GRADO EN ECONOMÍA

2018-2019

TRABAJO DE FIN DE GRADO

LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA Y EL MÉTODO SIMPLEX

OPERATIONAL RESEARCH AND THE SIMPLEX METHOD

Autor: JORGE MARTÍNEZ LIÉBANA

Directora: PATRICIA GÓMEZ GARCÍA

Febrero 2019

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS Y GRÁFICOS

RESUMEN

Este trabajo pretende estudiar la *investigación de operaciones* y el *método Simplex.*

En primer lugar, se comienza realizando una revisión de literatura de la investigación de operaciones. Tras definir qué es la investigación de operaciones se realiza un estudio desde su desarrollo militar en la Segunda Guerra Mundial, hasta su introducción y aceptación en la gestión empresarial actual de todas las empresas.

A continuación, se proponen los pasos a seguir para la correcta resolución del problema a través de la *programación lineal* y se explicará cómo, dentro de los distintos métodos que tiene la programación lineal, para determinadas decisiones, el método Simplex es el mejor, debido a que puede resolver problemas de programación lineal con más de tres variables, problema bastante común en el transporte.

Más adelante, el estudio se centra principalmente en la formulación de programas lineales donde se definen sus características en la *forma estándar* y los pasos a realizar para transformar el problema a la *forma matricial*. Los programas lineales se utilizan debido a sus amplias aplicaciones prácticas en áreas como la *asignación de recursos* y existen distintos métodos de resolución.

Otro de los principales puntos del estudio, será el Método Simplex, el cual, es un método de resolución de la programación lineal cuyo objetivo es la búsqueda de una *solución básica óptima* a partir de la selección de un conjunto de *soluciones básicas factibles*. Para ello, primero establecemos, a través de vectores, una manera general para conseguir soluciones factibles básicas en la forma matricial. Seguidamente se determinarán dichas soluciones de una manera práctica, demostrando que las soluciones corresponden a los vértices en un gráfico.

Para finalizar, el estudio propone un ejemplo para la resolución de programas lineales mediante el método Simplex, donde en primer lugar, se planteará en forma estándar y se resolverá en forma de tabla con el objetivo de demostrar la eficiencia del Simplex en la resolución de programas lineales que implican una gran cantidad de cálculos, generalmente asociados a un número de *restricciones* elevado.

Palabras clave: programación lineal, método Simplex, solución básica factible, forma estándar, forma matricial, investigación de operaciones.

ABSTRACT

This paper aims to study operations research and the Simplex method.

First, this study begins with a literature review of operations research. After defining what is operations research, a study is made from its military development in the Second World War, until its introduction and acceptance in the current business management.

Next, we propose the steps to follow for the correct resolution of the problem through linear programming and explain how, within the different methods that linear programming has, for certain decisions, the Simplex method is the best, because can solve linear programming problems with mora than three variables, a problem quite common in transport.

Later, the study focuses mainly on the formulation of linear programs where their characteristics are defined in the standard form and the steps to be taken to transform the problem to the matrix form. Linear programs are used because of their broad practical applications in areas such as resource allocation and there are different resolution methods.

Another of the main points of the study will be the Simplex Method, whose objective is the search for an optimal basic solution based on the selection of a set of feasible basic solutions. To do this, we first establish, through vectors, a general way to achieve basic feasible solutions in the matrix form. Next, these solutions will be determined in a practical way, the analysis of the solutions corresponding to the vertices in a graph.

To conclude, the study proposes an example for the resolution of linear programs using the Simplex method. Where in the first place will be presented in standard form and will be solved as a table with the aim of demonstrating the efficiency of the Simplex in the resolution of linear programs that involve a large amount of calculations, usually associated with a high number of restrictions.

Key words: linear programming, Simplex method, feasible basic solution, standard form, matrix form, operations research.

1. INTRODUCCIÓN

La investigación de operaciones forma parte de la vida cotidiana de cualquier empresa, se utiliza para llegar a una decisión más o menos precisa con ayuda de un modelo matemático. Por tanto, la investigación de operaciones busca la solución más eficiente que el modelo proporciona, tanto para las *decisiones operacionales* que se usan para los procesos a corto plazo, como para las *decisiones estratégicas* que afectan a los procesos a largo plazo y por tanto tienen que tener una gran precisión.

La solución de problemas a través de la utilización de la investigación de operaciones implica que se proporcione la información sobre los aspectos que afectan al problema. Con esta información utilizaremos la programación lineal, que es una de las principales clasificaciones de los modelos de investigación de operaciones. Determinaremos una *función objetivo*, generalmente asociada a la maximización de ganancias o la minimización de costes de producción; y unas restricciones que son las limitaciones que tiene la empresa. Dentro del problema de programación lineal existirán distintos modelos para determinadas decisiones. Nosotros nos centraremos en el estudio del método Simplex que permite resolver los problemas de programación lineal con más de tres variables. Encontraremos una *solución básica factible* óptima. Para ello, el estudio elabora y resuelve ejemplos.

