



Facultad de Educación

GRADO DE MAESTRO EN EDUCACIÓN PRIMARIA

2017/2018

Desarrollo de estrategias aditivas avanzadas
en niños con dificultades de aprendizaje

Development of advanced additive strategies in
children with learning difficulties

Autor: Eva María González López

Director: Irene Polo Blanco

Fecha: octubre 2018

ÍNDICE

1. Introducción	4
2. Revisión de la literatura	5
2.1 Pensamiento matemático informal	5
2.2 Proceso de contar y dificultades	7
2.3 Problemas verbales de estructura aditiva	9
2.4 Estrategias informales aditivas	10
2.5 Alumnado con NEE en área de matemáticas	14
3. Preguntas de Investigación	15
4. Método	15
4.1 Diseño	15
4.2 Muestra y contexto	16
4.3 Tareas	20
4.4 Procedimientos	21
4.5 Recogida y análisis de datos	25
4.6 Tratamiento de fidelidad y fiabilidad	26
5. Resultados	26
5.1 Línea de base	26
• Sujeto 1	27
• Sujeto 2	27
• Sujeto 3	27
5.2 Instrucción de enseñanza	28
• Sujeto 1	28
• Sujeto 2	29
• Sujeto 3	31
5.3 Mantenimiento	33
• Sujeto 1	33
• Sujeto 2	34
• Sujeto 3	34
5.4 Gráfico final	34
6. Discusión	37
7. Conclusión	38
8. Bibliografía	39
9. Anexos	41

Resumen:

Este estudio plantea una intervención con niños con dificultades de aprendizaje en matemáticas con el fin de ayudarles a desarrollar estrategias aditivas. En concreto se plantea investigar cómo facilita una instrucción apoyada en el uso de secuencias visuales y material manipulativo el desarrollo de estrategias avanzadas. Los participantes fueron dos estudiantes de 7 años y uno de 10 con dificultades de aprendizaje. En las sesiones de línea base los tres sujetos manifestaron estrategias basadas en conteo y durante la instrucción se incrementó el uso de estrategias más avanzadas. En particular, se observa una influencia entre la instrucción y la adquisición de la estrategia “sumar desde el sumando mayor” en los tres sujetos, además de su mantenimiento en el tiempo.

Palabras clave: Alumnado con Necesidades Educativas Especiales, estrategias informales, problemas aritméticos verbales, operación suma.

Abstract:

This study proposes an intervention with children with learning difficulties in mathematics in order to help them develop additive strategies. In particular, an instruction based on the use of visual sequences and manipulative material was implemented. The participants were two students of 7 years and one of 10 with learning difficulties. In the baseline sessions, the three subjects showed “counting all” strategies and during instruction, the use of more advanced strategies increased. In particular, results suggest an influence between the instruction and the acquisition of the “min” strategy (adding from the larger addend) in the three subjects, as well as its maintenance over time.

Keywords: Children with learning disabilities, strategies, arithmetic problems, addition operation.

1. Introducción

La investigación sugiere que al menos el 12% de los estudiantes en edad escolar muestran dificultades en el trascurso del aprendizaje en matemáticas (Geary, 2013). Es importante trabajar desde el comienzo en la superación de dificultades en el aprendizaje de conceptos matemáticos, pues muchos de ellos son acumulativos y los errores pueden seguir arrastrándose ante nuevos conocimientos (Montague, 2007).

Los trabajos que evalúan las estrategias que manifiestan los alumnos con dificultades de aprendizaje muestran que éstas son a menudo menos variadas y eficaces que las de sus compañeros de rendimiento típico, por lo que podrían beneficiarse de instrucción específica para adquirirlas (Siegler, 1988). A pesar de ello, escasean los trabajos que profundizan sobre la instrucción de enseñanza de estrategias avanzadas en estos alumnos con dificultades.

Por este motivo se plantea en este trabajo un estudio con niños con dificultades de aprendizaje con el fin de ayudarles a desarrollar estrategias aditivas. En concreto, se identifican en un primer momento las estrategias espontáneas que muestran en problemas de suma, para a continuación proporcionar una instrucción dirigida a la adquisición de estrategias más avanzadas.

2. Revisión de la literatura

A continuación, se presenta una revisión de la literatura más relevante sobre el tema de trabajo. En concreto se tratarán aspectos relacionados con el pensamiento matemático informal (2.1), así como el proceso de cuantificación y los errores asociados a él (2.2). Se describirán los diferentes tipos de problemas verbales en la suma (2.3), y las diferentes estrategias que utilizan los estudiantes en este tipo de problemas (2.4). Finalmente, (2.5) se hará un breve resumen de la literatura referida a las matemáticas en los alumnos con necesidades educativas.

2.1 Pensamiento matemático informal

El conocimiento informal, junto a su desarrollo, se encuentra combinado con diferentes influencias sociales, pero es importante resaltar que los componentes básicos de las matemáticas son universales independientemente de las influencias socioculturales (Caballero, 2005).

Caballero (2005) plantea una serie de cuestiones a la hora de abordar el conocimiento matemático informal donde empieza a reflexionar sobre cómo los niños adquieren este conocimiento y cómo es este proceso. Para ello se fija en diferentes estudios propuestos por diversos autores, los cuales serán comentados brevemente a continuación y con sus resultados y propuestas más relevantes.

Es Bermejo (1994, citado por Caballero, 2005) quien resalta que los niños poseen habilidades para contar pequeños grupos de elementos, siendo a los 2 años cuando estas habilidades empiezan a aparecer en situaciones concretas, lo que hace referencia al “conocimiento informal”. Por otro lado, Geary (1994, citado por Caballero, 2005) explica que las matemáticas no dependen ni de la cultura ni del lenguaje, sino que todas las personas nacen con “un sentido matemático”, por lo que este conocimiento informal se va desarrollando con el paso del tiempo. Además, Ramírez (2015) defiende esta idea apoyándose en los Principios y Estándares de Aprendizaje del NCTM, en el cual se afirma que

los infantes desarrollan ideas matemáticas de manera espontánea gracias a sus experiencias del día a día. Esto se ve demostrado por diversos estudios donde se demuestra que son capaces de discriminar y atender a la cualidad de los objetos, por ejemplo, y también de anticipar soluciones correctas ante operaciones de suma y resta (Ginsburg, 1998, citado por Caballero, 2005).

Wynn (1992, citado por Caballero, 2005) mostró en su estudio que los bebés no únicamente adquieren los conceptos de cardinalidad y/u ordinalidad, sino que también son capaces de entender y producir las direcciones y efectos que resultan de la suma y la resta. En su investigación trabajó con bebés de 5 meses a los que mostraba resultados tanto correctos como incorrectos de adición y sustracción. En los resultados de su estudio mostró que los pequeños se fijaban más tiempo en las respuestas incorrectas que en las correctas. Por otro lado, Stakey (1992, citado por Caballero) realizó una investigación con niños entre 18 y 36 meses en la que debían identificar el número de objetos. En los resultados mostró que los infantes más pequeños de 18 meses eran capaces de identificar de forma correcta el número de pelotas mediante un conteo de 1 a 1. Finalmente, Karmiloff-Smith (1992, citado por Caballero, 2005) señala que desde que uno es bebé es capaz de distinguir diferentes aspectos como el tamaño, el color y la forma. Haciendo alusión a esta reflexión Caballero (2005) concluye que incluso los niños más pequeños adquieren y tienen un conocimiento matemático informal que se irá desarrollando en las diferentes etapas educativas por las que pasa el estudiante.

A continuación, se pasará a describir y fundamentar la importancia que tiene el desarrollo matemático informal para poder adquirir posteriormente el pensamiento matemático formal, y la implicación que esto tiene en las operaciones aritméticas elementales de suma y resta. Volviendo a la idea dada por Ramírez (2015) apoyándose en los Principios y Estándares de Aprendizaje del NCTM, es importante construir los contenidos matemáticos a partir de experiencias reales donde se desarrollen las matemáticas informales. Según Ramírez (2015) el aprendizaje de la aritmética comienza con el desarrollo del conocimiento informal, como el conteo o la agrupación, donde se incluye el uso

de diferentes materiales para poder llevar a cabo la representación de los números y de las operaciones. Es decir, comienza a partir de las acciones, como sumar, cuando el estudiante es capaz de construir diferentes formas simbólicas hasta llegar a una estructura conceptual completa. Por otro lado, esta misma autora plantea que en el momento de resolver los problemas, para llevar a cabo operaciones aritméticas, los estudiantes comienzan representando los números con materiales manipulativos y una serie de marcas hasta llegar a una “formalización del lenguaje matemático” (Ramírez, 2015). Además, Baroody (1997, citado por Ramírez 2015) resalta que la matemática informal se puede definir como el paso intermedio entre la matemática intuitiva y la matemática formal. Esta idea se ve representada, según Ramírez (2015), cuando los estudiantes son capaces de resolver operaciones con números pequeños, pero al aumentar su tamaño estos se vuelven difícil de “manejar” con la utilización de sus estrategias informales.

