

ANALISIS DE FLUCTUACIONES EN
REACTORES NUCLEARES: MODELOS
NO LINEALES Y NO MARKOVIANOS

Por Miguel Angel Rodríguez Díaz

UNIVERSIDAD DE SANTIANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FISICA TEORICA

ANALISIS DE LAS FLUCTUACIONES EN REACTORES
NUCLEARES: MODELOS NO LINEALES Y NO MARKO
VIANOS.

MEMORIA PRESENTADA POR
MIGUEL RODRIGUEZ DIAZ
PARA OPTAR AL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS FI-
SICAS.

LUIS PESQUERA GONZALEZ, PROFESOR ADJUNTO CONTRATADO DE LA E.T.S.
DE INGENIEROS DE CAMINOS CAIALES Y PUERTOS DE LA UNIVERSIDAD DE
SANTANDER

CERTIFICA :

Que la presente memoria titulada "ANALISIS DE FLUCTUACIONES EN REACTORES NUCLEARES: MODELOS NO LINEALES Y NO MARKOVIANOS" recoge la investigacion realizada, bajo mi direcci3n, por el licenciado Miguel Rodr3guez D3az y constituye su tesis doctoral. La investigaci3n se inici3 en la Universidad de Santander bajo la direcci3n del Prof. Emilio Santos y se ha concluido bajo mi direcci3n.

Considero que este trabajo tiene contribuciones cient3ficas interesantes, que justifican su presentaci3n para optar al grado de Doctor en Ciencias F3sicas.

Santander, 16 mayo 1983



Deseo expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que han hecho posible esta tesis:

A su director, Luis Pesquera, por su constante interés e inestimable ayuda.

Al Prof. Emilio Santos por su estímulo y aliento; a mis compañeros de Departamento y, en particular, a Angel Mañanes y Teresa Barriuso por aliviarme desinteresadamente de actividades docentes en los momentos más necesarios.

Mención especial merecen los profesores San Miguel y Sancho, quienes, por intercambio epistolar y en numerosos encuentros personales han colaborado muy estrechamente en la realización de parte de este trabajo.

Agradezco también la paciente labor mecanográfica de nuestra secretaria María del Barrio.

CAPITULO I: INTRODUCCION AL ANALISIS DE FLUCTUACIONES EN
REACTORES NUCLEARES

I.1.- Introducción	5
I.2.- Evolución del análisis de ruido en reactores	6
I.3.- Aplicación de las técnicas de ruidos en reactores nucleares	7
I.4.- Problemas teóricos. Planteamiento de la tesis	9

CAPITULO II: ORIGEN DE LOS RUIDOS Y SU MODELACION POR ECUACIONES
ESTOCASTICAS

II.1.- Descripción de las fuentes de ruido por su origen físico ...	15
II.2.- Modelación por ecuaciones estocásticas	19
A.- Acoplamiento débil: reactor a potencia cero	22
B.- Acoplamiento fuerte: reactor a potencia	32

CAPITULO III: FUNDAMENTOS DE LA TEORIA DE FUENTES EQUIVALENTES

III.1.- Concepto de fuente de ruido equivalente	38
III.2.- La aproximación de Langevin en reactores nucleares. Fundamentación de fuentes equivalentes	41
III.3.- Tratamiento simultáneo de ruido interno y externo en reactores nucleares	48
A.- Introducción en un modelo sencillo	49
B.- Reactor puntual sin ruido externo	56
C.- Teoría de fluctuaciones externas e internas en reactores puntuales de potencia cero	60
D.- Estudio con ruidos no blancos	77

CAPITULO IV: ESTUDIO DE MODELOS ESTOCASTICOS NO LINEALES EN REACTO-
RES NUCLEARES

IV.1.- Necesidad del estudio de modelos no lineales en la teoría estocástica de reactores nucleares	85
--	----

IV.2.- Modelos no lineales: efectos de temperatura y escalas de tiempos	86
A.- Acoplamientos de temperatura	87
B.- Intercambio y disipación de energía	91
C.- Evolución neutrónica	92
IV.3.- Estudio de un modelo no lineal con ruido externo blanco	97
A.- Estudio determinista y primeros resultados con ruidos débiles	98
B.- Ecuación de Fokker-Planck y paso a una imagen mecánico- cuántica	107
C.- Estudio detallado del modelo no lineal	111
D.- Análisis de los resultados para el modelo no lineal en reactores nucleares	123
IV.4.- Validez de las aproximaciones de linealización	127
A.- Relaciones entre las distintas linealizaciones	130
IV.5.- Estudio de modelos no lineales con ruidos dicotómicos. Efecto del tiempo de correlación	135

CAPITULO V: ESTUDIO DE MODELOS NO MARKOVIANOS EN REACTORES NUCLEARES

V.1.- Introducción al estudio de modelos no markovianos	148
V.2.- Reactores puntuales sin neutrones retardados	149
A.- Soluciones exactas con ruidos gaussianos de correlación exponencial	150
B.- Ruidos de tipo "vibración" con efectos no Markovianos ...	154
V.3.- Reactores puntuales con inclusión de neutrones retardados ...	163
A.- Revisión de métodos utilizados. Validez de la relación causal	163
B.- Estudio de modelos no Markovianos con técnicas de cumulantes	174
C.- Estudio de modelos no Markovianos con técnicas funciona- les	181

CAPITULO VI: ESTUDIO DE PROPIEDADES DE TIPO ASINTOTICO EN REACTORES

NUCLEARES

VI.1.- Definiciones e introducción de barreras	192
VI.2.- Método de solución por funciones generatrices	197
VI.3.- Modelos de reactores no lineales	206
A.- Generalización de la probabilidad de extinción	
en núcleos no lineales	206
B.- Método de las fracciones continuadas. Aplicaciones a	
reactores	212
<u>Apéndice A.- SOLUCION EXACTA DE UN MODELO ESPACIAL</u>	226
<u>Apéndice B.- EXTRACCION DE INFORMACION POR CONTAJE</u>	231
<u>Apéndice C.- COMPROBACION DE MODELOS POR PROPIEDADES ASINTOTICAS</u> ...	235
CONCLUSIONES	239
PERSPECTIVAS	246
BIBLIOGRAFIA	248

CAPITULO I:

INTRODUCCION AL ANALISIS DE FLUCTUACIONES EN REACTORES NUCLEARES

I.1.- INTRODUCCION

El estudio de las fluctuaciones en reactores nucleares es en la actualidad un tema de gran interés teórico y práctico. Conocido también como análisis del ruido en reactores, dicho estudio incluye procesos de tipo nuclear, térmico, hidrodinámico y estructural. Las fluctuaciones provenientes del carácter probabilístico de estos procesos constituyen una valiosa fuente de información en la evolución dinámica del reactor que, una vez procesada, proporciona mayores posibilidades de control, diagnóstico y seguridad.

La diversidad de procesos que originan las fluctuaciones del reactor obliga a un estudio interdisciplinario que abarca temas tan dispares como el análisis de vibraciones mecánicas y estructurales, fluctuaciones turbulentas de fluidos, efectos de temperatura en secciones eficaces, fluctuaciones en la emisión de rayos gamma de los productos de fisión, producción y transporte de burbujas en fluidos con dos fases ... etc.

Bajo el punto de vista de la extracción de información y su procesamiento, es necesario aplicar técnicas de identificación de señales, series temporales, separación de ruido, etc. Tales técnicas de ruido requieren, a su vez, mayor precisión en la detección de neutrones y radiación en general, así como sensores de vibración y temperatura muy precisos. La investigación tecnológica es pues muy importante para su desarrollo.

Los fundamentos del análisis de las fluctuaciones entran de lleno en la mecánica del no equilibrio y en la teoría de los procesos estocásticos. El campo de estudio de un sistema tan complejo apenas ha sido iniciado. Su tratamiento implica el análisis de procesos no-Markovianos, no lineales y no estacionarios. Este análisis será el objetivo fundamental de la presente tesis.

I.2.- EVOLUCION DEL ANALISIS DE RUIDO EN REACTORES

Son Courant y Wallance los primeros que, en un artículo de 1947, inician el análisis del ruido en reactores. Los primeros trabajos surgen de la aplicación de las mismas técnicas empleadas en los procesos de contaje de fotones (Rossi, Feynman). Posteriormente aparecen técnicas más específicas de reactores: Orndoff (1957), Pal (1958), Moore (1959), Cohn (1960). Estos trabajos se refieren a reactores de potencia cero, en los que el acoplamiento de los fenómenos neutrónicos térmicos e hidrodinámicos es tan débil que sólo se tiene en cuenta la parte neutrónica y, en ella, los procesos son lineales. No es, pues, de extrañar que al ser constatados experimentalmente hayan contribuido al éxito de estas técnicas.

Indudablemente, en la actualidad, el interés se centra en el estudio de reactores de potencia. A pesar de que el primer estudio serio sobre un reactor de potencia (Harris, 1958) queda lejano en el tiempo, es en la década de los setenta donde a través de la experiencia acumulada se perfilan problemas reales y las primeras soluciones. A esta época pertenecen numerosos trabajos de recopilación que básicamente dan por establecida la teoría en reactores de potencia cero: Williams (1974), Kosaly (1973), Seifritz (1971), Saito (1974). Queremos recalcar el gran valor pedagógico de los trabajos de Williams y Saito, ya que sintetizan perfectamente el estado de la teoría hasta la fecha de su publicación.

En los últimos años, y con el nombre de SMORN (1975, 1977, 1982), se vienen celebrando simposiums dedicados exclusivamente al estudio del ruido en reactores nucleares. En ellos puede apreciarse su evolución teórica y experimental y sus perspectivas.

En los últimos simposiums comienza ya a distinguirse entre temas teóricos o analíticos y experimentales. Dentro de los experimentales se diferencia según el origen del ruido: termohidráulico para los reactores de agua en ebullición, vibracional para los de presión.

Existen reactores comerciales que incorporan las técnicas de análisis de ruido entre su sistema de control y detección de fallos. Sin embargo, aún son consideradas técnicas experimentales de desarrollo en reactores pilotos (Ver SMORN (1982)).

I.3.- APLICACIONES DE LAS TECNICAS DE RUIDO EN REACTORES NUCLEARES

El método tradicional de diagnosis efectuado en reactores nucleares supone la introducción de una señal de entrada (normalmente por variaciones en las barras de control) y la observación de la señal de salida (la potencia o número de neutrones). Cuando la señal de entrada es sinusoidal con una frecuencia dada, la salida mantiene la misma frecuencia pero cambia su fase y amplitud. Con la relación de estas dos magnitudes para un amplio rango de frecuencias se tiene la respuesta dinámica lineal del sistema (Kerlin 1974). Un primer uso de las técnicas de ruido consistió en introducir señales pseudoaleatorias para obtener directamente el comportamiento dinámico en una amplia región de frecuencias (Uhrig 1970).

Estas técnicas requieren que el reactor se encuentre en condiciones especiales por lo que únicamente son factibles en las etapas preoperacionales o intermedias.

Actualmente se entiende por análisis de ruido el efectuado con el reactor en funcionamiento. Las señales de entrada en este caso son las propias fluctuaciones internas del reactor debidas al carácter probabilístico de los sucesos que en él intervienen. Estas técnicas presentan un gran atractivo por desarrollarse en condiciones de funcionamiento normal. Por ello, es posible que cuando alcancen el grado de precisión de la diagnosis tradicional, que supone necesariamente la parada del reactor y la introducción de elementos extraños (como fuentes pulsantes, etc ..), las

sustituyan completamente. Por otro lado, existe la posibilidad de una vigilancia continua e incluso la de la predicción de fallos. Puede por tanto jugar un importante papel en la seguridad del reactor. Concretando estos puntos podemos dividir las aplicaciones de estas técnicas en diversas áreas que van adquiriendo día a día su propia personalidad:

a) Cálculo de parámetros cinéticos. Las fluctuaciones neutrónicas, térmicas e hidráulicas, incluso en un estado estacionario, son portadoras de gran información de la cinética del sistema. Con muy poco aprovechamiento de esta información, como pueda ser la observación de valores medios, valores cuadráticos o desviaciones y correlaciones estacionarias, se obtiene ya un gran número de parámetros cinéticos que definen el estado del sistema. En teoría esto es una parte mínima de la información que puede extraerse, pero en la práctica resulta muy difícil conseguir información de, por ejemplo, momentos y correlaciones de orden superior. Recientemente con técnicas de autoregresión y análisis de tiempos (Fukunishi (1977) parece que se ha dado un gran paso en este sentido lográndose el análisis de sistemas dinámicos con memoria y por tanto de muchas variables.

El desarrollo de ordenadores de gran capacidad de análisis puede facilitar el procesado de una insospechada ^{cantidad de} información. No cabe duda que esto constituye un estímulo para el desarrollo de teorías más completas y complejas que tengan en cuenta fenómenos realistas en los que se contemplen la no-linealidad, no-Markovianidad no-estacionaridad y no-Gaussianidad de los procesos ocurrentes.

b) Diagnósis continuada y predicción de fallos. Toda la información puede ser procesada instantáneamente, en intervalos de minutos, proporcionando así un diagnóstico continuo del estado del sistema. Si se dispone de un modelo adecuado, un cambio en los parámetros procesados puede interpretarse como un fallo o un posible fallo, anticipándose de esta forma a

una parada del reactor con el consiguiente ahorro económico y gran margen de seguridad. Actualmente existen estudios realizados en reactores pilotos en los que se han utilizado estos procedimientos e incluso se ha cuantificado la relación ahorro-inversión, siendo ésta muy favorable (Serdula (1975)). Desde un punto de vista teórico es indispensable el disponer de modelos realistas adecuados y, por tanto, bastante complejos. Una mala interpretación en el diagnóstico puede resultar muy perjudicial.

c) Control del reactor. El análisis de las fluctuaciones proporciona una descripción más completa de la estabilidad y de las posibilidades de control del reactor. De hecho, pueden existir estados estables, observados desde un punto de vista determinista que no lo sean desde el estadístico, por ejemplo en el momento de algún orden. Un estado de este tipo no es fácilmente controlable.

Todavía existen otras aplicaciones como pueden ser el estudio de las fluctuaciones en la puesta en marcha del reactor, el cálculo de la probabilidad de extinción, el estudio del efecto de los contadores y ruidos electrónicos asociados ... etc.

I.4.- PROBLEMAS TEORICOS. PLANTEAMIENTO DE LA TESIS

Los problemas teóricos que el análisis del ruido en reactores plantea pueden sintetizarse en:

- Desarrollo de un modelo estadístico idóneo con suficiente base física, que tenga en cuenta las causas de las fluctuaciones. Esto incluye el estudio de las fuentes de ruido y su modelación por teorías estocásticas.

- Reducción de las variables postuladas a las variables observadas con la consiguiente aparición de términos de memoria, es decir, de proce-

sos no Markovianos.

- Resolución de las ecuaciones resultantes (que en general serán no lineales debido a los acoplamientos internos) y extracción de la información en forma, principalmente, de valores medios, cuadráticos y correlaciones.

- Criterios para establecer la validez del modelo y estudio de la estabilidad estadística.

- Investigación en otros tipos de extracción de información como pueden ser probabilidades de accidentes e índices de seguridad.

En la práctica un programa como éste es difícil de llevar a cabo. En su lugar se utilizan hipótesis más o menos plausibles y argumentos de tipo fenomenológico. Se puede esquematizar el estado actual de la teoría en los siguientes puntos:

- El conocimiento y fundamentación de todos los ruidos no es hasta la fecha posible. Si bien existen algunos muy elaborados, normalmente se recurre al empleo de teorías fenomenológicas o simplemente a la hipótesis de ruido blanco.

- Las ecuaciones no lineales y no Markovianas obtenidas son tratadas por métodos de linealización. Con ello se destruye parte de la información de la dinámica del sistema y, por supuesto, no se logra explicar los fenómenos de carácter no lineal. Asimismo la validez de la linealización raramente es analizada.

- Como resultado de estas aproximaciones existen fenómenos que no han sido explicados. Por otra parte la confirmación experimental en reactores de potencia con ruidos intensos es aún muy deficiente (Ackasu 1961)

- En los análisis de ruido en reactores de baja potencia o potencia cero la concordancia entre experimentos y teoría es muy buena.

Algunos autores (Saito 1979A) concluyen diciendo que el desarrollo de la teoría en reactores de potencia está aún en la fase de "infancia".

Dentro de la amplia gama de investigaciones realizadas y futuras hay temas cuyo interés prevalece por su importancia práctica. En cuanto al origen de los ruidos hoy día destacan los producidos por vibraciones en la estructura por ser la principal fuente de ruido en los reactores de agua a presión (Fujita 1982). En los reactores de agua en ebullición dominan los de carácter termohidráulico y de formación de burbujas (Albrecht 1982).

En cuanto a fundamentos existe gran interés en el estudio de modelos no lineales con efecto de temperatura (Sako 1981), el tratamiento de modelos no Markovianos (Saito 1980B, Quabili 1979, Rodríguez 1983A), y en general lograr una mayor posibilidad en la descripción estocástica de modelos con muchas fuentes de ruido (Kishida 1977, Rodríguez 1983B).

Estos temas de fundamentos no están lo suficientemente desarrollados como para originar modelos que coincidan de forma exhaustiva con los resultados experimentales para reactores de potencia. Sin embargo, dichos modelos permiten explicar cualitativamente el comportamiento del reactor. Su estudio es esencial para lograr eliminar la discrepancia existente actualmente entre teoría y experiencia para reactores de potencia (Williams 1982). Este trabajo, cuya estructura detallamos a continuación, ha sido realizado de acuerdo con esta filosofía.

Exceptuando este capítulo introductorio hemos dividido nuestro trabajo en cinco capítulos y tres apéndices. El capítulo segundo constituye una síntesis de los orígenes de los ruidos y su modelación por procesos estocásticos. Los restantes capítulos tratan diversos aspectos del problema central del estudio de las fluctuaciones en el reactor. Los apéndices constituyen aportaciones que hemos creído interesantes pero que requieren un desarrollo posterior.

El capítulo tercero estudia de lleno los fundamentos de la descripción estocástica. Es común distinguir entre ruidos internos y su modelación por ecuaciones maestras y ruidos externos por ecuaciones diferenciales estocásticas. En sistemas con múltiples ruidos, externos e internos, una descripción conjunta plantea problemas de fundamentos. Estos son revisados en el caso de reactores nucleares y se expone una teoría que es capaz de tratar simultáneamente los dos tipos de ruidos.

El capítulo cuarto está dedicado al estudio de modelos no lineales con efecto de temperatura y a la validez de las aproximaciones de linealización. Siendo ésta la técnica habitual de trabajo resulta muy interesante conocer su validez y tratar problemas típicamente no lineales. El modelo no lineal empleado es justificado en base a un estudio de la escala de los tiempos que intervienen en el problema. Las aportaciones más interesantes del capítulo están relacionadas con el tratamiento de ruidos de intensidad apreciable, logrando explicar fenómenos observados en cierto tipo de reactores.

El capítulo quinto analiza modelos no Markovianos. De gran importancia es conocer el efecto de un ruido no blanco en la reactividad sin usar técnicas de linealización. Este es un tema que ha sido recientemente tratado por varios autores (Quabili 1979, Saito 1979B). Demostramos las inconsistencias observadas en sus trabajos, desarrollamos y aplicamos nuevos métodos y analizamos los resultados en un modelo de reactor nuclear que permiten la obtención de los parámetros cinéticos.

En el último capítulo se estudia un tipo de propiedades relacionados con un análisis más detallado de la función de probabilidad. En concreto, en reactores lo interesante es el cálculo de la probabilidad de extinción y el estudio de las fluctuaciones en la puesta en marcha. Generalizamos ambos para el caso de un modelo no lineal e introducimos el análisis de propiedades asintóticas. Los apéndices tratan temas puntuales de proble-

mas espaciales, extracción de información por contaje y comprobación de modelos.

CAPITULO II:

ORIGEN DE LOS RUIDOS Y SU MODELACION POR ECUACIONES ESTOCASTICAS

En este capítulo se describen las principales fuentes de ruido que aparecen en los reactores nucleares haciendo hincapié en su origen físico y su modelización a través de teorías estocásticas. Con ello no pretendemos hacer una recopilación de métodos y modelos, sino una introducción que sirva para exponer de la forma más clara posible los objetivos que persigue la tesis. Para una mayor información de métodos y modelos ver: Williams (1974), Saito (1974, 1979A), Seifritz (1971).

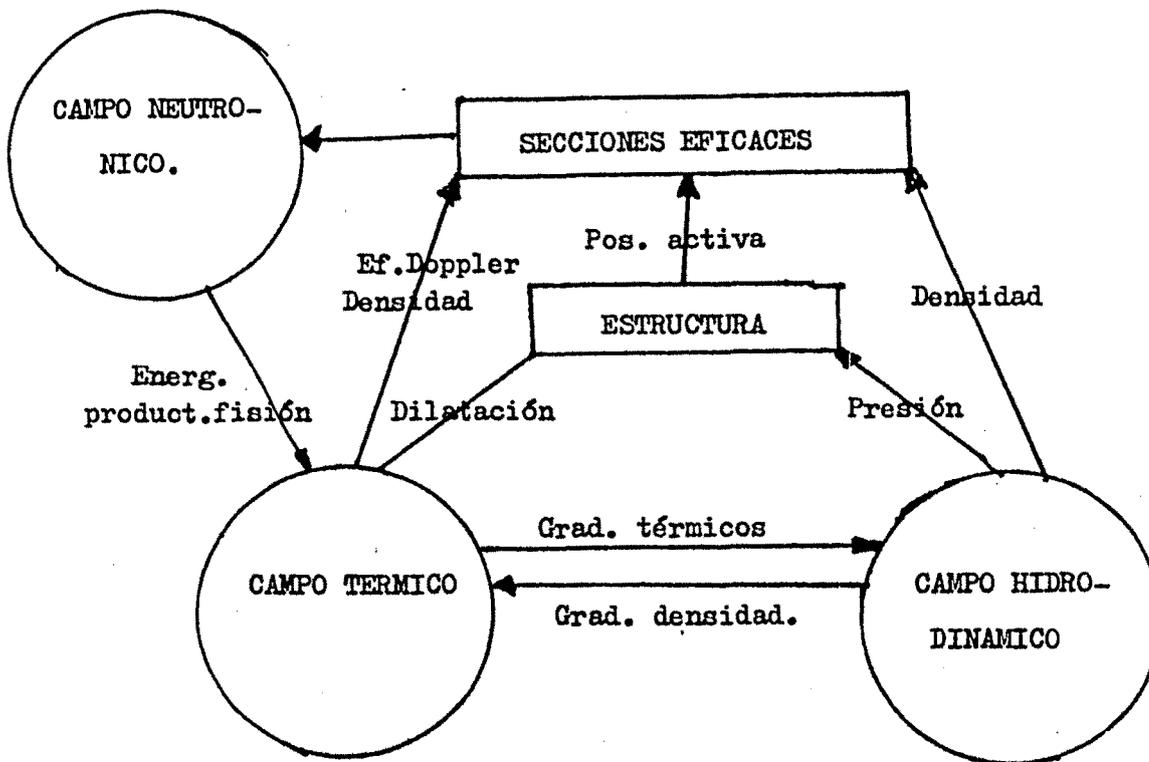
II.1.- DESCRIPCION DE LAS FUENTES DE RUIDO POR SU ORIGEN FISICO

Un reactor nuclear es un sistema abierto que intercambia energía y materia con el exterior. De una manera muy simple puede describirse como compuesto de un soporte material y, asociado y originado por él, de un campo neutrónico, térmico e hidrodinámico. Existirán, pues, fuentes de ruido provenientes de cada uno de estos campos y de sus acoplamientos:

a.- Fuentes de ruido neutrónicas

Existen fluctuaciones intrínsecas o internas que son debidas al carácter probabilístico de los fenómenos nucleares. Entre los más importantes destacan las que se originan por los procesos siguientes:

- Fisión, captura y pérdida de energía de un neutrón que recorre un medio material fluctuante
- Producción de n neutrones rápidos y m_i precursores en una fisión
- Producción de productos de fisión y fotones de varias energías.
- Producción de neutrones por medio de fuentes independientes o espontáneas.



Esquema II.1.- Principales acoplamientos que intervienen en los orígenes de los ruidos en reactores nucleares.

El medio material en el cual se crea el campo neutrónico está sujeto a fluctuaciones de temperatura y densidad creadas a su vez por el campo neutrónico. Existe, pues, un fenómeno de realimentación que en ocasiones puede ser de gran importancia en la cinética del reactor.

b.- Fuentes de ruido térmico

El origen del campo térmico se encuentra en la transmisión de energía de los productos de fisión a los materiales circundantes. Partiendo de este origen, en las barras de combustible, esta energía calorífica se propagará por medio de los mecanismos conocidos de radiación y convección, hasta alcanzar el refrigerante donde se debe considerar que el transporte de energía acompaña al de materia.

En los reactores de agua en ebullición debemos considerar, además, las fuentes de ruido térmicas producidas en la formación de burbujas y su transporte. Señalaremos como las más importantes:

- Fluctuaciones internas de temperatura en el refrigerante y material estructural.
- Transferencia de calor del elemento combustible al refrigerante
- Fluctuaciones de la fuente térmica originadas por los productos de fisión.

Como en el campo neutrónico, se deberá tener presente las fluctuaciones de densidad y composición del material soporte originadas por el campo hidrodinámico y el propio campo térmico a través de su influencia por el campo neutrónico. Nuevamente aparece un fenómeno de Feed-back (fig. II.1).

c.- Fuentes de ruido hidrodinámico

A las fluctuaciones hidrodinámicas propias de considerar un líquido circulando forzadamente por un tubo, se han de añadir los efectos

producidos por la influencia del campo térmico inducido por las variaciones de presión, densidad y la formación de burbujas.

Tenemos, pues, que resaltar:

- Fluctuaciones hidrodinámicas internas.
- Fluctuaciones de presión debidas a la formación de burbujas.
- Fluctuaciones de flujo del refrigerante debido al bombeo.
- Fluctuaciones de presión y densidad debidas al campo térmico.

Nuevamente los acoplamientos juegan un papel importante (fig. II.1).

d) Fuentes de ruido estructurales

Normalmente están asociadas a las vibraciones de elementos estructurales, barras de control y de fuel. Las vibraciones pueden ser espontaneas o producidas por fluctuaciones de presión del líquido refrigerante. Señalaremos:

- Movimientos aleatorios de barras y núcleo.
- Fluctuaciones en la posición ocupada por las zonas activas de elementos de control y fuel debidas a fluctuaciones de presión del refrigerante.
- Fluctuaciones en la estructura de origen sísmico.

Las fluctuaciones originadas por las fluctuaciones de presión pueden realimentarse a través del campo neutrónico y térmico (fig. II.1).

Aparte de estas fuentes de ruido -a, b, c, d-, en el proceso de medida también aparecen ciertas fluctuaciones, generalmente de tipo electrónico (Edelman, 1975) que suelen ser importantes.

Las fuentes de ruido aquí señaladas han sido objeto en los últimos años de multitud de estudios experimentales: SMORN I (1975), SMORN II (1977), SMORN III (1982) realizados en diferentes tipos de

centrales nucleares.

Para llevar a cabo un análisis global de fluctuaciones es interesante disponer de datos referentes a su intensidad, tiempo de relajación y función de correlación. La intensidad, como es de esperar, depende del tipo de reactor: en un reactor de agua a presión dominan las fluctuaciones estructurales, mientras que en los de ebullición lo hacen las hidrodinámicas y el efecto de burbujas. La función de correlación exacta es muy difícil de conocer por lo que se suele hacer hipótesis sencillas tales como suponer que tiene un comportamiento exponencial decreciente en el tiempo. A continuación se da una lista de tiempos de relajación propias de las fuentes más conocidas (Saito, 1979A, Williams, 1974):

- . quemado de combustible: 5 meses
- . envenenamiento de Xe: 10 horas
- . temperatura del moderador: 1 ~ 1000 seg.
- . neutrones retardados: 0,1 ~ 10 seg.
- . temperatura de fuel: 0,1 ~ 10 seg.
- . vibraciones mecánicas: 0,01 ~ 1 seg.
- . realimentación en reactividad de burbujas: 0,01 ~ 1 seg.

II.2.- MODELACION POR ECUACIONES ESTOCASTICAS

Al hablar del aspecto teórico en el primer capítulo ya se ha indicado que el nivel descriptivo adecuado va a ser una fundamentación de tipo estocástico. En efecto, una teoría microscópica consistente debería ser capaz de, partiendo de una descripción microscópica, llegar, tras sucesivas reducciones de variables, a un nivel mesoscópico (teoría de fluctuaciones) que diera cuenta de los experimentos (nivel ma-

ACOPLAMIENTO DEBIL
Reactor de Potencia Cero

Ruido interno

Ec. Maestras tipo Kolmogorov
 ↑
 Th. Fuentes equivalentes
 (Saito 1967)
 ↓
 Ec. de Langevin

{ (2.2) Espacial; Pall (1958), Bell (1965),
Cassell (1969)
 { (2.7) Puntual; Williams (1974), Norelli (1975)
 { (2.3) Espacial; Ackasu (1966)
 { (2.16) Puntual; Saito (1974)

Ruido externo: Ecuaciones diferenciales
estocásticas

{ (2.5) Espacial; Williams (1970), Saito (1979A)
 { (2.11) Puntual; Williams (1971)

ACOPLAMIENTO FUERTE
Reactor de Potencia

Ruido interno

{ (2.17) Ec. de Kolmogorov puntual;
 ↑
 Th. Fuentes equivalentes
 ↓
 { (2.19) Langevin puntual; Greef (1975)

McCrishima (1973); Dalfes (1966)

Ruido externo. Ec. diferenciales estocásticas puntuales; Sei fritz (1970)

ESQUEMA II.2.: PRINCIPALES MODELIZACIONES USADAS EN EL TRATAMIENTO DE FLUCTUACIONES EN REACTORES NUCLEARES

NOTA: Los autores no han sido tomados como originarios de la descripción sino como aquellos que, bajo nuestro criterio, más han desarrollado los modelos correspondientes.

croscópico). En ciertos sistemas mecánicos simples ello es posible (partícula Browniana); en otros sistemas mecánicos e hidrodinámicos más complejos constituye un problema en el que se han obtenido algunos resultados ((Nordholm, 1975), (Mori, 1965)) sobre ello. El problema principal consiste en la dificultad de introducir en este tipo de teorías procesos de creación y destrucción de partículas. El trabajo de Osborn (1966) es considerado como un buen trabajo teórico pero sin posibles implicaciones prácticas. Otro problema importante es el de la reducción de variables. En el caso de la partícula browniana es fácil, puesto que existe una clara división en las escalas de tiempo de los procesos ocurrentes. En reactores nucleares, prácticamente, existen fenómenos ocupando toda la escala de tiempos (Saito 1977) que dificulta extraordinariamente la reducción.

Al igual que en otros campos como puede ser la cinética química, láser, dinámica de poblaciones y procesos biológicos, los problemas de creación y destrucción son abordados desde un nivel mesoscópico (Van Kampen 1976A), Williams, 1974) a través de ecuaciones de Kolmogorov o análogas y/o ecuaciones fenomenológicas de Langevin (descripción estocástica). Siguiendo esta descripción, en el esquema II-2, se presentan los principales tipos de modelos usados para describir las fluctuaciones en un reactor nuclear. En esta sección vamos a desarrollar este esquema que será el punto de partida de nuestro estudio. Para una mejor comprensión hemos creído conveniente hacer las siguientes consideraciones que han inspirado la estructura del esquema:

- Se hace una primera división entre el tratamiento de reactores de potencia cero, en el que los campos no están acoplados, y entre los reactores de potencia en los que los efectos de acoplamiento son importantes. La razón es que los métodos usuales de tratamiento son muy diferentes (Saito, 1974), Kishida (1977).

De gran importancia es distinguir entre ruidos internos y externos. Este es un aspecto que aparece en todos los estudios estocásticos y se debe a que sus fundamentos son distintos (Van Kampen 1976A), (Williams, 1971) (Rodríguez, 1983B).

- El tratamiento del ruido interno usualmente es abordado por un método deductivo (ec. maestras) o fenomenológico (ec. de Langevin). La equivalencia entre ambos es estudiada en reactores nucleares por la teoría de las fuentes equivalentes (Williams, 1974), (Saito, 1979A). Mantenemos en este esquema inicial estas formulaciones que en el próximo capítulo serán abordadas en profundidad.

- En la parte de acoplamiento débil (reactor a potencia cero) hemos creído más preciso mantener las descripciones espaciales y puntuales y su relación mutua, pues informan sobre la importancia de los efectos espaciales. En reactores de potencia no se ha hecho esto por considerar que, si bien existen algunos trabajos importantes (Saito, 1980B), su desarrollo no es completo.

II.2.A.- ACOPLAMIENTO DEBIL: REACTOR A POTENCIA CERO

Un reactor funcionando a baja potencia mantiene un débil acoplamiento entre los campos térmicos, hidrodinámicos y estructurales. Por ello es posible estudiar el campo neutrónico por separado obteniéndose en general muy buenos acuerdos con los experimentos. La teoría de reactores a potencia cero ha alcanzado en la última década un grado de madurez muy grande, y su importancia actual reside en que es el punto de partida de la teoría de reactores de potencia. De hecho, un procedimiento habitual para el estudio de las fuentes de ruido es mantener el reactor a baja potencia y generar externamente el tipo de ruido que se desea estudiar: burbujas mediante inyección de aire (Nomura, 1975);

vibración de elementos estructurales por circulación forzada de refrigerantes (Thie, 1975). Estos son ejemplos claros en los cuales los ruidos se introducen externamente. En el caso de ser ruidos internos pero debilmente acoplados, una aproximación muy común es considerarlos como externos con las mismas propiedades estadísticas que los estudiados experimentalmente. Cuando el acoplamiento es fuerte, principalmente por efecto temperatura, se comprueba experimentalmente que esta aproximación no es válida.

a) Modelización de ruidos internos

El ruido neutrónico interno en un reactor de potencia cero ha sido estudiado bajo diferentes aproximaciones y en modelos muy sofisticados, incluyendo efectos espaciales y de detectores (ver revisión de Seifritz, 1971). Básicamente es el estudio de un sistema Markoviano líneal en el que se tiene en cuenta el transporte de neutrones. Es interesante detenerse en algunos aspectos de estos estudios, pues constituyen la base de los métodos aplicados a modelos más complejos de reactores a potencia. En concreto, el estudio de los efectos espaciales únicamente se encuentra desarrollado en la teoría a potencia cero.

Existen dos formulaciones distintas (esquema II.2); empezaremos por describir brevemente la de las ecuaciones maestras de tipo Kolmogorov con efectos espaciales. Esta formulación tiene un fundamento físico claro, aunque conduce a ecuaciones complicadas. En la versión de Pal (1958) - Bell (1965) - Williams (1974) se trata con una ecuación de Kolmogorov inversa. En la versión de Matthes (1965) es una ecuación de Kolmogorov directa en la que el espacio de las fases se ha subdividido en celdas (Malek - Mansour 1981, en cinética química). Las dos versiones están físicamente justificadas en la hipótesis comprobada de que un neutrón sigue la estadística de Poisson en el intervalo

colisión-colisión y que las probabilidades de emergencia de neutrones y precursores en la fisión viene dada por fórmulas extraídas experimentalmente (fórmula de Diven, 1956).