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, la estructura del trabajo consta de 5 capítulos. El primero referente a la revisión de literatura, donde definiremos la investigación de operaciones y su historia. El segundo, referente a la metodología. El tercero explica por qué el estudio se centra en el método Simplex. El cuarto, explica las características de un programa lineal y su transformación a su forma estándar. Y finalmente, el quinto, explica de una forma práctica, el método Simplex.

2. REVISIÓN DE LITERATURA

Antes de abordar el estudio de la investigación de operaciones y más concretamente el método Simplex, en esta sección procederemos a realizar una revisión de la literatura pertinente. En el apartado 2.1 definiremos qué es la investigación de operaciones y en el apartado 2.2 se analizará la historia de la investigación de operaciones.

2.1. ¿QUÉ ES LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES?

Tal y como dice Mathur y Solow (1996):

"La investigación de operaciones es el proceso mediante el cual, un administrador utiliza las matemáticas en un ordenador para tomar decisiones racionales, ya que no puede evaluar todas las alternativas debido a la gran cantidad de soluciones que se dan, debido a la cantidad y complejidad de la información que hay en el mundo real."

2.2. HISTORIA DE LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

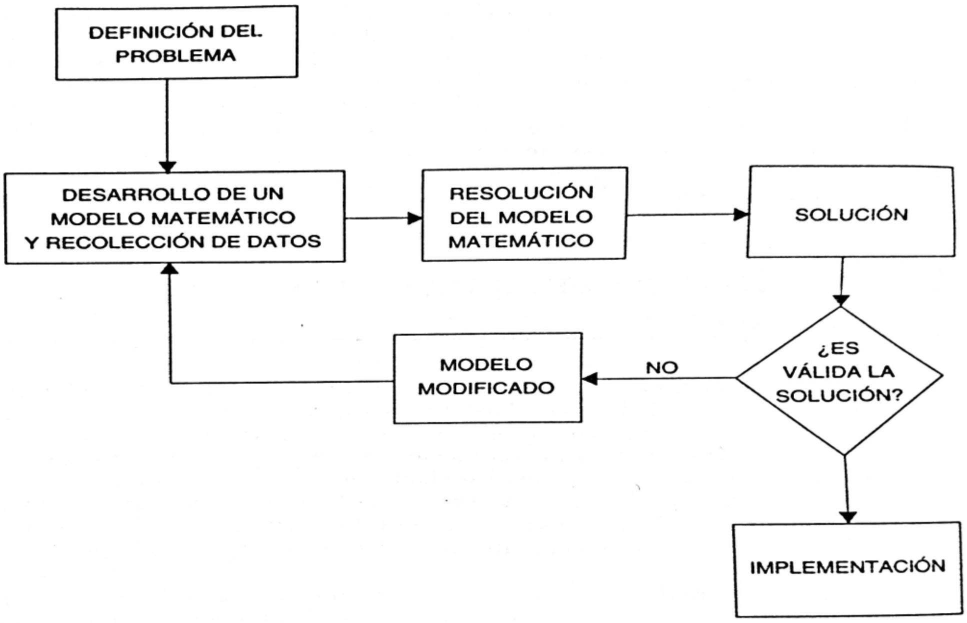
Como han explicado Kamlesh Mathur y Daniel Solow en su libro "Investigación de Operaciones": El arte de la toma de decisiones, (la investigación operacional), fue desarrollado por la Fuerza Aérea Británica para resolver problemas mediante métodos cuantitativos durante la Segunda Guerra Mundial. Más tarde, científicos, físicos e ingenieros de los Estados Unidos, de los cuales cinco ganaron el premio Nobel, crearon un grupo similar encargado principalmente de la detección por radar. Estas operaciones son vitales para las victorias aéreas del ejército de Gran Bretaña.

Más tarde, una vez acabada la guerra, el sector de la industria reconoció el valor de la técnica y la adaptó a sus complejos problemas de decisión, ya que se requieren demasiados cálculos con ordenadores de alta velocidad para la solución de problemas de planificación de producción e inversiones, distribución de productos, etc. Gracias a los avances en este uso de técnicas, estas medidas se emplean rutinariamente para resolver muchos problemas de decisión tanto en una empresa como fuera de ella.

Otros autores como Sixto Ríos Insua (1988), sugieren que la investigación de operaciones, al menos desde un punto de vista matemático, tiene sus orígenes antes de la Segunda Guerra Mundial, basándose en los trabajos sobre modelos lineales de Jordan, Minkowski, Farkas…

3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

La solución de problemas a través de la utilización de la investigación de operaciones o métodos cuantitativos generalmente implica que la gente de la organización proporcione información sobre los aspectos que afectan a su área en el problema. Para Kamlesh Mathur y Daniel Solow (1996, pp. 6-8), este proceso de aplicación de métodos cuánticos sigue una serie de pasos:



(Figura 3. 1, MATHUR Y SOLOW. 1996. Investigación de operaciones. El Arte de la Toma de Decisiones. México: Prentice Hall)

Planteamiento del problema

La organización se enfrenta al problema tratando de identificarlo, comprenderlo y describirlo. Algunas veces, cuando el objetivo global y las limitaciones a las que se enfrenta son conocidos, el problema se puede plantear sin dificultad

En otras situaciones, que son la mayoría en el mundo real, existen conflictos de interés entre los distintos grupos o departamentos. Por ejemplo, uno de los problemas más habituales es el enfrentamiento entre los beneficios y los costes, que generalmente son directamente proporcionales y cuando crece uno, también crece el otro. Para ello, se tomarán decisiones que satisfagan un objetivo común.

