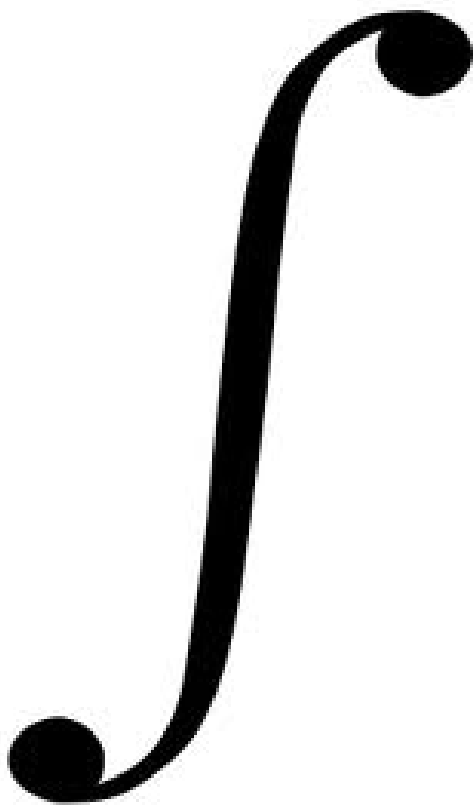


TRABAJO FIN DE MÁSTER

Curso
2010-2011

La Historia como herramienta didáctica: el concepto de integral



Máster en Formación del
Profesorado de Secundaria

Realizado por:

Laura Fernández Fernández
(especialidad de “Matemáticas”)

bajo la dirección del profesor:

D. Fernando Etayo Gordejuela

Índice

Introducción.....	1
Desarrollo histórico.....	3
El concepto de integral en Bachillerato	10
Aplicación al aula	13
Área de polígonos.....	14
Área del círculo	15
Integral definida y concepto de área. Propiedades	17
Interpretación física y geométrica de la integral	20
La media de una variable continua	21
Primitivas e integral indefinida	22
El movimiento	26
Aplicación al cálculo de áreas y volúmenes.....	27
Ampliación: el área del círculo y la elipse	31
El círculo.....	32
La elipse	32
Ampliación: integración numérica	33
Reflexión didáctica	35
Bibliografía y webgrafía.....	37

Introducción

La historia del concepto de integral comenzó hace más de veinte siglos, en un intento de dar respuesta a los diferentes problemas geométricos que fueron surgiendo. Con el paso de los siglos, nuevos problemas relativos a fenómenos naturales (gravedad, movimiento, etc.) propiciaron avances en la evolución del concepto, que finalmente desembocaron en el cálculo integral como lo conocemos hoy en día.

Este largo proceso está repleto de interpretaciones, dificultades, razonamientos y situaciones que pueden complementar los conocimientos del docente y modificar su criterio en la elaboración de materiales para el aula. Creo que existe cierta similitud entre las dificultades a las que se enfrentan los alumnos y las que se tuvieron que resolver a lo largo de la historia del concepto y considero que la historia, por tanto, puede resultar un recurso didáctico valioso. Por consiguiente, mi propósito es fomentar la reflexión, mostrar el valor de la historia como recurso didáctico y proponer un planteamiento que la integre en los contenidos de esta etapa.

Es fundamental que en el proceso de enseñanza-aprendizaje se parta de conceptos y procedimientos intuitivos, tales como los métodos de aproximación de áreas mediante polígonos inscritos y circunscritos, y postergar la formalización hasta que los alumnos hayan construido unos esquemas previos que les permitan asimilarla correctamente. De esta manera, estaremos utilizando la historia de las matemáticas para entender una idea difícil del modo más adecuado.

Introducir en el aula la fenomenología que jugó un papel fundamental en el desarrollo del concepto (el movimiento, el cálculo de volúmenes, etc.) puede constituir un elemento motivador que facilite la comprensión de los contenidos y la percepción de las matemáticas como una ciencia viva, puesto que “las matemáticas [...], *aunque se desarrollen con independencia de la realidad*

física, tienen su origen en ella y [...] su estructura se halla en continua evolución, tanto por la incorporación de nuevos conocimientos como por su constante interrelación con otras áreas” (Currículo de Bachillerato, p. 11018).

Con frecuencia, intentamos reducir la didáctica de las matemáticas a un conjunto de hechos y destrezas, quizás con la intención de optimizar el tiempo y abordar gran cantidad de contenidos. No obstante, con esta propuesta pretendo una comprensión más profunda del concepto de integral que les permita comprender y relacionar todos sus significados, que fueron surgiendo a lo largo de los años.

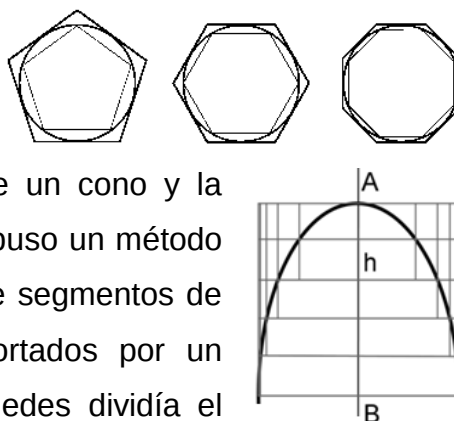
Dado que en la actualidad la mayor parte de los centros educativos disponen de estos recursos, he decidido incluir su utilización en la propuesta y complementar así el proceso de aprendizaje. He elegido GeoGebra como recurso visual y dinámico para facilitar la comprensión y relación entre las distintas representaciones, puesto que permite representar funciones y áreas bajo la curva fácilmente, construir figuras diversas y mostrar de forma intuitiva los procesos de paso al límite aplicados al cálculo de áreas. Para el procesamiento de los cálculos pesados que hay que realizar con los métodos de integración numérica he propuesto las hojas de cálculo, puesto que se trata de una herramienta sencilla que pueden utilizar a modo de calculadora.

De esta manera, la historia del concepto de integral puede favorecer un aprendizaje más significativo, dotando al proceso de enseñanza-aprendizaje de este tema de sentido y coherencia interna, a la vez que promueve un mayor nivel de predisposición del alumnado al contextualizar su estudio.

Desarrollo histórico

Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.) fue, quizás, el científico y matemático más importante de la Edad Antigua. Durante su estancia en Alejandría, que estaba considerada el centro de investigación y estudio más importante del mundo conocido, estudió con los discípulos de Euclides, lo cual representó una influencia importante en su forma de entender las matemáticas.

Utilizó el método exhaustivo desarrollado por Eudoxo de Cnido (408 – 355 a.C.), inscribiendo y circunscribiendo polígonos regulares en una circunferencia para calcular áreas y volúmenes. Calculó el volumen y la superficie de una esfera y de un cono y la superficie de una elipse y una parábola y expuso un método para calcular los volúmenes de revolución de segmentos de elipsoides, paraboloides e hiperboloides cortados por un plano perpendicular al eje principal. Arquímedes dividía el segmento AB del eje en n partes iguales de longitud h y consideraba cilindros de revolución.



En el siglo XVI, los problemas acerca de los centros de gravedad despertaron de nuevo el interés por estos métodos. Simon Stevin (1548 – 1620) sustituyó el método exhaustivo utilizado por Arquímedes por un método directo que representaba un gran paso hacia el concepto matemático de límite. Mientras Arquímedes demostraba que una determinada magnitud Q (por ejemplo, el volumen de un segmento parabólico) verificaba $Q=A$ probando que las hipótesis $Q<A$ y que $Q>A$ eran absurdas, el método de Stevin se basaba en que dos magnitudes B y A eran iguales si su diferencia se podía hacer menor que cualquier cantidad arbitrariamente pequeña.

El cambio de actitud en la matemática del siglo XVII, quizá influenciada por los grandes descubrimientos de todo tipo -geográficos, científicos, médicos

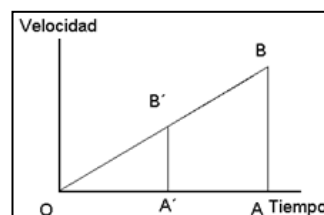
y tecnológicos- aumentó el interés de los matemáticos por descubrir más que por dar pruebas rigurosas, lo que supuso un gran avance en el desarrollo del cálculo infinitesimal.

Los trabajos de este siglo comenzaron con Johannes Kepler (1571 - 1630), de quien se dice que se interesó por el problema de los volúmenes porque notó la falta de precisión de los métodos utilizados por los tratantes de vinos para obtener el volumen de los barriles. Durante su estudio de los movimientos planetarios, expuso también un método para encontrar el área de sectores de una elipse, que consistía en pensar en las áreas como sumas de polígonos con base infinitamente pequeña.

En 1638, Galileo Galilei (1564 – 1642) presentó un razonamiento que relacionaba el área bajo una curva tiempo-velocidad con la distancia.

“El área de la curva tiempo-velocidad es la distancia”.

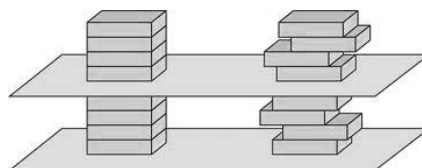
Supongamos que un objeto se mueve con velocidad variable $v=32t$, representado en el dibujo por la recta OB. Entonces, A'B' es la velocidad típica en un instante y también es la distancia infinitesimal recorrida. Por tanto, el área OAB, que está construida con líneas A'B', es la distancia total.



Este razonamiento estaba apoyado en la mente de Galileo por consideraciones filosóficas que equivalían a considerar el área OAB como construida con un número infinito de unidades indivisibles como A'B'.

Una de las figuras más destacadas de la primera mitad de este siglo es sin duda Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647), discípulo de Galileo. Basándose en las ideas de Kepler, expuso la idea fundamental de que un área está formada por segmentos indivisibles y un volumen por segmentos o áreas indivisibles:

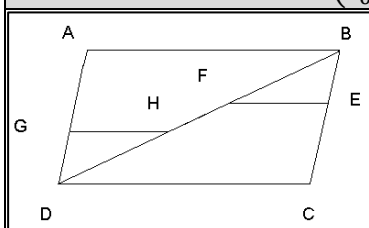
“Si dos cuerpos sólidos tienen la misma altura y si las secciones que determinan planos paralelos a las bases y a distancias iguales de ellas están siempre



en una razón dada, entonces los volúmenes de los dos sólidos están también en la misma razón”.

