positivo n tal que $f^n(x) = x$. Al menor número natural positivo n que cumpla esa igualdad se le denomina* periodo de x por f.

Trabajar con un levantamiento F de un homeomorfismo de la circunferencia f puede resultar en ocasiones más sencillo que trabajar directamente con el propio homeomorfismo, en el siguiente lema se da una caracterización de los puntos periódicos de f en función de F.

Lema 2.1.26. *Sean $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ un homeomorfismo y $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ un levantamiento de f. Son equivalentes:*

1. *$x \in \mathbb{S}^1$ es un punto periódico por f con periodo q.*
2. *q es el mínimo entero positivo tal que para cualquier $\overline{x} \in p^{-1}(x)$, existe un entero r tal que $F^q(\overline{x}) = \overline{x} + r$.*

Demostración. Para ver que *1* $\Rightarrow$ *2*, basta tener en cuenta que si x es un punto periódico de f, entonces para algún q natural positivo se tiene que $f^q(x) = x$. Luego si $\overline{x} \in p^{-1}(x)$, como $f^q \circ p = p \circ F^q$, entonces

$$x = f^q(x) = f^q \circ p(\overline{x}) = p \circ F^q(\overline{x}).$$

Es decir, $F^q(\overline{x}) \in p^{-1}(x)$, por lo que $F^q(\overline{x}) = \overline{x} + r$ para algún r entero, ya que $p(x) = p(y)$ si y solo si $y = x + r$ con $r \in \mathbb{Z}$.

La implicación *2* $\Rightarrow$ *1* se deduce aplicando la proposición 2.1.22 con $f^q \circ p(\overline{x}) = p \circ F^q(\overline{x})$. Teniendo en cuenta la periodicidad de p obtenemos que

$$f^q(x) = f^q \circ p(\overline{x}) = p \circ F^q(\overline{x}) = p(\overline{x} + r) = x.$$

Además q es el mínimo para el que esto sucede, por tanto x tiene periodo q. □

2.2. Propiedades de la órbita

El objetivo del siguiente capítulo es el de clasificar los homeomorfismos de la circunferecia mediante un invariante, para ello previamente tendremos que recordar ciertos conceptos de topología general e introducir algunos nuevos (ver [9]). Los resultados relativos a la dinámica, se desarrollan en [1].
Pasamos a dar las definiciones de propiedades asociadas a conjuntos de un espacio topológico.

Definición 2.2.1. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que*

1. *$x \in A$ es un* punto aislado de A *si existe un entorno abierto W de x tal que $A \bigcap (W \setminus \{x\}) = \emptyset$.*

2. *$x \in A$ es un* punto de acumulación *si no es punto aislado.*

3. *A es un* conjunto denso en ninguna parte *si $Int(\overline{A}) = \emptyset$.*

4. *A es un* conjunto perfecto *si A es un subconjunto cerrado sin puntos aislados con la topología de subespacio.*

5. *$\partial A = \overline{X \backslash A} \bigcap \overline{A}$ es la frontera de A. También la podemos escribir como $\partial A = \overline{A} \backslash Int(A)$.*

Por lo general se suele definir un *conjunto de Cantor* como un conjunto cerrado, perfecto y denso en ninguna parte.

Definición 2.2.2. *Sea $f : X \longrightarrow X$ un aplicación, decimos que un subconjunto $A \subset X$ es* invariante por f *si $f(A) \subset A$.*

Lema 2.2.3. *Sea $f : X \longrightarrow X$ una aplicación continua. Si $A \subset X$ es invariante por f, entonces $\overline{A}$ también lo es.*

Demostración. Sea $y \in \overline{A}$, veamos que $f(y)$ también está en $\overline{A}$. Para ello tomamos un entorno U de $f(y)$, y por ser f continua, tenemos que $f^{-1}(U)$ es un entorno de y. Como y es un punto de la adherencia de A entonces $f^{-1}(U) \bigcap A \neq \emptyset$. Luego por la invarianza de A, se tiene que $U \bigcap A \neq \emptyset$. Por tanto $f(y)$ está en la adherencia de A. □

A continuación damos las deficiones de otras propiedades de espacios toplógicos. En todas las definiciones tomaremos X como un espacio topológico.

Definición 2.2.4. *Dado $x \in X$ decimos que una colección $\{V_i\}_{i \in I}$ de entornos de x es una* base de entornos *si para un abierto U cualquiera que contenga a x, existe un $V_i \subset U$.*

Definición 2.2.5. *Decimos que X cumple el* primer axioma de numerabilidad *si todo punto posee una base numerable de entornos.*
De igual manera diremos que X cumple el segundo axioma de numerabilidad *si X posee una base numerable de abiertos.*

Definición 2.2.6. *Sea X un espacio Hausdorff, decimos que X es es* localmente compacto *si para todo $y \in X$ existe un entorno de y compacto.*

Hay varias definiciones de la noción de espacio localmente compacto, pero en el caso que el espacio sea Hausdorff todas ellas son equivalentes (ver proposición VIII.2.3 de [3]).

Definición 2.2.7. *Decimos que X es un* espacio de Baire *si para cualquier familia numerable de abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$ densos en X se cumple que $\bigcap_{i \in I} U_i$ es denso en X.*

Enunciamos un teorema en relación al último concepto definido que nos será de utilidad más adelante, pero omitiremos su demostración por salirse de los objetivos de este trabajo (ver [9]).

Teorema 2.2.8. *[Teorema de categoría de Baire] Si X es un espacio T_2 y localmente compacto o un espacio métrico completo, entonces X es un espacio de Baire.*

Finalmente damos el concepto de transitividad para una aplicación.

Definición 2.2.9. *Se dice que una aplicación $f : X \longrightarrow X$ es* topológicamente transitiva *si existe un $x \in X$ tal que su órbita positiva es densa en X, es decir, $\overline{Orb_f^+(x)} = X$.*

En la teoría de grupos la acción de un grupo sobre un conjunto se dice que es transitiva si la órbita de todo elemento coincide con el conjunto. En la siguiente proposición se ve que esta propiedad de la transitividad topológica es análoga a la de grupos, pero reescrita en términos de entornos. Este resultado y el siguiente nos da condiciones más suaves para caracterizar si una función es topológicamente transitiva o no.

Proposición 2.2.10. *Sea $f : X \longrightarrow X$ una aplicación continua con X un espacio T_2, localmente compacto y cumpliendo el segundo axioma de numerabilidad. Si para cada par de abiertos no vacíos U, V de X se cumple que existe un número natural n tal que $f^n(U) \bigcap V \neq \emptyset$, entonces f es topológicamente transitiva.*

Demostración. Tomamos $\{V_i\}_{i\in I}$ una base numerable de la topología de X. Para todo $i \in I$ se cumple que dado un U abierto no vacío, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \bigcap V_i \neq \emptyset$. Por tanto existe $x \in U$ tal que $f^n(x) \in V_i$, entonces $x \in f^{-n}(V_i)$, es decir, $f^{-n}(V_i) \bigcap U \neq \emptyset$.
Por la continuidad de f se tiene que el conjunto $A_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(V_i)$ es abierto y además interseca a todos los abiertos de X distintos del vacío, luego para todo i se tiene que A_i es denso en X.
Consideramos el conjunto $Y = \bigcap_{i\in I} A_i$, intersección de conjuntos abiertos y densos, por el teorema de Baire, se tiene que Y es denso en X y por tanto no vacío.
Sea $y \in Y$, entonces para todo $i \in I$ existe un $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $y \in f^{-n_i}(V_i)$, es decir, tal que $f^{n_i}(y) \in V_i$. Por tanto, para todo V_i se cumple que $V_i \bigcap Orb_f^+(y) \neq \emptyset$. Como $\{V_i\}_{i\in I}$ es base, entonces todo abierto interseca a la órbita positiva y por tanto es densa, quedando probado que f es topológicamente transitiva.

□

Proposición 2.2.11. *Sea $f : X \longrightarrow X$ un homeomorfismo con X un espacio métrico, compacto y sin puntos aislados. Si existe $x \in X$ tal que $Orb_f(x)$ es densa en X, entonces existe un $y \in X$ tal que $Orb_f^+(y)$ es densa.*

Demostración. Por ser X un conjunto sin puntos aislados, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, el conjunto $B(x, \varepsilon)\backslash\{x\}$ es no vacío, donde $B(x, \varepsilon)$ representa la bola de centro x y radio ε. Tomamos $y \in B(x, \varepsilon)$ con $y \neq x$. Como $B(x, \varepsilon)$ es abierto podemos considerar un abierto U con $y \in U \subset B(x, \varepsilon)$, tal que $x \notin U$ por ser Hausdorff. Por tanto, como el conjunto $Orb_f(x)$ es denso, se tiene que $Orb_f(x) \bigcap U \neq \emptyset$, y como x no está en U, tenemos que $(Orb_f(x)\backslash\{x\}) \bigcap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$. Luego x es un punto de acumulación de su órbita.
Podemos tomar una sucesión de números de enteros $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $|n_k| \to \infty$ tal que $f^{n_k}(x) \to x$, en la cual hay necesariamente infinitos valores de n_k positivos o negativos.
En el caso en el que existan infinitos valores positivos de n_k, tomamos una subsucesión $\{n'_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $n'_k > 0$ monótona creciente. Por tanto, para cualquier $l \in \mathbb{Z}$ existe un $n'_l \in \{n'_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $n'_k + l > 0$ para todo $n'_k > n'_l$, asegurándonos que en la sucesión $\{n'_k + l\}_{k\in\mathbb{N}}$ solo nos quedamos con términos positivos. Tenemos que la sucesión $\{f^{n'_k+l}(x)\}_{k\in\mathbb{N}; n'_k > n'_l}$ converge a $f^l(x)$. De este modo se ve que cada elemento de la órbita completa es el límite de una subsucesión de términos de la órbita positiva, es decir, está en su adherencia. Luego $Orb_f(x) \subset \overline{Orb_f^+(x)}$ y quedaría probado que $\overline{Orb_f^+(x)} = X$.
Si no hay infinitos términos de la sucesión positivos, se tiene que razonando de igual manera que $\overline{Orb_f^-(x)} = X$. Tomamos dos abiertos U, V, veamos que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \bigcap V \neq \emptyset$ para poder aplicar la proposición 2.2.10 y concluir que f es topológicamente transitiva. Como la órbita

negativa de x es densa, existen enteros negativos i, j con $i < j$ tales que $f^i(x) \in U$, $f^j(x) \in V$, por tanto $f^{j-i}(U) \bigcap V \neq \emptyset$ como queríamos probar.

$\square$

En general vamos a trabajar con espacios métricos, una propiedad común a todos ellos es que cumplen el primer axioma de numerabilidad[2]. Por lo que en el resto de la sección vamos a suponer como mínimo que nuestros espacios cumplen este axioma. Procedemos a definir ahora los conjuntos que serán nuestros objetos de trabajo.

Definición 2.2.12. *Sea $f : X \longrightarrow X$ una aplicación continua. Decimos que $y \in X$ es un punto* ω-límite de x *si existe una sucesión estrictamente creciente de números naturales $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que la sucesión $(f^{a_n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y. Llamamos $\omega(x) = \omega_f(x)$ al conjunto de todos los puntos ω-límite de x.*
De igual manera, si además f es invertible, un elemento y se define como un punto α-límite de x *si existe una sucesión estrictamente creciente $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(f^{-b_n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y. Al conjuto de todos los puntos α-límite de x se le denota por $\alpha(x) = \alpha_f(x)$.*

Proposición 2.2.13. *Los conjuntos $\omega(x)$ y $\alpha(x)$ son cerrados.*

Demostración. Dado $y \in \omega(x)$ se tiene que $y \in \overline{Orb_f(f^j(x))} = \overline{\{f^{j+n}(x) : n \in \mathbb{N}\}}$ para cualquier $j \geq 0$ por definición de punto $\omega-$límite. Por tanto $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{i\geq n} f^i(x)}$.
Recíprocamente sea $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{i\geq n} f^i(x)}$. Podemos tomar una base numerable de entornos abiertos de y, $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, con la que podemos definir una segunda base más conveniente. Llamamos $U_i = \bigcap_{k\leq i} V_k$, obviamente cada U_i es un entorno abierto de y, por ser intersección finita de abiertos y además $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ forman una base numerable de entornos de y, ya que dado W entorno de y, existe V_i con $y \in V_i$ y $U_i \subset V_i \subset W$.
Como para cualquier n, se tiene que y es un punto de adherencia de $\bigcup_{k\geq n} f^k(x)$, entonces cada entorno U_i interseca a dicho conjunto. Definimos a_0 como el mínimo k tal que $\left(\bigcup_{l=0}^{k} f^l(x)\right) \bigcap U_0 \neq \emptyset$, y para $n > 0$, a_n es el mínimo k tal que $\left(\bigcup_{l\geq a_{n-1}+1}^{k} f^l(x)\right) \bigcap U_n \neq \emptyset$. Esto nos genera una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ estrictamente creciente y se cumple que $f^{a_n}(x) \longrightarrow y$ cuando n tiende a infinito.
Para ver la última afirmación tomamos W un entorno de y, entonces existe un $U_i \subset W$, por tanto $f^{a_i}(x) \in W$. Además como $U_{i+1} \subset U_i$, se tiene que $f^{a_{i+1}}(x) \in W$ y repitiendo este argumento se tiene que $f^{a_n}(x) \in W$ para todo $n \geq i$. Por tanto aplicando la definición de límite se tiene que $f^{a_n}(x) \longrightarrow y$, luego $y \in \omega(x)$.
Por tanto $\omega(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{i\geq n} f^i(x)}$ que es cerrado por ser intersección de cerrados. De igual manera se prueba que $\alpha(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{i\geq n} f^{-i}(x)}$. $\square$

Proposición 2.2.14. *Sea $f : X \longrightarrow X$ un homeomorfismo. Entonces para cualquier punto $x \in X$, se tiene $f(\omega(x)) = \omega(x)$ y $f(\alpha(x)) = \alpha(x)$.*

Demostración. Sea $x \in X$. Veamos en primer lugar que ambos conjuntos son invariantes por f. Dado $y \in \omega(x)$, entonces sabemos que existe una sucesión estrictamente creciente de naturales $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $f^{a_n}(x) \longrightarrow y$. Si tomamos la sucesión $\{a_n + 1\}_{n\in\mathbb{N}}$ por la continuidad de f, se cumple que $f^{a_n+1}(x) \longrightarrow f(y)$, luego $f(y) \in \omega(x)$.

[2]En un espacio métrico X, para cualquier punto $x \in X$, el conjunto $\left\{B\left(x, \frac{1}{n+1}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de entornos abiertos numerable.

Argumentando de igual manera, dado $y \in \alpha(x)$, se cumple que existe una sucesion estrictamente creciente $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $f^{-b_n}(x) \longrightarrow y$. Tomamos la sucesión $\{b_n - 1\}_{n\in\mathbb{N}}$ (existe la posibilidad de que haya que quitar $b_0 - 1$ si es negativo) esta cumple que $f^{-b_n+1}(x) \longrightarrow f(y)$.
Para ver que no solo son invariantes por f sino que además las imagenes coinciden con ellos mismos, basta tener en cuenta que el conjunto de los puntos α-límite de x por f^{-1} es $\omega(x)$ y de igual manera, $\alpha(x)$ es el conjunto de los puntos ω-límite de x por f^{-1}. Por tanto $\alpha(x)$ y $\omega(x)$ por lo que acabamos de probar son invariantes por f^{-1}. A partir de esto y de que f es sobreyectiva por ser un homeomorfismo se obtienen las siguientes relaciones:

$$\bullet f(\omega(x)) \subset \omega(x) \quad \bullet\ f^{-1}(\omega(x)) \subset \omega(x) \quad \bullet\ f \circ f^{-1}(\omega(x)) = \omega(x)$$

Juntándolas, se tiene que:

$$\omega(x) = f \circ f^{-1}(\omega(x)) \subset f(\omega(x)) \subset \omega(x)$$

Luego $f(\omega(x)) = \omega(x)$, cambiando $\omega(x)$ por $\alpha(x)$ en el anterior razonamiento se obtiene el resultado equivalente. $\square$

A partir del levantamiento se puede definir de manera natural un orden entre en un conjunto de puntos de la circunferencia a partir del orden de $\mathbb{R}$. Sean x, y dos puntos de la circunferencia y $\overline{x}$, $\overline{y}$ sus respectivos puntos de $p^{-1}(x)$ y $p^{-1}(y)$ que están en [0,1), decimos que $x < y$ respecto del 0 si y solo si $\overline{x} < \overline{y}$. El orden lo esquematizamos en la siguiente figura:

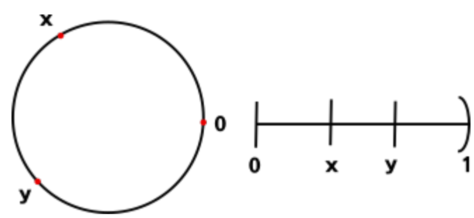

Figura 2.2: Ejemplo de dos puntos de la circunferencia, x, y con $x < y$.

En lugar del intervalo [0,1), se puede tomar el $[\alpha, \alpha + 1)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ y definir de manera análoga el orden respecto de α. Por simplicidad y a menos que se especifique lo contrario, se tomará el orden respecto del 0.
Además en lo que prosigue, el conjunto $[a, b]$ hará referencia al arco de circunferencia cerrado de extremos a, b recorrido en sentido antihorario, de manera análoga denotaremos los arcos abiertos o semiabiertos por un extremo.

A partir de este orden se puede definir un orden entre aplicaciones. Dados dos homeomorfismos f, g de $\mathbb{S}^1$, diremos que $f \geq g$ si $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^1$.

Capítulo 3

Número de Rotación

En este capítulo seguiremos principalmente [1] y [7], aunque gran parte de los resultados también se pueden encontrar en [5], [6] y [13].

3.1. Definición y propiedades del número de rotación

Definamos ahora un parámetro que clasifica los distintos homeomorfismos.

Definición 3.1.1. *Sean $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ un homeomorfismo que preserva la orientación y F un levantamiento de f. Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos*

$$\rho(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n}. \tag{3.1}$$

Se denomina número de rotacion *de f a $\rho(f) = p(\rho(F))$.*

Nuestro primer objetivo es ver que la definición tiene sentido.