Planteemos el siguiente ejemplo:

Una empresa fabrica dos productos A y B. Cada uno de los productos necesita las siguientes cantidades de materia prima y mano de obra:

	Producto A	Producto B
Materia prima (kg/unidad)	2	4
Mano de obra (hora/unidad)	8	8
Beneficio (u.m./ unidad)	8	5

(Tabla 3.1; Fuente: Elaboración propia)

La disponibilidad de mano de obra será de 48 horas, es decir, la suma de las horas de trabajo de todos los trabajadores serán 48. La disponibilidad de materia prima será de 20 kg. Además, se sabe que el mercado no demandará más de 10 unidades de producto A al día. El producto A proporciona un beneficio de 8 unidades monetaria (u.m.) por unidad y el producto B proporciona 5 u.m. por unidad.

Construcción del modelo

Una vez definido el problema, el individuo se enfrenta a la problemática de expresarlo mediante la formulación de un modelo matemático. Primero se identifican las *variables de decisión*, que en nuestro caso son las unidades de A y B que deben fabricarse para obtener los máximos beneficios.

Por tanto, el beneficio anual esperado será $8x_1+5x_2$ donde

X_1= unidades a fabricar del producto A

X_2= unidades a fabricar del producto B

Al representar unidades de un producto, no tiene sentido que las variables tomen valores negativos. Por lo tanto, añadimos la siguiente restricción:

$$x_1, x_2>0$$

El resto de restricciones que se deben tener en cuenta son:

Restricción a la materia prima: $2x_1+4x_2\leq 20$

Restricción a la mano de obra: $8x_1+8x_2\leq 48$

Restricción debida a la demanda del producto A: $x_1\leq 10$

La función objetivo consiste en maximizar el beneficio.

La estructura del modelo lineal que representa al problema es:

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z= 8x_1+5x_2 \\ &\text{s.a. } 2x_1+4x_2 \leq 20 \\ &\quad 8x_1+8x_2 \leq 48 \\ &\quad x_1 \leq 10 \\ &\quad x_1,\ x_2 > 0 \end{aligned}$$

La función objetivo y las restricciones están determinadas por factores no controlables: los datos. Generalmente no todos estos datos se conocen a la hora de plantear el problema y además pueden ser inexactos, por lo que se realizarán estimaciones. Cuanta mayor exactitud tengan, mejor será la solución que se obtenga.

Solución del modelo

Para obtener los valores numéricos óptimos de x_1 y x_2, una vez formulado el modelo, Mathur y Solow (1996) distinguen diversos métodos de resolución, que dependerán de la forma y el tipo del modelo matemático. Estas técnicas pueden ser de dos categorías:

1. Métodos óptimos: se consiguen valores que satisfacen a la vez todas las restricciones y obtienen el mejor valor para la función objetivo.

2. Métodos heurísticos: se consiguen valores que satisfacen todas las restricciones y obtienen un valor aceptable para la función objetivo, aunque no tiene porqué ser el óptimo. Normalmente se utilizan en modelos demasiado largos o complejos, pues son computacionalmente más eficientes.

Validación y control

Para observar que las decisiones pueden llevarse a cabo, después de resolver el modelo matemático, validaremos la solución revisándola cuidadosamente, debido a que pueden ocasionarse problemas como el registro incorrecto u omisión de datos, o no haber tenido en cuenta todas las limitaciones del problema.

Además, según Mathur y Solow (1996), también hay que tener en cuenta que no se pueda llevar a cabo ese resultado por otro tipo de situaciones no matemáticas, por ejemplo, la política, que afecta sobre todo a los grupos de trabajadores. Por tanto, es importante que en el equipo de proyectos estos grupos que puedan verse afectados, estén representados. Además, la posterior instrumentalización de los resultados debe revisarse, pues el problema y los datos pueden cambiar con el tiempo.

Transformación del modelo

Este proceso se realizará cuando en el momento de validación obtenemos un resultado que no puede llevarse a cabo o puede ser más preciso debido a que anteriormente en el proceso de formulación omitimos una serie de restricciones o se han registrado de manera incorrecta por omisión de datos. Además, este proceso se tendrá que repetir tantas veces como sea necesario para encontrar una solución que sea aceptable y factible. Por tanto, deberemos volver al paso donde introducimos las restricciones en la computadora e importaremos las modificaciones pertinentes para reflejar el problema real con mayor precisión y obtener una solución con más exactitud.

