UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Facultad de Educación

MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Comparación de tres metodologías en el estudio geométrico de los puntos notables de los triángulos

Comparison of the methodologies in the geometric study of the remarkable points of the triangles

Alumno/a: Laura Díaz Cacho

Especialidad: Matemáticas

Director/a: Mª Pilar Sabariego Arenas

Curso académico: 2018 / 2019

Fecha: Junio 2019

Resumen

La enseñanza de las matemáticas durante el siglo XX estuvo orientada principalmente al estudio de los números y el álgebra, obviando una de sus ramas más importantes: la geometría. Durante las últimas décadas, y tras diferentes estudios e investigaciones sobre la importancia de esta en el desarrollo del ser humano, su enseñanza y aprendizaje se incorporó en nuestro sistema educativo, pero empleando unas metodologías inadecuadas.

Este TFM muestra como trabajar en el aula las rectas y los puntos notables de los triángulos, mediante el empleo de tres metodologías diferentes: la clásica (regla y compás), la papiroflexia y el programa de geometría dinámica, Geogebra.

Palabras clave: geometría, metodologías, puntos y rectas notables, triángulos.

Abstract

The teaching of mathematics during the twentieth century was mainly oriented to the study of numbers and algebra, ignoring one of its most important branches: geometry. During the last decades, and through studies and research on the importance of geometry in the development of human beings, their teaching and learning were incorporated into our educational system, however, it was using inadequate methodologies.
This dissertation is based on the use of different methodologies: the classical one (ruler and compass), origami and the dynamic geometry program, Geogebra.

Key words: geometry, methodologies, remarkable points and straight lines, triangles.

Nota: Se tomará el masculino genérico a lo largo del texto para economizar el uso del lenguaje.

Agradecimientos

A mi profesora, Mª Pilar Sabariego Arenas por su gran apoyo e inestimable ayuda durante la redacción de este TFM.

Y por supuesto a mi familia, por su comprensión y sus ánimos constantes a lo largo de todos estos meses.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

Vivimos en una sociedad en la que todavía hoy perdura la creencia generalizada de que las matemáticas es cosa de especialistas, son difíciles de entender y no todo el mundo “vale” para ellas. Esto influye directamente sobre nuestros alumnos.

Una de las causas principales que han contribuido históricamente al desarrollo de esta creencia han sido las metodologías empleadas para su enseñanza, pues esta ha estado orientada a un aprendizaje memorístico basado en la repetición de ejercicios de forma sistemática, obviando el desarrollo de la capacidad deductiva y el pensamiento crítico del alumno para poder enfrentarse a la resolución de diferentes problemas.

Esta manera de entender la enseñanza de las matemáticas tuvo su origen a mediados del siglo XX, con lo que se conoce como la “matemática moderna”, la cual permaneció en nuestro sistema educativo hasta prácticamente los años ochenta. Se trataba de un modelo de enseñanza en donde el estudio de las matemáticas se centraba en la lógica y el rigor, alejándose de la intuición y la experimentación, por lo que el estudio de la geometría desapareció por completo (Sorando, 2002).

Esta corriente fomentó que las matemáticas se alejasen de ser una ciencia al servicio de la sociedad para convertirse en algo abstracto, solo apto para especialistas. Lo que derivó en el fracaso de la misma.

Durante las últimas décadas del siglo XX aparecieron nuevas escuelas de investigación para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y concretamente sobre la geometría y su contribución al desarrollo cognitivo de los estudiantes.

Las posteriores reformas educativas de nuestro país, conscientes de la importancia de la enseñanza de la geometría, la introdujeron de nuevo en el sistema educativo. No obstante, su estudio se basaba en la memorización de conceptos, propiedades y fórmulas. Esta influencia, todavía hoy en día, se pone de manifiesto en muchas de nuestras aulas, pues muchos de los actuales docentes estudiaron la geometría desde ese punto de vista y no tienen unas buenas referencias metodológicas para desarrollar un buen proceso de enseñanza – aprendizaje (Barrantes y Blanco, 2005).

Algunos de los resultados obtenidos por los estudiantes en la prueba PISA de evaluación educativa realizada en nuestro país en 2015 (a falta de que sean publicados a lo largo del presente año los resultados de la prueba realizada en 2018) muestran que las matemáticas siguen siendo una "asignatura pendiente". Según afirma dicho informe los alumnos españoles tienen unos resultados por debajo de la media de la OCDE y de la Unión Europea. Además, el informe de PISA 2015 hace especial hincapié en el papel del profesor como responsable de las actitudes de sus alumnos respecto a su aprendizaje. Si las metodologías aplicadas por algunos profesores no son las adecuadas, los alumnos no mejorarán su percepción y actitud hacia las matemáticas. Por lo que, si cambiamos las metodologías empleadas, puede que consigamos mejorar estos resultados.

A lo largo de este TFM vamos a analizar y comparar tres metodologías didácticas diferentes en la enseñanza – aprendizaje de la geometría, como son: la metodología clásica, con regla y compás, la papiroflexia y el uso de programas de geometría dinámica, en este caso Geogebra. Las actividades se desarrollarán durante el periodo de prácticas del máster en un centro educativo de la comunidad autónoma de Cantabria, con un grupo de alumnos pertenecientes a 1º de ESO.

Dentro del ámbito de la geometría, se trabajará con la geometría plana, concretamente el estudio de los puntos y las rectas notables de un triángulo.

En primer lugar, se justificará el porqué de la realización de este TFM, detallando una serie de objetivos, que trataremos de lograr basándonos en los estudios teóricos existentes sobre la enseñanza – aprendizaje de la geometría en la Educación Secundaria Obligatoria.

A continuación, se realizará una breve introducción histórica, la cual nos permitirá conocer cómo ha evolucionado el conocimiento geométrico y su enseñanza hasta la actualidad. Además, de manera específica, se introducirán las principales características de las tres metodologías que serán empleadas.

En la parte final del documento se mostrará el diseño y el desarrollo de las diferentes actividades con los alumnos y se analizarán los resultados obtenidos con cada una de ellas.

Cerraremos este documento con las conclusiones que hayamos podido obtener a lo largo de la puesta en práctica de las distintas metodologías.

2. JUSTIFICACIÓN DEL TFM

El desarrollo de este TFM se centra en el estudio de la geometría plana, pues esta parte de la matemática está últimamente relegada a un segundo plano, quedando al final de las programaciones didácticas y trabajada sólo si da tiempo. Todo esto, a pesar de ser una de las ramas de las matemáticas más antiguas y estudiadas a lo largo de la historia, dada su multitud de aplicaciones en la vida real.

"La geometría es para el ser humano el idioma universal que le permite describir y construir su mundo, así como transmitir la percepción que tiene de este al resto de la humanidad." (Vargas y Gamboa, 2013, p.75).

Aún así, si prestamos atención al contenido y la estructura de la actual *Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa*, LOMCE, podemos observar como el bloque de geometría siempre aparece en la parte final, antes de estadística y probabilidad, característica que también se ve reflejada en nuestra comunidad autónoma en el Decreto 38/2015, de 22 de mayo, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

El contenido de los bloques de geometría es de los menos extensos en cada curso, mientras que otros como números y algebra se llevan la mayor parte del currículum, a pesar de tratar contenidos de modo repetitivo.

Con este TFM, basado en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, se muestra cómo desde esta se pueden trabajar y fomentar las competencias clave, tal y como recoge la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato.

A continuación se detalla la contribución de nuestro TFM a cada una de ellas.

- Competencia de comunicación lingüística.

  En la asignatura de matemáticas como en cualquier otra es sumamente importante que los alumnos adquieran la capacidad y habilidades necesarias tanto para expresarse de forma oral como escrita. Con nuestras actividades contribuiremos a ambas. A través de los cuestionarios y con las preguntas de reflexión en la actividad de Geogebra los alumnos desarrollarán su capacidad de expresión escrita. Mientras que durante las actividades con regla y compás y papiroflexia se fomentará que estos expresen de forma oral los conceptos aprendidos.
- Competencia matemática.

  En todas y cada una de las actividades que realizaremos, los alumnos razonarán matemáticamente y mostrarán los procesos de construcción llevados a cabo en el desarrollo de cada una de ellas. En el caso de la actividad con regla y compás se podrán observar las construcciones auxiliares que les han llevado a resolver el ejercicio. La papiroflexia nos mostrará los pliegues que han elaborado los alumnos para obtener la construcción pedida. Mientras que el programa de Geogebra ayudará a estudiar todos los casos posibles, viendo cómo cambia la situación de los elementos notables del triángulo al cambiar este de una forma continua.
- Competencia digital.

  Fomenta el desarrollo de la creatividad, pero los alumnos deben tener cierta capacidad crítica para valorar tanto las ventajas como los inconvenientes que presentan las tecnologías para el desarrollo de un buen aprendizaje.

  Dicha competencia será desarrollada con la actividad de Geogebra. Al ser la última de las actividades, los alumnos ya habrán estudiado los conceptos y podrán juzgar y analizar las distintas construcciones, además de consolidar sus imágenes conceptuales.

- Aprender a aprender.

  Para consolidar un aprendizaje los alumnos deben estar motivados, sintiéndose partícipes del mismo y alcanzando las metas propuestas.

  Nuestras actividades tienen el objetivo de motivar al alumnado a través de metodologías diferentes que les muestren una forma más atractiva de estudiar la geometría. Para que los alumnos se sientan retados a obtener la solución se irá incrementando de manera progresiva la dificultad de los ejercicios planteados y con ello convertirse en protagonistas de sus logros.

- Competencias sociales y cívicas.

  Durante el desarrollo de las clases se fomentará la participación democrática del alumnado, la comunicación y el respeto de los distintos puntos de vista. Es por ello que a lo largo de todas nuestras actividades se animará a los alumnos a participar y a expresar sus opiniones acerca de las diferentes construcciones geométricas trabajadas.

- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.

  Una vez realizada la primera de las actividades, los alumnos ya habrán podido familiarizarse con los conceptos que se van a trabajar en todas las sesiones, por lo que el inicio de la actividad con papiroflexia propiciará que los alumnos desarrollen su capacidad creativa y emprendedora. Para ello se les dejará un espacio de tiempo en el que ellos mismos investiguen cómo obtener las construcciones vistas en la sesión anterior, esta vez con un triángulo de papel.

- Conciencia y expresiones culturales.

  Durante las clases se incluirán referencias al desarrollo matemático y su evolución a lo largo de la historia, incentivando en el alumnado el respeto por otras culturas y manifestaciones artísticas. En nuestro caso, nos ayudaremos de la historia de la geometría para mostrarles a los alumnos cómo esta es una rama de las matemáticas que ha contribuido a facilitar la vida del ser humano y que no se trata de algo abstracto en donde sólo existen rectas, puntos y fórmulas.

Además, de manera transversal a las actividades desarrolladas a lo largo de este TFM, se trabajarán algunos de los contenidos correspondientes al bloque 1 “procesos, métodos y actitudes en matemáticas”, que establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria, tales como la reflexión de los resultados obtenidos, el empleo de estrategias y procedimientos para resolver problemas concretos, expresar de forma razonada los procesos de resolución de un problema…

La enseñanza de la geometría, al igual que ocurre con cualquier otra materia, está directamente relacionada con la visión que tienen los docentes sobre ella. En el caso de la geometría, esta ha sido tradicionalmente enseñada mediante clases magistrales y aprendizajes memorísticos.

Con el objetivo de analizar si los futuros docentes tienen una visión de la enseñanza de la geometría enfocada a la experimentación y a las metodologías constructivistas, autores como Barrantes y Blanco (2005) basaron en ello algunas de sus investigaciones, a través de las cuales observaron que en la actualidad existe un cierto grado de disociación entre las metodologías clásicas, con las que los futuros docentes fueron formados durante su educación primaria y secundaria, frente a la tendencia constructivista actual.

Por medio de estas investigaciones podemos percibir la influencia que tienen los docentes sobre sus alumnos, el cómo les enseñen o les guíen en sus aprendizajes, influirá notablemente en las concepciones que estos tengan sobre lo estudiado.

Debido a ello, existen algunas organizaciones comprometidas con la mejora de la enseñanza y el aprendizaje. En el caso de la enseñanza de las matemáticas destacamos a nivel internacional, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). El cual, dentro de su publicación *“Principios y estándares para la educación matemática”*, recoge una serie de metodologías didácticas interactivas con programas sencillos, para facilitar la comprensión y el aprendizaje. En el caso de la geometría hacen especial hincapié en que los alumnos desarrollen su capacidad de visualización y razonamiento espacial (Marín y Lupiañez, 2005).

Con nuestro TFM complementamos la labor de estas investigaciones y organizaciones, analizando la visión que tienen los alumnos sobre la geometría y proponiendo tres metodologías diferentes que ayuden a los alumnos a aprender y comprender mejor las relaciones que se dan entre los elementos notables de los triángulos.

Diversos autores, como Piaget, Van Hiele, Vinner… han demostrado el desarrollo cognitivo que produce en los alumnos el conocimiento matemático, y en concreto la geometría, pues, además de servir como herramienta para describir el espacio que nos rodea, genera en el alumnado la capacidad de abstracción, razonamiento y visualización espacial, entre otros procesos cognitivos.

Es por esto que la geometría no solamente se reduce a formas, conceptos o teoremas, sino que abarca muchos otros aspectos que difícilmente se logran con otras ramas de las matemáticas. Permite explorar, experimentar y cuestionarse.

Por lo tanto, consideramos que fomentar la comprensión de la geometría mediante diferentes instrumentos manipulativos contribuirá a mejorar la visión que tienen de ella los alumnos, les ayudará a mejorar su capacidad de abstracción y razonamiento, no sólo en el ámbito de las matemáticas, sino en muchos otros, y fomentará un pensamiento crítico y reflexivo.

3. OBJETIVOS

El objetivo principal de este TFM es comparar diferentes metodologías didácticas y su contribución a mejorar el proceso de enseñanza – aprendizaje de la geometría. En concreto a la comprensión y conocimiento de los puntos y rectas notables de un triángulo.

Para ello analizaremos cuál de ellas contribuye de un modo más completo a la comprensión de los diferentes conceptos por los estudiantes. De tal manera que se pueda conseguir que los alumnos/as tengan otra visión sobre el estudio de la geometría.

Con el uso de metodologías diferentes pretendemos, además, contribuir a la motivación del alumnado, pues la motivación es uno de los factores más influyentes para un buen desarrollo de la enseñanza – aprendizaje. (Gil de la Serna y Escaño, 2010).

Tal y como afirman otros autores, la motivación generalmente no es algo intrínseco en los estudiantes, sino que los docentes deben de conseguirlo mediante propuestas didácticas de aprendizaje activo (Alsina y Domingo, 2007).

El trabajo se desarrollará en tres partes:

Primero, prepararemos un pre-test para que los alumnos nos den su visión sobre la geometría. Después una vez finalizadas las actividades con las diferentes metodologías, realizaremos un post–test. Mediante estos cuestionarios pretendemos ver si ha cambiado la percepción que tienen los alumnos sobre estudiar geometría y que es lo qué les ha servido de más ayuda.

En segundo lugar, plantearemos diversas actividades relacionadas con la obtención de los puntos y rectas notables de un triángulo, a través del cálculo de las mediatrices, las medianas, las alturas y las bisectrices. Así como, el estudio de las propiedades de dichos puntos, como son la obtención de las circunferencias circunscrita e inscrita o la recta de Euler. Será en esta parte donde apliquemos metodologías distintas: método clásico (regla y compás), papiroflexia y Geogebra, un software de geometría dinámica, para ver su eficacia en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Por último, se evaluará la eficacia del uso de las diferentes metodologías y se comparará el grado de éxito entre ellas.

Estas actividades se realizarán con un grupo de alumnos de 1º de ESO.

A continuación, con el fin de lograr el objetivo principal, se desglosan los objetivos que nos permitirán alcanzarlo durante el desarrollo este trabajo:

1. Analizar la visión que tienen los alumnos sobre la geometría.
2. Mejorar la actitud de los alumnos hacia el aprendizaje de la geometría.

3. Elaborar diferentes actividades con materiales manipulativos (regla y compás, papiroflexia y Geogebra).
4. Poner en práctica las tres metodologías mostradas.
5. Evaluar el proceso enseñanza – aprendizaje con Geogebra, papiroflexia y método clásico.
6. Comparar la eficacia del uso de cada una de las metodologías.
7. Identificar las mejoras en la percepción que tiene el alumnado sobre la geometría.

4. MARCO TEÓRICO

4.1 La geometría desde la antigüedad hasta nuestros días

La palabra geometría significa medida de la tierra, pues está formada por dos palabras con raíces griegas “geo” y “metrón” que significan tierra y medida, respectivamente.

La aparición de la geometría está históricamente ligada a las necesidades de la humanidad. Ya en el antiguo Egipto era empleada para resolver problemas de la vida diaria, como el cálculo de las parcelas de tierra utilizadas para los cultivos. Dichos cálculos era necesario realizarlos cada vez que se producían inundaciones del río Nilo. Pero no fue hasta la época de los griegos cuando se consideró la geometría plana formal, es decir, empleando demostraciones matemáticas rigurosas (Sánchez, 2012).

Destacan en esa época matemáticos como Tales de Mileto (s.VI a.C), Pitágoras (s.V a.C) o Euclides (s. IV a.C), entre otros. A este último debemos los cinco axiomas[1] que dieron lugar a la *geometría euclidiana o euclídea*, también conocida como *geometría plana*, contenidos dentro del libro *“Los Elementos”.* En dicho libro se unió y axiomatizó, por primera vez, toda la geometría que se conocía hasta la fecha (Hernández y Montesinos, 1992).

La geometría no sufrió ningún cambio sustancial hasta la Edad Moderna, en torno a los siglos XVI y XVII, con el nacimiento de la *geometría analítica,* cuando René Descartes (1596–1650) propuso otro método de resolución de los

[1] Proposición clara y evidente que se admite sin necesidad de demostración.

problemas geométricos, definiendo un sistema de referencia para situar un punto en el plano a través de dos coordenadas (x e y), conocidas en su honor como *coordenadas cartesianas*. Para Descartes, *"la meta perseguida es generalmente una construcción geométrica, y no necesariamente la reducción de la geometría al álgebra"* (Boyer, 1994, p.427).