A modo de conclusión, se puede decir que el conocimiento matemático informal es algo innato a las personas, pudiéndose empezar a desarrollar desde muy temprana edad con actividades sencillas adecuadas. Es por ello, que se debe trabajar con los estudiantes los conceptos básicos de la aritmética informal ya que estos son la base del desarrollo matemático formal posterior. En el siguiente apartado se tratará el proceso de contar y las dificultades que pueden manifestarse.

2.2 Proceso de contar y dificultades

En el presente apartado se pasará a describir diferentes métodos de cuantificación que manifiestan estudiantes de temprana edad y las dificultades que estos presentan para su categorización e identificación posteriormente en la investigación.

Se entiende por cuantificar la acción de expresar una magnitud o una cantidad (RAE, 2018). Según Caballero (2005) se pueden encontrar principalmente dos procesos de cuantificación: (1) subitización y (2) habilidad de contar.

Según Caballero (2005) el proceso de *subitización* se define como aquel diferente al conteo tanto en la velocidad y precisión que los infantes muestran a la hora de determinar el cardinal de un conjunto de elementos. Por otro lado, Caballero (2005) define la *habilidad de contar* como la correspondencia de objetos individuales en un único conjunto de elementos donde se necesita de la “coordinación visual, manual y verbal”.

Gelman y Gallistel (1978, citados por Caballero, 2005) proponen un prototipo del conteo del infante en base a cinco principios: (1) principio de correspondencia uno a uno (mediante relaciones biunívocas), (2) principio de orden estable (los objetos están repartidos por “etiquetas únicas”), (3) principio de cardinalidad (el último número contado indica el número total de objetos del conjunto), (4) principio de abstracción (todos los elementos de un conjunto se pueden contar) y (5) principio de orden irrelevante (es indiferente el orden que se de a cada objeto del conjunto).

La adquisición del proceso de contar es por tanto fundamental para el posterior aprendizaje de las operaciones aritméticas por lo que es de vital importancia identificar las dificultades que se pueden dar durante este proceso. Estas dificultades se manifiestan a través de una serie de errores que han identificados en la literatura.

Apoyando las ideas propuestas por Bermejo (2004) y Duhalde (2007, ambos citados por Ortiz Padilla, 2009) se pueden encontrar los siguientes errores en la estrategia del conteo: (1) errores de secuencia, (2) errores de partición y (3) errores de coordinación.

Los *errores de secuencia* se corresponden cuando se recita de forma incorrecta la secuencia numérica. Esto se puede dar por ejemplo cuando la persona omite algún elemento de la secuencia. Los *errores de partición* se presentan cuando no existe un orden que lleva el control entre aquello que ya está contado y lo que no, de tal forma que un objeto puede ser contado más de una vez o alguno puede no ser contado. Los *errores de coordinación* afectan a la correspondencia temporal en donde no se coordina el recitado de la serie y

la acción de establecer la correspondencia biunívoca con los objetos que hay que contar. Por ejemplo, en ocasiones se señalan más rápido los objetos que el recitado de la serie.

2.3 Problemas verbales de estructura aditiva

Diferentes autores sostienen que la estructura semántica de los problemas aritméticos verbales está ligada a las estrategias que manifiestan los niños al resolverlos (Caballero, 2005). Por ejemplo, autores como Heller y Greeno (1978, citados por Caballero, 2005) clasifican los problemas verbales de estructura aditiva en cuatro tipos: (1) problemas de cambio, (2) problemas de combinación, (3) problemas de comparación y (4) problemas de igualación.

Los *problemas de cambio* se definen como aquellos que introducen modificaciones a una cantidad inicial. Estos problemas siguen una estructura de “Cantidad inicial + cambio = cantidad final”. Dependiendo de donde se encuentre la incógnita del problema este se resolverá a mediante una suma o una resta. Por ejemplo, el siguiente problema contiene la incógnita en la cantidad final, por lo que se resuelve mediante una suma: “Javier tiene 3 caramelos y su madre le compra 5 caramelos más. ¿Cuántos caramelos tiene al final Javier?”

Los *problemas de combinación* muestran dos cantidades que pueden considerarse de forma independiente o como partes de un todo. En el caso de estos problemas se sigue la siguiente estructura “Cantidad 1 + Cantidad 2= Tota”. Al igual que en los problemas de cambio, el lugar de la incógnita en estos problemas dará lugar a una resolución mediante una suma o mediante una resta. En el siguiente ejemplo se puede ver un problema de combinación resuelto mediante una suma: “en mi casa tengo 3 perros y 5 gatos ¿cuántos animales tengo en total?”

En los *problemas de comparación* se presenta la relación entre dos cantidades, bien para determinar la diferencia entre ellas o para averiguar una cantidad conociendo la otra. En la estructura de los problemas tipo “más que” se puede caracterizar por “Cantidad de referencia + Diferencia= Cantidad Comparada”. En función de la localización de la incógnita, al igual que en los problemas anteriores pueden ser resueltos mediante una suma o una resta. A continuación, se presenta un problema de comparación resuelto mediante una suma: “Pepito tiene 3 lápices y Francisco tiene 5 más que él. ¿Cuántos lápices tiene Francisco?”

Finalmente, los *problemas de igualación* indican una acción mediante la que un conjunto pasa a ser igual a otro. La estructura que presentan estos problemas es idéntica a la estructura de los problemas de comparación. En este caso ocurre lo mismo que en los anteriores, en función de dónde se encuentre la incógnita se podrá resolver por medio de una suma o una resta. Como se puede ver en el ejemplo: “Javier tiene 4 pegatinas y María tiene 7. ¿Cuántas pegatinas necesita Javier para tener tantas como María?”, es un problema de igualación que se resuelve mediante una resta.

Los problemas que se han utilizado en todas las sesiones de la investigación han sido problemas de cambio y combinación, siendo en todos los casos la incógnita la cantidad final o la cantidad total respectivamente. La selección de este tipo de problemas ha sido motivada por el trabajo de Carpenter y Moser (1984) quienes concluyen en su estudio que estos dos tipos de problemas fueron los más fáciles de resolver por los niños del estudio. A continuación, se pasará a describir las estrategias identificadas en la resolución de problemas verbales aditivos de suma, que serán el foco del presente trabajo.

2.4 Estrategias informales aditivas

En este apartado se profundiza sobre las diferentes estrategias que los estudiantes muestran a la hora de resolver las operaciones aritméticas de suma.

Cookson y Moser (1980; citados por Carpenter y Moser, 1984) en su estudio de estrategias de problemas de suma y resta identificaron las siguientes estrategias de suma: (1) contar todo, (2) subitizar, (3) contar desde el primer sumando, (4) contar desde el sumando mayor, (5) hechos numéricos, (6) estrategias memorísticas y (7) algoritmo.

La estrategia *contar todo* implica la construcción de dos conjuntos separados, uno para cada sumando y después un conteo desde el principio de la unión de ambos conjuntos. Aunque no ocurre con frecuencia, se puede llevar a cabo sin el uso de modelos. En dicho caso el/la niño/a cuenta en silencio o en voz alta: “1, 2, ...”. La estrategia *subitizar* tiene lugar cuando, tras modelizar los dos conjuntos correspondientes a cada sumando, se percibe de manera inmediata el cardinal de la unión sin necesidad de contar cada conjunto. Esto suele ocurrir cuando el resultado de la suma es una cantidad pequeña menor que 5 o 6, o cuando se utilizan dedos como medio de modelización.

Por otro lado, en la estrategia *contar desde el primer sumando* el/la niño/a introduce una secuencia de conteo desde el primer sumando (en los problemas del presente estudio, siempre el número menor de los dos). Normalmente no hay representación directa de dicho sumando, pero cuando la hay, se asume la cardinalidad del conjunto “dando por contado” el sumando menor. Como mecanismo para añadir el segundo sumando se puede utilizar material, dedos o marcas de conteo. La estrategia *contar desde el sumando mayor* es idéntica a la anterior, pero comenzando el conteo a partir del sumando mayor (en el estudio, siempre el segundo número del enunciado del problema).

En la estrategia *hechos numéricos* se produce la respuesta por medio de la recuperación de hechos numéricos previamente interiorizados. Se identifica por una rápida y correcta respuesta, y por explicaciones del tipo “simplemente lo sé” cuando se le pregunta por la manera en que se ha obtenido la respuesta. En las *estrategias memorísticas* la respuesta se determina mediante la manipulación mental de alguna relación numérica (p.e. en la suma $7+5$ se comienza directamente en el 10 ($=7+3$) para a continuación añadir 2). Finalmente, la estrategia *algorítmica* ocurre solamente en los casos que las

cantidades del problema tienen dos o más dígitos, y se ejecuta el algoritmo estándar de la suma.

Cooker and Mosser (1980; citados por Carpenter y Moser, 1984) identifican además las siguientes estrategias incorrectas: *adivinar* (se determina la solución diciendo un número al azar), *estimar* (se da una aproximación a la solución siendo la respuesta incorrecta pero cercana a la solución), *número dado* (la respuesta a la operación es uno de los datos que aparece en el enunciado) y *operación incorrecta* (el estudiante realiza una suma en vez de una resta o viceversa).