Con este método encontró el área acotada bajo funciones del tipo $f(x) = x^n$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9$.

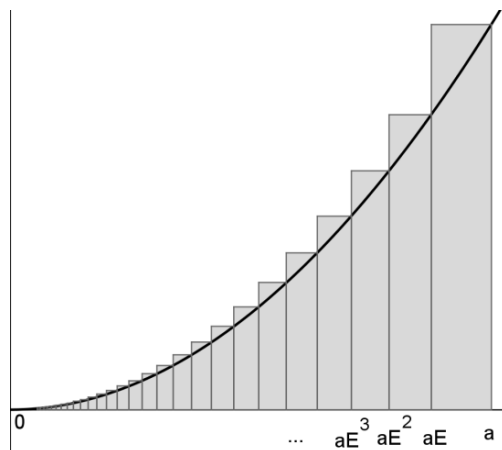
“La suma de las primeras potencias de los segmentos en uno de los dos triángulos es la mitad de la suma de las primeras potencias de los segmentos en el paralelogramo”. $\left(\int_0^a x \, dx = \frac{a^2}{2}\right)$.



Para demostrar que el paralelogramo ABCD tiene área doble que cualquiera de los triángulos ABD o BCD, hace notar que cuando $GD=BE$, se tiene que $GH=FE$. Por tanto los triángulos ABD y BCD están constituidos por igual número de líneas iguales, tales como GH y EF, y por tanto tienen que tener áreas iguales.

Así, como el paralelogramo es la suma de los indivisibles en los dos triángulos, la suma de las primeras potencias de los segmentos en uno de los dos triángulos es la mitad de la suma de las primeras potencias de los segmentos en el paralelogramo.

El método desarrollado por Pierre de Fermat (1601 – 1665) para calcular el área encerrada bajo estas curvas, que se podía aplicar tanto a valores enteros como fraccionarios de n , supuso un gran avance sobre la obra de Cavalieri. Fermat subdividía el intervalo de $x = 0$ a $x = a$ en una cantidad infinita de subintervalos tomando los puntos de abscisas $a, aE, aE^2, aE^3, \dots$, donde E es un número menor que 1. En estos puntos considera las ordenadas de los correspondientes puntos de la curva, aproximando el área bajo la curva por medio de rectángulos circunscritos. Las

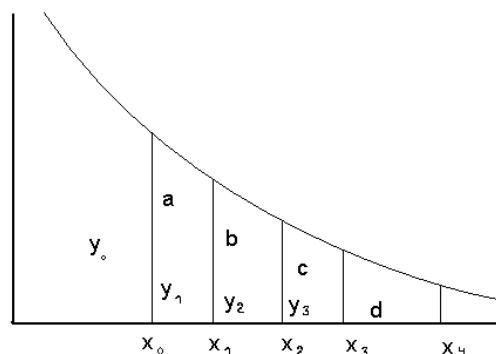


áreas de los sucesivos rectángulos vienen dadas por los términos de la progresión geométrica $a^n(a - aE)$, $a^nE^n(aE - aE^2)$, $a^nE^{2n}(aE^2 - aE^3)$, ... y la suma de estos infinitos términos es $\frac{a^{n+1}}{1+E+E^2+\dots+E^n}$. Haciendo $E = 1$ en la fórmula anterior obtenemos $\frac{a^{n+1}}{n+1}$, que nos da el área buscada bajo la curva.

Este razonamiento se extiende fácilmente al caso de exponentes

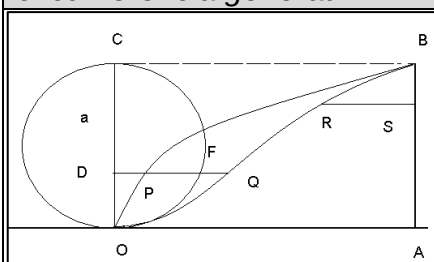
fraccionarios $n = \frac{p}{q}$ considerando $\tilde{E} = E^{1/q}$, y a valores negativos de n considerando E mayor que 1 y calculando así el área bajo la curva desde $x = a$ a infinito.

El caso $n = -1$, que fallaba con el método propuesto por Fermat, fue resuelto por Grégoire de Saint-Vicent (1584 – 1667), que probó que si las áreas $a, b, c, d, \dots$ son iguales, entonces las y_i están en progresión geométrica. Por lo tanto, el área bajo la curva $y = 1/x$ se puede expresar mediante logaritmos.



El matemático francés, Gilles Personne de Roberval (1602-1675) utilizó esencialmente el método de los indivisibles, pero de forma mucho más rigurosa, para obtener el área encerrada bajo una curva, y en particular, calculó la integral de x^m desde 0 hasta 1 y obtuvo el área bajo un arco de cicloide, un problema sobre el que Marin Mersenne (1588 – 1648) había llamado su atención en 1629.

“El área encerrada debajo de un arco de cicloide es tres veces el área de la circunferencia generatriz”.



Sea OABP el área situada bajo la mitad de un arco de cicloide, donde P es un punto cualquiera del arco y F y D se obtienen como se muestra en la figura. Tomemos Q tal que $PQ=DF$. El lugar geométrico descrito por Q se llama curva asociada a la cicloide. Por el principio de Cavalieri, la curva OQB divide al rectángulo OABC en dos partes iguales. El rectángulo OABC tiene su base y su altura iguales, respectivamente, a la semicircunferencia y diámetro; por lo tanto su área es el doble de la circunferencia. Entonces OABQ tiene la misma área que la circunferencia generatriz. Además el área entre OPB y OQB es igual al área del semicírculo OFC porque de la misma definición de Q se tiene que $DF=PQ$, de modo que estas dos áreas tienen la misma anchura en todas partes. En consecuencia, el área encerrada debajo del semiarco es una vez y media el área de la circunferencia generatriz.

En 1655 se publicó *Arithmetica Infinitorum*, la obra más importante de John Wallis (1616 – 1703. Miembro fundador de la Royal Society, asignó

valores numéricos a los indivisibles de Cavalieri y convirtió el cálculo de áreas, hasta el momento algo meramente geométrico, en cálculos aritméticos. Hizo un uso descarado del infinito (a él le debemos el símbolo ∞) y utilizó un primitivo proceso al límite.

“La razón de los cuadrados de los indivisibles en el triángulo con los cuadrados de los indivisibles en el paralelogramo es 1/3”.



Tomamos la longitud del primer indivisible del triángulo como 0, la del segundo como 1, la del tercero como 2, y así sucesivamente hasta el último, de longitud n, si hay en total n+1 indivisibles.

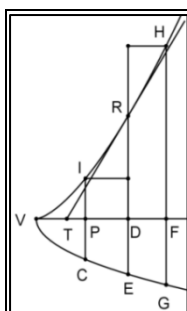
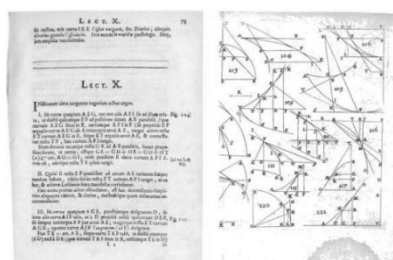
La razón de las sumas de los cuadrados de los indivisibles en las dos figuras sería entonces

$$\frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2}{n^2 + n^2 + n^2 + \dots + n^2 + n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$$

y, para n infinito, la razón sería igual a 1/3.

De esta manera, en la parte central del siglo XVII, además de los infinitésimos, cada vez usaban más fórmulas y menos dibujos: la geometría analítica, cuyo punto de inicio se sitúa en la primera mitad del siglo XVII, cumplía su función de puente entre la geometría y el análisis.

Parece que fue Isaac Barrow (1630-1677) el primero en demostrar, de alguna manera, el carácter inverso de los problemas de tangentes y los problemas de cuadraturas, que aunque originalmente consistían en encontrar cuadrados cuya área fuese igual al de una figura dada, con el tiempo se generalizaron al cálculo de áreas. No obstante, su conservadora adhesión a los métodos geométricos le impidió hacer un uso efectivo de esta relación. En la lección X de su obra *Lectiones opticae & geometricae* (1674) Barrow muestra la versión geométrica del Teorema Fundamental del Cálculo.



Se considera la curva VCEG debajo del eje horizontal, ahora se construye la curva VIRH, encima del eje horizontal, asignándole a cada punto el área encerrada por la curva inicial. Por ejemplo, la longitud del segmento PI es el área de la superficie de vértices VCP, análogamente para el segmento DF y la superficie VED.

Si trazamos la tangente a la curva VIRH en un punto, se obtiene como pendiente para esa recta tangente el valor de la curva inicial en ese punto.

En esta época, las universidades de Oxford y Cambridge lideraban el proceso de creación matemática, la *Royal Society* de Londres ejercía enorme influencia en el desarrollo de las matemáticas en Inglaterra y en Europa, los trabajos astronómicos de Kepler se conocían ya en Inglaterra y figuras destacadas como Barrow, Galileo y Kepler ya habían expuesto sus teorías.

De esta manera, en el último cuarto del siglo XVII, Isaac Newton (1642 – 1727) y Gootfried Leibnitz (1646 – 1716), de manera independiente, definieron lo que hoy llamamos la derivada y la integral, desarrollaron unas reglas para manipular la derivada (reglas de derivación) y mostraron que ambos conceptos eran inversos (Teorema Fundamental del Cálculo).

Newton introdujo los conceptos de *fluente* -variable en función del tiempo- y *fluxión* -derivada respecto al tiempo de la fluente- y unas reglas algorítmicas de fácil uso que luego utilizó para resolver distintos problemas de máximos y mínimos, tangentes y cuadraturas.

El descubrimiento de Leibnitz fue posterior al de Newton, aunque fue el primero en publicarlo. En torno a 1673, Leibnitz se convenció de que los problemas inversos de tangentes y los de cuadraturas eran equivalentes, y comenzó a desarrollar toda una teoría de sumas y diferencias infinitesimales que acabarían en la gestación de su cálculo, publicado por el año 1680. En esta obra introdujo la notación para la integral que todavía hoy usamos.