Cabe destacar, en su aportación a la geometría analítica, a Pierre de Fermat (1601–1665), ya que trabajó usando sistemas de referencia antes de la publicación de René Descartes.

La geometría analítica emplea los ejes cartesianos para representar las figuras geométricas tanto en el plano como en cualquier otra dimensión.

En el siglo XVIII uno de los principales matemáticos fue Leonhard Euler (1707–1783). En sus estudios sobre geometría analítica destaca el uso de las coordenadas para describir el espacio tridimensional. Euler aportó las ecuaciones generales de tres superficies, cilindros, conos y superficies de revolución (Boyer, 1994).

Otra de sus aportaciones a la geometría, concretamente a la geometría sintética o clásica (basada en axiomas), fue el descubrimiento de que los puntos notables de un triángulo, (circuncentro, baricentro y ortocentro), cumplen una misma ecuación, es decir, pertenecen a una misma recta. En su honor dicha recta recibe el nombre de *"Recta de Euler".* (Ver figura 1).

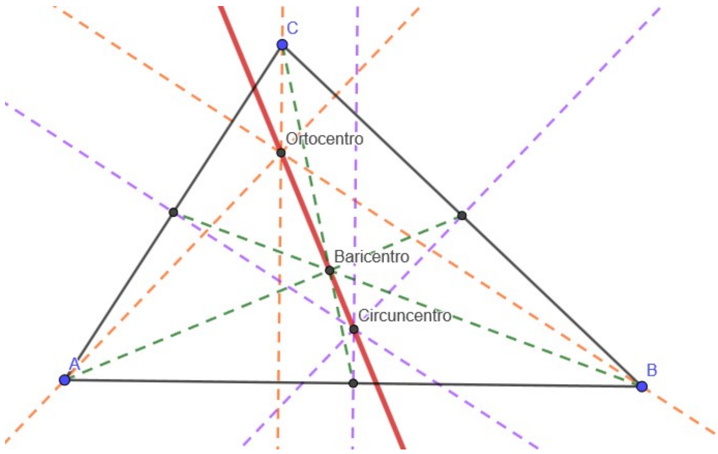


Figura 1: Rectas y puntos notables de un triángulo. Recta de Euler.

Ya en el siglo XIX se desarrollaron las geometrías no euclídeas, las cuales difieren en alguno de los cinco postulados de Euclides. El postulado que creó mayor controversia, y por el que surgen dichas geometrías, es el quinto: *"El postulado de las paralelas".*

> Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado sean menores que dos ángulos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos (Euclides, 300 a.C).

Este quinto postulado siempre provocó debate porque no se sabía si se podía deducir de los otros cuatro. Debido a ello, muchos matemáticos trataron de demostrar si se deducía o era independiente.

Finalmente, se demostró que este quinto postulado era independiente de los otros cuatro, dando lugar a las geometrías no euclídeas. Dos de estas geometrías fueron la hiperbólica y la elíptica, y ambas consideran la superficie con una curvatura constante. En cambio, la hiperbólica considera la curvatura negativa mientras que en la elíptica esta es positiva. Algunos de los matemáticos que formalizaron la geometría hiperbólica fueron Gauss (1777–1855), Lobachewski (1792–1856) y Bolyai (1802–1860).

A finales del siglo XIX, el matemático alemán Bernhard Riemann (1826–1866), siguiendo a su predecesor Carl Friedrich Gauss con el estudio de las diferentes geometrías, consideró todas ellas, de manera infinitesimal, como euclídeas. Surge así la geometría diferencial, más conocida como geometría riemanniana. Con ella Riemann se centró en estudiar la curvatura para "n" dimensiones, llevándole a desarrollar un nuevo concepto de fuerza, el cual sirvió años más tarde como base para el desarrollo de la teoría general de la relatividad enunciada por Albert Einstein en 1916 (Stewart, 2008).

Durante el siglo XX, una de las principales características que marcó el desarrollo de la geometría fue la generalización y aceptación de la geometría multidimensional.

Con el auge de los ordenadores, durante los años setenta, surge una nueva geometría para describir la naturaleza, la geometría fractal, desarrollada por Benoît Mandelbrot (1924 - 2010).

Una vez comenzado el siglo XXI, debido a las nuevas necesidades de la sociedad, las matemáticas, al igual que cualquier otra ciencia, cada vez tienen sus áreas menos diferenciadas y están muy interrelacionadas unas con otras (Bombal, 2015).

4.2 Análisis de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría

El estudio de la geometría dentro del contexto escolar, al igual que a lo largo de la historia, ha ido cambiando con el paso de los años.

Principalmente, las dos corrientes psicológicas más extendidas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a lo largo del siglo XX, han sido la conductivista y la constructivista.

El conductivismo tiene como base un aprendizaje de tipo memorístico, en el que el alumno aprende interiorizando la información que le transmite el profesor, dando una gran importancia a las secuencias de ejercicios (con dificultad ascendente) y donde el aprendizaje se adquiere de manera rutinaria. Mientras que la corriente constructivista se apoya en el desarrollo cognitivo del alumno. Este aprende descubriendo por sí mismo nuevos conceptos, los cuales interiorizará con la ayuda proporcionada por la figura del profesor (Armendáriz, Azcárate y Delofeu, 1993).

Continuando con la corriente constructivista, Jean Piaget (1896–1980) investigó sobre cómo los niños desarrollan la visión espacial y asimilan los conceptos geométricos. Según Piaget las personas desarrollan su conocimiento explorando, descubriendo y pensando por sí mismos de manera crítica y no por el mero hecho de que alguien les transfiera directamente información. Es decir, aprenden construyendo sus propios significados de los contenidos a los que tienen acceso (teoría del aprendizaje significativo, cuyas características serán explicadas más adelante). Concretamente, Piaget desarrolla un constructivismo cognitivo basado en el individuo como precursor de su propio conocimiento (Santrock, 2004).

Para Piaget los niños desarrollan su mente de dos formas, mediante dos instrumentos internos: la *asimilación* (reciben un nuevo concepto) y la *acomodación* (interiorizan los nuevos conceptos).

Bajo la influencia de Piaget, el psicólogo David Ausubel (1976) investigó también acerca de cómo se desarrolla y qué caracteriza el aprendizaje de los alumnos, dando lugar a la teoría del aprendizaje significativo.

> La teoría del aprendizaje significativo aborda todos y cada uno de los elementos, factores, condiciones y tipos que garantizan la adquisición, la asimilación y la retención del contenido que la escuela ofrece al alumnado, de modo que adquiera significado para el mismo (Rodríguez, 2004, p.535).

Diversos autores, como Braga (1991) y De la Torre (2003), destacan la aportación de Piaget con su teoría del desarrollo cognitivo en niños y adolescentes, pero afirman que se trata de una teoría solamente del desarrollo y no del aprendizaje, ya que Piaget considera el aprendizaje como un proceso biológico del individuo. Para este, el paso del alumno de un nivel de aprendizaje inferior a otro superior, lo determinan sus cambios biológicos y puede producirse de manera innata.

Otro de los modelos que surgen en la segunda mitad del siglo XX es el conocido como modelo de Van Hiele, de especial importancia en el campo de la geometría. A diferencia del modelo desarrollado por Piaget, este modelo da importancia a cómo se enseñan los contenidos y al lenguaje empleado para ello.

Por un lado, el modelo Van Hiele se plantea dar respuesta a cómo los alumnos pasan de un nivel de razonamiento a otro, destacando para ello el papel del docente, pues para los Van Hiele la forma de enseñar la geometría influye directamente en su aprendizaje.

Por otro lado, el modelo Van Hiele considera el lenguaje como algo fundamental para el desarrollo del pensamiento del alumno y lo estructura en niveles paralelamente a los del razonamiento. Por el contrario, Piaget no le da prácticamente ninguna importancia.

Para los Van Hiele, la geometría no se aprende simplemente por el crecimiento del individuo, el cómo se la enseñen también influye. Se trata de un modelo de razonamiento geométrico basado en conseguir un aprendizaje significativo, aprender construyendo significados (teoría constructivista), como ya decía la teoría de Piaget.

El modelo de razonamiento de Van Hiele surge de las propias experiencias vividas en el aula por un matrimonio de profesores holandeses, Pierre M. Van Hiele y Dina Van Hiele Geldof. Durante sus clases de geometría observaron que los alumnos tendían a memorizar los conceptos y solo sabían aplicarlos en situaciones similares, sin ser capaces de utilizarlos en otro tipo de problemas o contextos. Ambos profesores, en sus respectivas tesis doctorales, estudiaron el desarrollo del razonamiento geométrico desde dos aspectos:

- **Descriptivo:** explica cómo se desarrolla el pensamiento geométrico en los alumnos a través de cinco “niveles de razonamiento”.
- **Prescriptivo:** facilita a los docentes el proceso enseñanza – aprendizaje definiendo cinco “fases de aprendizaje”.

(Gutiérrez y Jaime, 1990).

La clasificación realizada por los Van Hiele de los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje que también recogen otros autores como Braga, 1991; Jai Gutiérrez y Jaime, 1990; Gutiérrez, 2006; Vargas y Gamboa, 2013, es la siguiente:

<u>Niveles de razonamiento</u>

- <u>Nivel 1: Reconocimiento o visualización</u>.
  El alumno es capaz de distinguir las figuras geométricas por su apariencia, pero no por sus propiedades.
- <u>Nivel 2: Análisis.</u>
  Se comienzan a distinguir algunas de las propiedades de las figuras así como a diferenciar las partes de estas, pero aún no son capaces de relacionar diferentes formas entre sí.
- <u>Nivel 3: Deducción informal u orden.</u>
  De manera informal los alumnos pueden deducir y demostrar las propiedades de las figuras geométricas y reconocerlas.
- <u>Nivel 4: Deducción.</u>
  Los alumnos ya realizan demostraciones formales, siendo conscientes de la necesidad de justificar las propiedades atribuidas a una figura geométrica. No es necesario trabajar con objetos geométricos concretos.

- Nivel 5: Rigor.

  Conocimiento de diferentes sistemas axiomáticos, trabajo abstracto con el que se alcanza el máximo rigor matemático. Este nivel puede ser alcanzado por estudiantes universitarios con altas capacidades para la geometría.

El paso de un nivel a otro debe de ser secuencial, cada nivel depende del anterior y es independiente de la edad del alumno.

Fases de aprendizaje

- Fase 1: Información.

  El profesor informa y dialoga con los alumnos el tema que se va a tratar, el tipo de ejercicios y problemas a realizar y los materiales que se van a emplear.
- Fase 2: Orientación dirigida.

  Durante esta fase los alumnos comienzan a explorar, descubrir y aprender los conceptos y propiedades del tema en el que se encuentran. Para ello el profesor debe de guiarles hacia ese objetivo a través de las actividades propuestas progresivamente.
- Fase 3: Explicitación.

  Una vez adquiridos los conocimientos sobre el tema, los alumnos intercambian opiniones y explican cómo han resuelto las actividades. Para lo cual el profesor les ayudará a emplear un lenguaje apropiado con el que poder justificar sus respuestas de manera adecuada.
- Fase 4: Orientación libre.

  Los alumnos aplican los conocimientos adquiridos a lo largo del tema para resolver los problemas planteados. El profesor deberá plantear ejercicios que puedan resolverse de diferentes formas o que tengan varias soluciones.
- Fase 5: Integración.

  En esta última fase no se introducen nuevos conceptos, sino que los nuevos conocimientos vistos en el tema se relacionan con otros adquiridos antes, de manera que los alumnos lo integran en su conocimiento.

Las fases sirven de guía al docente para elaborar las actividades que ayudan al alumno a pasar de un nivel a otro. No siendo ninguna de ellas exclusiva de un nivel. Con ellas, los profesores contribuyen en primer lugar a que los alumnos adquieran los conocimientos básicos para después poder desarrollar las actividades que contribuirán a desarrollar y afianzar dichos conocimientos.

En ambos modelos, la teoría del desarrollo cognitivo de Piaget y el modelo de razonamiento de Van Hiele, se parte de que el alumno comienza a desarrollar un aprendizaje de manera inductiva para ir poco a poco adquiriendo razonamientos más deductivos y abstractos (Braga, 1991).

A finales del siglo XX, aparece en Europa otro modelo de enseñanza – aprendizaje, el conocido como modelo de Vinner (1983, 1991), basado en el aprendizaje de conceptos matemáticos con un fuerte apoyo gráfico (Gutiérrez y Jaime, 2015).

Este modelo explica el desarrollo mental de los alumnos cuando aprenden conceptos geométricos nuevos.

"El modelo de Vinner distingue dos principales formas de recepción de la información matemática por los estudiantes: verbal y gráfica" (Gutiérrez y Jaime, 2015, p.58).

La información verbal es aquella que Vinner denomina "concepto" y hace referencia a la definición formal del objeto matemático, mientras que la gráfica es denominada "imagen conceptual" y se trata de la representación de dicho concepto en la mente de cada persona. Para definir cualquier concepto se emplean una serie de características del mismo, las cuales pueden ser imprescindibles para definirlo o por el contrario prescindibles. Se trata de los "atributos relevantes e irrelevantes".

Los atributos relevantes son aquellas características o propiedades necesarias para definir un concepto. Por ejemplo, en el concepto paralelogramo un atributo relevante es que tiene cuatro lados.

Los atributos irrelevantes son aquellas características o propiedades no necesarias para definir un concepto, no se cumplen siempre, pero que pueden servir para realizar clasificaciones. Por ejemplo, en el concepto paralelogramo un atributo irrelevante es que tenga los lados iguales (Chapa, Gutiérrez y Jaime, 1992).

El modelo de Vinner propone que se muestre a los alumnos un gran número de ejemplos y contraejemplos de los diferentes conceptos, para evitar que algunos de los atributos irrelevantes actúen como “distractores” y se consideren como características imprescindibles del concepto. Se distinguen dos tipos de distractores, los de orientación y los de estructuración.

Los distractores de orientación son aquellas características visuales que el alumno incluye en su esquema conceptual, las cuales no se corresponden con la definición del concepto. Por ejemplo, los alumnos interiorizan que un cuadrado siempre está apoyado en un lado paralelo al borde del papel y en cambio un rombo se apoya en un vértice.

Los distractores de estructuración son representaciones débiles de un concepto en donde algunas de las propiedades del concepto son excluidas. Por ejemplo, en el caso de un cilindro, que su altura siempre sea mayor que el ancho de la base.

En definitiva, este modelo se basa en que los alumnos tengan el mayor número de imágenes posibles asociadas a un concepto, lo que les ayudará a identificar el concepto en muchos más casos y con mayor facilidad. Haciendo que la imagen conceptual sea lo más cercana, preferiblemente igual, que la definición. Solamente cuando los conceptos geométricos son muy simples no son necesarias todas esas imágenes, pudiendo adquirirlos mediante la identificación y la construcción.

4.3 Metodologías de enseñanza de la geometría

En el presente TFM se han trabajado tres de las metodologías existentes para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Las metodologías escogidas han sido la clásica o sintética (trabajo con regla y compás), la papiroflexia y un programa de geometría dinámica, Geogebra.

– Método clásico (regla y compás)

La metodología clásica para el estudio de la geometría es toda aquella que se puede desarrollar con el uso de la regla y el compás, tal y como estableció la geometría griega (Pérez, 2010).

A lo largo de la historia en la enseñanza de la geometría, destaca como herramienta fundamental, el libro “Los Elementos” de Euclides, que pese a sus casi dos milenios de antigüedad, ha sido el más traducido y adaptado para su uso en el contexto escolar.

Durante la época de los Pitagóricos (s. V a.C), la geometría era empleada como herramienta para demostrar todo lo exacto, puro y universal, focalizando su uso en resolver unos problemas concretos: la cuadratura de círculo (el más famoso de los problemas griegos), la duplicación del cubo y la trisección del ángulo (Hernández y Montesinos, 1992).

Estos tres problemas clásicos de la antigua Grecia no pudieron ser resueltos únicamente con la regla (no graduada) y el compás. Sin embargo, se consiguieron resolver mediante el uso de otros instrumentos y medios mecánicos, pero el empleo de estos fue rechazado por los geómetras griegos al no considerarlos puramente geométricos.

La enseñanza de la geometría durante la primera mitad del siglo XX se relegó a un segundo plano en beneficio del álgebra y la teoría de conjuntos. No fue hasta bien entrada la década de los setenta cuando, después de ver el fracaso de la “matemática moderna”, la enseñanza de la geometría comenzó a cobrar importancia (Sánchez, 2012).

La característica principal de la matemática moderna era la búsqueda del rigor lógico, obviando las operaciones más elementales y los recursos manipulativos. La geometría fue sustituida por el álgebra, lo que supuso la carencia de visión espacial de los alumnos de la época. Esta matemática carecía de significados, era abstracta y no era una matemática que estuviese al servicio de la sociedad (De Guzmán, 2007; Sorando, 2002).

Posteriormente, la geometría se incluyó en los currículums de la Educación Primaria y Secundaria, pero estaba basada en la memorización de conceptos y la resolución sistemática de problemas métricos. Esta metodología no contribuía a ayudar a los alumnos a comprenderla, ni tampoco a los docentes a enseñarla (Barrantes, Balletbo y Fernández, 2014).

Durante los últimos años, tal y como destacan autores como Barrantes et al. (2014, p.11), "*la nueva culturización exige un cambio en los contenidos y metodología de enseñanza de la Geometría en la Enseñanza Secundaria, más orientados hacia metodologías activas como son la resolución de problemas y la metodología de laboratorio."*

A través de la resolución de problemas, los alumnos construyen su propio aprendizaje enfrentándose a situaciones de la vida real complementadas con la metodología de laboratorio. Esto contribuye a la formación de los conceptos geométricos siguiendo el lema de "aprender haciendo" (Barrantes et al. 2014).