En un modelo de transporte de neutrones y en la aproximación de un grupo de energías, Bell define $P_N(R, t_f | r, \Omega, t)$ como la probabilidad de encontrar N neutrones en el tiempo t_f y la región R cuando un neutrón ha sido inyectado en r con dirección Ω y un tiempo t . Definiendo la función generadora de probabilidades

$$G(z; r, \Omega, t) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N P_N(R, t_f | r, \Omega, t) \quad (2.1)$$

y aplicando a P_N un balance de probabilidades se llega a la ecuación:

$$-\Omega \nabla G - \frac{\partial G}{\partial t} + \Sigma_r G = \sum_{j=0}^I c_j \left[\frac{1}{4\pi} \int d\Omega' G(z; r, \Omega', t) \right]^j \quad (2.2)$$

que es una ecuación en derivadas parciales no lineal donde Σ_r es la sección eficaz total y c_j la probabilidad de obtener j neutrones por colisión. Williams generaliza para el caso de un sistema más complejo con neutrones retardados y detectores. Esta teoría, supuesta la hipótesis markoviana, es estrictamente exacta (Williams, 1974) de ahí su importancia. Sin embargo, a partir de (2.2) se llega a obtener difícilmente los primeros momentos cuando bajo ciertas aproximaciones la linealización es permitida (Lewins, 1978). Es por esto, por lo que ciertos autores niegan a (2.2) utilidad práctica (Saito, 1979A). En el método fenomenológico de Langevin se postula una fuente de ruido aditiva en las ecuaciones deterministas (Ackasu, 1966):

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = -D \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} + \Sigma_a \phi(x, t) + \lambda(x, t) + S_0 \quad (2.3)$$

En esta ecuación se utiliza un modelo de difusión sencillo en el que D es el coeficiente de difusión y Σ_a la sección eficaz total. El ruido

$\Delta(x,t)$ es por hipótesis blanco con una función de correlación:

$$\langle \Delta(x,t) \Delta(x',t') \rangle = D(x) \delta(x-x') \delta(t-t') \quad (2.4)$$

La ecuación linealizada de (2.2) puede relacionarse con la ecuación de Langevin (2.3) por medio de una correspondencia de fuentes equivalentes (Saito, 1979A). Señalaremos que la ventaja de (2.3) es la gran sencillez que presenta frente a (2.2) y otras formulaciones similares como la anteriormente mencionada de Matthes (1965) y la funcional de Watson (1979). Se puede decir que es la única que permite cálculos de correlaciones y momentos cuadráticos espaciales. Por contra, al estar fundamentada fenomenológicamente su sentido físico es menos claro que en los otros métodos.

b) Modelización de ruidos externos

Todo sistema abierto puede ser perturbado externamente. En el caso de un reactor nuclear, ello se puede hacer de diversas formas: introduciendo o extrayendo absorbentes, induciendo vibraciones en los elementos estructurales, aumentando la velocidad del fluido refrigerante ... etc. Estas perturbaciones, que pueden ser inducidas por el operador cuando tienen las características de un determinado ruido, constituyen el ejemplo más claro de ruido externo. De hecho, en la diagnosis de reactores por técnicas de ruidos, se está induciendo los ruidos test externamente.

En la aproximación de acoplamiento débil, se puede suponer que las fluctuaciones en el refrigerante y en los elementos estructurales actúan como un ruido externo en el campo neutrónico del reactor, cuyas características estadísticas han de obtenerse experimentalmente. De esta forma, se puede modelizar esta situación considerando el efecto de dichas fluctuaciones como inducidas por un ruido externo. En una apro-

ximación de difusión con un grupo de neutrones la ecuación estocástica:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -D(\xi, t) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \Sigma_1(\xi, t) \phi + S(\xi, t) \quad (2.5)$$

representará al sistema una vez que se haya calculado el efecto del ruido externo en los coeficientes de difusión, secciones eficaces y fuentes. Un ejemplo en que esto es inmediato es el considerar como fuente externa la vibración de un elemento de control situado en x_0 . En la aproximación de la difusión, en una dimensión y con un grupo de energía, obtenemos en la aproximación de barra delgada de Galamin (Williams, 1970):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \Sigma_1 \phi - \gamma \delta(x-x_0 - \xi(t)) \phi + S(x) \quad (2.6)$$

donde $\xi(t)$ es el término fluctuante, indicando la amplitud de la vibración.

A diferencia del interno, el ruido externo no necesita fundamentación de ningún tipo; simplemente puede ser interpretado como una perturbación externa dependiente del tiempo y tratar el flujo o la densidad neutrónica como un funcional de dicha perturbación. Como en el caso de ruido espacial, las ecuaciones en derivadas parciales así obtenidas son difícilmente tratables posteriormente. A partir de estas ecuaciones resulta ya complicado el cálculo de valores medios (Williams, 1974), por lo que no se utilizan en la diagnosis ni en el cálculo de parámetros.

Como en el caso del ruido interno, se hace necesaria una reducción a la descripción puntual de estos modelos.

c) Paso a descripciones puntuales. Efectos espaciales de los ruidos

En un análisis completo de valores medios, cuadráticos y correlaciones que tengan en cuenta fenómenos espaciales, únicamente la formulación de Langevin (2.3) proporciona resultados analíticos asequibles. Las demás, presentan problemas debido a su carácter no lineal (2.2) o a tener el ruido en forma multiplicativa (2.5), (2.6). En estos casos se debe recurrir a aproximaciones que presenten el sistema de forma tan sencilla que haga posible un posterior análisis de varianzas y correlaciones; del mismo modo que en el análisis de perturbaciones determinista, tal reducción consiste en eliminar los efectos espaciales pasando a una descripción puntual. En esta reducción es importante distinguir entre ruidos globales, que ocurren por igual en todo el sistema (por ejemplo, los ruidos internos), y ruidos locales, que sólo afectan a una pequeña parte como pueda ser la vibración de una barra (2.6) o el desplazamiento de una burbuja. Debido al distinto carácter que tienen las ecuaciones de Kolmogorov (2.2) y las ecuaciones estocásticas (Langevin (2.3) y de ruido externo (2.5)) consideraremos su aproximación puntual por separado:

c1.- Descripción puntual de las ecuaciones de Kolmogoroff

Actualmente no existe ningún tipo de aproximación que reduzca la ecuación de Pall-Bell-Williams (2.2) a su forma no dependiente del espacio. En ciertas condiciones (Linealización de la ecuación; Lewins, 1978), ello sería posible, pero no en un caso general. Dado el carácter global del ruido interno, es de esperar que su reducción puntual no afecte seriamente al modelo en el caso de sistemas grandes. En la aproximación de reactor cuasi-infinito una modelación puntual es justificable. En la descripción puntual de tipo Kolmogorov se plantea la

hipótesis de que los efectos espaciales no son importantes (ha sido corroborado por Sheff, 1967) y que los procesos nucleares ocurrentes siguen modelos Poissonianos.

Bajo estas hipótesis, teniendo en cuenta neutrones retardados y utilizando un método de balance de probabilidades, se obtiene la ecuación de Kolmogorov puntual (Williams, 1974):

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(N, c_1 \dots c_r, t)}{\partial t} = & \lambda(N+1) P(N+1, c_1 \dots c_r, t) + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_r=0}^{\infty} \\ & p(n, m_1, \dots, m_r) P(N+1-n, c_1-m_1, \dots, c_r-m_r) + \sum_i \lambda_i (c_i+1) P(N-1, c_i+1, t) + \\ & + \Delta V P(N-1, c_1 \dots c_r, t) - [\Delta V + (\lambda + \lambda) N + \sum_{i=1}^r \lambda_i c_i] \cdot P(N, c_1 \dots c_r, t). \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde N es el número de neutrones presentes en el reactor, C_i el número de precursores del grupo i de neutrones retardados y:

λ : Tasa de absorción por neutrón

λ : Tasa de fisión por neutrón

$P(n, m_1, \dots, m_r)$: Probabilidad de producirse n neutrones instantáneos y m_i precursores del grupo i en cada fisión

Δ : Tasa de producción de neutrones por unidad de volumen

V : Volumen del reactor

λ_i : Constante de decaimiento del precursor i

Con las mismas hipótesis existen ecuaciones de este tipo para modelos más complicados en los que se tiene en cuenta el proceso de detección (Norelli (1975)), la producción de radiación gamma (Bärs 1975) y modelos en multiregiones y multigrupos (Salmi 1980). Para nuestros posteriores análisis esta ecuación será punto de partida.

c2.- Descripción puntual a partir de ecuaciones diferenciales estocásticas.

En las ecuaciones de Langevin y de ruido externo, el ruido aparece como un parámetro fluctuante en las ecuaciones deterministas, es decir, una perturbación paramétrica que tendrá unas determinadas propiedades estadísticas. No es, pues, extraño que se puedan emplear las mismas técnicas de reducción espacial-puntual que en los sistemas deterministas. Vamos para ello a seguir el método de Henry (1975) en forma general.

Sea la ecuación de difusión o transporte en forma operacional y una dimensión:

$$\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} = \hat{L} \phi(x,t) + \delta \hat{L}(t) \phi(x,t) + S(x) + \delta S(x,t) \quad (2.8)$$

donde $\hat{L} = \hat{C} - \hat{D}$ representa el operador de evolución determinista que separamos en una parte de creación de partículas y otra de destrucción. $\delta \hat{L}(t)$ es la perturbación que en nuestro caso es un ruido. Supongamos que el sistema determinista es estable y el flujo estacionario es $\phi_0(x)$ y su transpuesto $\phi_0^+(x)$ (función de importancia). Si $N(t)$ es el número total de neutrones presentes en el reactor en el instante t definimos la función de forma $\Psi(x,t)$ por:

$$\begin{aligned} \phi(x,t) &= N(t) \Psi(x,t) \\ \int \phi_0^+(x) \Psi(x,t) dx &= N_0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

siendo N_0 el número de neutrones presentes en el reactor en el sistema determinista estacionario.

Sustituyendo (2.9) en (2.8), y operando obtengo en el primer or-

den de aproximación (respuesta lineal):

$$\frac{d \delta N(t)}{dt} = \delta C(t) \delta N(t) - \delta D(t) \delta N(t) + \delta S(t) \quad (2.10)$$

con $\delta N(t) = N(t) - N_0$; $\delta C(t) = \int \phi_0^+(x) \delta \hat{C} \phi_0(x) dx$; $\delta D(t) = \int \phi_0^+(x) \delta \hat{D} \phi_0(x) dx$;
 $\delta S(t) = \int \phi_0^+(x) \delta S(x,t) \phi_0(x) dx$.

La ecuación (2.10) es una ecuación diferencial estocástica con el ruido en el término $\delta D(t)$ o $\delta S(t)$, que representa la descripción puntual obtenida a partir del modelo espacial. Ahora voy a aplicar esta reducción a la ecuación de Langevin (2.3) donde considero los operadores siguientes:

$$\hat{C} = (\nu_0 - 1) \Sigma_f \quad ; \quad \hat{D} = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Sigma_a$$

siendo ν_0 el número promedio de neutrones por fisión, y descomponiendo la sección eficaz total en una parte de absorción y otra de fisión.

Obtengo:

$$\frac{d \delta N(t)}{dt} = ((\nu_0 - 1) \Sigma_f - \lambda) \delta N(t) + \xi_G(t) \quad (2.11)$$

con

$$\begin{aligned} \lambda &= \int dx \phi_0^+(x) \left(D \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Sigma_a \right) \phi_0(x) \\ \lambda &= \int dx \phi_0^+(x) \Sigma_f \phi_0(x) \\ \xi_G(t) &= \int dx \phi_0^+(x) \delta S(x,t) \phi_0(x) \end{aligned} \quad (2.12)$$

siendo $\xi_G(t)$ un ruido blanco cuya correlación a partir de (2.4) es:

$$\langle \xi_L(t) \xi_L(t') \rangle = \delta(t-t') \left[\int dx \Phi_0^{*2}(x) D(x) \Phi_0^2(x) \right] = D \delta(t-t') \quad (2.13)$$

La ecuación (2.11) con (2.13) se convierte en la ecuación de Langevin del modelo puntual reducido del espacial (2.3). En este caso la reducción es consistente y el carácter global del ruido interno permite ecuaciones puntuales. Analicemos ahora el caso de un ruido de carácter local como el aparecido en (2.6), donde con el mismo significado que en (2.12) obtenemos:

$$\frac{d \delta N(t)}{dt} = (\nu_0 - 1) \lambda - \lambda \delta N(t) + \xi_L(t) \delta N(t) \quad (2.14)$$

donde ahora $\xi_L(t) = -\gamma \Phi_0^+(x_0 - \xi(t)) \Phi_0(x_0 - \xi(t)) \approx$

$$\approx -\gamma \Phi_0^+(x_0) \Phi_0(x_0) + \gamma \xi(t) \left[\Phi_0^+(x_0) \frac{\partial}{\partial x} \Phi_0(x) \right]_{x_0} + \frac{\partial}{\partial x} \Phi_0^+(x) \Big|_{x_0} \Phi_0(x_0) \Big] t \dots \quad (2.15)$$

pudiendo apreciar como un ruido de carácter local depende de su posición, es decir, se conservan efectos espaciales en la reducción puntual. La omisión de estos efectos en trabajos recientes ha sido origen de errores (Antonopoulos (1975)), posteriormente aclarados por Pazsit (1977).

No es difícil generalizar estos resultados con neutrones retardados. En concreto, en el caso de la ecuación de Langevin, se obtendría sin dificultad las ecuaciones puntuales generales (desdoblando $\delta N = N(t) - N_0$):

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{1}{\ell} (\nu_0 - 1 - \beta) \lambda - \lambda N(t) + \sum_i \lambda_i C_i(t) + S + \xi_N(t) \\ \frac{dC_i}{dt} &= \frac{\beta_i \lambda}{\ell} N(t) - \sum_i \lambda_i C_i(t) + \xi_{C_i}(t) \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde como se verá en el Cap. III ξ_{C_i} , ξ_N son unas fuentes de Langevin equivalentes. Su correlación será calculada de forma que reproduz-

ca los mismos valores medios y cuadráticos que a partir de (2.7). Esta cuestión se tratará detenidamente más adelante.

II.2.B.- ACOPLAMIENTO FUERTE: REACTOR DE POTENCIA

En un reactor de potencia el acoplamiento entre los campos hidrodinámicos térmico y neutrónico no puede ser despreciable. En este caso se ha de hallar un modelo que tenga en cuenta las fluctuaciones y los ruidos antes descritos, lo cual representa un problema considerable. El estado actual en la descripción de reactores de potencia aún es pobre; buena prueba de ello es la disparidad encontrada entre los cálculos teóricos y los resultados experimentales (Kosaly, 1973; Saito, 1979A; Ackasu; 1961)

Como se puede ver en el esquema II.2, la modelización de reactores de potencia sigue un desarrollo paralelo a los de potencia cero. En este caso no se van a tener en cuenta efectos espaciales pues no existe todavía una teoría suficientemente comprobada que tenga presente efectos espaciales no lineales, aunque está en vías de desarrollo (Valkó, 1977; Kosaly, 1977; para reactores de agua en ebullición), (Saito, 1980B; teoría general por métodos funcionales). Actualmente, el método más utilizado es el de la aproximación puntual y es en la que nosotros vamos a trabajar.

a) Modelización de ruidos internos

Al igual que en la teoría de potencia cero, dos tipos de métodos son los empleados en la descripción de ruido en reactores de potencia. El método de ecuaciones tipo de Kolmogorov supone ahora que el sistema puede estar bien descrito por un conjunto de variables discretas y aplicarse una ecuación de balance de probabilidades (lump-model). Existen modelos de este tipo aplicados a reactores de agua en ebullición en los que incluso se discretiza la velocidad del refrigerante (Matthey, 1979).

Es evidente que ello supone aproximaciones muy fuertes que no pueden estar avaladas por los experimentos. Un modelo más factible, y el más usual, es suponer que el acoplamiento más fuerte es el de temperatura y los otros ruidos (vibraciones, hidrodinámicos) son considerados como externos con propiedades estadísticas (momentos y correlaciones) hallados experimentalmente. Entonces el acoplo neutrónico-térmico es ahora estimado como interno y todo lo demás externo. La descripción por ecuaciones maestras de un sistema como éste se consigue utilizando las variables discretas N número de neutrones, C_i número de precursores de grupo i de neutrones retardados, E_F la energía depositada en el fuel y E_C la energía depositada en el refrigerante. La unidad discreta de energía es tomada como la energía útil producida en una fisión $q \approx 200$ MeV. Los procesos microscópicos ocurrentes son ahora, además de los propios del campo neutrónico (2.7), los siguientes:

- Fisión. Con probabilidad $\lambda P(n, c_1, \dots, c_r)$ de producción de n neutrones, c_i precursores y una unidad de energía en el fuel ..
- Transferencia de calor con $\beta(E_C - n E_F)$ como probabilidad de transferencia de una unidad de energía del fuel al refrigerante
- Pérdida de calor. Con una probabilidad $\lambda_r(E_C - Y_3^{in})$ de pérdida de una unidad de energía en el proceso de refrigeración

β , ν y λ_r son los correspondientes coeficientes de transferencia de calor y Y_3^{in} es la energía en unidades discretas del refrigerante en el momento de entrada al reactor. La ecuación de balance de probabilidades es en este caso:

$$\frac{d}{dt} P(N, c_i, E_F, E_C) = \nu P(N-1, c_i, E_F, E_C) + \lambda(N+1) P(N+1, c_i, E_F, E_C) +$$

$$+ \lambda \sum_i (N-i-1) p(i, m_i - m_i) P(N-1-i, c_i - m_i, E_F-1, E_C) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_i \lambda_i (c_i + 1) P(N-1, c_i, c_{i+1}, \dots, c_I, E_F, E_C) + \\
 & + h ((E_C - 1) - \nu (E_F + 1)) P(N, E_F + 1, E_C - 1) + \\
 & + \lambda_r (E_C + 1 - \gamma_3^{in}) P(N, c_i, E_F + 1, E_C - 1) - \\
 & - (\nu V + \lambda N + \mathcal{L} (\nu - 1) N + \sum_i \lambda_i c_i + h (E_C - \nu E_F) + \\
 & + \lambda_r (E_C - \gamma_3^{in})) P(N, c_i, E_F, E_C)
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

El acoplamiento de temperatura es tomado a través de los coeficientes de absorción y fisión de forma lineal (en primera aproximación):

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \lambda_0 - \alpha_1 \Delta u_c - \delta_1 \Delta u_f \\
 \mathcal{L} &= \lambda_0 - \alpha_2 \Delta u_c - \delta_2 \Delta u_f
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

En ciertos casos este acoplamiento es conocido en detalle y puede utilizarse expresiones más correctas. Un ejemplo de ello será visto en el capítulo IV en el que se utilizará la expresión del factor de multiplicación en función de la temperatura debido al efecto Doppler en la región de absorción resonante.

La descripción de Langevin de un sistema como el anterior supone tomar las ecuaciones deterministas del mismo y añadir unas fuentes de ruido equivalentes aditivas y blancas: (Greef 1975)

$$\begin{aligned}
 \frac{dN}{dt} &= (\nu V - \mathcal{L} - \lambda) N + \sum_i \lambda_i c_i + S + \xi_N \\
 \frac{dc_i}{dt} &= \mathcal{L} \beta_i N - \lambda_i c_i + \xi_{c_i} \\
 \frac{dE_F}{dt} &= h (E_C - \nu E_F) + \mathcal{L} N + \xi_{E_F}
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\frac{dE_c}{dt} = -\eta(E_c - n E_F) - \lambda_r(E_c + 1 - \gamma_1^{in}) + \xi_{E_c}$$

donde $\langle f_i(t) f_j(t') \rangle = 2 D_{ij} \delta(t-t')$, y D_{ij} elegido de tal forma que reproduce los primeros momentos de su ecuación maestra equivalente (2.17) (Fórmula de Schottky). No nos vamos a detener aquí en analizar la equivalencia de ambos métodos pues será tratada en el capítulo siguiente. Es interesante hacer notar que ahora las ecuaciones (2.17) y (2.19) son no lineales y que ello implica que en el cálculo de momentos y correlaciones no vamos a obtener, a diferencia del caso lineal, ecuaciones cerradas sino que se obtiene una jerarquía de ecuaciones en función de momentos superiores. El único tratamiento hasta ahora utilizado ha sido la linealización de dichas ecuaciones (Dalfes (1966), Saito (1979A), Williams (1974)). En el capítulo IV se estudiarán modelos no lineales sin usar estas técnicas de linealización.

b) Modelización de ruidos externos

No presenta diferencia alguna con el caso de potencia cero. Un ruido externo se introduce en las ecuaciones deterministas como un parámetro fluctuante. Así, por ejemplo, es muy común suponer que la temperatura incidente del refrigerante $\propto \gamma_1^{in}$ es un parámetro fluctuante de tipo externo; luego actuará como un ruido externo en la ecuación (2.19). Lo mismo puede ocurrir con los coeficientes de transferencia de calor etc... Esta forma de introducir los ruidos es a veces hecha a priori y por razones puramente experimentales. En la actualidad el grupo Japonés encabezado por Saito se ocupa de listar y clasificar este tipo de ruidos en los distintos reactores nucleares de potencia.

Desde un punto de vista teórico y muy general, es forzoso distinguir entre ruidos de carácter global y espacial. Estos últimos provienen, como se ha visto en un ejemplo anterior, de considerar la descripción espacial y hacer su reducción puntual, siendo el más importante de los estudiados hasta ahora el de la vibración de los componentes (2.6).

Desde un punto de vista funcional es importante distinguir: ruidos provenientes de algún tipo de oscilación, cuya función de correlación tendrá la forma:

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = D_{\xi} \cos \omega_0(t-t') \cdot e^{-|t-t'|/t_c} \quad (2.20 a)$$

con un tiempo propio de oscilación $\frac{2\pi}{\omega_0}$ y otro de relajación t_c ; y ruidos no oscilatorios, que en buena aproximación pueden ser representados por un ruido de Orstein Uhlenbeck (Gaussiano de color)

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = D_{\xi} e^{-|t-t'|/t_c} \quad (2.20b)$$

siendo t_c el tiempo de correlación propio del ruido.

En ambos casos y en una primera aproximación se suele utilizar un ruido dicotómico para estudiar propiedades cualitativas del sistema (cap. IV). Estudiaremos también los ruidos de tipo vibración y Orstein-Uhlenbeck en el Cap. V.

CAPITULO III:

FUNDAMENTOS DE LA TEORIA DE FUENTES EQUIVALENTES

El uso de fuentes de ruido equivalentes aparece en reactores nucleares debido a la necesidad de tratar simultáneamente varias fuentes de ruido de diferentes orígenes. Aunque prácticamente desde el comienzo de la teoría han venido utilizándose, son Williams (1974) y Saito (1974) quienes de una forma más sistemática analizan y clarifican su uso. Bajo nuestro punto de vista existen, incluso en trabajos recientes (Kishida, 1977), graves errores en su aplicación y una excesiva utilización sin suficiente justificación teórica. En el presente capítulo tratamos de estudiar los fundamentos y validez del uso de estas fuentes de ruido equivalentes. Como un resultado importante exponemos en el tercer apartado una teoría que trata simultáneamente ruidos de distinto origen sin necesidad de fuentes equivalentes (Rodríguez 1983B, 1983D). Además de presentar una alternativa atractiva al problema puede servir para informar sobre el grado de aproximación de las fuentes equivalentes.

III.1.- CONCEPTO DE FUENTE DE RUIDO EQUIVALENTE

En un contexto amplio una fuente de ruido equivalente es aquella que sustituye a una fuente de ruido real, obteniéndose una descripción aproximada del problema. Tal sustitución viene normalmente dada por la falta de conocimiento del mecanismo de un ruido determinado o por la necesidad de reducir el problema real a uno que sea tratable. En concreto podemos clasificar el uso de fuentes equivalentes en los siguientes tipos:

a) Se conoce el origen del ruido y sus propiedades estadísticas, pero éste se encuentra formando parte de las ecuaciones cinéticas en forma complicada de forma que se hace imposible un análisis posterior. Puede ser el caso de encontrarse el ruido en forma multiplicativa y ser sustituido por otro aditivo (Williams 1974). Trataremos este caso en el capítulo siguiente pues pensamos que, si no se cambia la naturaleza del ruido, este tipo de aproximación es mejor considerarla como una linealización. Más

adelante se discutirá los errores de Kishida en el tratamiento de esto como una fuente equivalente.

b) No se conoce el origen físico de un ruido que puede ser interno pero, sin embargo, se tienen datos experimentales del mismo y se puede considerar por medio de una fuente equivalente de ruido externa. Esta aproximación es muy utilizada en reactores nucleares debido a la escasez de estudios del origen de ciertos ruidos complejos. Su validez vendrá dada principalmente cuando el acoplamiento con el resto de los ruidos es débil y la hipótesis de ruido externo es consistente (Saito, 1979A). La forma de abordar este tipo de problemas con mayor fundamento es, lógicamente, investigar la naturaleza y mecanismo del proceso en cuestión. Actualmente se sigue utilizando este método pues con él se obtienen muy buenos resultados prácticos y simultáneamente se ha conseguido explicar algún fenómeno poco conocido sobre todo en el aspecto de formación de burbujas e intercambios de calor por ser las principales fuentes de ruido en los reactores de agua en ebullición (Seitfritz, 1970, SMORN 1982).

c) En un reactor nuclear aparecen diferenciados dos tipos de ruido; uno de origen interno cuyo mecanismo es conocido y su formulación matemática resulta posible mediante ecuaciones maestras (Kolmogorov) que describen bien los procesos elementales en un nivel mesoscópico, y otro que puede ser externo o interno pero que a efectos prácticos es considerado como externo (fuente equivalente de tipo (b)), y por tanto aparece como un cierto ruido paramétrico en las ecuaciones cinéticas. Un tratamiento simultáneo coherente implicaría el uso de ecuaciones de Kolmogorov con parámetros fluctuantes. Tales descripciones han sido consideradas en nuestro contexto como intratables por lo que se recurre al uso de fuentes equivalentes que, como ya se ha mencionado en el Cap. II, suponen el considerar a un mismo nivel los ruidos.

En concreto y siguiendo a Saito (1974) vamos a clasificar los métodos seguidos para llevar a cabo una descripción de reactor con múltiples ruidos.

i) La aplicación del concepto de "Sistemas de múltiple entrada" a problemas de ruido en reactores ha sido realizada por Otsuwa (1965), Borgwaldt (1968) y Seifritz (1970). En esencia consiste en suponer fluctuaciones en reactividad externas de diferentes orígenes (fuentes equivalentes de tipo b) que tienen en cuenta ruidos en los coeficientes de temperatura y en la velocidad del fluido y que difícilmente son modelados de otra forma. Las fluctuaciones internas debidas a la parte neutrónica aparecen como un término de fuente equivalente de tipo c). Este tratamiento es fenomenológico.

ii) Otro tipo de métodos consiste en utilizar una descripción de Kolmogorov como la vista en (II.2.B). Cuando las variables son discretas y los procesos están bien definidos como ocurre en los reactores a potencia cero el método está bien fundamentado. Cuando las variables son continuas pero la discretización tiene un cierto sentido físico como ocurre con la energía (2.17), si bien pierde fundamento, se puede decir que la aproximación es aceptable (Saito (1969), Dalfes (1966)). El caso extremo se encuentra en los métodos propuestos por Matthey (1979), y Morishima (1973A, 1973B) quienes tratan como discretos la velocidad del fluido refrigerante y la vibración de las barras de control.

iii) Por último existen métodos en los que se toman las ecuaciones deterministas y se supone que todos los parámetros fluctúan. Como no se tiene información sobre el tipo de ruido, se les supone que son fuentes equivalentes de tipo c) es decir que provienen de una descripción de Kolmogorov equivalente. El resultado es una ecuación de Langevin con fuentes equivalentes dados por la fórmula de Schottky (se verá con detalle a continuación). Este último método ha sido aplicado por Greef (1975),

Williams (1974). En este capítulo vamos a estudiar el fundamento y la relación entre estos métodos, centrando nuestra atención en las fuentes equivalentes de tipo c) puesto que el a) es considerado como una linealización y será tratado en el capítulo IV, y el b) es específico de cada tipo de reactor y ruido concreto y sus fundamentos son de tipo fenomenológico.

Básicamente el problema de fundamentar las fuentes equivalentes de tipo c) consiste en pasar de una descripción de Kolmogorov en variables discretas, a otra de Langevin en variables continuas.

III.2.- LA APROXIMACION DE LANGEVIN EN REACTORES NUCLEARES. FUNDAMENTACION DE FUENTES EQUIVALENTES

Partimos de un modelo general de ecuación maestra cuyas variables $\vec{X} = \{X_1, X_2, X_n\}$ representan el estado del reactor (en nuestro ejemplo del Cap. II, N, C, E_f , E_c) y los sucesos elementales son postulados a través de las probabilidades de transición $W_r(\vec{X})$ (en nuestro ejemplo, fisión, absorción, intercambio de energía). Formalmente es idéntico al modelo a potencia cero (con diferentes variables) pero en nuestro caso las probabilidades de transición no son lineales. Siendo $P(\vec{X}, t)$ la probabilidad de encontrar al sistema en un estado \vec{X} en el tiempo t, obtenemos la ecuación de balance (ec. maestra) siguiente

$$\frac{\partial P(\vec{X}, t)}{\partial t} = \sum_r W_r(\vec{X}-\vec{r}) P(\vec{X}-\vec{r}, t) - \sum_r W_r(\vec{X}) P(\vec{X}, t) \quad (3.1)$$

Definiendo los primeros momentos condicionados por (\vec{r} matriz n x n)

$$\begin{aligned} \vec{c}_1(\vec{X}, t) &= \sum_r \vec{r} W_r(\vec{X}) \\ \vec{c}_2(\vec{X}, t) &= \sum_r \vec{r} \vec{r}^T W_r(\vec{X}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

obtenemos para los primeros momentos (denotamos \vec{X}^T traspuesto):

$$\begin{aligned} \frac{d \langle \vec{x} \rangle}{dt} &= \langle \vec{c}_1(\vec{x}, t) \rangle \\ \frac{d \langle \vec{x}(t) \vec{x}^T(t) \rangle}{dt} &= \langle \vec{c}_1(\vec{x}, t) \vec{x}^T(t) \rangle + \langle \vec{x}(t) \vec{c}_1^T(\vec{x}, t) \rangle + \langle \vec{c}_2(\vec{x}, t) \rangle \\ \frac{d \langle \vec{x}(t) \vec{x}^T(t) \rangle}{dt} &= \langle \vec{c}_1(\vec{x}, t) \vec{x}^T(t) \rangle \end{aligned} \quad (3.3)$$

La extracción de información se va a limitar ahora a estados estacionarios y estables donde tomamos fluctuaciones alrededor del valor medio \vec{x}_0 de tal forma que se puede linealizar alrededor de dicho estado donde aproximadamente se cumple, . Dalfes (1966), en el supuesto de fluctuaciones débiles:

$$\begin{aligned} \langle \vec{c}_1(\vec{x}) \rangle_{st} &\simeq \vec{c}_1(\vec{x}_0) \\ \langle \vec{c}_2(\vec{x}) \rangle_{st} &\simeq \vec{c}_2(\vec{x}_0) \end{aligned} \quad (3.4)$$

linealizando (3.3) se obtiene ($\vec{x}(t) \simeq \vec{x}_0 + \delta \vec{x}(t)$):

$$\begin{aligned} \frac{d \langle \delta \vec{x}(t) \delta \vec{x}^T(t) \rangle}{dt} &= \bar{A} \langle \delta \vec{x} \delta \vec{x}^T \rangle + \langle \delta \vec{x} \delta \vec{x}^T \rangle \bar{A}^T + \vec{c}_2(\vec{x}_0) \\ \frac{d \langle \delta \vec{x}(t) \delta \vec{x}^T(t) \rangle}{dt} &= \bar{A} \langle \delta \vec{x}(t) \delta \vec{x}^T(t) \rangle \end{aligned} \quad (3.5)$$

con $(\bar{A})_{ij} \equiv \left. \frac{\partial c_i(\vec{x})}{\partial x_j} \right|_{\vec{x}_0}$

Queremos ahora obtener una ecuación de Langevin lineal del tipo

$$\frac{d \delta \vec{x}}{dt} = \bar{L} \delta \vec{x} + \bar{S}(t) \quad (3.6)$$

que reproduzca las ecuaciones (3.5). No es difícil ver que tal ecuación va a ser

$$\frac{d\vec{\delta X}}{dt} = \bar{A} \vec{\delta X} + \vec{S}(t) \quad (3.7)$$

siendo $\vec{S}(t)$ la fuente de ruido equivalente, que será considerada blanca y con correlación

$$\langle \vec{S}(t) \vec{S}(t')^T \rangle = \overline{C_2(\vec{X}_0)} \cdot \delta(t'-t) \quad (3.8)$$

De esta forma hemos conseguido una ecuación de Langevin lineal equivalente a la ecuación de Kolmogorov, en el sentido que reproduce aproximadamente los valores medios, cuadráticos y correlaciones.

Cuando la ecuación maestra de partida es lineal, su ecuación de Langevin equivalente reproduce exactamente los primeros momentos y correlaciones (Saito (1974)) debido a que (3.4) es una identidad. Cuando la ecuación no es lineal como ocurre en los reactores de potencia es difícil justificar la aproximación (3.4). El suponer fluctuaciones pequeñas es un argumento cualitativo que es necesario fundamentar. Como se verá posteriormente este problema puede inducir a errores importantes.

Para lograr una buena justificación y posteriormente discutir la validez de los métodos utilizados vamos a valernos del método de desarrollo en tamaño y a usar el concepto de fuente equivalente de Ackasu (1977). Como veremos, pueden existir varias descripciones válidas de fuentes equivalentes para un mismo problema.

El método de desarrollo en tamaño (Kubo 1973) exige la distinción entre variables intensivas y extensivas, de tal forma que, para su aplicación, las variables que definen el sistema han de ser extensivas.