En un estudio similar con niños de infantil (15 niños entre los 4 y los 6 años) Rodríguez et al. (2008) identifican las siguientes estrategias informales de suma: tres estrategias de representación directa: (1) representar todo y contar todo; (2) representar y contar a la vez; (3) representar un único término y contar; dos estrategias basadas en el conteo: (4) contar todo sin objetos; (5) contar a partir del primer sumando y (6) las estrategias memorísticas.

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores en adelante se considerará la siguiente clasificación de estrategias de suma. Se consideran en dicha clasificación solo las estrategias identificadas en el presente estudio, distinguiendo en cada una de ellas distintos niveles según el número de sumandos representados.

(1) Contar todo CT

(1.1) Concreto. Se representan ambos sumandos y se cuenta todo.

(1.2) Semi-abstracto: Se realiza un conteo de todo representando solo uno de los sumandos.

(1.3) Abstracto: Se lleva a cabo una estrategia de contar todo, en bajo o en voz alta, sin representar ninguno de los dos sumandos.

(2) Sumar desde el primero SP

(2.1) Concreto. Se representan ambos sumandos y se empieza a contar desde el primero, tapándole y contando a partir de él el mayor.

(2.2) Semi-abstracto. Se representa únicamente el sumando mayor y se cuenta a partir del primero.

(2.3) Abstracto. Se realiza una suma desde el sumando primero añadiendo el mayor, en voz baja o alta, pero sin ninguna representación.

(3) Sumar desde el mayor SM

(3.1) Concreto. Se representan ambos sumandos y se empieza a contar desde el mayor, tapándole y contando el menor a partir de él.

(3.2) Semi-abstracto. Se representa únicamente el primer sumando y se empieza a contar desde el mayor.

(3.3) Abstracto. Se realiza una suma desde el sumando mayor añadiendo el menor sin representación alguna, esta suma puede ser bien en voz alta o en voz baja.

(4) Otras estrategias correctas

(4.1) Hechos numéricos. El estudiante recuerda la solución de la operación.

(4.2) Memorísticas. El estudiante accede a la solución sin dar evidencia de como lo ha hecho.

(5) Estrategias incorrectas

(5.1) Hechos numéricos. Esta estrategia se basa en que la solución de la suma será un sumando de esta misma.

(5.2) Adivinar. Esta estrategia se encuentra relacionada con la idea de que el estudiante determina la respuesta por mera suposición.

(5.3) Operación incorrecta. En este caso en los problemas de suma el estudiante realizará una resta.

(5.4) Número dado. Esta estrategia se basa en que la solución será un número del problema.

Se finaliza la sección con un resumen del tratamiento que hace la literatura de aprendizaje de matemáticas en alumnado con necesidades educativas.

2.5 Alumnado con NEE en área de matemáticas

La investigación sugiere que muchos estudiantes presentan algún tipo de dificultad relacionada con el área de matemáticas en el transcurso de su escolaridad. Ginsburg y Baroody (2007) en su manual de la prueba de Competencia Matemática Básica TEMA 3, explican que aquellos alumnos con dificultades en el área de matemática por un lado avanzan a un ritmo diferente que el resto de sus compañeros, y además manifiestan un retraso en la adquisición de las habilidades y conceptos que requieren mayores niveles de elaboración. Por lo tanto, es necesario construir bases firmes para la construcción de aprendizaje posterior. Es muy probable que aquellos estudiantes que tengan dificultades se vayan quedando atrás ya que el aprendizaje de las matemáticas es acumulativo, y nuevos conceptos se irán construyendo sobre los anteriores (Montague, 2007).

Estos mismos autores, Ginsburg y Baroody (2007) sugieren que en cualquier operación aritmética es importante fijarse en el proceso y no únicamente en el resultado. En este proceso se pueden ver las diferentes habilidades y estrategias que los estudiantes llevan a cabo para su poder resolver la operación. Finalmente, Ginsburg y Baroody (2007) resaltan la necesidad de proporcionar diferentes prácticas con “modelos de representación explícitos”, en los cuales los contextos varían y a su vez se practican las distintas habilidades.

Es importante resaltar que existen diversos estudios que analizan las diferentes estrategias que manifiestan los alumnos con necesidades educativas especiales (NEE) o alumnado con dificultades en el área de matemáticas. Sin embargo, apenas se encuentran trabajos que propongan posibles secuencias de instrucción para ayudarles a desarrollar estrategias más avanzadas e ir adentrándose en el desarrollo matemático formal (Zhan, Xin y Si, 2011)

3. Preguntas de Investigación

A la vista de todo lo observado en la literatura se plantean una serie de preguntas de investigación que motivan el presente trabajo. En concreto, se plantean las siguientes preguntas de investigación: (1) ¿qué estrategias de suma muestran de forma espontánea estudiantes con dificultades en el área de matemáticas en la resolución de problemas en las sesiones de línea de base? (2) ¿cómo favorece la instrucción el desarrollo de estrategias avanzadas en estos estudiantes? (3) ¿en qué medida se mantienen a lo largo del tiempo las estrategias adquiridas?

4. Método

En el siguiente apartado se describirá la metodología que se ha llevado a cabo en la investigación.

4.1 Diseño

Se ha llevado a cabo un estudio de enfoque microgenético, que se utiliza con frecuencia para investigar cómo se desarrolla en los niños el aprendizaje en distintos ámbitos. Está definido por tres características: las observaciones abarcan todo el período del cambio, la densidad de observaciones dentro de este período es alto, y se analizan de forma intensa para estudiar los procesos que originaron el cambio (Siegler, 2002; Zhan, Xin y Si, 2011))

Una de las principales ventajas de este enfoque es que se puede observar el cambio mientras está ocurriendo (Siegler, 2002). Ha sido aplicado de forma satisfactoria en ámbitos tan distintos como la aritmética, el razonamiento científico, la memoria, la lectura y las dificultades de aprendizaje (Bermejo, 2005). En el campo de la aritmética, por ejemplo, el trabajo de Bermejo (2005) mostró la eficacia del análisis microgenético en la adquisición del cardinal numérico. En el ámbito del desarrollo de estrategias, el análisis microgenético muestra cómo se desarrollan las estrategias en respuesta a una instrucción, y, por lo tanto, ayuda a entender cómo la instrucción ejerce sus efectos (Siegler,

2002). En esta línea, el trabajo de Zhan, Xin y Si (2011) propone un método para la enseñanza de estrategias multiplicativas efectivas en niños con dificultades de aprendizaje desde un enfoque microgenético.

4.2 Muestra y contexto

El siguiente apartado describe a los sujetos que han participado en la investigación. Como se viene describiendo a lo largo del documento, la investigación se centra en alumnado con dificultades en el área de matemáticas.

Sujeto 1: Este sujeto nació el 17 de mayo de 2010 con hipoacusia bilateral con un umbral de audición entorno a los 70 dB, detectada a los dos meses de nacer y desde los dos años el infante utiliza unos implantes. Su aprendizaje del habla se vio afectado siendo sus primeras palabras producidas a los 13 meses de edad. Tiene reconocido un 35% de discapacidad a fecha de 25/11/13.

A lo largo de toda su vida escolar se le han realizado varios informes psicopedagógicos por parte de la Unidad de Orientación del centro, la última fue en marzo de 2016, coincidiendo con el cambio de etapa de Educación Infantil a Primaria. En esta última prueba se utilizaron como instrumentos de evaluación: (1) entrevista familiar, (2) coordinación con Equipo Regional, Unidad Sensorial y Unidad Auditiva, (3) coordinación con la tutora, (4) coordinación entre PT y AL, (5) test de Matrices Progresivas del RAVEN obteniendo una puntuación intelectual media respecto a los demás sujetos de su edad, (6) pruebas de diagnóstico preescolar de M.V. de la Cruz, que indicaron que el alumno mostraba un vocabulario muy limitado, (7) prueba de Vocabulario de educación Infantil Vavel, donde mostró una edad de 4:11 frente a los 5:9 que tenía (desconoce palabras como “círculo o rayo”), (8) prueba de comprensión de estructuras gramaticales (CEG), centrada únicamente en las oraciones predicativas no reversibles a las cuales el alumno no supo responder de forma correcta, (9) observación del alumno tanto en el aula como en el patio.

Sujeto 2: Esta alumna nació en el 2010 con hipotonía y pasó unas semanas en la incubadora. A los 5 meses se le diagnostica retraso psicomotor de predominio motor y antecedentes perinatales de riesgo. Hoy en día presenta un retraso madurativo y sigue sometiéndose a pruebas pues existe la sospecha de que existe algún tipo de disfuncionalidad que pueda explicar este retraso, ya no solo a nivel motor, sino a nivel cognitivo. Se ha descartado un diagnóstico de TEA.

En el 2016, el equipo de orientación realizó dos pruebas psicopedagógicas, una en febrero y otra en abril. Los instrumentos de evaluación en los que se basaron ambas pruebas fueron las siguientes: (1) entrevista familiar, (2) coordinación con Equipo Regional y Equipo de Motóricos, (3) coordinación con la tutora, (4) coordinación entre profesionales de apoyo: AL Y PT, (5) test breve de Inteligencia de Kaufman, mostrando un coeficiente medio donde en la parte de vocabulario (forma verbal) sabe la función de la palabra aunque no muestra ser capaz de denominar, (6) test de Matrices Progresivas RAVEN, escala color el cual mostró que la alumna se encuentra en un término medio intelectualmente, respecto a otros miembros de su mismo curso escolar, (7) pruebas de diagnóstico preescolar de M.V. de la Cruz, obteniendo la mayoría de su puntuación bajo media, excepto en ítems visuales donde la niña obtuvo una puntuación baja. mostrando además dificultades en el conteo o procesamientos informales, (8) observación de la alumna tanto en el aula como en el recreo.