– Papiroflexia

La papiroflexia es el *"arte de dar a un trozo de papel, doblándolo convenientemente, la forma de determinados seres u objetos"* (Diccionario de la Real Academia Española, 2006).

Originariamente el término con el que se conoce la papiroflexia es *origami,* palabra de origen japonés formada por los términos "ori" (doblar) y "kami" (papel).

Durante los siglos I y II d.C aparece el papel en China, llegando hacia el siglo VI d.C a Japón. Allí se creó el arte de la papiroflexia, empleado en su origen como un entretenimiento para las clases altas, ya que el papel en ese momento era considerado como un artículo de lujo. Siglos después, durante el período Tokugawa (1603-1867), se extendió su uso al resto de la población y se generó una gran corriente cultural que se extendió hasta occidente (Royo, 2002).

La papiroflexia moderna, tal y cómo la empleamos hoy en día se la debemos al japonés Akira Yoshizawa (1911–2005), que fue quién creó el sistema de plegado para las diferentes construcciones: "Sistema Yoshizawa-Randlett" 1956, (Grupo Pi, 2009).

Cabe destacar que la corriente más purista de la papiroflexia no permite el uso de tijeras ni pegamento, empleando únicamente un trozo de papel cuadrado (Royo, 2002; Berenguer, Flores, Lupiáñez, Marín, y Molina, 2011).

¿Por qué relacionar la papiroflexia con las matemáticas y en concreto con la geometría?

Como bien nos dice Royo (2002, p.178), *“la mejor manera de darse cuenta de la relación entre las matemáticas y la papiroflexia es desplegar un modelo y observar el cuadrado inicial”,* pues es ahí donde se nos va a presentar un entramado de líneas que satisfacen una serie de propiedades.

Tal y cómo indican diversos autores, Berenguer et al. (2011), a través de la papiroflexia podemos realizar las mismas construcciones que utilizando la regla y el compás.

A la hora de emplear el papel como recurso didáctico en la práctica docente se siguen unas modalidades menos restrictivas que las empleadas por la papiroflexia original. Son en estas aplicaciones de la papiroflexia donde nos encontramos con las matemáticas:

- **Papiroflexia modular:** poliedros y figuras geométricas. Consiste en construir figuras independientes (módulos), provistas de solapas para unirse entre sí y poder construir diferentes poliedros.
- **Axiomas de constructibilidad:** teoría de puntos constructibles con origami, paralela a la existente con regla y compás. Se trata de trabajar la geometría plana elemental, interpretando geométricamente los pliegues realizados. En ello se basará la actividad con papiroflexia de este TFM.
- **Diseño de figuras:** métodos matemáticos para la creación papirofléctica. Partiendo de las cicatrices o pliegues de una hoja de papel se trata de obtener la figura a la que corresponden, intentando obtener la secuencia de plegado.

(Royo, 2002).

– Software informático, Geogebra

Desde hace unos años, uno de los recursos didácticos empleados en las aulas de matemáticas es el uso de los programas informáticos. Estos permiten estudiar la geometría como algo dinámico, facilitando al alumnado la visualización y modificación de las diferentes construcciones geométricas.

En este TFM utilizaremos el programa de geometría dinámica, Geogebra. Se trata de un software matemático interactivo libre, creado en 2001 por Markus Hohenwarter, "*que pone a nuestra libre disposición un entorno sencillo, amigable y potente con el que podemos realizar fácilmente construcciones geométricas y analíticas"* (Losada, 2007, p.223).

Geogebra contribuye a que los estudiantes trabajen las matemáticas de manera experimental, el interfaz para trabajar es muy sencillo y pueden construir diferentes representaciones de un mismo objeto, de manera que les ayude a comprender e interiorizar mucho mejor los conceptos. Pero además de ser una herramienta muy útil para el aprendizaje de la geometría, es un gran apoyo para los docentes en su labor de enseñar, ya que con ella pueden mostrar a sus alumnos los nuevos conceptos desde diferentes perspectivas:

- **Demostrar y visualizar:** se demuestran más fácilmente algunos conceptos tales como la simetría, los giros, etc. El programa permite emplear diferentes sistemas de representación.
- **Realizar construcciones geométricas:** mediante Geogebra se pueden dibujar diferentes construcciones, las cuales pueden ser dotadas de movimiento para una mejor comprensión. Siendo esta aplicación de especial interés para lograr los objetivos de este TFM.
- **Descubrir y experimentar:** los alumnos pueden por sí solos descubrir nuevos conceptos y propiedades. Además del plano donde se muestran las construcciones geométricas, el programa también dispone de una ventana donde se muestran los datos algebraicos de las mismas. Concretamente para nuestro TFM los alumnos pueden descubrir la formación de la recta de Euler y ver sus particularidades, como es el caso de un triángulo equilátero.

- **Crear nuevos materiales didácticos:** los profesores pueden proporcionar a los alumnos ejercicios interactivos a los que ellos pueden acceder y realizar en cualquier ordenador con conexión a internet, ya que no es necesario tener el programa descargado en el ordenador.

(Hohenwarter y Fuchs, 2005).

Con el uso de programas de geometría dinámica los alumnos pueden descubrir y experimentar por sí mismos, siempre con la figura del profesor como guía, de manera que no se convierta su manejo en el mero hecho de pulsar un botón y resolver un problema por completo (Mora, 2007).

El empleo de Geogebra como herramienta complementaria al uso del lápiz y el papel para la resolución de problemas geométricos ha sido el objeto de la investigación llevada a cabo por Iranzo y Fortuny (2009). En ella muestran los resultados obtenidos por un grupo de alumnos, al realizar dos actividades con ambas metodologías, lápiz y papel y Geogebra, analizando para ello las estrategias que utilizan los alumnos para resolver los dos problemas propuestos y cómo influyen las dos herramientas en la adquisición del conocimiento. Con esta investigación concluyen que el empleo de Geogebra ayuda a los alumnos a visualizar los conceptos geométricos, lo que les supone menores errores cuando resuelven un problema geométrico de manera algebraica.

5. DISEÑO Y DESARROLLO DE LAS ACTIVIDADES

5.1 Diseño

Tal y como se definió en el apartado 3, el objetivo principal de este TFM ha sido comparar y analizar la contribución de tres metodologías diferentes a la mejora del proceso de enseñanza – aprendizaje de los puntos y rectas notables de un triángulo.

Antes de diseñar las tres actividades que se realizaron con los alumnos, se elaboraron dos cuestionarios, un pre-test y un post-test (ver anexo I). El objetivo de estos cuestionarios fue comparar la visión que tienen los alumnos sobre el aprendizaje de la geometría antes y después de realizar las actividades.

Ambos cuestionarios han sido validados por tres profesores. Dos de ellos, Daniel Sadornil Renedo y José Manuel Diego Mantecón, pertenecientes al Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Cantabria. La tercera profesora fue Carmen Barrio Marañón, profesora de educación secundaria y perteneciente al Departamento de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Cantabria.

Siguiendo lo establecido en la Ley Orgánica 3/2018, de 5 de diciembre, de Protección de Datos Personales y Garantía de los derechos digitales, se mostraron al director del centro educativo los cuestionarios y las actividades que se iban a desarrollar.

Este informó de que las familias de los alumnos firmaron un documento a principio de curso para que estos puedan participar en este tipo de actividades. Por lo tanto, no ha sido necesario realizar un documento específico para las familias.

Para la realización de la primera actividad se diseñó una ficha informativa, donde se recogieron todos los conceptos geométricos que fueron tratados en las tres actividades, así como sus métodos de construcción con regla y compás. Junto con ella se entregó a los alumnos otra ficha con diferentes triángulos en los cuales tuvieron que construir los puntos y las rectas nobles. (Ver anexos III y IV).

Para la segunda actividad, construcciones geométricas con papiroflexia, se diseñó un Power Point explicativo con el que los alumnos pudieron seguir paso a paso todas las indicaciones necesarias para realizar la actividad. (Ver anexo V).

Finalmente, para la actividad con Geogebra, se presentó una ficha – guía, con la que los alumnos pudieron familiarizarse paso a paso con las herramientas del programa e ir realizando las diferentes construcciones. Al término de la actividad respondieron unas preguntas para comprobar los conocimientos adquiridos. (Ver anexo VI).

5.2 Desarrollo y análisis de resultados

La realización de las tres actividades se ha llevado a cabo con un grupo de 25 estudiantes de 1º de ESO en el IES Zapatón de Torrelavega, Cantabria.

El IES Zapatón se localiza en un barrio urbano cuya población mayoritariamente pertenece a una clase social media – baja. El grupo de alumnos con los que se ha realizado las actividades de este TFM pertenecen al programa bilingüe del centro. Durante el presente curso los alumnos todavía no han estudiado geometría en la asignatura de matemáticas, por lo que parten con la base que tienen de la Educación Primaria y lo estudiado este curso en la asignatura de plástica.

Las actividades se han desarrollado en tres sesiones consecutivas de 50 minutos. Previamente, se utilizaron los últimos 15 minutos de una clase ordinaria para explicar a los alumnos en qué iban a consistir las próximas sesiones y que pudiesen realizar el pre – test. Para la realización del post – test se emplearon 10 minutos de la primera clase posterior a la realización de las actividades.

A continuación, se detallan como se llevaron a cabo cada una de las actividades y los resultados obtenidos.

1ª Sesión

La primera sesión consistió en calcular las rectas y los puntos notables de un triángulo mediante el uso de la regla y el compás, metodología clásica.

Para ello, primero realizamos una lectura en común de la ficha informativa (ver anexo III) que fue entregada a los alumnos, de manera que estos pudiesen conocer los términos con los que iban a trabajar y a su vez recordar el cálculo de algunas construcciones elementales. A continuación, se comenzó la ficha de actividades con la propuesta de varios tipos de triángulos, para que los alumnos obtuviesen en cada uno de ellos, de manera individual, el punto notable que se le indicaba. De este modo los alumnos pudieron familiarizarse con las construcciones geométricas empleadas y asimilar su significado.

El último ejercicio propuesto de esta ficha estaba destinado a calcular la recta de Euler, donde para ello tenían que obtener el circuncentro, el baricentro y el ortocentro en un mismo triángulo. Con este ejercicio se pretendía que los alumnos observaran por sí mismos cómo dichos puntos se unen entre sí formando una línea recta: la recta de Euler.

A lo largo del desarrollo de la sesión se explicó a los alumnos más detenidamente tanto el concepto como la construcción de las circunferencias circunscrita e inscrita, siendo esta última la que mayores complicaciones generó a los alumnos, puesto que, para hallar el radio de dicha circunferencia, es necesario construir una recta perpendicular a uno de los lados del triángulo desde el incentro. Y tal y como se pudo observar durante el desarrollo de las actividades, los alumnos mostraron dificultades para entender y trazar las rectas perpendiculares, puesto que lo mismo ocurrió cuando calculaban las alturas de un triángulo.

Según dicen Barrantes y Zapata (2008), en la mayoría de los libros de texto se muestra a los alumnos figuras con lados paralelos a los bordes del libro de manera que las rectas perpendiculares se dibujan siempre siguiendo la dirección de uno de estos lados. Esto provoca no sólo que los alumnos tengan una imagen errónea del concepto, y piensen que las perpendiculares siempre son horizontales y verticales, sino que no sepan construir perpendiculares cuando no siguen las direcciones de los lados del papel, que es lo que nos ocurría a nosotros.

Al terminar la sesión se recogió la ficha de las actividades con el fin de analizar aquellos puntos en los que los alumnos habían encontrado mayores dificultades y en cuáles el grado de éxito había sido mayor.

	Construcciones correctas y asimilación de conceptos	Construcciones incompletas y mal argumentadas	No realizan la actividad
1. Cálculo del circuncentro y circunferencia circunscrita.	100%	_	_
2. Cálculo del baricentro.	88%	4%	8%
3. Cálculo del ortocentro.	64%	36%	_
4. Cálculo del incentro y circunferencia circunscrita.	44%	52%	4%
5. Construcción de la recta de Euler.	52%	28%	20%

Tabla 1. Resultados de la actividad del alumnado con regla y compás.

A continuación, se muestran algunas de estas actividades realizadas por los alumnos, así como el análisis de los resultados obtenidos. En esta primera ficha la mayoría de los alumnos realizaron todas las construcciones geométricas.

1. Cálculo del circuncentro y la circunferencia circunscrita.

La primera de las construcciones fue la que mejor realizaron todos los alumnos, no presentando ninguna dificultad. Los alumnos tenían interiorizado el concepto y la construcción de una mediatriz, únicamente se explicó el concepto de circunferencia circunscrita.

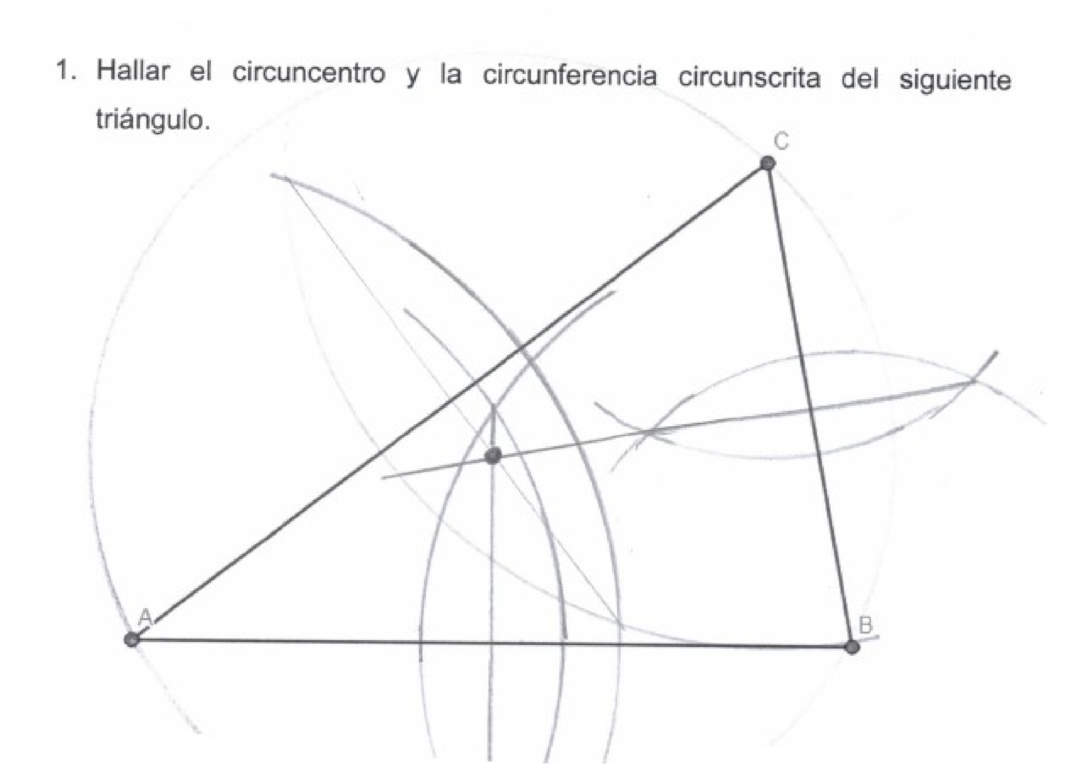


Ilustración 1. Construcción correcta realizada por un alumno.

2. Cálculo del baricentro.

Al igual que ocurría con la primera actividad, casi la totalidad del alumnado ha realizado la construcción pedida sin problemas. Frecuentemente, cuando los alumnos realizan esta construcción suelen confundir el concepto de mediana con el de mediatriz o dibujan las medianas como si fuesen rectas en vez de segmentos. Quizás debido a que los alumnos fueron guiados durante la realización de la actividad, no cometieron estos errores.

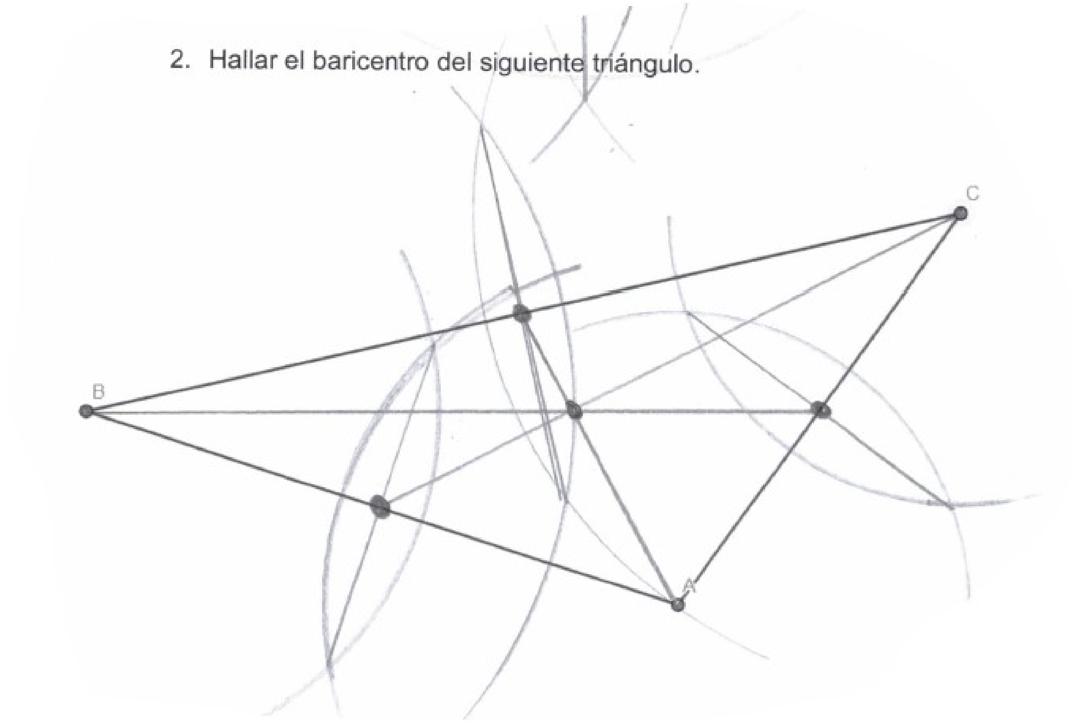


Ilustración 2. Construcción correcta realizada por un alumno.