Teorema 3.1.2. *Sea f un homeomorfismo que preserva la orientación, entonces $\rho(f)$ existe. Además $\rho(f)$ no depende ni del punto elegido ni del levantamiento.*

Demostración. Probemos que el límite siempre existe, para ello separemos la demostración en dos partes:

1. Supongamos que f tiene puntos periódicos. Por el lema 2.1.26, esto es equivalente a que haya un $x \in \mathbb{R}$ tal que existan unos $r, q \in \mathbb{N}$ de forma que $F^q(x) = x + r$. Entonces, teniendo en cuenta la observación 2.1.23,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^{nq}(x) - x}{nq} = \lim_{n\to\infty} \frac{nr + x - x}{nq} = r/q \tag{3.2}$$

Esto solo prueba la existencia del límite para una subsucesión. Dado $t \in \mathbb{N}$ cualquiera, por la división euclídea, existen enteros $n(t)$ y $k(t)$ con $0 \leq k(t) < q$, tales que $t = n(t)q + k(t)$, luego:

$$\rho(F) = \lim_{t\to\infty} \frac{F^{n(t)q+k(t)}(x) - x}{n(t)q + k(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{F^{k(t)}(x) + n(t)r - x}{n(t)q + k(t)} = r/q$$

ya que $\{F^k(x) - x : 0 \leq k \leq q-1\}$ está acotado por ser finito.

2. Supongamos que f no tiene puntos periódicos, entonces para cada par de números $q, r \in \mathbb{N}$ se cumple $F^q(x) < x + r$ o bien $F^q(x) > x + r$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Esto se debe a que si se diese un cambio en la desigualdad, por continuidad, en un punto se produciría la igualdad y por tanto aplicando el lema 2.1.26 habría un punto periódico.
Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $r_n \in \mathbb{N}$ tal que $r_n - 1 < F^n(x) - x < r_n$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Dado $m \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$F^{nm}(x) - x = \sum_{i=0}^{m-1} \left(F^{(i+1)n}(x) - F^{ni}(x) \right)$$

entonces

$$m(r_n - 1) < F^{nm}(x) - x < mr_n \tag{3.3}$$

ya que cada término del sumatorio se puede ver como $F^n(y) - y$ con $y = F^{ni}(x)$. Como

$$m(r_n - 1) < mF^n(x) - mx < mr_n.$$

Restando esta expresión a la ecuación (3.3), se llega a las siguientes desigualdades

$$-m < (F^{nm}(x) - x) - m(F^n(x) - x) < m.$$

Luego, juntando todo en un valor absoluto, tenemos

$$|(F^{nm}(x) - x) - m(F^n(x) - x)| < m.$$

En la ecuación (3.3) los papeles de n y m se pueden intercambiar, por tanto razonando de igual manera se tiene que

$$|(F^{nm}(x) - x) - n(F^m(x) - x)| < n.$$

Dividiendo ambas expresiones entre nm, y aplicando la desigualdad triangular, finalmente se obtiene que:

$$\left| \frac{F^n(x) - x}{n} - \frac{F^m(x) - x}{m} \right| < \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

Luego $\{(F^n(x) - x)/n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y por tanto es convergente.

Veamos ahora que la definición no depende ni del levantamiento ni del punto inicial.
Sean F y F' dos levantamientos de $f \circ p$ entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $F'(x) = F(x) + k$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Además $F(x + k) = F(x) + k$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por tanto:

$$\rho(F') = \lim_{n \to \infty} \frac{F'^n(x) - x}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{F^n(x) - x + nk}{n} = \rho(F) + k.$$

Pero el número de rotación de f es $\rho(f) = p(\rho(F))$, entonces $p(\rho(F)) = p(\rho(F) + k) = p(\rho(F'))$.
Además si $x, y \in \mathbb{R}$, con $|x - y| < 1$, se tiene que $|F(x) - F(y)| < 1$, ya que $F(x + 1) = F(x) + 1$ por la proposición 2.1.15, luego:

$$|(F^n(x) - x) - (F^n(y) - y)| \leq |F^n(x) - F^n(y)| + |x - y| \leq 2$$

y por lo tanto

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|(F^n(x) - x) - (F^n(y) - y)|}{n} = 0$$

probando que no depende del punto en este caso. Si $|x-y| \geq 1$. A partir de la observación 2.1.23, como $F(x+k) = F(x)+k$ entonces se puede tomar un z tal que $z = x+k$ con $|z-y| < 1$, aplicando el caso anterior se ve que el número de rotación es el mismo para y y para z. Además, por la observación 2.1.23, se ve que también es el mismo para z y x, ya que

$$F^n(z) - z = F^n(x+k) - (x+k) = F^n(x) + k - (x+k) = F^n(x) - x$$

por lo que queda probado el resultado deseado.

□

Si nos salimos de la condiciones del teorema de existencia del número de rotación tenemos que podría darse que existan puntos en los que el número de rotación no exista.

Ejemplo 3.1.3. Tomamos $g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$, dada por $g(x) = -2x \bmod 1$. Tenemos que $G(\overline{x}) = -2\overline{x}$ es un levantamiento de g. Si $\overline{x} \neq 0$ vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G^n(\overline{x}) - \overline{x}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n\overline{x} - \overline{x}}{n}$$

y este límite no existe. En cambio si $\overline{x} = 0$, dicho limíte existe y toma el valor 0.

Detengámonos a entender el significado del número de rotación. La definición de número de rotación determinada por ecuación (3.1) la podemos escribir de la siguiente manera:

$$\rho(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \left(F^{i+1}(x) - F^i(x)\right)}{n} \tag{3.4}$$

Si en la ecuación (3.4) llamamos $\Delta x^i = F^{i+1}(x) - F^i(x)$, es decir, el desplazamiento entre la iteración i y la $i+1$, nos queda que el número de rotación es:

$$\rho(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x^i}{n}.$$

Luego, cada término de la sucesión nos da un promedio del desplazamiento en la n primeras iteraciones de nuestro mapa. Al pasar al límite se tiene que el número de rotación es un promedio del desplazamiento entre dos iteraciones consecutivas en la órbita de un punto. Por el teorema 3.1.2 tenemos que el número de rotación no depende del punto. Por tanto lo que nos da es el desplazamiento promedio entre un punto y su imagen por el homeomorfismo.

En principio si se componen dos aplicaciones, lo natural es pensar que como la imagen por la composición de dos puntos es el resultado de la suma de dos desplazamientos se esperaría que al promediar el número de rotación de la composición sea la suma de los números de rotación de cada una de las funciones, en general esto no se cumple, pero existen condiciones que garantizan que se de esta igualdad (ver proposición 2.21 de [12]).

Proposición 3.1.4. *Sean $f, g \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ y F, G levantamientos de f y g respectivamente. Si $F \circ G = G \circ F$, entonces $\rho(F \circ G) = \rho(F) + \rho(G)$.*

Demostración. Calculemos a partir de la definición $\rho(G \circ F)$. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n > 0$, como F y G conmutan respecto de la composición se tiene la siguiente igualdad.

$$\frac{(G \circ F)^{\circ n}(0)}{n} = \frac{G^n \circ F^n(0)}{n} = \frac{G^n \circ F^n(0) - F^n(0)}{n} + \frac{F^n(0)}{n}$$

donde el segundo término claramente converge a $\rho(F)$. Falta ver que el primero converge a $\rho(G)$. Llamemos $y = F^n(0)$, sea $[y]$ su parte entera y $\gamma = y - [y]$, como $G^n(x+k) = G^n(x) + k$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z}$, se tiene que $G^n(y) - y = G^n(\gamma) - \gamma$. Como G es creciente $G(0) \leq G(\gamma) \leq G(1)$. Por tanto $G(0) - 1 \leq G(\gamma) - \gamma \leq G(1) + 1$. Luego podemos acotar inferior y superiormente la primera expresión de la siguiente manera

$$\frac{G^n(0) - 1}{n} \leq \frac{G^n(y) - y}{n} = \frac{G^n \circ F^n(0) - F^n(0)}{n} \leq \frac{G^n(1) + 1}{n}$$

Como ambas cotas convergen a $\rho(G)$ cuando n tiende a infinito, tenemos que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{G^n \circ F^n(0) - F^n(0)}{n} = \rho(G)$$

Añadiendo el término antes calculado se tiene que el resultado queda probado. □

Corolario 3.1.5. *Dados un homeomorfismo f, un levantamiento F y m un entero cualquiera, se cumple que $\rho(F^m) = m\rho(F)$.*

Demostración. Basta aplicar inducción y tener en cuenta que F conmuta consigo mismo y con su inversa. □

Este corolario nos dice que la m-ésima composición se desplaza m veces más rápida que la original, tal y como era de esperar. Prosigamos estudiando este concepto del desplazamiento promedio.

Ejemplo 3.1.6. Vamos a considerar la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccc} r_\alpha : & \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ & (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t)) & \longmapsto & (\cos(2\pi(t+\alpha)), \operatorname{sen}(2\pi(t+\alpha))) \end{array}$$

Un levantamiento sería $R_\alpha(x) = x + \alpha$. Ambas aplicaciones reciben el nombre de rotación rígida, ya que todos los puntos se desplazan de igual manera. Aplicando la definición de número de rotación, se llega a que :

$$\rho(R_\alpha) = \lim_{n \to \infty} \frac{R_\alpha^n(x) - x}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{x + n\alpha - x}{n} = \alpha.$$

En la figura 3.1, se muestra un diagrama de la aplicación.

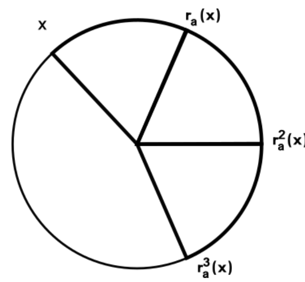

Figura 3.1: Representación de una rotación rígida de la circunferencia, en ella se ve como un punto es trasladado un ángulo a cada vez que se le aplica la rotación.

Anteriormente se ha dicho que no es cierto que el número de rotación de la composición no sea la suma de los números de rotación, en el siguiente ejemplo se muestra esta situación.

Ejemplo 3.1.7. Tomamos $g(x) = x^2$ con $x \in [0, 1)$, tenemos $g(0) = 0$ y podemos considerar un levantamiento G con $G(0) = 0$. Se ve claramente que al aplicar la definición de número de rotación nos queda que:

$$\rho(G) = \lim_{n\to\infty} \frac{G^n(0)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{n} = 0$$

También podemos considerar la rotación rígida $r_{1/4}$ cuyo número de rotación es $1/4$ como se vio en el ejemplo 3.1.6. Al componer se tiene que $r_{1/4} \circ g(x) = (x^2 + 1/4) \bmod 1$. Se cumple que $r_{1/4} \circ g(1/2) = 1/2$ y argumentando de manera similar al caso de g se prueba que $\rho(r_{1/4} \circ g) = 0$. Luego $\rho(r_{1/4} \circ g) \neq \rho(g) + \rho(r_{1/4}) = 1/4$.

El número de rotación tiene una propiedad interesante que es la invarianza por conjugación topológica. Antes de enunciar y demostrar dicha propiedad nos hace falta introducir este concepto.

Definición 3.1.8. *Sean $f : X \longrightarrow X$ y $g : Y \longrightarrow Y$ dos aplicaciones continuas. Decimos que f es* semiconjugada topológica *de g si existe una aplicación $h : Y \longrightarrow X$ continua y sobreyectiva tal que $f \circ h = h \circ g$. Si además h es homeomorfismo diremos que f es* conjugada topológica *de g.*

Un ejemplo muy claro de dos aplicaciones que son semiconjugadas topológicas son un homeomorfismo de la circunferencia y un levantamiento suyo donde la aplicación que hace la semiconjugación es la aplicación recubridora, ver definición 2.1.2.

Proposición 3.1.9. *Sean $f, h \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$, entonces $\rho(f) = \rho(h^{-1} \circ f \circ h)$. Es decir el número de rotación es invariante por conjugación si el homeomorfismo que realiza la conjugación preserva la orientación.*

Demostración. Consideremos F y H dos levantamientos de f y h respectivamente. Tenemos que para cualquier $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{(H^{-1} \circ F \circ H(x))^{\circ n} - x}{n} = \frac{H^{-1} \circ F^n \circ H(x) - x}{n} =$$
$$= \frac{H^{-1} \circ F^n \circ H(x) - F^n \circ H(x)}{n} + \frac{F^n \circ H(x) - H(x)}{n} + \frac{H(x) - x}{n}.$$

Como H y H^{-1} son levantamientos de homeomorfismos de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{S}^1$ que preservan la orientación, por la proposición 2.1.15 tenemos que las funciones $H(y)-y$ y $H^{-1}(y)-y$ tienen una periodicidad de longitud 1 como funciones reales, es decir, $H(y+1)-y+1=H(y)-y$ y lo mismo con H^{-1}, por tanto se trata de un par de funciones acotadas. Luego

$$\rho(H^{-1}\circ F\circ H)=\lim_{n\to\infty}\frac{F^n\circ H(x)-H(x)}{n}=\rho(F)$$

ya que el número de rotación no depende del punto escogido tal y como se vio en el teorema 3.1.2. □

Ejemplo 3.1.10. La proposición anterior es falsa si el homeomorfismo h no preserva la orientación. Si tomamos $f(x)=(x+1/4)$ mod 1 y $h(x)=-x$ mod 1, tenemos que $g(x)=h^{-1}\circ f\circ h(x)=(x-1/4)$ mod 1$=(x+3/4)$ mod 1.
Es obvio que se cumple que $\rho(f)=1/4$ y $\rho(g)=3/4$.

Cuando en secciones posteriores estudiemos la dinámica de un homeomorfismo en función de número de rotación, la siguiente propiedad nos será de intéres.

Proposición 3.1.11. *La aplicación $\rho: Homeo_+(\mathbb{S}^1)\longrightarrow\mathbb{S}^1$ que asigna a cada aplicación su número de rotación es continua con la topología C^0.*

Previa a la demostración usaremos el siguiente lema.

Lema 3.1.12. *Dados f un homeomorfismo que preserva la orientación y $\delta>0$, existe $\mu>0$ tal que para cualquier $g\in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ con $d(f,g)<\mu$, se tiene que $d(f^n,g^n)<\delta$.*

Demostración. Vamos a suponer que $\delta<1/2$, ya que si $\delta=1/2$ el resultado es trivial. Para $n=1$: Basta tomar $\mu=\delta$

Inducción sobre n: Supongamos cierto el enunciado para $n-1$. Sea F un levantamiento de f con $F(0)\in[0,1)$, tenemos que por ser F uniformemente continua (por la proposición 2.1.14) existe un $\gamma>0$ tal que dados $x,y\in\mathbb{R}$ con $0<y-x<\gamma$ entonces $F(y)-F(x)<\delta/2$. No es necesario el uso de valores absolutos, ya que F es estrictamente creciente. Por hipótesis de inducción, existe un $\beta>0$ tal que si $d(f,g)<\beta$, entonces $d(f^{n-1},g^{n-1})<\gamma$.
Llamamos $\mu=\min\{\beta,\gamma,\delta/2\}$. Sean $g\in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ con $d(f,g)<\mu$ y G el levantamiento de g con $G(0)\in[0,1)$. Debemos de calcular

$$\max_{x\in[0,1]}\{\min\{|F(F^{n-1}(x))-G(G^{n-1}(x))|,1-|F(F^{n-1}(x))-G(G^{n-1}(x))|\}\}$$

A raíz de la observación 2.1.19, podemos suponer que por hipótesis de inducción que $|F^{n-1}(x)-G^{n-1}(x)|<\gamma$, el caso $1-|F^{n-1}(x)-G^{n-1}(x)|<\gamma$ es análogo. Podemos escribir $z=G^{n-1}(x)$ e $y=z-[z]$, luego $F(z)=F(y)+[z]$ y de igual manera con G, además $F^{n-1}(x)=G^{n-1}(x)+\varepsilon$ con $|\varepsilon|<\gamma$. Por tanto tenemos que $F(F^{n-1}(x))-G(G^{n-1}(x))=F(y+\varepsilon)-G(y)$ para algún $y\in[0,1]$, $\varepsilon\in(-\gamma,\gamma)$. Teniendo en cuenta esto, vemos que se cumple que

$$\max_{x\in[0,1]}\{|F(F^{n-1}(x))-G(G^{n-1}(x))|\}\leq\max_{y\in[0,1],|\varepsilon|\leq\gamma}\{|F(y+\varepsilon)-G(y)|\}$$

Existen cuatro opciones:

Caso 1: $F(y+\varepsilon) - G(y) \geq 0$ con $0 \leq \varepsilon \leq \gamma$. Sabemos que por la continuidad uniforme de F se cumple que $F(y+\varepsilon) < F(y) + \delta/2$. Por tanto

$$0 \leq F(y+\varepsilon) - G(y) < F(y) - G(y) + \delta/2 < \mu + \delta/2 \leq \delta$$

ya que $d(f,g) < \mu$.

Caso 2: $G(y) - F(y+\varepsilon) \geq 0$ con $0 \leq \varepsilon \leq \gamma$. En este caso como F es creciente

$$\mu > G(y) - F(y) \geq G(y) - F(y+\varepsilon) \geq G(y) - F(y) - \delta/2 > -\mu - \delta/2 \geq -\delta$$

Los otros dos casos con $\varepsilon \leq 0$ se prueban de manera análoga a los dos anteriores. Luego para todo $y \in \mathbb{R}$, se cumple que $|F(y+\varepsilon) - G(y)| < \delta$ con $\varepsilon \in (-\gamma, \gamma)$. En todos los casos se concluye que $|F^n(x) - G^n(x)| < \delta < 1/2$ para cualquier $x \in [0,1]$ y por tanto $1 - |F^n(x) - G^n(x)| > 1/2$, luego $d(f^n, g^n) < \delta$, de igual manera si se supone que $1 - |F^{n-1}(x) - G^{n-1}(x)| < \gamma$, se prueba que $1 - |F^n(x) - G^n(x)| < \delta$. □

Observación 3.1.13. Siguiendo la notación del lema anterior, hemos visto que si $d(F,G) = d(f,g) < \mu < 1/2$ y $d/f^n, g^n) < \delta < 1/2$, entonces $d(F^n, G^n) = d(f^n, g^n)$.