Johann Bernoulli (1667 – 1748), por su parte, vio la integración simplemente como la operación inversa de la diferenciación y, con esta aproximación, obtuvo muchos éxitos integrando ecuaciones diferenciales. Fue el primero en escribir un curso sistemático de cálculo integral, publicado en 1742.

Posteriormente, Leonhard Euler (1707 – 1783) llevó la integración hasta sus últimas consecuencias, de forma que los métodos de integración indefinida alcanzaron prácticamente su nivel actual.

El cálculo adquirió una posición más firme con el desarrollo de los límites y, en la primera mitad del siglo XIX, recibió una fundamentación adecuada por

parte de Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Cauchy observó que una función podía ser no derivable en un punto e incluso no continua y, sin embargo, podía tener un área bien definida. Esto le llevó a definir la integral definida como el límite analítico, no geométrico, de las sumas integrales:

$$S_n = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

La integración fue rigurosamente formalizada por Bernhard Riemann (1826 – 1866) para todas las funciones continuas fragmentadas y acotadas en un intervalo acotado empleando límites.

Más tarde se consideraron funciones más generales para las cuales no se podía aplicar la definición de Riemann, lo que dio lugar a otras definiciones de integral.

El concepto de integral en Bachillerato

En el recorrido histórico que acabamos de realizar, podemos destacar cuatro momentos que supusieron un cambio importante en el desarrollo del concepto de integral:

- ❖ Ya en la Antigua Grecia, Eudoxo o Arquímedes fueron precursores del concepto de integral, y se centraron en **cuestiones geométricas** tales como el cálculo de áreas o volúmenes.
- ❖ En el siglo XVII, la necesidad de explicar y comprender ciertos **fenómenos naturales** desembocó en una concepción dinámica de la integral, frente a la concepción estática de la geometría griega. Así, Kepler estableció las leyes que describen matemáticamente el movimiento de los planetas en sus órbitas, y en particular, demostró que *“el radio vector que une un planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales”*. Por su parte, figuras como Galileo o Barrow consideraron el problema del movimiento y contribuyeron al desarrollo del cálculo infinitesimal.
- ❖ Con el **Teorema Fundamental del Cálculo**, la derivación y la integración se establecieron como operaciones inversas, lo que supuso un nuevo significado de la integral.
- ❖ En el siglo XIX, Cauchy formalizó el concepto con un **procedimiento de paso al límite**.

Estas cuatro situaciones nos permiten considerar cuatro configuraciones distintas del concepto de integral (Ordóñez y Contreras, 2010. p. 28).

En las materias de matemáticas que se imparten en 2º de Bachillerato, el estudio de la integral se centra en el cálculo de primitivas y la aplicación de la regla de Barrow para el cálculo de integrales definidas, que se identifican con el

área. Además, la integración y la derivación se presentan como operaciones inversas y de hecho, en Matemáticas II, el Teorema Fundamental del Cálculo forma parte de los contenidos que contempla el [currículo](#). No obstante, a la integral como procedimiento de paso al límite o a la fenomenología no se les concede el protagonismo que tuvieron a lo largo de la historia.

Este planteamiento en el que se le concede un protagonismo excesivo a la integral indefinida a expensas de la integral definida comenzó con Newton y Leibniz, que relacionaron la integral y la derivada mediante el Teorema Fundamental del Cálculo y redujeron el cálculo de la integral definida a la búsqueda de primitivas.

No obstante, la definición de la integral definida no lo requiere y considero que es preferible que conozcan la integral indefinida cuando sean conscientes de su funcionalidad como instrumento para evaluar la integral definida. Esto les va a permitir una mejor asimilación de los conceptos esenciales del Cálculo Integral y desarrollar unos esquemas que les permitan relacionar las distintas interpretaciones y representaciones del concepto de integral sobre una base más sólida.

Por ejemplo, la interpretación del concepto de integral como paso al límite no se contempla en el currículo, y con frecuencia los alumnos llegan a la Universidad sin conocer la construcción de la integral como límite de las sumas de Riemann, a pesar de que disponen de los conocimientos previos necesarios (límites, sucesiones, etc.) para abordarlo y de que esta integral de Riemann es la que están utilizando para la resolución de los problemas que se les plantean.

En el [currículo](#) de Bachillerato (pp. 11019) se afirma que *“la historia de las matemáticas [...] nos desvela el proceso de emergencia de las matemáticas en el tiempo”* y que *“se puede y se debe utilizar para entender una idea difícil del modo más adecuado”*. No obstante, el estudio del concepto de integral en esta etapa no responde al orden histórico en el que se fue desarrollando y la historia del concepto no se utiliza como recurso didáctico.

Por otra parte, la aplicación de la integral definida al cálculo de áreas se

suele limitar a “hallar el área bajo una curva” o el “área entre dos curvas”, sin proporcionar un contexto que ponga de manifiesto su funcionalidad ni mencionar que el área de muchas de las figuras que ya conocen los alumnos (círculo, elipse, etc.) se puede hallar con y sin integrales.

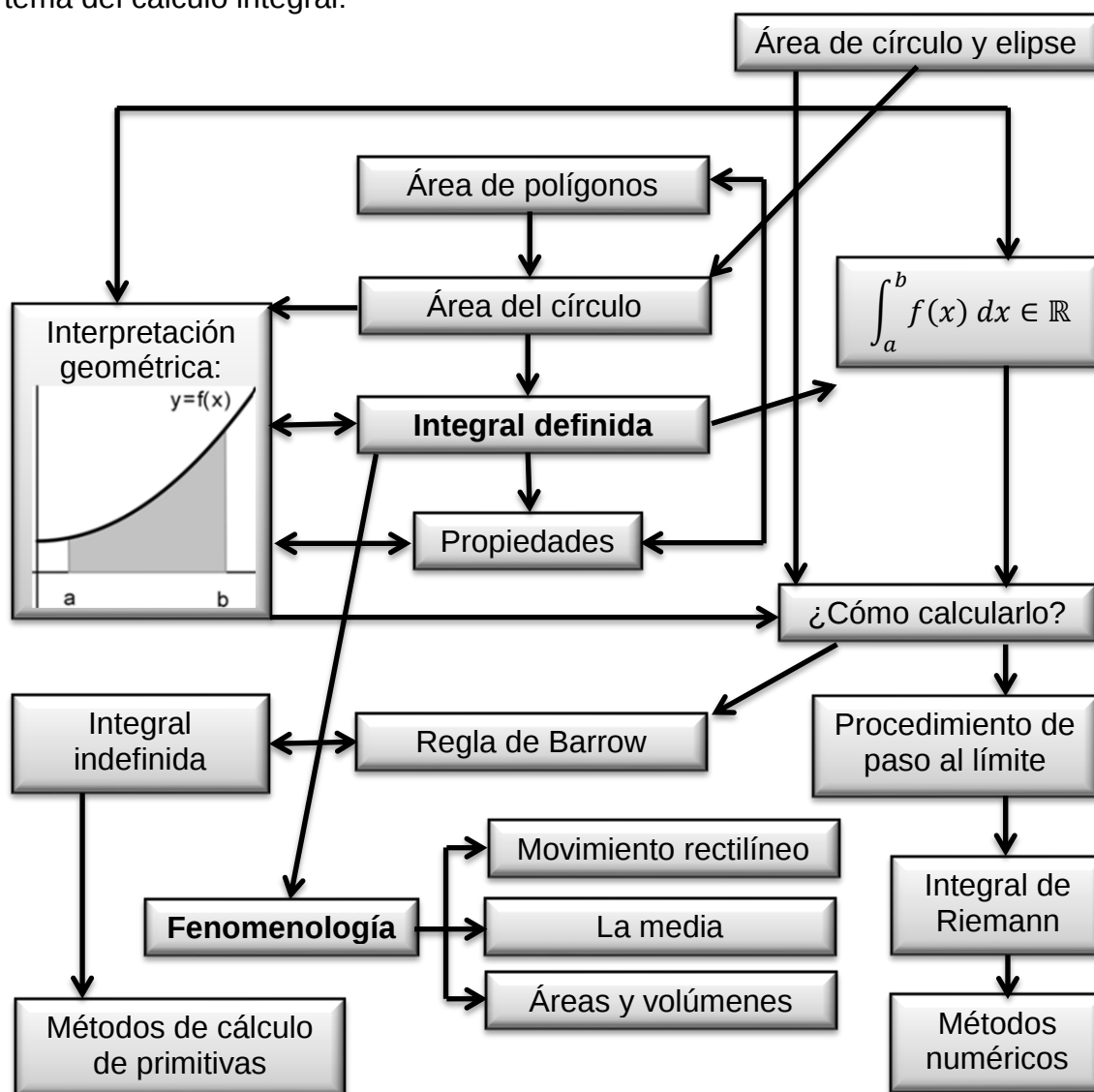
Creo que una de las razones que justifica este enfoque en la presentación del concepto de integral es la existencia de las Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU) que, por una parte, obligan a trabajar los contenidos estipulados en un tiempo muy limitado que impide un mayor desarrollo de los conceptos y, por otra parte, se limitan en la mayoría de los casos a evaluar las técnicas de cálculo de integrales y de áreas entre gráficas de funciones. Esto hace que la fenomenología y la historia del concepto, que no entran en las PAU, se presenten de forma superficial en el mejor de los casos, o sea inexistente.

Como consecuencia, los alumnos finalizan su educación secundaria con dificultades para relacionar los distintos significados y representaciones de la integral (Ordóñez y Contreras, 2010. pp. 39-40).

Aplicación al aula

La propuesta que voy a realizar para llevar al aula se fundamenta en las aportaciones que se realizaron a lo largo de más de 20 siglos y que desembocaron en el cálculo integral. He tenido en cuenta el orden histórico de los avances, aunque en momentos puntuales me he tomado ciertas libertades que, desde mi punto de vista, podían facilitar la comprensión y motivar nuevos conceptos e interpretaciones.