3. Cálculo del ortocentro.

Como hemos comentado anteriormente, algunos de los alumnos presentaron dificultades a la hora de trazar las alturas del triángulo, debido a que no tiene interiorizado el concepto de perpendicularidad.

Además, normalmente este ejercicio se hace a continuación del cálculo del baricentro, lo que hace que muchos alumnos confundan las medianas con las alturas, como Barrantes y Zapata (2008) han observado. En nuestro caso los alumnos no los confundieron dado que se les guio en cada construcción.

Debido a las dudas generalizadas que surgieron a la hora de trazar las alturas se les indicó cómo realizar las rectas perpendiculares mediante el uso de la escuadra y el cartabón. Los alumnos tuvieron bastantes dificultades con el uso de dichas herramientas. Muchos de ellos, a pesar de que las conocían, comentaron que no les habían enseñado previamente cómo trabajar con ellas.

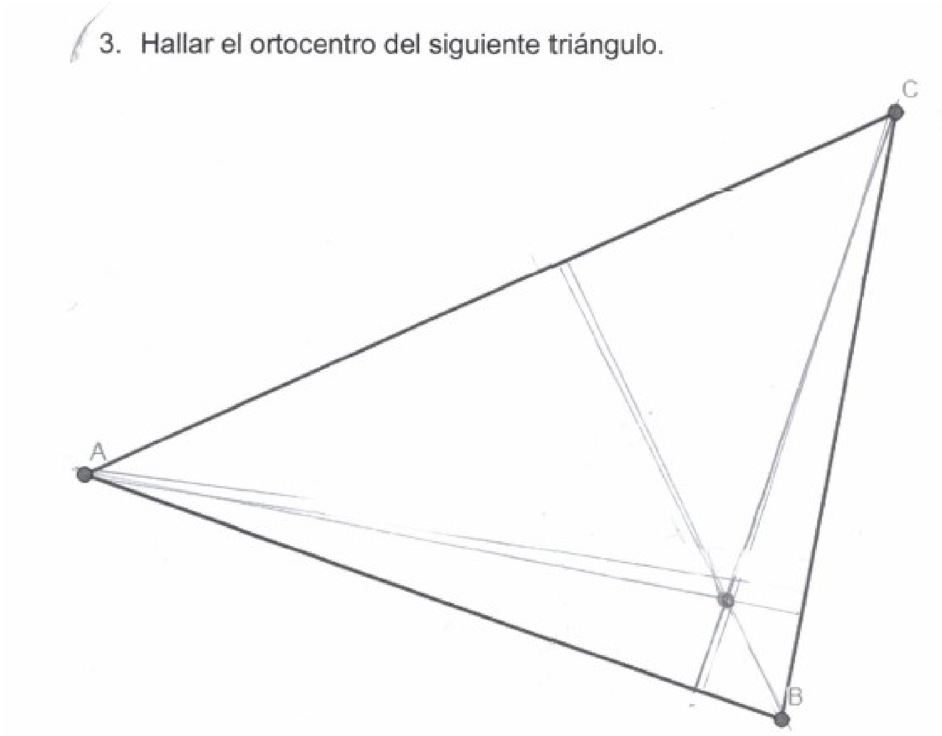


Ilustración 3. Construcción en la que un alumno tiene dificultades para obtener las rectas perpendiculares.

4. **Cálculo del incentro y la circunferencia inscrita.**

Es el ejercicio en el que más dificultades tuvieron los alumnos. Más de la mitad dejaron el ejercicio incompleto. El cálculo de las bisectrices, aunque no era algo nuevo para ellos, les resultó más difícil que el de las mediatrices. Ante las numerosas dudas individuales que fueron surgiendo, y no siendo suficiente con las explicaciones verbales, se decidió hacer una explicación en la pizarra paso a paso junto con los alumnos. Además, en este ejercicio tuvieron la dificultad añadida de calcular la circunferencia inscrita al triángulo, para lo que es necesario emplear el concepto de tangente y perpendicular, siendo el cálculo de esta última el que más problemas causó a los alumnos, tal y como indicamos anteriormente. Fue por ello, que se les explicó durante la clase cómo obtener el radio de la circunferencia inscrita, ya que la primera intención que tuvieron los alumnos fue hacer una circunferencia "a ojo" con centro en el incentro.

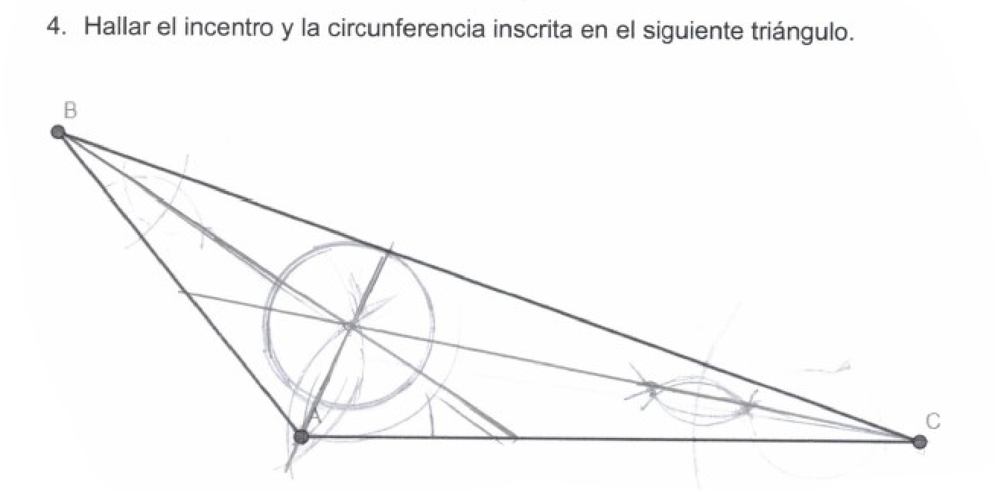


Ilustración 4. Construcción con dificultades para obtener circunferencia inscrita.

5. Construcción de la recta de Euler.

En este caso el triángulo proporcionado era un triángulo acutángulo, de forma que los tres puntos notables se situaran dentro del triángulo.

Destaca en los resultados de este ejercicio que un 20 % de los alumnos lo dejaron en blanco. La principal dificultad que encontraron los alumnos en este ejercicio fue realizar tres construcciones en un mismo triángulo. Durante la realización del ejercicio algunos preguntaban si podían borrar las construcciones auxiliares, ya que les resultaba bastante complicado distinguirlas de la solución pedida. Debido a ello tuvieron dificultades para situar correctamente los puntos notables (ver ilustración 6).

Otros no llegaron a completar el cálculo de los tres puntos notables que forman parte de la recta de Euler (ver ilustración 5).

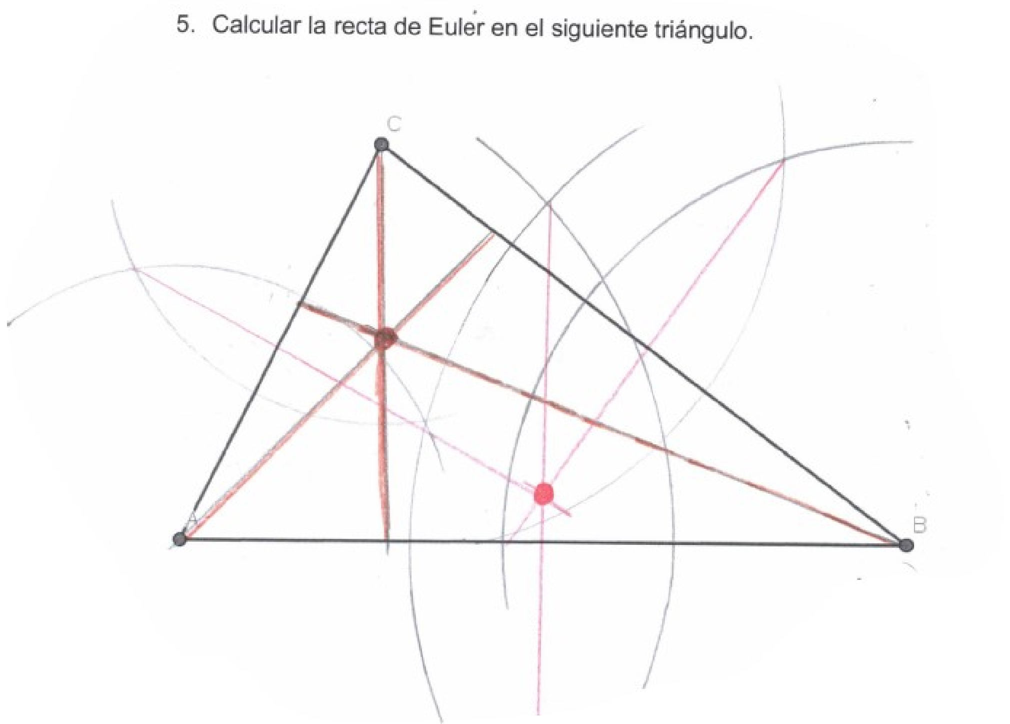


Ilustración 5. Construcción incompleta de la recta de Euler.

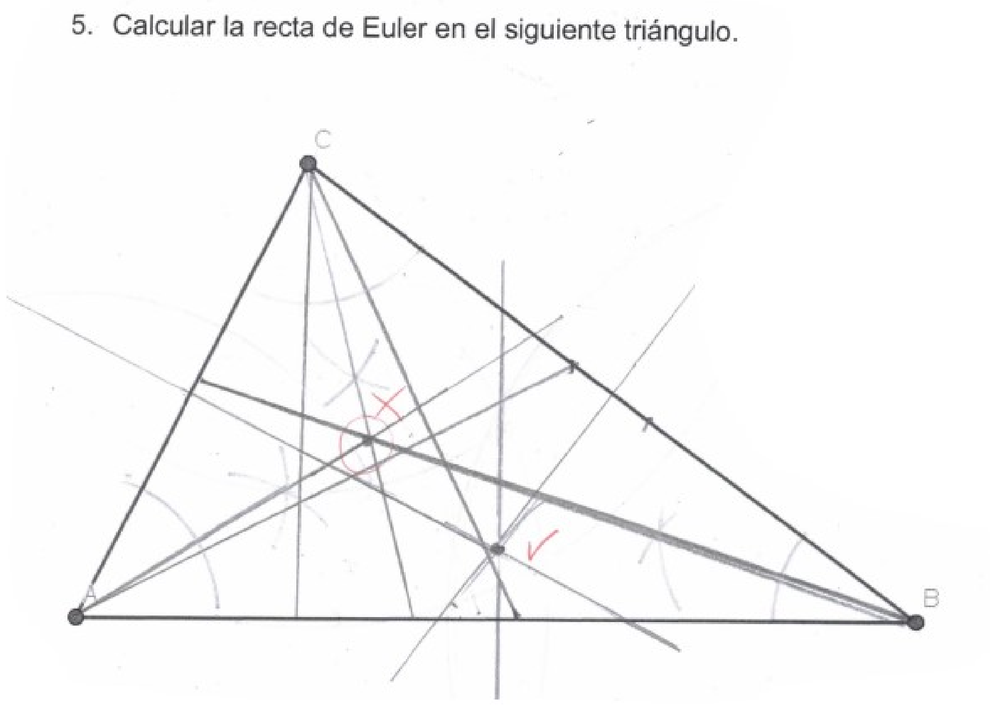


Ilustración 6. Construcción errónea e incompleta de la recta de Euler.

2ª Sesión

La segunda sesión consistió en emplear la papiroflexia para obtener las rectas y los puntos notables de un triángulo. Para el desarrollo de esta sesión, al terminar la clase anterior, se pidió a los alumnos que trajesen de casa una serie de triángulos recortados en papel: cinco triángulos acutángulos, un triángulo rectángulo y un triángulo obtusángulo.

Con la ayuda de una presentación en Power Point (ver anexo V) se indicó a los alumnos las normas y pasos a seguir con el uso de la papiroflexia. La presentación se proyectó en el aula de forma que los alumnos pudiesen seguir las indicaciones para obtener y comprender los pliegues correspondientes a cada construcción geométrica. No obstante, en todas las construcciones fue necesario acompañar a los alumnos en cada paso.

Se comenzó con la construcción del circuncentro, con la que los alumnos no tuvieron dificultades para entender el pliegue mediante el cual se obtenía la mediatriz de un lado del triángulo.

Para la construcción del baricentro los alumnos comprendieron los pasos que tenían que realizar, pero el mayor inconveniente con esta construcción fue el dar forma al papel para obtener la mediana, de modo que terminase correctamente en el punto medio del lado del triángulo. Se pudo observar durante esta actividad que algunos alumnos perdían la paciencia, dejando la construcción incompleta.

Después, se calculó en otro de los triángulos acutángulos el ortocentro. Pese a los problemas que habían surgido con la construcción de las rectas perpendiculares durante la primera sesión, en esta ocasión los alumnos comprendieron mejor cómo obtener las alturas del triángulo, aunque se les acompañó en los pasos necesarios.

Por último, la construcción del incentro generó bastantes dificultades, pese a que los alumnos, en la sesión anterior, habían terminado construyendo (con ayuda también) las bisectrices de un triángulo. Al tener que realizarlas plegando el papel se percibía que solamente tenían interiorizados los pasos para construirlas con regla y compás, pero no tenían adquirida la suficiente capacidad de abstracción para saber lo que realmente significa dicho concepto, ya que no conseguían doblar el papel de modo que dos lados del triángulo coincidieran, dividiendo así el ángulo en dos semiángulos iguales.

Una vez obtenidos los cuatro puntos notables de manera independiente en cada uno de los triángulos acutángulos, se pidió a los alumnos que realizasen las mismas construcciones para el caso de un triángulo obtusángulo y de un triángulo rectángulo. El objetivo que perseguíamos es que se diesen cuenta por sí mismos de que los puntos notables de un triángulo que siempre están dentro del mismo son el baricentro y el incentro, mientras que el circuncentro y el ortocentro pueden estar fuera del triángulo.

En el triángulo obtusángulo la mayoría del alumnado percibió sin dificultad lo que sucedía al intentar obtener el circuncentro o el ortocentro. Para que los alumnos lo apreciasen mejor se les indicó que pegasen el triángulo en un folio y así poder ver los puntos de corte de las mediatrices y las alturas, respectivamente.

En cambio, en el caso del triángulo rectángulo, en general, les resultó más complicado indicar qué ocurría cuando calculaban el ortocentro, quizás debido a los problemas que presentaba el alumnado para interiorizar el concepto de perpendicularidad, como ya hemos comentado anteriormente. Además, acababan de ver en el caso anterior que podía encontrarse fuera del triángulo y eso les hizo suponer que ocurría lo mismo en ese caso.

Con el cálculo del circuncentro, que ahora coincide en la hipotenusa del triángulo, gran parte de los alumnos no tuvo dificultades para darse cuenta de lo que sucedía.

No obstante, como algunos alumnos tuvieron dificultades para comprender las construcciones, incluso con el triángulo pegado en el folio, estas fueron explicadas en la pizarra utilizando diversas representaciones.

Tal y cómo nos dice la teoría de Vinner (1983, 1991), en muchas ocasiones la imagen conceptual que los alumnos se han creado no coincide con la definición matemática formal. La mayoría necesita que se le muestren distintos ejemplos que cumplan las propiedades de la definición dada, (atributos relevantes), así como otros que no son necesarios para la definición del concepto (atributos irrelevantes). Este es el caso de algunos de nuestros alumnos, los cuales necesitaban ejemplos en los que el circuncentro y el ortocentro estuviesen fuera del triángulo, puesto que esas construcciones no las realizaban bien, debido a que esperaban que estuviesen dentro. Tenían una imagen conceptual incompleta, en la que habían influido distractores de estructuración.

Durante el desarrollo de esta sesión se observó la actitud, la habilidad y la destreza de los alumnos mientras realizaban las distintas construcciones. En esta clase, sin haberlo planeado previamente, se generó un aprendizaje cooperativo basado en la tutoría entre iguales, en donde aquellos alumnos que habían conseguido obtener las construcciones pedidas ayudaban a su compañero. En otras ocasiones se pudo observar también cómo entre varios alumnos intentaban realizar los pliegues expuestos para conseguir el resultado final.

La actividad final realizada por los alumnos, y que fue recogida para su posterior evaluación, consistió en obtener la recta de Euler en un triángulo acutángulo. En el transcurso de esta actividad algunos alumnos comentaban que todos los puntos notables les coincidían en el mismo sitio, lo que les hizo preguntarse qué ocurría, qué estaban haciendo mal. En esta situación, se animó a los alumnos a que dedujesen por qué sucedía eso, reflexionando sobre el tipo de triángulo con el que estaban trabajando. Algunos de ellos, una minoría, dedujeron que se trataba de un triángulo equilátero. Finalmente, se explicó a todo el grupo el tipo de triángulo que estaban utilizando, pues no solamente era un triángulo acutángulo, sino que también era equilátero y, por tanto, todos los puntos notables son el mismo punto.

En la siguiente tabla se recoge la evaluación de las diferentes construcciones realizadas con papiroflexia.

	Construcciones correctas y asimilación de conceptos	Construcciones incompletas y mal argumentadas	No realizan la actividad
1. Cálculo del circuncentro.	100%	-	-
2. Cálculo del baricentro.	70%	30%	-
3. Cálculo del ortocentro.	60%	40%	-
4. Cálculo del incentro.	45%	55%	-
5. Construcción de la recta de Euler.	56%	44%	-

Tabla 2. Resultados de la actividad del alumnado con papiroflexia.

A continuación, se muestran algunos de los triángulos en los que los alumnos obtuvieron la recta de Euler con el uso de la papiroflexia.