Sujeto 3: este estudiante nació en 2010, se le diagnosticó un TEA a los 2 años de nacer. En el 2014 se realizó la última prueba realizada por el equipo de Orientación en el cambio de escolarización de Educación Infantil a Educación Primaria. Los instrumentos de evaluación en los que se basaron las pruebas psicopedagógicas fueron las siguientes (1) entrevista familiar, (2) coordinación con la tutora, PT, AL, y A.E., (3) observación en el aula y en el patio (4) Revisión de sus tareas en el aula (6) WPPSI y (7) el PLON-R.

Todos las observaciones y resultados mostraron que el alumno tiene dificultades en la motricidad gruesa, además, parece no ser capaz de mantener ni dirigir la atención a las tareas, por lo que tiene que ser dirigido siempre por

un adulto. En las pruebas de Inteligencia no se pudieron obtener resultados concluyentes ya que no mantenía la atención necesaria para realizarlas, mostrando mucha dificultad a la hora de trabajar. El alumno cuenta con una Adaptación Significativa Individual (ACI) con contenidos y objetivos establecidos en el Currículo de Educación Primaria correspondientes con el primer curso de esta misma etapa frente al 4º curso en el que se encuentra.

Los tres sujetos de esta investigación se encuentran en un aula ordinaria. La sujeto 2 cursa 2º de Primaria y el sujeto 3 cursa 4º (ambos en el curso correspondiente a su edad) mientras que el sujeto 1 se encuentra repitiendo 1º de Educación Primaria. Además, los tres reciben 4 sesiones de PT y 4 sesiones de AL semanales. Además, el sujeto 2 recibe, una sesión semanal de fisioterapia en el centro.

Antes de empezar la investigación con los estudiantes, y con el fin de concretar los objetivos del estudio, se les aplicaron las siguientes pruebas: (1) Tema- 3 Matemáticas y (2) PROLEC-R (Cuetos, Rodríguez, Ruano y Arribas, 2005).

En el Tema-3 los tres estudiantes mostraron errores en el conteo, además de mostrar dificultades en los ítems relacionados con la suma. Únicamente el sujeto 1 llegó al ítem que se centra en evaluar la estrategia de sumar a partir del sumando mayor (ítem nº 34), que resolvió de forma incorrecta. La puntuación de los otros dos sujetos fue inferior al anterior estudiante, pero como se ha dicho anteriormente, ambos mostraron dificultades en los ítems relacionados con el conteo y ejercicios de suma. Estos resultados fijaron el contenido a tratar en la instrucción. A continuación (tabla 1), se muestra una tabla en relación con los resultados obtenidos por los tres sujetos

Tabla 1: Puntuaciones en el TEMA-3 de matemáticas (PD: puntuación directa, EM: edad matemática, P: percentil, PI: pensamiento informal, N: numeración, CM: comparación, CL: cálculo, PF: pensamiento formal.

	PD	EM	P	PI	N	CM	CL	PF
Sujeto 1	34	6	1	16/23	4/6	4/8	5/9	
Sujeto 2	21	5	49	10/23	3/6	3/6	4/5	
Sujeto 3	18	4:9	50	11/23	0/6	2/8	4/6	

El PROLEC-R tiene como objetivo diagnosticar dificultades de lectoescritura en estudiantes de Educación Primaria. Con el fin de evaluar las habilidades de lectura de los sujetos del estudio, se les aplicó los ítems 7 y 9 del PROLEC-R que se centran en la comprensión de oraciones y la comprensión oral respectivamente. En el ítem 7 el alumno lee unas oraciones y debe seleccionar la respuesta correcta entre cuatro dibujos. En el ítem 9, el evaluador lee un texto al alumno, quien debe responder a una serie de preguntas en relación con el texto que ha escuchado. Los tres sujetos mostraron serias dificultades en la resolución de ambos ítems (ver tabla 2).

Tabla 2: puntuaciones en el PROLEC-R (CO: comprensión de oraciones, COR: comprensión oral)

	CO	COR
Sujeto 1	1/16	0/4
Sujeto 2	5/16	1/4
Sujeto 3	6/16	0/4

Estos resultados muestran que los tres sujetos tienen dificultades tanto en la comprensión de oraciones como en la comprensión oral, lo que podría dificultar la comprensión de los enunciados, dando lugar a errores en la resolución de estos. Por todo lo anterior, se decide que los problemas se le presentarán uno a uno a los alumnos en formato escrito para que tengan un apoyo visual, y además la instructora los en voz alta para facilitar su comprensión.

4.3 Tareas

Carpenter y Moser (1984) realizan una investigación donde analizan las dificultades y las diferentes estrategias que muestran estudiantes de aprendizaje típico al resolver problemas de estructura aditiva. En su investigación muestran que los problemas de cambio y combinación son los problemas que los estudiantes resuelven con mayor facilidad. A continuación, siguiendo las recomendaciones de Carpenter y Moser (1984), se pasará a describir el diseño de los problemas.

Los problemas diseñados en el estudio fueron problemas aditivos de cambio y de combinación, por ser los mejor resueltos por los estudiantes sujetos del trabajo de Carpenter y Moser (1984). Los problemas se diseñaron con una estructura gramatical simple y vocabulario sencillo y cercano al estudiante. Con el fin de poder distinguir las estrategias SP y SM y siguiendo las pautas de estudios similares, el número menor aparecía siempre en primer lugar en el enunciado del problema.

Finalmente, los números implicados en los enunciados han sido los sugeridos por la investigación de Carpenter y Moser (1984): triples de sumas entre 5 y 9: (2,3,5), (2,4,6), (2,5,7), (2,6,8), (3,4,7), (3,6,9), y triples de sumas entre 11 y 15: (3,8,11), (4,7,11), (5,7,12), (4,9,13), (6,8,14), (6,9,15). Los triples considerados cumplen además que no contienen dobles (p.e. $2+2=4$) ni sumas que den 10 (p.e. $7+3=10$). Un ejemplo de problemas de este tipo considerados en la instrucción es el siguiente problema aditivo de combinación: *“en una granja hay 7 vacas y 9 caballos. ¿Cuántos animales hay en total en la granja?”*

4.4 Procedimientos

Se ha seguido un diseño de prueba múltiple a través de tres sujetos. En este apartado se definirá las etapas que han tenido lugar a lo largo de todo el estudio. (1) línea de base, (2) instrucción y (3) mantenimiento.

La *línea de base* consistió en dos pretest que se administraron al comienzo del estudio a cada sujeto. Estos pretest estaban formados por 12 problemas cada uno, diferenciando 6 problemas de cambio y 6 de combinación combinados por el tamaño de los triples utilizados. En la *línea de base* los problemas fueron resueltos de manera independiente por cada sujeto sin intervención de la instructora, registrando las estrategias espontáneas que manifestaban los sujetos indicando si la respuesta era errónea o correcta.

La *instrucción* consistió en una sesión semanal con cada sujeto entre febrero y mayo de 2018. Cada sujeto recibió un total de 9 sesiones de instrucción. En cada sesión se resolvían entre 8 y 12 problemas de cambio y combinación. El estudiante resolvía cada problema de forma independiente. Si lo resolvía correctamente mediante la estrategia SM (sumar desde el mayor), la instructora le felicitaba y se pasaba al siguiente problema. Si la resolución era correcta, pero mediante una estrategia distinta a la de SM, la instructora también le felicitaba, pero le mostraba otra posible resolución mediante dicha estrategia. Cuando el estudiante resolvía de forma incorrecta el problema, la instructora ejemplificaba la resolución del problema mediante la estrategia SM animándole a participar en dicha resolución. Después de la demostración, el estudiante resolvía de nuevo el problema de manera independiente. Se registraron todos los intentos independientes del estudiante.

Con el fin de evaluar la generalización de la instrucción a problemas más complejos, a partir de la 4ª sesión se introdujeron problemas de varias etapas. El criterio para pasar a la fase de generalización fue manifestar al menos un 60% de estrategias SM exitosas, y un 50% de aciertos durante las dos últimas sesiones.

La fase de *mantenimiento* consistió en aplicar un posttest (idéntico al pretest 2) después de 4 semanas tras finalizar la instrucción con el fin de comprobar si las estrategias adquiridas se mantenían en el tiempo.

Proceso de instrucción:

Con el fin de ayudar a los sujetos a desarrollar la estrategia SM se planteó una secuencia de instrucción distinguiendo 3 niveles de abstracción: (1) nivel concreto, (2) nivel semi-abstracto y (3) nivel abstracto.