Demostración Proposición 3.1.11. Sea $U \subset \mathbb{S}^1$ un abierto, podemos verlo como un subconjunto de $[0,1)$, veamos que su contraimagen por ρ es abierto. Tomamos $f \in \rho^{-1}(U)$, por ser U abierto existen racionales $r/q, r'/q'$ tales que $r'/q' < \rho(f) < r/q$ tomando representantes en el intervalo [0,1). En $\mathbb{S}^1$, los entornos del cero son de la forma $(\mu, 1] \bigcup [0, \varepsilon)$, por tanto si $\rho(f) = 0$, habría que tomar $0 < r/q$ y $r'/q' < 1$, viéndolos como números racionales no como elementos de $\mathbb{S}^1$. La demostración en ambos casos es la misma, asi que supongamos sin pérdida de generalidad que $\rho(f) \neq 0$.
Podemos tomar un levantamiento F de f que además cumpla que $r - q < F^q(x) - x < r$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ya que existe un levantaminento que lo cumple para algún punto. Si existiese $y \in \mathbb{R}$ en el que se diese la igualdad en uno de los extremos, se tendría que y es un punto periódico y el número de rotación sería $\rho(f) = r/q$.
Además si se diese que para algún $y \in \mathbb{R}$, $F^q(y) - y = qr'/q'$, argumentando de manera similar a la anterior, se cumpliría que $\rho(f) = r'/q'$. Por tanto se tiene que cumplir que uno de los dos siguientes casos:

$$\frac{r'}{q'}q < F^q(x) - x < r \qquad r - q < F^q(x) - x < \frac{r'}{q'}q$$

Por tener que $r'/q' < \rho(f) < r/q$ solo puede darse el primero. Por tanto al tener las desigualdades estrictas, se cumple lo siguiente

$$\inf_{x\in\mathbb{R}}\{r - F^q(x) + x\} = \min_{x\in[0,1]}\{r - F^q(x) + x\} = \varepsilon_1 \geq 0$$
$$\inf_{x\in\mathbb{R}}\{F^q(x) - x - r'q/q'\} = \min_{x\in[0,1]}\{F^q(x) - x - r'q/q'\} = \varepsilon_2 \geq 0$$

Llamamos $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, por el lema anterior existe un $\mu > 0$ tal que para todo $g \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ con $d(f,g) < \mu$, entonces $d(f^q, g^q) < \varepsilon/2$. Podemos tomar un levantamiento G de g, con $d(F,G) = d(f,g)$, es decir, tomamos el levantamiento de g más próximo a F. Entonces, por la definición de distancia sabemos que $|F(x) - G(x)| < \mu$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$, y de igual manera por ser G^q el

levantamiento de g^q más próximo a F^q, por la observación 3.1.13, se tiene que $|F^q(x)-G^q(x)| < \varepsilon/2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$r'q/q' + \varepsilon \leq F^q(x) - x \leq r - \varepsilon$$
$$-\varepsilon/2 < G^q(x) - F^q(x) < \varepsilon/2$$

Sumando ambas expresiones se tiene que $r'q/q + \varepsilon/2 < G^q(x) - x < r - \varepsilon/2$ para cualquier x real. Si ahora calculamos el número de rotación de G, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{r'}{q'} &< \lim_{n\to\infty}\left(\frac{r'}{q'}q + \varepsilon/2\right) n \cdot \frac{1}{nq} \leq \rho(G) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} G^{(i+1)q}(x) - G^{iq}(x)}{nq} \leq \\ &\leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{q}q - \varepsilon/2\right) n \cdot \frac{1}{nq} = (r - \varepsilon/2)\frac{1}{q} < r/q.\end{aligned}$$

Luego $\rho(g) \equiv \rho(G)$ cumple que $r'/q' < \rho(g) < r/q$. Es decir $B(f, \mu) \subset \rho^{-1}(U)$ y por tanto es abierto. □

Para concluir esta sección añadimos un pequeño lema de relativo al orden de las aplicaciones que nos da una idea de monotonía del número de rotación.

Lema 3.1.14. *Sean $f, g \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ tales que $f \leq g$, entonces $\rho(f) \leq \rho(g)$.*

Demostración. Tomamos dos levantamientos F, G de f y g respectivamente tales que $F(0), G(0) \in [0,1]$. Entonces como $f \leq g$, se cumple que $F(0) < G(0)$ y

$$0 \leq F^n(0) = F^{n-1}(F(0)) \leq G^{n-1}(F(0)) \leq G^n(0) \leq n$$

Por tanto queda claro que $0 \leq \rho(F) \leq \rho(G) \leq 1$, luego al aplicar p nos queda que $\rho(f) \leq \rho(g)$. □

3.2. Homeomorfismos de $\mathbb{S}^1$ con número de rotación racional

Procedamos a estudiar la dinámica de un homeomorfismo en función de su número de rotación, por abuso de notación tomaremos $\rho(f) \in [0,1)$, ver observación 2.1.6.

Teorema 3.2.1. *Sea f un homeomorfismo que preserva la orientación, entonces su número de rotación es racional si y solo si tiene un punto periódico. Además todos los puntos periódicos tienen el mismo periodo, es decir, el cardinal de su órbita es el mismo.*

Demostración. En el teorema 3.1.2 se probó que si f tiene puntos periódicos entonces su número de rotación es racional, ver ecuación (3.2). Probemos el recíproco, sea F un levantamiento de f y supongamos que $\rho(F) = r/q \in \mathbb{Q}$. Por reducción al absurdo, supongamos también que f no tiene puntos periódicos. De nuevo como en la prueba del teorema 3.1.2, se tendrá que o bien $F^q(x) < x+r$ o bien $F^q(x) > x + r$ para todo x. Supongamos que se da la primera situación, la condición cíclica $F^n(x + k) = F^n(x) + k$ mostrada en la observación 2.1.23 , implica que:

$$\inf_{y\in\mathbb{R}}\{y + r - F^q(y)\} = \min_{y\in[0,1]}\{y + r - F^q(y)\} = \varepsilon > 0$$

es decir, existe $x \in [0,1]$ tal que $F^q(x) - x = r - \varepsilon$. Por tanto para cualquier número natural k se cumple que:

$$\frac{r-\varepsilon}{q} = \frac{k(r-\varepsilon)}{kq} \geq \frac{\sum_{i=0}^{k-1}\left(F^{(i+1)q}(x) - F^{iq}(x)\right)}{kq} = \frac{F^{qk}(x) - x}{kq}$$

En contra de que $\rho(F) = r/q$, la demostración para la desigualdad contraria es idéntica, pero tomando el supremo en lugar del ínfimo.

Probemos ahora que todas la órbitas tienen el mismo cardinal. Supongamos que $\rho(F) = r/q$ con $mcd(r,q) = 1$ y consideremos F un levantamiento de f. Veamos que si x es periódico, entonces su órbita tiene cardinal q o lo que es lo mismo que el periodo de x es q.
Sea q' el periodo de x por f y $\overline{x} \in p^{-1}(x)$ con $F^{q'}(\overline{x}) = \overline{x} + r'$, entonces se tiene que aplicando la definición de número de rotación que $\rho(F) = r'/q' = r/q$. Por tanto se ha de cumplir que $r' = dr$ y $q' = dq$ para algún d.
Veamos ahora que $F^q(\overline{x}) = \overline{x} + r$, si esto fuese cierto, entonces debido al lema 2.1.26 que nos da la relación entre un punto periódico y un levantamiento de la función se tendría que el periodo de x es q y por tanto $q = q'$ y $r = r'$. Supongamos que $F^q(\overline{x}) < \overline{x} + r$, la otra desigualdad se probaría de igual manera. Por tanto:

$$F^{q'}(\overline{x}) = \overline{x} + r' = \overline{x} + dr > F^{qd}(\overline{x}) = F^{q'}(\overline{x})$$

Llegando a una contradicción, luego en conclusión $r' = r$ y $q = q'$. □

Observación 3.2.2. En la demostración del teorema 3.2.1 se ha probado un resultado más fuerte que el del enunciado, se ha visto que si $\rho(F) = r/q$ con $mcd(r,q) = 1$, entonces el cardinal de las órbitas periódicas es q.

Corolario 3.2.3. *Si f es un homeomorfismo que preserva la orientación, se tiene que f tiene un punto fijo si y solo si su número de rotación es 0.*

Demostración. Para probar este resultado basta aplicar la definición de número de rotación en el punto fijo para una implicación. La otra implicación se deduce que si $\rho(f) = 0$, entonces para cualquier levantamiento F se tiene que $\rho(F) = r/1$ con $r \in \mathbb{Z}$. Luego por la observación 3.2.2 tenemos que el cardinal de todas las órbitas periódicas es 1 y además por el teorema 3.2.1 estas existen. Por tanto existen puntos fijos. □

Prosigamos analizando las propiedades de las órbitas para el caso en el que el número de rotación sea racional.

Teorema 3.2.4. *Sea f un homeomorfismo que preserva la orientación con número de rotación $\rho(f) = r/q$ con $mcd(r,q) = 1$. Si x es un punto de periódico, entonces siguiendo la relación de orden previamente establecido, las q-uplas $(x, f(x), f^2(x), ..., f^{q-1}(x))$ y $(0, r/q, 2r/q, ..., (q-1)r/q)$ quedan ordenadas de manera ascendente bajo el efecto de la misma permutación.*

Demostración. Considemos la órbita $\{x, f(x), f^2(x), ..., f^{q-1}(x)\}$. La circunferencia la podemos ver como el conjunto $[y+s, y+s+1)$ con $s \in \mathbb{Z}$ e $y \in [0,1)$ tal que $p(y) = x$. Es claro que para cualquier s entero, el intervalo $[y+s, y+s+1)$ contiene q elementos cuya imagen por p nos dan los elementos de la órbita de x por f. Siguiendo este razonamiento se ve que el intervalo $[y, y+r)$

contiene $r \cdot q$ puntos cuya imagen por p se encuentran en la órbita. Llamemos $A = p^{-1}(Orb_f(x))$ y $B = A \bigcap [y, y+r) = \{y_j\}_{j=0}^{r \cdot q-1}$ con $y_j < y_{j+1}$. Vemos que el conjunto $\{[y_j, y_{j+1})\}_{j=0}^{r \cdot q-1}$ nos da una partición del intervalo $[y, y+r)$. Como consecuencia del lema 2.1.26 y del teorema 3.2.1 pordemos considerar F el levantamiento de f tal que $F^q(y) = y + r$.
Podemos tomar una segunda partición del intervalo $[y, y+r)$, dada por $\{[F^j(y), F^{j+1}(y))\}_{j=0}^{q-1}$. Por ser F biyectiva y dejar invariante a A, tenemos que en cada intervalo $[F^j(y), F^{j+1}(y))$ con $0 \leq j \leq q-1$ hay r elementos de B. Se cumple que $y_0 = y$. El siguiente elemento cuya imagen está en la órbita y que es mayor que y es y_1. Existen unos $i, k \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq i < q$ tales que $F^i(y) = y_1 + k$. Consideramos el levantamiento f^i dado por $\overline{F} = F^i - k$.
Veamos que $\overline{F}^2(y) = y_2$, de está forma tendríamos la permutación que nos ordena los elementos de la órbita de x. Supongamos que esto no se da, entonces, existe un y_j con $j > 2$ tal que $\overline{F}^2(y) = y_j$, entonces tenemos las siguientes desigualdades:

$$y < y_1 = \overline{F}(y) < y_2 < y_j = \overline{F}^2(y)$$

Como $\overline{F}$ es un levantamiento de f^i, tenemos que es un homeomorfismo creciente de la recta real en si misma, entonces aplicando $\overline{F}^{-1}$ tenemos que

$$y < \overline{F}^{-1}(y_2) < \overline{F}(y) = y_1$$

En contra de que y_1 es el elemento más próximo a y. Repitiendo este argumento se concluye que $\overline{F}^r(y) = F(y)$. Por tanto tenemos que $f^{ir}(x) = f(x)$, luego $ir \equiv 1 \bmod q$. Veamos que esto implica que las q-uplas $(x, f(x), f^2(x), ..., f^{q-1}(x))$ y $(x, f^i(x), f^{2i}(x), ..., f^{(q-1)i}(x))$ tienen la misma longitud.
Probemos la última afirmación. Para ello nos fijamos en que dados $a, b, c \in \mathbb{N}$ tales que c es el resto de la división euclídea de a entre b, si existe d tal que $d|a$ y $d|b$, entonces $d|c$. Recíprocamente, si $d|c$ y $d|b$ se cumple que $d|a$. Aplicando esto, como $mcd(ir, 1) = 1$, tenemos que $mcd(ir, q) = 1$, luego $mcd(i, q) = 1$. Por lo tanto, el orden de i en $\mathbb{Z}/_{q\mathbb{Z}}$ es q. Es decir los elementos de $(x, f^i(x), f^{2i}(x), ..., f^{(q-1)i}(x))$ son todos distintos y están todos los elementos de la órbita de x. Además de está propiedad se tiene que $ir/q = t + 1/q$ con t entero. Luego aplicando la congruencia módulo 1, se tiene que las dos siguientes q-uplas $(0, ir/q, 2ir/q, ..., (q-1)ir/q)$ y $(0, 1/q, 2/q, ..., (q-1)/q)$ sobre la circunferencia son iguales y además vemos que está escrito de forma ordenada. En ambos casos para ordenar las órbitas hay que aplicar la misma permutación, $f(x) \longrightarrow f^i(x)$ y $r/q \longrightarrow ri/q$, como se quería demostrar. □

El anterior teorema nos dice que si un punto es periódico por f, entonces su órbita es como la órbita del 0 por la rotación rígida con el mismo número de rotación que el de f, es decir, nos dice que los comportamientos de ambas aplicaciones son similares.

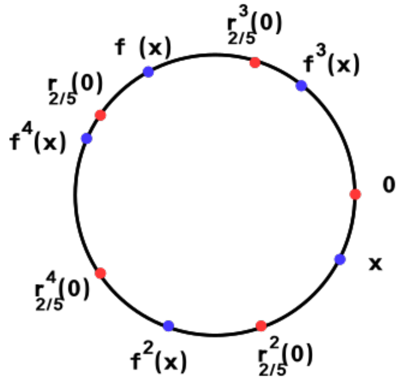

Figura 3.2: Esquema de la órbita de un punto de periodo 5 por una aplicación y la órbita del 0 por $r_{2/5}$.

Proposición 3.2.5. *Sea $f \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ con $\rho(f) \in \mathbb{Q}$, si f tiene puntos no periódicos, entonces existe un $\varepsilon \in \mathbb{R}$ con $0 < \varepsilon \leq 1/2$, tal que si g es un homeomorfismos que preserva la orientación con $d(f,g) < \varepsilon$, se tiene que $\rho(g) = \rho(f)$, para $g \geq f$ o bien para $f \geq g$.*

Demostración. Tomemos F un levantamiento de f con $F(0) \in [0,1)$. Primero supongamos que $F(0) = 0$, entonces el 0 es un punto fijo y por tanto el número de rotación es 0. Es claro que para todo $g \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ con $g \leq f$, entonces $g(0) = 0$ y por tanto su número de rotación es también 0.
Supongamos ahora que $F(0) \neq 0$, entonces $F(0) \in (0,1)$. Sabemos que f tiene puntos no periódicos, por tanto existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que $\varepsilon_1 = F^q(x) - x - r \neq 0$ sea positivo o negativo. Supongamos que $\varepsilon_1 > 0$. Tomemos $\varepsilon = \text{mín}\{\varepsilon_1, 1/2\}$.
Entonces por el lema 3.1.12 existe un $\mu_1 > 0$ tal que dado $g \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ con $d(f,g) < \mu_1$, se cumple que $d(f^q, g^q) < \varepsilon$. Entonces llamando $\mu = \text{mín}\{\mu_1, 1/2, 1 - F(0)\}$ y tomando un homeomorfismo g que preserva la orientación con $d(f,g) < \mu$ con $g \leq f$. Por las observaciones 2.1.19 y 3.1.13, podemos tomar un levantamiento G de g con $d(F,G) < \mu$ y $d(F^q, G^q) < \varepsilon$. Se cumple que $G^q(x) - x - r > 0$, de esto se deduce que $\rho(G) \geq r/q$, además como $1 - F(0) \leq \mu$, entonces $G(0) \in (0,1)$, por tanto $\rho(G) < 1$. La otra desigualdad es consecuencia del lema 3.1.14. El caso en el que $\varepsilon < 0$ es similar. □

En el siguiente ejemplo se explica un poco mejor la idea del último resultado.

Ejemplo 3.2.6. Tomemos la función $f(x) = x(2-x)$ restringida al intervalo [0,1], f se puede ver como un homeomorfismo de la circunferencia que preserva la orientación. El 0 es un punto fijo de f, por tanto $\rho(f) = 0$. Por otro lado vemos que una pequeña perturbación que levante la parábola hace que está deje de tener puntos fijos y por tanto su número de rotación deja de ser cero, en cambio, una pequeña perturbación que la haga bajar sigue haciendo que tenga puntos fijos y se conserve el número de rotación (ver Figura 3.3).

Por otro lado, la condición de la proposición 3.2.5 de que haya puntos no periódicos es necesaria. Tomemos por ejemplo una rotación rígida r_q con $q \in \mathbb{Q}$. Es claro que $r_q \pm \varepsilon$ tiene un número de rotación distinto por muy pequeño que sea ε.

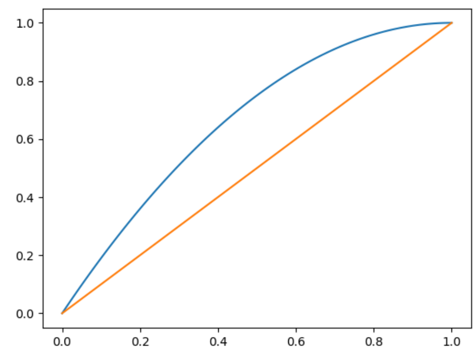

Figura 3.3: f frente a la identidad restringidos al intervalo [0,1].

3.3. Homeomorfismos de $\mathbb{S}^1$ con número de rotación irracional

Con estos resultados podemos continuar con nuestro estudio del número de rotación. La siguiente proposición nos da cuenta de como debe ser el comportamiento asintótico de un homeomorfismo de $\mathbb{S}^1$ si su número de rotación es irracional.

Proposición 3.3.1. *Sea $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ un homeomorfismo que preserva la orientación y con $\rho(f)$ irracional, entonces para para cualquier par de puntos $x, y \in \mathbb{S}^1$, se tiene que $\omega(x) = \omega(y)$. Además, se cumple que o bien $\omega(x) = \mathbb{S}^1$ o bien $\omega(x)$ es perfecto y denso en ninguna parte.*

Previa a la demostración probemos el siguiente lema.