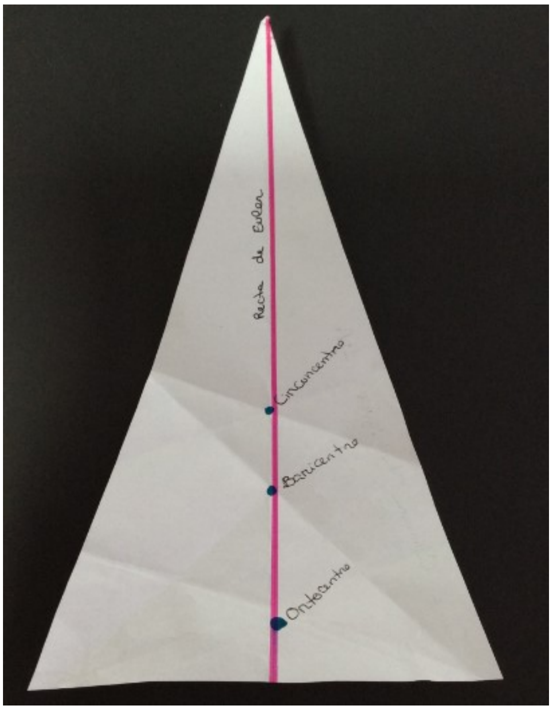


Ilustración 7. Recta de Euler calculada en un triángulo acutángulo.

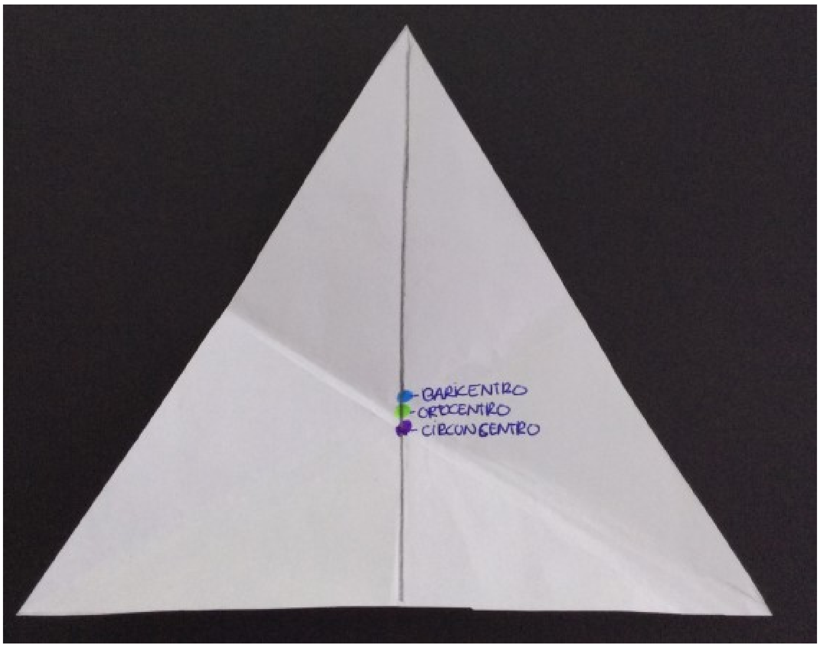


Ilustración 8. Recta de Euler calculada en un triángulo prácticamente equilátero.

3ª Sesión

La última sesión estuvo dedicada a trabajar las construcciones vistas durante las anteriores sesiones con el programa de geometría dinámica Geogebra. Para ello acudimos con el grupo de alumnos a una de las aulas de informática de las que dispone el centro. Al tratarse de un grupo numeroso, 25 alumnos, se disponía de un ordenador por cada dos alumnos. Por lo que durante esta actividad la observación del alumnado mientras trabajaba sirvió para evaluarles individualmente, destacando el hecho de que, al no trabajar de manera individual en los ordenadores, se podía apreciar como uno de los dos alumnos tenía más dominio que el otro al realizar la actividad.

Para trabajar con todo el grupo, se empleó un proyector el cual permitía que los alumnos viesen la pantalla del profesor, y así seguir las explicaciones, pudiendo enseñar de forma más visual qué comandos se debían emplear para calcular las diferentes construcciones geométricas. Además, estos disponían de una ficha (ver anexo VI) donde también podían seguir los pasos uno a uno.

El desarrollo de la clase no pudo realizarse según lo previsto debido a que los alumnos nunca habían trabajado con el programa, por lo que durante la sesión surgieron numerosas dudas: unos no encontraban los menús de los comandos que debían usar, otros “perdían” el dibujo en la pantalla… Debido a ello hubo que acompañar y supervisar cada paso de los alumnos. Además, esto provocó que los alumnos estuviesen menos concentrados en la actividad, pareciéndoles muy sencillo el realizar cada trazo pues solamente tenían que pinchar un botón. Lo que generó que no razonasen suficientemente las construcciones realizadas.

En esta actividad pretendíamos que los alumnos guardasen el archivo con todas las construcciones realizadas para poder evaluarlas. Pero se nos comunicó que las aulas de ordenadores no disponían del programa, y debido al impedimento de poder instalarlo, hubo que realizar la actividad con la versión online del mismo. Así que no se pudieron guardar los archivos, porque los alumnos tendrían que haberse registrado previamente en Geogebra, con todo lo que eso supone de cara a permisos de los padres.

Una vez finalizada la actividad, con el objetivo de poder analizar la mejora en la comprensión de los conceptos por los alumnos mediante el uso de Geogebra, estos realizaron una ficha (ver anexo VI) con tres preguntas para reflexionar sobre las características más destacadas de las rectas y los puntos notables de un triángulo. Con las construcciones geométricas realizadas, Geogebra permitió a los alumnos modificar el tipo de triángulo y ver lo que ocurría con las rectas y puntos notables.

Los resultados obtenidos se recogen en la siguiente tabla.

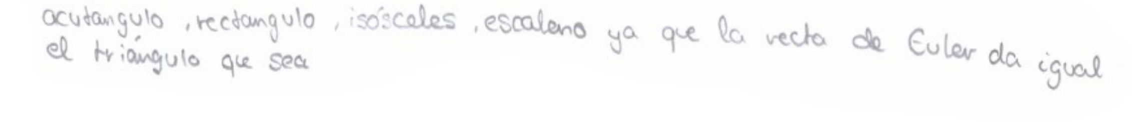
	Asimilan los conceptos correctamente	Confunden conceptos	No responden correctamente
1. Los puntos notables en el triángulo equilátero. ¿Qué ocurre con la recta de Euler?	60%	30%	10%
2. Los puntos notables en un triángulo rectángulo.	36%	16%	48%
3. Los puntos notables de un triángulo obtusángulo.	32%	28%	40%

Tabla 3. Resultados de la actividad del alumnado con Geogebra.

A continuación, se muestran algunas de las respuestas que dieron los alumnos en esta ficha.

1. **¿Existe algún triángulo en el que coincidan todos los puntos notables? ¿Cuál? ¿Qué ocurre con la recta de Euler?**

Con esta preguntaba se pretendía que los alumnos se dieran cuenta de que en un triángulo equilátero coinciden todos los puntos notables y por lo tanto la recta de Euler deja de ser una recta para convertirse en un punto. En general, como pudimos comprobar, más de la mitad del alumnado se dio cuenta de esta situación, pero destaca que muchos de ellos no lograran definir de manera correcta lo que ocurre con la recta de Euler. Esto resulta curioso teniendo en cuenta que en la actividad con papiroflexia ya se llegó a esta conclusión.


1. ¿Existe algún triángulo en el que coincidan todos los puntos notables? ¿Cuál? ¿Qué ocurre con la recta de Euler?

acutangulo , rectangulo , isóscales , escaleno ya que la recta de Euler da igual el triángulo que sea

Ilustración 9. Respuesta errónea.

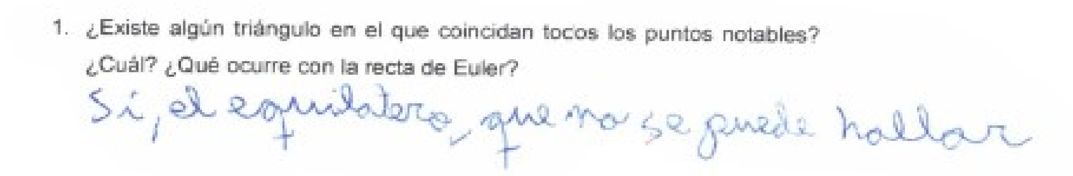

1. ¿Existe algún triángulo en el que coincidan tocos los puntos notables?
¿Cuál? ¿Qué ocurre con la recta de Euler?
Sí, el equilátero, que no se puede hallar

Ilustración10. Respuesta incompleta.

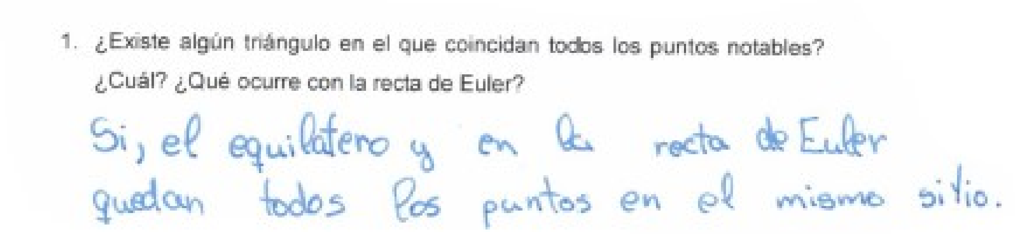

1. ¿Existe algún triángulo en el que coincidan todos los puntos notables?
¿Cuál? ¿Qué ocurre con la recta de Euler?
Si, el equilátero y en la recta de Euler
quedan todos los puntos en el mismo sitio.

Ilustración 11. Respuesta correcta.

2. **¿Qué puedes decir de los puntos notables de un triángulo rectángulo?**

Al preguntarles por uno de los casos particulares vistos a lo largo de las sesiones se pretendió ver el grado de comprensión que habían adquirido los alumnos. Algunos recordaban una de las dos situaciones particulares, sabían lo que sucedía con el ortocentro o con el circuncentro. La mayoría de los alumnos nombraron el ortocentro y no dijeron nada del circuncentro. Otros muchos, casi la mitad, no dieron respuestas coherentes.

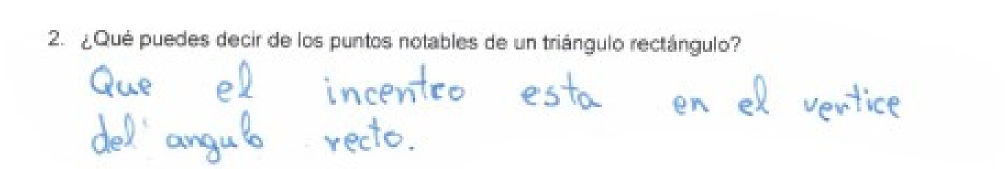

2. ¿Qué puedes decir de los puntos notables de un triángulo rectángulo?
Que el incentro esta en el vertice
del angulo recto.

Ilustración 12. Respuesta errónea.

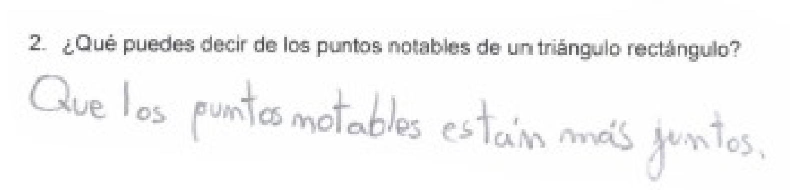
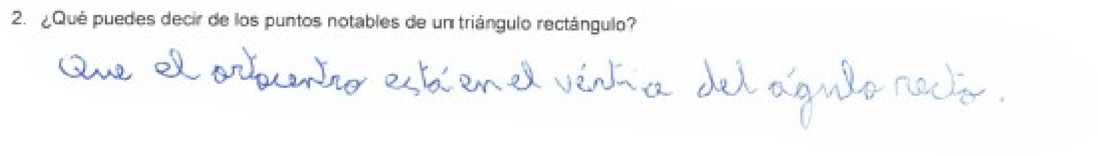
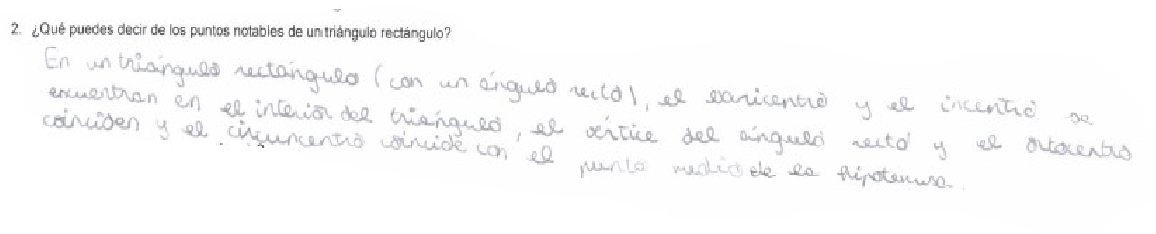

2. ¿Qué puedes decir de los puntos notables de un triángulo rectángulo?
Que los puntos notables están más juntos.

Ilustración 13. Respuesta incoherente.


2. ¿Qué puedes decir de los puntos notables de un triángulo rectángulo?

Que el ortocentro está en el vértice del ángulo recto.

Ilustración 14. Respuesta con uno de los dos casos particulares.

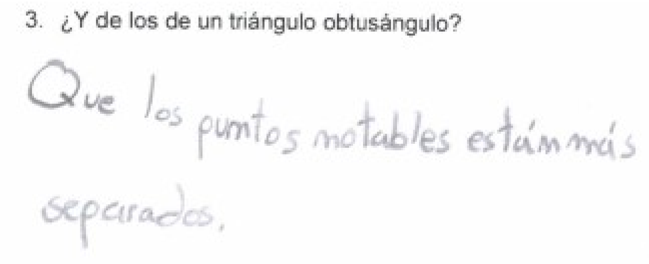

2. ¿Qué puedes decir de los puntos notables de un triángulo rectángulo?

En un triángulo rectángulo (con un ángulo recto), el baricentro y el incentro se encuentran en el interior del triángulo, el circuncentro coincide con el punto medio de la hipotenusa y el ortocentro coincide con el vértice del ángulo recto.

Ilustración 15. Respuesta correcta.

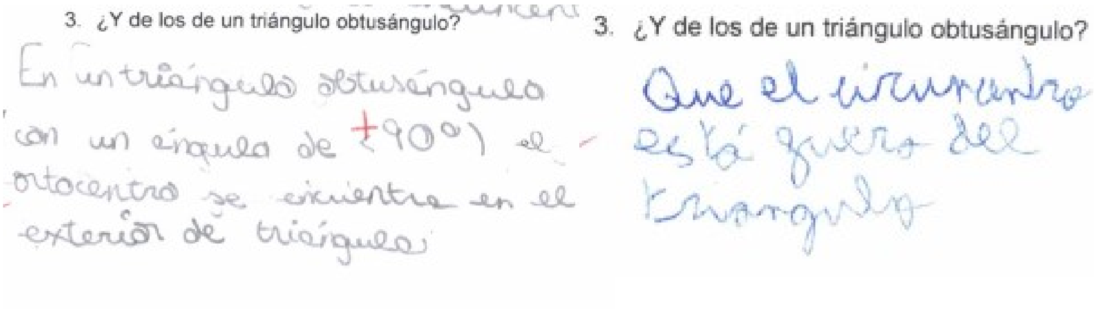
3. ¿Y de los de un triángulo obtusángulo?

Al igual que en la respuesta anterior, la intención con la que se redactó esta pregunta fue para que los alumnos se diesen cuenta de que algunos de los puntos notables de un triángulo no siempre se encuentran en el interior del mismo.


3. ¿Y de los de un triángulo obtusángulo?

Que los puntos notables están más separados.

Ilustración 16. Respuesta errónea.


3. ¿Y de los de un triángulo obtusángulo?

En un triángulo obtusángulo (con un ángulo de +90º) el ortocentro se encuentra en el exterior de triángulo.

3. ¿Y de los de un triángulo obtusángulo?

Que el circuncentro está fuera del triangulo

Ilustración 17. Respuestas incompletas.

5.3 Análisis y resultados de los cuestionarios

Pre – test

Este primer cuestionario tuvo como objetivo obtener información sobre la visión de los alumnos acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, previamente a la realización de las actividades de este TFM. Con él pudimos observar diferentes aspectos en cuanto a cómo han estudiado geometría los alumnos, cuánto tiempo ha ocupado en sus clases, qué saben de sus usos y aplicaciones en la vida real…

A través de los resultados obtenidos (ver anexo II) pudimos reafirmar como la geometría es estudiada hacia final de curso, no dedicándose más de tres semanas a su estudio, en la mayoría de los casos. Además, su enseñanza sigue orientada a la memorización de fórmulas y su posterior aplicación, tal y como reflejan las preocupaciones principales de los alumnos.

En cuanto a los materiales empleados para su aprendizaje y la forma de evaluar a los alumnos, también se observó que mayoritariamente estos se basan en una metodología clásica, predominando el uso de la regla y el compás, los libros de texto, la evaluación con exámenes escritos, etc. Como dato excepcional destacamos que ninguno de los alumnos marcó la opción de "programas de geometría en el aula de informática". Con lo cual su primer contacto con programas tipo Geogebra ha sido en la tercera sesión de las actividades planteadas en este TFM.

Post – test

Una vez finalizadas las tres actividades propuestas se entregó a los alumnos un cuestionario final con el objetivo de analizar y comparar en qué grado las sesiones realizadas en este TFM habían contribuido a mejorar su visión de la geometría y cuál de ellas tuvo un éxito mayor.

De los resultados obtenidos del post – test (ver anexo II) podemos afirmar que las actividades realizadas con nuestro TFM tuvieron un gran éxito entre los alumnos. Ya que como se puede observar con los resultados obtenidos a la mayoría les sirvieron para entender mejor la geometría, en especial para ayudarles en la realización de las construcciones geométricas, y cambiar su visión sobre ella.