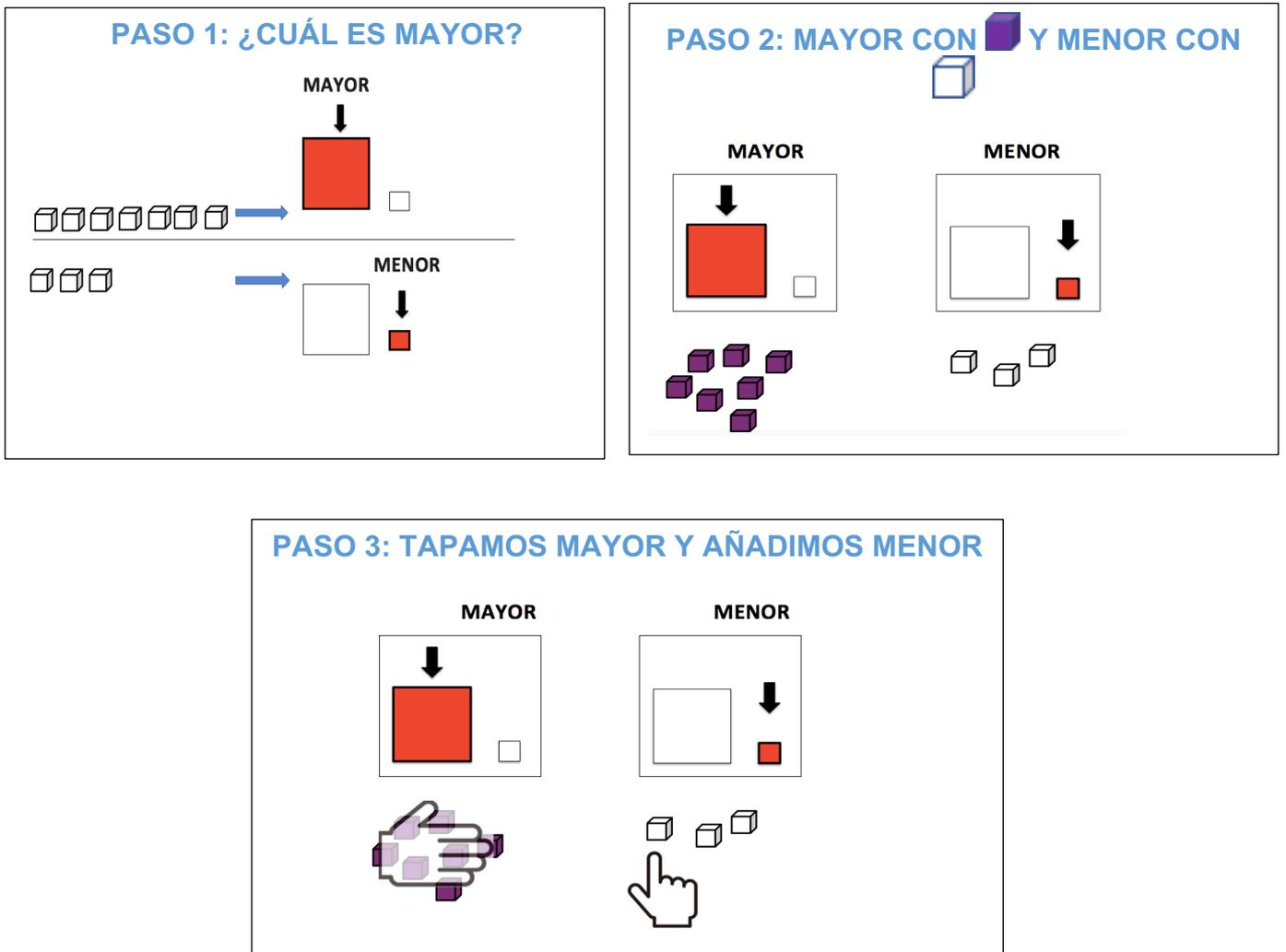
En el *nivel concreto* se representan ambos sumandos con cubitos de colores. Para ello primero se deben de identificar el sumando mayor y el menor, y posteriormente representar el sumando mayor en cubitos morados y el menor en cubitos blancos. Finalmente, se tapa el mayor y se añade el menor a este.

El *nivel semi-abstracto* se corresponde con la representación de un único sumando con el material. Al igual que en nivel anterior, se identifican primero el sumando mayor y el menor. A continuación, se rodea el sumando mayor y se representa con cubitos blancos el sumando pequeño. Partiendo del cardinal del mayor, se añaden los cubitos blancos hasta llegar al resultado.

Por último, en el *nivel abstracto* se rodea el número mayor y se añade el menor, sin representar ningún sumando.

A continuación, se muestra una imagen de la secuencia diseñada para la instrucción de la estrategia "SM" en el nivel concreto.

Figura 1: secuencia estrategia SM nivel concreto.



A continuación, en la *figura 2*, se puede ver una transcripción del sujeto 3 en una sesión de instrucción. El momento concreto de este diálogo se corresponde con el momento en el que estudiante muestra por primera vez de forma espontánea la estrategia SM en nivel concreto.

Figura 2: Transcripción de sesión de instrucción en la estrategia de sumar desde el mayor (sesión 5, sujeto 3). I: instructora, S3: Sujeto 3.

- I: ¡Vamos!, un niño tiene 3 mesas y 4 sillas. ¿Cuántos muebles tiene en total?
- S3: [Empieza a representar el mayor con morado] 1-2 ¿dos? 3-4. [4 cubos morados al lado del pictograma de mayor]
- I: Muy bien
- S3: 1 y 2. Es igual a 4 a 2 Eva? [pone 2 cubos blancos al lado del pictograma de menor]
- I: No. Mira a ver que estén bien los números...
- S3: 3 es 3 [pone 3 cubos blancos]
- I: Muy bien ¿y ahora qué vas a hacer?
- S3: Esconderlas [tapa los cubos morados]
- I: ¿Y ahora?
- S3: ¡Contarlas! [y empieza a contar] ¡1-2-3! [Cuenta las blancas y se olvida de las que tiene escondida]
- I: Cariño ¿cuántas?
- S3: 7-8-
- I: ¿Eh?
- S3: Es que lo conté mal Eva
- I: Venga vuelve a empezar, ¿cuántas había escondidas?
- S3: 4
- I: Pues venga
- S3: 4 [haciendo referencia a los cubos morados] 5-6-7
- I: ¡Choca las manos!
- S3: ¿Qué pasa?
- I: ¿Viste que bien lo has hecho el truco?
- S3: Sí
- I: Venga hazlo otra vez [con los cubos ya representados en la mesa] tapa el mayor y...
- S3: [Tapa los cubos morados y se toca la mano] 4 [y cuenta los cubos blancos] 5-6 y 7
- I: Choca
- S3: [Se ríe]
- I: ¿Viste que fácil?
- S3: ¡Sí!

Figura 3: Instrucción de enseñanza de la estrategia SM nivel concreto (ambos sumandos representados con material)



4.5 Recogida y análisis de datos

Con el fin de poder de identificar y codificar las estrategias, todas las sesiones de la línea de base, instrucción y mantenimiento fueron grabadas en vídeo. Al finalizar cada sesión la autora del trabajo y su directora registraban cada estrategia espontánea manifestada por los estudiantes y se planificaba la siguiente instrucción. Se consideraron para cada sesión el porcentaje de cada estrategia manifestada en cada intento espontáneo de los problemas, así como el porcentaje de éxito. Se registraron las 3 estrategias: contar todo CT, sumar desde el primero SP, sumar desde el mayor SM, en distintos niveles de abstracción, identificándose un total de 8 estrategias correctas: (1) CT nivel concreto, (2) SP nivel concreto, (3) SM nivel concreto, (4) SP nivel semi-concreto, (5) SM nivel semi-abstracto, (6) CT nivel abstracto, (7) SP nivel abstracto, (8) SM nivel abstracto.

Las estrategias espontáneas manifestadas por los sujetos se registraban en una rúbrica (ver anexo I). Una vez se tenían clasificadas todas las estrategias se procedió al volcado de datos en el programa Excel y a la realización de los gráficos.

Para la recogida de datos cualitativos se recogió en cada sesión aspectos sobre los sujetos relacionados con su comportamiento, su motivación, diferentes comentarios que realizaban indicando estados de ánimos y anotaciones puntuales sobre cómo querían actuar, y su forma de permanecer a lo largo de la sesión. Esta información explica la modificación de algunas de las sesiones de instrucción en las que se redujo el número de problemas a resolver, o que se cancelara alguna de las sesiones debido a la falta de concentración del sujeto.

4.6 Tratamiento de fidelidad y fiabilidad

La tutora y la autora analizaron los vídeos de cada sesión, codificaron las estrategias y discutieron los desacuerdos hasta llegar a un 100 % de acuerdo.

5. Resultados

Este apartado se centra en las diferentes respuestas que ha mostrado cada sujeto en sus correspondientes sesiones. Es importante decir que no se va a distinguir este apartado por sujeto, sino que se diferenciará en función de las fases del estudio distinguiendo en cada una de ellas los resultados de los tres sujetos.