Lema 3.3.2. *Consideremos f un homeomorfismo de $\mathbb{S}^1$ que preserva la orientación. Si $\rho(f)$ es irracional, dado $x \in \mathbb{S}^1$ y dos números enteros m, n con $m > n$, entonces cualquier órbita positiva de f interseca al arco $I = [f^m(x), f^n(x)]$.*

Demostración. Dado $y \in \mathbb{S}^1$, si $y \in f^{-k}(I)$ para algún $k \geq 1$, entonces $f^k(y) \in I$ y quedaría probada la afirmación. Luego basta probar que $\mathbb{S}^1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(I)$. Supongamos lo contrario, si $\{f^{-k}(I)\}_{k\in\mathbb{N}}$ no recubren la circunferencia, en concreto como $m > n$ tampoco lo hará $\{f^{-k(m-n)}(I)\}_{k\in\mathbb{N}}$. Pero

$$f^{-k(m-n)}(I) = f^{-k(m-n)}\left([f^m(x), f^n(x)]\right) = [f^{-(k-1)m+kn}(x), f^{-km+(k+1)n}(x)]$$

y vemos que $f^{-k(m-n)}(f^n(x)) = f^{-(k+1)(m-n)}(f^m(x))$, luego dos intervalos consecutivos se intersecan en los extremos. Como no recubren la circunferencia la única posibilidad es que $f^{-k(m-n)}(f^n(x))$ converja a un punto z cuando k tiende a infinito. Además ese punto z tiene que ser un punto fijo de f^{m-n}, ya que

$$z = \lim_{k\to\infty} f^{-k(m-n)}(f^n(x)) = f^{m-n}\left(\lim_{k\to\infty} f^{-(k-1)(m-n)}(f^n(x))\right) = f^{m-n}(z).$$

Por tanto aplicando el corolario 3.2.3 se tiene que el número de rotación de f^{m-n} es 0, pero por la propiedad mostrada en el corolario 3.1.5 eso no puede ser por ser $\rho(f)$ irracional. $\square$

Procedamos con la demostración de la proposición.

Demostración proposición 3.3.1. Lo primero de todo $\omega(z)$ es un conjunto no vacío para cualquier $z \in \mathbb{S}^1$, ya que $Orb_f^+(z)$ forma de manera natural una sucesión sobre la circunferencia. Por ser $\mathbb{S}^1$ un conjunto compacto, dicha sucesión tiene una subsucesión covergente en $\mathbb{S}^1$ y por tanto hay un punto en $\omega(z)$.
Sean $x, y \in \mathbb{S}^1$ veamos que los conjuntos ω-límite coinciden. Tomamos $z \in \omega(x)$, entonces existe una sucesión de enteros positivos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $f^{a_n}(x) \longrightarrow z$ cuando a_n tiende a infinito.
Por el lema anterior, existe un b_n natural tal que $f^{b_n}(y) \in [f^{a_{n-1}}(x), f^{a_n}(x)]$. Luego por la convergencia de la sucesión $(f^{a_n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ a z, la sucesión $(f^{b_n}(y))_{n\in\mathbb{N}}$ también converge a z. Por lo tanto, $\omega(x) \subset \omega(y)$, repitiendo el mismo argumento se da el otro contenido.

Veamos ahora que $\omega(x)$ es perfecto. En la proposición 2.2.13 vimos que $\omega(x)$ es cerrado, luego solo queda ver que no tiene puntos aislados. Dado $z \in \omega(x)$, debemos probar que z es un punto de acumulación de $\omega(x)$. Como acabamos de probar $\omega(z) = \omega(x)$ y al ser $\omega(z)$ invariante por f, se cumple que $Orb_f^+(f(z)) \subset \omega(z)$. Además como $\omega(z)$ es cerrado, se tiene que no solo la órbita está contenida en $\omega(z)$, sino que también lo está su adherencia, $\overline{Orb_f^+(f(z))} \subset \omega(z)$.
En la demostración de la proposición 2.2.13 se vio que $\omega(z) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{i\geq n} f^i(z)} \subset \overline{Orb_f^+(f(z))}$. Juntando ambos contenidos se tiene que $\omega(z) = \overline{Orb_f^+(f(z))}$. Para ver z es de acumulación, nos basta probar que $z \in \overline{Orb_f^+(f(z))} \backslash Orb_f^+(f(z))$. Supongamos lo contrario, entonces $z = f^k(z)$ para algún $k > 0$, ya que se ha tomado $Orb_f^+(f(z))$. De esta forma se tendría que z es periódico y por lo visto en el teorema 3.2.1 contradice el hecho de que el número de rotación sea irracional. Por lo tanto z es de acumulación y $\omega(x)$ es perfecto.

Supongamos que $\omega(x) \neq \mathbb{S}^1$. Para ver que el conjunto es denso en ninguna parte, tenemos que ver que su interior es vacío, ya que $\omega(x)$ es cerrado, o lo que es lo mismo que coincide con su frontera, $\omega(x) = \partial\omega(x)$.
Lo primero que vemos es que $\partial\omega(x)$ es no vacía: como la circunferencia es un conjunto conexo, el vacío y el total son los únicos conjuntos cerrados y abiertos al mismo tiempo. Por tanto $\overline{\mathbb{S}^1\backslash\omega(x)} \neq \mathbb{S}^1\backslash\omega(x)$. De este resultado se concluye que $\partial\omega(x) = \overline{\mathbb{S}^1\backslash\omega(x)} \bigcap \omega(x) \neq \emptyset$.
Además la frontera es invariante por f, ya que por cumplirse que $f(\omega(x)) = \omega(x)$, entonces $\mathbb{S}^1\backslash\omega(x)$ también es invariante. Por lo visto en el lema 2.2.3 tenemos que $\overline{\mathbb{S}^1\backslash\omega(x)}$ es invariante. Como la frontera de ambos conjuntos es la misma, se cumple que

$$f(\partial\omega(x)) = f\left(\overline{\mathbb{S}^1\backslash\omega(x)} \bigcap \omega(x)\right) \subset f\left(\overline{\mathbb{S}^1\backslash\omega(x)}\right) \bigcap f(\omega(x)) \subset \overline{\mathbb{S}^1\backslash\omega(x)} \bigcap \omega(x) = \partial\omega(x)$$

La frontera es un conjunto cerrado y en este caso es no vacía, ya que $\omega(x) \neq \mathbb{S}^1$. Dado $z \in \partial\omega(x)$, por ser la frontera invariante por f, tenemos que $\overline{Orb_f^+(f(z))} \subset \partial\omega(z)$. Por otro lado como $\partial\omega(x) \subset \omega(x) = \omega(z) = \overline{Orb_f^+(f(z))}$, entonces $\partial\omega(x) = \overline{Orb_f^+(f(z))} = \omega(x)$ como queríamos ver. □

Ejemplo 3.3.3. El resultado anterior es falso si el número de rotación es racional. Si tomamos como homemorfismo la identidad id, tenemos que $\omega_{id}(y) = \{y\}$ para cualquier $y \in \mathbb{S}^1$ y su número de rotación claramente es 0.

El uso de números irracionales hace que sea necesario introducir algunos resultados de la teoría de números (ver [11]).

Teorema 3.3.4. *[Teorema de Dirichlet] Sean α y Q dos números reales con $Q > 1$, entonces existen números enteros p, q tales que $|p\alpha + q| \leq 1/Q$.*

Demostración. Supongamos inicialmente que Q es natural. Sea $x \in \mathbb{R}$, definimos el siguiente número $\{x\} = x - [x]$, siendo $[x]$ la parte entera de x. Consideramos los siguientes números:

$$0, 1, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, ..., \{(Q-1)\alpha\} \tag{3.5}$$

Tomamos la siguiente partición del intervalo unidad:

$$\left\{ \left[0, \frac{1}{Q}\right), \left[\frac{1}{Q}, \frac{2}{Q}\right), ..., \left[\frac{Q-1}{Q}, 1\right] \right\}$$

Cada $\{x\}$ cumple que está en el intervalo unidad. Los números definidos en (3.5) forman un conjunto de $Q+1$ elementos, mientras que la partición del intervalo unidad es de cardinal Q. Por tanto aplicando el principio del palomar al menos dos de esos números están en un mismo elemento de la partición. Luego existen unos números enteros r_1, r_2, s_1 y s_2 con $0 \leq r_1, r_2 \leq Q$ y $r_1 \neq r_2$ tales que

$$|(r_1\alpha - s_1) - (r_2\alpha - s_2)| \leq 1/Q.$$

Si ahora no suponemos que Q sea natural, podemos aplicar este resultado al caso $[Q]+1$ y quedaría probado el teorema. □

Una implicación importante de este teorema que nos será de gran utilidad es la siguiente.

Corolario 3.3.5. *Sea α irracional, entonces existe un número de infinito de pares (p, q) de naturales primos entre si tales que $|\alpha - p/q| \leq 1/q^2$.*

Demostración. En la demostración anterior se vio que por construcción dado un $Q > 1$ se obtenía un par de naturales coprimos (p, q) con $1 \leq q \leq Q$ y

$$0 < \varepsilon_{p,q} = |\alpha - p/q| \leq \frac{1}{Qq} \leq \frac{1}{q^2}$$

Podemos tomar $Q' > 1/\varepsilon_{p,q}$ y se tendría que

$$|\alpha - p/q| > 1/Q'$$

Por tanto al aplicar el teorema de Dirichlet para α y Q' obtenemos otro par de naturales (p', q') cumpliendo la desigualdad deseada, además tenemos que $p/q \neq p'/q'$. Repitiendo este proceso es claro que se obtiene el número infinito de pares de naturales buscado.

□

Procedamos a enunciar el teorema pricipal de este capítulo.

Teorema 3.3.6 (Teorema de Clasificación de Poincaré)**.** *Sea $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ un homeomorfismo que preserva la orientación con $\rho(f)$ irracional. Entonces se cumple una de las siguientes situaciones:*

1. *Si f es topológicamente transitiva, entonces f es topológicamente conjugada a r_ρ. Es decir, existe un homeomorfismo de la circunferencia h tal que $f = h^{-1} \circ r_\rho \circ h$.*

2. *Si f no es topológicamente transitiva, entonces f es topológicamente semiconjugada a r_ρ, es decir existe una aplicación continua $h : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ tal que $h \circ f = r_\rho \circ h$.*

Además en ambos casos se cumple que si H es un levantamiento de h, entonces H es una función monótona creciente.

Para la demostración de este teorema, nos apoyaremos en los dos lemas siguientes:

Lema 3.3.7. *Sean $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ un homeomorfismo que preserva la orientación y F un levantamiento de f con $\rho(F) = \rho$ irracional. Para todo m_1, m_2, n_1, n_2 enteros se cumple que $n_1\rho + m_1 < n_2\rho + m_2$ si y solo si $F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Supongamos que se cumple que $F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$, veamos que se da la desigualdad $n_1\rho + m_1 < n_2\rho + m_2$.
Por el lema 2.1.20 se puede tomar la inversa de F^{n_2} y por la observación 2.1.23 se tiene que $F^{n_1-n_2}(x) + m_1 < x + m_2$. Sea $k \in \mathbb{N}$, entonces escribimos:

$$F^{k(n_1-n_2)}(x) - x = \sum_{i=1}^{k} \left(F^{i(n_1-n_2)}(x) - F^{(i-1)(n_1-n_2)}(x) \right) < k(m_2 - m_1).$$

Supongamos que $n_1 > n_2$, entonces

$$\frac{F^{k(n_1-n_2)}(x) - x}{k(n_1 - n_2)} < \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2}$$

Pasando al límite cuando k tiende a infinito, se tiene que $\rho(F) \leq (m_2 - m_1)/(n_1 - n_2)$. Como el número de rotación es irracional no se puede dar la igualdad, por lo que quedaría probada la desigualdad.
Si $n_1 < n_2$, tenemos que $F^{n_2-n_1}(x) + m_2 > x + m_1$, de nuevo se tiene

$$\frac{F^{k(n_2-n_1)}(x) - x}{k(n_2 - n_1)} > \frac{m_1 - m_2}{n_2 - n_1}$$

Llegando a que $\rho(F) > (m_1 - m_2)/(n_2 - n_1)$. El caso en el que $n_1 = n_2$ es trivial.

Para la otra implicación, supongamos que $n_1 > n_2$, luego $\rho(F) < (m_2 - m_1)/(n_1 - n_2)$ y que existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que $F^{n_1-n_2}(x) - x > m_2 - m_1$. Por la irracionalidad del número de rotación se tiene que no se puede cambiar la desigualdad, sino se tendría la igualdad en algún punto y el número de rotación sería racional. Aplicando la demostración anterior se concluye que $\rho(F) > (m_2 - m_1)/(n_1 - n_2)$ en contra de la hipotesis realizada. Por tanto $F^{n_1-n_2}(x) - x < m_2 - m_1$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$ y quedaría probada la afirmación. Si $n_1 < n_2$ se hace igual.

$\square$

Lema 3.3.8. *Para cualquier número irracional α se tiene que el conjunto $A = \{n\alpha + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Sean $x \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, basta ver que existen que $r, s \in \mathbb{Z}$ tales que $|x - (r\alpha + s)| < \varepsilon$. Por el teorema 3.3.4 se pueden encontrar $n, m \in \mathbb{Z}$ tales que $|n\alpha + m| = \mu < \varepsilon$, basta aplicarlo a un $Q > 1/\varepsilon$.
Supongamos que $n\alpha + m > 0$ y $x > \alpha$. Sea $\gamma = x - \alpha$, entonces podemos escribir $\gamma = t\mu + \delta$ con $t \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq \delta < \mu$. Tenemos que $x - \alpha - t(n\alpha + m) = \delta < \varepsilon$, por lo que $r = tn + 1$ y $s = tm$ cumplen la propiedad buscada. En los otros tres casos posibles la demostración es idéntica.

□

Demostración del teorema de clasificación de Poincaré. Para esta demostración definiremos la aplicación h que será la conjugación entre f y r_ρ. Sean F un levantamiento de f y $x \in \mathbb{R}$, definimos los siguientes conjuntos.

$$A = \{F^n(x) + m : n, m \in \mathbb{Z}\} \qquad C = \{n\rho + m : n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Construcción del levantamiento H de h: Llamamos G a la aplicación $G : A \longrightarrow C$ con $G(F^n(x) + m) = n\rho + m$. Por el lema 3.3.7 se tiene que la función G es creciente. Además G es claramente sobreyectiva y es inyectiva, ya que si $z = F^{n_1}(z) + m_1 < F^{n_2}(z) + m_2 = y$, se cumple que $G(z) = n_1\rho + m_1 < n_2\rho + m_2 = G(y)$.
Nuestro objetivo es extender está aplicación a todo $\mathbb{R}$. Definimos $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$H(y) = \sup_{n,m \in \mathbb{Z}} \{n\rho + m : F^n(x) + m \leq y\}.$$

Se cumple que $H|_A = G$. Veamos que H es continua en $\overline{A}$, para ello vamos a probar en primer lugar que $H(y) = \inf\{n\rho + m : F^n(x) + m \geq y\}$.
Supongamos que existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que

$$\inf\{n\rho + m : F^n(x) + m \geq y\} - \sup\{n\rho + m : F^n(x) + m \leq y\} = \mu > 0.$$

Por tanto para cualesquiera m_1, m_2, n_1, n_2 números enteros tales que

$$F^{n_1}(x) + m_1 > y; \quad F^{n_2}(x) + m_2 < y$$

se tiene que

$$G(F^{n_1}(x) + m_1) - G(F^{n_2}(x) + m_2) = (n_1\rho + m_1) - (n_2\rho + m_2) \geq \mu > \mu/2$$

luego $C \bigcap B(H(y) + \mu/2, \mu/3) = \emptyset$, ver figura 3.4, pero por el lema 3.3.8, el conjunto C es denso en $\mathbb{R}$ en contradicción con este resultado. Por tanto se cumple que H se puede definir indistintamente a partir del ínfimo o del supremo.

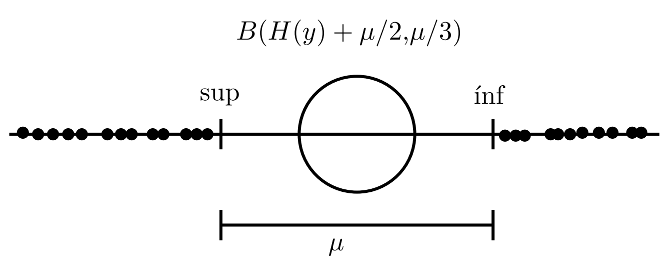

Figura 3.4: Esquema de la distribución de puntos de C en la recta real si el ínfimo y el supremo no coinciden.

Sea $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset A$ una sucesión convergente a punto $y \in \overline{A}\backslash A$, veamos que H es continua en y. Podemos separar la sucesión en dos disjuntas $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{y_k^+\}_{k\in\mathbb{N}} \bigcup \{y_k^-\}_{k\in\mathbb{N}}$, donde la primera subsucesión está formada por los elementos de la sucesión $y_k > y$ y la segunda subsucesión por los elementos con $y_k < y$.
Sin pérdida de generalidad supongamos que ambas subsucesiones poseen infinitos términos de la original. Tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} H(y_k^+) = \sup\{n\rho + m : F^n(x) + m < y\} = \sup\{n\rho + m : F^n(x) + m \leq y\} = H(y)$$

$$\lim_{k\to\infty} H(y_k^-) = \inf\{n\rho + m : F^n(x) + m > y\} = \inf\{n\rho + m : F^n(x) + m \geq y\} = H(y)$$

Para ver estas igualdades, tomamos $\varepsilon > 0$, como $\{y_k^+\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a y y C es denso en $\mathbb{R}$, se tiene que existe k_ε tal que $G(y_m^+) < H(y) + \varepsilon$ para todo $m > k_\varepsilon$. Además $G(y_k^+) > H(y)$ para todo k por como se ha cogido la subsucesión. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe un k_ε natural, tal que

$$H(y) < G(y_m^+) < H(y) + \varepsilon \qquad \text{para cualquier } m > k_\varepsilon.$$

Esto prueba que $\lim_k G(y_k^+) = \lim_k H(y_k^+) = H(y)$. Para la subsucesión $\{y_k^-\}_{k\in\mathbb{N}}$ la prueba es similar.

Como las sucesiones $\{G(y_k^+)\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{G(y_k^-)\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergen a $H(y)$ es obvio que se tiene que $\{G(y_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ también converge a $H(y)$ probando la continuidad.
Probemos la continuidad en $\mathbb{R}$. Sea I una componente conexa de $\mathbb{R}\backslash\overline{A}$. Se tiene que $I = (a, b)$ y para cualquier $y \in I$ se cumple que

$$\begin{aligned} H(b) &= \inf\{n\rho + m : F^n(x) + m \geq b\} = \inf\{n\rho + m : F^n(x) + m \geq y\} = H(y) \\ H(a) &= \sup\{n\rho + m : F^n(x) + m \leq a\} = \sup\{n\rho + m : F^n(x) + m \leq y\} = H(y) \end{aligned}$$

es decir, la función toma un valor constante en las componentes conexas y su valor coincide con el de los extremos del intervalo, por tanto queda probada la continuidad.