Sean $\vec{X} \equiv (X_1, X_2, \dots, X_r)$ las variables extensivas del sistema de ta-

maño V cuya ecuación maestra que representa sus fluctuaciones internas es:

$$\frac{\partial P(\vec{x}, t)}{\partial t} = \sum_r W_r(\vec{x} - \vec{r}) P(\vec{x} - \vec{r}, t) - \sum_r W_r(\vec{x}) P(\vec{x}, t) \quad (3.9)$$

donde $W_r(\vec{x})$ es la probabilidad de transición que tiene en cuenta los sucesos elementales ocurrentes. Las variables intensivas $\vec{y} = (y_1, \dots, y_r) \equiv \vec{x} \cdot \frac{1}{V}$ tienen unas probabilidades de transición dadas por

$$W_r(\vec{y}) = \frac{1}{V} W_r(\vec{x}) \quad (3.10)$$

y una ecuación maestra:

$$\frac{1}{V} \frac{\partial P(\vec{y}, t)}{\partial t} = \sum_r W_r(\vec{y} - \vec{r}) P(\vec{y} - \vec{r}, t) - \sum_r W_r(\vec{y}) P(\vec{y}, t) \quad (3.11)$$

con $P(\vec{y}, t) = V \cdot P(\vec{x}, t)$

Si definimos los momentos de las probabilidades de transición como

$$\begin{aligned} \vec{c}_1(y, t) &= \sum_r \vec{r} \cdot W_r(\vec{y}) \\ \vec{c}_2(y, t) &= \sum_r \vec{r} \vec{r}^T W_r(\vec{y}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

obtenemos para los momentos de primer, segundo orden y correlaciones las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d \langle y(t) \rangle}{dt} &= \langle \vec{c}_1(y(t), t) \rangle \\ \frac{d \langle y(t) y^T(t) \rangle}{dt} &= \langle \vec{c}_2(y(t), t) y^T(t) \rangle + \langle y(t) \vec{c}_1^T(y(t), t) \rangle + \\ &+ \frac{1}{V} \langle \vec{c}_2(y(t), t) \rangle \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\frac{d}{dt} \langle y(t) y^T(t) \rangle = \langle c_1(y(t), t) y^T(t) \rangle.$$

Ahora estoy interesado en obtener una ecuación de Langevin de la forma

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = c_1[\vec{y}(t), t] + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \vec{S}(t) \quad (3.14)$$

donde en principio la fuente equivalente $\vec{S}(t) \equiv \vec{S}[t, \vec{y}(t)]$ queda sin especificar. El grado de equivalencia que impongamos a continuación definirá las propiedades estadísticas de $\vec{S}(t)$. En efecto, si imponemos las condiciones de equivalencia de que la ecuación de Langevin reproduzca los dos primeros momentos y correlaciones obtenemos para $\vec{S}(t)$ (Ackasu 1977)

$$\begin{aligned} 1) \quad & \langle \vec{S}(t) \rangle = 0 \\ 2) \quad & \langle \vec{S}(t) \vec{y}(t')^T \rangle = 0 \quad \forall t > t' \\ 3) \quad & \langle \vec{S}(t) \vec{y}(t)^T \rangle + \langle \vec{y}(t) \vec{S}(t)^T \rangle = \sqrt{\frac{1}{\nu}} \langle \bar{c}_2(\vec{y}(t), t) \rangle \quad (3.15) \\ 4) \quad & \langle \vec{S}(t) \vec{S}(t')^T \rangle = \langle \bar{c}_2(\vec{y}(t), t) \rangle \delta(t-t') \end{aligned}$$

A partir de estas ecuaciones es fácil comprobar como aparecen las diferentes teorías de fuentes equivalentes, formulaciones de Langevin y ecuaciones de Fokker-Planck asociadas (por sencillez tomemos una dimensión):

a) Si definimos la solución determinista $\psi(t)$ como la correspondiente al límite $\nu \rightarrow \infty$, se obtiene a partir de (3.13)

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = c_1[\psi(t), t] \quad (3.16)$$

y linealizamos en torno a ella, teniendo en cuenta que el orden de las fluctuaciones es $1/\sqrt{\nu}$ (Van Kampen 1961)

$$y(t) = \psi(t) + \sqrt{\frac{1}{V}} \Delta y + o(\frac{1}{V}) \quad (3.17)$$

obtenemos en el orden de aproximación más bajo, sustituyendo en (3.14)

$$\frac{d \Delta y}{dt} = \left. \frac{\partial C_1(y,t)}{\partial t} \right|_{\psi(t)} \Delta y + S(t) \quad (3.18)$$

y con $S(t) = C_2(\psi(t), t)^{\frac{1}{2}} \omega(t)$, siendo $\omega(t)$ un ruido blanco de intensidad unidad se verifica, trivialmente debido a la linealidad de (3.18) que las relaciones 1) - 4) se cumplen. Por lo tanto la ecuación de Langevin con la fuente equivalente

$$S(t) = C_2(\psi(t), t)^{\frac{1}{2}} \omega(t) \quad (3.19)$$

reproducirá en el primer orden más bajo de $\frac{1}{V}$ los primeros momentos y correlaciones. En representación de probabilidades será equivalente a la ecuación no estacionaria de Fokker-Planck (Van Kampen 1981)

$$\frac{\partial P(\Delta y, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \Delta y} \left(\left. \frac{\partial C_1(y,t)}{\partial t} \right|_{\psi(t)} \Delta y P(\Delta y, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \Delta y^2} (C_2(\psi(t), t) P(\Delta y, t)) \right) \quad (3.20)$$

Esta ecuación ha sido utilizada en reactores por Kishida (1977).

b) Hemos visto que el método general usado en reactores linealiza en torno al valor medio. Haciendo la hipótesis de que las fluctuaciones en torno a él son de orden $\frac{1}{\sqrt{V}}$ (Ackasu 1977):

$$y = \langle y(t) \rangle + \sqrt{\frac{1}{V}} \delta y \quad (3.21)$$

y sustituyendo, como antes, en la ecuación de Langevin obtenemos

$$\frac{d \langle y(t) \rangle}{dt} + \sqrt{\frac{1}{V}} \frac{d \delta y}{dt} = C_1[\langle y(t) \rangle] + \left. \frac{\partial C_1(y)}{\partial y} \right|_{\langle y \rangle} \sqrt{\frac{1}{V}} \delta y + \sqrt{\frac{1}{V}} S(t) \quad (3.22)$$

(3.18) y (3.21) vienen a indicar que la diferencia entre el valor determinista y el valor medio es de orden $\frac{1}{V}$

$$\langle y(t) \rangle = \psi(t) + \frac{1}{V} u_0(t) \quad (3.23)$$

de tal forma que

$$C_1[\langle y(t) \rangle] = C_1[\psi(t)] + \frac{1}{V} \left. \frac{\partial C_1(y,t)}{\partial y} \right|_{\psi(t)} u_0(t) \quad (3.24)$$

y sustituido en (3.22) considerando el estado estacionario en el orden más bajo

$$\frac{d \delta y}{dt} = \left. \frac{\partial C_1(y)}{\partial y} \right|_{\langle y \rangle_{st}} \delta y + S(t) \quad (3.25)$$

En ese orden es inmediato ver que con $S(t) = (C_2(\langle y \rangle_{st}))^{\frac{1}{2}} \omega(t)$ se cumplen las relaciones 1) - 4), constituyendo otra representación de Langevin cuya ecuación de Fokker-Planck

$$\frac{\partial P(\delta y, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \delta y} \left[\left. \frac{\partial C_1(y)}{\partial y} \right|_{\langle y \rangle_{st}} \delta y \cdot P(\delta y, t) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \delta y^2} \left[C_2(\langle y \rangle_{st}) P(\delta y, t) \right] \quad (3.26)$$

es la misma que se obtiene por la aproximación de Kramers-Moyal. La ecuación de Langevin (3.25) coincide con la utilizada en reactores por Dalfes y Saito (3.7).

c) Tomando ahora $S(y) \equiv (C_2(y,t))^{\frac{1}{2}} \omega(t)$ y sustituyendo en la ecuación de Langevin se tiene otra representación cuya ecuación para las probabilidades es la ecuación de Fokker-Planck no lineal (Horsthemke 1977)

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} (C_1(y,t) P(y,t)) + \frac{1}{V} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (C_2(y,t) P(y,t)) \quad (3.27)$$

Obviamente ahora las relaciones 1) - 4) no se cumplen, sin embargo Van Kampen (1981) demuestra que en el orden más bajo de $\frac{1}{V}$ son correctas,

constituyendo así otro tipo de fuente equivalente. En reactores nucleares este tipo de ecuaciones no ha sido usado. Para nosotros será de utilidad más adelante.

A partir de estos resultados se pueden sacar conclusiones muy importantes. La primera es que cuando las variables que definen el sistema son extensivas las ecuaciones de Langevin (3.7) ó (3.25) son correctas en el sentido que reproducen momentos y correlaciones en el primer orden de aproximación de $1/v$. La formulación de Dalfes y Saito y la de expansión de tamaño (Kishida 1977) coinciden. Pero en los métodos empleados en reactores no siempre las variables son extensivas; por ejemplo, la velocidad del refrigerante y la vibración de una barra no lo son y sus fluctuaciones no escalan con el inverso del volumen. En este caso se concluye que el método de expansión en volumen no es aplicable y el de Dalfes-Saito daría resultados erróneos.

En el extremo opuesto está el tratamiento de Kishida que considera que todas las fuentes de ruido han de escalar con el inverso del volumen. Como ejemplo Kishida critica el tratamiento de Seifritz (1970) y Williams (1974) suponiendo que en las ecuaciones fenomenológicas todas las fuentes de ruido exhiben fluctuaciones que escalan con el inverso del volumen. De esta forma el carácter multiplicativo de dichas fuentes desaparece en el orden más bajo de $1/v$.

A continuación vamos a exponer una teoría que trata fluctuaciones internas escalando con $1/v$ y externas cualesquiera. A la vista de lo expuesto pensamos que puede tener gran interés, en cuanto a fundamentación de procesos estocásticos en reactores nucleares.

III.3.- TRATAMIENTO SIMULTANEO DE RUIDO INTERNO Y EXTERNO EN REACTORES NUCLEARES

Ya hemos comentado anteriormente que uno de los grandes huecos del

análisis del ruido neutrónico es la posibilidad de tratar simultáneamente ruidos de distinto origen como pueda ser el ruido interno cuya intensidad va como $1/v$ y un ruido externo de cualquier intensidad. El problema se plantea a través de ecuaciones maestras con coeficientes que a su vez sean fluctuantes externamente. La primera solución ha sido dada por San Miguel y Sancho (1982) en el contexto de sistemas químicos. Nosotros (M. Rodríguez 1983B) la hemos introducido en reactores nucleares. En el presente apartado vamos a introducir brevemente la teoría y posteriormente desarrollar los aspectos importantes de la misma en relación con el análisis de ruido en reactores nucleares.

III.3.A. INTRODUCCION EN UN MODELO SENCILLO

Con el fin de clarificar los métodos a seguir introducimos esta teoría en el modelo de reactor más sencillo posible: Un reactor puntual, con una sola variable N y cuyas probabilidades de transición son lineales y presentan un solo salto. Con la misma notación y significado que en el Cap. II se obtiene para las fluctuaciones internas la siguiente ecuación maestra:

$$\frac{\partial P(N,t)}{\partial t} = \lambda(N+1) P(N+1,t) + (\lambda(N-1) + \nu_s) P(N-1,t) - ((\lambda + \lambda)N + \nu_s) P(N,t) \quad (3.28)$$

Ahora en primera aproximación el ruido externo es considerado blanco e introducido a través de los coeficientes de captura, fisión y fuente como

$$\begin{aligned} \lambda &\rightarrow \lambda + \xi_\lambda \\ \lambda &\rightarrow \lambda + \xi_\lambda \\ \lambda &\rightarrow \lambda + \xi_s \end{aligned} \quad (3.29a)$$

donde por ser ruidos blancos de intensidad D se cumple

$$\begin{aligned}
 \langle \xi_\lambda(t) \xi_\lambda(t') \rangle &= 2 D_\lambda \delta(t-t') \\
 \langle \xi_\lambda(t) \xi_\lambda(t') \rangle &= 2 D_\lambda \delta(t-t') \\
 \langle \xi_2(t) \xi_2(t') \rangle &= 2 D_2 \delta(t-t')
 \end{aligned}
 \tag{3.29b}$$

asumiendo también que no están correlacionados entre ellos. Posteriormente se tratarán ruidos más generales (ver III.3.D).

Con la introducción de estos ruidos en la ecuación (3.28) la probabilidad $P(N,t)$ se transforma ahora en un funcional $P[N, \xi_\lambda(t), \xi_\lambda(t), \xi_2(t)]$ de los ruidos externos. Podemos promediar este funcional entre todas las posibles realizaciones de dichos ruidos para obtener $\bar{P}(N,t)$ ⁽¹⁾. Ello se puede hacer a nivel de la misma ecuación para la probabilidad (3.28), como de las funciones generatrices y momentos (Sancho (1983B)). Vamos a utilizar la función generatriz por uniformidad con los trabajos más usuales en R.N. Definiendo como habitualmente la función generatriz

$$G(x,t) = \sum_{N=0}^{\infty} x^N P(N,t)
 \tag{3.30}$$

y operando en (3.28) con inclusión de (3.29a) se tiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial G(x,t)}{\partial t} &= (\lambda(1-x) + \lambda x(x-1)) \frac{\partial G(x,t)}{\partial x} + \lambda V(x-1) G(x,t) + \xi_2 V(x-1) G(x,t) \\
 &+ \xi_\lambda(t) (1-x) \frac{\partial G(x,t)}{\partial x} + \xi_\lambda(t) x(x-1) \frac{\partial G}{\partial x}
 \end{aligned}
 \tag{3.31}$$

(1) En esta sección III.3, utilizaremos, como hasta ahora, $\langle \varphi \rangle$ para indicar el promedio respecto a todos los ruidos existentes en φ . Cuando haya dos tipos de ruido externo e interno, $\bar{\varphi}$ y $\langle \varphi \rangle_{\lambda, \text{int}}$ corresponderán respectivamente al promedio respecto a cada uno de ellos.

Ahora $G(x,t)$, como antes $P(N,t)$, es un funcional de los ruidos. Para hallar su promedio se puede utilizar diversas técnicas, (más adelante se verá alguna otra). En este caso, por su sencillez, vamos a utilizar la fórmula de Novikov (1965) que en términos del funcional $\phi[\xi]$ se escribe:

$$\overline{\xi(t) \phi[\xi]} = \int_0^t dt' \langle \xi(t) \xi(t') \rangle \frac{\delta \phi[\xi(t)]}{\delta \xi(t)} \quad (3.32)$$

que aplicada en la ecuación (3.31) promediada y teniendo en cuenta las relaciones (3.29b) obtenemos la siguiente ecuación para la función generatriz equivalente $\bar{G}(x,t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{G}(x,t)}{\partial t} &= (\lambda(1-x) + \mu x(x-1)) \frac{\partial \bar{G}(x,t)}{\partial x} + \nu V(x-1) \bar{G}(x,t) + \\ &+ D_1 (1-x) \frac{\partial}{\partial x} (1-x) \frac{\partial \bar{G}(x,t)}{\partial x} + \\ &+ D_2 x(x-1) \frac{\partial}{\partial x} x(x-1) \frac{\partial \bar{G}(x,t)}{\partial x} + \\ &+ D_3 V^2 (x-1)^2 \bar{G}(x,t) \end{aligned} \quad (3.33)$$

que se corresponde con la siguiente ecuación maestra:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{P}(N,t)}{\partial t} &= \{ \lambda(N+1) - D_1 [(N+1)^2 - N(N+1)] \} \bar{P}(N+1,t) + \\ &+ \{ -\mu(N-1) + D_2 (N-1)N - (N-1)^2 \} \bar{P}(N-1,t) \\ &+ D_1 (N+1)(N+2) \bar{P}(N+2) + \{ D_2 (N-1)(N-2) + V^2 D_3 \} \bar{P}(N-2,t) + \\ &- \{ (\lambda + \mu)N + \nu V - (D_1 + D_2)N^2 - V^2 D_3 \} \bar{P}(N,t). \end{aligned} \quad (3.34)$$

En general la ecuación (3.33) es difícil de resolver analíticamente, pero se pueden obtener resultados exactos para los primeros momentos estacionarios. Introduciendo la variable $z = (x-1)$ y tomando condiciones estacionarias en (3.33) se tiene:

$$\begin{aligned} & (D_\lambda z^3 + 2 z^2 D_\lambda + z (D_\lambda + D_\lambda)) \frac{\delta^2 \bar{G}_{ST}(z)}{\delta z^2} + (2 z^2 D_\lambda + z(\lambda + 3 D_\lambda) \\ & + \lambda - \lambda + D_\lambda + D_\lambda) \frac{\delta \bar{G}_{ST}(z)}{\delta z} + (D_2 v^2 z + \nu) \bar{G}_{ST}(z) = 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Buscamos una solución de la forma:

$$\bar{G}_{ST}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$$

donde $G_{ST}(z=0) = a_0 = 1$ garantiza la normalización de $\bar{P}_{ST}(N)$. Los coeficientes a_m de este desarrollo están definidos a partir de los momentos como

$$a_m = \frac{\phi_m}{m!}$$

siendo ϕ_m el momento factorial de orden $m \equiv \langle N(N-1) \dots (N-m+1) \rangle$

Sustituyendo el desarrollo de $\bar{G}_{ST}(z)$ en (3.35) e identificando los coeficientes de cada potencia en z , obtenemos la siguiente relación de recurrencia:

$$\begin{aligned} & \{ (D_\lambda + D_\lambda) m(m-1) + (\lambda - \lambda + D_\lambda + D_\lambda) m \} a_m + \\ & \{ 2 D_\lambda (m-1)(m-2) + (\lambda + 3 D_\lambda) (m-1) + \nu \} a_{m-1} + \\ & \{ D_\lambda (m-2)(m-3) + 2 D_\lambda (m-2) + D_2 v^2 \} a_{m-2} = 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

donde se ve que, contrariamente a lo que ocurre en modelos no lineales,

la jerarquía es cerrada. Por lo tanto es posible el cálculo progresivo de momentos de cualquier orden.

En concreto para los dos primeros se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \frac{\partial V}{\lambda - \lambda} + \frac{\partial V (D_L + D_R)}{(\lambda - \lambda)(\lambda - \lambda - D_L - D_R)} \\ \langle N^2 \rangle &= \frac{D_D}{\lambda - (\lambda + 2D_L + 2D_R)} + \frac{\partial \left(\partial + \frac{\lambda}{V} + \frac{D_L}{V} - \frac{2D_R}{V} \right)}{[\lambda - (\lambda + 2D_L + 2D_R)](\lambda - (\lambda + D_L + D_R))} \end{aligned} \quad (3.37)$$

y para las fluctuaciones relativas

$$\frac{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}{\langle N \rangle^2} = \frac{\partial^2 (D_L + D_R) + D_D (\lambda - (\lambda + D_L + D_R))^2 + \partial V^2 [(\lambda - (\lambda + D_L + D_R))(\lambda + D_L - 2D_R)]}{[\lambda - (\lambda + 2D_L + 2D_R)] \partial^2} \quad (3.38)$$

Como a continuación vamos a estudiar un modelo más general que éste, con neutrones retardados, nos limitaremos aquí a resaltar las conclusiones más importantes. (Para más detalle ver Rodríguez (1983B)):

i) La ecuación maestra equivalente (3.34) presenta formalmente todas las características de una auténtica ecuación maestra. Sin embargo, debido a que el ruido es blanco, las probabilidades de transición son negativas, lo cual puede conducir a probabilidades negativas. Resultados numéricos obtenidos por Sancho (1983A) indican que estas probabilidades negativas aparecen en zonas de baja probabilidad por lo que no afectarán a los resultados para los primeros momentos. Esta misma situación aparece en el cálculo de momentos obtenidos a partir de efectuar una truncación en las ecuaciones para la probabilidad con infinitos términos (Risken, 1979) Como veremos a continuación en los límites de ruido externo ó interno malos se reproducen los resultados correctos.

Otro hecho característico de (3.34) es que los coeficientes pasan a

ser no lineales y exhiben dos saltos, en vez de ser lineales con un solo salto como ocurre en la ecuación muestra original. Esta no linealidad sin embargo, no se manifiesta como usualmente ya que las ecuaciones para los momentos presentan una jerarquía cerrada (3.36).

ii) En el límite termodinámico $V \rightarrow \infty$ las fluctuaciones internas desaparecen y se puede demostrar (Rodríguez 1983E) que las externas quedan en la forma $(m = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{N}{V})$:

$$\frac{dm}{dt} = (\lambda - \mu) m + \lambda + (\xi_1 - \xi_2) m + \xi_2$$

Por contra, en el límite de ruido externo nulo $D_1 = D_2 = D_3 = 0$ se observa a partir de (3.34) que la ecuación maestra equivalente se transforma en la original (3.28) reproduciendo la existencia de fluctuaciones internas. Este es un resultado importante que muestra la consistencia de la teoría.

iii) En las ecuaciones para los momentos y fluctuaciones relativas (3.37), (3.38) puede verse que las fluctuaciones internas son de orden $1/\nu$ y las externas de orden D . Dominará una u otra según la magnitud de ambos parámetros. Aparecen también términos cruzados que, como veremos posteriormente, son genuinos de una teoría exacta como la presentada. El análisis de la contribución de cada una de las partes será expuesto en III.3.C y nos servirá para estudiar la validez de las aproximaciones hechas hasta ahora en reactores (ver III.1).

iv) Estudiando la estabilidad del sistema para los dos primeros momentos se deduce un resultado típico de ruidos multiplicativos:

$$\langle N \rangle \text{ estable para } \{ (\lambda - \mu) > (D_1 + D_2) \}$$

$$\langle N^2 \rangle \text{ estable para } \{ (\lambda - \mu) > 2(D_1 + D_2) \}$$

que apoya, nuevamente, la consistencia de la teoría.

v) El análisis con ruido blanco ha sido hecho para resaltar de forma sencilla el alcance de la teoría. Como una extensión a ruidos más comple-

jos vamos a exponer brevemente los resultados con ruido dicotómico (Rodríguez 1983B). Tomando un ruido dicotómico en el parámetro de la fuente con correlación

$$\langle \xi_s(t) \xi_s(t') \rangle = \Delta^2 \exp(-\gamma_s |t-t'|)$$

y promediando la ecuación para la función generatriz se tiene:

$$\frac{\partial \bar{G}(x,t)}{\partial t} = (\lambda(1-x) + \mu x(x-1)) \frac{\partial \bar{G}}{\partial x} + \lambda V(x-1) \bar{G}(x,t) + V(x-1) \bar{G}_1(x,t)$$

$$\frac{\partial \bar{G}_1(x,t)}{\partial t} = (\lambda V(x-1) - \gamma_s) \bar{G}_1(x,t) + [\mu x(x-1) + \lambda(1-x)] \frac{\partial \bar{G}_1(x,t)}{\partial x} + V(x-1) \Delta^2 \bar{G}(x,t) \quad (3.39)$$

siendo $\bar{G}_1(x,t) = \overline{\xi_s G(x,t)}$ y habiendo aplicado la fórmula de Shapiro (1978); que para un funcional cualquiera $\phi[\xi_s(t)]$ se escribe:

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\xi_s(t) \phi[\xi_s(t)]} = \overline{\xi_s(t) \frac{\partial \phi[\xi_s(t)]}{\partial t}} - \gamma_s \overline{\xi_s(t) \phi[\xi_s(t)]}$$

A partir de (3.34) y aplicando el mismo método que para ruido blanco se obtiene la siguiente fórmula de recurrencia :

$$\begin{aligned} & \{ (\lambda - \mu)^2 m(m-1) + (\lambda - \mu) \gamma_s m \} a_m + \\ & \{ -2\mu(\lambda - \mu)(m-1)(m-2) - [\lambda \gamma_s + (2\lambda V + \mu)(\lambda - \mu)](m-1) - \lambda V \gamma_s \} a_{m-1} + \\ & \{ -\mu^2(m-2)(m-3) + (2\lambda V + \mu)\mu(m-2) + V^2(\lambda^2 - \Delta^2) \} a_{m-2} = 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

que permite la obtención de los primeros momentos:

$$\langle N \rangle = \frac{\Delta V}{\lambda - \mu}$$

$$\langle N^2 \rangle = \frac{\Delta^2 V^2}{(\lambda - \mu)^2} + \frac{D_2 V^2}{(\lambda - \mu) \left(\frac{\lambda - \mu}{\delta_s} + 1 \right)} + \frac{\Delta \lambda V}{(\lambda - \mu)^2}$$

(3.41)

$$\frac{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}{\langle N \rangle^2} = \frac{D_2 (\lambda - \mu)}{\Delta^2 \left(\frac{\lambda - \mu}{\delta_s} + 1 \right)} + \frac{\lambda}{V \Delta}$$

con $D_2 = \frac{\Delta^2}{\delta_s^2}$. Comparando con el resultado para las fluctuaciones en el caso de ruido blanco:

$$\left[\frac{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}{\langle N \rangle^2} \right]_{\text{BLANCO}} - \left[\frac{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}{\langle N \rangle^2} \right]_{\text{RUIDO}} = \frac{D_2 (\lambda - \mu)^2}{\Delta^2 (\lambda - \mu + \delta_s)} \quad (3.42)$$

obtenemos una expresión que es independiente del volumen y, con la condición de estabilidad, siempre va a ser positiva. Esto indica que el efecto del tiempo de correlación estabiliza el sistema.

Ruidos más generales serán tratados posteriormente.

Una vez introducido el método y expuestos los primeros resultados vamos a desarrollar la teoría para un modelo lineal general. Con objeto de comparar con la teoría usual de ruido interno consideraremos, antes de entrar de lleno en el problema del estudio simultaneo externo-interno, los métodos y resultados importantes de un modelo puntual general con solamente ruido interno (Williams 1974).

III.3.B. REACTOR PUNTUAL SIN RUIDO EXTERNO

Físicamente corresponde al caso de baja potencia en que los acoplamientos térmicos e hidrodinámicos son despreciables. Las probabilidades

de transición son lineales de tal forma que a potencia cero es posible el tratamiento de cualquier modelo sofisticado con muchos grupos de energía y regiones, así como con efecto de detectores (Cap. II). Sea pues un reactor puntual con I grupos de neutrones retardados provenientes de los precursores c_i ($i = 1, I$) y un detector puntual que detecta neutrones R. La ecuación de balance (Ec. de Kolmogorov) se escribe ahora:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(N, c_i, R, t)}{\partial t} = & \lambda(N+1) P(N+1, c_i, R, t) + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m_1, c_0}^{\infty} \dots \sum_{m_I=0}^{\infty} p(m_1, m_2, \dots, m_I) \\ & (N+1-n) P(N+1-n, c_i - m_i, R, t) + \lambda_d(N+1) P(N+1, c_i, R-1, t) + \\ & + S P(N-1, c_i, R, t) - \left[S + (\lambda + \lambda_d + \epsilon \lambda) N + \sum_{i=1}^I \lambda_i c_i \right] P(N, c_i, R, t). \end{aligned} \quad (3.43)$$

donde λ_d es la tasa de detección y los otros parámetros son los usuales (Cap. II).

A partir de esta ecuación se puede extraer información de diversas formas, quizá la más adecuada es a través de la introducción de funciones generadoras de probabilidad:

$$\begin{aligned} G(x, y_i, z, t) &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{c_i=0}^{\infty} \dots \sum_{R=0}^{\infty} x^N y_i^{c_i} z^R P(N, c_i, R, t) \\ f(x, y_i) &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{c_i=0}^{\infty} x^N \cdot c_i^{m_i} \cdot p(m_1, m_2, \dots, m_I) \end{aligned} \quad (3.44)$$

que transforma la ecuación (3.43) en:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} = & (x-1) S \cdot G + \sum_{i=1}^I (x \cdot y_i) \lambda_i \frac{\partial G}{\partial y_i} + \left[\lambda(1-x) + \lambda_d (f(x, y_i) - x) + \right. \\ & \left. + \lambda_d (z-x) \right] \frac{\partial G}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.45)$$

donde ahora obtenemos una ecuación lineal de primer orden.

Aunque los parámetros estadísticos de utilización práctica son normalmente los valores medios, cuadráticos y correlaciones, existe interés, al menos académico, en conocer otro tipo de datos como pueda ser la probabilidad estacionaria, o momentos de cualquier orden, probabilidades de detectar neutrones en n intervalos de tiempo consecutivos, etc...

De hecho como veremos en capítulos posteriores en la teoría de reactores de potencia cero (modelos lineales), es posible la extracción de gran cantidad de información, incluso de propiedades asintóticas. Ahora vamos a limitarnos a los parámetros más importantes como son valores medios, cuadráticos y correlaciones.

La forma usual de extraer la información relevante es a través de las varianzas modificadas en el estado estacionario definidas por (Williams 1974):

$$\begin{aligned}
 N_{NN} &= \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 - \langle N \rangle = \frac{\partial^2 G(x, y_i, z, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=y_i=z=1} - \left[\frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{x=y_i=z=1} \right]^2 \\
 N_{Nc_i} &= \langle (N - \langle N \rangle)(c_i - \langle c_i \rangle) \rangle = \frac{\partial G(x, y_i, z)}{\partial x \partial y_i} \Big|_{x=y_i=z=1} - \frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{x=y_i=z=1} \cdot \frac{\partial G}{\partial y_i} \Big|_{x=y_i=z=1} \\
 N_{c_i c_j} &= \langle (c_i - \langle c_i \rangle)(c_j - \langle c_j \rangle) \rangle = \frac{\partial G}{\partial y_i \partial y_j} \Big|_{x=y_i=z=1} - \frac{\partial G}{\partial y_i} \Big|_{x=y_i=z=1} \frac{\partial G}{\partial y_j} \Big|_{x=y_i=z=1} \quad (3.46) \\
 N_{c_i c_i} &= \langle c_i^2 \rangle - \langle c_i \rangle^2 - \langle c_i \rangle = \frac{\partial^2 G}{\partial y_i^2} \Big|_{x=y_i=z=1} - \left(\frac{\partial G}{\partial y_i} \Big|_{x=y_i=z=1} \right)^2
 \end{aligned}$$

que se calculan fácilmente a partir de derivaciones sucesivas de (3.45) en el estado estacionario $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$, obteniéndose (Williams 1974):

$$\begin{aligned}
 N_{NN} &= \frac{\nu_{00} \lambda \langle N \rangle + 2 \sum_i \lambda_i N_{NCi}}{2 \left[\lambda - \lambda (\nu_0 - 1 - \frac{\lambda d_i}{\lambda}) \right]} \\
 N_{NCi} &= \frac{N_{NN} \lambda \nu_i + \langle N \rangle \lambda \nu_{0i} + \sum_j \lambda_j N_{Cij}}{\lambda + \lambda_i - \lambda (\nu_0 - 1 - \frac{\lambda d_i}{\lambda})} \\
 N_{Cij} &= \frac{1}{(\lambda_i + \lambda)} \left\{ N_{NCi} \lambda \nu_j + N_{NCj} \lambda \nu_i + \langle N \rangle \nu_{ij} \lambda \right\}
 \end{aligned}
 \tag{3.47}$$

con

$$\begin{aligned}
 \nu_i &= \sum_{n, m_i} m_i p(n, m_i) \\
 \nu_{00} &= \sum_{n, m_i} n(n-1) p(n, m_i) \\
 \nu_{0i} &= \sum_{n, m_i} n m_i p(n, m_i)
 \end{aligned}
 \tag{3.48}$$

Hacemos la observación que al igual que en el caso anterior se puede obtener una fórmula de recurrencia para los momentos. Debido a la complejidad del modelo, ahora este método es poco operativo por lo que es preferible el cálculo de momentos derivando sucesivamente la ecuación para G.

La función de correlación estacionaria se calcula a través de la fórmula de Pluta:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{NN}(t) &= \lim_{t' \rightarrow \infty} \langle (N(t+t') - \langle N \rangle)(N(t') - \langle N \rangle) \rangle = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{d^2 \{ \langle R^2(t) \rangle - \langle R(t) \rangle^2 \}}{dt^2} = \frac{\lambda d \langle N \rangle}{2} \sum_i \gamma_i \alpha_i e^{-\alpha_i t}
 \end{aligned}
 \tag{3.39}$$

donde α_i son las raíces de la ecuación horaria

$$\frac{\kappa-1}{\kappa} = \frac{\rho\alpha}{\kappa} + \alpha \sum_{i=1}^I \frac{\beta_i}{\alpha + \lambda_i}$$

$$\gamma_i = \frac{\rho\lambda_i}{\langle N \rangle} \left\{ \frac{N_{NN} + \langle N \rangle + \sum_j \frac{\lambda_j \langle N \rangle \nu_j + N_{Nc_j}}{\lambda_j - \alpha_i}}{\alpha_i \left[1 + \lambda \sum \frac{\lambda_j \nu_j}{(\lambda_j - \alpha_i)^2} \right]} \right\} \quad (3.50)$$

con l (vida media neutrónica) = $\frac{1}{\lambda + \lambda(1 + \lambda\alpha - \lambda^{-1})}$

$$\beta_i \text{ (fracción de neutrones retardados)} = \frac{\nu_i (1-\beta)}{\nu_0} \quad (3.51)$$

$$\kappa \text{ (constante de multiplicación efectiva)} = \frac{\nu_0 - \lambda}{(-\lambda(1 + \lambda\alpha - \lambda^{-1}))(1-\beta)}$$

Podemos observar como a través de (3.47) y (3.51), con el simple conocimiento experimental de varianzas y correlaciones, puede extraerse gran cantidad de los parámetros cinéticos más importantes de la dinámica de reactores. No vamos a discutir aspectos técnicos ni experimentales, simplemente constatar el hecho de que en esta teoría lineal el cálculo exacto de parámetros es factible. Las expresiones (3.47) y (3.51) nos serán de utilidad en la comparación con la teoría con ruido externo.

III.3.C.- TEORIA DE FLUCTUACIONES EXTERNAS E INTERNAS EN REACTORES PUNTUALES DE POTENCIA CERO

A.- Ruidos externos blancos

Consideremos un modelo puntual con I grupos de neutrones retardados como el expuesto anteriormente. La ecuación maestra y la ecuación para

la función generatriz serán respectivamente (3.43) y (3.45).

Introduzcamos ahora el ruido paramétrico externo en los coeficientes de absorción, fisión, fuente y detección como:

$$\begin{aligned}
 \lambda &\longrightarrow \lambda + \xi_\lambda \\
 \mu &\longrightarrow \mu + \xi_\mu \\
 \nu &\longrightarrow \nu + \xi_\nu \\
 \lambda_d &\longrightarrow \lambda_d + \xi_{\lambda_d}
 \end{aligned}
 \tag{3.52}$$

donde el ruido es blanco con funciones de correlación:

$$\begin{aligned}
 \langle \xi_\lambda(t) \xi_\lambda(t') \rangle &= 2 D_\lambda \delta(t-t') \\
 \langle \xi_\mu(t) \xi_\mu(t') \rangle &= 2 D_\mu \delta(t-t') \\
 \langle \xi_\nu(t) \xi_\nu(t') \rangle &= 2 D_\nu \delta(t-t') \\
 \langle \xi_{\lambda_d}(t) \xi_{\lambda_d}(t') \rangle &= 2 D_{\lambda_d} \delta(t-t')
 \end{aligned}
 \tag{3.53}$$

teniendo presente que son independientes entre sí. Operando de idéntica manera (III.3.A) y aplicando la fórmula de Novikov, se llega a la siguiente ecuación para la función generatriz promediada:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{G}}{\partial t} &= (x-1) \nu \bar{G} + (x-1)^2 \nu^2 D_\nu \bar{G} + \sum_{i=1}^I (x-y_i) \lambda_i \frac{\partial \bar{G}}{\partial y_i} + \lambda(1-x) \frac{\partial \bar{G}}{\partial x} + \\
 &+ D_\lambda (1-x) \frac{\partial}{\partial x} (1-x) \frac{\partial}{\partial x} \bar{G} + \mu \{ \beta(x, y_1, \dots, y_I) - x \} \frac{\partial \bar{G}}{\partial x} + \\
 &+ D_\mu \{ \beta(x, y_1, \dots, y_I) - x \} \frac{\partial}{\partial x} \{ \beta(x, y_1, \dots, y_I) - x \} \frac{\partial \bar{G}}{\partial x} + \lambda_d (z-x) \frac{\partial \bar{G}}{\partial x} + \\
 &D_{\lambda_d} (z-x) \frac{\partial}{\partial x} (z-x) \frac{\partial \bar{G}}{\partial x}.
 \end{aligned}
 \tag{3.54}$$

La ecuación (3.54) es la misma ecuación que se obtendría para una ecuación maestra efectiva (Sancho, 1983B) en la que los coeficientes no son ahora lineales. En este sentido, esta teoría puede considerarse no lineal, sin embargo como posteriormente veremos el cálculo de momentos no lleva una jerarquía infinita por lo que goza de las propiedades de las ecuaciones lineales (III.3.A). El cálculo de los primeros momentos se hace por derivadas sucesivas de \bar{G} sin dificultad (III.3.B). Con el fin de dar claridad a la exposición vamos a agrupar nuestros resultados en tres partes.

A1) Momentos de primer orden

Las ecuaciones resultantes para las variables N y ζ_i son

$$\begin{aligned} \frac{d\langle N \rangle}{dt} &= (\nu_0 - 1) \tilde{\lambda}_1 \langle N \rangle - \tilde{\lambda}_2 \langle N \rangle + \sum_i \lambda_i \langle \zeta_i \rangle + \nu V \\ \frac{d\langle \zeta_i \rangle}{dt} &= -\lambda_i \langle \zeta_i \rangle + \tilde{\lambda}_1 \nu_i \langle N \rangle \end{aligned} \quad (3.55)$$

donde hemos definido los coeficientes eficaces (denotados por un sombrero) como:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_m &= \lambda + \lambda_d - m D_\lambda - m D_{dd} \\ \tilde{\lambda}_m &= \lambda + m(\nu_0 - 1) D_\lambda \end{aligned} \quad (3.56)$$

y con

$$\begin{aligned} \nu_0 &= \sum_{m, m_i} m p(m, m_i) \\ \nu_i &= \sum_{m, m_i} m_i p(m, m_i) \end{aligned} \quad (3.57)$$

El análisis posterior es similar al realizado sin ruido externo pero con los coeficientes eficaces definidos por (3.56). Siguiendo a Williams (1974)

se define

$$\tilde{\ell} = \frac{1}{\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2} \quad (3.58)$$

$$\tilde{K} (1-\beta) = \frac{\nu_0 \tilde{\lambda}_1}{\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2} \quad (3.59)$$

$$\nu_i = \frac{\nu_0 \beta_i}{1-\beta} \quad (3.60)$$

donde $\tilde{\ell}$ es "la vida media instantánea neutrónica", \tilde{K} el factor de multiplicación efectivo y β_i la fracción de neutrones retardados del grupo i .

Así, operando en (3.55) se llega a las ecuaciones cinéticas para el valor medio:

$$\frac{d\langle N \rangle}{dt} = \frac{1}{\tilde{\ell}} [\tilde{K}(1-\beta) - 1] \langle N \rangle + \sum_i \lambda_i \langle c_i \rangle + \lambda V \quad (3.61)$$

$$\frac{d\langle c_i \rangle}{dt} = \frac{\beta_i \tilde{K}}{\tilde{\ell}} \langle N \rangle - \lambda_i \langle c_i \rangle \quad (3.62)$$

La ecuación horaria tiene la misma forma que en III.3.B pero ahora con coeficientes eficaces

$$\tilde{\rho} = \frac{\tilde{K} - 1}{\tilde{K}} = \frac{\tilde{\ell}}{\tilde{K}} + u \sum_i \frac{\beta_i}{u + \lambda_i} \quad (3.63)$$

y la función de transferencia

$$R(u) = \frac{1}{u \frac{\tilde{\ell}}{\tilde{K}} + \sum_i \frac{u \beta_i}{u + \lambda_i}} \quad (3.64)$$

Se deduce que para el primer momento la cinética es la misma que en el caso de no existencia de ruido externo (III.3.B) con los coeficientes efectivos dados por (3.56) y (3.57).