El siguiente mapa ilustra la organización que propongo para abordar el tema del cálculo integral:



Aunque la interpretación física de la integral no forma parte de los contenidos incluidos en el currículo de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, considero que se puede introducir en el aula mediante un estudio intuitivo del movimiento, como fenómeno decisivo que contribuyó al desarrollo del concepto en el siglo XVII.

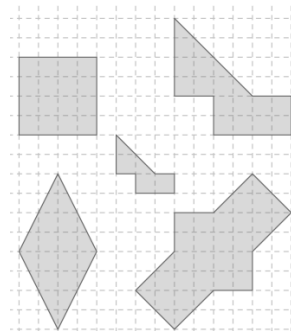
También he pretendido relacionar el concepto de integral con el resto de contenidos que se abordan en este curso, tales como las matrices, los volúmenes (en Matemáticas II), el concepto de límite y la derivada, con el fin de mostrar que las matemáticas no se dividen en bloques estancos y que la relaciones entre ellos pueden dar respuesta a problemas diversos.

Soy consciente de la dificultad de aplicar esta propuesta en su totalidad debido a la necesidad de que los alumnos adquieran los conocimientos que se evalúan en las pruebas PAU y a la falta de tiempo que provoca un currículo tan extenso como el de segundo curso de Bachillerato. No obstante, creo que puede servir de reflexión a los docentes que imparten estas materias y proporcionar ideas y sugerencias que pueden introducir en sus propuestas de aula.

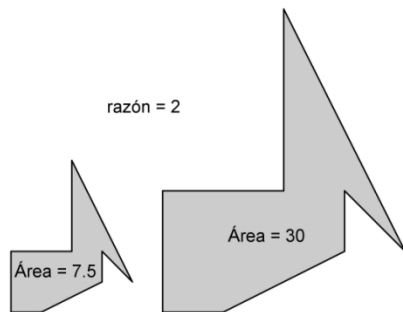
I. Área de polígonos

El concepto de integral surgió en la Antigua Grecia ligado al cálculo de áreas. Por lo tanto, comenzaremos el tema hallando el área de las figuras de la imagen, que se obtienen fácilmente a partir de las propiedades del área:

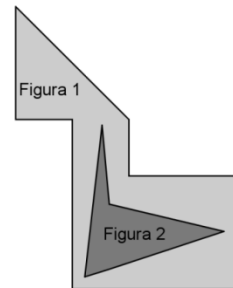
1. El área de un rectángulo de base a y altura b es ab .
2. Si la razón de semejanza entre dos cuerpos es r , la razón entre sus áreas es r^2 .
3. Si descomponemos una figura en otras más pequeñas, el área de la figura total será igual a la suma de las áreas de las figuras que lo forman.



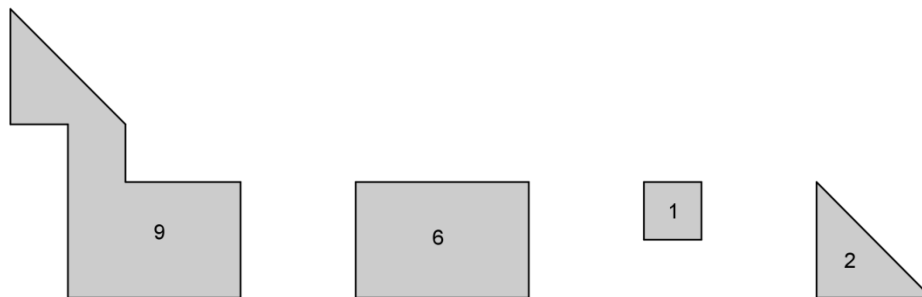
4. Si una figura (figura 2) está contenida en otra (figura 1), entonces el área de la figura 2 es mayor que el área de la figura 1.



Propiedad 2



Propiedad 4



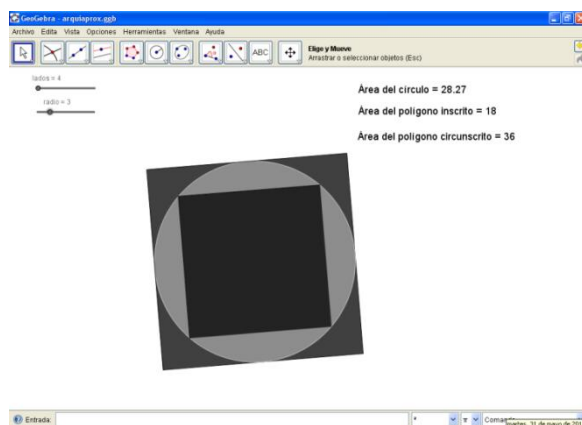
$$\text{Área total} = \text{Área del rectángulo} + \text{Área del cuadrado} + \text{Área del triángulo}$$

Propiedad 3

II. Área del círculo

No obstante, hay figuras curvas cuya área no es tan fácil de determinar. Veamos el caso concreto del círculo. Sabemos calcular su área con la fórmula $\text{Área} = \pi \cdot \text{radio}^2$. No obstante, ¿cómo se obtiene esa fórmula?

En la Antigua Grecia, Arquímedes aproximaba el área del círculo mediante el área de polígonos inscritos y circunscritos, de forma que al aumentar el número de lados, el área de estos polígonos se aproximaba al área del círculo.

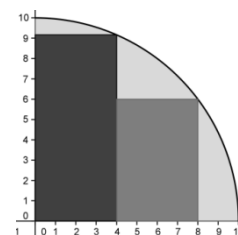


¿Sabrías explicar por qué utiliza polígonos inscritos y circunscritos?
 ¿Qué podemos afirmar a partir de esta construcción? Compruébalo manipulando la figura dinámica¹ anterior.

Supongamos ahora que tenemos un círculo de radio 10 unidades. Si lo dividimos en cuatro sectores iguales, ¿Cuál será el área de cada sector?

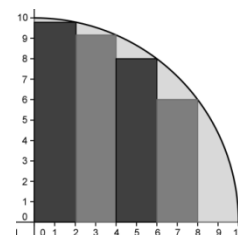
A continuación, vamos a presentar un método que nos permite aproximar esa área mediante rectángulos, cuya área es fácil de calcular.

- ❖ ¿Cuánto vale el área de cada uno de los dos rectángulos? ¿Y su suma?
- ❖ ¿Cuál es la diferencia entre el área del sector y la suma calculada?



Utilizando un mayor número de rectángulos más pequeños, podemos lograr que esa diferencia disminuya:

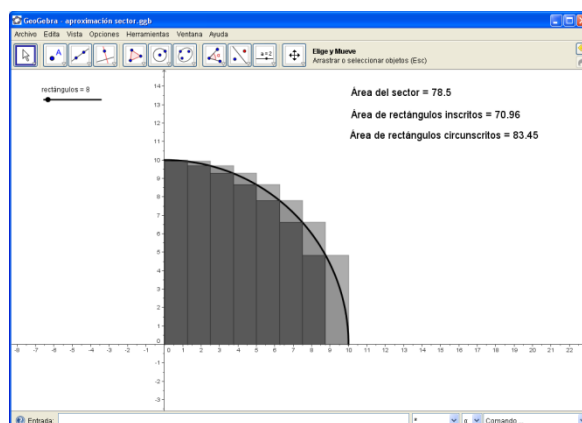
- ❖ ¿Qué área ocupan ahora esos cuatro rectángulos?
- ❖ ¿Cuál es la diferencia entre esa área y el área del sector?



Como vemos, a medida que aumenta el número de rectángulos y éstos se van haciendo más estrechos la diferencia entre áreas disminuye.

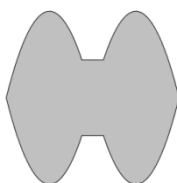
- ❖ ¿Qué ocurriría si en lugar de utilizar rectángulos cuya altura viene dada por la imagen del extremo derecho tomásemos rectángulos con altura la imagen del extremo izquierdo?

A partir de la siguiente construcción dinámica, explica lo que sucede a medida que el número de rectángulos aumenta e indica cómo podríamos aproximar el área del sector.



¹ Las figuras dinámicas, creadas con GeoGebra, han sido construidas por la autora.

- ❖ ¿Podríamos utilizar este método para calcular el área de la siguiente figura?



III. Integral definida y concepto de área. Propiedades

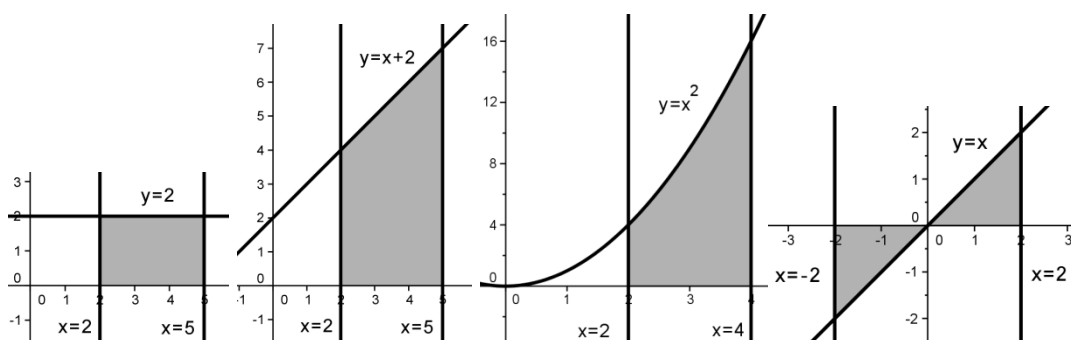
El problema de cálculo de áreas que hemos venido resolviendo se puede generalizar como sigue:

“Calcular el área limitada por la gráfica de una función $y = f(x)$, el eje X y dos rectas, $x = a$ y $x = b$.”

Veamos algunos ejemplos:

- ❖ ¿Cuánto vale el área limitada por la gráfica de:

- $y = 2$, el eje X y las rectas $x = 2$ y $x = 5$,
- $y = x + 2$, el eje X y las rectas $x = 2$ y $x = 5$,
- $y = x^2$, el eje X y las rectas $x = 2$ y $x = 4$,
- $y = x$, el eje X y las rectas $x = -2$ y $x = 3$.