Propiedades de H: La aplicación H que acabamos de definir verifica las siguientes propiedades:

1. H es creciente, ya que por el lema 3.3.7 tenemos que G es creciente, luego H es no decreciente.

2. Para todo $y \in \mathbb{R}$, se tiene que $H(y + 1) = H(y) + 1$, ya que

$$\begin{aligned} H(y+1) &= \sup\{n\rho + m : F^n(x) + m \leq y + 1\} = \\ &= 1 + \sup\{n\rho + m - 1 : F^n(x) + m - 1 \leq y\} = H(y) + 1. \end{aligned}$$

3. H es sobreyectiva, esto se deduce de la propiedad 2. y de ser continua.

4. Para todo $y \in \mathbb{R}$, se cumple que $H(F(y)) = H(y) + \rho$, es decir $H \circ F = R_\rho \circ H$.

$$\begin{aligned} H(F(y)) &= \sup\{n\rho + m : F^n(x) + m \leq F(y)\} = \\ &= \sup\{n\rho + m : F^{n-1}(x) + m \leq y\} = \\ &= \rho + \sup\{(n-1)\rho + m : F^{n-1}(x) + m \leq y\} = \rho + H(y) \end{aligned}$$

Definición de h y propiedades: Dados $x \in \mathbb{S}^1$ y $\overline{x}$ un punto cualquiera de la fibra $p^{-1}(x)$. Definimos $h(x) = p \circ H(\overline{x})$. Tenemos que:

- h está bien definida: Dados $\overline{x}_1, \overline{x}_2$, se cumple que existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\overline{x}_1 = \overline{x}_2 + k$. Por tanto por la propiedad 2. de H, se cumple que $p(H(\overline{x}_1)) = p(H(\overline{x}_2))$.

- h es continua: Sea $x \in \mathbb{S}^1$ consideramos $U \subset \mathbb{S}^1$ un abierto trivializante de x por p (ver definición 2.1.1). Tenemos que $p^{-1}(U) = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} V_i$ con $V_i \bigcap V_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y las restricciones $p|_{V_i} : V_i \longrightarrow U$ homeomorfismos. Denotaremos por simplicidad por $p_{V_i}^{-1}$ a la inversa de $p|_{V_i}$. Con estas notaciones tenemos que $h(x) = p \circ H \circ p_{V_i}^{-1}(x)$, con $i \in \mathbb{Z}$ cualquiera.
  Sea $U \subset \mathbb{S}^1$ un abierto, veamos que $h^{-1}(U)$ es abierto. Sean $y \in h^{-1}(U)$ y $z = h(y)$, podemos tomar unos entornos trivializante U^1, U^2 de y, z respectivamente. De forma que $p^{-1}(U^1) = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} V_i^1$ con las propiedades de los abiertos trivializantes y de igual manera $p^{-1}(U^2) = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} V_i^2$. Además podemos tomar U^2 de tal forma que dado un V_j^2, exista un V_i^1 tal que $H^{-1}(V_j^2) \subset V_i^1$ que es abierto por ser H continua. Por tanto

$$h^{-1}(U^2) = (p \circ H \circ p_{V_i^1}^{-1})^{-1}(U^2) = p_{V_i^1} \circ H^{-1} \circ p_{V_j^2}^{-1}(U^2)$$

  Entonces $h^{-1}(U^2)$ es un entorno abierto y contenido en U, ya que H es continua y las funciones $p_{V_i^1}$ y $p_{V_j^2}$ son homeomorfismos.

- $h \circ f = r_\rho \circ h$. Dados $x \in \mathbb{S}^1$ y $\overline{x} \in p^{-1}(x)$, aplicando la definición de h y la propiedad 4. de H, vemos que

$$\begin{aligned} h \circ f(x) =& p \circ H(F(\overline{x})) = p(\rho + H(\overline{x})) = \\ =& p \circ R_\rho(H(\overline{x})) = r_\rho \circ p(H(\overline{x})) = \\ =& r_\rho \circ h(x) \end{aligned}$$

  donde además se ha aplicado que R_ρ es un levantamiento de r_ρ.

La aplicación h es homeomorfismo si y solo si f es topológicamente transitiva: Si h es homeomorfismo, entonces al ser H un levantamiento suyo creciente, se tiene que h preserva la orientación, luego por el lema 2.1.20, h es homeomorfismo si y solo si lo es H. Por la observación 2.1.21 tenemos que H es biyectiva o abierta si solo lo es h.
Supongamos que H es biyectiva tenemos que dado $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, se cumple que $H(I) = (H(a), H(b))$. Esto se debe a que H es creciente y continua, luego $H(I)$ es conexo y los extremos del intervalo son $H(a)$ y $H(b)$. Además no puede ser que $H(I)$ sea cerrado por uno de sus extremos, por ejemplo $H(I) = [H(a), H(b))$, ya que sino se tendría que $H[a, b) = H(I)$, en contra de la biyectividad. Lo que prueba que si H es biyectiva, entonces es abierta y por tanto h también lo es. Luego si h es biyectiva, entonces es abierta y en consecuencia h es homeomorfismo. Por tanto basta probar que h es biyectiva si y solo si f es topológicamente transitiva.

Sean $x, y \in Int(\overline{A})$ con $x < y$ es claro que existen $z_1, z_2 \in A$ con $x \leq z_1 < z_2 \leq y$, luego se tiene que $H(x) \leq H(z_1) < H(z_2) \leq H(y)$, luego $H|_{Int(\overline{A})}$ siempre es inyectiva. Además la función H es constante en las distintas componentes conexas de $Ad(\mathbb{R}\backslash\overline{A})$, siendo $Ad(V)$ la adherencia de un subconjunto V y H es sobreyectiva. Por tanto A es denso en $\mathbb{R}$ si y solo si H es biyectiva, luego con probar que A es denso en $\mathbb{R}$ si y solo si f es topológicamente transitiva se tendría el resultado deseado.

[$\Leftarrow$] Supongamos que f es topológicamente transitiva, luego existe un $z \in \mathbb{S}^1$ tal que su órbita positiva es densa. Tenemos que $\overline{Orb_f^+(z)} = \omega(z) \bigcup Orb_f^+(z)$, ya que por definición un punto de acumulación de la órbita positiva es un punto ω -límite.
Como $\overline{Orb_f^+(z)} = \mathbb{S}^1$ y la medida de Lebesgue[1] de $Orb_f^+(z)$ es cero por ser un conjunto numerable, entonces se tiene que cumplir que la medida de $\omega(z)$ es positiva, luego no se puede cumplir que $\omega(z)$ sea denso en ninguna parte.
Luego por la proposición 3.3.1 solo se puede ser que $\omega(z) = \mathbb{S}^1$, como $\omega(z) = \omega(y)$ para cualquier par de puntos $z, y \in \mathbb{S}^1$ se debe de cumplir que $Orb_f^+(y)$ es denso para cualquier $y \in \mathbb{S}^1$. En concreto se cumple para x.
Sea U un abierto de $\mathbb{R}$ entonces por ser p aplicación abierta $p(U)$ es abierto, luego podemos considerar un abierto trivializante $W \subset p(U)$ con $p^{-1}(W) = \bigcup_{i \in I} V_i$ y los V_i cumpliendo las propiedades descritas en la definición de espacio recubridor. Por ser la órbita de x densa, se cumple que $W \bigcap Orb_f^+(x) \neq \emptyset$. Tenemos que $p^{-1}\Big(W \bigcap Orb_f^+(x)\Big) \neq \emptyset$, ya que p es sobreyectiva. Notemos que $p^{-1}(Orb_f(x)) = A$, luego

$$\emptyset \neq p^{-1}\Big(W \bigcap Orb_f^+(x)\Big) \subset \Big(\bigcup_{i \in I} V_i\Big) \bigcap A$$

Por tanto, existen un $F^n(x) + m$ y un V_j tal que $F^n(x) + m \in V_j$. Por la periodicidad de p se cumple que para todo $i, j \in I$, existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $V_i = V_j + k = \{z + k : z \in V_j\}$. En consecuencia se cumple que $V_i \bigcap A \neq \emptyset$ para cualquier i y como existe un $V_l \subset U$, se concluye que $U \bigcap A \neq \emptyset$. Probando que A es denso en $\mathbb{R}$.

[$\Rightarrow$] Supongamos que A es denso en $\mathbb{R}$. Tenemos que si U es un abierto de $\mathbb{S}^1$, como $p^{-1}(U) \bigcap A \neq \emptyset$, entonces

$$\emptyset \neq p\Big(p^{-1}(U) \bigcap A\Big) \subset U \bigcap Orb_f(x)$$

luego $Orb_f(x)$ es densa en $\mathbb{S}^1$, y por la proposición 2.2.11 se tiene que f es topológicamente transitiva, y por tanto queda probado el teorema.

□

[1] En el siguiente capítulo se verán determinados conceptos de teoría de la medida, aun así referenciamos [2] para ver en detalle algunas propiedades de la medida de Lebesgue.

Capítulo 4

Grupo de Homeomorfismos de $\mathbb{S}^1$

Los resultados más relevantes de este capítulo se pueden encontrar en [4].

4.1. Introducción al grupo

En esta sección vamos a estudiar el grupo de homeomorfismos de la circunferencia. En el capítulo anterior los resultados relevantes se pueden clasificar en dos tipos, los relativos a la dinámica de un punto por un homeomorfismo y los que los relacionan a un homeomorfismo con una rotación rígida. De nuevo nuestro objetivo es el de analizar este tipo de resultados.

Por lo general dado un espacio topológico X, se denota por $Homeo(X)$ al conjunto de homeomorfismos que van de X sobre sí mismo. Si a este conjunto se le añade la composición, claramente al tratarse de un conjunto de homeomorfismos, se obtiene una estructura de grupo.
Si nos restringimos al caso de la circunferencia, recordamos que tan solo existen dos posibilidades para un homeomorfismo de la circunferencia, que preserve la orientación o que no lo haga. Dado $g \in Homeo(\mathbb{S}^1)$, tenemos que si g preserva la orientación y llamamos $t(x) = -x \bmod 1$, entonces $g \circ t$ es un homeomorfismo que no preserva la orientación y viceversa. Por tanto vemos que se podemos simplificar nuestro estudio considerando sólo el subgrupo de los homeomorfismos que preservan la orientación.

No solo es que se pueda genera todo homeomorfismo que no preserva la orientación a través de uno que si la preserva, sino que además el grupo no es un conjunto conexo respecto de la topología de convergencia uniforme descrita en el segundo capítulo (ver definición 2.1.17), ya que se puede separar el conjunto en dos espacios, los homeomorfismos que preservan la orientación $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ y los que no $Homeo_-(\mathbb{S}^1)$, tal y como probamos en la siguiente proposición.

Proposición 4.1.1. *Los conjuntos $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ y $Homeo_-(\mathbb{S}^1)$ son abiertos disjuntos del grupo de homeomorfismos de la circunferencia y por tanto tenemos que $Homeo(\mathbb{S}^1)$ no es conexo.*

Demostración. Para probar este resultado veamos que dados dos elementos $f \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ y $g \in Homeo_-(\mathbb{S}^1)$ se tiene que $d(f, g) = 1/2$. Recordamos que por la definición de la métrica $d(f, g) \leq 1/2$ (ver observación 2.1.19), luego falta ver que no puede darse la desigualdad estricta. Por tanto buscamos $y \in \mathbb{S}^1$ tal que $f(y) = (g(y) + 1/2) \bmod 1$.
Tomemos F, G dos levantamientos de f, g respcetivamente tales que $F(0), G(0) \in [0, 1)$. Veamos inicialmente que existe un $x \in [0, 1]$ tal que $F(x) = G(x)$. Para ello tomemos la función

$F(x) - G(x) = H(x)$ y distingamos casos.
Si $F(0) = G(0)$ se tiene el resultado buscado. Si $F(0) < G(0)$, es decir, $H(0) < 0$, como f preserva la orientación tenemos que $F(1) = 1 + F(0)$ y como g no lo preserva, entonces $G(1) = G(0) - 1$. Por tanto sustituyendo se llega a que $H(1) > 0$. Como H es continua por ser diferencia de dos funciones continuas, aplicando el teorema de Bolzano se llega a que existe un $x \in [0, 1]$ tal que $H(x) = 0 = F(x) - G(x)$. La demostración con la desigualdad contraria es idéntica.
Como g no preserva la orientación, entonces $r_{1/2} \circ g$ tampoco, luego podemos aplicar el resultado anterior a f y $r_{1/2} \circ g$, es decir existe un $x \in [0, 1]$ tal que $F(x) = G(x) \pm 1/2$. Componiendo con p, se tiene que existe un $y \in \mathbb{S}^1$ tal que $f(y) = (g(y) + 1/2) \bmod 1$.
De esta forma hemos probado que la bola $B(f, 1/2) \subset Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ para cualquier $f \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ y lo mismo con $B(g, 1/2) \subset Homeo_-(\mathbb{S}^1)$ para cualquier $g \in Homeo_-(\mathbb{S}^1)$. Por tanto tenemos que ambos conjuntos son abiertos y que $Homeo(\mathbb{S}^1)$ no es conexo. □

Durante todo el capítulo utilizaremos que la topología de $Homeo(\mathbb{S}^1)$ y la de cualquiera de sus subgrupos es la de convergencia uniforme. Una de las propiedades interesantes de este grupo, es que es lo que se conoce como un grupo topológico.

Definición 4.1.2. *Sea $(G, *, \tau)$ un grupo dotado de una topología, diremos que G es un* grupo topológico*, si las aplicaciones $x \mapsto x^{-1}$ y $(x, y) \mapsto x * y$ son continuas.*

Proposición 4.1.3. *$Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ es un grupo topológico.*

Demostración. Probemos que la aplicación de $Homeo_+(\mathbb{S}^1) \to Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ definida por $h \mapsto h^{-1}$ es continua, para ello usaremos la definición de continuidad para espacios métricos. Lo primero, dados $f \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ y $\varepsilon > 0$, como f^{-1} es uniformemente continua, sabemos que existe un $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) < \varepsilon$. Tomemos $g \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ con $d(f, g) < \delta$ y $x \in \mathbb{S}^1$ calculemos $d(f^{-1}(x), g^{-1}(x))$.
Sabemos que por ser g biyectiva, existe un $y \in \mathbb{S}^1$ tal que $y = g^{-1}(x)$. Por como hemos cogido g, se cumple que $d(f(y), g(y)) < \delta$. Por la continuidad uniforme de f^{-1}, tenemos que $d(y, f^{-1}(g(y))) < \varepsilon$. Finalmente sustituyendo se tiene que $d(g^{-1}(x), f^{-1}(x)) = d(y, f^{-1}(g(y))) < \varepsilon$. Como $d(f^{-1}, g^{-1}) = \text{máx}_{z \in \mathbb{S}^1}\{d(f^{-1}(z), g^{-1}(z))\}$ tenemos que $d(f^{-1}, g^{-1}) < \varepsilon$. Quedando probada la continuidad.

Veamos ahora que la aplicación de $Homeo_+(\mathbb{S}^1) \times Homeo_+(\mathbb{S}^1) \to Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ dada por $(f, g) \mapsto f \circ g$ es continua. Sean $f_1, g_1 \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ y $\varepsilon > 0$. De nuevo por la continuidad uniforme de f_1 y g_1, podemos coger un δ tal que si $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f_1(x), f_1(y)) < \varepsilon/2$ y $d(g_1(x), g_1(y)) < \varepsilon/2$. Llamamos $\gamma = \text{mín}\{\varepsilon/2, \delta\}$ y sean $f_2, g_2 \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$, tales que $d(f_1, f_2) < \gamma$ y $d(g_1, g_2) < \gamma$.
Sea $x \in \mathbb{S}^1$, tenemos que $d(g_1(x), g_2(x)) < \gamma$ y por tanto, aplicando f_1 tenemos que $d(f_1(g_1(x)), f_1(g_2(x)) < \varepsilon/2$. Además, como $d(f_1, f_2) < \gamma$ también se cumple que $d(f_1(g_2(x)), f_2(g_2(x)) < \varepsilon/2$. Por tanto aplicando la desigualdad triangular

$$d(f_1(g_1(x)), f_2(g_2(x)) \leq d(f_1(g_1(x)), f_1(g_2(x)) + d(f_1(g_2(x)), f_2(g_2(x)) < \varepsilon$$

Quedando probada la continuidad de la aplicación. Por tanto queda probado que $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ es un grupo topológico. □

4.2. Acción de un subgrupo

En esta sección nos dedicaremos a detallar diversos resultados relativos a la acción de un subgrupo $\Gamma \leq Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ sobre un punto de la circunferencia. Previamente recordamos el concepto de acción de grupo.

Definición 4.2.1. *Sean* $(G, *)$ *un grupo y* X *un conjunto. Se denomina* acción de G sobre X *a una aplicación de* $G \times X \longrightarrow X$ *tal que al par* (g, x) *lo manda a* $g \cdot x$ *cumpliendo las siguientes propiedades:*

- *Si* e *es el elemento neutro de* G*, entonces* $e \cdot x = x$ *para todo* $x \in X$*.*
- *Para todo* $g_1, g_2 \in G$ *y* $x \in X$ *se cumple que* $g_2 \cdot (g_1 \cdot x) = (g_2 * g_1) \cdot x$*.*

Dado $g \in G$ *y* $V \subset X$ *un subconjunto cualquiera, llamaremos* acción de g sobre V *al conjunto* $g(V) = \{g \cdot x : x \in V\}$*.*

Si consideramos un espacio topológico X y su grupo de homeomorfismos $Homeo(X)$, tenemos una aplicación definida de manera natural entre $Homeo(X) \times X \to X$ a partir de:

$$(g, x) \longrightarrow g(x) \qquad\qquad x \in X, \quad g \in Homeo(X)$$

Esta aplicación nos da claramente una acción de grupo. En este capítulo cuando nos refiramos a la acción de un subgrupo de $Homeo(X)$ sobre X nos referiremos a esta aplicación o también cuando se considere un subgrupo del conjunto $Ap(X)$ de aplicaciones biyectivas de X en si mismo.

De manera análoga a como se definió la órbita por la imagen de un sistema dinámico, se define la órbita de un punto por la acción de un subgrupo.

Definición 4.2.2. *Sean* $(G, *)$ *un grupo y* X *un conjunto sobre el que actúa el grupo* G*. Dado* $H \leq G$ *un subgrupo de* G *y* $x \in X$*, denominamos* órbita de x por H al conjunto

$$Orb_H(x) = \{y \in X | \exists h \in H : h \cdot x = y\}$$

La definición que teníamos previamente de órbita para un sistema dinámico invertible $g : X \longrightarrow X$, coincide con esta si se considera como acción de grupo por el subgrupo que genera $\langle g \rangle \leq Ap(X)$.