Una primera conclusión es que el ruido externo actúa de tal modo que

disminuye los coeficientes de absorción y aumenta los de fisión. En cualquier caso aumenta siempre el coeficiente de multiplicación $\tilde{K} > K$ y la reactividad $\tilde{\beta} > \beta$. La vida media neutrónica disminuye si $D_A > D_A$ y aumenta en caso contrario. En general el ruido externo multiplicativo (en λ y λ) aumenta la reactividad por lo que tiene efectos desestabilizadores. El ruido externo aditivo (en δ) no tiene efecto alguno en el primer momento. Los valores medios estacionarios en función de los coeficientes eficaces vienen dados por

$$\langle N \rangle = \frac{\nu \lambda}{\tilde{\lambda}_i - (\nu_0 - 1 + \sum_j \nu_j) \tilde{\lambda}_i} \quad (3.65)$$

$$\langle C_i \rangle = \frac{\nu_i \tilde{\lambda}_i \nu \lambda}{(\tilde{\lambda}_i - (\nu_0 - 1 + \sum_j \nu_j) \tilde{\lambda}_i) \lambda_i} \quad (3.66)$$

Nuevamente comprobaremos como en (III.3.A) que en los límites se reproducen los resultados correctos.

En el límite termodinámico $\nu \rightarrow \infty$, $n = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{N}{\nu}$ obtenemos para los momentos

$$\langle n \rangle = \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}_i - (\nu_0 - 1 + \sum_j \nu_j) \tilde{\lambda}_i} \quad (3.67)$$

$$\langle C_i \rangle = \frac{\nu_i \tilde{\lambda}_i \lambda}{(\tilde{\lambda}_i - (\nu_0 - 1 + \sum_j \nu_j) \tilde{\lambda}_i) \lambda_i} \quad (3.68)$$

que se corresponden a los momentos obtenidos a través de las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dn}{dt} = (\nu_0 - 1) \lambda n - (\lambda + \lambda d) n + \sum_i \lambda_i C_i + \nu + (\nu_0 - 1) \xi_A n - (\xi_A + \xi_{Ad}) n + \xi_D \quad (3.69)$$

$$\frac{dC_i}{dt} = -\lambda_i C_i + \lambda \nu_i n + \xi_A \nu_i n \quad (3.70)$$

y en los límites de ruido externo nulo $D_A = D_A = D_3 = D_{A4} = 0$ se reproducen los momentos correctos, pues la función generatriz efectiva (3.54) pasa a ser la original (3.45).

A2) Ecuaciones para los momentos cuadráticos

A partir de (3.54) y con las técnicas habituales obtenemos para los momentos cuadráticos de N,

$$\frac{d \langle N(N-1) \rangle}{dt} = -2 [\tilde{\lambda}_1 - (\nu_0 - 1) \tilde{\lambda}_2] \langle N(N-1) \rangle + [2\nu_0 + \tilde{\nu}_{00} \mathcal{L}] \langle N \rangle + 2 \sum_i \tilde{\lambda}_i \langle C_i N \rangle + 2 \nu^2 D_3 \quad (3.71)$$

$$\frac{d \langle C_i C_j \rangle}{dt} = -(\lambda_i + \lambda_j) \langle C_i C_j \rangle + \nu_i \tilde{\lambda}_i \langle C_i N \rangle + \nu_j \tilde{\lambda}_j \langle C_j N \rangle + 2 D_A \nu_i \nu_j \langle N(N-1) \rangle + \tilde{\nu}_{ij} \mathcal{L} \langle N \rangle \quad (3.72)$$

$$\frac{d \langle N C_i \rangle}{dt} = (\nu_0 - 1) \tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_1 - \lambda_i \langle N C_i \rangle + (\nu_0 - \lambda_i) \langle C_i \rangle - \sum_j \tilde{\lambda}_j \langle C_i C_j \rangle + \nu_i \tilde{\lambda}_3 \langle N(N-1) \rangle + [\tilde{\nu}_{0i} \mathcal{L}] \langle N \rangle \quad (3.73)$$

con los valores eficaces:

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_{00} &= \nu_{00} \left(1 + \frac{2 D_A}{\mathcal{L}} (\nu_0 - 1) \right) \\ \tilde{\nu}_{ij} &= \nu_{ij} \left(1 + \frac{D_A}{\mathcal{L}} (\nu_0 - 1) \right) + \frac{D_A}{\mathcal{L}} (\nu_i \nu_{0i} + \nu_j \nu_{0j}) \\ \tilde{\nu}_{0i} &= \nu_{0i} \left(1 + \frac{2 D_A}{\mathcal{L}} (\nu_0 - 1) \right) + \frac{D_A}{\mathcal{L}} \nu_i \nu_{00} \end{aligned} \quad (3.74)$$

Para los valores estacionarios con la definición de los parámetros eficaces anteriores se obtiene:

$$\langle N(N-1) \rangle = \frac{(v_0 + \frac{\tilde{\nu}_{00}}{2} \lambda) \langle N \rangle + \sum \lambda_i \langle C_i N \rangle + v^2 D_0}{\tilde{\lambda}_2 - (\nu_0 - 1) \tilde{\lambda}_2} \quad (3.75)$$

$$\langle C_i N \rangle = \frac{(v_0 - \lambda_i) \tilde{c}_i + \sum_j \lambda_j \langle C_j C_i \rangle + \nu_i \tilde{\lambda}_3 \langle N(N-1) \rangle + \tilde{\nu}_{0i} \lambda \langle N \rangle}{\lambda_i + \tilde{\delta}_i - (\nu_0 - 1) \tilde{\lambda}_i} \quad (3.76)$$

$$\langle C_i C_j \rangle = \frac{\nu_i \tilde{\lambda}_i \langle C_j N \rangle + \nu_j \tilde{\lambda}_j \langle C_i N \rangle + 2 D_{ij} \nu_i \nu_j \langle N(N-1) \rangle + \lambda \tilde{\nu}_{ij} \langle N \rangle}{(\lambda_i + \lambda_j)} \quad (3.77)$$

Por la definición de los parámetros eficaces se puede fácilmente deducir que el efecto del ruido externo siempre tiende a aumentar estos valores estacionarios (los numeradores aumentan siempre y los denominadores disminuyen). Resolver el sistema anterior puede resultar extremadamente pesado, y como normalmente se hace vamos solamente a considerar un grupo de neutrones retardados $I = 1$. De esta forma obtenemos

$$\langle N(N-1) \rangle = \frac{v^2 D_0 + (v_0 + \frac{\tilde{\nu}_{00}}{2} \lambda) \langle N \rangle + \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + \tilde{\delta}_1 - (\nu_0 - 1 + \nu_1) \tilde{\lambda}_1)} \{v_0 \langle C \rangle + (\tilde{\nu}_{00} + \frac{\lambda}{2} \tilde{\nu}_{11}) \langle N \rangle\}}{(\tilde{\lambda}_2 - (\nu_0 - 1) \tilde{\lambda}_2) - \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + \tilde{\delta}_1 - (\nu_0 - 1 + \nu_1) \tilde{\lambda}_1)} (\nu_1 \tilde{\lambda}_1 + \nu_1^2 D_{11})} \quad (3.78)$$

y para las fluctuaciones relativas (con los términos ya reagrupados):

$$\begin{aligned} \frac{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}{\langle N \rangle^2} = & \frac{\sigma^2 \left\{ D_0 + (\nu_0 - 1) D_{11} + \frac{\nu_1^2 D_{11}}{(\lambda_1 + \tilde{\delta}_1 - (\nu_0 - 1 + \nu_1) \tilde{\lambda}_1)} \right\} + D_0 (\tilde{\lambda}_2 - (\nu_0 - 1 + \nu_1) \tilde{\lambda}_2)^2}{\sigma^2 \left\{ (\tilde{\lambda}_2 - (\nu_0 - 1) \tilde{\lambda}_2) - \frac{\lambda (\nu_1 \tilde{\lambda}_1 + \nu_1^2 D_{11})}{(\lambda_1 + \tilde{\delta}_1 - (\nu_0 - 1 + \nu_1) \tilde{\lambda}_1)} \right\}} + \\ & + \frac{\sigma \tilde{\nu}_{11} \left\{ (\frac{\tilde{\nu}_{00}}{2} \lambda + \tilde{\delta}_2 - (\nu_0 - 1) \tilde{\lambda}_2) (\tilde{\lambda}_1 - (\nu_0 - 1 + \nu_1) \tilde{\lambda}_1) \right\}}{\sigma^2 \left\{ (\tilde{\lambda}_2 - (\nu_0 - 1) \tilde{\lambda}_2) - \frac{\lambda (\nu_1 \tilde{\lambda}_1 + \nu_1^2 D_{11})}{(\lambda_1 + \tilde{\delta}_1 - (\nu_0 - 1 + \nu_1) \tilde{\lambda}_1)} \right\}} + \\ & + \frac{\lambda_1 (\tilde{\lambda}_1 - (\nu_0 - 1 + \nu_1) \tilde{\lambda}_1) (\tilde{\nu}_{00} + \frac{\lambda}{2} \tilde{\nu}_{11} - \nu_1 (\tilde{\lambda}_1 + \nu_1 D_{11}))}{\sigma^2 \left\{ (\tilde{\lambda}_2 - (\nu_0 - 1) \tilde{\lambda}_2) (\lambda_1 + \tilde{\delta}_1 - (\nu_0 - 1 + \nu_1) \tilde{\lambda}_1) - \lambda_1 (\nu_1 \tilde{\lambda}_1 + \nu_1^2 D_{11}) \right\}} \end{aligned} \quad (3.79)$$

En primer lugar se puede ver que para el caso sencillo estudiado en III.3.A las expresiones coinciden. En efecto, quitando el efecto de neutrones retardados $\nu_1 = \lambda_1 = 0$, y sabiendo que en el modelo de creación destrucción $\nu_0 = \nu_{00} = 3$, se obtiene la expresión (3.38). Para $\nu \rightarrow \infty$ nos quedamos únicamente con el efecto de ruido externo; el término en V^{-1} se anula. Comparando con los resultados conocidos en la bibliografía observamos que nuestra descripción es más completa pues distinguimos entre fluctuaciones en la absorción y en la fisión. En el límite $\nu \rightarrow \infty$ y con las definiciones de ℓ, κ, β ; en (3.51) obtenemos las ecs. de los momentos:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{1}{\ell} [\kappa(1-\beta) - 1] n + \lambda_1 C + \gamma + (\nu_0 - 1) \xi_n n + \xi_n m + \xi_0 \quad (3.80)$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\beta \kappa}{\ell} n - \lambda_1 C + \sum_{\lambda} \nu_{\lambda} \xi_{\lambda} n \quad (3.81)$$

Ahora suponiendo que las fluctuaciones en K provienen únicamente de los coeficientes de fisión: $\xi_{\kappa} = \frac{\xi_n \ell (\nu_0 - 1)}{(1 - \beta)}$ obtenemos una ecuación similar a la de Saito (1979B) en la que se considera el ruido en (3.80) y (3.81)

$$\frac{dn}{dt} = \frac{1}{\ell} [\kappa(1-\beta) - 1] n + \lambda_1 C + \gamma + \frac{\xi_{\kappa} (1-\beta)}{\ell} n \quad (3.82)$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\beta \kappa}{\ell} n - \lambda_1 C + \frac{\beta \nu_0}{(\nu_0 - 1) \ell} \xi_{\kappa} n \quad (3.83)$$

Si consideramos fluctuaciones en K proviniendo de los coeficientes de absorción: $\xi_{\kappa} = \frac{\xi_n \ell}{(1-\beta)}$, obtenemos ecuaciones similares a las usadas por Quabili (1979) en las que en la ecuación (3.79) no se considera ningún término fluctuante.

$$\frac{dn}{dt} = \frac{1}{\ell} [\kappa(1-\beta) - 1] n + \lambda_1 C + \gamma + \frac{\xi_{\kappa} (1-\beta)}{\ell} n \quad (3.84)$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\beta K}{l} m - \lambda c \quad (3.85)$$

A3) Extracción de la información por medio de contaje

Vamos a centrarnos ahora en las ecuaciones de los momentos para $R(t)$ (número de detecciones en el tiempo t) y en la extracción de información a partir de la variable observada R . Operando como habitualmente, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d\langle R \rangle}{dt} = (\lambda d - D_{id}) \langle N(t) \rangle \quad (3.86)$$

$$\frac{dN_{RR}}{dt} = 2(\lambda d - D_{id}) N_{RN} + 2 D_{id} (\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2) \quad (3.87)$$

$$\frac{dN_{RN}}{dt} = (-\tilde{\lambda}_i + (\nu_i - 1)\tilde{\lambda}_i) N_{RN} + \sum_i \tilde{\lambda}_i N_{RC_i} + A \quad (3.88)$$

$$\frac{dN_{RC_i}}{dt} = -\tilde{\lambda}_i N_{RC_i} + \nu_i \tilde{\lambda}_i N_{NR} + B_i \quad (3.89)$$

donde se ha seguido la notación de Williams (varianzas modificadas):

$$N_{RR} = \langle R^2 \rangle - \langle R \rangle^2 - \langle R \rangle \quad (3.90)$$

$$N_{RN} = \langle RN \rangle - \langle R \rangle \langle N \rangle$$

y con

$$A = (\lambda d - 3 D_{id}) (\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2)$$

$$B_i = (\lambda d - D_{id}) N_{NC_i} \quad (3.91)$$

Haciendo las sustituciones (3.58-60), la transformada de Laplace y efectuando se obtiene

$$N_{RR}(\omega) = \frac{2 D_{id} (\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2)}{\omega^2} + 2(\lambda d - D_{id}) \frac{\frac{\tilde{\lambda}}{R} (A + \sum_i \frac{d_i B_i}{\omega + d_i})}{\omega^2 \left[\frac{\tilde{\lambda}}{R} \omega - \frac{(\tilde{\lambda} - 1)}{R} + \omega \sum_i \frac{\beta_i}{\omega + d_i} \right]} \quad (3.92)$$

Ahora, invirtiendo, obtenemos por fin:

$$N_{RR}(t) = \sum_i D_{\alpha_i} (\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle) t + 2(\lambda_d - D_{\alpha_d}) \sum_i y_i \left\{ t - \frac{(1 - e^{-\tilde{\alpha}_i t})}{\tilde{\alpha}_i} \right\} \quad (3.93)$$

con $\tilde{\alpha}_i$: las raíces de la ecuación horaria equivalente y

$$y_i = \frac{A + \sum_{j=1}^I \frac{\lambda_j B_j}{\lambda_j - \tilde{\alpha}_i}}{\tilde{\alpha}_i \left[1 + \tilde{\alpha}_i \sum_j \frac{y_j \lambda_j}{(\lambda_j - \tilde{\alpha}_i)} \right]}$$

Si aplicamos la fórmula de Pluta se obtiene para las correlaciones

$$\langle (2) \rangle = \frac{1}{2} \frac{d^2 N_{RR}}{dt^2} = (\lambda_d - D_{\alpha_d}) \sum_i y_i \tilde{\alpha}_i e^{-\tilde{\alpha}_i t} \quad (3.94)$$

formalmente idéntico al caso sin ruido externo pero con coeficientes equivalentes (3.49-3.51). El efecto del ruido externo se manifiesta pues de dos formas: variando los tiempos de relajación $\alpha_i^{-1} \rightarrow \tilde{\alpha}_i^{-1}$ y los coeficientes (la amplitud) de cada contribución y_i , $\langle N^2 \rangle$, $\langle N \rangle$.

Condensando los tres apartados anteriores se puede decir que la teoría estocástica de reactores puntuales a potencia cero y con ruido interno blanco es formalmente idéntica a la usual sin ruido externo cuando se definen unos coeficientes eficaces que son función de la intensidad del ruido externo. En los límites respectivos obtenemos las descripciones usuales de ruido interno (ec. de Kolmogorov) y las ecuaciones estocásticas con ruido externo lo cual prueba la consistencia de la teoría. A continuación vamos a relacionar nuestra teoría exacta con las aproximaciones de Langevin usuales.

B.- Comparación con las aproximaciones de Langevin

El uso de la aproximación de Langevin es muy frecuente en problemas de ruido en reactores nucleares (Williams (1974), Saito (1974, 1979A)). En esencia consiste en hallar una ecuación diferencial estocástica equivalente a la ecuación maestra inicial en el sentido de que reproduzca los dos

primeros momentos y correlaciones (III.2). Normalmente la ecuación diferencial estocástica equivalente presenta la fuente de ruido en forma aditiva y su correlación viene dada por la fórmula de Schottky (Saito 1977). Una mayor generalización ha sido hecha por Ackasu (1977) quien además tiene en cuenta el carácter intensivo de las variables del sistema. En esta sección vamos a estudiar las implicaciones de la aproximación de Langevin en nuestro formalismo de ecuaciones maestras con ruido externo aplicado a modelos puntuales de reactores nucleares. Con el fin de ofrecer mayor claridad en la discusión vamos a servirnos de un modelo sin neutrones retardados ni detector. La generalización a problemas en varias dimensiones es inmediata. Sea la ecuación que representa las fluctuaciones internas de nuestro modelo:

$$\frac{dP(N,t)}{dt} = \lambda(N+1)P(N+1,t) + \sum_i \lambda P(i)(N-i+1)P(N-i+1,t) + \nu \delta P(N-1,t) - [(\lambda + \lambda)N + \nu \delta] P(N,t) \quad (3.95)$$

que es la misma que (3.43) sin tener en cuenta neutrones retardados ni detector.

La ecuación de Langevin equivalente viene dada para $m = \frac{N}{V} = N \epsilon$ por

$$\dot{m} = (\nu_0 - 1)\lambda - \lambda)m + \delta + \sqrt{\epsilon} S(t)$$

con $S(t)$ la fuente equivalente, $\langle S(t) \rangle = 0$, que por la fórmula de Schottky

$$\langle S(t) S(t') \rangle = [(\nu_0 - 1)^2 \lambda + \lambda \langle n \rangle + \delta] S(t-t') \quad (3.96)$$

$$\text{con } \{(\nu_0 - 1)^2\} = \sum_m (m-1)^2 p(m)$$

No es difícil comprobar su equivalencia en el sentido de que ambas ecuaciones (3.95), (3.96) reproducen las mismas ecuaciones para los primeros momentos:

$$\langle \dot{m} \rangle = (\nu_0 - 1) \lambda - \lambda \langle m \rangle + \gamma \quad (3.97)$$

$$\frac{d}{dt} \langle m^2 \rangle = 2(\nu_0 - 1) \lambda - \lambda \langle m^2 \rangle + (2\gamma + \epsilon(\nu_0 - 1)^2 \lambda + \lambda) \langle m \rangle + \epsilon \gamma \quad (3.98)$$

Ahora el problema está en introducir el ruido externo. Nuestra teoría exacta se basa en la introducción del ruido al nivel de la ecuación maestra (3.95) y, promediando, conseguir otra ecuación maestra exacta.

En la sección anterior se ha hecho al nivel de funciones generatrices lo cual es lo mismo. Discutiremos ahora varias aproximaciones:

i) Si introducimos el ruido externo (por simplicidad vamos a considerarlo en la absorción ξ_λ) al nivel de la ecuación de Langevin (3.96)

$$\begin{aligned} \dot{m} &= (\nu_0 - 1) \lambda - \lambda m + \gamma + \sqrt{\epsilon} S(t) + \xi_\lambda m \\ \langle S(t) S(t') \rangle &= \left[(\nu_0 - 1)^2 \lambda + \lambda \langle m \rangle_{\text{int}} + \gamma \right] \delta(t - t') = \\ &= \left[(\nu_0 - 1)^2 \lambda + \lambda \frac{\gamma}{(\lambda - (\nu_0 - 1) \lambda)} + \gamma \right] \delta(t - t') \end{aligned} \quad (3.99)$$

obtenemos para los momentos:

$$\begin{aligned} \langle \dot{m} \rangle &= (\nu_0 - 1) \lambda - \lambda \langle m \rangle + \gamma + D_\lambda \langle m \rangle \\ \langle \dot{m}^2 \rangle &= 2(\nu_0 - 1) \lambda - \lambda \langle m^2 \rangle + (2\gamma + \epsilon(\nu_0 - 1)^2 \lambda + \lambda) \langle m \rangle + \\ &\quad + 4 D_\lambda \langle m \rangle + \epsilon \gamma \end{aligned} \quad (3.100)$$

y comparando con el resultado exacto obtenido en la sección A observamos la ausencia en estas ecuaciones de los términos cruzados, en este caso sencillo - $3 \epsilon D_\lambda \langle m \rangle$. Como conclusión podemos decir que en esta aproximación no se reproducen los términos cruzados. Hacemos notar que en el tratamiento simultáneo de ruido interno-externo en reactores nucleares, ésta ha sido la aproximación comúnmente empleada (Seifritz (1971), Williams (1974))

La ausencia de estos términos se debe a no considerar como fluctuantes los parámetros que aparecen en la fórmula de Schottky.

ii) Vamos a ver de que forma se pueden considerar estos términos cruzados manteniendo las ecuaciones de Langevin. Para ello podemos utilizar la ecuación de Langevin, con la fuente en forma explícita (III.2.b)

$$\dot{n} = ((\nu_0 - 1) - \lambda - \lambda) n + \gamma - \xi_\lambda n + \sqrt{E} \left[\left(\frac{\nu_0 - 1}{\lambda - (\nu_0 - 1) + \xi_\lambda} + \gamma \right)^{\frac{1}{2}} \omega(t) \right] \quad (3.101)$$

con $\omega(t)$ ruido blanco normalizado $\langle \omega(t) \omega(t') \rangle = \delta(t-t')$

Se comprende fácilmente que esta ecuación resulta inabordable por presentar el ruido externo de modo muy complicado. Este no puede ser el tratamiento adecuado. Consideremos otro tipo de ecuaciones de Langevin, no usadas hasta ahora en reactores nucleares, pero conocidas en otros campos (Van Kampen 1981): (ver III.2)

$$\dot{n} = ((\nu_0 - 1) - \lambda - \lambda) n + \gamma - \xi_\lambda n + \sqrt{E} \left[\left(\frac{\nu_0 - 1}{\lambda - (\nu_0 - 1) + \xi_\lambda} + \gamma \right)^{\frac{1}{2}} \omega(t) \right] \quad (3.102)$$

ahora el ruido externo en la fuente equivalente es multiplicativo y en forma de raíz cuadrada. Presenta un aspecto más tratable como ecuación de Fokker-Planck:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(n,t)}{\partial t} = & - \frac{\partial}{\partial n} \left[((\nu_0 - 1) - \lambda - \lambda) n + \gamma \right] P(n,t) + \xi_\lambda \frac{\partial}{\partial n} n P(n,t) + \\ & + \frac{E}{2} \frac{\partial^2}{\partial n^2} \left[\left(\frac{\nu_0 - 1}{\lambda - (\nu_0 - 1) + \xi_\lambda} + \gamma \right)^2 n^2 \right] P(n,t) + \\ & + \frac{E}{2} \xi_\lambda \frac{\partial^2}{\partial n^2} n P(n,t) \end{aligned} \quad (3.103)$$

Esta es la aproximación de la ecuación de Fokker-Planck no lineal pero con ruido externo. Promediando esta ecuación con respecto al ruido

externo se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{P}}{dt} = & -\frac{\partial}{\partial m} [(\nu_0-1)\mathcal{L}-\lambda] m + \gamma] \bar{P} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2}{\partial m^2} [(\nu_0-1)\mathcal{L} + \lambda] m + \gamma] \bar{P} + \\
 & + D_A \frac{\partial^2}{\partial m^2} m^2 \bar{P} - D_A \frac{\partial}{\partial m} m \bar{P} + D_A \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^3}{\partial m^3} m^2 \bar{P} - D_A \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2}{\partial m^2} m \bar{P} + \\
 & + D_A \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^3}{\partial m^3} m^2 \bar{P} - D_A \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2}{\partial m^2} m \bar{P} + D_A \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{\partial^4}{\partial m^4} m^2 \bar{P} - \quad (3.104) \\
 & - D_A \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^3}{\partial m^3} m \bar{P}
 \end{aligned}$$

que es una ecuación con derivadas cuartas. A partir de (3.104) obteniendo los primeros momentos

$$\begin{aligned}
 \langle \dot{m}_1 \rangle & = (\nu_0-1)\mathcal{L}-\lambda \langle m \rangle + \gamma + D_A \langle m \rangle \\
 \langle \dot{m}_2 \rangle & = 2(\nu_0-1)\mathcal{L}-\lambda \langle m^2 \rangle + 2\gamma \langle m \rangle + 2D_A \langle m^2 \rangle + \\
 & + \varepsilon [(\nu_0-1)\mathcal{L} + \lambda] \langle m \rangle + \gamma] + 2D_A \langle m^2 \rangle - \quad (3.105) \\
 & - 3D_A \varepsilon \langle m \rangle
 \end{aligned}$$

Se encuentra la expresión correcta para ellos. En esta ecuación existe el término de cruce. Se concluye pues que la ecuación de Langevin (3.102) reproduce los dos primeros momentos correctamente, sin embargo y dado que las aproximaciones de Langevin son útiles por su sencillez respecto a la ecuación maestra inicial, en este caso se puede pensar que no supone una simplificación excesiva por lo que dudamos de su eficacia. Abandonamos pues la imagen de Langevin para estudiar una formulación equivalente por momentos.

iii) Introduzcamos el ruido externo en la misma ecuación para los momentos (3.97), (3.98)

$$\langle \dot{M} \rangle_{int.} = (\nu_0 - 1) \mathcal{L} - \lambda \langle M \rangle_{int.} + \mathcal{D} - \xi_{\lambda} \langle M \rangle_{int.} \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned} \langle M^2 \rangle_{int.} &= 2(\nu_0 - 1) \mathcal{L} - \lambda \langle M^2 \rangle_{int.} + \langle \mathcal{D} \rangle + \xi (\nu_0 - 1)^2 \mathcal{L} + \lambda \langle M \rangle_{int.} + \\ &+ \xi \mathcal{D} - 2 \xi_{\lambda} \langle M^2 \rangle_{int.} + \xi \xi_{\lambda} \langle M \rangle_{int.} \end{aligned} \quad (3.107)$$

Si en estas ecuaciones tomamos valores medios respecto al ruido externo, teniendo presente que aplicando la fórmula de Novikov se verifica:

$$\begin{aligned} \overline{\xi_{\lambda} \langle M \rangle_{int.}} &= - D_{\lambda} \langle M \rangle \\ \overline{\xi_{\lambda} \langle M^2 \rangle_{int.}} &= D_{\lambda} (-2 \langle M^2 \rangle + \xi \langle M \rangle) \end{aligned} \quad (3.108)$$

obtenemos los buenos resultados (3.105). Como conclusión vemos que en la búsqueda de una ecuación de Langevin equivalente nos encontramos con que el tratamiento comúnmente empleado no tiene en cuenta los términos cruzados. Puede existir, sin embargo, una ecuación de Langevin generalizada que los reproduce correctamente pero su nivel de complicación es similar al de la ecuación maestra inicial. Respecto a la aproximación de Langevin normal utilizada en trabajos anteriores (Seifritz (1971)) se concluye que será válida cuando el efecto cruzado de ambos ruidos sea despreciable. Vamos a estudiar esto en nuestro modelo representado por (3.95):

Se trata de un modelo puntual sin neutrones retardados y como parámetro estadístico significativo tomemos las fluctuaciones relativas ec. (3.79) sin neutrones retardados

$$\begin{aligned} \frac{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}{\langle N \rangle^2} &= \frac{\{ D_{\lambda} + (\nu_0 - 1) Q_{\lambda} \}}{(\tilde{\lambda}_2 - (\nu_0 - 1) \tilde{\lambda}_2)} + \frac{D_0}{\Delta^2} \frac{(\tilde{\delta}_1 - (\nu_0 - 1) \tilde{\lambda}_1)^2}{(\tilde{\lambda}_2 - (\nu_0 - 1) \tilde{\lambda}_2)} + \\ &+ \frac{(\frac{\nu_{02}}{2} \mathcal{L} + \tilde{\delta}_2 - (\nu_0 - 1) \tilde{\lambda}_2)(\tilde{\delta}_1 - (\nu_0 - 1) \tilde{\lambda}_1)}{\Delta \nu (\tilde{\lambda}_2 - (\nu_0 - 1) \tilde{\lambda}_2)} \end{aligned} \quad (3.109)$$

Las fluctuaciones aditivas D_0 no presentan términos cruzados y no van a

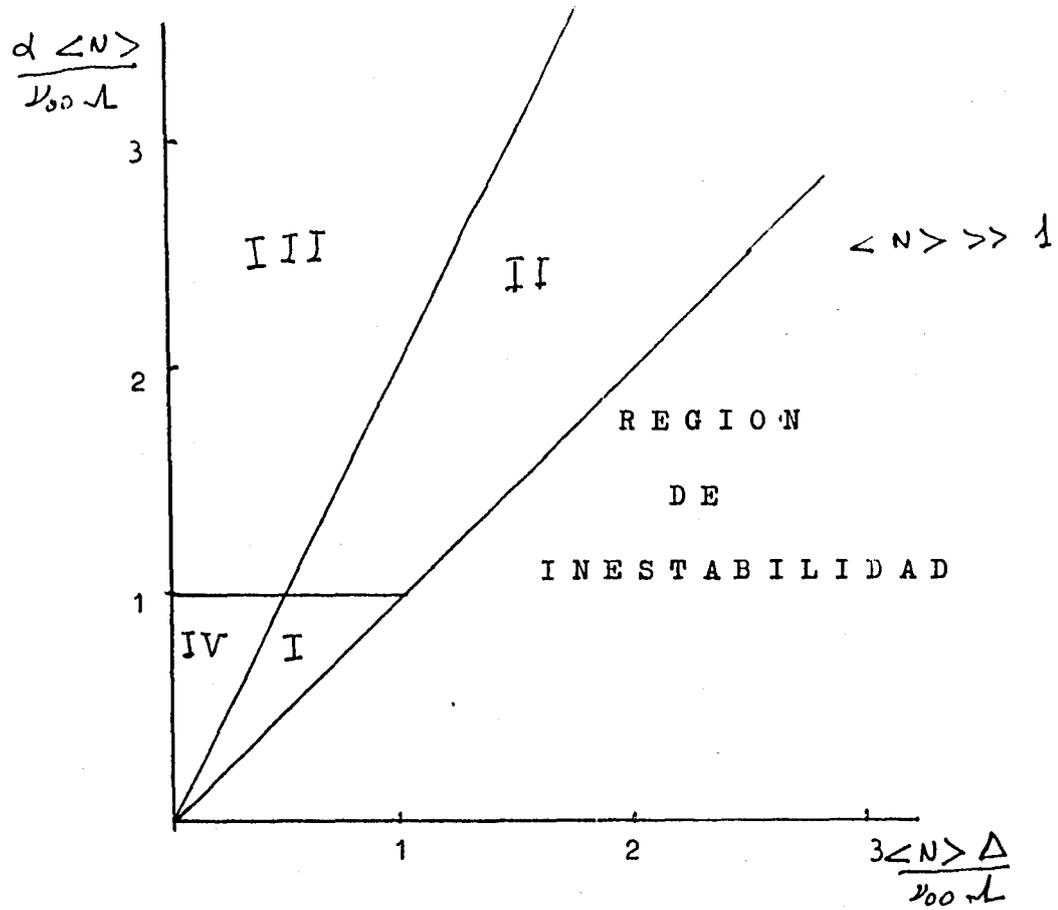


Fig. III.1.- Regiones de validez de las fuentes equivalentes en un modelo puntual sin neutrones retardados. (La región de inestabilidad lo es en el sentido de medias y varianzas.)

influir en este análisis por lo que prescindiremos de su estudio. En la ecuación (3.109) podemos separar la contribución de cada ruido para estudiar en que condiciones de los parámetros van a valer las aproximaciones de Langevin. Para el ruido externo puro se tiene:

$$F_e = \frac{D_\lambda + (\nu_0 - 1) D_A}{(\tilde{\lambda}_2 - (\nu_0 - 1) \tilde{\lambda}_1)} = \frac{\Delta}{(\tilde{\lambda}_2 - (\nu_0 - 1) \tilde{\lambda}_1)} \quad (3.110)$$

para el interno puro:

$$F_i = \frac{\nu_{00} - 1}{2 \nu} + \frac{\lambda - (\nu_0 - 1) - 1}{\nu} \quad (3.111)$$

y para la contribución de ambas (términos cruzados):

$$F_{ei} = F_e \times F_i + F_e \frac{1}{\nu} \left((\nu_0 - 1) \left(\frac{3\nu_{00}}{2} - 2 \right) D_A - 2 D_\lambda \right) \quad (3.112)$$

Supongamos que mantenemos $\langle N \rangle$ constante

$$\langle N \rangle = \frac{\nu}{(\tilde{\lambda}_1 - (\nu_0 - 1) \tilde{\lambda}_2)} = \frac{\nu}{\alpha} \quad (3.113)$$

y hacemos variar ν y α . Para fijar ideas vamos a tomar

$$(\nu_0 - 1) \left(\frac{3\nu_{00}}{2} - 2 \right) D_A - 2 D_\lambda \geq 0$$

En la figura (III.1) aparecen las diferentes regiones de validez en función de los parámetros del ruido externo e interno que explicamos a continuación:

Región I: $\frac{\Delta}{\alpha - \Delta} > 1$; $\left(\frac{\nu_{00} - 1}{\alpha} + \frac{\alpha + \Delta}{\alpha} \right) > \langle N \rangle$

Esta es una zona en la que los términos cruzados contribuyen mas que los de cada ruido aisladamente. Por consiguiente, no valdrá ningún tipo de aproximación a excepción de la de Langevin complicada (3.102). En concreto no es válido ninguno de los tratamientos hechos en reactores nucleares

$$\text{Región II: } \frac{\Delta}{\alpha - \Delta} > 1 ; \left(\frac{\nu_{00} - 1}{\alpha} + \frac{\alpha + \Delta}{\alpha} \right) \ll \langle N \rangle$$

Los términos cruzados contribuyen más que los de ruido interno pero menos que los de ruido externo. Tampoco en esta región son válidas las aproximaciones de fuente equivalente, aunque ahora, para ruido interno despreciable, se tienen en cuenta los efectos de ruido externo.

$$\text{Región III: } \frac{\Delta}{\alpha - \Delta} < 1 ; \left(\frac{\nu_{00} - 1}{\alpha} + \frac{\alpha + \Delta}{\alpha} \right) \ll \langle N \rangle$$

Los términos cruzados no contribuyen tanto como los otros y en esta región sí son válidas las ecuaciones de Langevin. Por lo tanto, en esta zona, si el orden de fluctuación del ruido externo es de $\frac{1}{\sqrt{V}}$ serán válidos las tres tipos de métodos usados en reactores (III.1.C); si la magnitud de la fluctuación del externo no va con $\frac{1}{\sqrt{V}}$ solamente será válida la primera aproximación fenomenológica.

$$\text{Región IV: } \frac{\Delta}{\alpha - \Delta} < 1 ; \left(\frac{\nu_{00} - 1}{\alpha} + \frac{\alpha + \Delta}{\alpha} \right) > \langle N \rangle$$

Los términos cruzados contribuyen más que el ruido externo pero menos que el interno; no serán válidas las ecuaciones de Langevin. Esta región no tiene importancia física ya que no es frecuente el caso de fluctuaciones externas más débiles que las internas.

III.3.D. ESTUDIO CON RUIDOS NO BLANCOS

Es conveniente ampliar nuestro tratamiento a ruidos externos generales por dos razones principalmente: Una de ellas es común a cualquier sistema y es que el ruido blanco es una idealización de cierto tipo de ruidos que no existe en la naturaleza; otra, específica de nuestro problema concreto de tratamiento de ruidos externos e internos, es que el ruido externo, al formar parte de una probabilidad de transición y ser ésta siempre positiva, tiene limitaciones físicas que un ruido blanco no puede cumplir. En ambos casos se usa el ruido blanco como una cierta aproximación que permite resultados analíticos sencillos. Nuestro estudio simul-

táneo va a tener la complejidad de tratamiento propia de las ecuaciones estocásticas con ruidos no blancos amplificada con la presencia del ruido interno a través de la ecuación maestra.

Parte de esta sección presenta una metodología aplicada por primera vez a sistemas físicos, por lo que requerirá mayor exposición.

En primer lugar, formulamos el problema global con ruidos totalmente generales $\xi_I(t)$, donde I se refiere al tipo de proceso; I = A absorción, I = D fuente, I = A fisión. Partimos de la ecuación de función generatriz (3.45) expuesta en forma operacional:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \hat{M} G + \sum_I \xi_I \hat{L}_I \quad (3.114)$$

con \hat{M} y \hat{L} operadores de la forma:

$$\hat{M} = (x-1)v_0 + \sum_{i=1}^I (x-y_i) a_i \frac{\partial}{\partial y_i} + [\lambda(1-x) + \lambda \{ \theta(x, y_1, \dots, y_I) - x \} + \lambda d(2-x)] \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.115)$$

$$\hat{L}_A = (1-x) \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{L}_D = [\theta(x, y_1, \dots, y_I) - x] \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.116)$$

$$\hat{L}_D = v(x-1)$$

Formalmente (3.114) es análoga a una ecuación de Liouville estocástica por lo que podemos aplicar el formalismo de Van Kampen (1974) para obtener la ecuación para la función generatriz promediada

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial t} = \hat{M} \bar{G} + \left\{ \sum_I \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{i-1}} ds_i \ll \sum_I \xi_I(t) \hat{L}_I e^{-\hat{A}(t-s_i)} \right. \\ \left. \sum_I \xi_I(s_1) \hat{L}_I e^{-\hat{A}(s_1-s_2)} \dots e^{-\hat{A}(s_{i-1}-s_i)} \sum_I \xi_I(s_i) \hat{L}_I e^{-\hat{A}(s_i-t)} \gg \right\} \bar{G}(x, y_i, \bar{q}, t) \quad (3.117)$$

$\langle\langle \quad \rangle\rangle$ significa la expresión de los cumulantes ordenados de V. Kampen con respecto al ruido externo.