Las dos metodologías que los alumnos consideran que más les han ayudado fueron la clásica, con regla y compás, y Geogebra. Esta última, sobretodo, les sirvió para comprender y poder visualizar mejor los conceptos representados.

En cuanto al uso de la papiroflexia, en general les resultó más complicado su uso, pero más de la mitad afirman que les ha servido para comprender mejor las construcciones geométricas.

6. CONCLUSIONES

La finalidad principal que nos propusimos con este TFM era la de comparar diferentes metodologías didácticas y cómo estas contribuyen a mejorar el proceso de enseñanza – aprendizaje para la comprensión de los puntos y las rectas notables de un triángulo.

A continuación, una vez analizados los resultados obtenidos con la puesta en práctica de las actividades de este TFM, se comparan estos con los objetivos propuestos para alcanzar dicha finalidad.

Durante la primera parte de nuestro trabajo contribuimos a lograr tres de los objetivos propuestos al inicio del mismo. A través de la realización del pre – test, pudimos analizar la visión que tenían los alumnos sobre la geometría. Esto nos sirvió para elaborar las diferentes actividades, no sólo con el objetivo de mejorar la comprensión de los elementos notables de los triángulos, sino también con el fin de mostrarles a los alumnos una forma más atractiva y entretenida de aprender geometría.

Tras la realización de la primera actividad, en la que aplicamos la metodología clásica, con regla y compás, fuimos conscientes de que los triángulos que utilizamos para calcular el circuncentro y el ortocentro eran acutángulos, con lo cual estos puntos notables aparecían dentro de los triángulos. Para una futura puesta en práctica de esta actividad es necesario incluir triángulos obtusángulos y rectángulos, para que estos puntos no siempre aparezcan dentro de los triángulos. De esto modo, nuestros alumnos tendrán una imagen conceptual rica, como aconseja la teoría de Vinner. De hecho, nosotros ya lo tuvimos en cuenta en las actividades que realizamos con papiroflexia y con Geogebra.

A través de las actividades realizadas hemos podido poner en práctica las distintas metodologías y a su vez, evaluar la contribución de cada una de ellas a mejorar el proceso de enseñanza – aprendizaje. Al realizar las mismas construcciones en las tres sesiones, observamos que los alumnos tenían ciertas dificultades para comprender el concepto de amplitud de un ángulo, puesto que la construcción que más problemas generó fue el cálculo del incentro. Mediante el uso de la regla y el compás los alumnos memorizaban los pasos a seguir para la construcción de las bisectrices, mientras que con la papiroflexia no eran capaces de asimilar el pliegue que debían hacer.

Durante la última sesión, con el programa de geometría dinámica Geogebra, hemos llegado a la conclusión de que los alumnos pudieron complementar y mejorar la comprensión de los distintos conceptos trabajados con las dos metodologías anteriores. Con esta actividad podían modificar directamente el triángulo y observar en qué casos algunos puntos notables se encontraban en el exterior del mismo y cuáles nunca. Además, les permitió observar lo que ocurría con la recta de Euler en el caso particular de un triángulo equilátero.

Por lo tanto, los resultados obtenidos con la actividad en la que se usa Geogebra coinciden con los de la investigación llevada a cabo por Iranzo y Fortuny (2009), con la que afirman que el uso de Geogebra contribuye a que los alumnos asimilen mejor los conceptos geométricos.

En este TFM hemos trabajado los niveles 2 (análisis de las propiedades) y 3 (relaciones entre las propiedades) del modelo de razonamiento de Van Hiele. Una vez analizados los resultados obtenidos por los alumnos, consideramos que la mayoría se encuentran entre los niveles 2 y 3, en cuanto a los conceptos trabajados. Algunos de ellos, lograron entender las relaciones entre los puntos y las rectas y cuándo dichos puntos están dentro o fuera de los triángulos, por lo que se encuentra en un nivel 3. Mientras que otros, solamente consiguieron aprender las propiedades de dichos conceptos.

Finalmente, el desarrollo de cada una de las actividades y los resultados obtenidos con las mismas nos han permitido alcanzar otro de los objetivos propuestos: “comparar la eficacia del uso de cada una de las metodologías”, concluyendo que las tres metodologías trabajadas a lo largo de este TFM se complementan, ya que hemos podido observar cómo el método clásico es muy útil para realizar las construcciones, la papiroflexia ayuda a comprenderlas y Geogebra permite estudiar todos los casos posibles. Por lo tanto, consideramos que trabajar con las tres metodologías de manera conjunta contribuye considerablemente a mejorar la enseñanza y el aprendizaje de los elementos notables de los triángulos.

Además, a la vista de las respuestas obtenidas en el post – test, a la mayoría de los alumnos les resultó más atractivo incluir las diferentes metodologías para estudiar la geometría, mejorando así considerablemente la visión que tenían sobre ella, aunque no todas fueron aceptadas con el mismo grado de éxito, ya que la papiroflexia fue la que les resultó menos atractiva. De este modo alcanzamos el último objetivo propuesto, “identificar las mejoras en la percepción que tiene el alumnado sobre la geometría”.

Personalmente, la elaboración de este TFM me ha servido para aprender, comprender y motivarme de cara a mi futura carrera profesional como docente de matemáticas. Además, me ha permitido conocer en profundidad la didáctica de la geometría, pues siempre he estado interesada en ella, pero hasta ahora desconocía “cómo” enseñarla.

7. BIBLIOGRAFÍA

Alsina, À. y Domingo, M. (2007). Cómo aumentar la motivación para aprender matemáticas. *SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, 56, 23–31.

Armendáriz, M.V., Azcárate, C. y Delofeu, J. (1993). Didáctica de la Matemática y psicología. *Infancia y Aprendizaje*, 62–63, 77–100.

Barrantes, M. y Blanco, L. J. (2005). Análisis de las concepciones de los profesores en formación sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría. *Números*, 62, 33–44.

Barrantes, M. y Zapata, M. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo Abierto,* 27(1), 55–71.

Barrantes, M.L., Balletbo, I.F. y Fernández, M.L. (2014). Enseñar geometría en secundaria. En J. Asenjo, O. Macías y J.C. Toscano (eds.), *Memoria del Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y* Educación (pp. 1–14). Buenos Aires: OEI.

Berenguer, L., Flores, P., Lupiáñez, J. L., Marín, A. y Molina, M. (2011). *Materiales y recursos en el aula de matemáticas*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Braga, G.M. (1991). Apuntes para la enseñanza de la geometría. El modelo de enseñanza-aprendizaje de van Hiele. *Signos teoría y práctica de la educación*, 4, 52–57.

Bombal, F. (2015). Una mirada a las matemáticas del Siglo XX. *En Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales discurso inaugural del año académico 2015 – 2016.* Madrid: Fundación BBVA.

Boyer, C.B. (1994) *Historia de la matemática* (Mariano Martínez Pérez, trad.). Madrid: Alianza universidad textos. (Obra original publicada en 1986).

Chapa, F., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1992). Definiciones de triángulos y cuadriláteros: Errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B., *Epsilon,* 23, 49–62.

Decreto 38/2015, de 22 de mayo, que establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria. Boletín Oficial de Cantabria. Santander, 5 de junio de 2015, núm. 39, pp. 1–1074.

De Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. *Revista Iberoamericana De Educación*, 43, 19–58.

De la Torre, A. (2003). El Método socrático y el Modelo de Van Hiele. *Lecturas Matemáticas,* 24, 99–121.

Hernández, M. y Montesinos, J.L. (Coords.) (1992). *Historia de la geometría griega. Seminario Orotava I.* Canarias: Gobierno de Canarias.

Gil de la Serna, M. y Escaño, J. (2010). Motivación y esfuerzo en la Educación Secundaria. En C. Coll (Coord.), *Desarrollo, aprendizaje y enseñanza en la Educación Secundaria*. Barcelona: Graó.

Gutiérrez, A. (2006): La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En Flores, P.; Ruiz, F.; De la Fuente, M. (eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp. 13–58). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de van Hiele. En S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en Educación Matemática* (pp. 295–384). Sevilla: Alfar.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA*, 9(2), 53–83.

Grupo PI: Cañadas, M.C., Durán, F., Gallardo, S., Martínez-Santaolalla, M. J., Molina, M., Peñas, M. y Villegas, J.L. (2009). *Geometría plana con papel.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Hohenwarter, M. y Fuchs, K. (2005). Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. *In: Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference 2004*. Pecs, Hungary.

Instituto Nacional de Evaluación Educativa. (2016). *PISA 2015: Programa para la evaluación Internacional de los Alumnos. Informe español*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Iranzo, N., & Fortuny, J. M. (2009). La influencia conjunta del uso de Geogebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza de las ciencias,* 27(3), 433–446.

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad educativa. Boletín Oficial del Estado. Madrid, 10 de diciembre de 2013, núm. 295, pp. 97858–97921.

Ley Orgánica 3/2018, de 5 de diciembre, de Protección de Datos Personales y garantía de los derechos digitales. Boletín Oficial del Estado. Madrid, 6 de diciembre de 2018, núm. 294, pp. 119788–119857.

Losada, R. (2007). Geogebra: la eficiencia de la intuición. *La Gaceta de la RSME,* 10(1), 223–239.

Marín, A. y Lupiáñez, J.L. (2005). *Los nuevos Principios y Estándares del NTSC en castellano. SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas,* 48, 105–110.

Mora, J. A. (2007). Geometría Dinámica en Secundaria. *Ponencia presentada en las XIII* Jornadas *para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, JAEM.* Obtenido de http://jmora7.com/. Recuperado el 11/05/19.

Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. Boletín Oficial del Estado. Madrid, 29 de enero de 2015, núm. 738, pp. 6986–7003.

Pérez, J.A. (2010). *Regla, compás y otras formas de ver la Geometría*. Madrid: Creaciones Copyright.

Real Academia Española. (2016). *Diccionario de la lengua española* (22.[a] ed.). Obtenido de http://lema.rae.es/desen/?key=papiroflexia. Recuperado el 18/06/19.

Rodríguez, M.L. (2004). La Teoría del Aprendizaje Significativo. En A.J. Cañas, J.D. Novak y F.M. Gonzalez (Eds.), *Concept Maps: Theory, Methodology, Technology, Vol.1* (pp. 535–544). Pamplona: Universidad Pública de Navarra.

Royo, J. (2002). Matemáticas y papiroflexia. *Sigma: Revista de Matemáticas*, 21, 175–192.

Sánchez, C. (2012). La historia como recurso didáctico: el caso de los Elementos de Euclides. *Tecné Episteme Y Didaxis TED*, 32, 71–92.

Santrock, J.W. (2004). El desarrollo del pensamiento en los adolescentes. En J. Santrock (Ed.), *Psicología del desarrollo en la adolescencia* (pp. 81–115). Madrid: McGraw-Hill.

Sorando, J.M. (2002). ¿Os acordáis de los conjuntos? *SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, 39, 121–126.

Stewart I. (2008). *Historia de las Matemáticas en los últimos 10.000 años.* (Patricio Barros, trad.). Barcelona: Crítica S.L. (Obra original publicada en 2007).

Vargas, G. y Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, 27(1), 74–94.

ANEXO I. CUESTIONARIOS

PRE-TEST

Para ayudaros a mejorar y ampliar vuestros conocimientos en Geometría, os queremos hacer unas preguntas para conocer vuestra opinión. Algunas de respuesta única y otras múltiples.

¡Necesitamos vuestra colaboración y sinceridad! ¡Ánimo chic@s!

Edad: Curso: Género:

1. Indica en una escala del 1 al 5 tu gusto por las matemáticas.

	1	2	3	4	5	
Nada	☐	☐	☐	☐	☐	Mucho

2. ¿Te ha costado conseguir aprobar matemáticas en cursos anteriores?

☐ Sí.

☐ No.

3. Indica en una escala del 1 al 5 el grado de dificultad que supone para ti la geometría.

	1	2	3	4	5	
Muy fácil	☐	☐	☐	☐	☐	Muy difícil

4. En cursos anteriores, ¿cuándo veías el tema de geometría?

- [ ] A principio de curso.
- [ ] A mitad de curso.
- [ ] A final de curso.
- [ ] Nunca he estudiado geometría.

¿Cuánto tiempo le dedicabais?

- [ ] Menos de tres semanas.
- [ ] De tres semanas a un mes.
- [ ] Más de un mes.

5. Considero que la parte más difícil de la geometría es:
(Señala dos de ellas)

- [ ] Aprender y memorizar las fórmulas.
- [ ] Saber cuándo aplicar una fórmula u otra.
- [ ] Realización de actividades con regla y compás.
- [ ] El vocabulario que aparece en el tema.
- [ ] Visualizar las distintas construcciones geométricas.
- [ ] Otros (especifica):

6. ¿Qué métodos de aprendizaje y materiales utilizan tus profesores para facilitar la comprensión de la geometría? Señala todos los que hayas utilizado alguna vez.

- ☐ Uso de la regla y el compás.
- ☐ Libros de texto.
- ☐ Programas de geometría en el aula de informática.
- ☐ Explicación y resolución de ejercicios en clase mediante pizarra digital.
- ☐ Ejercicios prácticos aplicados a la vida real. (Medir en el patio, actividades en el exterior, …).
- ☐ Deberes para casa.
- ☐ Otros (especifica):

7. ¿Con qué instrumentos te ha evaluado el profesor en esta parte de la materia? Señala todos los empleados.

- ☐ Exámenes escritos.
- ☐ Trabajos y exposiciones en grupo.
- ☐ Rúbricas. (Tablas para evaluar el trabajo del alumno).
- ☐ Corrección de tareas y ejercicios.
- ☐ Otros (especifica):

8. De todo lo que has estudiado de geometría, ¿qué es lo que más te gusta?

- ☐ Aplicar las fórmulas para resolver ejercicios.
- ☐ Dibujar con regla y compás distintas figuras y construcciones geométricas.
- ☐ Estudiar sus aplicaciones en la vida real.
- ☐ Construir sólidos a partir de los desarrollos planos, (cubo, pirámide,…).
- ☐ Otros (especifica):

9. ¿Crees que mediante el uso de la geometría podemos describir y visualizar el espacio que nos rodea?

- ☐ Sí.
- ☐ No.
- ☐ Ns/Nc.

POST-TEST

Edad: Curso: Género:

1. Las actividades vistas en clase, ¿consideras que te han servido para entender mejor la geometría?

	1	2	3	4	5	
Nada	☐	☐	☐	☐	☐	Mucho

2. ¿Cuál de las metodologías propuestas te ha ayudado más?

☐ Uso de la regla y el compás.

☐ Geogebra.

☐ Papiroflexia.

¿Para qué?

☐ Para comprender mejor los conceptos teóricos.

☐ Para visualizar las diferentes representaciones.

☐ Para representar gráficamente las construcciones geométricas.

3. Indica en una escala del 1 al 5 cuánto te ha ayudado emplear la regla y el compás para comprender las construcciones geométricas realizadas.

	1	2	3	4	5	
Nada	☐	☐	☐	☐	☐	Mucho

4. ¿Crees que el uso de Geogebra sirve para comprender mejor los conceptos que usando la regla y el compás?

	1	2	3	4	5	
Nada	☐	☐	☐	☐	☐	Mucho

5. El empleo de la papiroflexia para explicar la geometría, ¿cuánto crees que te ha ayudado a comprender las diferentes construcciones geométricas?

	1	2	3	4	5	
Nada	☐	☐	☐	☐	☐	Mucho

6. ¿Cómo te han resultado las siguientes formas de trabajar la geometría?

Regla y compás.

	1	2	3	4	5	
Muy fácil	☐	☐	☐	☐	☐	Muy difícil

Geogebra

	1	2	3	4	5	
Muy fácil	☐	☐	☐	☐	☐	Muy difícil

.

Papiroflexia.

	1	2	3	4	5	
Muy fácil	☐	☐	☐	☐	☐	Muy difícil

7. En general, ¿te ha parecido la clase de geometría más atractiva que anteriormente, usando sólo lápiz y papel?

☐ Sí.

☐ No.

8. ¿Cambiarías alguna de las actividades realizadas?

☐ Sí. ¿Cuál? ¿Por qué?

☐ No.

☐ Ns/Nc.

9. ¿Crees que con lo visto en estas actividades te resultará más fácil comprender las propiedades de los triángulos?

☐ Sí.

☐ No.

☐ Ns/Nc.