En el anterior capítulo se estudiaron las órbitas de los distintos puntos a partir de lo que denominamos conjuntos límites, que informalmente son los puntos a los que la trayectoria de un punto se va aproximando a medida que aumenta el número de iteraciones de nuestro sistema dinámico. Una de las propiedades de esos conjuntos era su invarianza. Vamos a intentar explicar de nuevo propiedades de las órbitas en términos de conjuntos invariantes. Previamente es necesario introducir un nuevo concepto de la dinámica topológica.

Definición 4.2.3. *Sean* $(G, *)$ *un grupo que actúa sobre un espacio topológico* X *y* $H \leq G$ *un subgrupo. Decimos que un subconjunto* $V \neq \emptyset$ *de* X *es* minimal por H *si cumple las siguientes propiedades:*

1. *V es cerrado.*

2. *V es invariante por la acción de H.*

3. *Para cualquier otro subconjuto W que cumple las dos primeras condiciones y además $W \subset V$, se tiene que $W = V$.*

El interés de este tipo de conjuntos es que bajo las condiciones en las que trabajamos se puede garantizar la existencia de un conjunto minimal. Aunque para probar dicha existencia es necesario asumir el lema de Zorn que procedemos a recordar.

Lema 4.2.4 (Lema de Zorn). *Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Si todo subconjunto de A totalmente ordenado, también llamado cadena, posee cota superior, entonces A tiene al menos un elemento maximal.*

Para simplificar la demostración de la existencia de grupo minimal vamos a dar una caracterización de conjuntos compactos bastante útil en este caso.

Definición 4.2.5. *Sean A un conjunto y $\mathcal{C} = \{a_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de A. Decimos que $\mathcal{C}$ posee la* propiedad de la intersección finita *si para cualquier subconjunto finito $J \subset I$ se cumple que $\bigcap_{j\in J} a_j \neq \emptyset$.*

Teorema 4.2.6. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{C} = \{a_i\}_{i\in I}$ una familia de cerrados de X cumpliendo la propiedad de la intersección finita. Entonces X es compacto si y solamente si $\bigcap_{i\in I} a_i \neq \emptyset$.*

Aunque la demostración es sencilla remitimos al teorema 26.9 de [9] para verla en detalle.

Lema 4.2.7. *Sean $(G, *)$ un grupo que actúa sobre un espacio compacto X y $H \leq G$ un subgrupo, entonces existe un subconjunto minimal por H.*

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de subconjuntos cerrados en X invariantes por H y tomemos la relación de orden "estar contenido en", es decir dados $A, B \in \mathcal{C}$ diremos que $A \leq B$ si y solo si $B \subset A$. Sea $\mathcal{K}$ una cadena de $\mathcal{C}$ para dicho orden y veamos que $\mathcal{K}$ posee una cota superior para aplicar el lema de Zorn.
Lo primero que se observa es que $\mathcal{K} = \{k_i\}_{i\in I}$ es no vacío, ya que X es invariante por H. Al tratarse de una cadena ordenada por la inclusión, es obvio que cumple la propiedad de la intersección finita. Por tanto por ser X compacto podemos considerar el conjunto $A = \bigcap_{i\in I} k_i \neq \emptyset$. El conjunto A es cerrado por ser intersección de cerrados, además dado $x \in A$ y $h \in H$, tenemos que $h \cdot x \in k_i$ para todo $i \in I$, por tanto A es invariante por H. A partir de esto es claro que A es cota superior de la cadena $\mathcal{K}$, luego aplicando el lema de Zorn, tenemos que $\mathcal{C}$ tiene un elemento maximal, dicho elemento maximal es un conjunto minimal.

□

Lema 4.2.8. *Sea $A \subset X$ un conjunto minimal por la acción de un subgrupo $H \leq Homeo(X)$, entonces para cualquier $a \in A$, se cumple que su órbita por H es densa en A.*

Demostración. Sea $a \in A$, es claro que $Orb_H(a)$ es un conjunto invariante por la acción de H y por ser A invariante por H, entonces $Orb_H(a) \subset A$. Además como A es cerrado $\overline{Orb_H(a)} \subset A$. Como $H \leq Homeo(X)$, todo elemento de H es un homeomorfismo, y por el lema 2.2.3, para cualquier homeomorfismo $h \in H$, tenemos que el conjunto $\overline{Orb_H(a)}$ es invariante por h. Por tanto $\overline{Orb_H(a)}$ es un conjunto invariante por la acción de H, luego por la minimalidad de A se concluye que $\overline{Orb_H(a)} = A$. □

En el último lema la condición de tomar un grupo en el que la acción restringida a un único elemento del grupo define una aplicación continua es necesaria. En el siguiente ejemplo mostramos un caso en el que no se cumple el lema al quitar está condición.

Ejemplo 4.2.9. Consideramos el conjunto $X = \{1, 2, 3\}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}\}$ y tomamos la biyección f definida por: $f(1) = 3$, $f(2) = 2$ y $f(3) = 1$. Tenemos que f no es continua, ya que $f^{-1}(\{1\}) = \{3\}$ que no es abierto.
Consideramos el subgrupo $\langle f\rangle \leq Ap(X)$, y veamos que el conjunto minimal asociado a $\langle f\rangle$ es el total. Sea A un minimal de X, supongamos que $1 \in A$, como $f(1) = 3$, entonces $3 \in A$, pero $\{1, 3\}$ no es cerrado, luego hay que añadir el 2. De igual manera si se supone que $3 \in A$. Por último si suponemos que $2 \in A$, tenemos que $\{2\}$ es invariante por la acción de $\langle f\rangle$, pero no es cerrado, para que lo sea hay que añadirle el 3 y por el caso anterior, se tiene que es el total. Por tanto queda probado que el conjunto minimal de X por la acción de $\langle f\rangle$ es el propio X.
Cojamos $Orb_{<f>}(2) = \{2\}$, su adherencia es el conjunto $\{2, 3\} \neq X$, luego la órbita de 2 no es densa en su conjunto minimal.

Observación 4.2.10. Dado $V \subset X$ un conjunto invariante por la acción de H, se tiene que la imagen de la acción sobre V coincide con el propio V. Es decir que dado $x \in V$, existen $y \in V$ y $h \in H$ tal que $h \cdot y = x$. Para ver esto basta tomar como h el elemento neutro. Esta propiedad que se deduce tan fácilmente para el caso de trabajar con acciones de grupos, cuando se trabaja con un sistema dinámico f, requiere de la invarianza del conjunto tanto por f como por f^{-1}.
Además que la imagen de un conjunto invariante V sea el mismo provoca que $X\backslash V$ también sea invariante por la acción de H. Si hubiera un $y \in X\backslash V$ tal que exista un $h \in H$ con $z = h \cdot y \in V$, entonces $h^{-1} \cdot z \notin V$ en contra de la invarianza.

Lema 4.2.11. *Tomemos $H \leq Homeo(X)$ y sea $V \subset X$ un conjunto invariante por la acción de H, entonces la frontera ∂V también es invariante por la acción de H.*

Demostración. Supongamos que la frontera de V es no vacía, ya que en caso contrario el resultado es trivial. Sea $h \in H$ un elemento cualquiera, como V es invariante por la acción de H, en concreto es invariante por la imagen de h y de h^{-1}, es decir se cumplen las siguientes contenciones:

$$\bullet h(V) \subset V \qquad \bullet\, h^{-1}(V) \subset V$$

Aplicando h en la segunda se deduce que $V \subset h(V)$. Luego junto con la invarianza, se tiene que $h(V) = V$. Además h es una aplicación biyectiva, por tanto $h(X\backslash V) = X\backslash V$. Es decir el complementario de V es invariante, luego por el lema 2.2.3 se tiene que la adherencia de V como la de $X\backslash V$ son invariantes por la acción de H. Como $\partial V \subset \overline{X\backslash V}$ y $\partial V \subset \overline{V}$. Por ser ambos conjuntos invariantes, solo es posible que $h(\partial V) \subset \overline{X\backslash V} \bigcap \overline{V} = \partial V$. Como V es invariante por un homeomorfismo de H, lo es por todo H. $\square$

Pasemos a enunciar y demostrar un resultado relativo a la dinámica del grupo de homeomorfismos de $\mathbb{S}^1$.

Teorema 4.2.12. *Sea $\Gamma \leq Homeo_+(\mathbb{S}^1)$. Entonces existen tres opciones excluyentes:*

1. *Existe una órbita finita por Γ.*

2. *Todas las órbitas son densas.*

3. *Existe un único conjunto $K \subset \mathbb{S}^1$ compacto, perfecto y denso en ninguna parte, es decir, un conjunto de Cantor, tal que K es invariante por la acción de Γ y para todo $x \in K$, la órbita de x por Γ es densa en K.*

Demostración. Como $\mathbb{S}^1$ es un conjunto compacto, por el lema 4.2.7 sabemos que existe un conjunto minimal K. Por ser K cerrado en un conjunto compacto, tenemos que K es compacto. Denotemos por K' el conjunto de puntos de acumulación de K y por ∂K a su frontera. Distingamos varios casos:

1) $K' = \emptyset$, entonces por ser K compacto, se tiene que cumplir que K es un conjunto finito. Como K es un conjunto minimal, toda órbita de elementos de K es densa en K, es decir dado $x \in K$, $\overline{Orb_\Gamma(x)} = K$, pero como K es finito, la única posibilidad es que $Orb_\Gamma(x) = K$.

2) $\partial K = \emptyset$, en este caso se tiene que $K = \mathbb{S}^1$ y de nuevo aplicando el lema 4.2.8 se tiene que todas las órbitas son densas en $\mathbb{S}^1$.

3) No se puede dar el caso de que $\partial K = K' = \emptyset$, porque si la frontera es vacía estamos en el caso 2) y los puntos de acumulación coinciden con la circunferencia.

4) $K' \neq \emptyset \neq \partial K$. En este caso vamos a ver que $\partial K = K' = K$, ya que si se cumple este hecho, como K es cerrado, entonces la frontera se escribre como $\partial K = K \backslash Int(K)$ y por tanto es densa en ninguna parte, también lo sería K y por ser K' perfecto, también lo cumpliría K y se tendría que K es de Cantor.
Por el lema 4.2.11 tenemos que ∂K es invariante por la acción de Γ. Además, por definición la frontera es un conjunto cerrado, ya que es intersección de dos cerrados. Por tanto como $\partial K \subset K$ y K es minimal, se tiene que cumplir que $\partial K = K$.
Veamos ahora que todo punto es de acumulación. Sabemos que $K' \neq \emptyset$, luego podemos tomar $x \in K'$. Tomemos $y \in K$ supongamos que y es un punto aislado en K, eso quiere decir que en la topología de subespacio $\{y\}$ es abierto. Sabemos que por ser K minimal la órbita por Γ de x es densa en K. Por tanto como $\{y\}$ es abierto, la única posibilidad que hay de que $y \in \overline{Orb_\Gamma(x)}$, es que $y \in Orb_\Gamma(x)$. Por definición de órbita tenemos que existe un $h \in \Gamma$ tal que $h(x) = y$.

Sea $\varepsilon > 0$, tomamos la bola $B = B(y, \varepsilon)$, si vemos que este abierto contiene puntos de K distintos de y para cualquier ε, se tendría que y es de acumulación, en contra de haber supuesto que es aislado. Para probar esto, tomamos $h^{-1}(B) = U$ que es entorno abierto de x por ser h homeomorfismo. Al ser x punto de acumulación de K se cumple que $(U\backslash\{x\}) \bigcap K \neq \emptyset$, luego existe $z \in U \bigcap K$ con $z \neq x$. Como K es invariante por la acción de Γ sabemos que $h(z) \in K$, además $h(z) \neq y$ por ser h biyectiva y $h(z) \in B$, ya que $z \in U$. Por tanto queda probado que K no tiene puntos aislados.
Con esto ha quedado probado que K es de Cantor y que todas sus órbitas son densas en él. Falta ver que el conjunto minimal es único. Para ello vamos a probar que $K \subset \overline{Orb_\Gamma(x)}$ para cualquier $x \in \mathbb{S}^1$. Si se prueba este resultado, dado M minimal para Γ y dado $y \in M$, se tendría que $K \subset \overline{Orb_\Gamma(y)} \subset M$, luego por minimalidad $K = M$.

Tomemos $x \in \mathbb{S}^1$, si $x \in K$ el resultado está probado en el lema 4.2.8. Supongamos que $x \notin K$, sabemos que $\mathbb{S}^1\backslash K$ es abierto, luego $x \in I$ con I una componente conexa de $\mathbb{S}^1\backslash K$. Podemos escribir $I = (a, b)$ un arco orientado en sentido antihorario y llamemos $J = [a, b]$. Tenemos que $a \in K$, luego $\overline{Orb_\Gamma(a)} = K$. Dado $y \in K$, al ser y un punto de acumulación de K, se cumple que $\overline{Orb_\Gamma(a)\backslash\{y\}} = K$, por tanto existe una sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Γ con $h_m(a) \neq h_n(a)$ si $n \neq m$ y además $\lim_{n\to\infty} h_n(a) = y$. Veamos que $\lim_{n\to\infty} h_n(J) = \{y\}$ de está forma quedaría probado que $y \in \overline{Orb_\Gamma(x)}$. Dado $L = [c,d]$, denotamos por $\lambda(L) = d - c$ la longitud del intervalo. Lo primero que haremos será ver que $\lim_{n\to\infty} \lambda(h_n(J)) = 0$.

Supongamos lo contrario. Aplicando la definición de límite, tenemos que existe un $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, existe $m \geq n$ natural con $\lambda(h_m(J)) \geq \varepsilon$. Tomemos $h \in \Gamma$ un homeomorfismo cualquiera, entonces $h(I)$ sigue siendo un intervalo abierto por ser h homeomorfismo. Además como los extremos de I son elementos de K, estos tienen que ir a elementos de K por la acción de h, es decir los extremos de $h(I)$ son elementos de K, pero $h(I) \subset \mathbb{S}^1 \backslash K$ por ser invariante.

Por tanto un homeomorfimo de Γ es un homeomorfismo entre componenentes conexas de $\mathbb{S}^1\backslash K$. Como la longitud de la circunferencia es finita, existe un número finito de componentes conexas de $\mathbb{S}^1\backslash K$ con longitud mayor o igual que ε. Como el intervalo I pasa infinitas veces por algunas de las componentes conexas de longitud mayor o igual que ε, entonces a pasa infinitas veces por los extremos de dichas componentes. Dichos extremos forman un conjunto finito, lo que nos da una contradicción con que $h_m(a) \neq h_n(a)$ si $n \neq m$, luego la longitud del intervalo converge a cero.
Como la longitud tiende a cero, se tiene que cumplir que $\lim_{n\to\infty} h_n(J) = \{z\}$ con $z \in \mathbb{S}^1$, ya que si el límite contuviera a dos puntos distintos z_1, z_2, estos estarían separados por una distancia μ, luego para que hubiera convergencia por la definición de límite se tendría que a partir de un n natural, el intervalo $h_m(J)$ intersecaría a las bolas $B(z_1, \mu/3)$ y $B(z_2, \mu/3)$ para cualquier $m > n$. Como ambas bolas no se tocan, se tendría que $\lambda(h_m(J)) \geq \mu/3$ para cualquier $m > n$ y hemos visto que eso es imposible. Por tanto el límite antes escrito converge a un conjunto unipuntual, además sabemos que $\lim_{n\to\infty} h_n(a) = y$, luego $z = y$. De esta forma queda probado que $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = y$ e $y \in \overline{Orb_\Gamma(x)}$ con lo que queda finalmente demostrada la unicidad del conjunto de Cantor.

Que las tres opciones son excluyentes se deduce de que si un conjunto minimal es $\mathbb{S}^1$, no puede no haber otro conjunto minimal y si se tiene que el conjunto minimal es de Cantor, hemos visto que entoces el conjunto minimal es único y no podría darse el caso de tener una órbita finita. $\square$

4.3. Subgrupo de rotaciones

En esta sección vamos a estudiar propiedades del subgrupo de rotaciones rígidas y diferentes situaciones bajos las cuales un subgrupo determinado se comporta de manera similar a este.

Hasta este momemto nos hemos estado refiriendo como rotaciones rígidas a las funciones $r_\alpha : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ tales que $r_\alpha(x) = (x + \alpha) \mod 1$, pero podemos ver que verdaderamente son elementos del grupo de rotaciones del plano $SO(2, \mathbb{R})$. A partir de la notación matricial de los elementos de $SO(2, \mathbb{R})$, es claro que la siguiente aplicación nos da un isomorfismo entre el conjunto de rotaciones rígidas de la circunferencia y $SO(2, \mathbb{R})$.

$$r_\alpha \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos(2\pi\alpha) & -\mathrm{sen}(2\pi\alpha) \\ \mathrm{sen}(2\pi\alpha) & \cos(2\pi\alpha) \end{pmatrix} = R(\alpha)$$

En el primer caso tenemos que r_α es una rotación de ángulo α en la circunferencia, mientras que $R(\alpha)$ es una rotación del plano de ángulo α y por tanto de la circunferencia. Además sabemos que $r_\alpha \circ r_\beta = r_{\alpha+\beta}$ y $R(\alpha) \cdot R(\beta) = R(\alpha+\beta)$. A raíz de esto en esta sección denotaremos por $SO(2, \mathbb{R})$ al subgrupo de rotaciones rígidas de $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$, aunque seguiremos usando la notación establecida de las rotaciones rígidas por simplicidad.

Una propiedad que pasa desapercibida con la formulación matricial de $SO(2,\mathbb{R})$, pero que resulta más intuitiva con la formulación de las rotaciones rígidas es la que enunciamos en el siguiente lema.

Lema 4.3.1. *$SO(2,\mathbb{R})$ es un conjunto compacto.*

Demostración. Tomamos la siguiente aplicación

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & SO(2,\mathbb{R}) \\ & \alpha & \longmapsto & r_\alpha \end{array}$$

Claramente la aplicación es biyectiva. Además sean $\alpha,\beta\in\mathbb{S}^1$, entonces $d(\alpha,\beta)=\text{mín}\{|\alpha-\beta|,1-|\alpha-\beta|\}$, mientras que

$$\begin{aligned} d(r_\alpha,r_\beta) &= \max_{x\in\mathbb{S}^1}\{d(r_\alpha(x),r_\beta(x))\} = \\ &= \max_{x\in\mathbb{S}^1}\{d(\alpha,\beta)\} = d(\alpha,\beta) \end{aligned}$$

De esta forma queda probado que ϕ es una isometría y por tanto homeomorfismo. Luego por ser $\mathbb{S}^1$ un espacio compacto, tenemos que $SO(2,\mathbb{R})$ también lo es. □

4.3.1. Conceptos de teoría de la medida

Hasta ahora hemos estado usando el concepto de medida de manera intuitiva basada en conocimientos básicos relativos a esta, pero en lo siguiente es necesario un uso más preciso y formal de este concepto. De este modo procedemos a realizar una breve introducción (ver [2]).