Como podemos observar en los ejemplos planteados, la función puede tomar también valores negativos.

El siguiente paso que vamos a dar consiste en introducir un nuevo concepto a partir de este problema de cálculo de áreas, que nos va a permitir formalizarlo. Así, definimos la **integral definida** de una función continua $f(x)$

en un intervalo $[a, b]$, $\int_a^b f(x) dx$, como el área orientada limitada por la gráfica de la función $y = f(x)$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$.

❖ ¿Qué significa el concepto *área orientada*?

El concepto de área orientada es equivalente al de área con signo. Así, si $f(x) > 0$, la integral definida será el área, y si $f(x) < 0$, la integral definida será el área con signo negativo.

❖ ¿Por qué definimos la integral definida como el área orientada y no sólo como el área (positiva)?

Para responder a esta pregunta, vamos a generalizar las propiedades del área 3 y 4 que vimos en el apartado I, y que queremos que se sigan verificando con esta nueva definición:

▪ Si $h(x) = f(x) + g(x)$, entonces

$$\int_a^b h(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

▪ Si $f(x) < g(x)$, entonces $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$

Consideremos ahora las funciones $f(x)$ y $g(x) = -f(x)$. Entonces, tenemos que $h(x) = 0$ y $\int_a^b h(x)dx = 0$. Por tanto, se tiene que verificar que $\int_a^b g(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$, lo que implica que una de las dos integrales definidas será negativa. Observemos también que se verifica que

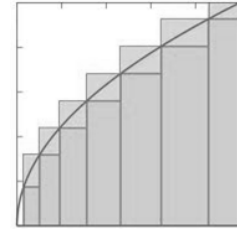
$$\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Del mismo modo, si consideramos $f(x) < 0$ y $g(x) = 0$ se verifica que $f(x) < g(x)$, luego $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx = 0$ y la integral definida de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ será negativa.

Conocida la definición de la integral definida, vamos a formalizar el método de cálculo mediante rectángulos visto en el apartado II:

Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n partes eligiendo $n + 1$ puntos

$x_0, x_1, \dots, x_n$ tales que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Al conjunto $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ se le denomina partición del intervalo. Ahora, definimos la **suma inferior de Riemann** y la **suma superior de Riemann**:



$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}), \quad S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

donde m_i y M_i son, respectivamente, el mínimo y el máximo de los valores de la función f en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

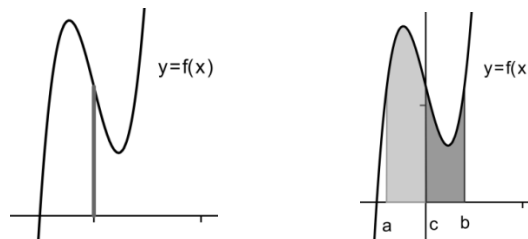
Si los límites $\lim_{n \rightarrow \infty} s(f, \mathcal{P})$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \mathcal{P})$ existen y son iguales, entonces,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} s(f, \mathcal{P}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \mathcal{P})$$

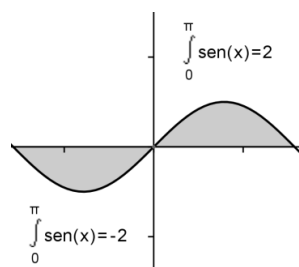
Ahora bien, con esta definición de integral definida como área orientada y con el método que conocemos para obtener su valor, ¿qué otras propiedades se verifican?

❖ $\int_a^a f(x) dx = 0$

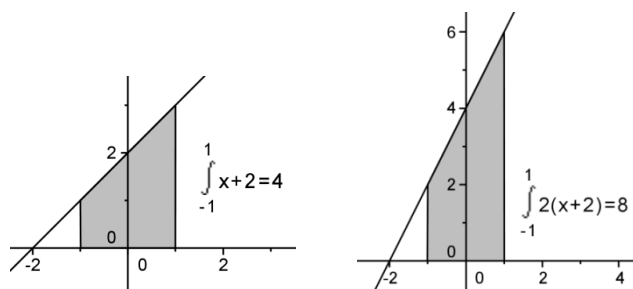
❖ Si $c \in (a, b)$, entonces $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$



❖ $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$



$$\diamond \int_a^b r f(x) dx = r \int_b^a f(x) dx$$

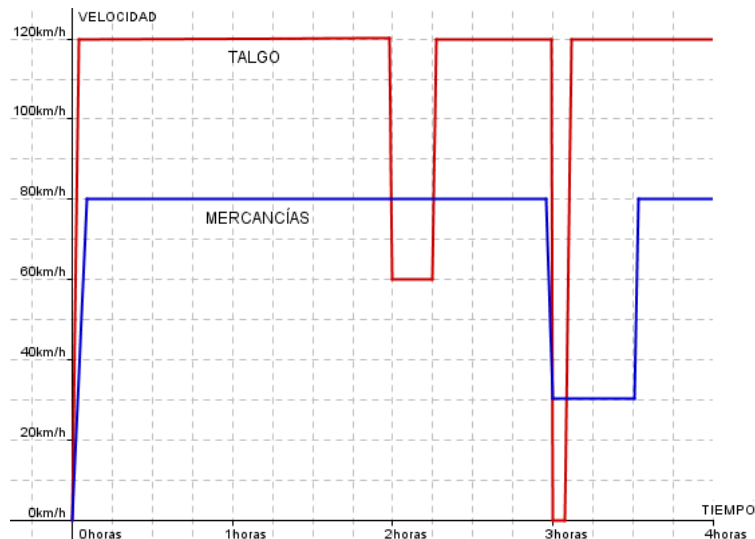


IV. Interpretación física y geométrica de la integral

Hasta ahora, hemos visto la interpretación geométrica de la integral definida como área. A continuación, vamos a ver su interpretación física en la siguiente actividad:

❖ Un Talgo y un tren de mercancías salen de la misma estación, por la misma vía y en idéntica dirección, uno tras otro, casi simultáneamente.

Éstas son las gráficas TIEMPO-VELOCIDAD de ambos movimientos.



Como podemos ver en la gráfica, el Talgo, a las dos horas, reduce su velocidad. ¿A qué puede deberse? ¿Por qué no aminora la marcha también el otro tren en ese instante?

A las tres horas, ambos trenes modifican su marcha: el Talgo se detiene durante breves minutos, mientras que el tren de mercancías va muy despacio

durante media hora.

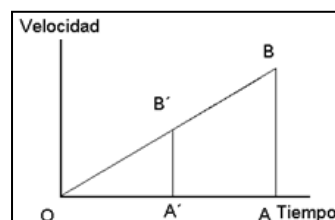
Para hacernos una idea clara de estos movimientos, realicemos algunos cálculos:

- El Talgo, durante 2h, va a 120 km/h. ¿Cuántos kilómetros recorre a esa velocidad?
- De 2 a 2 1/4, el Talgo disminuye su velocidad. ¿Cuántos kilómetros recorre a esa velocidad?
- El tren de mercancías aminora la marcha a las 3h. ¿Qué distancia ha recorrido hasta ese momento?
- ¿Qué distancia recorre el tren de mercancías durante la media hora en que va a baja velocidad?
- ¿A qué distancia de la estación de salida está otra en la que para el Talgo?

Compara los resultados obtenidos con las áreas bajo las gráficas.

V. La media de una variable continua

En el apartado anterior, vimos cómo el área bajo la gráfica tiempo-velocidad coincidía con el espacio recorrido. Este resultado ya lo razonó Galileo en 1638, considerando que el área OAB estaba construida con un número infinito de unidades indivisibles como A'B', que eran la velocidad en un instante y también la distancia infinitesimal recorrida.

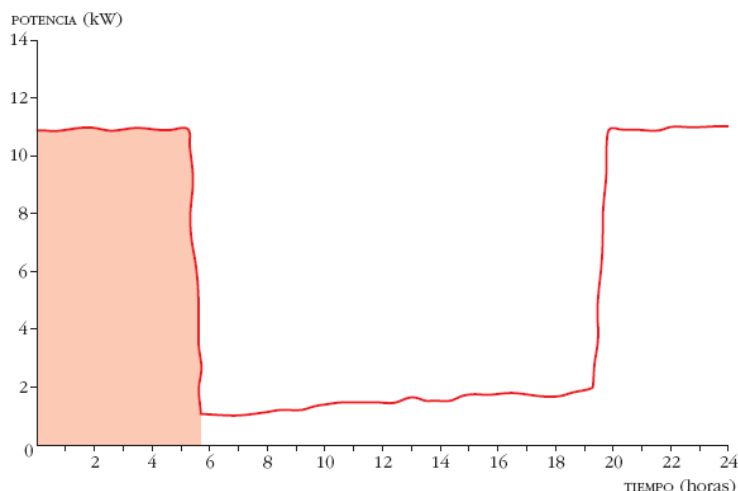


A lo largo del siglo XVII, diversas figuras (Kepler, Galileo, Cavalieri, Wallis...) consideraron, de forma más o menos rigurosa, el área como un conjunto infinito de unidades o segmentos rectilíneos indivisibles.

Esta interpretación nos puede ayudar a comprender cómo la integral nos permite obtener el promedio de una variable continua y generalizar la fórmula para la media de las variables discretas, que constituye uno de los contenidos del segundo curso de la Educación Secundaria Obligatoria, al caso continuo.

La gráfica siguiente representa la potencia, en kW, que se está empleando en cada momento en un local, a lo largo de un día.

¿Cómo podemos calcular el consumo de energía entre las 0 y las 5:30 de la mañana? ¿Y el consumo promedio a lo largo del día?