La implementación

La implementación de la solución de un modelo validado consistirá en interpretar de manera clara y comprensible los resultados obtenidos en la operación.

4. DE LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA AL MÉTODO SIMPLEX

En la investigación de operaciones, podemos llegar a una decisión más o menos precisa con ayuda de un modelo matemático. Mathur y Solow (1996), distinguen entre *decisiones estratégicas* y *operacionales*. Las decisiones estratégicas afectan a largo plazo y por norma general son decisiones que se toman de una sola vez y que tienen un fuerte impacto en la organización. Por lo tanto, es necesario que el modelo sea válido y que tenga una gran precisión, es decir que debe incluir todos los aspectos importantes para la toma de la decisión y los datos han de ser muy precisos y lo más completos posible. Por otro lado, tenemos las decisiones operacionales, que se usan continuamente y por lo tanto afectan a procesos más cortos en la organización, por lo tanto, lo mejor para tomar este tipo de decisiones será desarrollar modelos lo más eficientes posibles para obtener grandes reducciones de tiempo y el ahorro de muchos costes computacionales.

“Se le pone especial atención a los problemas de programación lineal porque tienen amplias aplicaciones prácticas en áreas tan diversas como la asignación de recursos escasos, la compra y la fabricación, la planeación de dietas, la administración de agencias, la combinación y la planeación de producción” (Cobo Ortega 1995, p.183).

Un problema de programación lineal es aquel en el que la función objetivo y todas las restricciones son lineales y todas las variables son continuas, Esta linealidad implica según Cobo Ortega (1995, p. 184), que todo el modelo sea convexo, lo que conlleva las siguientes propiedades:

1-Todo óptimo es global.

2-Las condiciones de primer orden son suficientes.

3- “*Los programas lineales no son estrictamente convexos por lo que no se tiene garantizada la unicidad de solución. Aunque si existen dos soluciones distintas, también es solución cualquier combinación lineal convexa de ellas.*” (Cobo Ortega 1995, p.184).

4-En todo programa lineal los óptimos se consiguen (en caso de que haya óptimo), en al menos un vértice de la región factible definida por las restricciones. (Cobo Ortega 1995, p. 189).

Además, conlleva una serie de ventajas con respecto a otros modelos, tales como: la facilidad de definir y formular los problemas, una gran eficiencia con una gran cantidad de variables de decisión y el desarrollo, a través de paquetes informáticos, de algoritmos para su resolución (Cobo Ortega 1995).

Dentro del problema de programación lineal existirán distintos métodos para determinadas decisiones, nosotros nos centraremos en el estudio del método Simplex que permite resolver los problemas de programación lineal con más de tres variables.

Uno de los ejemplos más conocidos dentro de la programación lineal es el programa de transporte (Cobo Ortega 1995, pp. 184-186), donde la empresa se enfrenta a decisiones de operaciones estratégicas como la minimización de los costes a través de una política de suministro o los límites de producción anual de la fábrica. Además, también se enfrenta a decisiones operacionales como la decisión de qué mercado atender cada día o cada semana.

5. FORMULACIÓN DE LOS PROGRAMAS LINEALES

Existen múltiples formas de formular la programación lineal, las dos más importantes serán la formulación estándar y la formulación matricial, que obtendremos de la estándar.

En cuanto a la formulación estándar suponemos que el número de restricciones de igualdad es menor o igual al número de variables.

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Min } c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \\ a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \\ x_i\geq 0 \ i=1,2\ \ldots,n \end{array}\right.$$

Las principales características de esta formulación de problemas lineales son:

1. Se trata de minimizar una función lineal homogénea.

2. Todas las restricciones son de igualdad

3. Los términos independientes de las restricciones son mayores o iguales a cero.

4. Las variables de decisión toman valores positivos.

También se puede expresar en la forma matricial, estando definidas las matrices de la siguiente manera:

$C=(c_1, c_2,\ldots, c_n)$ $x=\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ \vdots \\ Xn \end{pmatrix}$ $b=\begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ \vdots \\ bm \end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} a11 & a12 & a1n \\ a21 & a22 & a2n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ am1 & am2 & amn \end{pmatrix}$

Por lo tanto, el problema anterior, se podría plantear de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \min cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

5.1. TRANSFORMACIÓN DE UN PROGRAMA LINEAL A SU FORMA ESTÁNDAR

Para convertir un programa a la forma estándar, tal y como se dice en Optimización Matemática (Cobo 1995, pp. 194-5), realizaremos los siguientes pasos:

1. Convertir el problema de maximización, en uno de minimización, dado que maximizar una función es lo mismo que minimizar su opuesta. El punto donde ambas funciones alcanzan el extremo es el mismo, la única diferencia será el valor de las funciones sobre ese punto

2. Introduciremos las variables de holgura: convertiremos en igualdades las restricciones de desigualdad del modelo.

3. Estudiaremos la condición de no negatividad de todas las variables; en el caso de no estar sujeta a la condición, se sustituirá la variable por una diferencia entre dos variables no negativas.