Definición 4.3.2. *Sean X un conjunto y $\omega\subset\mathcal{P}(X)$ un subconjuto del conjunto potencia de X, decimos que ω es una* σ-álgebra *si cumple las siguientes propiedades.*

- *$X\in\omega$.*
- *Si $A\in\omega$, entonces $X\backslash A\in\omega$.*
- *Dada una sucesión infinita $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\omega$, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n,\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\in\omega$.*

Si X es un espacio topológico Hausdorff, entonces la σ-álgebra generada a partir de las intersecciones y uniones infinitas de abiertos y cerrados de X recibe el nombre de σ-álgebra de Borel. *A sus elementos se les denomina* borelianos.

Definición 4.3.3. *Sean X un conjunto y ω una $\sigma-$álgebra de X, decimos que una aplicación $\mu:\omega\longrightarrow\mathbb{R}_{\geq 0}\bigcup\{+\infty\}$ es una* medida sobre *X si cumple la propiedad de la aditividad numerable. Es decir, dado $\mathcal{C}\subset\omega$ un conjunto numerable con $\mathcal{C}=\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $A_i\bigcap A_j=\emptyset$ si $i\neq j$, se cumple que:*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n)$$

A la terna (X,ω,μ) se le denomina espacio medible *y los elementos de ω reciben el nombre de* conjuntos medibles.

Ahora procedemos a dar algunas definiciones para clasificar a las distintas medidas.

Definición 4.3.4. *Sean X un conjunto y ω una σ-álgebra con una medida μ sobre X. Decimos que μ*

- *es* invariante por la acción de un grupo G, *si para todo $g \in G$, $A \in \omega$ se cumple que $\mu(A) = \mu(g(A))$.*
- no tiene puntos aislados *si la medida de cada átomo es cero, es decir $\mu(\{y\}) = 0$ para todo $y \in X$.*
- *es una* medida de probabilidad *si $\mu(X) = 1$.*
- *es de* soporte total *si X es un espacio topológico y la medida de cualquier abierto es no nula.*

Una observación de interés es que la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$ (ver [2]) es una medida de soporte total sin puntos aislados y que todo boreliano de $\mathbb{R}^n$, obtenido a partir de la topología usual, es medible con esta medida. Además una de las propiedades de los elementos de $SO(2,\mathbb{R})$ es que son isometrías desde el punto de vista de que preservan la medida de Lebesgue de los distintos borelianos.

También hay que añadir algunos conceptos que relacionen una medida y una función.

Definición 4.3.5. *Sean (X, ω, μ) un espacio medible y $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \bigcup \{\pm\infty\} = [-\infty, +\infty]$. Decimos que f es una* función medible, *si cumple una de las siguientes propiedades:*

1. *Para todo $U \subset \mathbb{R}$ abierto, $f^{-1}(U) \in \omega$.*
2. *Para todo $C \subset \mathbb{R}$ cerrado, $f^{-1}(C) \in \omega$.*
3. *Para todo $B \subset \mathbb{R}$ boreliano obtenido por la topología usual, $f^{-1}(B) \in \omega$.*

Observación 4.3.6. En las condiciones de la definición 4.3.5, se puede probar que todas las afirmaciones anteriores son equivalentes, además es inmediato ver que una función continua es por definición medible.

El último concepto relativo a la teoría de la medida que nos hace falta es el de integral.

Definición 4.3.7. *Sean (X, ω, μ) un espacio medible y $f = \sum_{i=0}^{n} a_i \chi_{A_i}$ una función de X simple*[1] *no negativa, donde χ_{A_i} es la función característica sobre el conjunto $A_i \in \omega$, además $A_i \bigcap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y $a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Definimos la* integral de f *como:*

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=0}^{n} a_i \mu(A_i)$$

Sea g una función medible no negativa. Definimos su integral como

$$\int_X g d\mu = \sup \left\{ \int_X f d\mu \colon f \leq g \quad y \quad f \quad es \;\; simple \right\}$$

[1] Se dice que una función es simple si el conjunto imagen es finito.

Si g es una función medible cualquiera de X, la podemos descomponer como $g = g_+ - g_-$, siendo

$$g_+(x) = \begin{cases} g(x) & si \;\; g(x) \geq 0 \\ 0 & si \;\; g(x) < 0 \end{cases}$$
$$g_-(x) = \begin{cases} g(x) & si \;\; g(x) < 0 \\ 0 & si \;\; g(x) \geq 0 \end{cases}$$

En este último caso la integral de g es $\int_X g d\mu = \int_X g_+ d\mu - \int_X g_- d\mu$. Si la integral de una función existe, admitiendo como válido el caso en el que está diverja, es decir que tome el valor $\pm\infty$, diremos que la función es integrable*.*

Existen varios resultados relativos a la teoría de la medida que nos serán de utilidad en las siguientes páginas, para su demostración de estos se puede consultar [2].

Teorema 4.3.8 (Teorema de la convergencia monótona)**.** *Sean (X, ω, μ) un espacio medible y f, f_0,f_1,.... funciones no negativas medibles sobre X. Si se cumplen las siguientes dos condiciones en casi todo punto*[2]

1. $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*
2. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$*.*

Entonces $\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$*.*

Teorema 4.3.9 (Teorema de la convergencia dominada)**.** *Sean (X, ω, μ) un espacio medible, f, f_0,f_1,.... funciones medibles sobre X y g una función integrable sobre X. Si se cumplen las siguientes dos condiciones en casi todo punto*

1. $|f_n(x)| \leq g(x)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*
2. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$*.*

Entonces las f_n y f son funciones integrables y además $\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$*.*

Teorema 4.3.10. *Sea $(G, *, \tau)$ un grupo topológico localmente compacto. Si se considera la σ-álgebra de Borel, existe una única medida invariante por la acción de G, salvo constante de proporcionalidad. Dicha medida recibe el nombre de* medida de Haar*.*
Además la medida es finita si y solo si G es compacto.

Para ver este resultado en detalle nos referimos a los teoremas 9.2.1 y 9.2.3, junto con la proposición 9.3.3 de [2].

4.3.2. Conjugación de los subgrupos de rotaciones

El siguiente resultado muestra que verdaderamente los únicos subgrupos de $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ que preservan medidas como la de Lebesgue son los subgrupos de $SO(2, \mathbb{R})$ salvo por conjugación topológica, en está sección seguiremos [10].

[2] Decimos que una propiedad se cumple en casi todo punto si el conjunto de puntos en los que no se cumple es de medida 0.

Teorema 4.3.11. *Sea $\Gamma \leq Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ un subgrupo y sea μ una medida de probabilidad, con soporte total y sin puntos aislados definida sobre la circunferencia $\mathbb{S}^1$ tomando la σ-álgebra de Borel. Si μ es invariante por la acción de Γ, entonces Γ es conjugado topológico a un subgrupo de $SO(2,\mathbb{R})$, es decir, existe $\phi \in Homeo(\mathbb{S}^1)$ tal que $\{\phi \circ h \circ \phi^{-1} \colon h \in \Gamma\} \leq SO(2,\mathbb{R})$.*

Demostración. Viendo la circunferencia $\mathbb{S}^1$ como el intervalo [0,1) se puede extender la medida μ de manera natural sobre $\mathbb{R}$. Para ello, dado $A \subset \mathbb{R}$ de Borel, definimos la siguiente aplicación.

$$\overline{\mu}(A) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu\left(p\left([n, n+1) \bigcap A\right)\right) \tag{4.1}$$

es decir, escribimos A como unión de conjuntos $[n, n+1) \bigcap A$ para $n \in \mathbb{Z}$, mediante la aplicación p, llevamos estos conjuntos a la circunferencia y medimos el conjunto resultante (con μ). Claramente es una medida, ya que por serlo μ, se ve que $\overline{\mu}$ cumple la aditividad numerable.

Esto lo hacemos para una partición de la recta real en intervalos de longitud 1. Si en la ecuación (4.1) cambiamos la partición, obtenemos el mismo, resultado. Para ver esto, tomamos un ε con $0 < \varepsilon < 1$. Tenemos que $[n+\varepsilon, n+1+\varepsilon) \subset [n, n+1) \bigcup [n+1, n+2)$, luego:

$$\sum_{n=-i}^{i} \mu\left(p\left([n+\varepsilon, n+1+\varepsilon) \bigcap A\right)\right) \leq \sum_{n=-i}^{i+1} \mu\left(p\left([n, n+1) \bigcap A\right)\right)$$

Haciendo i tender a infinito, se cumple que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(p\left([n+\varepsilon, n+1+\varepsilon) \bigcap A\right)\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(p\left([n, n+1) \bigcap A\right)\right) = \overline{\mu}(A)$$

De manera similar se obtiene la otra desigualdad. Además por ser μ de soporte total y sin puntos aislados, también lo es $\overline{\mu}$.

Como μ es invariante por la acción de Γ, entonces se cumple que $\mu(f(A)) = \mu(A)$ para todo $A \subset \mathbb{S}^1$ medible y para todo $f \in \Gamma$. Por tanto, si denotamos por F a un levantamiento de f, dado $B \subset \mathbb{R}$ medible, como $F(x+1) = F(x)+1$ para cualquier x, podemos cambiar la partición en la ecuación (4.1) para obtener lo siguiente

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(F(B)) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu\left(p\left([F(n), F(n+1)) \bigcap F(B)\right)\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu\left(p \circ F\left([n, n+1) \bigcap B\right)\right) = \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu\left(f \circ p\left([n, n+1) \bigcap B\right)\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu\left(p\left([n, n+1) \bigcap B\right)\right) = \overline{\mu}(B)\end{aligned}$$

Probando que $\overline{\mu}$ es una medida invariante por la acción de los levantamientos de los elementos de Γ. Ahora definimos la aplicación que nos dará la conjugación.

$$\begin{array}{rccc}\Phi: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \overline{\mu}([0,x]) & si \quad x \geq 0 \\ -\overline{\mu}([x,0]) & si \quad x < 0 \end{cases}\end{array}$$

Tenemos que ver que Φ es homeomorfismo.

Φ *es inyectiva.* Tomemos por simplicidad $x \geq y > 0$, el resto de situaciones se prueban igual. Supongamos que $\Phi(x) = \overline{\mu}([0,x]) = \overline{\mu}([0,y]) = \Phi(y)$. Tenemos que $[0,x] = [0,y] \bigcup (y,x]$, por tanto

$$\Phi(x) = \overline{\mu}([0,y]) + \overline{\mu}((y,x]) = \Phi(y) + \overline{\mu}((y,x])$$

Luego $\overline{\mu}((y,x]) = 0$, pero como $\overline{\mu}$ es de soporte total, la única posibilidad es que $x = y$.

Φ *es sobreyectiva.* Sabemos que $\Phi(0) = 0$, cojamos $a > 0$, la prueba para el caso negativo es análoga. Sabemos que $\Phi([a+1]) = [a+1]$ donde $[a+1]$ es la parte entera de $a+1$. Si tomamos la función $g = \Phi - a$, tenemos que $g(0) < 0$ y $g([a+1]) > 0$. Aplicamos el método iterativo de bisección sobre g [3]. Existen dos posibilidades:
La primera es que haya convergencia en un número finito de iteracciones a un c tal que $g(c) = 0$, en cuyo caso se tendría probada la existencia de contraimagen. La segunda posibilidad es que en ningún paso del proceso se obtenga un punto en el que se anule g.
Mediante el proceso de bisección hemos obtenido una sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ formada por los puntos intermedios del intervalo en el que se ha aplicado el método iterativo. Claramente la sucesión es convergente y denotaremos por t al límite de la sucesión.
Podemos dividir nuestra sucesión en otras dos, $\{t_n^+\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{t_n^-\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $g(t_n^+) > 0$ y $g(t_n^-) < 0$ para todo n. Por hipotesis al menos una de las dos sucesiones tiene infinitos términos, veamos que verdaderamente ninguna de los dos es finita. Por ser Φ creciente, tenemos que $t_n^+ > t > t_n^-$ para cualquier n, ahora supongamos sin pérdida de generalidad que la sucesión $\{t_n^+\}_{n\in\mathbb{N}}$ solo tiene un número finito de términos.

En esta situación tenemos que llega un momento en el que el método de bisección siempre toma como extremo derecho del intervalo el punto central del obtenido en la anterior iteracción y que existe un t_j^+ que siempre queda fijo. Como el método de bisección va dividiendo el intervalo en dos mitades de igual longitud y siempre queda fijo el extremo derecho, entonces se cumple que $\lim_{n\to\infty} t_n^- = t_j^+$, es decir, $t = t_j^+$. De darse esta situación se tendría que $g(t_j^+) > 0$, pero $\lim_{n\to\infty} g(t_n^-) \leq 0$. Escribiendo esto en términos de $\overline{\mu}$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} \overline{\mu}([t_n^-, t_j^+]) > 0$, pero $\lim_{n\to\infty}[t_n^-, t_j^+] = \{t_j^+\}$, en contra con que $\overline{\mu}$ no tiene puntos aislados.
Luego por tanto la única posibilidad es que ambas sucesiones tengan infinitos términos. Argumentando de manera similar, como ambas sucesiones convergen a un mismo t, tenemos que $\lim_{n\to\infty} \overline{\mu}([t_n^-, t_n^+]) = 0$, debido a que $\overline{\mu}$ no tiene puntos aislados. Esto quiere decir que $g(t) = 0$ y por tanto $\Phi(t) = a$. Quedando probada la sobreyectividad.

Φ *es continua.* Tomemos un $\varepsilon > 0$, sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tales que $\Phi(x_1) = x_2$ e $y \in \mathbb{S}^1$ tal que $p(x_1) = y$. Tomamos un intervalo $(y-a, y+a) \subset \mathbb{S}^1$, tenemos que $\mu(y-a, y+a) = \theta \leq 1$, entonces como $\lim_{n\to\infty}(y - a/n, y + a/n) = \{y\}$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \mu(y - a/n, y + a/n) = 0$. Por tanto existe un m tal que $\mu(y - a/m, y + a/m) < \varepsilon$, si $(y - a/m, y + a/m)$ es lo suficientemente pequeño, está contenido en un abierto trivializante, podemos levantarlo por p y quedarnos con el intervalo (α, β) que sea un entorno de x_1. En dicho intervalo podemos tomar un $\delta > 0$ tal que $B(x_1, \delta) \subset (\alpha, \beta)$. Se cumple por construcción que $\overline{\mu}(B(x_1, \delta)) < \overline{\mu}(\alpha, \beta) < \varepsilon$.
De esta forma se cumple que si $|x_1 - z| < \delta$ entonces $\overline{\mu}([x_1, z]) < \varepsilon$ o $\overline{\mu}([z, x_1]) < \varepsilon$. Lo que es lo mismo si $|x_1 - z| < \delta$, entonces $|x_2 - \Phi(z)| < \varepsilon$. Probando la continuidad de la función.

Φ *es abierta.* Por ser continua, la imagen por Φ de un intervalo abierto es un intervalo por preservar la conexión. Además por ser creciente e inyectiva no puede ser cerrado en ninguno de sus extremos.

[3] Dada una función f definida sobre un intervalo $[a, b]$ con $f(a)f(b) < 0$, el método de bisección consiste en coger el punto medio c, evaluar $f(c)$ y quedarte con el intervalo donde en los extremos haya un cambio de signo, aplicando este método repetidas veces se obtiene la convergencia a un punto. Si la función es continua, el punto es un cero de la función.

Con estas propiedades, queda probado que Φ es un homeomorfismo. Como para cualquier $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $p([x, x+1)) = \mathbb{S}^1$, $p|_{[x,x+1)}$ es inyectiva y $\overline{\mu}$ no tiene puntos aislados, entonces $\overline{\mu}([x, x+1]) = 1$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Por tanto $\Phi(x+1) = \Phi(x) + 1$ para todo x real, es decir que Φ es el levantamiento de un homeomorfismo de la circunferencia ϕ que preserva la orientación por ser Φ creciente.

Como último paso de la demostración, veamos que dado $h \in \Gamma$, entonces $\phi \circ h \circ \phi^{-1} \in SO(2, \mathbb{R})$. Sea H un levantamiento de h, queremos ver que $\Phi \circ H \circ \Phi^{-1}(y) = y + \alpha$ para todo $y \in \mathbb{R}$ y algún $\alpha \in \mathbb{R}$.
Por simplicidad supongamos que $H(0) \geq 0$ y que $y > 0$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\Phi \circ H \circ \Phi^{-1}(y) &= \overline{\mu}([0, H \circ \Phi^{-1}(y)]) = \overline{\mu}([0, H(0)]) + \overline{\mu}([H(0), H(\Phi^{-1}(y))]) = \\
&= \overline{\mu}([0, H(0)]) + \overline{\mu}(H([0, \Phi^{-1}(y)])) = \overline{\mu}([0, H(0)]) + \overline{\mu}([0, \Phi^{-1}(y)]) = \\
&= \overline{\mu}([0, H(0)]) + y
\end{aligned}$$

Donde hemos aplicado la invarianza de $\overline{\mu}$. Esto prueba que $\Phi \circ H \circ \Phi^{-1} = R_\alpha$ con $\alpha = \overline{\mu}([0, H(0)])$. Aplicando p tenemos que

$$r_\alpha \circ p = p \circ R_\alpha = p \circ \Phi \circ H \circ \Phi^{-1} = \phi \circ h \circ \phi^{-1} \circ p$$

Como p es sobreyectiva, concluimos que $r_\alpha = \phi \circ h \circ \phi^{-1}$ y con esto que Γ es conjugado topológico de un subgrupo de $SO(2, \mathbb{R})$. $\square$

Anteriormente dijimos que los elementos de $SO(2, \mathbb{R})$ son isometrías respecto de la medida de Lebesgue, es decir, que dejan invariante dicha medida. Por tanto lo que está diciendo este resultado es que una medida es invariante si esta es el resultado de una deformación de la medida de Lebesgue. Aparentemente se trata de un resultado con nula trascendencia práctica, ya que nos garantiza la conjugación si existe una cierta medida invariante que a priori no se conoce. Pero verdaderamente si que existe una situación en la que se pueda garantizar la existencia de esta conjugación como muestra el siguiente resultado.