Quando los operadores \hat{L} y \hat{M} conmutan los cumulantes $\langle\langle \quad \rangle\rangle$ se reducen a los ordinarios y la expresión (3.117) es fácilmente resoluble. En el tratamiento de ecuaciones diferenciales existen varios casos lineales o reducibles a lineales en los que los operadores conmutan (San Miguel 1980) en nuestro caso actual prácticamente solo ocurre cuando ambos son iguales $\hat{M} \equiv \hat{L}$; de ahí la gran complicación que surge incluso para casos sencillos, que hace que, en general, (3.117) sea intratable.

Vamos a centrar nuestra atención en un caso que abarca gran cantidad de situaciones prácticas: la intensidad del ruido es débil por lo que en el orden más bajo nos quedamos con el primer cumulante de (3.117). A fin de lograr mayor claridad y simplicidad vamos a despreciar el efecto de neutrones retardados $\hat{M} \equiv (\kappa-1)v_0 + [\lambda(1-\kappa) + \lambda\{g(\kappa)-\kappa\}] \frac{d}{dx}$ y considerar dos casos conceptualmente distintos: i) ruido externo aditivo con función de correlación exponencial:

$$\langle \xi_2(t_1) \xi_2(t_2) \rangle = D_2 \gamma_2 e^{-\gamma_2 |t_1 - t_2|} \quad (3.118)$$

siendo γ_2 el inverso del tiempo de correlación y ii) Ruido externo multiplicativo en la absorción con la misma forma de la función de correlación:

$$\langle \xi_\lambda(t_1) \xi_\lambda(t_2) \rangle = D_\lambda \delta_\lambda e^{-\delta_\lambda |t_1 - t_2|} \quad (3.119)$$

i) Como hemos dicho, en el primer orden de la intensidad del ruido solo contribuye el primer cumulante. Operando en su interior, obtenemos

$$\begin{aligned} e^{-\hat{M}(t_2)} \hat{L}_2 e^{-\hat{M}(t_1)} &= \hat{L}_2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(t_2-t_1)^m}{m!} [\hat{M} [\hat{M} \dots [\hat{M}, \hat{L}_2] \dots]] = \\ &= v(\kappa-1) + v \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(t_2-t_1)^m}{m!} (F(F \dots (F'F)') \dots)' \end{aligned} \quad (3.120)$$

con $[,]$ conmutador y $F = [\lambda(1-x) + \lambda \{g(x) - x\}]$ (3.121)

El caso aditivo es sencillo pues, si bien los operadores \hat{L} y \hat{M} no conmutan en el interior de los cumulantes, se obtienen expresiones como (3.120), es decir, son C-números y por lo tanto fácilmente tratables. En concreto, para un ruido aditivo gaussiano los cumulantes mayores que el tercero se anularían y nuestro desarrollo sería exacto. Así pues nuestra ecuación para la función generatriz se escribe como:

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial t} = A \bar{G} + \int_0^t dt' D_2 \gamma_2 v^2 e^{-\gamma_2(t-t')} (x-1)^2 \bar{G}(x, z, t) + \int_0^t dt' D_2 \gamma_2 v^2 e^{-\gamma_2(t-t')} (x-1) \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(t-t')^m}{m!} (F(F_{m-1}(F F')'))' \bar{G}. \quad (3.122)$$

El efecto del ruido interno se aprecia ahora en la forma de F donde solamente en el caso de no existencia de fisión, $F = \lambda(1-x)$ la ecuación (3.122) toma una forma sencilla similar a la obtenida en ecuaciones diferenciales con ruido externo:

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial t} = \hat{H} \bar{G} + \int_0^t dt' D_2 \gamma_2 v^2 e^{-\gamma_2(t-t')} (x-1)^2 e^{-\lambda(t-t')} \bar{G}. \quad (3.123)$$

De cualquier modo a los primeros momentos solo contribuirán las potencias bajas de $(x-1)$ y en un caso general es posible encontrarlas:

$$F[F[F[F \dots F F']']']' = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_m=0}^{\infty} i_1(i_1+i_2-1)(i_1+i_2+i_3-2) \dots (i_1+i_2+\dots+i_{m-1}-(m-2)) \cdot a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m} (x-1)^{i_1+i_2+\dots+i_m-(m-1)}. \quad (3.124)$$

estando definidas las a_i como $a_i = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i F}{\partial x} \Big|_{x=1}$, que en nuestro caso anterior dan:

$$\begin{aligned} a_0 &= \lambda d(z-1) \\ a_1 &= -\lambda + \lambda(\lambda-1) \\ a_i &= \sum_{j=1}^i \frac{i(i-1) \dots (i-j+1)}{j!} p(j). \end{aligned} \quad (3.125)$$

Con $z = 0$ obtenemos para los primeros órdenes en $(x-1)$

$$F[F[F \dots F']]' \dots]' = a_1^m (x-1) + (2^m a_2) a_1^{m-1} (x-1)^2 + \dots \quad (3.126)$$

sustituyendo en (3.122) y operando como siempre obtenemos para los primeros momentos:

$$\frac{\delta \langle N \rangle}{\delta t} = (\mu_0 - 1) \lambda - \lambda \langle N \rangle + \delta V \quad (3.127)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \langle N(N-1) \rangle}{\delta t} &= 2(\mu_0 - 1) \lambda - \lambda \langle N(N-1) \rangle + [2\delta V - \lambda(\mu_0 - 1) + \mu_{00}] \langle N \rangle \\ &+ \delta V + 2D_0 \gamma_0 v^2 \int_0^t e^{-(\delta_0 + \lambda - (\mu_0 - 1)t) + \mu_{00} t'} dt' \end{aligned} \quad (3.128)$$

Los valores estacionarios son:

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \frac{\delta V}{\lambda - (\mu_0 - 1) \lambda} \\ \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle &= \frac{\delta V + \frac{2D_0 \gamma_0 v^2}{(\mu_0 + \lambda - (\mu_0 - 1) \lambda)} + (2\delta V + \lambda(\mu_0 - 1)) \langle N \rangle}{[\lambda - (\mu_0 - 1) \lambda]} \end{aligned} \quad (3.129)$$

donde se ve que el efecto del tiempo de correlación es disminuir el del ruido por un factor $\frac{\gamma_0}{(\mu_0 + \lambda - (\mu_0 - 1) \lambda)}$.

ii) Tratemos ahora el ruido multiplicativo ξ_λ y operemos de la misma forma que antes; ahora $\hat{A} = (x-1) v_0 + a(x) \frac{d}{dx}$; $\hat{L} = b(x) \frac{d}{dx}$

$$\begin{aligned} e^{-\hat{A}(t+\tau)} \hat{L}_\lambda e^{\hat{A}(t+\tau)} &= L_\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} [A[A \dots [A, \hat{L}_\lambda] \dots]] \frac{(t+\tau)^n}{n!} = \\ &= L_\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t+\tau)^n}{n!} F_n(x) \frac{d}{dx} + v_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t+\tau)^n}{n!} \sum_{l=1}^n A_{nl}(x) \end{aligned} \quad (3.130)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 F_0(x) &= (1-x) \\
 F_1(x) &= a(x) b'(x) - b(x) a'(x) \\
 F_n(x) &= a(x) F_{n-1}'(x) - F_{n-1}(x) a'(x) \\
 A_{ne}(x) &= - \underbrace{[a(x) \dots a(x)]}_{n-e} [a(x) \cdot F_{e-1}'(x)]'
 \end{aligned}
 \tag{3.131}$$

Observamos que (3.130) ya no es un G-número y no va a conmutar en el interior de los cumulantes. Contrariamente al caso aditivo un ruido gaussiano tendrá infinitos cumulantes. Para el primer orden en la intensidad del ruido se tiene la ecuación

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{G}}{\partial t} &= \lambda \bar{G} + \int_0^t d\tau D_\lambda \gamma_\lambda e^{-\gamma_\lambda(t-\tau)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-\tau)^n}{n!} b(x) \frac{\partial}{\partial x} F_n(x) \frac{\partial}{\partial x} G(x,t) + \\
 &+ \nu_0 \int_0^t d\tau D_\lambda \gamma_\lambda e^{-\gamma_\lambda(t-\tau)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-\tau)^n}{n!} \sum_{e=1}^n b(x) \frac{\partial}{\partial x} A_{ne}(x) G(x,t)
 \end{aligned}
 \tag{3.132}$$

En nuestro caso:

$$\begin{aligned}
 b(x) &= (1-x) \\
 a(x) &= \lambda(1-x) + \lambda \int g(x-x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n
 \end{aligned}
 \tag{3.133}$$

Efectuando:

$$\begin{aligned}
 F_n(x) &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=0}^{\infty} (i_n-1)(i_n-i_{n-1}-1)(i_n+i_{n-1}-i_{n-2}-1) \dots (i_n+\dots+i_2-i_1-(n-2)) a_{i_1} \dots a_{i_n} \\
 &= (x-1)^{i_1+i_2+\dots+i_n-(n-1)} = \sum_{i=0}^{\infty} A_i^n (x-1)^i
 \end{aligned}
 \tag{3.134}$$

$$\begin{aligned}
 A_{ne}(x) &= \sum_{i_0, i_1, \dots, i_{n-e}} a_{i_0} (i_0+i_1-1)(i_0+i_1+i_2-2) \dots (i_0+i_1+\dots+i_{n-e-1}-(n-e-1)) A_{i_0}^{e-1} \\
 &= a_{i_0} a_{i_1} \dots a_{i_{n-e}} \cdot (x-1)^{i_0+i_1+\dots+i_{n-e}-(n-e)}
 \end{aligned}
 \tag{3.135}$$

La estructura del término fuente A_{ne} es igual a la encontrada en i), solamente adquiere una expresión resumable exponencialmente para $\lambda = 0$. La estructura del término multiplicativo (3.134) es diferente, únicamente adquiere un aspecto resumable para el caso de un solo salto: $F_n(x) = a_2 \cdot a_1^{n-1} \cdot (x-1)^2$

En los primeros órdenes en $(x-1)$:

$$F_0(x) = (1-x)$$

$$F_n(x) = a_2 a_1^{n-1} (x-1)^2 + \dots$$

$$A_{ne}(x) = \delta_{e,1} a_1^{n-1} (x-1) + \left\{ 2^{n-2} a_2 a_1^{n-2} + (2^{n-2} - 2) a_1^{n-2} \cdot a_2 \cdot \delta_{e,1} \right\} (x-1)^2$$

Efectuando para los momentos:

$$\frac{\partial \langle N \rangle}{\partial t} = -(\lambda - (\nu_0 - 1)\mu) \langle N \rangle + \Delta V + \int_0^t du D_\lambda \delta_\lambda e^{-\delta_\lambda(t-u)} \langle N(t) \rangle - \frac{V \Delta D_\lambda \delta_\lambda}{(\lambda - \lambda(\nu_0 - 1))} \int_0^t du e^{-\delta_\lambda(t-u)} \left(1 - e^{-(\lambda - \lambda(\nu_0 - 1))(t-u)} \right)$$

y para el primer momento estacionario:

$$\langle N \rangle_{st} = \frac{\Delta V}{\lambda - (\nu_0 - 1)\mu - D_\lambda} \left[1 - \frac{D_\lambda}{\delta_\lambda + (\lambda - \lambda(\nu_0 - 1))} \right]$$

donde nuevamente observamos que cuando el tiempo de correlación aumenta el valor medio disminuye. El efecto de color es pues estabilizador.

CAPITULO IV:

ESTUDIO DE MODELOS ESTOCASTICOS NO LINEALES EN REACTORES NUCLEARES

IV.1.- NECESIDAD DEL ESTUDIO DE MODELOS NO LINEALES EN LA TEORÍA ESTOCÁSTICA DE REACTORES NUCLEARES

Es bien conocido en la teoría determinista de dinámica de reactores que el efecto no lineal de temperatura actúa como principal estabilizador en los aumentos bruscos de reactividad. De la misma forma, el efecto de temperatura estabiliza el aumento de reactividad que se origina por la existencia de ruidos en el reactor nuclear, sobre todo cuando la intensidad de éstos es elevada.

En una teoría estocástica aparece además un fenómeno, conocido por el nombre de "catástrofe de varianza" (Williams, 1971, 1974), que es irrelevante en la teoría determinista, y aquí tiene gran importancia: un reactor en estado crítico, incluso teniendo únicamente en cuenta las fluctuaciones internas, presenta una varianza estacionaria infinita y, por tanto, ha de considerarse como inestable. Según Williams este fenómeno constituye una "fuente de irritación continua" pues dificulta el análisis de resultados experimentales y su explicación permanece aún abierta.

Varias son las posturas adoptadas por los diversos autores que han tratado el tema; la más difundida es suponer que el reactor nunca está en un estado exactamente crítico, sino que permanece subcrítico con una débil fuente de neutrones espontánea. Este argumento no nos parece convincente pues, como más adelante veremos, un reactor en estas condiciones es muy inestable frente a las fluctuaciones paramétricas en la reactividad. Creemos más convincente la postura de Williams quien piensa que ha de existir algún efecto estabilizador, ya sea debido a la temperatura (en los reactores de potencia) o a un control externo (en potencia cero).

Experimentalmente y en las frecuencias de interés este fenómeno no se manifiesta de forma inmediata; sin embargo, a frecuencias bajas se

observa gran dispersión entre teoría y experiencia (órdenes de magnitud de 10^6 , Kataoka (1975)). Este error puede ser debido a deficiencias en el modelo y sobre todo, bajo nuestro punto de vista, a considerar modelos lineales o linealizados que no tienen en cuenta el efecto estabilizador de la temperatura.

Existe otro tipo de problemas que no pueden ser abordados por linealización y están asociados a la existencia de ruidos externos intensos. Aparecen fundamentalmente en los reactores de agua en ebullición a potencias altas y se manifiestan como fluctuaciones espontáneas de gran amplitud. Ackasu (1961) explica parte de las observaciones experimentales sin embargo, como bien puntualiza Williams (1974), la forma de las fluctuaciones indica la existencia de un acoplamiento interno, posiblemente de temperatura.

En este capítulo estudiamos modelos no lineales, con efecto de temperatura y ruidos externos, abordando los dos tipos de problemas expuestos con técnicas diferentes a la linealización usual. Con ello quedan satisfactoriamente explicados de forma cualitativa. Las técnicas utilizadas, que en algún caso sencillo son exactas, nos permiten además hacer un estudio de la validez de las aproximaciones de linealización.

IV.2.- MODELOS NO LINEALES: EFECTOS DE TEMPERATURA Y ESCALAS DE TIEMPOS

Trataremos de reducir los modelos usuales a una descripción sencilla teniendo en cuenta las escalas de tiempos de los fenómenos que intervienen. Continuando con el esquema del Capítulo II suponemos al reactor descrito por las ecuaciones (2.19) donde ahora se desprecia el

ruido interno y se introduce el ruido externo a través de los coeficientes:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{(K(1-\beta) - 1)}{l} N + \sum_i \lambda_i c_i + S$$

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{K \beta_i}{l} N - \lambda_i c_i$$

$$\frac{dE_F}{dt} = \frac{K(1-\beta)}{l \nu_0} N + h(E_c - n E_F) \quad (4.1)$$

$$\frac{dE_c}{dt} = -h(E_c - n E_F) - \lambda_r (E_c - Y_0^{in})$$

donde $K = K_0 + \xi_K$ siendo ξ_K el ruido externo. De acuerdo con el análisis realizado en el Cap. III el ruido interno puede despreciarse respecto al externo cuando el volumen es grande y el externo no escala con $\frac{1}{V}$.

La definición del factor de multiplicación y la vida media neutrónica ha sido hecha en (III.3.B, (3.51)). El resto de los parámetros de intercambio de calor son conocidos (II.2.B). El acoplamiento debido a la temperatura se hace a través del factor de multiplicación K y puede ser por diversos mecanismos, algunos de los cuales van a ser importantes por lo que nos detendremos en su estudio.

IV.2.A.- ACOPLAMIENTOS DE TEMPERATURA

Vamos a seguir el tratamiento determinista en el estudio de la variación de el factor de multiplicación con la temperatura. Recordemos que en nuestra ecuación (4.1) K aparece como un ruido $K_0 + \xi_K(t)$. Se ha de suponer que la influencia de temperatura es sobre el valor medio K_0 , despreciando el efecto del ruido en el acoplamiento.

Siguiendo a Lamarsh (1965) expresamos K_0 por medio de la fórmula de los cuatro factores, como $K_0 = \nu_T \cdot \epsilon \cdot f \cdot p$ donde:

- ν_T = Número medio de neutrones de fisión por neutrón absorbido en el fuel
- f = Utilización térmica
- p = Probabilidad de escape a las resonancias
- ϵ = Factor de fisión rápida.

La temperatura actúa de manera diferente sobre cada uno de los factores indicados, y dependiendo del tipo de reactor su importancia es mayor o menor. Asimismo su influencia no es instantánea sino que puede ser a través de mecanismos complicados con un cierto retardo. No estamos interesados en un análisis detallado de tales mecanismos (para ello ver Lamarsh (1965), Bell and Gladstone (1970)), por ello abordaremos en principio un estudio muy general y aproximado, para después estudiar con detalle el efecto más importante en cuanto a estabilidad, que es el efecto Doppler instantáneo.

a.- Acoplamiento linealizado

Derivando respecto a la temperatura en la fórmula de los cuatro factores y dividiendo por K_0 uno obtiene:

$$\frac{1}{K_0} \frac{dK_0}{dT} \Big|_{T_0} = \frac{1}{\nu_T} \frac{d\nu_T}{dT} \Big|_{T_0} + \frac{1}{f} \frac{df}{dT} \Big|_{T_0} + \frac{1}{p} \frac{dp}{dT} \Big|_{T_0} + \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dT} \Big|_{T_0}$$

$$\alpha_{T_0}(K_0) = \alpha_{T_0}(\nu_T) + \alpha_{T_0}(f) + \alpha_{T_0}(p) + \alpha_{T_0}(\epsilon).$$

(4.2)

siendo $\alpha_{T_0}(K_0)$ el coeficiente de temperatura debido a ν_T , $\alpha_{T_0}(f)$ el coeficiente de temperatura debido a f etc..

A continuación se supone que K_0 es linealizable alrededor de una cierta temperatura de funcionamiento T_0 :

$$\begin{aligned} K_0(T) &= K_0(T_0) + (T - T_0) \left. \frac{dK_0}{dT} \right|_{T_0} = K_0(T_0) (1 - T_0 \alpha_{T_0}(K)) + \\ &+ T K_0(T_0) \alpha_{T_0}(K) = \\ &= K_{000} + \delta_K T \end{aligned} \quad (4.3)$$

con lo que obtenemos en primera aproximación el acoplamiento linealizado con la temperatura. Los coeficientes α_{T_0} se calculan teórica y experimentalmente existiendo mayor o menor acuerdo según la complejidad del mecanismo de acoplo. Para fluctuaciones débiles de temperatura es lógico que la aproximación sea mejor, sin embargo un problema es que en esta aproximación tan simple no se tiene en cuenta el retardo en la respuesta a la temperatura.

Como ya hemos anunciado, de todos los fenómenos de acoplo hay uno, el efecto Doppler en la absorción resonante, que tiene una singular importancia por actuar de forma instantánea. Cuando se produce una perturbación de reactividad, el primer mecanismo de estabilización es debido al efecto Doppler. Por ello en el estudio de ruidos intensos será el único a tener en cuenta. Conviene, pues, obtener una descripción mas exacta que la pura linealización.

b.- Efecto Doppler en la captura resonante

El efecto Doppler instantáneo actúa a través de K_0 en la probabilidad de escape a las resonancias. En función de la temperatura, esta probabilidad viene dada por Lamarsh (1965) :

$$P = \exp \left\{ - \frac{N_E V_E I(T)}{\epsilon_F \sum_{PF} V_K + \epsilon_M \sum_{SM} V_M} \right\} \quad (4.4)$$

donde

$N_{F/M}$ = Número de átomos de fuel/moderador en el reactor

$V_{F/M}$ = Volumen total de fuel/moderador

Σ_{PF} = Sección eficaz de absorción resonante en el fuel

Σ_{SM} = Sección eficaz de "scattering" en el moderador

$\epsilon_{F/M}$ = Incremento medio de letargía

$I(T)$ = Integral en la resonancia

La variación con la temperatura de $I(T)$ se conoce experimental y teóricamente en un amplio intervalo ($300^{\circ}\text{K} - 1500^{\circ}\text{K}$) y viene dada por:

$$I(T) = I(T_0) \left[1 + \beta_I (\sqrt{T} - \sqrt{T_0}) \right] \quad (4.5)$$

siendo T_0 una temperatura de referencia y $I(T_0)$, β_I constantes conocidas. La sustitución de (4.5) en (4.4) y la aplicación de la fórmula de los cuatro factores da para K_0

$$K_0 = \tilde{K} \exp \left[- \frac{N_F V_F I(T_0) \beta_I \sqrt{T}}{\epsilon_F \Sigma_{PF} V_F + \epsilon_H \Sigma_{SM} V_H} \right] \quad (4.6)$$

$$\tilde{K} = n_T f \epsilon \exp \left[\frac{N_F V_F I(T_0) (1 - \beta_I \sqrt{T_0})}{V_F \epsilon_F \Sigma_{PF} + \epsilon_H \Sigma_{SM} V_H} \right] \quad (4.7)$$

Si linealizamos (4.6) respecto a T_0 se obtendría una expresión similar a (4.3). Dispondremos de estas dos expresiones para nuestros posteriores análisis. Es obvio que (4.7) va a ser muy complicada, por lo que se suele utilizar (4.3). Resulta interesante utilizar la expresión exacta (4.7) para comparar con los resultados obtenidos por la aproximada; ello será hecho más adelante (IV.5.A).

IV.2.B.- INTERCAMBIO Y DISIPACION DE ENERGIA

Las dos últimas ecuaciones del sistema (4.1) describen de forma sencilla el intercambio y la disipación de energía. Ya hemos indicado en el capítulo segundo que existen varios mecanismos de intercambio que, analizados a fondo, complicarían extraordinariamente el problema y además son específicos del tipo de reactor particular. Para un análisis cualitativo como el que realizamos la descripción por (4.1) resulta suficiente.

Analicemos en primer lugar las escalas de tiempos que intervienen en el problema. En forma integral podemos expresar las ecuaciones para la energía como:

$$\begin{aligned}
 E_F(t) &= h_F(t)[E_F(0) + h E_C(0)] + \int_0^t h_F(t-\tau) \frac{K(1-\beta)}{\ell V_0} N(\tau) d\tau + \Delta r \gamma_3^{in} \int_0^t h_F(t-\tau) d\tau \\
 E_C(t) &= (h_C(t) + n h^2 h_{C_2}(t)) E_C(0) + \int_0^t n h h_{C_2}(t-\tau) \frac{K(1-\beta)}{\ell V_0} N(\tau) d\tau + \\
 &\quad + n h h_{C_2}(t) E_F(0) + \Delta r \gamma_3^{in} \int_0^t (h_C(t-\tau) + n h h_{C_2}(t-\tau)) d\tau
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

donde

$$\begin{aligned}
 h_F(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega + h + \Delta r}{(\omega + h\eta)(\omega + h + \Delta r) - n h^2} \right\} \\
 h_{C_1}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(\omega + h + \Delta r)} \right\} \\
 h_{C_2}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega + h + \Delta r}{[(\omega + h\eta)(\omega + h + \Delta r) - n h^2][\omega + h + \Delta r]} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

con $\mathcal{L}^{-1} \{ \}$ } indicando la transformada inversa de Laplace. Las escalas

de tiempo propias de $E_F(t)$ se obtienen a partir de los polos de $h_F(\omega)$. Aproximadamente $E_F(t)$ se mueve en dos escalas de tiempos, una rápida $1/n\beta$ que representa el intercambio instantáneo con el refrigerante y otra más lenta $\approx 1/\lambda_r$ por efecto del refrigerante. La escala de tiempo rápida suele ser varios órdenes de magnitud más pequeña que el tiempo de evolución de los neutrones retardados, debido a lo cual es frecuente usar la aproximación instantánea (aproximación de Fuchs-Hansen (Bell (1970))).

$E_c(t)$ se mueve en una escala de tiempo aproximadamente dada por $1/(R+\beta)$ que es varios órdenes de magnitud superior al tiempo de evolución de los neutrones retardados. Es usual emplear la aproximación adiabática.

La discusión de aproximaciones a utilizar según la escala de tiempos observada se hará seguidamente (IV.2.c), para ello estudiamos antes la evolución neutrónica asociada.

IV.2.c.- EVOLUCION NEUTRONICA

Las ecuaciones para el número de neutrones N y precursores λ que aparecen en (4.1) corresponden a una descripción puntual general de un reactor sin acoplamientos. El estudio de las escalas de tiempos de evolución de esta parte neutrónica forma parte de los cursos básicos de dinámica de reactores, y por tanto no nos detendremos excesivamente en su explicación (Lamarsh, (1965), Bell (1970), Ackasu (1975)).

Nosotros estamos interesados en reducir el número de variables, y por ello, una primera aproximación, siempre utilizada en análisis de ruido, es suponer la existencia de un sólo grupo de neutrones retardados. Entonces aparecen dos escalas de tiempo diferenciadas, una de las cuales es rápida, correspondiente al efecto de los neutrones instantá-

neos $\tau \approx \ell / [K(1-\beta) \cdot 1]$ y la otra lenta, conocida con el nombre de periodo estable y debida a los neutrones retardados $t \approx \frac{\ell}{\lambda}$.

Teniendo en cuenta estas escalas de tiempo y la existencia de un ruido introducido en el factor de multiplicación vamos a analizar ahora las posibles situaciones en la evolución del sistema, debidas a la acción del ruido o perturbación externa. Vamos a distinguir dos casos diferentes; el primero es aquel en que los neutrones retardados no influyen decisivamente en la evolución y pueden ser despreciados. El segundo habrá de tener en cuenta al efecto de neutrones retardados.

a) Efecto de neutrones retardados despreciable

Los neutrones retardados serán despreciables cuando, o bien su retardo no es importante y pueden considerarse como cuasiinstantáneos: $\lambda \gg \frac{(K-1)\beta-1}{\ell}$ o bien cuando la intensidad de la perturbación, en nuestro caso el ruido, es fuerte de forma que son los neutrones instantáneos los que dominan la evolución del sistema: $D_K \gg \beta \cdot \ell$, donde D_K es la intensidad del ruido (Williams, 1971).

En ambos casos la ecuación de evolución toma una forma sencilla

$$\frac{dN}{dt} = \frac{(K-1)}{\ell} N + \frac{k_K}{\ell} N + S \quad (4.10)$$

y es válida para cualquier tiempo.

Introduzcamos ahora el acoplamiento de temperatura a través del coeficiente de multiplicación K_T . Como se trata con ruidos intensos y/o variaciones rápidas, el único efecto de acoplamiento a tener en cuenta será el efecto Doppler instantáneo. Asimismo únicamente actuará de forma eficaz el intercambio de calor cuya escala de tiempos sea rápida.

Tenemos por tanto a partir de (4.8) con

$$E_F(T) = \frac{\kappa(1-\beta)}{v_l \ell \nu_0} N(t) \quad (4.11)$$

que en función de la temperatura, $T_F = \frac{q E_F}{C_F M_F}$ (II.2.B), se escribe

$$T_F(t) = \frac{q E_F \kappa(1-\beta)}{v_l \ell \nu_0 C_F M_F} N(t) \quad (4.12)$$

y a partir de la fórmula de acoplamiento linealizado (4.3)

$$K_0 = K_{eff} + \frac{\delta_D q E_F \kappa(1-\beta)}{v_l \ell \nu_0 C_F M_F} N(t) = K_{eff} - \beta_D N(t) \quad (4.13)$$

Sustituyendo en (4.10)

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{\beta_D}{\ell} N^2 + \frac{(K_{eff}-1)}{\ell} N + \frac{\beta_K}{\ell} N + S \quad (4.14)$$

obtenemos la ecuación para el acoplamiento linealizado.

Para el acoplamiento exacto, sustituyendo (4.6) en vez de (4.3) se tiene

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{\ell} \left(\tilde{\kappa} e^{-\beta_0 \sqrt{N}} - 1 \right) N + \frac{\beta_K}{\ell} N + S \quad (4.15)$$

con

$$\beta_D = \left(\frac{N_F v_F I(T_0) \beta_I}{\epsilon_F \Sigma_{PF} v_F + \epsilon_M \Sigma_{SM} v_M} \right) \sqrt{\left(\frac{q E_F \kappa(1-\beta)}{v_l \ell \nu_0 C_F M_F} \right)}$$

Las ecuaciones (4.14) y (4.15) serán el punto de partida del análisis del efecto de un ruido intenso o neutrones cuasiinstantáneos.

b) Efecto de neutrones retardados importante.

En el caso de ser ruidos débiles $O_K < \beta \ell$ o presentar neutrones retardados con un tiempo de retardo apreciable $\lambda \approx \frac{\kappa(1-\beta)-1}{\ell}$, existen

dos escalas de tiempos diferenciadas, $t_i \ll t_r$, t_i de dominio de neutrones instantáneos y t_r de dominio de neutrones retardados. Si llamamos Δ a la escala de tiempo de observación en la cual evoluciona nuestro sistema, pueden darse los tres casos siguientes:

- $\Delta \simeq t_i$; $\Delta \ll t_r$. Escala de tiempo en la que los neutrones retardados evolucionan muy poco y pueden considerarse constantes. La ecuación neutrónica en estas condiciones será

$$\frac{dN}{dt} = \frac{[\kappa_0(1-\beta)-1]}{\ell} N(t) + \lambda C(t) + S + \frac{\beta\kappa}{\ell} N(t) \quad (4.16)$$

El acoplamiento de temperatura también será por efecto Doppler pues el resto de los efectos es de variación lenta respecto a esta escala. De idéntico modo que en el caso anterior se obtendrá para el acoplamiento linealizado:

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{\rho_0}{\ell} N^2 + \frac{[\kappa_{eff}(1-\beta)-1]}{\ell} N(t) + \lambda C(t) + S + \frac{\beta\kappa}{\ell} N(t) \quad (4.17)$$

y para el exacto

$$\frac{dN}{dt} = \frac{(\tilde{\kappa} e^{-\beta_0 \sqrt{N}} (1-\beta)-1)}{\ell} N(t) + \lambda C(t) + S + \frac{\beta\kappa}{\ell} N(t) \quad (4.18)$$

Estas ecuaciones serán únicamente válidas para describir evoluciones en tiempos menores que los de la evolución de los neutrones retardados. Si el ruido introducido es blanco, el sistema (N,C) es markoviano y a partir de (4.17), (4.18) se pueden obtener las propiedades estadísticas de evolución en dicha escala condicionadas en el instante inicial por $N(0)$, $C(0)$.

- $\Delta \simeq t_r$ La escala de tiempos es del mismo orden que la de evolución de los neutrones retardados.

En este caso se utiliza la aproximación de "tiempo de generación instantánea" (Bell (1970), Williams (1971)), que consiste en suponer instantánea la evolución por neutrones instantáneos $t_1 = 0$. Matemáticamente se traduce en anular la derivada $\frac{dN}{dt} = 0$, sustituir N en la ecuación para los neutrones retardados y sustituir C nuevamente en la ecuación neutrónica. El resultado final es la siguiente ecuación:

$$\frac{dN}{dt} = \left[\frac{\lambda (K_0 - 1) + \lambda \beta_K + \beta_K(t)}{\beta - (K_0 - 1) - \beta_K} \right] N(t) + \frac{\lambda \rho S}{\beta - (K_0 - 1) - \beta_K} \quad (4.19)$$

En esta escala no existe una aproximación sencilla para el intercambio de calor. Por otra parte la ecuación (4.19) es muy difícil de tratar y no presenta demasiado interés físico por lo que no abordaremos su estudio.

- $\Delta \gg t_r$. La escala de tiempos es mucho mayor que todos los tiempos que intervienen en el sistema.

Este caso es el estudio de las propiedades estacionarias. El tiempo de observación es lo suficientemente largo como para que los neutrones retardados actúen totalmente, así como los intercambios de calor, etc.... Consideramos todos los procesos como instantáneos, $\frac{dC}{dt} = \frac{dE_0}{dt} = \frac{dEF}{dt} = 0$ y aplicando un acoplamiento general linealizado (4.3), resulta una ecuación como :

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{\rho_{eff}}{\ell} N^2 + \frac{(K_{eff} - 1)}{\ell} N + \frac{\beta_K}{\ell} N + S \quad (4.20)$$

En el caso de un ruido blanco, β_K , seguirá en esta escala manteniendo las mismas propiedades que en cualquier otra. La ecuación (4.20) será de utilidad para discutir cualitativamente las propiedades estacionarias del reactor, en concreto la catástrofe de varianza.

Las ecuaciones (4.14), (4.15), (4.17), (4.18), (4.20) presentan

una amplia región de operación del reactor, válida para nuestro estudio estocástico. Hacemos notar que todos los casos están representados por una ecuación de la forma

$$\frac{dN}{dt} = -\beta N^2 + \alpha N + \int N + S. \quad (4.21)$$

que será objeto de estudio en los siguientes apartados.

IV.3. ESTUDIO DE UN MODELO NO LINEAL CON RUIDO EXTERNO BLANCO

Es muy común modelizar el efecto de los ruidos por medio de un Gaussiano blanco. Cuando en realidad se trata de un ruido Gaussiano con un tiempo de correlación mucho más pequeño que los de evolución de terminista, la aproximación de ruido blanco es físicamente aceptable. Debido a la sencillez del tratamiento, cuando estamos interesados en describir cualitativamente las propiedades dinámicas del sistema en cuestión, la aproximación de ruido blanco permite obtener resultados que de otra forma serían inalcanzables. En esta parte vamos pues a suponer que el ruido externo es blanco. En IV.5 estudiaremos el efecto de un ruido de color dicotómico.

Iniciamos en principio un estudio general de la ecuación (4.21) para después discutir con ello las situaciones que se presentan en los reactores nucleares. Esta ecuación es utilizada para modelizar sistemas sencillos en otros campos de la física como por ejemplo: en cinética química representa una reacción autocatalítica (Schlögl 1971); en dinámica de poblaciones con $\int = 0$ es el conocido modelo de Verhulst (Van Kampen 1976A); en óptica es un modelo sencillo de Laser (Haken 1975). En reactores nucleares un modelo similar que tiene en cuenta

únicamente fluctuaciones internas ha sido usado por Quabili (1979). En reactores estos estudios se limitan a tratar propiedades estacionarias o dinámicas con ruido débil linealizando las ecuaciones o suponiendo aditivo un ruido multiplicativo (ver IV.4).

En nuestro caso el estudio de ruidos intensos va a ser importante pues está relacionado, como ya ha sido indicado, con la aparición de fluctuaciones intensas espontáneas observadas en reactores de agua en ebullición.

IV.3.A.- ESTUDIO DETERMINISTA Y PRIMEROS RESULTADOS CON RUIDOS DEBILES

Antes de comenzar con el análisis de fluctuaciones es conveniente conocer la evolución determinista del sistema. En concreto, interesa saber en que escalas de tiempos se desarrolla dicha evolución y diferenciar los posibles estados en los que el sistema se encuentra. A continuación realizamos este análisis determinista y, como ampliación natural, estudiamos los efectos introducidos al considerar un ruido débil.

Sea la ecuación sin término fluctuante

$$\frac{dN}{dt} = -\mu N^2 + \alpha N + S \quad (4.22)$$

Cuando μ , S son positivos la solución es estable para todo valor de α y en el estado estacionario:

$$N_d = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\mu S}}{2\mu} \quad (4.23)$$

presentando los siguientes casos interesantes:

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad \alpha^2 \gg 4\pi S ; \quad \alpha > 0 ; \quad N_d \approx \frac{\alpha}{\beta} \left(1 + \frac{\pi S}{\alpha^2} + \dots \right) \\
 \text{ii)} \quad \alpha^2 \gg 4\pi S ; \quad \alpha < 0 ; \quad N_d \approx \frac{S}{|\alpha|} \left(1 - \frac{3\pi S}{\alpha^2} + \dots \right) \\
 \text{iii)} \quad \alpha^2 \ll 4\pi S ; \quad \alpha \leq 0 ; \quad N_d \approx \sqrt{\frac{S}{\beta}} \left(1 + \frac{\alpha}{2\sqrt{S\beta}} + \dots \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.24}$$

En un reactor nuclear i) representa un estado supercrítico estable por el efecto temperatura, ii) un estado subcrítico y iii) una generalización de un estado crítico (en realidad se llama reactor crítico cuando $\alpha = 0$).