5.1 Línea de base

Como se ha dicho anteriormente en el apartado de Procedimientos, (sección 4, apartado 4.4), los alumnos resolvieron una serie de problemas sin ayuda. El objetivo de este apartado se centra en conocer y evaluar qué tipo de estrategias utilizaba cada sujeto de forma espontánea. Se realizaron dos pretest. En ambos pretest se evaluó la resolución de 12 problemas de suma, 6

de ellos de combinación y 6 de cambio. Los resultados de los sujetos fueron los siguientes:

- Sujeto 1

En la línea de base el sujeto 1 mostró resultados variados. Durante el primer pretest, debido probablemente a algún problema de audición (recordar que este sujeto usa audífonos y estos en ocasiones pueden fallar), manifestó diversas estrategias incorrectas, entre ellas la estrategia de adivinar, con un alto porcentaje de respuestas erróneas. Sin embargo, en el segundo pretest, la estrategia utilizada fue predominantemente la de sumar desde el primero (SP) que le llevó a resolución correcta en casi todas las ocasiones, excepto un problema el cual resolvió mediante la estrategia CT. Tras esta sesión de línea de base estable, se comenzó con la instrucción con este sujeto.

- Sujeto 2

En ambos pretest, la estudiante mostró una preferencia por la estrategia CT (50% en el primer pretest, y 100% en el segundo) que le llevó a una resolución correcta en el segundo pretest en el 75% de los problemas. La estudiante parecía mostrar una gran agilidad y comodidad con el uso de la estrategia CT en nivel concreto.

- Sujeto 3

Este sujeto a lo largo de toda la línea de base demostró estrategias informales con resultado incorrecto, entre las que destacan “adivinar” y “número dado”. Durante ambos pretest parecía desconcentrado y confuso con las situaciones y personajes que se describían en el problema.

5.2 Instrucción de enseñanza

Como se ha dicho anteriormente, la instrucción de enseñanza se compuso por nueve sesiones de intervención con cada uno de ellos. Los resultados obtenidos se explicarán a continuación en función de cada sujeto.

- Sujeto 1

Las cuatro primeras sesiones se centraron en enseñar la estrategia SM al alumno en un nivel semi-abstracto. Durante las dos primeras sesiones se trabajó en primer lugar con el estudiante la estrategia SM en nivel concreto. En la primera sesión el sujeto mostró una actitud positiva ante la resolución de los problemas y además pareció mostrar de forma espontánea en la casi todas las resoluciones la estrategia SM en el nivel concreto. Debido a la rápida adquisición de esta estrategia en el segundo problema de la tercera sesión se empezó a trabajar la estrategia SM en el nivel semi-abstracto y así avanzar en su instrucción. Durante la resolución de estos problemas el sujeto pareció mostrar de forma espontánea la estrategia SM en el nivel semi-abstracto y en ocasiones también mostró la misma estrategia en el nivel abstracto. En la cuarta sesión el estudiante mostró de forma espontánea la estrategia SM en nivel abstracto. Cabe decir, que, durante estas cuatro primeras sesiones, el alumno se mostraba muy motivado ante las diferentes instrucciones, indicaciones y observaciones que se le daban sobre la resolución de su problema.

En la quinta sesión siguiendo los criterios establecidos previamente en el apartado de Procedimientos (sección 4.4), y tras manifestar la estrategia SM con un porcentaje de 60% y un 50% de aciertos en las dos sesiones anteriores, 3ª y 4ª, se pasó introducir al estudiante problemas de dos etapas y los problemas de resta. En esta sesión, el sujeto 1 no trasladó la estrategia SM a los problemas de dos etapas, sino que su estrategia espontánea fue SP en un nivel concreto.

Durante la sexta sesión el alumno empezó a manifestar de forma más frecuente la estrategia SM, aunque en los problemas de dos etapas mostró SP en un nivel semi-abstracto utilizando los dedos para la representación de alguno de los sumandos como apoyo. Durante la sexta, séptima y la octava sesión el sujeto mostró un traslado de estrategia SM a los problemas de dos etapas en la mayoría de las respuestas combinando niveles semi-abstracto y concreto. Los problemas de resta fueron resueltos en su mayoría utilizando una estrategia básica de separar y volver a contar. Tuvo problemas para identificar que eran de restas, confundiéndolos al principio con los problemas de suma. Finalmente resolvió de forma correcta los problemas de resta.

Durante la última sesión de instrucción el alumno manifestó de forma espontánea la estrategia SM en un nivel semi- abstracto en la mayoría de las resoluciones, además realizó de forma correcta todos los problemas de resta.

El porcentaje de problemas resueltos de forma correcta por este estudiante se puede considerar estable. Muestra un porcentaje de aciertos entre el 80% y el 100% en todas las sesiones de la instrucción de enseñanza. Las estrategias incorrectas que con más frecuencia mostró el estudiante fueron: olvidar un sumando y número dado (ver tabla 3).

- Sujeto 2

El sujeto 1 manifestó cambios en sus estrategias por lo que al comenzar su segunda sesión e instrucción se comenzó la primera sesión de instrucción con la alumna.

La primera sesión de la instrucción de enseñanza estuvo enfocada en que la estudiante adquiriera la estrategia SM en un nivel concreto. Esta alumna ya había manifestado la estrategia CT en nivel concreto en la resolución de problemas de suma de la línea de base. Durante esta primera sesión de instrucción la alumna parecía no mostrar esta nueva estrategia recurriendo en la mayoría de las ocasiones a CT en nivel concreto. Durante esta sesión fue muy importante insistir en la correcta representación de los sumandos con los

cubitos, pues en ocasiones cometía errores de coordinación en el conteo. La instrucción de esta estrategia continuó en la segunda sesión, donde la estudiante mostró la estrategia SM en el nivel concreto de forma espontánea y además mantuvo el porcentaje elevado de aciertos.

Debido a los resultados de la segunda sesión se empezó a trabajar con ella en la tercera sesión la estrategia SM en el nivel semi-concreto, La alumna mostró una transición muy particular hasta mostrar de forma espontánea esta nueva estrategia. En las primeras resoluciones representaba el sumando menor pero también contaba a partir de él y no del mayor dando como resultado el doble de dicho sumando. A lo largo de los problemas esta estrategia errónea fue disminuyendo y la estudiante fue incrementando la estrategia SM en el nivel semi- abstracto . Esta instrucción se mantiene tanto en la cuarta como en la quinta sesión. Es importante mencionar que en diversas ocasiones la estudiante mostró frustración al no resolver de forma correcta los problemas, lo que pareció provocar desganancia y falta de motivación en las resoluciones posteriores.

En la sesión 6ª la alumna resuelve por primera vez los problemas de varias etapas y se le introducen los de restas, ya que igual que su compañero mostró dos sesiones en las cuales manifestaba la estrategia SM en al menos un 60%. Los resultados fueron los siguientes: la estudiante fue capaz de trasladar la estrategia SM a los problemas de dos etapas, tanto a un nivel semi- abstracto como a nivel abstracto. Sin embargo, al instruirse en este último nivel mostró un gran decremento del nivel de aciertos, pasando a porcentajes de únicamente 20-30% del total de problemas. Este descenso en los aciertos se debió principalmente a errores de coordinación al añadir la cantidad menor al sumando mayor. Para poder evitar estos errores se invitó a la alumna a que volviera a utilizar el material evitando los cálculos mentales, volviendo así a un nivel semi- abstracto o concreto. La alumna mostró su descontento en relación con esto, respondiendo en una ocasión: *“yo lo quiero hacer con la cabeza, con el material no me gusta”*. En la última sesión se incrementó el número de aciertos de la estudiante que había descendido considerablemente al querer

mostrar la estrategia SM en un nivel abstracto, pues en los momentos de dudas se consiguió que recurriera de nuevo al material, dejando el conteo mental.

En relación con las estrategias incorrectas que utilizó con mayor frecuencia la estudiante, se identificaron principalmente la estrategia de *adivinar* en los problemas de una etapa y la de *olvidar un sumando* en los problemas de varias etapas (ver tabla 4).

- Sujeto 3

Cuando el sujeto 2 comenzó a mostrar cambios respecto a sus estrategias iniciales se comenzó la instrucción con el sujeto 3 coincidiendo la primera sesión de instrucción con el sujeto 3 con la segunda del sujeto 2 y con la tercera sesión de instrucción del sujeto 1. Debido a la cantidad de resoluciones incorrectas manifestadas en la línea de base de este sujeto, se planteó como prioridad que el sujeto superara los errores manifestados en el conteo (de partición y de coordinación) y se trabajó que consiguiera llevar a cabo estrategias correctas de contar todo CT.

Por esa razón, las dos primeras sesiones fueron dirigidas a que el alumno mostrara de forma espontánea la estrategia CT en el nivel concreto. Desde la primera sesión el sujeto adquirió dicha estrategia alcanzando ya un 100% de aciertos en la segunda sesión, dejando por tanto atrás el uso de estrategias incorrectas. Durante estas dos sesiones se insistió continuamente en la correcta representación de ambos sumandos, así como de su conteo, para evitar así los errores del conteo identificados.