4. Conseguiremos que $b_i \geq 0$ multiplicando por -1

Con todos estos cambios, cualquier programa lineal se convertirá a la forma estándar con variables naturales (no modificadas) y variables de holgura.

Ejemplo:

$$\begin{cases} \text{Max } 4x_1-6x_2+10x_3 \\ 2x_1+2x_2 \leq 4 \\ 6x_1+2x_2-2x_3-6 \geq 0 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \min -4x_1+6x_2-10(x_6-x_7) \\ 2x_1+2x_2+x_4=4 \\ 6x_1+2x_2-2(x_6-x_7)-x_5=6 \\ x_1,\ x_2,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7 \geq 0 \end{cases}$$

5.2. FORMA MATRICIAL

De forma matricial, se puede expresar de la siguiente manera:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Max } 4x_1-6x_2+10x_3 \\ 2x_1+2x_2\leq 4 \\ 6x_1+2x_2-2x_3-6\geq 0 \\ x_1,\ x_2\geq 0 \end{array}\right.$$

C=(-4, 6, 0, 0, -10, 10)

$$x=\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x4 \\ x5 \\ x6 \\ x7 \end{pmatrix}$$

$$b=\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. EL MÉTODO SIMPLEX

Las llamadas *soluciones básicas factibles* se corresponden con los vértices de la región factible (Cobo Ortega 1995, p.206)

Por lo tanto, según el "Teorema fundamental de la programación lineal" *Dado un programa lineal en forma estándar, si existe solución óptima, ésta se alcanza al menos sobre una de las soluciones básicas factibles* (Cobo Ortega 1995, p. 206).

El objetivo del método Simplex será, (Cobo Ortega 1995) mediante la selección de un conjunto de soluciones básicas factibles (no es necesario construirlas todas), encontrar la solución básica óptima. Por lo tanto, para la realización del método Simplex, tendremos que formular y resolver el modelo hasta encontrar una solución básica factible inicial; si esta no es óptima (en caso de que ~~a~~sí lo sea se acabaría el proceso), entonces se buscará otra solución factible que haga que el valor de la función objetivo sea igual o menor; si no se consigue así la solución factible óptima, se repetirá este paso hasta encontrar una solución básica factible óptima.

Una forma de conseguir las soluciones factibles básicas de un programa lineal será a través de matrices. Para ello necesitaremos un programa lineal en su forma matricial estándar:

$$\begin{cases} \min cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Donde A es una matriz de m filas y n columnas sin ningún tipo de restricción excepto n≥m, debido a que generalmente, al introducir las variables de holgura las desigualdades se convierten en igualdades. La matriz tendrá un tamaño n con el objetivo de eliminar las restricciones redundantes del problema ya que nos podemos encontrar con un problema sin soluciones básicas factibles y por tanto sin solución.

Tal y como dice Ángel Cobo (1995, p. 197): *"Cada una de las submatrices de A con determinante distinto de cero formadas seleccionando m columnas de A, se llama matriz básica o matriz de base".*

Para generalizar, suponemos que la matriz B está formada por las primeras m columnas de A y las restantes forman una matriz nueva denominada D, por tanto:

A=(BD).

Por otra parte, también podremos dividir las variables de decisión:

$$X=\binom{XB}{XD}$$

En el vector x_B las m variables que se corresponden con las columnas seleccionadas para la construcción de la matriz básica se conocen como *variables básicas*. Las restantes n-m variables, es decir x_D son las variables no básicas.

$$Ax=b \Rightarrow (B\ D)\binom{XB}{XD}=Bx_B+Dx_D=b \Rightarrow x_B=B^{-1}b-B^{-1}Dx_D$$

Si $X_D=0$

$$X_B=B^{-1}b$$

Por tanto, la forma de construir las llamadas soluciones básicas a partir de las matrices básicas es resolviendo el sistema

$$Bx_B=b$$

Y así se obtendrá una *solución básica*, que tendrá la siguiente forma:

$$x=\binom{XB}{0}$$

Estas soluciones se clasificarán de dos maneras: *factibles* cuando $x_B \geq 0$ e *infactibles* cuando alguna variable básica es negativa. Y a su vez las factibles se podrán clasificar en *degeneradas* que es cuando alguna variable básica es nula y en *no degeneradas* si todas las variables básicas son estrictamente positivas.

Además, podemos determinar el número máximo de soluciones básicas a través de la siguiente fórmula:

$$\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)}$$

mientras que el número de soluciones básicas factibles se puede determinar gráficamente mediante el número de vértices.