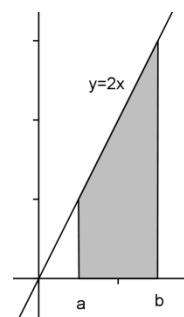
VI. Primitivas e integral indefinida

Ahora que ya sabemos que son las integrales definidas y algunas situaciones donde aparecen, vamos a calcular algunas:

$$\diamond \int_a^b 2x \, dx, \quad 0 \leq a < b$$

Como $2x > 0$ en el intervalo $[a, b]$, el valor de esta integral definida coincide con el área limitada por la gráfica de la función, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$. Por lo tanto,

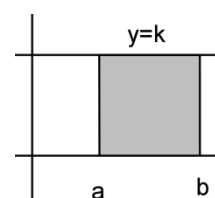
$$\begin{aligned} \int_a^b 2x \, dx &= 2a(b-a) + \frac{(b-a)(2b-2a)}{2} \\ &= 2a(b-a) + (b-a)^2 = b^2 - a^2. \end{aligned}$$



$$\diamond \int_a^b k \, dx, \quad k > 0$$

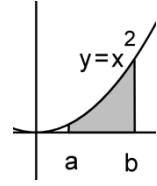
El valor de esta integral definida coincide con el área de un rectángulo de base $b - a$ y altura k :

$$\int_a^b k \, dx = k(b-a).$$



$$\diamond \int_a^b x^2 dx, 0 \leq a < b$$

$f(x) = x^2$ es una parábola y no podemos obtener directamente el valor de esta integral interpretándola como el área bajo la curva.



Sea $\mathcal{P} = \{a, a + \frac{b-a}{n}, a + \frac{2(b-a)}{n}, \dots, a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}, b\}$ la partición que resulta de dividir el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales. Entonces,

$$\begin{aligned} s(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(a + \frac{(i-1)(b-a)}{n} \right)^2 \left(\frac{b-a}{n} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{a^2(b-a)}{n} + \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)^2(b-a)^3}{n^3} + \sum_{i=1}^n \frac{2(i-1)(b-a)^2}{n^2} \\ &= a^2(b-a) + \frac{(b-a)^3}{n^3} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 + \frac{2a(b-a)^2}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1) \\ &= a^2(b-a) + \frac{(b-a)^3}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{2a(b-a)^2}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} \\ &= a^2(b-a) + \frac{(b-a)^3}{3} - \frac{(b-a)^3}{2n} + \frac{(b-a)^3}{6n^2} + a(b-a)^2 \\ &\quad - \frac{a(b-a)^2}{n} \end{aligned}$$

Análogamente, como $M_i = f(x_i) = \left(a + \frac{i(b-a)}{n} \right)^2$, tenemos que:

$$S(f, \mathcal{P}) = a^2(b-a) + \frac{(b-a)^3}{3} + \frac{(b-a)^3}{2n} + \frac{(b-a)^3}{6n^2} + a(b-a)^2 + \frac{a(b-a)^2}{n},$$

luego

$$\begin{aligned} \int_a^b x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} s(f, \mathcal{P}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \mathcal{P}) = a^2(b-a) + \frac{(b-a)^3}{3} + a(b-a)^2 \\ &= \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}. \end{aligned}$$

Este resultado es válido para cualesquiera valores de a y b . No obstante,

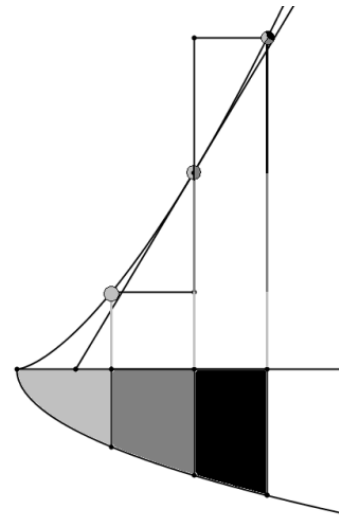
- Si $a < b \leq 0$, entonces la función es decreciente y se tiene que $m_i = f(x_i)$ y $M_i = f(x_{i-1})$. El resto del procedimiento es análogo al anterior.
- Si $0 \in [a, b]$, entonces obtenemos el valor de la integral definida de la función en cada uno de los dos intervalos $[a, 0]$ y $[0, b]$ y sumamos los valores obtenidos.

A partir de estos ejemplos, ¿podrías realizar alguna conjetura que relacione la integral y la derivada?

El **Primer Teorema Fundamental del Cálculo Integral** establece que si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces la **función área**

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

es derivable y $F'(x) = f(x)$, $x \in (a, b)$. La interpretación gráfica de esta función F es que la imagen de cualquier punto x_0 , $F(x_0)$, coincide con el área limitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje X y la recta $x = x_0$.



Además, se verifica que

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

A este último resultado se le conoce como **Regla de Barrow** o **Segundo Teorema Fundamental del Cálculo Integral**, y nos permite reducir el problema de cálculo de integrales definidas a la búsqueda de funciones $F(x)$ tales que su derivada sea la función dada $f(x)$. A cada $F(x)$ que verifica esta condición se le llama **función primitiva** de $f(x)$, y se define la integral indefinida de $f(x)$, $\int f(x) dx$, como el conjunto de todas las primitivas de $f(x)$,

que difieren únicamente en una constante dado que las funciones constantes son las únicas cuya derivada es nula:

$$\int f(x) dx = F(x) + k.$$

Si aplicamos este resultado a algunas funciones fundamentales, obtenemos las primeras reglas de integración:

❖ Funciones constantes: $[cx]' = c \Rightarrow \int c dx = cx + k$

❖ Funciones potenciales:

$$[x^{n+1}]' = (n+1)x^n \text{ si } n \neq -1 \Rightarrow \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k \text{ si } n \neq -1$$

$$[\ln|x|]' = \frac{1}{x} \text{ si } n = -1 \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + k \text{ si } n = -1$$

❖ Funciones exponenciales

$$[a^x]' = a^x \ln a \Rightarrow \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + k,$$

$$[e]^x' = e^x \Rightarrow \int e^x dx = e^x + k$$

❖ Funciones trigonométricas:

$$[\cos x]' = -\operatorname{sen} x \Rightarrow \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + k$$

$$[\operatorname{sen} x]' = \cos x \Rightarrow \int \cos x dx = \operatorname{sen} x + k$$

$$[tg x]' = (1 + tg^2 x) = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \int (1 + tg^2 x) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg x + k$$

❖ Funciones tipo arco

$$[\operatorname{arc} \operatorname{sen} x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + k$$

$$[\operatorname{arc} \cos x]' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc} \cos x + k$$

$$[\arctan x]' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + k$$

Además, a partir de la derivada de una función compuesta $g[f(x)]$ obtenemos una regla de integración:

$$(g[f(x)])' = g'[f(x)] \cdot f'(x) \Rightarrow \int g'[f(x)] \cdot f'(x) dx = g[f(x)] + k.$$

Utilizando la regla anterior, generaliza las integrales de las funciones elementales anteriores para funciones compuestas.

Además, se introducirán los métodos de integración de funciones racionales, de cambio de variable y de integración por partes, que no detallamos por tratarse de procedimientos rutinarios.

VII. El movimiento

Como ya vimos a partir de la gráfica tiempo-velocidad de los trenes, el movimiento es uno de los problemas en los que surge la necesidad del concepto de integral. A continuación, vamos a formalizar lo visto en el apartado IV.

Supongamos que tenemos un coche que se mueve por una recta y cuya posición en función del tiempo viene dada por una función $x = f(t)$, que tomará valores positivos si el coche se encuentra a la derecha del punto de salida y negativos si está a la izquierda. En el instante t_1 el coche se encontrará en la posición $f(t_1)$ y más tarde, en el instante t_2 , el coche se encontrará en la posición $f(t_2)$. Tenemos, entonces que el coche se ha desplazado $f(t_2) - f(t_1)$ en el tiempo $t_2 - t_1$.

Entonces, la velocidad media entre los instantes t_1 y t_2 está definida por $v_{media} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ y para determinar la velocidad del coche en el instante t , debemos hacer que el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ tienda a cero:

$$v = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Por definición, ésta es la derivada de la función $f(t)$ en un punto t_1 , por lo que hemos obtenido que la velocidad del coche en el instante t coincide con la derivada de la función que nos proporciona la posición en función del tiempo.

¿Podríamos obtener la posición del coche en un instante dado conociendo su velocidad y el instante de partida?

Resuelve los siguientes problemas:

- ❖ Un coche viaja de Santander a Alicante a una velocidad constante de 90 km/h . A las ocho de la mañana pasa Madrid, que está a 393 km de Santander. ¿A qué hora partió de Santander?

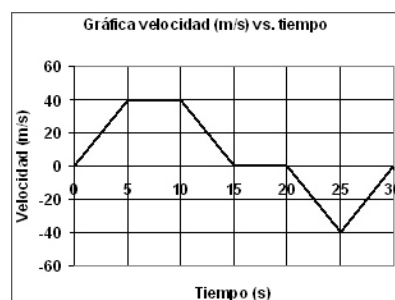
Basta tomar $v(t) = 90$, $t_2 = 8$, $f(t_1) = 0$ y $f(t_2) = 265$ y calcular t_1 :

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = f(t_2) - f(t_1) \Rightarrow \int_{t_1}^8 90 dt = 265 \Rightarrow 90(8 - t_1) = 265 \Rightarrow t_1 = 5.05$$

Así, hemos obtenido que el coche salió de Santander a las 5,05 horas.

- ❖ Interpreta la siguiente gráfica e indica la distancia a la que se encuentra el móvil del punto de parte en el instante $t = 30$.

La finalidad de esta actividad es que los alumnos identifiquen el área con el espacio recorrido y la velocidad negativa con la dirección del móvil hacia el punto de partida.



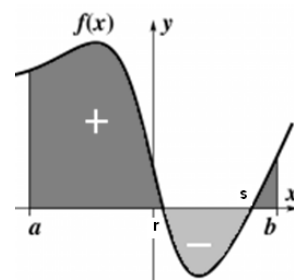
VIII. Aplicación al cálculo de áreas y volúmenes

Ya hemos visto que la integral definida nos permite calcular áreas, de manera que si la función es positiva el valor de la integral coincide con el área y si la función es negativa el área coincide con el valor de la integral cambiado de signo. Esto es,

$$\text{Área} = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

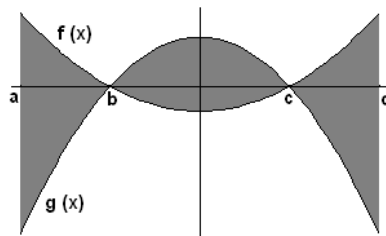
A continuación, vamos a ver algunos ejemplos que nos permitirán ver cómo proceder cuando la función cambia de signo en el intervalo.