Si definimos las desviaciones respecto al estado estacionario como $n = N - N_d$ obtenemos a partir de (4.23):

$$\frac{dn}{dt} = -\lambda n - \beta n^2
 \tag{4.25}$$

donde $\lambda = \sqrt{\alpha^2 + 4\pi S}$ es el inverso del tiempo de relajación.

Estamos interesados en conocer las escalas de tiempo de evolución del sistema partiendo de una condición inicial n_0 . Para ello resolvemos exactamente (4.25) con esta condición inicial:

$$\int_{n_0}^{n(t)} \frac{dn}{[n + \frac{\beta}{\lambda} n^2]} = - \int_{t_0}^t \lambda dt$$

$$n(t) = A e^{-\lambda(t-t_0)} \left[1 + \left(\frac{\beta A}{\lambda} \right) e^{-\lambda(t-t_0)} + \dots + \left(\frac{\beta A}{\lambda} \right)^n e^{-n\lambda(t-t_0)} \right]
 \tag{4.26}$$

con $A = \frac{M_0}{1 + \pi/\lambda \eta_0}$. Se observa que en la evolución no existen en ningún caso escalas de tiempos diferenciadas, por lo tanto la condición suficiente para obtener una evolución exponencial $A e^{-\lambda(t-t_0)}$ depende exclusivamente de los coeficientes $(\frac{\pi A}{\lambda})^n$:

$$\left(\frac{\pi A}{\lambda}\right) \ll 1,$$

los términos exponenciales serán despreciables para todo tiempo y se obtendrá la solución de (4.25) linealizada. La evolución exponencial es justamente la obtenida en la linealización de (4.25), que en esta ecuación consiste en despreciar el término cuadrático.

Aunque en páginas posteriores (IV.4) se tratará la linealización en presencia de ruido en profundidad se puede ahora introducir someramente en este análisis determinista. Esta última condición aplicada a los tres casos anteriores nos informa sobre la posibilidad de linealizar:

$$i) \quad \frac{|u_0|}{N_d} \ll 1$$

$$ii) \quad \frac{|u_0|}{N_d} \ll \frac{d^2}{\pi s}$$

(4.27)

$$iii) \quad \frac{|u_0|}{N_d} \ll 1$$

observándose que siempre la amplitud relativa en las condiciones iniciales, permitiendo la linealización, es mayor para el caso ii) subcrítico.

Supongamos ahora que introducimos en (4.25) un ruido blanco de intensidad débil $D \ll \lambda$, de forma que $\lambda(\xi) = \sqrt{(\alpha + \xi)^2 + 4D\xi} \approx \lambda + \frac{2D\xi}{\lambda}$ y así es posible resolver la ecuación despreciando el efecto del ruido en la integral en n:

$$\int_{n_0}^{n(t)} \frac{dn}{(n + \frac{D}{\lambda} n^2)} = - \int_{t_0}^t \lambda(\xi) d\xi$$

$$n(t) = A \cdot e^{-\int_{t_0}^t \lambda(\xi) d\xi} \left[1 + \left(\frac{DA}{\lambda}\right) e^{-\int_{t_0}^t \lambda(\xi) d\xi} + \dots + \left(\frac{DA}{\lambda}\right)^m e^{m \int_{t_0}^t \lambda(\xi) d\xi} \right] \quad (4.28)$$

El sentido de esta aproximación se comprenderá más adelante; por ahora indicamos que la parte donde se desprecia el ruido está asociada a una parte de valores propios continua en el espectro de la ecuación para las probabilidades. Cuando el efecto del ruido es débil, como se verá, el espectro continuo influye poco en la evolución y se justifica esta aproximación.

A partir de (4.28) se puede ver que cualquier parámetro estadístico condicionado inicialmente por n_0 se calcula promediando expresiones del siguiente tipo

$$\langle f(n(t) | n_0) \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} B_m(n_0) \langle e^{-m \int_{t_0}^t \lambda(\xi) d\xi} \rangle \quad (4.29)$$

Teniendo en cuenta el carácter Markoviano de n , para el cálculo de parámetros estacionarios se puede ahora promediar sobre las condiciones iniciales

$$\left\{ \langle f(n(t)) \rangle \right\}_{ST} = \int P_{ST}(n_0) \langle f(n(t) | n_0) \rangle dn_0$$

en concreto para la correlación estacionaria se tendrá:

$$\{ \langle m(t-t') | m_0 \rangle m_0 \}_{ST} = \{ A m_0 \}_{ST} \langle e^{-\int_{t'}^t \lambda(s) ds} \rangle + \left\{ \frac{n A^2}{\lambda} m_0 \right\}_{ST} \langle e^{-2 \int_{t'}^t \lambda(s) ds} \rangle + \dots$$

con

$$\left\{ A \left(\frac{n A^2}{\lambda} \right) m_0 \right\}_{ST} = \int A \left(\frac{n A^2}{\lambda} \right) m_0 P_{ST}(m_0) dm_0$$

El promedio de la exponencial se calcula en el primer orden de aproximación de D como:

$$\begin{aligned} \langle e^{-n \int_{t'}^t \lambda(s) ds} \rangle &= e^{-n \lambda (t-t')} \langle e^{-n \frac{1}{\lambda} \int_{t'}^t \lambda(s) ds} \rangle = \\ &= e^{-n (\lambda - \frac{n \lambda^2}{\lambda^2} D) (t-t')} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Para concretar ideas, en el caso del valor medio condicionado inicialmente por m_0 y de la correlación estacionaria se obtiene respectivamente:

$$\begin{aligned} \langle m(t) | m_0 \rangle &= A e^{(\lambda - \frac{\lambda^2 D}{\lambda^2})} \left[1 + \left(\frac{n A}{\lambda} \right) e^{-(\lambda - \frac{\lambda^2 D}{\lambda^2})} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{n A}{\lambda} \right)^n e^{-n (\lambda - \frac{n \lambda^2}{\lambda^2} D)} \dots \right] \\ \langle m(t) m(t') \rangle_{ST} &= \{ \langle m(t-t') | m_0 \rangle m_0 \}_{ST} = \\ &= \int \langle m(t-t') | m_0 \rangle m_0 P_{ST}(m_0) dm_0 = \left\{ A m_0 \right\}_{ST} e^{(\lambda - \frac{\lambda^2 D}{\lambda^2}) (t-t')} \\ &\quad + \left\{ \frac{n A m_0^2}{\lambda} \right\}_{ST} e^{-n (\lambda - \frac{\lambda^2 D}{\lambda^2}) (t-t')} + \dots \end{aligned} \quad (4.31)$$

El efecto del ruido no modifica apreciablemente las escalas de

tiempos del movimiento determinista. Para comparar con resultados posteriores es interesante identificar, en cada caso, la expresión del efecto del ruido, que estará asociada a un espectro de autovalores discreto:

$$\begin{aligned}
 \text{i), ii)} \quad \lambda_n &= n(\alpha) - nD \\
 \text{iii)} \quad \delta_n &= n(2\sqrt{5n} - \frac{n d^2}{45n} D) \quad (4.32)
 \end{aligned}$$

Por último examinamos las condiciones de linealización cuando el sistema se encuentra sometido a un ruido blanco de intensidad D. Tomemos como ejemplo interesante el de las correlaciones estacionarias (4.31), y siguiendo el análisis determinista, vemos que una condición necesaria para la linealización es que el segundo coeficiente sea mucho menor que el primero:

$$\frac{\pi}{\lambda} \left\langle \frac{M_0^3}{(1 + \frac{\pi}{\lambda} M_0)^2} \right\rangle_{ST} \ll \left\langle \frac{M_0^2}{1 + \frac{\pi}{\lambda} M_0} \right\rangle_{ST}$$

Bajo la hipótesis de que las fluctuaciones son pequeñas podemos suponer $\langle M_0^i \rangle_{ST} \approx \langle M_0 \rangle_{ST}^i$, de tal forma que cuando se cumpla:

$$\langle M_0 \rangle_{ST} \ll \frac{\lambda}{\pi} \quad (4.33)$$

la desigualdad anterior se verifica.

En condiciones iniciales estacionarias, y a partir de (4.24), en el primer orden de la intensidad del ruido

$$0 = \frac{d\langle N \rangle}{dt} = -\pi \langle N^2 \rangle + (\alpha + D) \langle N \rangle + S \quad (4.34)$$

sustituyendo $N = n + Nd$ y despreciando términos de 2º orden en D se obtiene para $\langle n \rangle_{ST}$

$$\langle n \rangle_{ST} = \frac{D Nd}{\lambda} \quad (4.35)$$

y para la condición (4.33)

$$D \ll \frac{d^2}{n \lambda} \quad (4.36)$$

que particularizando en los tres casos interesantes:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \frac{D}{\alpha} \ll 1 \\ \text{ii)} \quad & \left(\frac{D}{\alpha} \right) \ll \frac{d^2}{s n} \\ \text{iii)} \quad & \left(\frac{D}{\alpha} \right) \ll \frac{\sqrt{s n}}{\alpha} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Observamos que para el caso crítico iii) y supercrítico i) se deberá cumplir que la intensidad del ruido D sea mucho menor que el inverso del tiempo de relajación. Para el subcrítico esta condición es menos restrictiva siendo $D \ll \lambda \left(\frac{d^2}{s n} \right)$. Insistimos en que se ha utilizado la hipótesis de fluctuaciones pequeñas. Una idea de la magnitud de las fluctuaciones la da el cálculo de las fluctuaciones relativas

$\frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}{\langle n \rangle^2}$. En la figura IV.1, se representa la fluctuación relativa en función de α para diversos valores de los parámetros. Es interesante observar como el punto crítico (cercano a $\alpha = D$) presenta siem

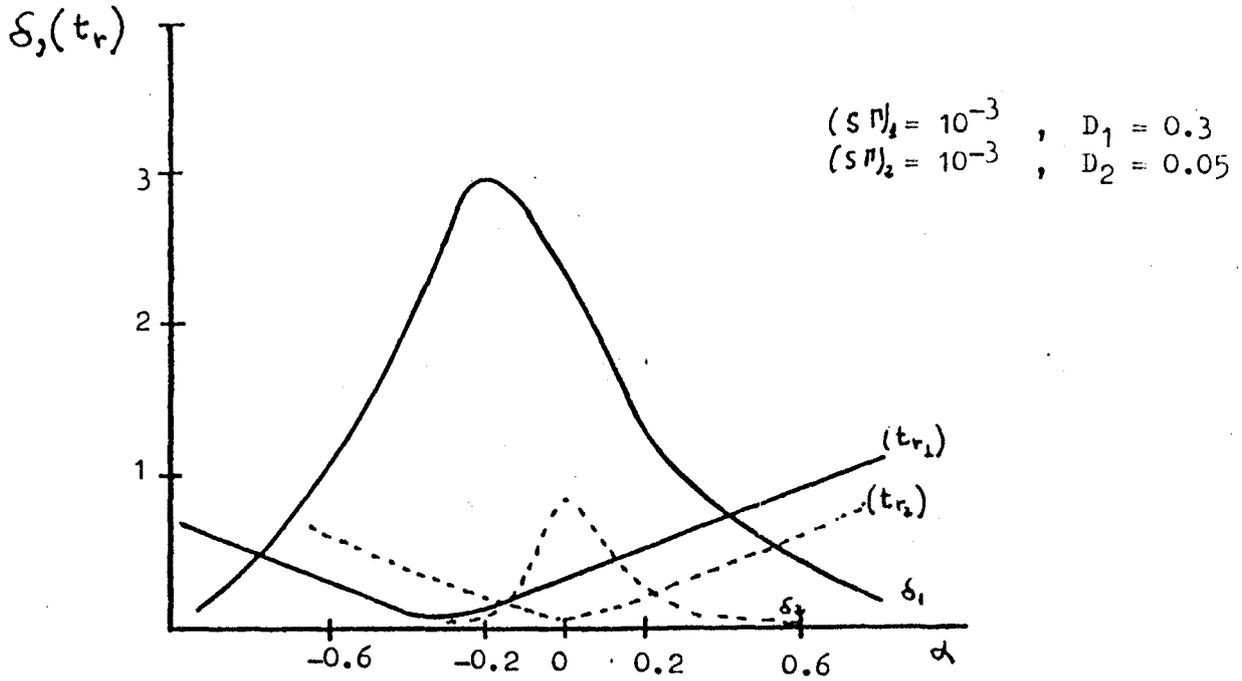


Fig.IV.1.- Fluctuaciones relativas (inversas de tiempo de relajación) en función de α . (las fluctuaciones han sido tomadas de Sancho 1983B).

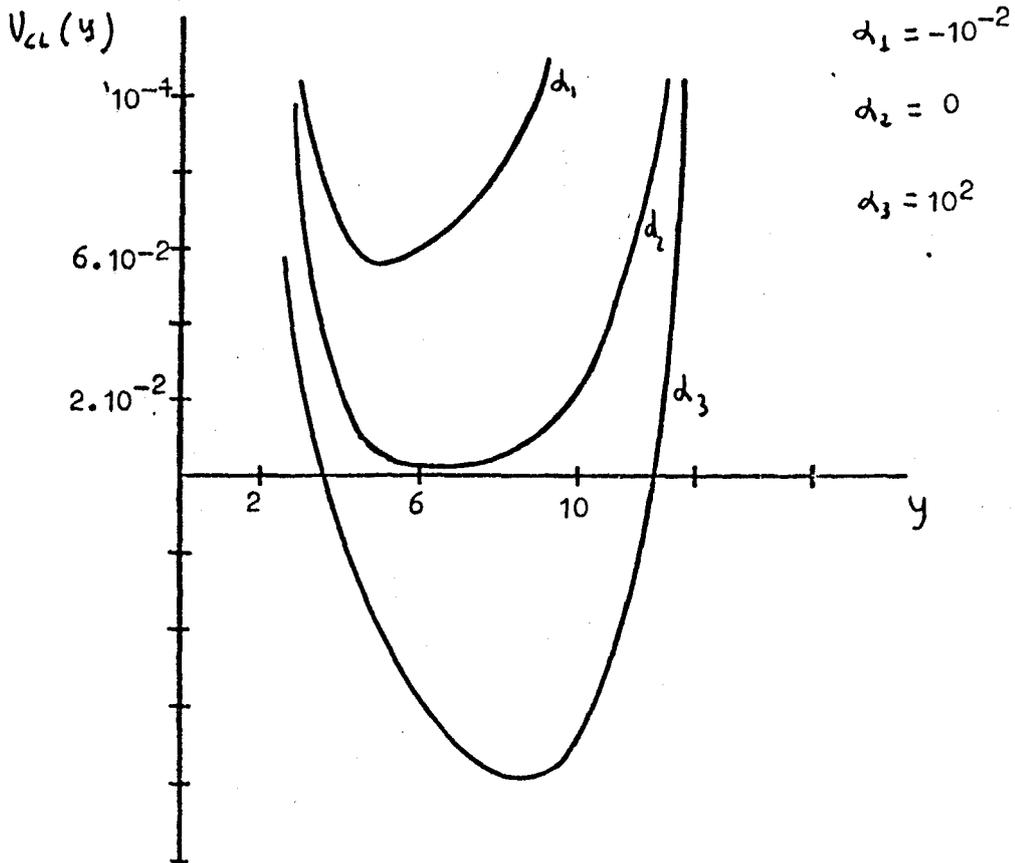


Fig.IV.2 .- Potencial en la imagen clásica. ($S = 10^2$, $\eta = 10^{-7}$)

pre las fluctuaciones más intensas. Este sencillo análisis es lo suficientemente indicativo para alertar sobre la fiabilidad de la linealización en condiciones próximas a la criticidad.

Podemos dar una explicación sencilla a este hecho utilizando una imagen mecánica muy simple (Haken 1975). Hagamos el cambio de variable $y = \ln N$ en la ec. (4.21)

$$\frac{dy}{dt} = - \frac{d}{dy} (n e^y - \alpha y + s e^{-y}) + \xi(t)$$

que podemos identificar como la ecuación que sigue una partícula sobre amortiguada en un potencial $V(y) = n e^y - \alpha y + s e^{-y}$, y sometida a una fuerza fluctuante $\xi(t)$. Se extrae información cualitativa de la evolución del sistema observando la forma del potencial en cada uno de los casos interesantes (Fig. IV.2).

i) $\alpha^2 \gg n s$; $\alpha > 0$; representa el estado supercrítico, el mínimo del potencial se encuentra en $y_0 = \ln \frac{\alpha}{n}$. El potencial cerca del mínimo es aproximadamente $V_c(y) \approx -\alpha y + n e^y$

ii) $\alpha^2 \gg n s$; $\alpha < 0$; representa el estado subcrítico, el mínimo del potencial se encuentra en $y_0 = \ln \frac{s}{|\alpha|}$; $V_c(y) = -\alpha y + s e^{-y}$

iii) $\alpha^2 \ll n s$; $\alpha \geq 0$; representa el estado crítico, el mínimo del potencial está en $y_0 = \ln \frac{s}{n}$; $V_c(y) = n e^y + s e^{-y}$

En los casos subcrítico y supercrítico el potencial es mucho más estrecho que en el caso crítico (Fig. IV.2). Una partícula sometida a la misma fuerza aleatoria sufrirá fluctuaciones más fuertes en el potencial del caso crítico. Sin embargo un análisis como éste no permite conocer con precisión el efecto fluctuante de la fuerza. Para lograrlo introducimos a continuación el paso a otra imagen, ahora, mecánico-cuántica.

IV.3.B.- ECUACION DE FOKKER-PLANCK Y PASO A UNA IMAGEN MECANICO-CUANTICA

La discusión anterior nos ha mostrado aspectos cualitativos de la evolución del sistema y siempre en aproximación de ruido débil. Cuando uno quiere afrontar el problema en forma general resulta indispensable trabajar sobre la ecuación para las probabilidades (Ec. de Fokker-Planck). Para la ecuación (4.21) con ruido blanco $\xi(t)$ de intensidad D y en la interpretación de Stratonovich, la ec. de Fokker-Planck es:

$$\frac{\partial P(N,t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial N} (\alpha N - \pi N^2 + S + DN) P(N,t) + D \frac{\partial^2}{\partial N^2} N^2 P(N,t) \quad (4.38)$$

Ya se ha mencionado que las propiedades estadísticas estacionarias de este modelo han sido estudiadas y aplicadas a otros problemas; en concreto se puede calcular exactamente la probabilidad y los momentos estacionarios (San Miguel, 1983):

$$P_{ST}(N) = \left[2 (\pi S)^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{2}} \left(2 \frac{\sqrt{S\pi}}{D} \right) \right]^{-1} N^{\frac{\alpha-D}{D}} \exp \left(- \frac{N}{D} - \frac{S\pi}{\alpha N} \right) \quad (4.39)$$

$$\langle N^m \rangle = (S\pi)^{\frac{m}{2}} \frac{K_{m+\frac{1}{2}} \left(2 \frac{\sqrt{S\pi}}{D} \right)}{K_{\frac{1}{2}} \left(2 \frac{\sqrt{S\pi}}{D} \right)}$$

donde K_m es la función esférica de Bessel modificada.

A partir de esta última expresión se puede observar (Fig. IV.1) la forma de las fluctuaciones relativas $\frac{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}{\langle N \rangle^2}$. Como era de esperar en el análisis cualitativo anterior estas fluctuaciones son máximas en la zona de estado crítico, justamente cuando el tiempo de relajación es menor (para intensidades débiles), y las condiciones de linealización son peores. En el caso de ruido intenso se aprecia un desplazamiento de esta zona hacia la izquierda. Los análisis estacionarios no amplían información sobre la evolución dinámica por lo que se

hace necesario el estudio en el tiempo de la ecuación de Fokker-Planck. La viabilidad de este estudio se ha hecho patente a partir de un trabajo muy reciente de Schenzle (1979), donde desafortunadamente se extraen resultados exactos para ecuaciones de Fokker-Planck (o de Langevin con ruido blanco) que no son reducibles a nuestro caso. Podemos, sin embargo, obtener bastante información utilizando el mismo método, que básicamente consiste en plantear el problema en términos de una ecuación de Schrödinger equivalente.

a) Paso a una formulación de Schrödinger

Vamos a plantear el problema de forma general, válido para una ecuación de Langevin como:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(x) \xi(t) \quad (4.40)$$

donde $\xi(t)$ es un ruido blanco con correlación $\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = 2D \delta(t-t')$

Siguiendo en todo momento la interpretación de Stratonovich (1966) hagamos el cambio de variable $y = \int \frac{dx}{g(x)} = \varphi(x)$ que nos transforma (4.40) en otra ecuación equivalente en la que el ruido está ahora en forma aditiva:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{f(\varphi^{-1}(y))}{g(\varphi^{-1}(y))} + \xi(t) = A(y) + \xi(t) \quad (4.41)$$

Para la función de probabilidad $\hat{p}(y, t)$ se obtiene a partir de (4.41) la ecuación de Fokker-Planck siguiente:

$$\frac{\partial \hat{p}(y, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial y} (A(y) \hat{p}(y, t)) + D \frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{p}(y, t) \quad (4.42)$$

Ahora la relación existente entre la función de probabilidad de la

variable original x y la actual es

$$P(x,t) = \hat{P}(\varphi(x),t) \left| \frac{d\varphi(x)}{dx} \right| \quad (4.43)$$

Buscamos la solución de $\hat{P}(y,t)$ como una combinación lineal de funciones propias

$$\hat{P}(y,t) = \int a_n \hat{P}_n(y) e^{-\lambda_n t} \quad (4.44)$$

donde \int significa que será una suma para la parte de espectro discreto y una integral para el continuo. Las funciones propias cumplen la siguiente ecuación

$$-\lambda_n \hat{P}_n = -\frac{\partial}{\partial y} A(y) \hat{P}_n + D \frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{P}_n \quad (4.45)$$

Si hacemos la siguiente transformación

$$\hat{P}_n(y) = S^{\frac{1}{2}}(y) \omega_n(y) \quad (4.46)$$

Con $S(y) = N_0 \exp\left\{\int \frac{A(y)}{D} dy\right\}$ conseguimos para $\omega_n(y)$ una ecuación del tipo de Schrödinger

$$-D \omega_n'' + \left[\frac{A'}{2} + \frac{A^2}{4D} \right] \omega_n = \lambda_n \omega_n \quad (4.47)$$

logrando con ello una formulación mecánico-cuántica. Nuestra cuestión inicial consiste ahora en resolver una ecuación de Schrödinger equivalente a una partícula cuántica en un potencial dado por:

$$V(y) = \left[\frac{A'}{2} + \frac{A^2}{4D} \right] \quad (4.48)$$

La hermiticidad de (4.47) garantiza la existencia de una base funcional tal que la representación (4.44) va a ser siempre definida. Las relaciones de ortonormalidad para w_n inducen otras en \hat{P}_n de la forma

$$\delta_{n,m} = \int w_n(y) w_m(y) dy = \int S^{-1}(y) \hat{P}_n(y) \hat{P}_m(y) dy \quad (4.49a)$$

si el espectro de valores propios es discreto y

$$\delta(\lambda, \lambda') = \int w_\lambda(y) w_{\lambda'}(y) dy = \int S^{-1}(y) \hat{P}_\lambda(y) \hat{P}_{\lambda'}(y) dy \quad (4.49b)$$

si es continuo. $S(y)$ coincidirá con la solución estacionaria de (4.42) siempre que exista.

Una vez que hemos reducido el problema a estos términos podemos pasar a explicar como calcular cualquier tipo de parámetros estadísticos. Toda la información va a estar contenida en la función de probabilidad condicionada $\hat{P}(y, t / y_0, t_0)$ que haciendo uso de (4.44), (4.49) y de la condición inicial $\hat{P}(y, t_0 / y_0, t_0) = \delta(y - y_0)$ se escribe:

$$\hat{P}(y, t / y_0, t_0) = \int S^{-1}(y_0) \hat{P}_m(y_0) \hat{P}_m(y) e^{-\lambda_m(t-t_0)} \quad (4.50)$$

Siendo $B(y)$ y $C(y)$ dos observables cualesquiera obtenemos para su correlación estacionaria:

$$\begin{aligned} \langle B(y) C(y, t) \rangle_{ST} &= \int dy \int dy' B(y) C(y') \hat{P}(y, t / y', t') S(y', t') = \\ &= \int e^{-\lambda_m(t-t')} \int B(y) \hat{P}_m(y) dy \int C(y') \hat{P}_m(y') dy' \quad (4.51) \end{aligned}$$

y en concreto para la correlación de la variable original x

$$\langle x(t) x(t) \rangle_{ST} = \int e^{-2\lambda(t-t')} \left[\int \varphi'(y) \hat{P}_n(y) \right]^2 \quad (4.52)$$

También para los observables en régimen transitorio se obtienen expresiones sencillas:

$$\begin{aligned} \langle \Psi(y, t) / y_0, t_0 \rangle &= \int \Psi(y) \hat{P}(y, t / y_0, t_0) dy = \\ &= \int e^{-2\lambda(t-t_0)} \hat{S}'(y_0) \hat{P}_n(y_0) \int \Psi(y) \hat{P}_n(y) dy. \end{aligned} \quad (4.53)$$

en concreto para los momentos transitorios en la variable original

$$\langle x^m(t) / x_0, t_0 \rangle = \int e^{-2\lambda(t-t_0)} \hat{S}'(y_0) \hat{P}_n(y_0) \int [\varphi'(y)]^m \hat{P}_n(y) dy. \quad (4.54)$$

IV.3.C. ESTUDIO DETALLADO DEL MODELO NO LINEAL

Vamos ahora a aplicar el método expuesto a nuestro modelo particular (4.21). Siguiendo el desarrollo anterior hagamos el cambio de variable $y = \ln u$ y busquemos la representación en la ecuación de Schrödinger

$$S(y) = \exp\left(\frac{d}{D} y - \frac{n}{D} e^y - \frac{s}{D} e^{-y}\right); \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} -D w_n'' + \frac{1}{D} [n^2 e^{2y} - 2n(d+D) e^y - 2ns + d^2 + \\ + 2s(d-D) e^{-y} + s^2 e^{-2y}] w_n = dn w_n \end{aligned} \quad (4.56)$$

Lograr resultados analíticos para esta ecuación no es posible por lo que se debe analizar primero para casos sencillos y luego ver en qué casos se puede aproximar.

a) Caso lineal $\pi = 0$, $\alpha < 0$

En este caso la ecuación de partida toma la forma

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N + \beta N + S \quad (4.57)$$

que como se verá en el capítulo siguiente pueden calcularse exactamente momentos, varianzas y correlaciones incluso para un ruido gaussiano no blanco. El análisis completo de esta ecuación por métodos mecánico-cuánticos nos será muy eficaz para obtener información sobre el espectro de valores propios de la ecuación general no lineal. Por otra parte, también nos será útil en el estudio de la linealización, en el sentido de sustituir un ruido multiplicativo por otro aditivo, frecuentemente utilizado en reactores nucleares.

Tomemos pues el potencial equivalente de (4.57) en la imagen mecánico cuántica

$$V(y) = \frac{1}{4D} [\alpha^2 + 2S(\alpha - \beta) e^{-y} + S^2 e^{-2y}] \quad (4.58)$$

en este sencillo caso es reducible a los estudiados por Schenzle (1979) y Graham (1982). Para el estado estacionario se obtiene

$$S(y) = N_0 \exp\left(\frac{\alpha}{D} y - \frac{S}{D} e^{-y}\right) \quad (4.59)$$

Los valores propios presentan un espectro discreto y otro continuo.

Para la parte de espectro discreto se obtiene:

$$\lambda_m = m(|d| - Dm) \quad ; \quad m < \frac{|d|}{D}$$

$$\omega_m(y) = N_m^{\frac{1}{2}} \exp\left\{(4|d| - 1 - 2m) \frac{y}{2}\right\} L_m^{2(|d| - m)}\left(\frac{y}{D} e^{-\frac{y}{2}}\right) e^{\frac{y}{2D}} e^{\frac{y}{2}} \quad (4.60)$$

donde L_m^m son los polinomios de Laguerre y N_m son constantes de normalización dadas por

$$N_m = \left(\frac{y}{D}\right)^{\left(\frac{2|d|}{D} - 2m - 1\right)} \frac{m! \left(\frac{2|d|}{D} - m\right)}{4 \Gamma\left(\frac{|d|}{D}\right) \Gamma\left(\frac{|d|}{D} + 1 - m\right)}$$

Para la parte de espectro continuo se obtiene

$$\lambda_\gamma = \left(\frac{d^2}{16D^2} + \gamma^2\right) \frac{D}{4} \quad ; \quad \gamma \geq 0$$

$$\omega_\gamma(y) = N_\gamma^{\frac{1}{2}} e^{-\gamma\left(\frac{|d|}{2D} - 1\right)} e^{\frac{y}{2D}} e^{\frac{y}{2}} W_{\frac{1}{2} + \frac{|d|}{2D}, \frac{1}{2}\gamma}\left(\frac{y}{D} e^{-\frac{y}{2}}\right) \quad (4.61)$$

con $W_{\alpha, \beta}(x)$ la función de Whittaker y N_γ constantes de normalización cuyo valor es ahora:

$$N_\gamma = \frac{\left(\frac{y}{D}\right)^{2\left(\frac{|d|}{2D} - 1\right)}}{2 \pi^2} \cdot \gamma \cdot \operatorname{sh} \pi \gamma \left(\Gamma\left(\frac{d}{2D} + \frac{i\gamma}{2}\right)\right)^2 \Gamma^{-1}\left(-\frac{d}{D}\right)$$

siendo $\Gamma(x)$ las funciones Gamma.

En primer lugar, se puede observar como el espectro discreto es idéntico al encontrado en el análisis determinista con ruido débil y en las condiciones $\pi S \ll \alpha^2$. En efecto, la existencia del espec-

tro discreto supone ruido débil $m < \frac{|a|}{D}$ y en este caso lineal con $\Gamma = 0$ siempre se cumple la condición $n s \ll d^2$ para $d \neq 0$. Nos encontramos en el caso límite de efecto de temperatura despreciable en un sistema subcrítico. Cuando el ruido es intenso $D > |a|$ el espectro discreto empieza a desaparecer y entonces el sistema se vuelve inestable. El cálculo de valores medios y correlaciones a partir de (4.51) reproduce los resultados conseguidos directamente de la ecuación estocástica (4.57):

$$\langle z \rangle = \langle N(z) N(0) \rangle_T = \frac{s^2}{(|a|-D)^2} \left\{ 1 + \frac{D}{(|a|-2D)} e^{-(|a|-D)z} \right\} \quad (4.62)$$

Esta expresión exacta será comparada en IV.4 con las obtenidas por los principales métodos de linealización.

b) Caso no lineal sin fuentes: $s = 0$; $n > 0$; $d > 0$

Este es otro caso fácil que puede resolverse exactamente y es reducible a los estudiados por Schenzle y Graham. El potencial toma una forma sencilla (transformado de Morse).

$$U(y) = n^2 e^{2y} - 2n(d+D) e^y + d^2 \quad (4.63)$$

y también aparece una parte discreta del espectro de valores propios y otra continua. Utilizando los resultados de Graham (1982), tras un simple cambio de variable se obtiene para el espectro discreto:

$$\lambda_m = n(d - Dm) \quad ; \quad m < d/D$$

$$\omega_m(y) = N_m^{1/2} \exp\{(4d - 1 - 2m)y/2\} L_m^{2(d-m)} \left(\frac{n}{D} e^{y/2}\right) e^{-\frac{n}{D} e^{y/2}} \quad (4.64)$$

con el mismo significado que el caso anterior, y las constantes de normalización dadas por:

$$N_m = \left(\frac{R}{D}\right)^{\frac{2d}{D} - 2m - 1} \frac{m! \left(\frac{d}{D} - m\right)}{4 \Gamma\left(\frac{d}{D}\right) \Gamma\left(\frac{d}{D} + 1 - m\right)}$$

Para el espectro continuo:

$$\lambda_\lambda = \frac{D}{4} \left(\frac{d^2}{16D^2} + \lambda^2 \right)$$

$$\omega_\lambda(\gamma) = N_\lambda^{\frac{1}{2}} e^{\gamma \left(\frac{d}{D} - 1\right)} e^{-\frac{\pi}{D} e^{\frac{\gamma}{2}}} \cdot \omega_{\frac{1}{2} + \frac{d}{D}; \frac{i\gamma}{2}} \left(\frac{\pi}{D} e^{\frac{\gamma}{2}} \right) \quad (4.65)$$

con

$$N_\lambda = \left(\frac{R}{D}\right)^{2\left(\frac{d}{D} - 1\right)} \cdot \sinh \pi \lambda \left| \Gamma\left(\frac{d}{D} + \frac{i\gamma}{2}\right) \right|^2 \Gamma^{-1}\left(\frac{d}{D}\right)$$

Nuevamente para ruido débil existe espectro discreto y se corresponde exactamente con el análisis determinista (4.32). A diferencia del caso anterior los momentos y correlaciones no pueden calcularse exactamente a partir de la ecuación estocástica (problema de corte en la jerarquía de momentos) y sí puede hacerse aplicando (4.52). Para las correlaciones estacionarias se obtiene (Graham 1982):

$$\begin{aligned} C(z) = \langle N(z) N(0) \rangle_{ST} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D^2 2 \left(\frac{d}{2D} - m\right) m! \Gamma\left(\frac{d}{D} - m + 1\right)}{\pi^2 \Gamma\left(\frac{d}{D}\right)} e^{-m(d-m)z} \\ &+ \left(\frac{D}{2\pi}\right)^2 \int_0^{\infty} dx e^{-\left(\frac{d^2}{4D^2} + x^2\right) Dz} \frac{\sinh 2\pi x \left| \Gamma\left(ix - \frac{d}{D}\right) \Gamma\left(ix + 1 + \frac{d}{D}\right) \right|^2}{\pi^2 \Gamma\left(\frac{d}{D}\right)} \end{aligned} \quad (4.66)$$

Donde la suma aparece a causa del espectro discreto y la integral del continuo. La ecuación (4.66) nos va a permitir analizar las correlaciones en presencia de cualquier tipo de ruidos, débiles e intensos.

Para ruidos débiles $D \ll \alpha$ la mayor contribución se debe a la parte discreta y domina el coeficiente del primer valor propio de forma que la correlación se escribe aproximadamente

$$C(\tau) = \langle N(\tau) N(0) \rangle_T = \langle N \rangle_{ST}^2 = \frac{\alpha D}{\pi^2} e^{-(\alpha-D)\tau} \quad (4.67)$$

Para ruidos no débiles pero cumpliendo $D \lesssim \alpha$, existe un compromiso entre ambas partes discreta y continua. En todo caso para Z suficientemente grande domina la parte exponencial obteniéndose asintóticamente (4.67). Se debe resaltar que, a diferencia del análisis determinista, ahora surgen dos escalas de tiempo diferenciadas, una de ellas originada por el espectro discreto y la otra por el continuo, debido a lo cual la evolución del sistema presentará diferencias notables según la parte del espectro que domine en la evolución.

Para ruidos intensos, $D > \alpha$, el espectro discreto desaparece completamente. Para tiempos suficientemente grandes domina la contribución de la integral cercana a $x \approx 0$, obteniéndose (Graham 1982)

$$C(\tau) = \frac{\gamma \Gamma(-\frac{\alpha}{2D}) \Gamma(\frac{\alpha}{2D}-1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{\alpha}{D}) (D\tau)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{\alpha^2}{4D} \tau} \quad (4.68)$$

para $0 < \alpha < 2D$, y

$$C(\tau) = \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2D} + 1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(-\frac{\alpha}{2D}) (D\tau)^{\frac{1}{2}}} e^{-D\tau} \quad (4.69)$$

para $\alpha \geq 2D$. Esta última distinción es debida a la no conmutatividad de los límites

Queremos hacer hincapié en el hecho de que para ruidos intensos se obtienen resultados nunca obtenidos por linealización. La forma de la correlación indica cambios cualitativos en la evolución del sistema cuya interpretación física es difícil de precisar con claridad. En el caso estudiado, el ruido induce a fluctuaciones en α de suerte que cuando es intenso la probabilidad de que $(\alpha + \xi(t))$ sea negativa es apreciable. Existe pues un compromiso entre la extinción $(\alpha + \xi(t))$ negativo y la multiplicación $(\alpha + \xi(t))$ positivo que induce cambios apreciables en la evolución. En cualquier caso el dominio del espectro continuo hace aparecer fluctuaciones anómalas.

c) Modelo con fuente y término no lineal $s > 0, \mu > 0, \alpha \geq 0$

Ya se ha indicado que en este caso el potencial es demasiado complicado para resolver analíticamente. Se puede sin embargo, con los métodos habituales de la mecánica cuántica, extraer información sobre el espectro de valores propios y por consiguiente conocer cualitativamente el comportamiento del sistema.