Vamos a determinar de manera práctica las soluciones básicas factibles de un determinado caso:

Nos encontramos con el siguiente programa lineal:

$$\begin{cases} \min 4x_1+8x_2+2x_3 \\ 4x_1+4x_2+x_4=12 \\ 2x_1+8x_2-2x_3+x_5=24 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Siendo:

C=(4,8,2,0,0)

Obtenemos las restricciones en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Una vez obtenido el modelo de la manera matricial, buscaremos las soluciones factibles básicas:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Si $x_3=x_4=x_5=0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix}$$

En este caso, tendremos 2 ecuaciones con dos incógnitas:

$4x_1+4x_2=12$

$2x_1+8x_2=24$

Despejamos un valor:

$x_1=(12-4x_2)/4=3-x_2$

Introducimos este valor en la segunda ecuación y despejamos:

$2(3-x_2)+8x_2=24$

$6-2x_2+8x_2=24$

$6x_2=18$

$x_2=3$

Una vez obtenido el primer valor, obtenemos x_1 a partir de su ecuación:

$x_1=3-x_2=3-3$

$x_1=0$

Por tanto, obtenemos una solución básica factible: (0,3,0,0,0).

Para buscar más soluciones, partiremos otra vez del modelo matricial:

Si $x_2=x_4=x_5=0$

$$\begin{pmatrix}4 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 8 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\ 24\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\ 24\end{pmatrix}$$

Obtenemos las siguientes ecuaciones:

$4x_1=12$

$2x_1-2x_3=24$

Obtenemos x_1 de la primera ecuación:

$4x_1=12$

$x_1=12/4$

$x_1=3$

Despejamos en la segunda ecuación:

$2x_1-2x_3=24$

$6-2x_3=24$

$-2x_3=18$

$x_3=-9$

Dado que no cumple la condición de no negatividad, (3,0,-9,0,0) es una solución básica infactible.

Si $x_2=x_3=x_5=0$

$$\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 8 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ x_3\\ x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\ 24\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\ 24\end{pmatrix}$$

Obtenemos las siguientes ecuaciones:

$4x_1+x_4=12$

$2x_1=24$

Podemos obtener x_1 de la segunda ecuación:

$2x_1=24$

$x_1=24/2$

$x_1=12$

Despejamos x_1 en la primera ecuación:

$4x_1+x_4=12$

$4(12)+x_4=12$

$x_4=-36$

Dado que no cumple la condición de no negatividad, (12,0,0,-36,0) no puede ser una solución del problema. Es decir, es una solución básica infactible.

Si $x_2=x_3=x_4=0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 8 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Obtenemos las siguientes ecuaciones:

$4x_1=12$

$2x_1+x_5=24$

Obtenemos x_1 de la primera ecuación:

$4x_1=12$

$x_1=3$

Despejamos x_5 en la segunda ecuación:

$2(3)+x_5=24$

$x_5=18$

Por tanto, obtenemos una solución básica factible: (3,0,0,0,18).

Si $x_1=x_3=x_4=0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Obtenemos las siguientes ecuaciones:

$4x_2=12$

$8x_2+x_5=24$

Despejamos x_2 de la primera ecuación:

$4x_2=12$

$x_2=12/4$

$x_2=3$

Introducimos x_2 en la segunda ecuación y resolvemos:

$8x_2+x_5=24$

$8(3)+x_5=24$

$x_5=0$

Obtenemos una solución básica factible: (0,3,0,0,0).

Si $x_1=x_3=x_5=0$

$$\begin{pmatrix}4 & 1\\ 8 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ x_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_3\\ x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\ 24\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4 & 1\\ 8 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\ 24\end{pmatrix}$$

Obtenemos las siguientes ecuaciones:

$4x_2+x_4=12$

$8x_2=24$

Determinamos x_2 de la segunda ecuación:

$8x_2=24$

$x_2=24/8$

$x_2=3$

Introducimos x_2 en la primera ecuación:

$4x_2+x_4=12$

$4(3)+x_4=12$

$x_4=0$

Determinamos de nuevo la solución básica factible (0,3,0,0,0).

Si x_1=x_3=x_5=0

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Obtenemos 2 ecuaciones:

$4x_2=12$

$8x_2-2x_3=24$

Con la primera ecuación obtenemos x_2:

$4x_2=12$

$x_2=12/4$

$x_2=3$

Introducimos x_2 en la segunda ecuación:

$8x_2-2x_3=24$

$8(3)-2x_3=24$

$x_3=0$

Como en los dos casos anteriores, determinamos la solución (0,3,0,0,0).

Si x_1=x_2=x_5=0

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Obtenemos las siguientes ecuaciones:

$x_4=12$

$-2x_3=24$

$x_3=-12$

(0,0,-12,12,0) es una solución básica infactible debido a la condición de no negatividad.

Si x_1=x_2=x_3=0

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_4\\x_5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 4 & 0\\2 & 8 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\24\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\24\end{pmatrix}$$

Siendo:

x_4=12

x_5=24

Por lo tanto, obtenemos una solución básica factible: (0,0,0,12,24).