❖ En la imagen podemos ver que, si r y s son los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con el eje X , entonces el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$ viene dada por:



$$\text{Área} = \text{Área1} + \text{Área2} + \text{Área3} = \left| \int_a^r f(x) dx \right| + \left| \int_r^s f(x) dx \right| + \left| \int_s^b f(x) dx \right|$$

❖ Consideremos las funciones $f(x)$ y $g(x)$ cuyas gráficas hemos representado. Comprueba, utilizando el principio de Cavalieri, que el área encerrada entre estas dos gráficas coincide con el área encerrada entre la gráfica de $f(x) - g(x)$ y el eje X .

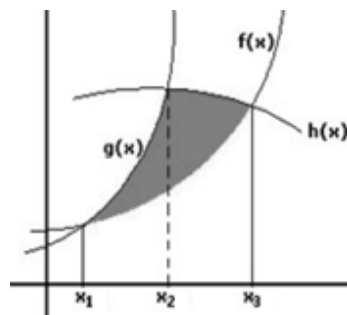


Como vemos, los puntos de corte de estas dos gráficas, b y c , dividen el área encerrada en tres regiones diferenciadas y el área encerrada entre las gráficas de estas dos funciones vendría dado por la suma de las áreas de cada región:

$$\text{Área} = \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_b^c (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_c^d (f(x) - g(x)) dx \right|$$

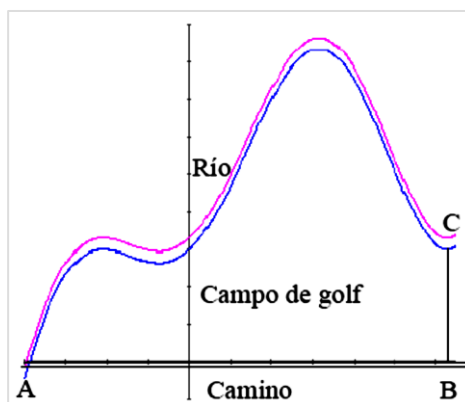
❖ En cualquier caso, el área encerrada entre curvas siempre se puede calcular como suma o resta de áreas, realizando un barrido por el eje X :

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \text{Área1} + \text{Área2} \\ &= \left| \int_{x_1}^{x_2} (g(x) - h(x)) dx \right| \\ &\quad + \left| \int_{x_2}^{x_3} (f(x) - g(x)) dx \right| \end{aligned}$$



Por último, vamos a ver unos ejemplos que reflejan situaciones que requieren de la integral para resolver un problema:

❖ La figura adjunta representa, en un diagrama cartesiano, la delimitación de un terreno en el que se quiere instalar un campo de golf entre el río y el camino. El borde del camino coincide con el eje de abscisas, la curva que describe el río es la representación cartesiana de la función $f(x) = x \cdot \left(\sin\left(\frac{3x}{4}\right) + 1 \right) + 3$ y el segmento

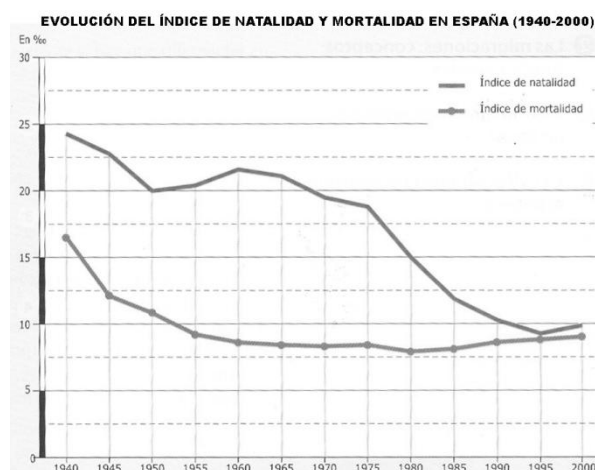


BC está sobre la perpendicular al camino por el punto C, que es el punto del río más cercano al camino (mínimo de la función) tras el ensanche. ¿Cuál es su área sabiendo que las unidades del diagrama cartesiano son Hectómetros? ¿Se podría determinar el área si en vez de conocer la función se supieran cuáles son las coordenadas de puntos situados en el borde del río?

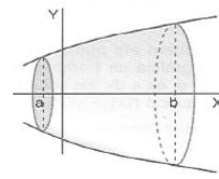
Este último problema es más real que el anterior ya que es muy difícil que las funciones estándar describan la geografía. Se puede resolver mediante polinomios interpoladores que aproximen la función, y podría ser interesante para los alumnos de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, puesto que la interpolación lineal forma parte del currículo de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I.

❖ La siguiente gráfica muestra la evolución del índice de natalidad y mortalidad en España entre los años 1940 y 2000.

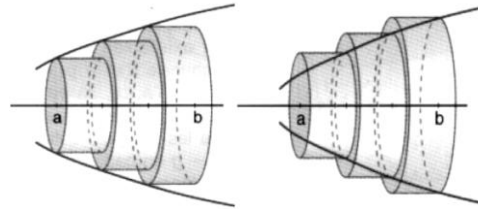
Averigua el aumento de población que se produjo en ese intervalo de tiempo.



Ahora, consideremos el cuerpo de revolución que se genera al girar alrededor del eje X la región plana limitada por la gráfica de una función continua f , el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$.



Para calcular su volumen, $V(f, a, b)$, se puede seguir un procedimiento análogo al del límite de las sumas de Riemann, salvo que ahora en lugar de utilizar rectángulos utilizaremos cilindros. Así, teniendo en cuenta que el volumen del cilindro viene dado por $\pi \cdot \text{radio}^2 \cdot \text{altura}$, tenemos que:



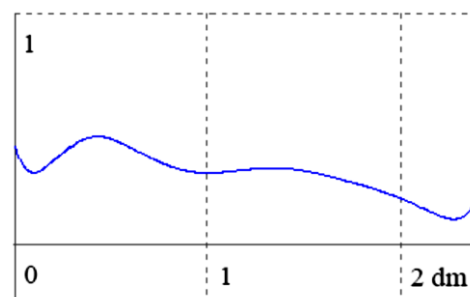
$$\sum_{i=1}^n \pi m_i^2 (x_i - x_{i-1}) \leq V(f, a, b) \leq \sum_{i=1}^n \pi M_i^2 (x_i - x_{i-1})$$

Cuando el número de cilindros aumenta, esas sumas inferior y superior tienden al valor de la integral definida de la función πf^2 en el intervalo $[a, b]$, de manera que

$$V(f, a, b) = \int_a^b \pi f^2(x) dx.$$

A partir de este resultado, trata de resolver el siguiente problema:

❖ A veces se hacen estudios de *marketing* para analizar el gusto de los consumidores por la forma de los envases. De los modelos utilizados en el estudio, la figura adjunta muestra el lateral de una botella de vidrio más aceptada en el mercado de consumo para envasar cierto producto. Este perfil es la representación gráfica de la función



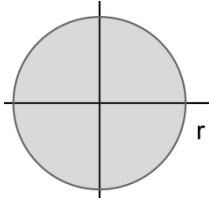
$$f(x) = a \cdot (x - 0'1)^2 \cdot (x - 1)^2 \cdot ((x - 2)^4 - 0'04) + 0'31$$

en $[0, 2]$ para $a = 3/4$. Halla el valor de a para que la capacidad de la botella sea de $3/4$ de litro.

Por último, te propongo que obtengas mediante integración las fórmulas del volumen de la esfera y el cono, que como recordarás, son $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$ y $V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, respectivamente.

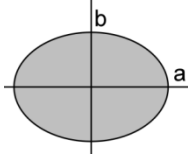
IX. Ampliación: el área del círculo y la elipse

La integral definida nos permite obtener el área de figuras curvas como el círculo, que es 4 veces el área del sector del primer cuadrante, la cual se obtiene a partir de la ecuación de la circunferencia, $x^2 + y^2 = r^2$:



$$\begin{aligned}\text{Área del círculo} &= 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} r \cos t dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2 t dt = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\ &= 4r^2 \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4r^2 \left[\frac{\pi}{4} - 0 \right] = \pi r^2\end{aligned}$$

Del mismo modo, podemos hallar el área de una elipse, cuya ecuación es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

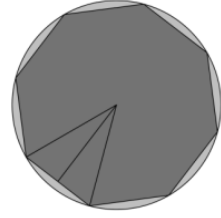


$$\begin{aligned}\text{Área de la elipse} &= 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= \frac{4b}{a} \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt \\ &= \frac{4b}{a} \int_0^{\pi/2} a^2 \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 4ab \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C \right]_0^{\pi/2} = \pi ab\end{aligned}$$

No obstante, estas áreas también se pueden hallar sin la necesidad de utilizar integrales.

El círculo

Supongamos que tenemos un círculo de radio r , cuya longitud es $2\pi r$, y que P_n es un polígono de n lados inscrito en la circunferencia, cuyo perímetro y apotema son, respectivamente, l_n y a_n .



Un círculo puede considerarse como un polígono regular de infinitos lados infinitamente pequeños. Así, se tiene que

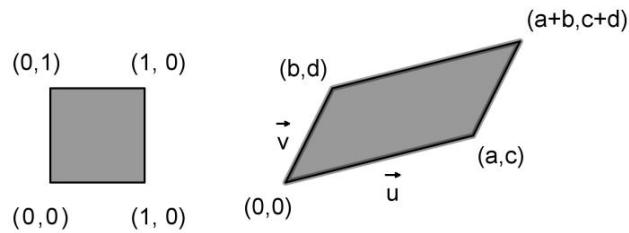
$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 2\pi r \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = r$$

y la superficie del círculo viene dada por:

$$S_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n \cdot a_n}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2.$$

La elipse

Consideremos la siguiente matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$, que transforma el cuadrado de vértices $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en un paralelogramo de vértices $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$.