A medida que iba avanzando la instrucción aparecieron otros tipos de errores, como el de no saber diferenciar entre el número mayor y el menor. Para poder corregir estos errores durante la 3ª y 4ª sesión se disminuyó el número de problemas a resolver y se introdujo una actividad donde el sujeto debía distinguir el mayor y el menor en distintos pares de números. Esta actividad estaba diseñada para que el sujeto la realizara mentalmente, sin embargo, si el sujeto mostraba dificultades se pasaba a la representación de ambos

sumandos en filas comparando qué fila tenía más cubitos. Cuando terminaba la comparación de los pares (al principio números más distantes (2,7) y posteriormente más cercanos (3,5)) se pasó a la resolución de los problemas, donde se seguía insistiendo en la correcta representación de los sumandos. Durante estas sesiones el sujeto mostraba de forma espontánea la estrategia SM en el nivel concreto, pero mostró también errores de conteo, de correspondencia, donde no coordinaba el recitado de la serie y la acción de establecer la correspondencia. A partir de la cuarta sesión, estos errores disminuyeron notablemente.

Al igual que sus compañeros de estudio, el sujeto 3 empezó a mostrar modificaciones sobre sus estrategias espontáneas, manteniendo un porcentaje de aciertos estable sobre la estrategia CT. Estos resultados dieron lugar a que en la quinta sesión se empezara a trabajar con el sujeto la estrategia SM en el nivel concreto. En los dos primeros problemas de esta sesión el sujeto realizaba la acción de tapar un sumando, pero añadía el mismo sumando dando como solución el doble de este. En el tercer problema de esta sesión el sujeto mostró por primera vez de forma espontánea la estrategia SM en el nivel concreto (ver transcripción del momento de manifestación de la estrategia en la figura 2).

Durante estas sesiones el alumno se mostró entusiasmado al resolver los problemas de manera correcta, e incrementó considerablemente su concentración. Tanto durante la quinta como en la sexta sesión el sujeto manifestó de forma espontánea la nueva estrategia de forma correcta. Debido a esto se decidió en la séptima sesión introducir la estrategia SM en el nivel semi- abstracto. Sin embargo, aunque el estudiante se encontraba motivado, en diversas ocasiones se olvidaba del sumando no representado en material.

En la octava sesión siguió mostrando estos errores y confusiones por lo que se decidió retomar la instrucción de SM en el nivel semi-abstracto. De esta forma, el alumno resolvía primero los problemas mediante la estrategia SM en un nivel concreto y tras la instrucción los repetía con la misma estrategia, pero modificando el nivel de abstracción pasando de un nivel concreto a un nivel

semi-abstracto. Es a partir de esta sesión donde se empiezan introducir los problemas de dos etapas, pues el sujeto 3 cumple requisitos del apartado 4, sección 4.4 “*procedimientos*”. En los problemas de dos etapas el sujeto 3 mostró la estrategia CT en nivel concreto, aunque la resolución del problema no fue correcta.

Los dos primeros problemas de la última sesión se resolvieron igual que los de la sesión anterior. Sin embargo, en el problema 3 el alumno mostró la estrategia SM en nivel semi-abstracto, aunque de manera no exitosa por sí solo, que mantuvo durante el resto de los problemas de la sesión. Además, los problemas de varias etapas de esta sesión el sujeto 3 los resolvió mediante la estrategia SM en un primer lugar de manera errónea, en el primer problema se olvidó de un sumando, mientras que el segundo lo resolvió mediante SM en nivel concreto. Ambos problemas los resolvió de nuevo tras la intervención mostrando en ambos la estrategia SM en nivel semi-abstracto de forma exitosa.

En relación con las estrategias incorrectas manifestadas por el sujeto 3 a lo largo de toda la experiencia, se identificaron con más frecuencia la de *adivinar* seguida por la de *número dado*.

5.3 Mantenimiento

Tanto en la línea de base, como en la instrucción y en el postest los triples de números utilizados fueron los anteriormente citados en el apartado de “*método*”.

- Sujeto 1

Los resultados del sujeto 1 aluden a que el estudiante es capaz de mantener la estrategia SM en un nivel concreto a lo largo del tiempo. La estrategia SP se ve representada en un 16’6% mientras que la estrategia SM abarca un 83%. Al igual que en la línea de base, el estudiante muestra un gran porcentaje de soluciones correctas, 91’6%.

- Sujeto 2

El sujeto 2 pareció mantener la estrategia SM a lo largo del tiempo, sus resultados fueron los siguientes: un 16'6% de las respuestas fueron mediante la utilización de estrategias SP, mientras que un 83'3% se corresponde con SP mientras que un 83'3% se corresponden con SM. A diferencia de la línea de base, la sujeto 2 mejoró en el postest con relación al número de resoluciones correctas 58'3%.

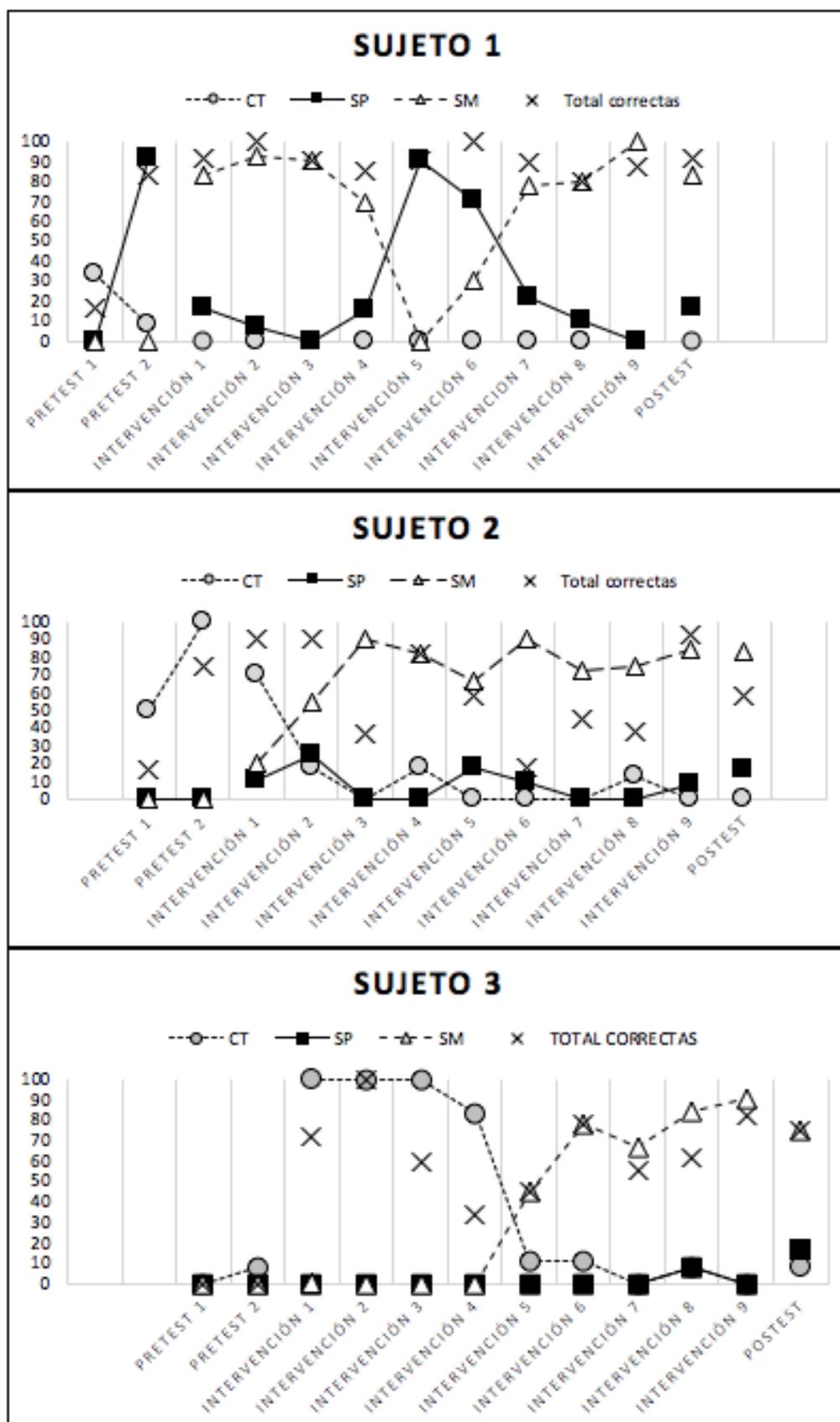
- Sujeto 3

El sujeto 3 mejoró significativamente en sus resultados frente a su línea de base. Los resultados aluden a que el estudiante es capaz de manifestar la estrategia SM en el nivel concreto en un 75%, además este mismo porcentaje se corresponde con el total de resoluciones correctas que realizó el estudiante, cabe decir que la mayoría de los errores fueron debidos a una mala representación de los sumandos dando lugar a estos resultados. Es importante también decir que el estudiante se mostraba motivado a la hora de realizar los problemas y eso se vio manifestado sobretodo en las resoluciones de problemas con sumas de números pequeños.

5.4 Gráfico final

A continuación, se muestra un gráfico (ver figura 3) donde muestra el resultado final de esta investigación. En él se puede ver cómo han ido avanzando los sujetos a lo largo de las sesiones y como hacen referencia a lo anteriormente citado sobre su respuesta ante la línea de base, la instrucción de enseñanza y el postest.