Dada la solución matemática del problema, podemos determinar que las soluciones básicas factibles son:

(0,0,0,12,24)

(0,3,0,0,0)

(3,0,0,0,18)

6.1. EJEMPLO POR EL MÉTODO ESTANDAR

Una determinada empresa quiere minimizar sus costes, los cuales vienen en forma de función: $2x_1-x_2$. . Además, tendrá una serie de restricciones: $-2x_1+2x_2=4$ y $4x_1+2x_2=12$

Por lo tanto, en este caso para obtener la minimización de costes, se deberá formular el siguiente programa lineal:

Minimizar $2x_1-x_2$

Condicionado a $-2x_1+2x_2=4$

$4x_1+2x_2=12$

$x_1, x_2\geq 0$

El programa lineal asociado es:

Min $2x_1-x_2$

Condicionado a $-2x_1+2x_2+x_3=4$

$4x_1+2x_2+x_4=12$

$X_i\geq 0$ i=1,2,3,4

6.2. EL MÉTODO SIMPLEX EN FORMA DE TABLA

La resolución de programas lineales (Cobo Ortega 1995) mediante el método Simplex implica la realización de gran cantidad de cálculos, sobre todo cuando el número de variables o restricciones es relativamente elevado. Sin embargo, estos cálculos no son complejos y pueden realizarse en modo sistemático utilizando una forma tabular. Así surgen las tablas del Simplex, cuya función es organizar los cálculos.

Para aplicar el método Simplex en forma de tabla a un problema de la forma:

Min cx

Ax=b   con b≥0

x≥0

en primer lugar, se construye la tabla siguiente:

			C_1 …	…	C_n
c_{B1}	x_{B1}	b1	a_{11}		a_{1n}
.				a_{ij}	
.					
c_{Bm}	x_{Bm}	b_m	a_{m1}		a_{mn}
		c_B o b	c_B o A_1		c_B o A_n
			z_1		z_n

Las dos primeras columnas (Cobo Ortega 1995) muestran los coeficientes de las variables básicas en la función objetivo (primera columna) y las variables básicas del vector X (segunda columna), mientras que la tercera columna mostrará el vector de términos independientes de las restricciones. Además, estas variables básicas iniciales deben tener una matriz de base asociada que represente la identidad ya que esta puede utilizarse como base inicial del algoritmo al introducir variables. En caso de que no ocurra, podremos utilizar las variables artificiales. Las variables artificiales se introducen en el modelo de manera positiva y con un coeficiente muy alto para que no afecten a la solución del problema, lo deseable es que dejen de ser básicas rápidamente y de esta manera se anulen. Por tanto, para minimizar la función objetivo deben anularse estas variables, con lo que en alguna de las iteraciones del método Simplex, las variables artificiales dejan de ser básicas y a partir de ese momento puede prescindirse de ellas.

Otra de las opciones a efectuar, (Cobo Ortega 1995), es la manipulación del problema:

Se tiene una matriz básica B, no necesariamente igual a la identidad. Las restricciones podrían expresarse en la forma:

$(B\ D) \binom{XB}{XD} = Bx_B + Dx_D = b$

Multiplicando por la matriz inversa de B:

$X_B + B^{-1}Dx_D = B^{-1}b$

que es igual a:

$(I\ B^{-1}D) \binom{XB}{XD} = B^{-1}b$

De esta manera, la matriz de coeficientes de las restricciones tiene una matriz básica identidad.

-En la primera fila se colocan los coeficientes de las variables de la función objetivo.

-El centro de la tabla nos indica la matriz de coeficientes A.

-En la penúltima fila, obtenemos los resultados de multiplicar la primera columna con la matriz A de la parte central de la tabla.

-Por último, la última fila nos indica la diferencia entre la primera fila y la penúltima.

Estas tablas descritas anteriormente según Ángel Cobo (1995), contienen cada una de ellas una solución básica factible. Para obtener esta solución, hay que seguir una serie de reglas, además también nos podemos encontrar soluciones no óptimas que se observarán analizando los signos de la última fila de la tabla:

El óptimo ha sido alcanzado cuando los elementos de la última fila son 0 o con valores positivos, es decir, mayores o iguales que 0. Es decir, el *vector de costes reducidos o relativos* tiene que ser 0 o positivo, siendo su expresión:

$r = c_D - c_B B^{-1} D$

Si $r \geq 0$ obtenemos una solución básica óptima.

Si $r > 0$ obtenemos una única solución básica óptima.

En el caso de que algún elemento sea negativo el valor puede mejorarse. Para ello, realizaremos una tabla nueva siguiendo los siguientes pasos descritos por Cobo (1995):

1- La posición del mayor valor absoluto de la última fila, indica que variable pasará a ser básica.
2- Buscamos la variable básica a la que sustituirá la variable del anterior paso. Para ello dividiremos los valores de la tercera columna entre los valores positivos de la columna A seleccionada en el paso anterior; en el caso de no encontrar valores positivos concluiremos que el problema no tiene un óptimo finito. En el caso contrario, de todos los cocientes calculados se selecciona el mínimo y la variable de la segunda columna que esté en la fila de ese mínimo es la que deja de ser una variable básica.
3- Utilizaremos simples transformaciones (multiplicar por constantes en la fila del mínimo o sumar y restar a una fila un múltiplo de la fila que contiene el mínimo) en la tercera columna y en A hasta transformar el denominador del cociente mínimo anterior en 1.