Teorema 4.3.12. *Todo subgrupo compacto de $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ es conjugado topológico a un subgrupo de $SO(2, \mathbb{R})$.*

Previa a la demostración, necesitamos probar el siguiente resultado.

Lema 4.3.13. *Sean $(G, *, \tau)$ un grupo topológico localmente compacto y λ su medida de Haar. Dada f una función medible sobre G, si f es integrable entonces para todo $g \in G$ se cumple que*

$$\int_G f(t) d\lambda = \int_G f(g * t) d\lambda$$

Demostración. Lo primero si f es una función característica sobre un conjunto A y tomamos un elemento $g \in G$, tenemos que por la definición de la medida de Haar,

$$\int_G f(t) d\lambda = \lambda(A) = \lambda(g(A)) = \int_G f(g * t) d\lambda$$

Por tanto en el caso general, basta escribir f como combinación de funciones características. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$, entonces definimos para cualquier $i \in \mathbb{Z}$ y cualquier $0 \leq j < 2^n$ los siguientes conjuntos

$$a_{ij}^n = f^{-1}\left(\left[i + \frac{j}{2^n}, i + \frac{j+1}{2^n}\right)\right); \qquad a_i = f^{-1}\left([i, i+1)\right)$$

Tenemos que cada uno de los a_{ij}^n son medibles por serlo f y por lo tanto las funciones características χ_{ij}^n y las χ_i definidas sobre los a_{ij}^n y los a_i respectivamente son medibles e integrables. Definimos las funciones

$$h_i^n = i + \sum_{j=0}^{2^n-1} \frac{j}{2^n}\chi_{ij}^n$$

Es claro que h_i^n es medible por ser suma de funciones medibles. Además, por como se coge la partición de los a_{ij}^n, se tiene que $h_i^n(x) \leq h_i^{n+1}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Dado un $i \in \mathbb{Z}$, definamos las funciones $f_i = \chi_i f$, f_i es medible e integrable por ser producto de medibles e integrables. Veamos que $\lim_{n\to\infty} h_i^n(x) = f_i(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para ello tomemos un $x \in \mathbb{R}$ y un $\varepsilon > 0$, si $x \notin a_i$, entonces $h_i^n(x) = f_i(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, si $x \in a_i$, tenemos que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-n} < \varepsilon$, entonces para cualquier $m \geq n$, $h_i^m(x) = i + \frac{j}{2^m}$ para algún $j < 2^m$, de esta forma tenemos que $x \in a_{ij}^m$ y por construcción $|h_i^m(x) - f_i(x)| \leq 2^{-m} < \varepsilon$. Probando que la sucesión $\{h_i^n\}_{n=1}^\infty$ converge a f_i. Por lo que al no tener cambios de signo las h_i^n ni f_i, nos encontramos en en las condiciones del teorema de la convergencia monótona. Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_G \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(i + \frac{k}{2^n}\right) \chi_{ik}^n d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_G h_i^n d\lambda = \int_G f_i d\lambda$$

Ahora bien, por la linealidad de la integral se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_G \left(i + \frac{k}{2^n}\right) \chi_{ik}^n d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_G \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(-i + \frac{k}{2^n}\right) \chi_{ik}^n d\lambda = \int_G f_i d\lambda$$

De nuevo aplicando el teorema de la convergencia monótona tenemos que

$$\int_G f^+ d\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} \int_G f_i d\lambda; \qquad \int_G f^- d\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \int_G -f_{-i} d\lambda$$

Aplicando la definición de integral y sustituyendo, tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_G f d\lambda &= \int_G f^+ d\lambda - \int_G f^- d\lambda = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_G \left(i + \frac{k}{2^n}\right)\chi_{ik}^n d\lambda\right) + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_G \left(-i + \frac{k}{2^n}\right)\chi_{-ik}^n d\lambda\right)\end{aligned}$$

Por tanto aplicando la invarianza de la integral por la acción de G a cada integral de las funciones características, se concluye el resultado deseado. $\square$

Demostración del teorema 4.3.12. Sea $\Gamma \leq Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ un subgrupo compacto. Por ser $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ un espacio métrico es T_2 y por tanto Γ es localmente compacto. Luego por el teorema 4.3.10 podemos tomar λ la medida de Haar de Γ y además por ser compacto podemos tomarla de manera que $\lambda(\Gamma) = 1$.
El objetivo es encontrar una medida sobre $\mathbb{S}^1$ que cumple las hipótesis del teorema 4.3.11, claramente λ no vale por ser una medida sobre Γ. Por tanto definimos a partir de está una nueva medida. Dado $A \subset \mathbb{S}^1$ un conjunto de Borel, definimos la medida de A como

$$\mu(A) = \int_\Gamma Leb(h(A))d\lambda \tag{4.2}$$

Donde Leb denota la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{S}^1$. Veamos que estamos en las condiciones del teorema 4.3.11.

μ es una función invariante por la acción de Γ. Partimos inicialmente de los casos más sencillos. Denotemos por $\varphi_A : \Gamma \longrightarrow [0,1]$ a la función que manda $h \mapsto Leb(h(A))$ siendo A un boreliano. Si $Leb(A) = 0$ tenemos que $Int(A) = \emptyset$ y como los elementos de Γ son homeomorfismos tenemos que para todo $h \in \Gamma$, $Leb(h(A)) = 0$, es decir, $\varphi_A \equiv 0$. De igual manera se argumenta que si $Leb(A) = 1$, entonces, $\varphi_A \equiv 1$.
Supongamos ahora que $A = (a, b)$ es un intervalo abierto. Vamos a probar que φ_A es continua. Tomemos $\varepsilon > 0$, y sean $h_1, h_2 \in \Gamma$ dos elementos tales $d(h_1, h_2) < \varepsilon/2$. Tenemos que $h_1(A) = (h_1(a), h_1(b))$ y $h_2(A) = (h_2(a), h_2(b))$, además por construcción tenemos que $d(h_1(a), h_2(a)) < \varepsilon/2$ y $d(h_1(b), h_2(b)) < \varepsilon/2$. Por tanto $|Leb(h_1(A)) - Leb(h_2(A))| < \varepsilon$. De esta forma queda probada que φ_A no solo es continua, sino que es uniformemente continua.

Tenemos que por ser φ_A continua es medible, y por tanto aplicando el lema 4.3.13, se cumple que φ_A es invariante por la acción de Γ. Supongamos ahora el caso general, sea $B \subset \mathbb{S}^1$ un boreliano. Supongamos que $Leb(B) \neq 0, 1$. Podemos descompones $B = Int(B) \bigcup (B \backslash Int(B))$, donde $Leb(B \backslash Int(B)) = 0$ por tener interior vacío. Por la aditividad numerable de la medida de Lebesgue, tenemos que $Leb(B) = Leb(B \backslash Int(B)) + Leb(Int(B)) = Leb(Int(B))$. Por tanto $\varphi_B = \varphi_{Int(B)}$
Además podemos escribir $Int(B) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} b_n$ siendo b_n una componente conexa de $Int(B)$, si el número de conexas es finito, supondremos que salvo una cantidad finita de b_n el resto son el conjunto vacío. Por la aditividad numerable de la medida de Lebesgue, tenemos que $Leb(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} Leb(b_n)$, es claro que $\varphi_B = \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_{b_n}$. Definimos las funciones $\phi_n = \sum_{i=0}^n \varphi_{b_i}$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} \phi_n(h) = \varphi_B(h)$ para todo $h \in \Gamma$. Por ser cada b_i un intervalo abierto o el vacío tenemos que las ϕ_n son suma de funciones continuas y por tanto continuas. Finalmente tenemos que $0 \leq \phi_n < 1$, donde claramente la función constantemente 1 es integrable. Por tanto aplicando el teorema de la convergencia dominada, se concluye que

$$\int_\Gamma \varphi_B d\lambda = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^n \int_\Gamma \varphi_{b_n} d\lambda$$

Finalmente como las integrales de las φ_{b_n} son invariantes por la acción de Γ, entonces la de ϕ_B también lo es. Quedando probado que μ es una función invariante por la acción de Γ.

μ es una medida. Es claro que es no negativa. Para ver la aditividad numerable, cojamos B un boreliano tal que $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es unión de borelianos disjuntos. Tenemos de nuevo que $\varphi_B = \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_{A_n}$

aplicando de nuevo el teorema de la convergencia dominada se tiene el resultado deseado.

μ es una medida de probabilidad de soporte total y sin puntos aislados. Como la medida de Haar está normalizada a la unidad por ser Γ compacto y como $\varphi_{\mathbb{S}^1} \equiv 1$, es claro que $\mu(\mathbb{S}^1) = 1$ y que $\mu(\{x\}) = 0$ para todo $x \in \mathbb{S}^1$. Además si $b \subset \mathbb{S}^1$ es un abierto tenemos que φ_b es positiva en todo Γ, luego $\mu(b)$ es la integral de una función positiva y por tanto $\mu(b) > 0$. Quedando probadas las tres afirmaciones.

Finalmente vemos que nos encontramos en las condiciones del teorema 4.3.11 y por tanto Γ es conjugado a un subgrupo de $SO(2,\mathbb{R})$. $\square$

Sabemos que en un espacio métrico los compactos son conjuntos cerrados y acotados. Dado $f \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$, tenemos que la bola cerrada $\overline{B}(f, 1/2) = Homeo_+(\mathbb{S}^1)$, pero si fuera compacto por el teorema anterior tendríamos que $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ es conjugado a un subgrupo de $SO(2,\mathbb{R})$ por un homeomorfismo ϕ. Tomemos $f \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ que no sea una rotación. Tendríamos que $g = \phi^{-1} \circ f \circ \phi \in SO(2,\mathbb{R})$, pero por hipótesis $f = \phi \circ g \circ \phi^{-1} = \phi \circ \phi^{-1} \circ f \circ \phi \circ \phi^{-1} \notin SO(2,\mathbb{R})$. Llegando a una contradicción.

Hemos visto que el grupo de homeomorfismos de la circunferencia, muchos elementos se obtienen a partir de rotaciones rígidas, mostrando que estas juegan un papel más que relevante en toda esta teoría, pero el siguiente y último resultado nos muestra hasta que punto esto es así.

Teorema 4.3.14. *$SO(2,\mathbb{R})$ es un retracto de deformación de $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ y por tanto comparten grupo de homotopía de primer orden.*

Demostración. Empecemos definiendo la retracción. Denotemos por $\widetilde{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ y $\widetilde{SO}(2,\mathbb{R})$ al conjunto de homeomorsfismos de $\mathbb{R}$ crecientes tales que son levantamientos de homeomorfismos de la circunferencia que preservan la orientación y a los levantamientos de rotaciones rígidas respectivamente . Sea $F \in \widetilde{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$, tenemos que $F(x+1) = F(x) + 1$, por tanto la función $\alpha_F(x) = F(x) - x$ es una función periódica de periódo a lo sumo 1.
Si llamamos $c_F = \int_0^1 \alpha_F(x)dx$ y $\beta_F(x) = \alpha_F(x) - c_F$, podemos escribir $F(x) = x + c_F + \beta_F(x)$, donde β_F sigue siendo una función periódica con el mismo periodo que α_F. Ahora definimos nuestra retracción $R : \widetilde{Homeo}_+(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \widetilde{SO}(2,\mathbb{R})$ como $F \mapsto Id_{\mathbb{R}} + c_F$, es decir, $R(F)(x) = x + c_F$.

Veamos que R es continua. Sea $\varepsilon > 0$ y sean $F, G \in \widetilde{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ tales que $d(F,G) < \varepsilon$. Es claro que

$$\int_0^1 (F(x) - \varepsilon - x)dx < \int_0^1 (G(x) - x)dx < \int_0^1 (F(x) + \varepsilon - x)dx$$

Luego $|c_F - c_G| < \varepsilon$ y como $|c_F - c_G| = d(Id_{\mathbb{R}} + c_F, Id_{\mathbb{R}} + c_G)$, tenemos probada la continuidad.

Ahora definamos la homotopía entre ambos R y $Id_{\widetilde{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)}$.

$$\begin{array}{rccc} H: & \widetilde{Homeo}_+(\mathbb{S}^1) \times [0,1] & \longrightarrow & \widetilde{Homeo}_+(\mathbb{S}^1) \\ & (F,s) & \longmapsto & Id_{\mathbb{R}} + c_F + (1-s)\beta_F \end{array}$$

Lo primero es ver que está bien definida, es decir que no nos salimos del conjunto. Para ello basta con probar que $\widetilde{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ es un conjuto convexo. Si tomamos $F, G \in \widetilde{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ y $s \in [0,1]$, tenemos que $L = sF + (1-s)G$ es continua por ser una combinación lineal de funciones continuas. La función L es estrictamente creciente por serlo F y G y por tomar $s \in [0,1]$ por lo que es inyectiva y abierta. Como $\lim_{x\to\pm\infty} F(x) = \lim_{x\to\pm\infty} G(x) = \pm\infty$ por ser homeomorfismos crecientes, entonces $\lim_{x\to\pm\infty} L(x) = \pm\infty$, probando la sobreyectividad. Por tanto L es un homeomorfismo creciente. Finalmente como $F(x+1) = F(x)+1$ y $G(x+1) = G(x)+1$, sustituyendo en la expresión de L, tenemos que $L(x+1) = L(x)+1$. Quedando demostrado que L es el levantamiento de un homeomorfismo de la circunferencia que preserva la orientación y por tanto que H está bien definida.

Es claro que H es una función continua por ser producto y suma de funciones continuas, por tanto H es continua. Además es claro que $H(F,0) = F$ y $H(F,1) = R(F)$. Por lo que H es la homotopía entre R y la identidad sobre $\widetilde{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$, luego $\widetilde{SO}(2,\mathbb{R})$ es retracto de deformación de $\widetilde{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$.

Hasta ahora hemos trabajado en la recta real, pero ahora hay que bajar a la circunferencia. Observamos que $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ es el conjunto cociente de $\widetilde{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ con la relación $F_1 \sim F_2$ si y solo si $p \circ F_1 = p \circ F_2$. Denotemos por Ψ a la proyección entre ambos espacios, de igual manera Ψ nos da la proyección entre $\widetilde{SO}(2,\mathbb{R})$ y $SO(2,\mathbb{R})$. Como $d(F(x), G(x)) = |F(x) - G(x)|$ y $d(f(x), g(x)) = \min\{|f(x) - g(x)|, 1 - |f(x) - g(x)|\}$, es claro que si $d(F,G) < \varepsilon$ para un $\varepsilon > 0$, entonces $d(f,g) < \varepsilon$. Probando la continuidad de Ψ. Ahora usamos el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)\times[0,1] \arrow[r, "H"] \arrow[d, "{(\Psi, Id_{[0,1]})}"'] \arrow[dr] & \widetilde{Homeo}_+(\mathbb{S}^1) \arrow[d, "\Psi"] \\
Homeo_+(\mathbb{S}^1)\times[0,1] \arrow[r, "H_1"'] & Homeo_+(\mathbb{S}^1)
\end{tikzcd}$$

donde $H_1(f,s) = H_1(\Phi(F), s) = \Phi(H(F,s))$ siendo F un levantamiento de f. Veamos que H_1 está bien definida: si F_1 y F_2 son dos levantamientos de f, entonces $F_1(x) = F_2(x) + k$ para todo $x \in \mathbb{R}$ con $k \in \mathbb{Z}$. Luego

$$\alpha_{F_1}(x) = \alpha_{F_2}(x) + k, \quad c_{F_1} = c_{F_2} + k \quad \text{y} \quad \beta_{F_1}(x) = \beta_{F_2}(x)$$

Por lo tanto, como $H(F_1,s) = Id_{\mathbb{R}} + c_{F_1} + (1-s)\beta_{F_1}$ y $H(F_2,s) = Id_{\mathbb{R}} + c_{F_2} + (1-s)\beta_{F_2}$, aplicando las anteriores relaciones, se tiene que $\Psi(H(F_1,s)) = \Psi(H(F_2,s))$.
Tenemos que $\Psi \circ H$ es continua por ser composición de continuas y además por ser Ψ una aplicación cociente, tenemos que H_1 es continua si y solo si $H_1 \circ (\Psi, Id_{\mathbb{R}})$ lo es también[4], pero es claro que $H_1 \circ (\Psi, Id_{\mathbb{R}}) = \Psi \circ H$. Por tanto H_1 es continua y eso nos da una homotopía entre la identidad en $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ y la retracción $p \circ R$ de $SO(2,\mathbb{R})$. $\square$

[4] Aunque se trata de un resultado muy conocido de la topología general, referenciamos el teorema 22.2 de [9] para verlo en más detalle.

Bibliografía

[1] BRIN, Michael; STUCK, Garrett . Introduction to dynamical systems. Cambridge: Cambridge University Press (2002).

[2] COHN, Donald L. Measure theory. Repr. Boston [etc.]: Birkhäuser (1997).

[3] GARCÍA MARRERO, M; MARGALEF ROIG Juan . Topología. Tomo 2. Madrid: Alhambra (1975).

[4] GHYS, Étienne. Groups acting on the circle. Enseign. Math. (2) **47** (2001), no. 3-4, 329–407.

[5] HASSELBLATT, Boris; KATOK, Anatole B. A first course in dynamics: with a panorama of recent developments. Cambridge: Cambridge University Press, (2003).

[6] HERMAN, Michel R. (1976). Sur la conjugaison des difféomorphismes du cercle à des rotations. (1976). 1. 181-188. 10.24033/msmf.194.

[7] KATOK, Anatole B; HASSELBLATT, Boris. Introduction to the modern theory of dynamical systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

[8] MASSEY, William S. Introducción a la topología algebraica. Barcelona [etc.]: Reverté (1972).

[9] MUNKRES, James R. Topología. 2ª. Madrid [etc.]: Prentice Hall (2001).

[10] NAVAS, Andrés. Groups of Circle Diffeomorphisms (2006). arXiv:math/0607481

[11] SCHMIDT, Wolfgang M. Diophantine approximation. [2nd printing with minor corrections]. Berlin [etc.]: Springer (1996).

[12] SUAREZ NAVARRO, Pedro Iván. Aspectos dinámicos de los homeomorfismos y difeomorfismos del círculo. Pontificia Universidad Católica del Perú. (2015). http://hdl.handle.net/20.500.12404/6128

[13] WALSH, James A. The Dynamics of Circle Homeomorphisms: A Hands-on Introduction. Mathematics Magazine 72, no. 1 (1999): 3-13.

[14] ZISMAN, Michel. Topología algebraica elemental. Madrid: Paraninfo (1979).