Figura 3. Gráfico final de los sujetos en relación con las estrategias manifestadas y el porcentaje de acierto.



A continuación, se presentan los porcentajes de estrategias utilizadas por los tres sujetos según su nivel de abstracción a lo largo de toda la investigación (ver tabla 3).

Tabla 3: Frecuencia de estrategias de SM en términos de los niveles de abstracción en la representación de los sumandos.

	Nivel concreto	Nivel abstracto	semi-abstracto	Nivel abstracto
Sujeto 1	31/71 (47,9 %)	26/71 (36,6%)	11/71 (15,5%)	(11)
Sujeto 2	8/72 (11,1%)	37/72 (51,4%)	27/72 (37,5%)	
Sujeto 3	29/47 (61,7%)	18/47 (38,3%)	0%	

Por otro lado, se identificaron las siguientes estrategias incorrectas en cada sujeto a lo largo de la investigación.

Tabla 4: Frecuencia de estrategias erróneas a lo largo de toda la investigación según cada sujeto.

	Olvidar un sumando	Adivinar	Estimar	Número dado	Operación incorrecta
Sujeto 1	2/7 (28,6%)	1/7 (14,3%)	1/7 (14,3%)	2/7 (28,6%)	1/7 (14,3%)
Sujeto 2	4/8 (50%)	2/8 (25%)	1/8 (12,5%)	1/8(12,5%)	(0%)
Sujeto 3	1/27 (3,7%)	14/27(51,9%)	1/27(3,7%)	11/27(40,7%)	(0%)

6. Discusión

En este apartado se recogen todos los datos aportados por los tres estudiantes participantes en el estudio, discutiendo los aspectos comunes y no comunes identificados.

Dentro de los aspectos comunes se puede decir que los tres sujetos han llegado a comprender y manifestar de forma espontánea la estrategia SM en los problemas de una única etapa. Además, los tres sujetos al empezar a resolver los problemas de dos etapas utilizaron estrategias más básicas, recurriendo a la estrategia CT y/o SP, al mismo modo que su porcentaje de aciertos disminuyó. Además, cabe destacar la importancia que ha tenido en todo momento la creación de la secuencia principal y cómo ha ido variando pues el aporte visual les ha sido a los tres sujetos de mucha ayuda al igual que la posibilidad de representar los sumandos con material manipulativo.

Los tres sujetos han manifestado la estrategia SM en distintos niveles de abstracción, como se aprecia en la *tabla 3*. Por ejemplo, el sujeto 1 alcanzó un nivel abstracto con éxito en un 15'5% del total de los problemas. Por otro lado, aunque la sujeto 2 quiso resolver los problemas sin material en un nivel abstracto, al hacerlo disminuyó considerablemente su porcentaje de aciertos. Finalmente, las estrategias SM del sujeto 3 fueron predominantemente de nivel concreto, sin manifestarla en ninguna ocasión en nivel abstracto.

Por otro lado, el desempeño de los estudiantes difiere además en que el sujeto 3 no llegó a trasladar la estrategia sumar desde el mayor a los problemas de dos etapas, y tuvo dificultades para diferenciar entre problemas de suma y resta, a diferencia de sus otros dos compañeros.

7. Conclusión

A continuación, se responden las preguntas de investigación presentadas en el apartado 4.

En relación con la primera pregunta de investigación los sujetos mostraron los siguientes resultados en la línea de base: el sujeto 1 mostró la estrategia contar desde el primero. A diferencia de él, el sujeto 2 mostró únicamente la estrategia de contar todo, mientras que el sujeto 3 mostró estrategias incorrectas. Esto coincide con otros trabajos con alumnos con dificultades en matemáticas, que afirman que estos muestran con frecuencia estrategias espontáneas poco avanzadas en la resolución de operaciones con suma (Siegler, 2006).

En relación con la segunda pregunta sobre cómo ayuda la instrucción a la adquisición de estrategias más avanzadas, se ha mostrado una relación funcional entre la instrucción llevada a cabo y la adquisición de la estrategia sumar desde el mayor (SM) en los tres sujetos del estudio. Esta instrucción, apoyada en material manipulativo y secuencias visuales y secuenciada en niveles de abstracción, se ha mostrado beneficiosa para los tres participantes del estudio.

Por último, los tres sujetos han mostrado mantener la estrategia sumar desde el mayor en el tiempo, en distintos niveles de abstracción al cabo de 4 semanas tras finalizar la instrucción.

Estos resultados arrojan información sobre el desarrollo de las estrategias en alumnos con dificultades y en particular en alumnado con TEA, dando lugar a posibles pautas y secuencias que les ayuden en el aprendizaje de estos y otros aspectos matemáticos posteriores.

8. Bibliografía

Bermejo, V. (2005). Microgénesis y cambio cognitivo: adquisición del cardinal numérico. *Psicothema*, 17 (4). pp. 559-562.

Bermejo, V. y Rodríguez, P (1991). La operación de sumar: el caso de los problemas verbales. *Suma. Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* 8, 35-40.

Caballero, S. (2005) *Un estudio transversal y longitudinal sobre los conocimientos informales de las operaciones aritméticas básicas en niños de educación infantil*. Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid, Madrid.

Carpenter, T and Moser, J. (1984). Acquisition of Addition and Subtraction Concepts in Grades One through Three. *Journal for Research in Mathematics Education*, 5 (3), 179-202.

Cookson, C., and Moser, J.M. (1980) *Coordinated study individual interview procedures* (Working Paper No. 290). Madison: Wisconsin Research and Development Center for Individualized Schooling.

Geary, D. C. (2013). Learning disabilities in mathematics: Recent advances. In H. L. Swanson, K. Harris, & S. Graham (Eds.), *Handbook of learning disabilities* (2nd ed., pp. 239–255). New York, NY: Guilford Press.

Gelman, R y Gallistel, C.R. (1978). *The child's understanding of number* Cambridge, MA: Harvard Press.

Ginsburg, H. y Baroody (2007). *Tema-3. Test de Competencia Matemática Básica manual*. Madrid: TEA Ediciones.

Escudero, N., Dopico, C., Enesco, I., Lago, M.O. y Rodríguez (2009) ¿Hay que decir todos los números cuando cuentas? Un estudio sobre la habilidad de contar en niños de 3 a 6 años. *INFAD Revista de Psicología*, 1 (1), 77-86.

Montague, M. (2007). Self-regulation and mathematics instruction. *Learning Disabilities Research and Instruction*, 22(1), 75–83.

Ortiz Padilla, M. E. (2005) Competencia matemática en niños en edad preescolar. *Psicogente*, 1 (22), 390-406. Colombia.

Real Academia Española (2018) Diccionario de la lengua española 23.

Ramírez, M. (2015) *Desarrollo de conocimientos matemáticos informales a través de resolución de problemas aritméticos en primer curso de Educación Primaria*. Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid, Madrid

Rodríguez, P., Lago, M., Caballero, S., Dopico, C., Jiménez, L., y Solbes, I. (2008). El desarrollo de las estrategias infantiles. Un estudio sobre el razonamiento aditivo y multiplicativo. *Anales de Psicología*, 24 (2), 240-2

Siegler, R. (1988). Individual differences in strategy choices: Good students, not-so-good students, and perfectionists. *Child Development*, 59, 833-851.

Siegler, R. S. (2002). Microgenetic studies of self-explanations. In N. Granott & J. Parziale (Eds.), *Microdevelopment: Transition processes in development and learning* (pp. 31–58). New York, NY: Cambridge University Press

Siegler, R. S. (2006). Microgenetic analyses of learning. En W. Damon & R. M. Lerner (Series Eds.), D. Kuhn & R. S. Siegler (Vol. Eds.), *Handbook of child psychology: Vol. 2. Cognition, perception, and language* (6th ed., pp. 464–510). Hoboken, NJ: John Wiley.

Zhang, D., Xin, Y. P., & Si, L. (2011). Transition from intuitive to advanced strategies in multiplicative reasoning for students with math difficulties. *The Journal of Special Education*, 47(1), 5.

9. Anexos

Anexo I Rúbrica para registrar las estrategias manifestadas y sus aciertos a lo largo de toda la investigación, tanto en la fase de línea de base, de instrucción y de mantenimiento.

Sujeto, fecha											
ESTRATEGIA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Representar todo y contar todo (representa los dos sumandos y cuenta todo) Desde sumando mayor											
Representar todo y contar desde el menor/mediano											
Representar todo y contar todo desde sumando mayor (representa todos los sumandos comenzando con el mayor y cuenta todo)											
Representar un solo sumando y contar desde el primer sumando											
Representar un solo sumando (o dos en varias etapas) y contar desde el sumando mayor.											
Contar todo sin objetos											
Contar sin representación desde el primer sumando											
Contar sin representación desde el mayor											
Número dado											
Olvidar un sumando											
Operación incorrecta											

X: indica que la estrategia se ha manifestado de forma **exitosa** al resolver esa configuración

X: indica que la estrategia se ha manifestado de forma **exitosa** al resolver esa configuración, la 2ª vez

X: indica que la estrategia se ha manifestado de forma **errónea** al resolver esa configuración