Sea el potencial completo que aparece en (4.56):

$$V(y) = \frac{1}{40} [n^2 e^{1y} - 2n(\alpha + 0) e^y - 2ns + d^2 + 2s(\alpha - 0) e^{-y} + s^2 e^{-2y}] \quad (4.70)$$

Estudieemos ahora en que condiciones físicamente interesantes, este potencial complejo puede aproximarse por otros más simples.

Para el caso $\alpha^2 \gg ns$, que representa los estados supercrítico y subcrítico, aparece el potencial claramente separado en dos regiones:

$$I. - y < \ln \sqrt{\frac{s}{n}} ; V_I(y) \approx \frac{1}{40} (2s(\alpha - 0) e^{-y} + s^2 e^{-2y} + d^2) \quad (4.71)$$

$$II. - y > \ln \left(\sqrt{\frac{s}{n}} \right) ; V_{II}(y) \approx \frac{1}{40} (n^2 e^{1y} - 2n(\alpha + 0) e^y + d^2) \quad (4.72)$$

Ahora estos potenciales son del mismo tipo que los estudiados anteriormente.

Distinguiremos las siguientes situaciones (Fig. IV.3 y IV.4)

- $\alpha \gg D$; Estado subcrítico con ruido débil. El pozo de potencial se encuentra en $V_I(\eta)$ aproximadamente en el punto $\ln \frac{S}{|a|D}$ y una profundidad $V_I(\eta_0) \approx -\frac{1}{4}(2|a|+D)$. Existirá pues una parte del espectro de valores propios discreta aproximadamente igual al espectro discreto del caso lineal a). La otra parte del espectro que corresponde al espectro continuo y aparece con $\eta \rightarrow 0$ será estudiada posteriormente.

- $\alpha \gg D$; Estado supercrítico con ruido débil. El pozo de potencial se encuentra en $V_{II}(\eta)$, el punto de potencial mínimo es $\eta_0 = \ln \frac{\alpha+D}{\eta}$ con profundidad $V_{II}(\eta_0) \approx -\frac{1}{4}(2\alpha+D)$. Se tendrá una parte del espectro de valores discretos próxima a la parte discreta del caso no lineal b). La otra parte del espectro que corresponde al continuo y aparece haciendo $\eta \rightarrow 0$ se estudiará a la par que en el caso anterior.

- $|a| \leq D$. Corresponde a la situación de ruido intenso; dentro de ella se distinguirá:

$\alpha > 0$ Aparecen dos pozos de potencial centrados respectivamente en $\ln \frac{S}{(0-\alpha)}$ con profundidad $-\frac{1}{4}(0-2\alpha)$ y $\ln(\frac{\alpha+D}{\eta})$ con profundidad $-\frac{1}{4}(0+2\alpha)$

$\alpha < 0$ Nuevamente aparecen dos pozos en $S/(0+|a|)$, profundidad $-\frac{1}{4}(2|a|+D)$ y $\frac{(D-|a|)}{\eta}$, $-\frac{1}{4}(0-2|a|)$

Ahora ninguno de los pozos tiene una contribución del espectro discreto de a) y b) puesto que estamos con ruidos intensos $|a| \leq D$ y en estas circunstancias los espectros de a) y b) eran continuos.

Pasamos a considerar el caso $d^2 \ll \eta S$ que corresponde al esta-

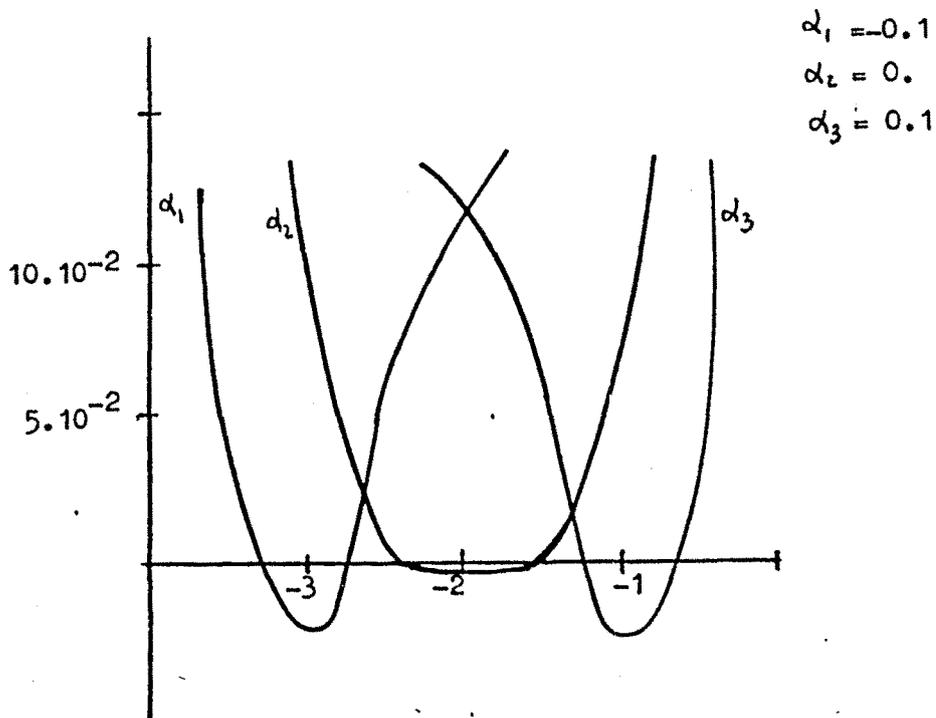


Fig. IV.3.- Potencial en la imagen cuántica ($S \Gamma = 10^{-4}$, $D = 10^{-2}$)

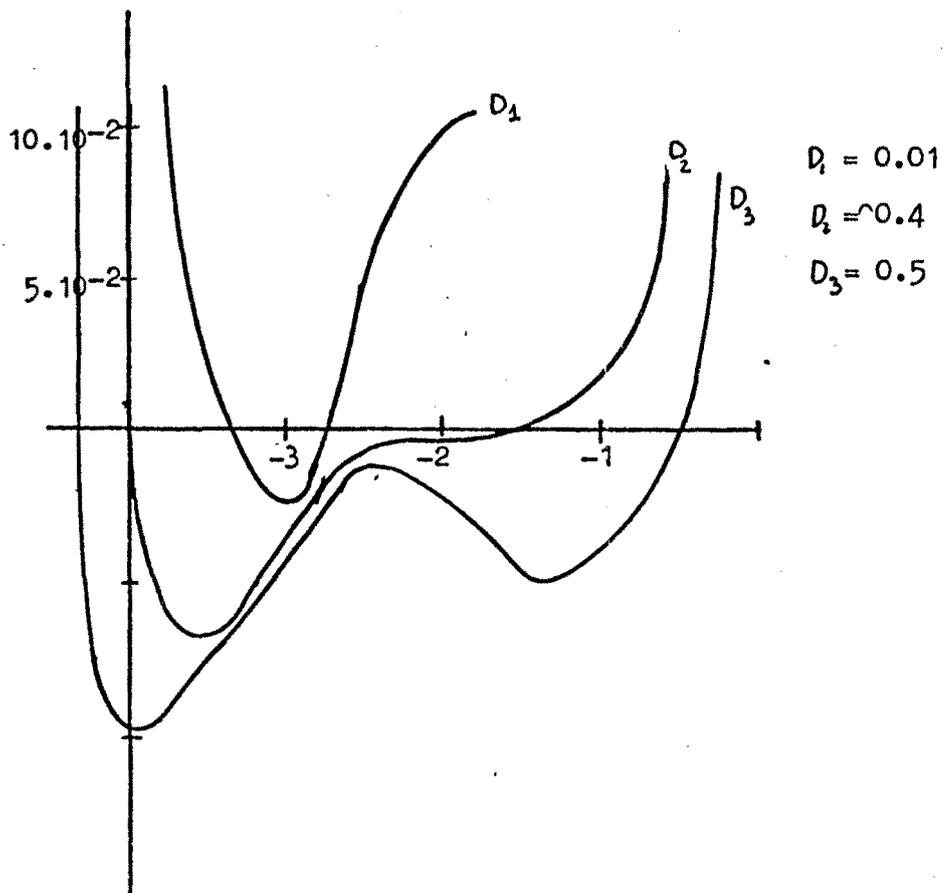


Fig.IV.4.- Variación del potencial cuántico en la zona subcrítica del dominio de ruido. ($\alpha = -0.1$, $S \Gamma = 10^{-4}$)

do crítico. La diferencia con lo anterior es que ahora no existe una clara división en regiones y el potencial resultante viene dado por la intersección de los potenciales sencillos V_I y V_{II} . Para ruidos débiles $D < \sqrt{nS}$ se puede comprobar que los términos intermedios $-2n(\alpha+D)e^y + 2S(\alpha-D)e^{-y}$ son despreciables frente a los otros en el potencial total, y éste se escribe

$$V(y) \approx (n e^y - S e^{-y})^2 \quad (4.73)$$

Pese a su aparente sencillez este potencial tampoco tiene soluciones analíticas asequibles. Por tratarse de ruido débil el análisis hecho en (IV.3A) es válido por lo que el espectro será aproximadamente el mismo:

$$\lambda_n \approx n \left(2\sqrt{Sn} - \frac{n\alpha^2}{4Sn} \right) \quad (4.74)$$

En condiciones subcríticas y supercríticas, $\alpha^2 \gg nS$ cuando $n \rightarrow 0$ y $S \rightarrow 0$ respectivamente se reproducen exactamente los potenciales V_I y V_{II} . Esto quiere decir que existe una parte de espectro discreta que en el límite se vuelve continua. El conocimiento de esta parte del espectro va a ser importante pues es la que marca la evolución con ruidos intensos. En concreto nos va a ser de utilidad el orden de magnitud de la diferencia de niveles que calcularemos a continuación usando métodos habituales de la mecánica cuántica.

Para fijar ideas supongamos $\alpha < 0$, es decir nos encontramos en el caso subcrítico. Una solución aproximada podrá ser calculada empalmado en el punto de intersección las soluciones correspondientes al potencial dominante en cada zona. Así pues en nuestro caso

$$A w_I(\ln \sqrt{\frac{S}{n}}) = B w_{II}(\ln \sqrt{\frac{S}{n}}) \quad (4.75)$$

siendo A y B dos constantes. Tomando las expresiones (4.60), (4.61) con $a < 0$

$$A \omega_{\frac{1}{2} + \frac{|a|}{2D}} , \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{|a|}{2D})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{|a|}{2D})} = B \omega_{\frac{1}{2} - \frac{|a|}{2D}} , \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{|a|}{2D})}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{|a|}{2D})} \quad (4.76)$$

donde $\omega_{A,B}(x)$ son funciones de Whitaker. En el límite $\eta \rightarrow 0$ o aproximadamente para $\eta \ll 8 D^2 s^{-3}$ es posible desarrollar estas funciones en potencias de x , obteniéndose (Abramovitz 1972):

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{|a|}{2D})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{|a|}{2D})} e^{-\frac{1}{4} \ln \frac{s}{\eta}} = c e \quad (4.77)$$

donde Γ son las funciones gammas. A partir de esta expresión se puede sacar información sobre la anchura de los niveles

$$\Delta \lambda_m \sim \frac{4 \eta \pi}{\ln \frac{s}{\eta}} ; \quad \Delta \lambda_m \approx \frac{8 \pi^2 D \eta}{(\ln \frac{s}{\eta})^2} \quad (4.78)$$

y se comprueba que cuando $\eta \rightarrow 0$ la anchura se hace cero apareciendo el espectro continuo.

En el caso $a > 0, s \rightarrow 0$. ó aproximadamente $s \ll 8 D^2 \eta^{-3}$, los cálculos son idénticos obteniéndose para la anchura de niveles:

$$\Delta \lambda_m \approx \frac{8 \eta D \pi^2}{(\ln \frac{\eta}{s})^2} \quad (4.79)$$

Entonces podemos decir, al igual que en los potenciales sencillos, que en los casos subcrítico (supercrítico) existen dos escalas de tiempos diferentes, la una dada por un espectro discreto y la otra por otro cuasicontinuo (en el caso $\eta(s) \rightarrow 0$). Cuando $\eta(s) \rightarrow 0$ se tiende a recuperar los ejemplos a) (b). De la misma forma cuando el ruido es débil el espectro discreto contribuye más a la evolución que el cuasicontinuo, estando en el caso en el cual la linealización es, en prin

cipio, posible y las funciones de correlación tienen forma exponencial.

Cuando el ruido es intenso $D \gg |K|$ el espectro discreto desaparece y únicamente queda el cuasicontínuo. La linealización ahora no puede dar buenos resultados (obsérvese (Fig. IV.4) que el potencial tiene dos mínimos) y cuando β y S , respectivamente en los casos subcrítico y supercrítico, tienden a cero las funciones de correlación tomarán la forma de la exponencial multiplicada por un factor decreciente con el tiempo $\exp(-\lambda t) \cdot t^{-\delta}$ (4.68).

Con estos resultados relativos a la configuración del espectro y la forma de los potenciales es posible conocer cualitativamente la evolución y propiedades dinámicas del sistema. Destacamos sobre todo como relevantes en la futura aplicación a modelos de reactores los siguientes hechos:

- En las mismas condiciones de fuentes y acoplamiento de temperatura el potencial en el estado crítico es más ancho que en el subcrítico y supercrítico. Ello se traduce en un aumento de fluctuaciones, un tiempo de relajación mínimo y peores condiciones de linealización (Fig. IV.3 y IV.1).

- En los estados subcríticos y supercríticos con ruido débil los efectos de temperatura y fuente respectivamente no influyen decisivamente en la evolución estacionaria. Al ser fluctuaciones débiles los pozos de potencial se hacen profundos y la parte asintótica (debida a fuentes o temperatura) únicamente actúa en fluctuaciones intensas de poca probabilidad ó en los transitorios de la evolución.

- Con ruidos intensos la forma de los potenciales informa que se van a producir fluctuaciones intensas anómalas. Nos encontramos (fig. IV.4) con dos pozos de potencial diferenciados. Existirá una probabilidad de paso de un potencial a otro que informará sobre la probabili-

dad de ocurrencia de estas fluctuaciones intensas. En especial nos interesa el caso subcrítico pues reproduce cualitativamente las fluctuaciones observadas en reactores nucleares con agua en ebullición (Williams 1974). Es obvio que en estos casos la linealización no es posible y la función de correlación no va a ser exponencial,

IV.3.D. ANALISIS DE LOS RESULTADOS PARA EL MODELO NO LINEAL EN REACTORES NUCLEARES

Vamos a aplicar el análisis anterior a los modelos de reactores nucleares (IV.2.C). Se da por supuesto la existencia de un coeficiente de temperatura negativo ($\beta > 0$) pues es un requisito indispensable de seguridad. Con ello el sistema va a ser siempre estable.

El análisis de las fluctuaciones con efecto de temperatura induce regiones y conceptos de estabilidad que no aparecen en un análisis normal; basándonos en lo expuesto anteriormente haremos un primer estudio:

Se debe revisar el concepto de criticidad en un sistema no lineal con fluctuaciones, que no coincide con el de la criticidad en un sistema multiplicativo neutrónico ($k_{eff} = 1$). Siendo ahora el sistema estable para cualquier valor de k_{eff} ($\rho < \beta$) existen dos mecanismos diferentes de funcionamiento según dominen las fuentes o el efecto de temperatura. Ambos son los equivalentes de los estados subcríticos (el efecto de temperatura es despreciable) y supercríticos (el sistema tiende a la explosión y es el efecto temperatura quien estabiliza). Existe el estado intermedio en el cual es el efecto competitivo de la fuente y la temperatura quien define la situación final y puede considerarse como un punto crítico. A la vista del análisis anterior (IV.3. c) tales regiones vendrán definidas por

- $\alpha^2 \gg \beta S$
- $\alpha < 0$ Estado subcrítico con dominio de la fuente y efecto de temperatura despreciable. Exhibe función de correlación exponencial.
 - $\alpha > 0$ Estado supercrítico con dominio estabilizador de la temperatura y fuente despreciable. Función de correlación exponencial.
 - $|\alpha| \leq 0$ Zona de transición en la que domina el efecto del ruido siendo más acusado cuando $\alpha < 0$. Fluctuaciones anómalas y función de correlación no exponencial
-
- $\alpha^2 \lesssim \beta S$
- $0 < \sqrt{\beta S}$ Estado crítico, competencia entre la fuente y la temperatura, zona de mayor fluctuación relativa y peor linealización
 - $0 > \sqrt{\beta S}$ Estado crítico con fluctuaciones intensas

En la modelización de reactores hecha en IV.2.C distinguíamos entre aquellos casos en los que los neutrones retardados no tenían influencia apreciable y en los que jugaban un papel importante. Entre los del primero, el más importante es el que suponía ruidos intensos $Q_k/\epsilon > \beta$. Si se supone que el reactor está próximo a la criticidad, $\kappa_{eff} \approx 1$, con ruidos intensos $Q_k/\epsilon > \beta$ nos vamos a encontrar en una región $|\alpha| \leq 0$ que hemos llamado zona de transición, en la que domina el efecto del ruido. Una situación como ésta se produce en los reactores en ebullición a potencias elevadas. Experimentalmente se observan fluctuaciones anómalas de gran amplitud que pueden llegar a provocar la parada del reactor (Williams 1974). Una explicación a esto no ha sido satisfactoriamente expuesta. Ackasu (1961) supone fluctuaciones en reactividad producidas por algún mecanismo interno e intenta modelizarlo por un oscilador armónico con fuerza fluctuante. Según Williams ésta no es suficiente explicación pues no repro

duce la forma asimétrica de las fluctuaciones; según él, estos efectos están originados por no-linealidad en las ecuaciones neutrónicas antes que en la reactividad. Esta hipótesis se sitúa en la línea de nuestros resultados para ruidos intensas que predicen la existencia de fluctuaciones anómalas espontáneas. La falta de datos experimentales de las funciones de correlación impiden una comprobación de dicha hipótesis. Por otra parte, la suposición de ruido blanco es muy fuerte por lo que se debe tratar con ruidos más generales. Un primer estudio con ruido dicotómico será realizado posteriormente.

Queremos hacer notar que estos resultados teóricos en la zona de fluctuaciones fuertes $|a| \leq D$ son muy recientes y aún no existe confirmación experimental en ningún tipo de sistemas (Graham 1982). Como un trabajo interesante nos proponemos realizar en el futuro una simulación de este modelo sencillo que sustituya la falta de datos experimentales.

Por último, para los casos de ruido débil $D_k \ll \beta l$ y el reactor funcionando en condiciones próximas a la criticidad $k_{eff} \approx 1$ es forzoso tener presente el efecto de neutrones retardados. Como ya se ha sugerido en este caso estudiamos las fluctuaciones en dos escalas de tiempos, una rápida cuya evolución viene dada por la ecuación (4.16) y otra lenta representada en la ecuación (4.20). Las condiciones estacionarias así como las correlaciones de muy baja frecuencia vendrán dadas por (4.20). En esta ecuación $\alpha = \frac{k_{eff} - 1}{l}$ puede tomar todos los valores posibles y entonces el reactor se puede encontrar en todas las situaciones expuestas; en concreto, en condiciones críticas $k_{eff} \approx 1$ se puede encontrar en zonas de dominio del ruido. Sin embargo ahora no implicará un grave problema pues caso de existir fluctuaciones anómalas serán de frecuencia muy baja, y por tanto fácilmente controlables. Esto puede ser un ejemplo de cómo los neutrones retar

dados actúan estabilizando el efecto de las fluctuaciones.

En la zona de dominio del ruido a frecuencias bajas las correlaciones deberán adoptar la forma $\exp(-\lambda t) t^{-\delta}$ (4.68). Nuevamente no existen suficientes datos experimentales sobre ello.

En un modelo como éste el efecto estabilizador de temperatura impide la aparición del fenómeno de catástrofe de varianza, coincidiendo con los hechos experimentales.

Para frecuencias altas como las observadas experimentalmente debemos utilizar la ecuación (4.17). En condiciones estacionarias suponemos que $\langle \zeta(t) \rangle_{ST}$ viene dado por el comportamiento a frecuencias bajas, y que es proporcional a la potencia o número de neutrones en el estado estacionario. Entonces, en condiciones críticas $K_{eff} = 1$ y con fuente despreciable, se verifica que:

$$\begin{aligned} \alpha &\approx -\beta/\ell \\ \delta &\approx \lambda \langle \zeta(t) \rangle_{ST} \end{aligned} \quad (4.80)$$

luego para un ruido débil $D_k < \beta \ell$, el sistema se comportará como subcrítico cuando $\beta \lambda \langle \zeta(t) \rangle_{ST} < (\beta/\ell)^2$, y crítico en caso contrario.

Con esta descripción se está de acuerdo con los resultados experimentales que muestran que el reactor en estas frecuencias se comporta como subcrítico, existiendo una potencia por encima de la cual las fluctuaciones relativas aumentan (Zona crítica).

Vemos pues que, al menos cualitativamente, nuestro sencillo modelo esclarece el comportamiento de las fluctuaciones del reactor. Creemos que con ello, se logra aclarar en un nivel muy fundamental ciertas cuestiones poco conocidas.

IV.4.- VALIDEZ DE LAS APROXIMACIONES DE LINEALIZACION

En el contexto de reactores nucleares se habla indistintamente de ecuaciones no lineales como aquellas que presentan un término no lineal (ecuaciones no lineales en el sentido usual) y ecuaciones que, siendo lineales en el sentido normal, presentan el ruido en forma multiplicativa (ecuaciones no lineales en el sentido input-output (Gotôh (1975))). Las ecuaciones (4.14)-(4.18) presentan ambos tipos de no-linealidad.

Las aproximaciones de linealización se presentan pues de dos tipos: aquellas que toman el ruido multiplicativo de forma aditiva y las que sustituyen el término no lineal por otro lineal. Las primeras han sido tratadas por Williams (1974) como un cierto tipo de aproximación de fuente equivalente. En efecto, si tomamos la ec. (4.21) sin tener en cuenta el efecto temperatura:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N + \xi N + S$$

Williams supone que N fluctua alrededor del estado estacionario determinista $N_d = -S/\alpha$, de tal forma que $N = N_d + m(t)$ y la ecuación anterior puede ponerse como:

$$\frac{dm}{dt} = \alpha m + N_d \xi \quad (4.81)$$

donde se desprecian términos de la forma $m\xi$. Entonces ha sido sustituida una fuente de ruido multiplicativa por otra "equivalente" aditiva (ver III.1). Es más correcto tratarlo como una cierta linealización.

A continuación vamos a estudiar tres tipos de linealizaciones que han sido extensamente utilizadas en sistemas generales y particularmente en reactores nucleares: a) Linealización usual, b) estadística y c) logarítmica. Como en el apartado anterior consideramos primero una

ecuación general

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \xi(t) g(x)$$

para posteriormente aplicar los resultados obtenidos a un modelo concreto.

a) La linealización usual

Es la más simple y más utilizada en todo tipo de problemas. Supone que el sistema se encuentra en un estado estacionario estable de suerte que las fluctuaciones son tomadas en torno al punto determinista estable $f(x_d) = 0$. De esta forma

$$x(t) = x_d + \delta x(t)$$

que sustituida en la ecuación original y despreciando términos de orden $\delta x^m(t)$, $m > 1$ y ξ^m , $m \geq 1$; obtenemos la ecuación lineal

$$\frac{d\delta x(t)}{dt} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_d} \delta x(t) + \xi g(x_d) \quad (4.82)$$

Hacemos notar que implícitamente se hacen los dos tipos de linealizaciones antes mencionados.

Físicamente, la justificación de esta aproximación está en la base de suponer que la perturbación (en nuestro caso el ruido) es muy pequeña y pueden despreciarse términos de 2º orden frente a términos del primero. Obviamente esta justificación es ambigua y debe ser fundamentada por otros medios, pues aunque la perturbación sea débil hay casos en que las fluctuaciones son considerables (Zona crítica).

Si tomamos la ecuación (4.82) en forma de ecuación de Fokker-Planck:

$$\frac{\partial P(y,t)}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y} \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_d} y \right) + D \frac{\partial^2}{\partial y^2} P(y,t) \quad (4.83)$$

donde $y = \frac{\alpha x}{g(x_d)} = \frac{x - x_{0d}}{g(x_d)}$, y la ecuación de Schrödinger equivalente para las autofunciones:

$$-D \omega_m'' + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{x_d} + \frac{1}{4D} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{x_d}^2 y^2 \right] \omega_m(y) = \lambda_m \omega_m(y) \quad (4.84)$$

se observa que la linealización usual es equivalente en esta imagen a la sustitución de un potencial por otro de tipo oscilador armónico.

b) La linealización estadística es una sofisticación de la anterior. Ha sido usada en sistemas mecánicos por Budgor (1976) y Matsuo (1978), quienes demuestran su precisión respecto a la usual, y en el contexto de reactores nucleares por Kebabze (1975). Esta aproximación básicamente consiste en sustituir la parte no lineal de la ec. $\frac{dy}{dt} = F(y) + \xi$ otra lineal Ωy dejando indeterminado el parámetro Ω , que será fijado a posteriori con la condición de que la desviación

$$\xi = \langle (F(y) - \Omega y)^2 \rangle \quad (4.85)$$

sea mínima. Si la fuente de ruido es Gaussiana, ésta es una condición necesaria y suficiente para que el valor medio estacionario sea exacto (Budgor (1976)). Es evidente que con este tipo de linealización se optimizan los resultados de la anterior, a costa de una mayor pero no excesiva complicación.

En este caso el potencial equivalente viene dado por

$$V(y) = \left[\frac{\Omega}{2} y + \frac{1}{4D} \Omega^2 y^2 \right] \quad (4.86)$$

con la condición $\langle (F(y) - \Omega y)^2 \rangle$ mínimo.

c) Linealización logarítmica

Ya hemos indicado anteriormente que una ecuación con ruido multi-

plicativo siempre puede transformarse por el cambio de variable

$y = \int_{x_0}^x \frac{dx}{g(x)} = \varphi(x)$ a otra ecuación en la que el ruido aparece en forma aditiva:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{f(\varphi'(y))}{g(\varphi'(y))} y + \xi \quad (4.87)$$

Si en esta ecuación utilizamos la linealización usual (a) obtenemos otra clase de linealizaciones cuyo interés reside en que mantiene parte del carácter multiplicativo del ruido. En el caso particular de $g(x) = x$, la variable y toma la forma $\ln(x/x_0)$ y de aquí su nombre de logarítmica. Esta linealización únicamente ha sido utilizada en reactores nucleares y su relación y fundamentación con respecto a las otras no es bien conocida. Su origen se debe a los trabajos de Ackasu (1975) en dinámica y control de reactores y su introducción en problemas de ruido neutrónico es debida a Quabili (1979).

La linealización usual aplicada a la ecuación (4.87), en torno al punto $y_d=0$, $f(\varphi'(y_d)) = 0$, $g(\varphi'(y_d)) \neq 0$ conduce a la ecuación para y

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f(\varphi'(y))}{g(\varphi'(y))} \right)_{y_d} y + \xi \quad (4.88)$$

que en imagen mecánica es equivalente a un potencial

$$V(y) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f(\varphi'(y))}{g(\varphi'(y))} \right)_{y_d} + \frac{1}{4D} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f(\varphi'(y))}{g(\varphi'(y))} \right)_{y_d} \right]^2 y^2 \quad (4.89)$$

IV.4.A. RELACION ENTRE LAS DISTINTAS LINEALIZACIONES

Vamos a utilizar la imagen mecánica para establecer relaciones entre las aproximaciones anteriores. Restringiendo nuestra atención al

cálculo de valores cuadráticos y correlaciones, observamos que la imagen mecánica simplifica el problema al cálculo del espectro de valores propios y de $h_n = \int \varphi'(y) \hat{p}_n(y) dy$, de tal forma que la linealización aparecerá como una cierta aproximación en el potencial equivalente. En efecto si definimos $A(y) = f(\varphi'(y))/g(\varphi(y))$, sabemos que la expresión del potencial exacto viene dada como:

$$V(y) = \frac{A'(y)}{2} + \frac{A^2(y)}{4D} \quad (4.90)$$

A partir de este potencial la primera aproximación normalmente utilizada en mecánica cuántica es la sustitución por un potencial de oscilador armónico en el punto de potencial mínimo, es decir en el punto y_0 tal que

$$\frac{A''(y_0)}{2} + \frac{A(y_0) A'(y_0)}{2D} = 0 \quad (4.91)$$

En su lugar las aproximaciones de linealización se hacen en torno al punto determinista estable $A(y_d) = 0$, luego un primer criterio de grado de aproximación puede ser la diferencia entre ambos puntos

$|y_0 - y_d|$. La aproximación logarítmica consiste en tomar en la expresión del potencial

$$A(y) \simeq (y - y_d) \left. \frac{\partial A(y)}{\partial y} \right|_{y_d} \quad (4.92)$$

con lo que se obtiene para el potencial la misma expresión que en (4.89).

Luego, de hecho, la aproximación logarítmica no es otra cosa que la aproximación de oscilador armónico de un potencial. Estará, pues, justificada cuando $|y_0 - y_d|$ es pequeño y el potencial exacto admita como aproximación el de un oscilador, para lo cual una condición

necesaria es que exista una parte del espectro de valores propios discreta. La linealización usual conlleva el problema de sustitución de una fuente multiplicativa por otra aditiva. Tomando $g(x) = g(x_a)$ y linealizando como anteriormente, se obtiene para $y = \int_{x_a}^x \frac{dx}{g(x)} = \frac{(x-x_a)}{g(x_a)}$ el mismo potencial que para la linealización logarítmica (4.84)

$$V(y) = \frac{1}{2} g'(x_a) + \frac{1}{4D} [g'(x_a)]^2 y^2 \quad (4.93)$$

Es difícil justificar la sustitución aditiva $g(x) = g(x_a)$ a partir de la ecuación exacta; se puede, sin embargo, justificar a partir de la linealización logarítmica. Para ello tendremos en cuenta que el cálculo de correlaciones y valores cuadráticos depende exclusivamente del espectro en valores propios de la ecuación tipo Schrödinger y de parámetros de la forma:

$$\int (\varphi^{-1}(y))^m \hat{P}_m(y) dy$$

Al tener idéntico potencial, el espectro en ambas linealizaciones es el mismo, y las funciones propias también. Lo que cambia es $\varphi^{-1}(y)$ que en el caso de linealización usual es $x = g(x_a)y + x_a$ y se corresponde al desarrollo en primer orden alrededor de x_a del caso de linealización logarítmica:

$$\begin{aligned} y = \int_{x_a}^x \frac{dx}{g(x)} &\approx \int_{x_a}^x dx \left\{ \frac{1}{g(x_a)} + (x_a - x) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{g(x)} \right)_{x_a} + \dots \right\} = \\ &= \frac{(x-x_a)}{g(x_a)} + O[(x-x_a)^2] \Rightarrow \end{aligned} \quad (4.94)$$

$$\Rightarrow x \approx x_a + g(x_a)y + O[y^2]$$

luego queda justificada si la linealización log. lo está, ya que en este caso las fluctuaciones son pequeñas: $y \ll 1$. La linealización estadística supone una optimización de la usual pero básicamente no difiere en sus fundamentos.

Con objeto de remarcar las diferencias cualitativas vamos a utilizar un ejemplo que tenga expresiones exactas sencillas:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N + \xi N + S$$

siendo ξ un ruido blanco de intensidad D . En la tabla (IV.1) vienen expuestos los resultados más significativos que pueden compararse con los resultados exactos. El tipo de linealización de este modelo es de paso de ruido multiplicativo a aditivo, y se ha elegido por tener resultados exactos sencillos. Se comprueba que es suficiente para informar sobre el mecanismo de la aproximación.

La linealización usual y logarítmica ha sido expuesta con detalle. Entendemos por linealización cuántica la sustitución de un potencial exacto por otro de oscilador armónico en el punto de potencial mínimo.

La linealización estadística necesita una aclaración complementaria. En rigor, se ha aplicado a linealizaciones de funciones no lineales y no a la de ruidos multiplicativos; sin embargo, vale igual para este último caso. El espíritu de la aproximación consiste en sustituir el término multiplicativo ξN por otro aditivo $\Omega N + \xi N \alpha$, de tal forma que su desviación cuadrática sea mínima respecto al parámetro Ω :

$$\frac{\partial}{\partial \Omega} \langle (\xi N - \Omega N - \xi N \alpha)^2 \rangle = 0$$

$$\Omega = \frac{\langle \xi N^2 \rangle}{\langle N^2 \rangle} - \frac{N \alpha \langle \xi N \rangle}{\langle N^2 \rangle} \quad (4.95)$$

	Variable	Potencial	Origen de lineal.	Espectro	Función de correlación
Linealización Usual.	$y = \frac{N - N_d}{N_d}$	$V(y) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{4D} y^2$	$y_d = 0, N_d = -\frac{\beta}{\alpha}$	$\lambda_i = -\alpha i$	$C(z) = \frac{s^2}{\alpha^2} \left\{ 1 - \frac{D}{\alpha} e^{\alpha z} \right\}$
Linealización estadística	$y = \frac{N - N_d^e}{N_d^e}$	$V(y) = \frac{(\alpha+D)}{2} + \frac{(\alpha+D)^2}{2} y^2$	$y_d = 0, N_d^e = -\frac{\beta}{(\alpha+D)}$	$\lambda_i = -(\alpha+D)i$	$C(z) = \frac{s^2}{(\alpha+D)^2} \left\{ 1 - \frac{D}{\alpha+D} e^{(\alpha+D)z} \right\}$
Linealización Logarítmica	$y = \ln \frac{N}{N_d}$	$V(y) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{4D} y^2$	$y_d = 0, N_d = -\frac{\beta}{\alpha}$	$\lambda_i = -\alpha i$	$C(z) = \frac{s^2}{\alpha^2} e^{-\frac{D}{\alpha} e^{\alpha z}}$
Linealización Cuántica	$y = \ln \frac{N}{N_0}$	$V(y) = \frac{(\alpha-D)}{2} + \frac{(\alpha-D)y+D)^2}{4D}$	$y_0 = 0, N_0 = -\frac{\beta}{(\alpha-D)}$	$\lambda_i = -(\alpha-D)i$	$C(z) = \frac{s^2}{(\alpha-D)^2} e^{\frac{D^2}{(\alpha-D)^2} - \frac{D}{(\alpha-D)} e^{(\alpha-D)z}}$
Solución exacta	$y = \ln N$	$V(y) = \frac{1}{4D} [\alpha^2 + 2\gamma(\alpha-D)e^{-y} + \beta^2 e^{-2y}]$		$\lambda_i = -\alpha i - D m^2$	$C(z) = \frac{s^2}{(\alpha+D)^2} \left\{ 1 - \frac{D}{\alpha+D} e^{(\alpha+D)z} \right\}$

Tabla IV.1.- Comparación de las distintas linealizaciones en un modelo exacto.

En nuestro caso Ω se calcula exactamente utilizando la fórmula de Novikov de derivación funcional (Novikov (1965))

$$\Omega = 2D - D \frac{N_d \langle N \rangle}{\langle N^2 \rangle} = D + \frac{2D^2}{|d|} \quad (4.96)$$

A partir de los resultados de la tabla (IV.1) se puede deducir que:

- Únicamente las linealizaciones cuántica y estadística presentan corrección por el ruido en el inverso del tiempo de relajación. Esto confirma los resultados de Budgor (1976) respecto a la linealización estadística y contradice los de Quabili (1979) respecto a la logarítmica.

- Cuando las fluctuaciones son débiles $\frac{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}{\langle N \rangle^2} = \frac{D}{|d| - 2D} \ll 1$ todas ellas son válidas en el orden mas bajo posible, por ejemplo $\langle N^2 \rangle$ es correcto en el orden cero en D , ($\langle N^2 \rangle \approx \frac{S^2}{|d|^2}$) y $C(z) - \langle N \rangle^2 \approx \frac{S^2}{d^2} \frac{D}{|d|} e^{-|d|z}$ al primero. Mas allá del orden más bajo comienzan las diferencias.

- La mejor linealización es la estadística. La linealización logarítmica, en contra de lo dicho por Quabili (1979) no mejora la usual.