En efecto,

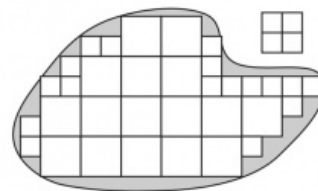
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ c \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a+b \\ c+d \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto el área del cuadrado, 1, se transforma en el área de dicho paralelogramo, que viene dada por:

$$\text{Área} = \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & c & 0 \\ b & d & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}) = ad - bc.$$

Como el área de cualquier región plana la podemos aproximar tanto como queramos descomponiendo la figura en cuadrados y la imagen de esos cuadrados serán paralelogramos que aproximarán la figura transformada, con este resultado hemos visto que la aplicación dada por la matriz A transforma las áreas multiplicando su valor por la constante $ad - bc$.



En particular, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b}{a} \end{pmatrix}$ transforma el círculo de radio a en

una elipse de ejes a y b y el área de la elipse es $(\pi a^2) \cdot \frac{b}{a} = \pi ab$.

Por otra parte, el problema de calcular la longitud de una elipse dio lugar a un tipo de integrales que no se pueden calcular de forma explícita, las *integrales elípticas*.

X. Ampliación: integración numérica

Los ordenadores actuales nos permiten realizar muchos cálculos en poco tiempo, lo que ha propiciado el avance de los métodos numéricos, que buscan aproximar una solución mediante una lista finita de instrucciones precisas que especifican una secuencia de operaciones algebraicas y lógicas. Uno de los métodos de integración numérica más simples consiste en aproximar la integral $\int_a^b f(x) dx$ con el área del rectángulo de base $b - a$ y altura $f(a)$, esto es,

$$\int_a^b f(x) dx \sim (b - a)f(a).$$

Si dividimos el intervalo en n partes iguales, aplicamos esta regla en cada uno de esos subintervalos y lo sumamos, obtenemos que:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \, dx \sim \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})$$

Aproxima la integral $\int_a^b \sqrt{x-1} \, dx$ con un decimal exacto, utilizando una hoja de cálculo.

Reflexión didáctica

Conocer la historia del concepto de integral y su desarrollo desde los griegos hasta la actualidad proporciona al profesor una visión más amplia, mostrándole distintas interpretaciones de un mismo concepto y su evolución a lo largo del tiempo, desde lo más intuitivo a lo más formal, lo que le va a proporcionar un nuevo recurso didáctico: la historia.

Considero que se debe tener en cuenta el orden cronológico de aparición y desarrollo de los conceptos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, puesto que esto va a permitir presentar los nuevos contenidos a partir de la necesidad de dar respuesta a algún problema, ya sea matemático o natural. Un ejemplo claro consiste en situar la integral definida y la indefinida en la misma unidad didáctica y presentar la integral indefinida a partir de la necesidad de dar respuesta al cálculo de integrales definidas. Si, por el contrario, presentamos previamente la integral indefinida, el alumnado no va a comprender la necesidad de este nuevo concepto y le estaremos impidiendo concebir las matemáticas como una ciencia que en muchos casos trata de dar respuesta a problemas y que está en constante evolución, influenciada también por el desarrollo socio-cultural de la sociedad. Muestra de ello son las repercusiones que tuvieron las restricciones filosóficas de los griegos sobre el infinito en su obra o el cambio de actitud en el siglo XVII a partir los descubrimientos realizados.

Además, las dificultades que surgieron ante estos problemas a lo largo de más de veinte siglos y cómo las superaron las figuras de la época se pueden considerar como punto de partida para plantear las hipótesis de aprendizaje, y relacionando la matemática escolar con la historia de las matemáticas podemos ilustrar las situaciones en las que surgieron los conceptos y facilitar los procesos de asimilación, proponiendo actividades que provoquen errores, que con frecuencia están motivados con una errónea comprensión de los conceptos, sus interpretaciones y las relaciones que se

establecen entre ellas, de manera que podamos detectarlos y corregirlos.

Por otra parte, podemos utilizar algunos de los razonamientos más o menos sencillos que se han realizado a lo largo de la historia para dar respuesta a estos problemas con el fin de que el alumnado pueda comprender la esencia del razonamiento matemático, que con tanta frecuencia se relega a un segundo plano, priorizando la memorización de algoritmos y ejercicios rutinarios tales como el cálculo de primitivas, que aunque son necesarios, no deben ser el eje central del tema. Además, estos razonamientos pueden servir también de ejemplo para que el estudiante encuentre la necesidad de un lenguaje matemático que dote a las definiciones y demostraciones matemáticas de rigor, independizándolas del lenguaje natural.

De esta manera, pretendo establecer unas bases sólidas, a partir de la comprensión de significados y el razonamiento, y favorecer en el alumnado unos esquemas de conocimiento más estables que perduren en el tiempo.

Otro de los motivos por los que creo que la historia del concepto de integral como recurso didáctico debe estar presente en una unidad didáctica de cálculo integral es que da lugar a muchas situaciones y contextos que enriquecen el aprendizaje, lo dotan de sentido y constituyen un elemento motivador. Además, considero que puede ser un elemento clave para dotar de coherencia interna a la unidad didáctica.

Para trasladar mi propuesta al aula se pueden tomar a modo de ejemplo las actividades que he seleccionado o recurrir a la gran diversidad de actividades y problemas que se adaptan a este enfoque y favorecen el desarrollo de las competencias básicas, y en particular, de las competencias matemáticas. Quizás, los libros de texto se centran excesivamente en el aprendizaje de hechos y destrezas, pero está en la mano del profesor modificar este modelo de enseñanza-aprendizaje, puesto que dispone de muchos recursos (GeoGebra, Internet, historia de las matemáticas y fenomenología, representaciones concretas, pictóricas y simbólicas, etc.) que le pueden ayudar en la elaboración de nuevos materiales adaptados a sus propios criterios.

Bibliografía y webgrafía

- I. ACOSTA, R. Fundamentos para la organización del cálculo integral en un tema único, focalizado en la integral definida. En: *Resúmenes y ponencias del VI congreso internacional didácticas de las ciencias, 12 – 15 Septiembre 2001*. [en línea]. Cuba: Ministerio de Educación. [Consulta: 3 Junio 2011]. En: <http://www.didacien.rimed.cu/Didacticas%20de%20las%20Ciencias/Simposios/Simposio2/Trabajos/Mat%20028.pdf>
- II. BOYER, C. 1986. *Historia de la matemática*. Traducido por Mariano Martínez Pérez. Madrid: Alianza Editorial. ISBN 84-206-8094-X.
- III. CANTABRIA. 2008. Decreto 74/2008, de 31 de julio, por el que se por el que se establece el currículo del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria. *Boletín Oficial de Cantabria*, 12 de agosto de 2008, 156.
- IV. Colaboradores de Wikipedia. *Integración numérica* [en línea]. Wikipedia, La enciclopedia libre, 2011 [Consulta: 2 Junio 2011]. En: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Integraci%C3%B3n_num%C3%A9rica&oldid=44760363.
- V. Colaboradores de Wikipedia. *John Wallis* [en línea]. Wikipedia, La enciclopedia libre, 2010 [Consulta: 2 Junio 2011]. En: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=John_Wallis&oldid=41859162.
- VI. COLERA, J; OLIVEIRA, M.J. *Bachillerato 2: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II*. Madrid: ANAYA. ISBN 978-84-667-8253-1.
- VII. DURÁN, A. J. 2010. *La verdad está en el límite: El cálculo infinitesimal*. Barcelona: RBA Coleccionables. El mundo es matemático, nº 14. ISBN 978-84-473-6963-8.
- VIII. DURÁN, A. J. (Dir.) 2000. *El legado de las matemáticas: de Euclides a Newton: los genios a través de sus libros*. [exposición]. Sevilla: Consejería de Cultura, Universidad de Sevilla, Real Sociedad Matemática Española.
- IX. ORDÓÑEZ, L; CONTRERAS, A. 2010. La integral definida en las pruebas

- de acceso a la universidad (PAU): sesgos y restricciones en la enseñanza de este objeto en 2º de bachillerato. *Jornadas de Investigación del Grupo de Didáctica del Análisis Matemático. 14, 15, y 16 de Julio, Universidad Internacional Antonio Machado de Baeza* [en línea], Jaén: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. pp. 23 – 41. [Consulta: 21 Mayo 2011]. En: <http://www.seiem.es/actividades/archivos/actividades/JORNADASDIDACTICAANALISIS.pdf>
- X. FRANCO, A. 1998. *Curso interactivo de Física en Internet: movimiento rectilíneo* [en línea]. Éibar: Universidad del País Vasco, Diciembre 2010. [Consulta 2 Junio 2011]. En: <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/cinematica/rectilineo/rectilineo.htm>
- XI. GARCÍA, V. M. *El origen de la integral: La primera mitad del siglo XVII*. [en línea]. Madrid: Universidad autónoma de Madrid. [Consulta: 3 Junio 2011]. En: http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ezuazua/informweb/trabajosde/historia/El_origen_de_la_integral.doc
- XII. MORALES, F. A. 2004. *Texto electrónico para la enseñanza del cálculo integral: historia*. [en línea]. M. Vera (Tutor). [Consulta: 3 Junio 2011]. En: <http://davinci.tach.ula.ve/vermig/integral/historia.htm>
- XIII. ORTEGA, T. *Didáctica del cálculo integral*. [en línea]. Universidad de Valladolid. [Consulta: 3 Junio 2011]. En: http://www3.uva.es/didamatva/materiales/educ_secundaria/calculo_integral.pdf
- XIV. PAREJA, D. 2008. Newton y el cálculo infinitesimal. *Aproximación a la epistemología de las matemáticas: Temas cruciales en la historia de las matemáticas*. [en línea]. Colombia: Universidad del Quindío, pp. 76 – 79. [Consulta: 3 Junio 2011]. En: <http://www.matematicasyfilosofiaenlaula.info/Epistemologia%202009/Newton%20y%20El%20Calculo%20Infinitesimal.pdf>
- XV. PÉREZ, J. 2008. *Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable*. [en línea]. Granada: Universidad de Granada, pp. 499 - 517. [Consulta: 3 Junio 2011]. En: http://www.ugr.es/~fjperez/textos/calculo_diferencial_integral_func_una_var.pdf