ANEXO II. RESULTADOS CUESTIONARIOS

<u>Resultados del pre – test</u>

1. Indica en una escala del 1 al 5 tu gusto por las matemáticas.
   Sí – 8%
   No – 92%

2. ¿Te ha costado conseguir aprobar matemáticas en cursos anteriores?
   Sí – 8%
   No – 92%

3. Indica en una escala del 1 al 5 el grado de dificultad que supone para ti la geometría.
   Dificultad media – 64%
   Muy difícil – 20 %
   Muy fácil – 16%

4. En cursos anteriores, ¿cuándo veías el tema de geometría?
   A final de curso – 68%
   A mitad de curso – 32%
   ¿Cuánto tiempo le dedicabais?
   Menos de 3 semanas – 52%
   De 3 semanas a un mes – 48%

5. Considero que la parte más difícil de la geometría es: (Señala dos de ellas)
   Aplicaciones de las fórmulas – 44%
   Aprender y memorizar fórmulas – 30%
   Visualización de las construcciones – 17%
   Realización de actividades con regla y compás – 9%

6. ¿Qué métodos de aprendizaje y materiales utilizan tus profesores para facilitar la comprensión de la geometría? Señala todos los que hayas utilizado alguna vez.
   Regla y compás – 100%
   Deberes para casa – 92%
   Libros de texto – 84%
   Ejercicios prácticos aplicados a la vida real – 64%
   Ejercicios en clase mediante pizarra digital – 32%

7. ¿Con qué instrumentos te ha evaluado el profesor en esta parte de la materia? Señala todos los empleados.
   Exámenes escritos – 100%
   Corrección de tareas y ejercicios – 88%

8. De todo lo que has estudiado de geometría, ¿qué es lo que más te gusta?
   Aplicar las fórmulas para resolver ejercicios – 13%
   Dibujar con regla y compás distintas figuras y construcciones geométricas – 38%
   Estudiar sus aplicaciones en la vida real – 6%
   Construir sólidos a partir de los desarrollos planos – 43%

9. ¿Crees que mediante el uso de la geometría podemos describir y visualizar el espacio que nos rodea?
   Sí – 56%
   Ns/Nc – 44%

Resultados del post – test

1. Las actividades vistas en clase, ¿consideras que te han servido para entender mejor la geometría?
   Nada – 4%
   A veces – 20%
   Mucho – 76%

2. ¿Cuál de las metodologías propuestas te ha ayudado más?
   Regla y compás – 32%
   Geogebra – 44%
   Papirofflexia – 24%

   ¿Para qué?
   Para comprender mejor los conceptos teóricos – 24%
   Para visualizar las diferentes representaciones – 16%
   Para representar gráficamente las construcciones geométricas – 60%

3. Indica en una escala del 1 al 5 cuánto te ha ayudado emplear la regla y el compás para comprender las construcciones geométricas realizadas.
   Nada – 12%
   A veces – 20%
   Mucho – 68%

4. ¿Crees que el uso de Geogebra sirve para comprender mejor los conceptos que usando la regla y el compás?
   Nada – 16%
   A veces – 24%
   Mucho – 60%

5. El empleo de la papiroflexia para explicar la geometría, ¿cuánto crees que te ha ayudado a comprender las diferentes construcciones geométricas?

    Nada – 20%

    A veces – 28%

    Mucho – 52%

6. ¿Cómo te han resultado las siguientes formas de trabajar la geometría?

    <u>Regla y compás</u>

    Muy fácil – 68%

    Dificultad media – 24%

    Muy difícil – 8%

    <u>Geogebra</u>

    Muy fácil – 72%

    Dificultad media – 16%

    Muy difícil – 12 %

    <u>Papiroflexia</u>

    Muy fácil – 24%

    Dificultad media – 28%

    Muy difícil – 48%

7. En general, ¿te ha parecido la clase de geometría más atractiva que anteriormente, usando sólo lápiz y papel?

    Sí – 88%

    No – 12%

8. ¿Cambiarías alguna de las actividades realizadas?

    Sí – 12%

    No – 60%

    Ns/Nc – 28%

9. ¿Crees que con lo visto en estas actividades te resultará más fácil comprender las propiedades de los triángulos?

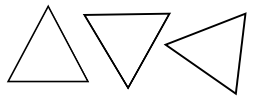
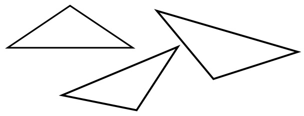
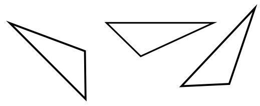
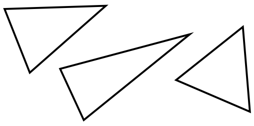
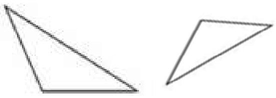
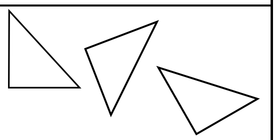
   Sí – 80%

   No – 8%

   Ns/Nc – 12%

ANEXO III. FICHA DE TEORÍA

CÁLCULO DE LOS PUNTOS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO CON REGLA Y COMPÁS

CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS			
Según sus lados	 Equilátero	 Isósceles	 Escaleno
Según sus ángulos	 Acutángulo	 Obtusángulo	 Rectángulo

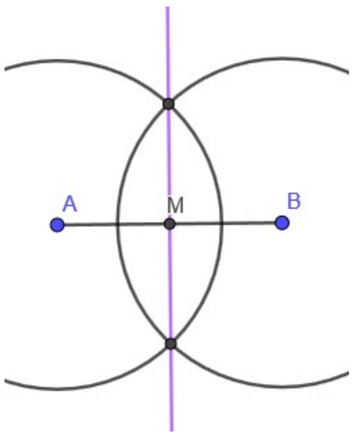
¿Qué tengo que saber?

A continuación, se expone un breve resumen de los conceptos que se utilizarán a lo largo de esta actividad, se trata de los puntos y las rectas notables de un triángulo.

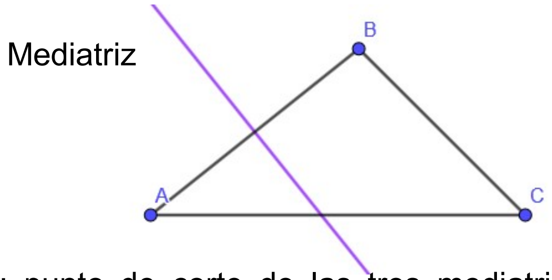
Mediatriz: recta perpendicular a un segmento AB por su punto medio.

Pasos a seguir para el cálculo de la mediatriz de un segmento AB.

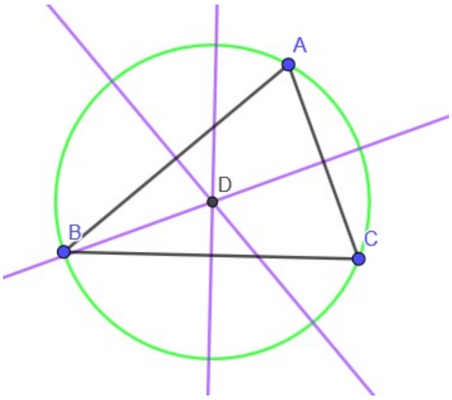
1. Con centro en el punto A se abre el compás, con una apertura mayor que la mitad del segmento y se traza un arco.
2. Con la misma apertura de compás y centro en el punto B se traza otro arco.
3. Con la regla unimos los dos puntos de corte de los arcos y obtenemos la recta que divide al segmento en dos partes iguales. Es decir, la mediatriz.

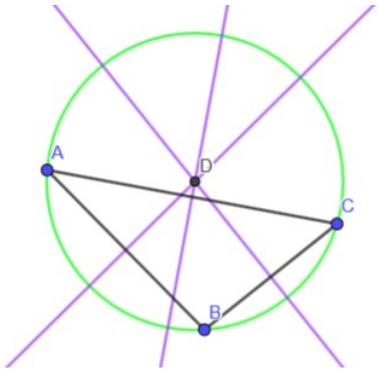


Los tres lados de un triángulo son segmentos, por tanto, podremos calcular las mediatrices de sus lados.

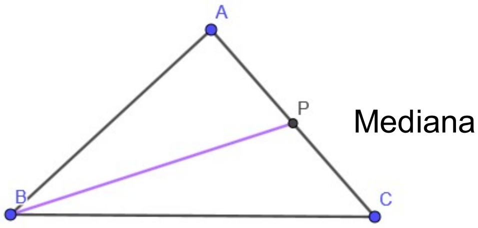


CIRCUNCENTRO: punto de corte de las tres mediatrices de un triángulo y centro de la **circunferencia circunscrita** que pasa por los tres vértices del triángulo. Puede estar fuera del triángulo.

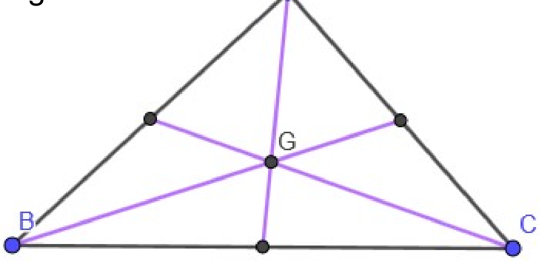




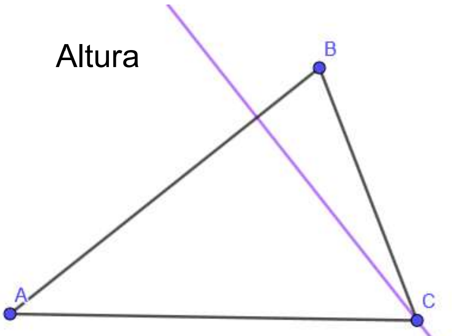
Medianas de un triángulo: segmentos que unen cada vértice del triángulo y el punto medio de su respectivo lado opuesto.



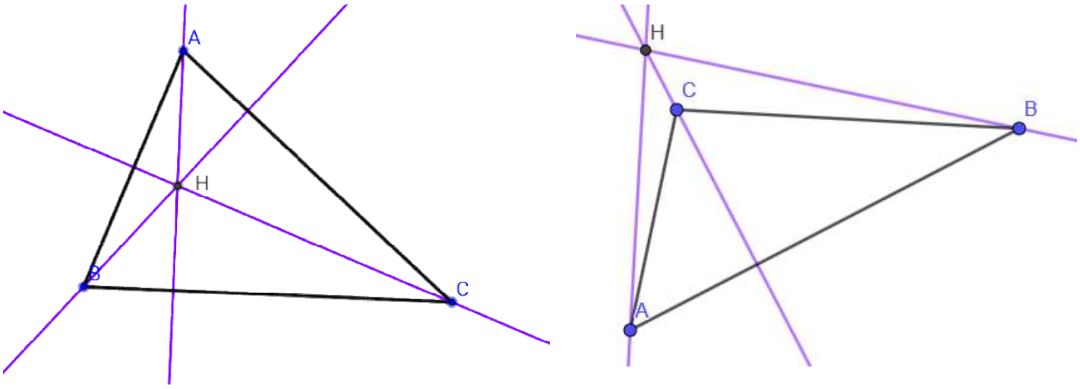
BARICENTRO: punto de corte de las tres medianas de un triángulo. Siempre está dentro del triángulo.



Alturas de un triángulo: rectas que pasan por un vértice del triángulo y son perpendiculares a los lados opuestos.



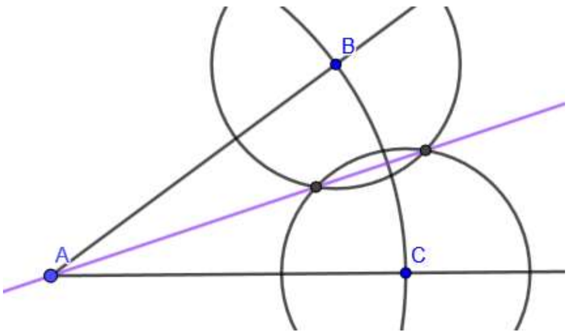
ORTOCENTRO: punto de corte de las tres alturas de un triángulo. Puede estar fuera del triángulo.



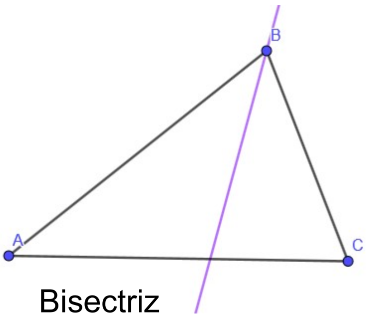
Bisectriz: semirrecta que pasa por el vértice de un ángulo y divide al ángulo en dos partes iguales.

Pasos a seguir para el cálculo de la bisectriz de un ángulo.

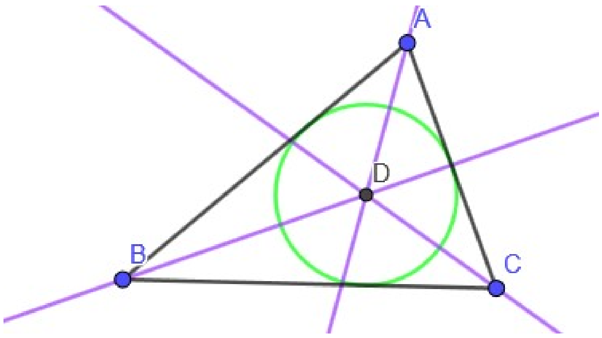
1. Con centro en el vértice A se traza un arco para marcar el ángulo.
2. Con centro en B se abre el compás, con una apertura mayor que la mitad de la amplitud del ángulo, y se traza un arco.
3. Con centro en C y la misma apertura de compás se traza otro arco.
4. Unimos el vértice A con los dos puntos de corte de los arcos anteriores, y obtenemos la bisectriz.



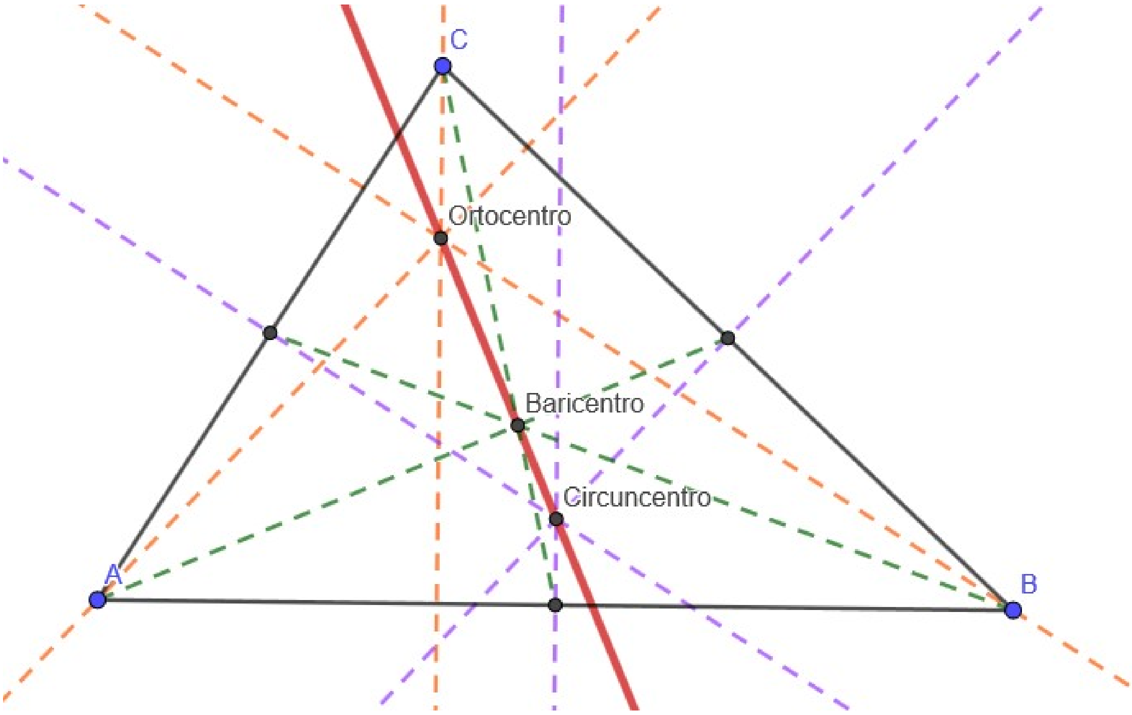
En el caso de un triángulo tendremos una bisectriz para cada uno de los ángulos.



INCENTRO: punto de corte de las tres bisectrices de un triángulo y centro de la **circunferencia inscrita,** (circunferencia que es tangente a los tres lados del triángulo). Desde el incentro trazamos una recta perpendicular a uno de los lados del triángulo, la circunferencia inscrita pasa por el punto de corte de la recta perpendicular con el lado. Siempre se encuentra dentro del triángulo.



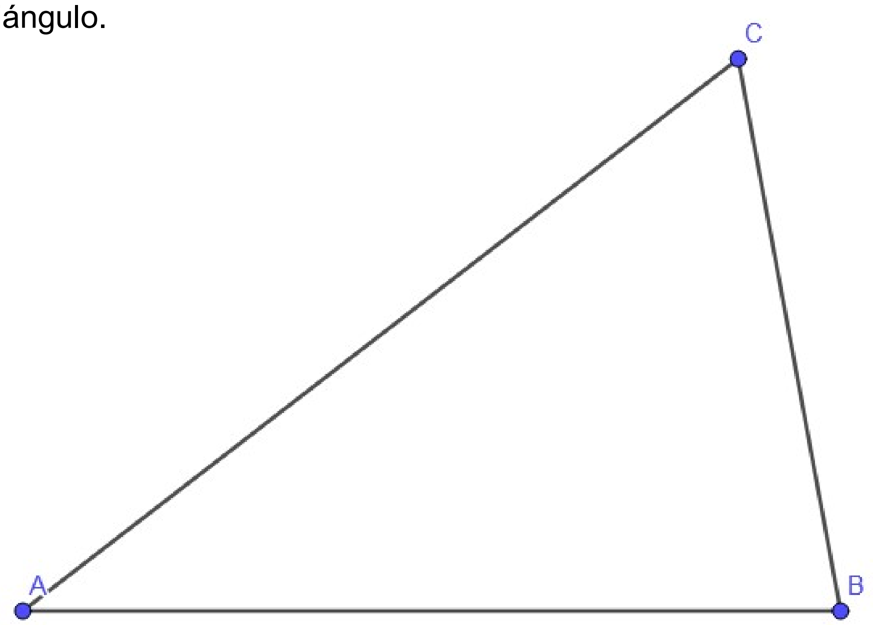
Tres de estos puntos, el circuncentro, el baricentro y el ortocentro, siempre se pueden unir entre sí dando lugar a una recta, conocida como **RECTA DE EULER.** Recibe este nombre en honor al matemático Leonhard Euler, que la descubrió en 1 765.