4- Intercambiar variables básicas de la segunda columna al mismo tiempo que se modifica el elemento de la primera columna.
5- Volver a calcular los valores de la última fila.

Estos pasos se repetirán hasta que r≥0.

Además, todas las tablas tienen características en común:

- Los elementos de la tercera columna son mayores o iguales que 0 excepto el que indica el valor de la función objetivo, es decir el último, que podrá ser negativo.
- Las columnas de A asociadas a las variables básicas forman una matriz identidad.

6.2.1. Ejemplo:

Siguiendo el ejemplo del apartado 6.1:

$$\begin{cases} \text{Min } 2x_1 - x_2 \\ -2x_1+2x_2+x_3=4 \\ 4x_1+2x_2+x_4=12 \\ X_i \geq 0 \quad i=1,2,3,4 \end{cases}$$

			2	-1	0	0
0	X_3	4	-2	2*	1	0
0	X_4	12	4	2	0	1
		0	0	0	0	0
			2	-1	0	0

Dado que llevan asociada la matriz de base la identidad, se toman como variables básicas x_3 y x_4. La solución básica factible asociada a esta primera tabla es (0, 0, 4, 12).

Dado que en la última fila de la tabla solo tenemos un elemento negativo (-1), obtendremos de esa columna el mínimo. El siguiente paso será dividir 4/2 y 12/2. En este caso el valor que actuará de pivote será el 2 de la primera fila. Por lo tanto, sabremos que la variable x_3 ya no será básica y será sustituida por la variable x_2.

Una vez identificado el elemento que actuará como pivote, se realizarán las siguientes operaciones para que el pivote sea 1 y los restantes elementos de su columna, 0:

Dividiremos la primera fila por 2 y restaremos a la segunda fila dos veces la primera

Por tanto, la tabla quedará de la siguiente manera:

			2	-1	0	0
-1	X_2	2	-1	1	1/2	0
0	X_4	8	6	0	-1	1
		-2	1	-1	-1/2	0
			1	0	1 /2	0

Podemos observar que se ha encontrado el óptimo en las coordenadas:

$X_1=0$ $X_2=2$ $X_3=0$ $X_4=8$

ya que la última fila está formada solo por números mayores o iguales que 0.

Además, el valor óptimo será -2 ya que es el último elemento de la tercera columna.

7. CONCLUSIONES

Tras la realización de este estudio, podemos comprobar la importancia que tiene la investigación de operaciones y programación lineal, siendo un instrumento clave en el análisis matemático y la gestión empresarial, que las empresas necesitan para maximizar su beneficio, tomando decisiones optimas basadas en el razonamiento, estudio y análisis de la información que está al alcance. Es decir, planteamiento, construcción, solución, validación y control, transformación e implementación del modelo.

El análisis histórico nos permite descubrir su creación para el ámbito militar y su posterior desarrollo en el mundo industrial gracias a la mejora de la técnica, que ha provocado que estos métodos se utilicen rutinariamente tanto en el mundo de la empresa como fuera de ella.

Un aspecto importante dentro de la investigación de operaciones es la programación lineal, que es aquella en la que la función objetivo y todas sus restricciones son lineales y sus variables continuas. Se utiliza, debido a sus amplias aplicaciones prácticas, en áreas como la asignación de recursos escasos, la compra y la fabricación y la administración de las agencias. Existen distintos métodos de resolución. Este estudio se centra en el método Simplex que permite resolver los problemas de programación lineal con más de tres variables.

Se ha profundizado también en las características de la formulación de programas lineales y su transformación a la forma estándar y matricial.

Por último, definimos el método Simplex, el cual implica la realización de una gran cantidad de cálculos, sobre todo cuando el número de variables o restricciones es relativamente elevado; explicamos sus características matriciales de una manera teórica y lo resolvemos de manera práctica encontrando las soluciones básicas factibles.

8. BIBLIOGRAFÍA

COBO ORTEGA, A.; 1995 Optimización Matemática. Santander: COPISAN. ISBN: 84-605-2187-7

HURLBERT G.H.; 2000 Linear Optimization. Berlin: Springer.

LÓPEZ RUIZ, F.; 2006. Investigación Operativa: Modelos Determinísticos. País Vasco: Argitalpen Zerbitzua Servicio Editorial. ISBN: 84-8373-882-1

LUENBERGER, D.E.; 1989. Programación lineal y no lineal. España: Addison-Wesley Iberoamericana. ISBN: 0-201-64408-8

MATUR, K.; SOLOW, D. 1996. Investigación de Operaciones: El Arte de la Toma de Decisiones. México: Prentice Hall. ISBN: 968-880-698-6

SIXTO RÍOS INSUA. 1988. Investigación Operativa: Optimización. Madrid: Editorial centro de estudios Ramón Areces, S.A.