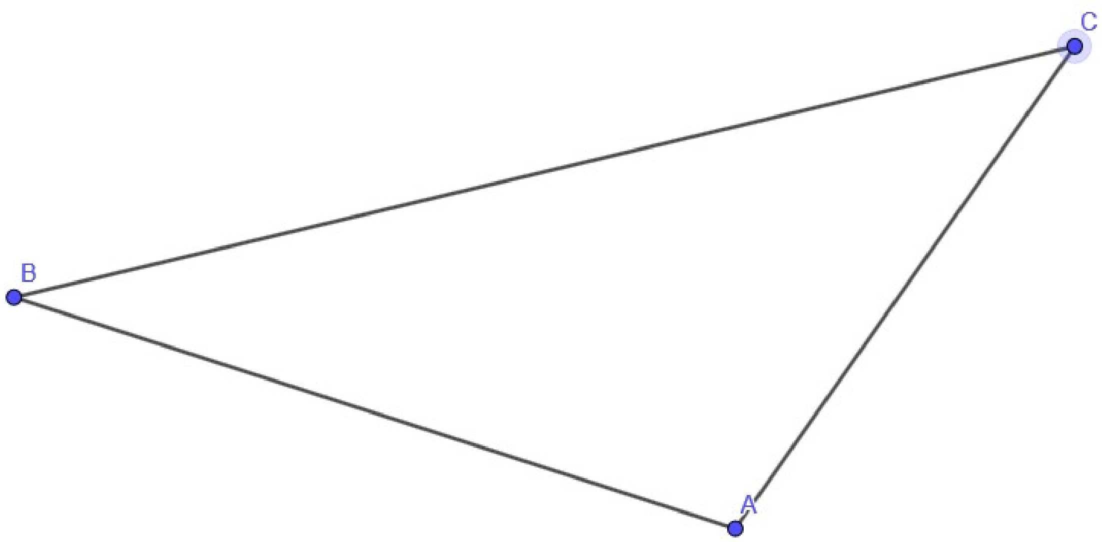
RECTA DE EULER

ANEXO IV. ACTIVIDADES CON REGLA Y COMPÁS

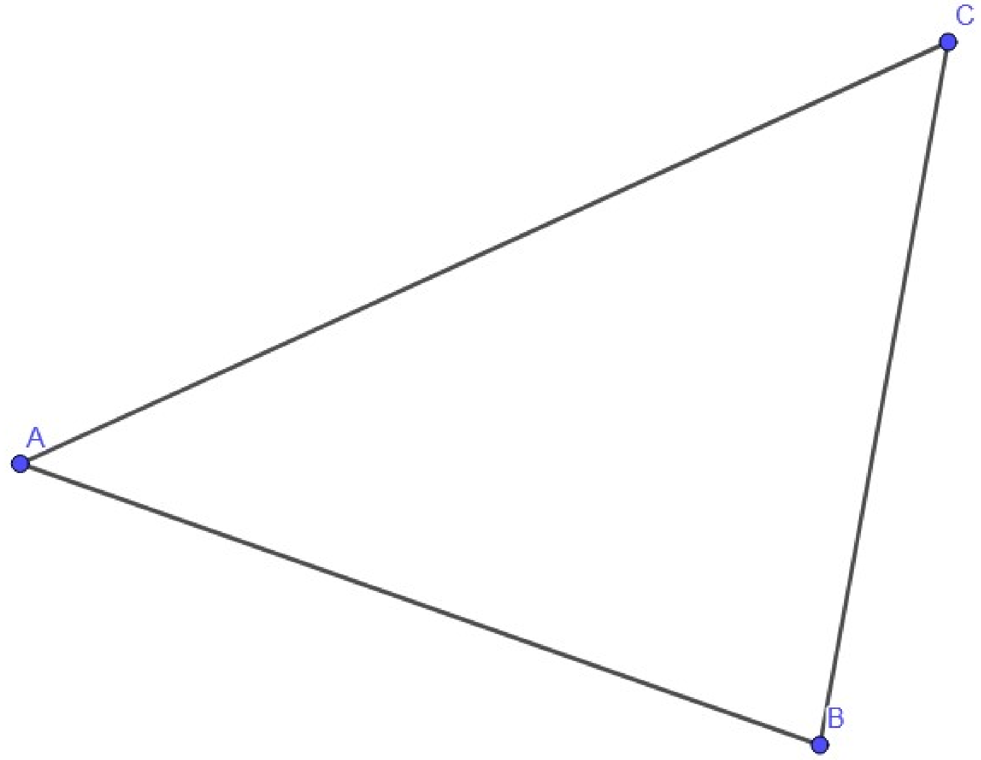
1. Hallar el circuncentro y la circunferencia circunscrita del siguiente triángulo.



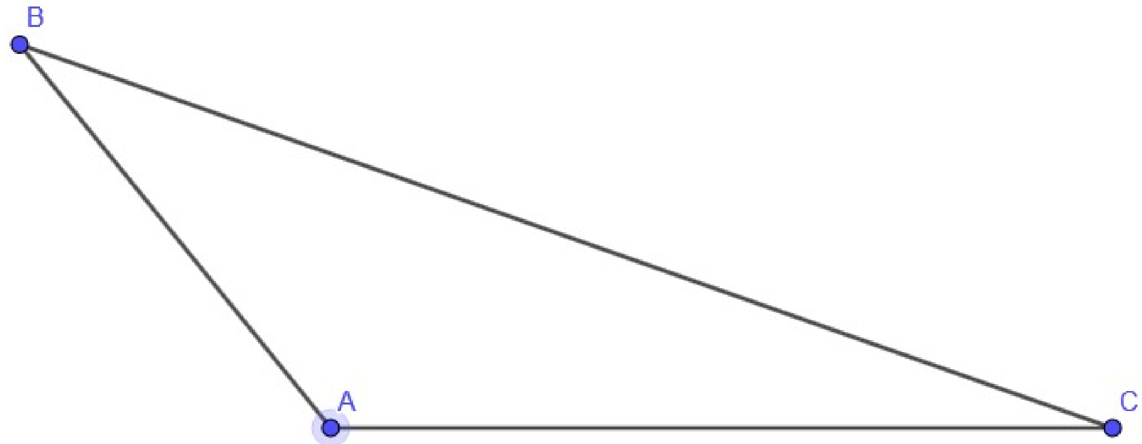
2. Hallar el baricentro del siguiente triángulo.



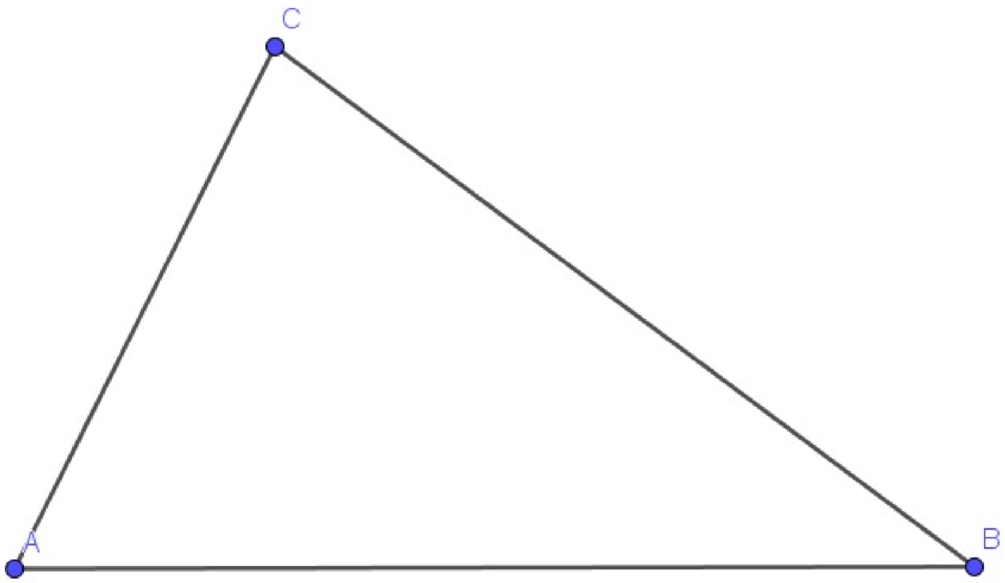
3. Hallar el ortocentro del siguiente triángulo.



4. Hallar el incentro y la circunferencia inscrita en el siguiente triángulo.



5. Calcular la recta de Euler en el siguiente triángulo



ANEXO V. POWER POINT PAPIROFLEXIA

CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS CON PAPIROFLEXIA

PUNTOS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO

ÍNDICE

1. REGLAS PARA TRABAJAR CON PAPEL.
2. CONSTRUCCIÓN DEL CIRCUNCENTRO DE UN TRIÁNGULO.
3. CONSTRUCCIÓN DEL BARICENTRO DE UN TRIÁNGULO.
4. CONSTRUCCIÓN DEL ORTOCENTRO DE UN TRIÁNGULO.
5. OBTENCIÓN DE LA RECTA DE EULER.
6. CONSTRUCCIÓN DEL INCENTRO DE UN TRIÁNGULO.

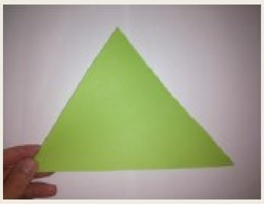
REGLAS DEL JUEGO

- NO USAR TIJERAS.
- NO USAR PEGAMENTO.
- PROHIBIDO USAR REGLA Y COMPÁS.
- PROHIBIDO USAR LÁPICES Y BOLÍGRAFOS.
- UNA PIZCA DE PACIENCIA.
- MUCHA MOTIVACIÓN.

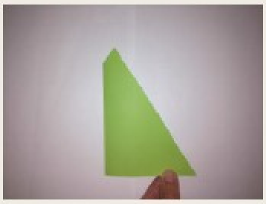
EL CIRCUNCENTRO

Punto de corte de las mediatrices de un triángulo

1º- Plegamos cada lado de vértice a vértice: obtenemos la **mediatriz de cada lado.**



1



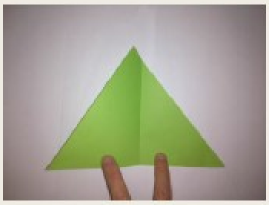
2

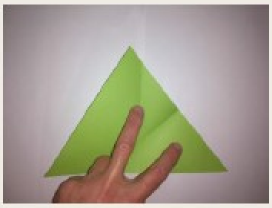
3

EL CIRCUNCENTRO

Punto de corte de las mediatrices de un triángulo

2º- Obtenemos el **circuncentro**, punto de corte de las tres **mediatrices.**



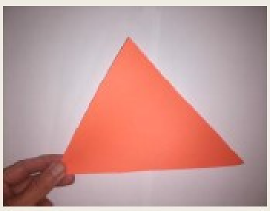


EL BARICENTRO

Punto de corte de las medianas de un triángulo

1º- Plegamos el papel para obtener el punto medio de un lado.

2º- Marcamos el segmento que va desde el punto medio al vértice opuesto, **mediana**.



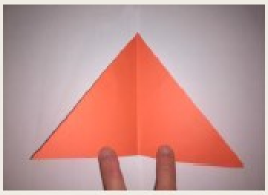
1

2

3

EL BARICENTRO

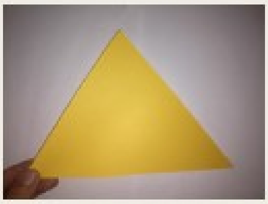
3º- Repetimos los pasos para obtener las tres medianas, que se cortarán en el **baricentro**.



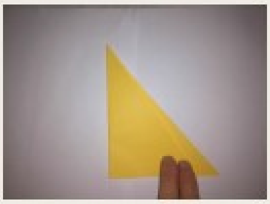
EL ORTOCENTRO

1º- Desde uno de los vértices plegamos el papel de manera que el lado que doblamos pliegue sobre sí mismo.

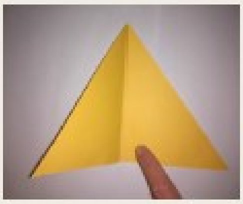
2º- Obtenemos así una de las alturas del triángulo.



1



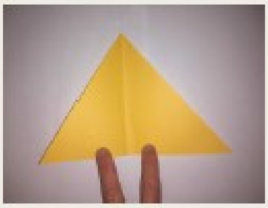
2

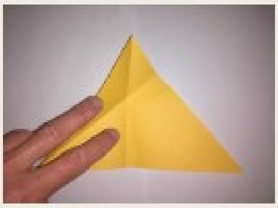


3

EL ORTOCENTRO

3º- Repetimos los pasos para obtener las tres alturas, que se cortarán en el **ortocentro**.

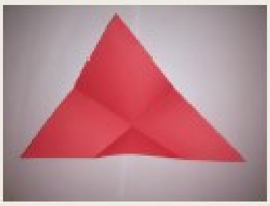




RECTA DE EULER

En un nuevo triángulo vamos realizar las tres construcciones anteriores. **Circuncentro, baricentro y ortocentro.**

¿Qué ocurrirá?



CIRCUNCENTRO

BARICENTRO

ORTOCENTRO

RECTA DE EULER

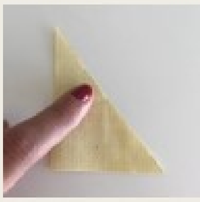
Observamos que si doblamos el papel por dos de estos puntos, la recta formada también pasa por el tercer punto. **¡Obtenemos la recta de Euler!.**

EL INCENTRO

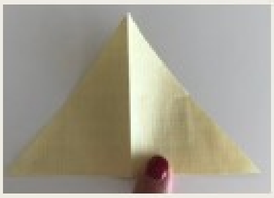
Punto de corte de las bisectrices de un triángulo

1º- Plegamos un lado del triángulo sobre otro, de tal manera que dividimos el ángulo en dos partes iguales, obtenemos la bisectriz.

1



2

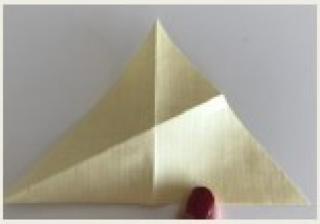


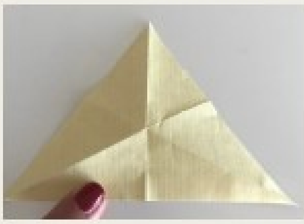
3

EL INCENTRO

Punto de corte de las bisectrices de un triángulo

2º- Repitiendo el paso anterior obtenemos el punto de corte de las bisectrices del triángulo, el incentro.



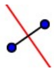


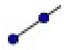
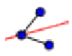
GRACIAS POR VUESTRA ATENCIÓN

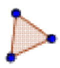
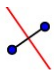
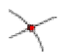
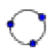
ANEXO VI. ACTIVIDADES Y PREGUNTAS DE GEOGEBRA

ACTIVIDADES CON GEOGEBRA

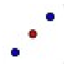
Antes de comenzar a trabajar con Geogebra, una vez abierto el programa, guardaremos el archivo en el escritorio del ordenador, para ello iremos a la barra de herramientas superior. (Archivo – guardar como – escritorio – nombre del archivo (G .nº de grupo) – guardar).

1. Construcción de la mediatriz de un segmento.
   a) Dibuja un segmento cualquiera AB. 
   b) Hallar la mediatriz del segmento AB. 
   c) Guardar. (Archivo - guardar).
   d) Ocultar la construcción.

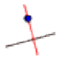
2. Construcción de la bisectriz de un ángulo.
   a) Dibuja dos semirrectas formando un ángulo cualquiera. 
   b) Hallar la bisectriz del ángulo, con los puntos que usaste para construir las semirrectas. 
   c) Guardar. (Archivo - guardar).
   d) Ocultar la construcción.

3. Hallar los puntos notables de un triángulo.
   CIRCUNCENTRO
   a) Dibujar un triángulo cualquiera. 
   b) Hallar las mediatrices de cada lado del triángulo. 
   c) Punto de intersección de las tres mediatrices del triángulo, **circuncentro,** (nombrar el punto como CIRCUNCENTRO). 
   d) Dibujar la circunferencia circunscrita al triángulo, con centro en el CIRCUNCENTRO y que pasa por los tres vértices. 
   e) Poner de color verde el circuncentro y las mediatrices.
   f) Guardar. (Archivo - guardar).
   g) Ocultar todas las construcciones, dejando solamente visible el triángulo.

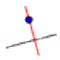
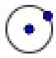
BARICENTRO

a) Marcar los puntos medios de cada lado del triángulo. 
b) Dibujar las medianas del triángulo, usando para ello la herramienta segmento. 
c) Punto de intersección de las tres medianas del triángulo, **baricentro**, (nombrar el punto como BARICENTRO). 
d) Poner de color amarillo el baricentro y las medianas.
e) Guardar. (Archivo - guardar).
f) Ocultar todas las construcciones, dejando solamente visible el triángulo.

ORTOCENTRO

a) Dibujar las alturas de cada lado del triángulo, usando para ello la herramienta de recta perpendicular. 
b) Punto de intersección de las tres alturas del triángulo, **ortocentro** (nombrar el punto como ORTOCENTRO). 
c) Poner de color morado el ortocentro y las alturas.
d) Guardar. (Archivo - guardar).
e) Ocultar todas las construcciones, dejando solamente visible el triángulo.

INCENTRO

a) Dibujar las bisectrices de los tres ángulos del triángulo, (por tres puntos). 
b) Punto de intersección de las tres bisectrices del triángulo, **incentro** (nombrar el punto como INCENTRO). 
c) Recta perpendicular desde el incentro a cualquier lado del triángulo. 
d) Punto de intersección de la recta perpendicular con el lado del triángulo. 
e) Dibujar la circunferencia inscrita en el triángulo con centro en el incentro y que pasa por el punto de intersección anterior. 
f) Poner de color naranja el incentro y las bisectrices.
g) Guardar. (Archivo - guardar).
h) Ocultar todas las construcciones, dejando visible el triángulo.

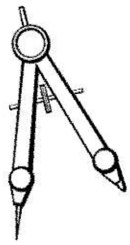
RECTA DE EULER

a) Poner visibles los siguientes puntos notables: circuncentro, baricentro y ortocentro.
b) Dibujar la **recta de Euler**. 
c) Guardar. (Archivo - guardar).
d) A continuación, responde brevemente a las preguntas de la ficha adjunta.
e) Cerrar el programa.

PREGUNTAS GEOGEBRA

Demuestra todo lo que sabes de los puntos notables de un triángulo.

1. ¿Existe algún triángulo en el que coincidan todos los puntos notables? ¿Cuál? ¿Qué ocurre con la recta de Euler?



2. ¿Qué puedes decir de los puntos notables de un triángulo rectángulo?

3. ¿Y de los de un triángulo obtusángulo?