IV.5.- ESTUDIO DE MODELOS NO LINEALES CON RUIDOS DICOTOMICOS. EFECTO DEL TIEMPO DE CORRELACION

En el tratamiento expuesto anteriormente se han hecho dos hipótesis que nos han permitido conseguir resultados analíticos; una de ellas es la de ruido blanco y la otra suponer el acoplamiento lineal de temperatura. Esta última conduce a un modelo no lineal cuadrático válido localmente alrededor del punto de equilibrio. Resulta pues interesante hacer un estudio más general que, aunque no abarque el cálculo explícito de correlaciones, sí se obtengan resultados cualitativos de los efectos antes omitidos.

Para estudiar el efecto del tiempo de correlación t_c sustituiremos el ruido blanco antes usado por un ruido dicotómico con correlación exponencial $\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \Delta^2 \exp\{-|t-t'|/t_c\}$. Asimismo, para estudiar el efecto de temperatura global utilizaremos las expresiones del coeficiente de multiplicación en función de la temperatura a través de la consideración exclusiva del efecto Doppler sobre las secciones eficaces de absorción resonantes.

El ruido dicotómico es el único que permite la obtención de resultados exactos en modelos no lineales y no Markovianos. El estudio más general de modelos no Markovianos en ecuaciones lineales será tratado en un capítulo posterior. En el presente, perseguimos únicamente un análisis cualitativo en modelos no lineales, por lo que nos restringimos al caso exacto con ruidos dicotómicos. Antes de empezar con dicho análisis debemos señalar dos hechos importantes relacionados con el uso de ruidos dicotómicos:

a) Como se verá más adelante el uso de un ruido dicotómico constituye una primera aproximación de un ruido general débil (V.3.8) (Primer orden de aproximación en la intensidad del ruido). En estas condiciones los resultados obtenidos para dicho ruido podrán ser una buena aproximación para cualquier otro.

b) En los métodos de diagnosis lineal por técnicas de ruido en reactores nucleares se introduce el ruido test por medio de variaciones en las barras de control. De esta forma se pueden generar ruidos aproximadamente gaussianos y de pequeño tiempo de correlación. Sin embargo, las complicadas técnicas que ello supone aconsejan el uso de ruidos dicotómicos por ser de muy sencilla introducción (Uhrig (1970)). El poder extender el análisis teórico a modelos no lineales cualesquiera

ra, sugiere la posibilidad de usar estas mismas técnicas para la diagnosis y estudio de efectos no lineales de temperatura de gran importancia sobre todo en reactores rápidos.

Como anteriormente, vamos en principio a utilizar una ecuación general para después especializar los resultados al caso de reactores nucleares. Sea la ecuación general

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \xi g(x) \quad (4.97)$$

donde ahora ξ es un ruido dicotómico de amplitud Δ , valor medio nulo y correlación exponencial del tipo

$$\langle \xi(t') \xi(t) \rangle = \Delta^2 e^{-\nu(t'-t)} \quad (4.98)$$

con $\nu = 1/t_c$ el inverso del tiempo de correlación.

A partir de (4.97) se obtiene para la función de probabilidad $P(x,t)$ (K. Kitahara 1979) la siguiente expresión

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} f(x) P(x,t) + \Delta^2 \frac{\partial}{\partial x} g(x) \int_{-\infty}^t dt' \exp\left\{-\left(\nu + \frac{\partial}{\partial x} f(x)\right)(t-t')\right\} \frac{\partial}{\partial x} g(x) P(x,t') \quad (4.99)$$

En el estado estacionario $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$ ésta ecuación es fácilmente resoluble, resultando para $P_{st}(x)$:

$$P_{st}(x) = N \left[\frac{g(x)}{\Delta^2 g(x)^2 - f(x)^2} \right] \exp \left[-\left(\frac{\nu}{2}\right) \int^x dx' \left\{ 1/(\beta(x') - \Delta g(x')) + 1/(\beta(x') + \Delta g(x')) \right\} \right] \quad (4.100)$$

donde N es una constante de normalización.

De esta expresión se puede sacar la forma de la probabilidad y su variación con los distintos parámetros. En concreto nos va a interesar:

- El soporte de la función, es decir, el intervalo en el cual la probabilidad es positiva. Vendrá dado por las raíces

$$F_{\pm}(x) = f(x) \pm \Delta g(x) = 0$$

La existencia de estas raíces indica que la variación de x está acotada por ellas. En el caso de que sólo exista una raíz positiva, el soporte será $[0, r_+]$, siendo r_+ dicha raíz.

- El comportamiento de la función de probabilidad en los extremos, que vendrá dado por el comportamiento asintótico de

$$P_{\pm}(r_{\pm} + \delta x) \approx |\delta x|^{-\nu/2} \{F'_{\pm}(r_{\pm})\}^{-1}$$

- La posición de máximos y mínimos que se obtendrá a partir de

$$f(x_m) - (\Delta^2/\nu) g(x_m) g'(x_m) + 2/\nu f(x_m) f'(x_m) - \\ - (1/\nu) f(x_m)^2 g'(x_m)/g(x_m) = 0$$

Utilizaremos en nuestros cálculos el modelo cuadrático del efecto de temperatura

$$\frac{dN}{dt} = -\mu N^2 + \alpha N + \beta N + S$$

que es el usualmente empleado en los casos no lineales y el modelo con acoplamiento Doppler exacto

$$\frac{dN}{dt} = \left\{ \tilde{K} \exp(-\beta_0 \sqrt{N}) - 1 \right\} \frac{N}{\rho} + \beta N + S$$

con el propósito de comparar y comprobar si un cambio en la forma del acoplamiento induce modificaciones importantes.

Los resultados obtenidos están representados en las figuras (IV.5-IV.10) que a continuación interpretamos:

a) Definición de regiones (Fig. IV.5 y IV.6)

Partiendo del comportamiento asintótico en los límites del dominio de definición de la probabilidad, definimos las regiones I, II, III cuyo significado físico es el siguiente:

I.- Región adiabática: el tiempo de variación del ruido $\approx 1/\nu$ es mucho más lento que el del sistema, de tal forma que éste sigue la variación del ruido.

II.- Región intermedia: es un efecto de acoplamiento entre el ruido y el sistema que no aparecería en un ruido aditivo. En esta región el sistema sufre oscilaciones asimétricas.

III.- Región de ruido blanco: el ruido es más rápido que el sistema, de modo que entre una fluctuación y otra el sistema no logra recuperarse quedando en un punto de equilibrio.

La figura IV.5 representa un modelo cuadrático tomado como referencia $\kappa = 0,01$, $\nu = 10^{-5}$. Los valores positivos de ordenadas corresponden a α positivos y los negativos a α negativos.

El punto B es el doble del inverso del tiempo propio de respuesta del sistema en el límite de ruido débil $\Delta \rightarrow 0$: $B = 2(1 + 4\frac{\nu\kappa}{\alpha^2})^{1/2}$.

La anchura de la región intermedia en el punto $\Delta = \alpha$, representada por c, viene dada por $C = 4[(1 + \frac{\nu\kappa}{\alpha^2})^{1/2} - (\frac{\nu\kappa}{\alpha^2})^{1/2}]$. Cuando el sistema se hace crítico: $\nu\kappa \gg \alpha^2$, el punto B se desplaza hacia la derecha $B \approx \frac{4\sqrt{\nu\kappa}}{\alpha}$ y la anchura c disminuye de tal forma que la región de transición tiende a desaparecer y el tiempo de respuesta del sistema empieza a ser

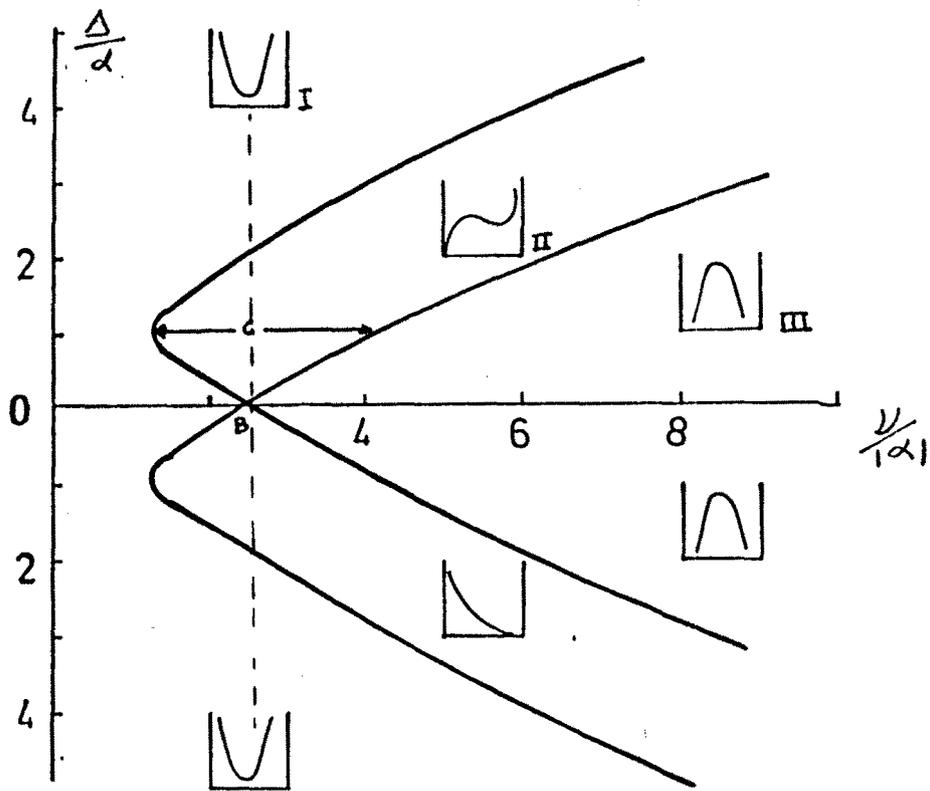


Fig. IV.5 .- Regiones de probabilidades con acoplamiento cuadrático
 ($|\alpha| = 0.01$, $S \Gamma = 10^{-5}$)

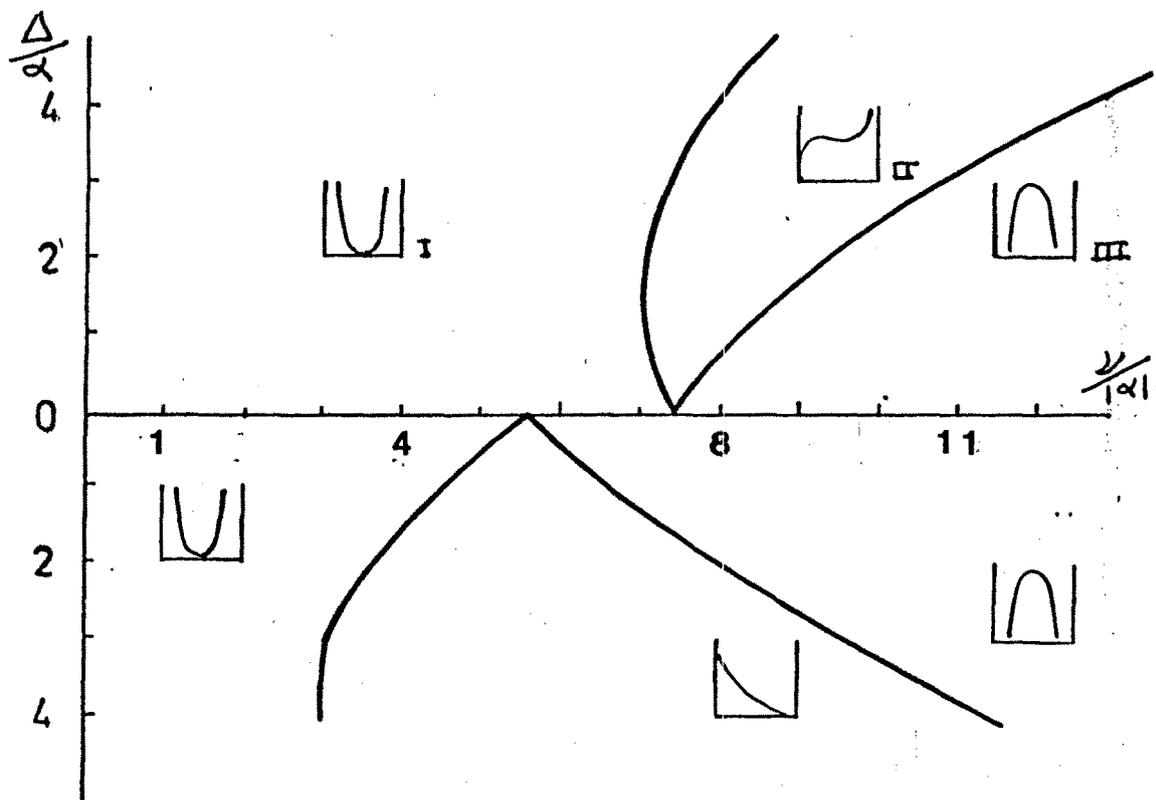


Fig. IV.6.- Regiones de probabilidades con acoplamiento exponencial.
 ($S \cdot B_0^2 = 10^{-5}$, $\frac{1}{e} |\tilde{\kappa} - 1| = 0.01$).

dominado por β en vez de α .

La figura IV.6 representa un modelo con acoplamiento de tipo exponencial. Se pierde la simetría entre los resultados de α positivos y negativos; el punto B queda desplazado hacia la derecha y la anchura c disminuida para el caso supercrítico (el efecto temperatura es más eficiente).

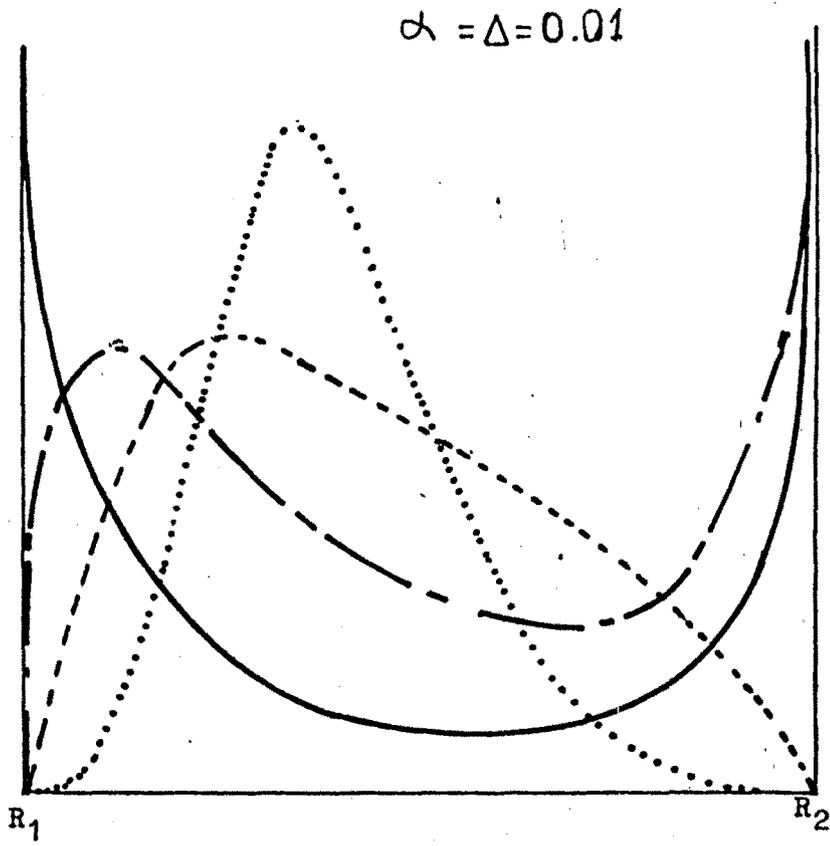
Si el ruido fuera aditivo ó se hubieran linealizado las ecuaciones únicamente se encuentran las regiones de tipo I y III separadas por la recta $\nu/\alpha = B$ (recta con trazos en fig. IV.5). La aparición de la región II y la dependencia de las regiones con la intensidad del ruido es, pues, un efecto debido al carácter multiplicativo del ruido.

b) Forma de la probabilidad (Fig. IV.7 y IV.8)

La figura IV.7 presenta la forma de las probabilidades en las diferentes regiones para un modelo cuadrático con $\alpha = \Delta = 0,01$, es decir, en un caso supercrítico. Las funciones con un solo máximo $\nu = 0,05$ y $\nu = 0,1$ (Región III) pueden ser subdivididas en otras tres regiones según que la pendiente en cada frontera sea infinita ($\nu = 0,05$) o cero ($\nu = 0,1$). Estas regiones no han sido representadas para no complicar innecesariamente las figuras. La figura IV.8 presenta lo mismo para el caso subcrítico $\alpha = -0,01$. La diferencia esencial, aparte de la posición de los máximos, estriba en que en el caso subcrítico en la región II no aparecen probabilidades con máximos y mínimos relativos, siendo la forma de la probabilidad completamente distinta. En el caso supercrítico domina la frontera superior y en el subcrítico la inferior.

c) Posiciones relativas de máximos y mínimos (Fig. IV.9 y IV.10)

Representamos para el caso supercrítico (Fig. IV.9) y subcrítico (Fig. IV.10) las posiciones relativas de los máximos y mínimos para



- $\nu = 0.1$
- $\nu = 0.05$
- .-.- $\nu = 0.02$
- $\nu = 0.005$

$R_1 = 3.1 \cdot 10^{-3}$
 $R_2 = 0.02$

Fig. IV.7.- Forma de la probabilidad en cada región (supercrítico).
($S \pi = 10^{-5}$)

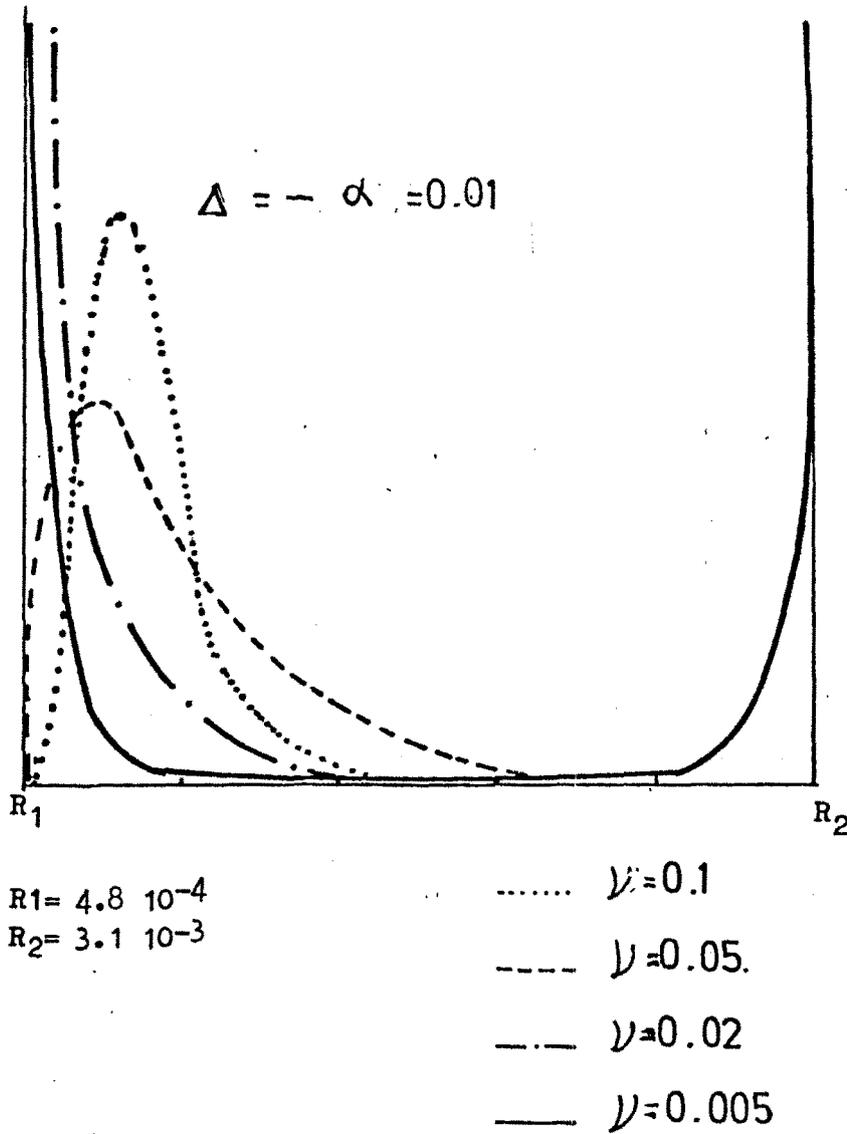
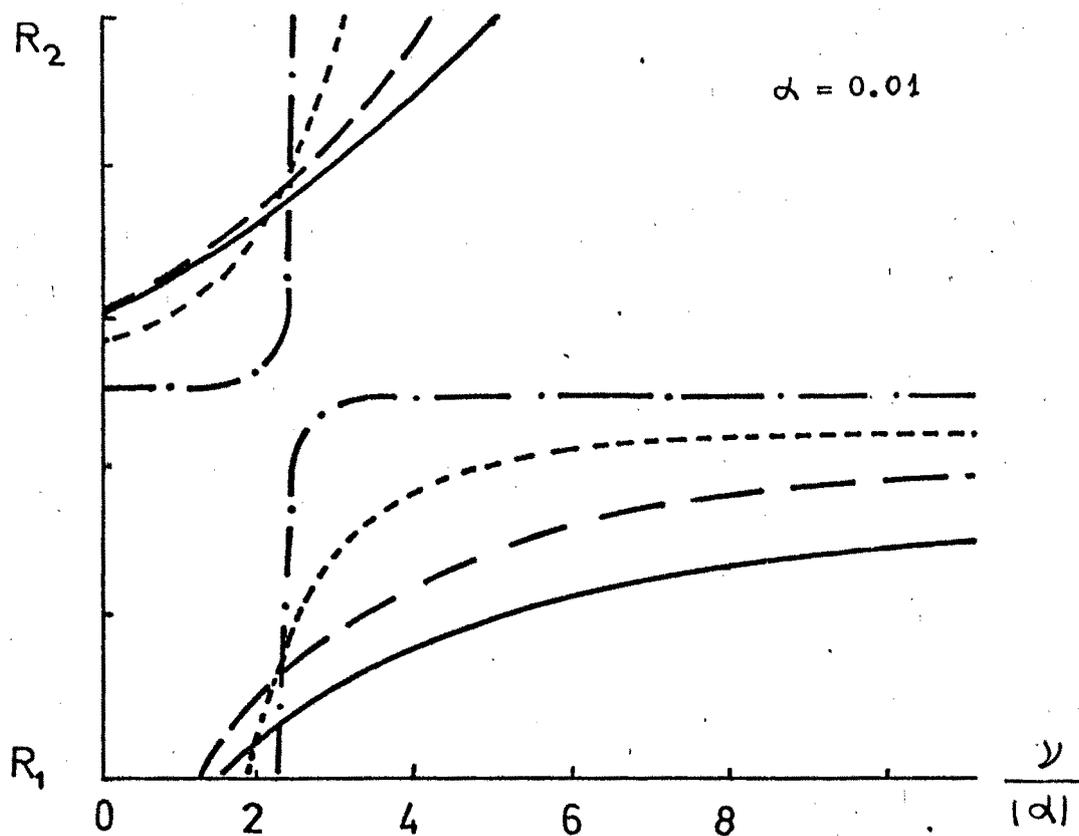
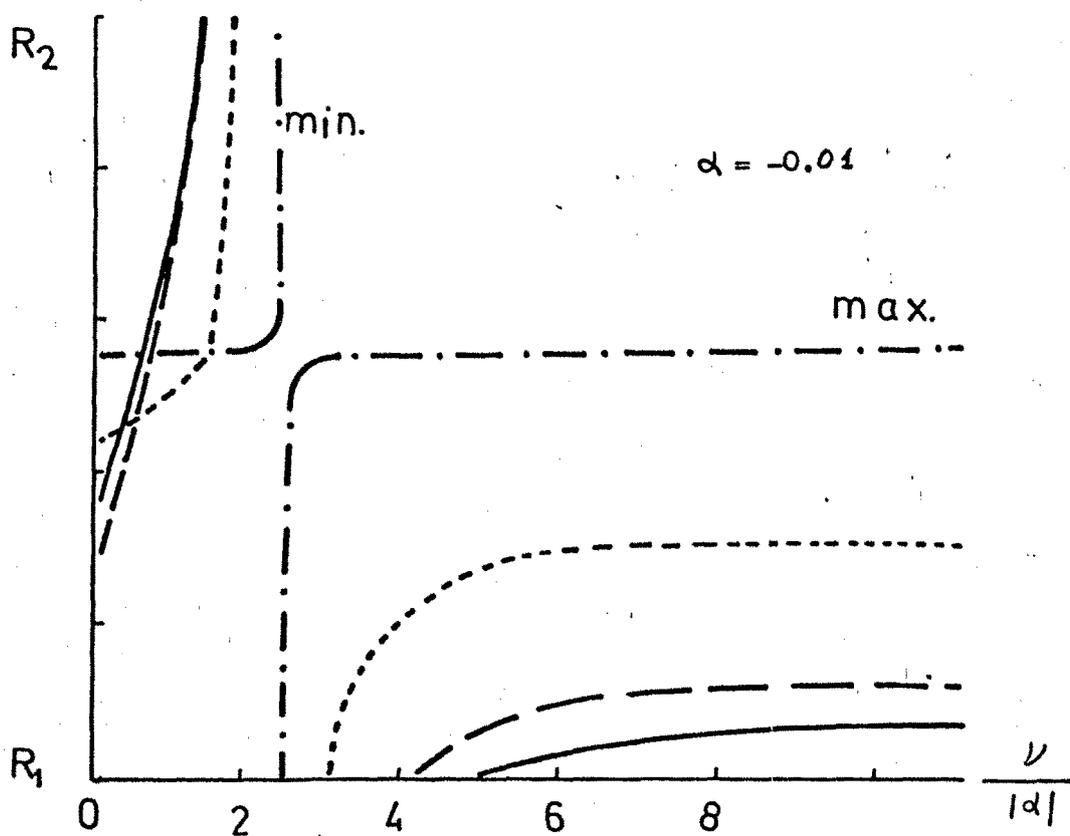


Fig. IV. 8 .- Forma de la probabilidad en cada región (subcrítico).



—	$\Delta = 0.001$	$R_2 = 0.06$	$R_1 = 4.1 \cdot 10^{-5}$
- -	$\Delta = 0.004$	$R_2 = 0.05$	$R_1 = 3.2 \cdot 10^{-4}$
· · · ·	$\Delta = 0.01$	$R_2 = 0.02$	$R_1 = 3.16 \cdot 10^{-3}$
- · - ·	$\Delta = 0.014$	$R_2 = 0.012$	$R_1 = 9.07 \cdot 10^{-3}$

Fig. IV.9.- Posiciones relativas de máximos y mínimos (caso supercrítico)
 ($S \Pi = 10^{-5}$)



—	$\Delta=0.001$	$R_2= 0.04$	$R_1= 0.3 \cdot 10^{-4}$
- - -	$\Delta=0.004$	$R_2= 0.03$	$R_1= 1.99 \cdot 10^{-4}$
- - - -	$\Delta=0.01$	$R_2= 3.16 \cdot 10^{-3}$	$R_1= 4.87 \cdot 10^{-4}$
- - - - -	$\Delta=0.014$	$R_2= 9.78 \cdot 10^{-4}$	$R_1= 8.38 \cdot 10^{-4}$

Fig. IV.10.- Posiciones relativas de máximos y mínimos para el caso subcrítico.
($s \Pi = 10^{-5}$)

diferentes intensidades del ruido en función del inverso del tiempo de correlación. Se puede observar como en el caso subcrítico (Fig. IV. 10) no se cruzan nunca máximos con mínimos, mientras que en el supercrítico (Fig. IV.9) existe una región en que sí lo hacen.

Es de señalar que la zona II no aparecería en un análisis lineal. Su anchura crece con la relación Δ/α hasta ocupar una zona importante para $\alpha = \Delta$, luego está en relación con la región que hemos llamado de dominio del ruido. El hecho a destacar es que explica perfectamente la asimetría de las oscilaciones anómalas que aparecen en los reactores de agua en ebullición y que no pueden ser explicadas en la teoría de Ackasu (1961). En efecto, si suponemos que el reactor se encuentra en una zona ligeramente subcrítica y con ruido intenso las fluctuaciones cuyo tiempo de relajación esté en la zona II producirán oscilaciones fuertemente asimétricas. Este hecho no ha podido ser explicado porque no puede aparecer en las teorías linealizadas usadas hasta ahora (Williams, 1974).

CAPITULO V:

ESTUDIO DE MODELOS NO MARKOVIANOS EN REACTORES NUCLEARES

V.I. INTRODUCCION AL ESTUDIO DE MODELOS NO MARKOVIANOS

En los capítulos anteriores se han tratado temas de tipo fundamental en los que principalmente se desea obtener resultados cualitativos. No es de extrañar que se halla usado ruidos sencillos como son el ruido blanco y el dicotómico. En el capítulo tercero y, para mantener la unidad temática, se han introducido brevemente ruidos generales que pueden servirnos como preámbulo de un estudio a fondo como el que aquí pretendemos.

En un reactor nuclear, cuando se desea calcular parámetros o hacer un diagnóstico por técnicas de ruido, se han de utilizar ruidos realistas con un cierto tiempo de correlación y no necesariamente gaussianos. El estudio del tratamiento aproximado de ruidos generales en modelos de reactores es de suma importancia en todas las aplicaciones prácticas, cálculos de parámetros, extracción de propiedades dinámicas etc...

Como se ha dicho en el capítulo segundo al hablar de la modelización, un estudio completo incluye los efectos espaciales y de acoplamiento; sin embargo, en un amplio margen de aplicaciones, para ruidos de carácter global (Sheff 1967), se sabe experimental y teóricamente que los modelos puntuales reproducen con bastante precisión los resultados reales. Los fenómenos de acoplamiento débil permiten considerar los ruidos como externos. Resulta pues fácil de comprender que modelos puntuales con ruidos externos reproduzcan muy bien los experimentos cuando el tratamiento teórico es adecuado para reactores a potencia cero ó a potencia con acople débil.

En este capítulo vamos a estudiar modelos puntuales con ruidos generales externos haciendo hincapié en el cálculo de momentos, fluctuaciones relativas, tiempos de relajación y correlaciones en el estado estacionario, por ser las magnitudes estadísticas más utilizadas en las aplicaciones. Hacemos notar que la linealización en el sentido multiplicativo-aditivo (IV.4) ha sido el tratamiento comúnmente usado por los experimentales. Como ya ha sido visto en el anterior capítulo, cuando la fuente de

ruido es muy débil y lejos del punto crítico tal aproximación es válida. Un tratamiento más correcto que el de linealización ha sido objeto de varios estudios muy interesantes pero no exentos de errores que discutiremos posteriormente.

La mayoría de las veces los tratamientos mencionados son una translación de métodos usados en otras disciplinas como en cinética química, propagación de ondas, mecánica, etc., . (Quabili 1979). Los modelos de reactores presentan una complicación respecto a los mecánicos al tratarse de ecuaciones no homogéneas.

De entre los trabajos mencionados destacamos como importantes los de Williams (1971), quien estudia ruidos Gaussianos en ecuaciones unidimensionales por métodos directos; Gotoh (1975) con ruidos Gaussianos por métodos funcionales; Quabili (1979), ruidos generales por métodos de cumulantes y por fin Saito (1979) con ruidos Gaussianos por métodos de derivación funcional.

Los trabajos más recientes, Quabili y Saito, tienen errores conceptuales que serán tratados con detalle. Todos ellos calculan bien valores medios estacionarios y correlaciones con ruido blanco. El cálculo correcto de correlaciones para ruidos no blancos es muy reciente: Chatuverdi (1982) por técnicas de cumulantes para sistemas sin fuente, Hernandez-Machado (1983) por derivación funcional.

V.2. REACTORES PUNTUALES SIN NEUTRONES RETARDADOS

Comenzamos el estudio de modelos no Markovianos considerando el ejemplo más sencillo posible: un reactor puntual sin neutrones retardados. Como ocurre en los análisis de estabilidad este modelo se suele emplear para extraer información cualitativa, en nuestro caso nos va a ser de utili

dad como referencia para comprobar la validez de modelos más complicados.

V.2.A. SOLUCIONES EXACTAS CON RUIDOS GAUSSIANOS DE CORRELACION EXPONENCIAL

Es muy útil disponer de soluciones exactas de modelos sencillos pues como remarca Saito (1980A) a propósito del modelo puntual con ruido blanco: "Es la referencia con la cual la validez de cada método aproximado es consultada". Sin embargo el uso del ruido blanco no es adecuado para comprobar modelos no Markovianos por lo que es necesario disponer de soluciones exactas para modelos sencillos con ruido no-blanco.

Alternativamente, un ruido Gaussiano es más general y nos proporciona situaciones más realistas que los ruidos más simples como el dicotómico y el blanco. De hecho, el ruido blanco es un caso particular del Gaussiano.

En el contexto de reactores nucleares, el ruido gaussiano ha sido usado por varios autores; Saito (1980A), Williams (1971), Gotoh (1975), y con varias técnicas de aproximación. Sin embargo soluciones exactas en modelos sencillos han sido únicamente publicadas en trabajos muy recientes por Saito (1980A), quien calcula únicamente el valor medio, y por Rodríguez (1983A) calculando valores cuadráticos y correlaciones.

En este apartado exponemos los resultados exactos antes mencionados que nos serán de utilidad en comprobaciones posteriores.

Tomemos el modelo puntual sin neutrones retardados descrito por la ecuación

$$\frac{dN}{dt} = -\alpha N(t) + \frac{\beta}{\ell} N(t) + S + \xi_K(t) \quad (5.1)$$

donde $\xi_K(t)$ es un ruido Gaussiano de correlación exponencial:

$$\langle \xi_K(t) \xi_K(t') \rangle = \frac{\sigma}{t_c} e^{-|t-t'|/t_c} \quad (5.2)$$

y $\alpha = -\frac{K_0-1}{\ell}$ (signo opuesto a Cap. anteriores)⁽¹⁾. Tomamos el ruido de esta forma para que en el límite $\ell_c \rightarrow \infty$ reproduzca el resultado para el ruido blanco:

$$\langle \xi_\kappa(t) \xi_\kappa(t') \rangle = 2D \delta(t-t')$$

Una solución explícita de (5.1) es

$$N(t) = \int_0^t d\sigma \exp \left\{ \int_0^\sigma du \left(\alpha + \frac{\xi_\kappa(u)}{\ell} \right) \right\} \cdot S \quad (5.3)$$

donde suponemos condiciones iniciales nulas $N(0) = 0$.

La función de correlación estacionaria, directamente a partir de (5.3), será:

$$\begin{aligned} \langle N(t) N(t') \rangle_{st} = C(t-t) &= S^2 \int_{-\infty}^t d\sigma \int_{-\infty}^{t'} d\sigma' e^{-\alpha(t-\sigma)} e^{-\alpha(t'-\sigma')} \\ &\exp \left\{ \frac{1}{2\ell^2} \int_0^t du \int_0^t dv \langle \xi_\kappa(u) \xi_\kappa(v) \rangle + \frac{1}{2\ell^2} \int_0^{t'} du \int_0^{t'} dv \langle \xi_\kappa(u) \xi_\kappa(v) \rangle \right. \\ &\left. + \frac{1}{\ell^2} \int_0^t du \int_0^{t'} dv \langle \xi_\kappa(u) \xi_\kappa(v) \rangle \right\} \quad (5.4) \end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de la propiedad Gaussiana del ruido.

Sustituyendo (5.2) en (5.4) y operando se obtiene

$$\begin{aligned} C(\tau) &= \int_0^\tau d\sigma \int_0^\infty d\sigma' S^2 e^{-\alpha_0(\tau-\sigma+\sigma')} \exp \left\{ S(e^{-\lambda(\tau-\sigma)} - 1) + S(e^{-\lambda\sigma'} - 1) \right. \\ &\left. - S(e^{-\lambda\tau} - e^{-\lambda\sigma})(1 + e^{-\lambda\sigma'}) \right\} + 2 \int_{-\infty}^0 d\sigma \int_{-\infty}^0 d\sigma' S^2 e^{-\alpha_0(\tau-\sigma-\sigma')} - \frac{2D\tau}{\ell^2} \\ &\exp \left\{ S(e^{-\lambda(\tau-\sigma)} - 1) + 2S(e^{-\lambda\sigma} - 1) + S(e^{-\lambda\sigma'} - 1) - S(e^{-\lambda\tau} - 1)(1 - e^{-\lambda\sigma'}) \right. \\ &\left. - S(1 - e^{-\lambda\sigma})(e^{-\lambda\sigma} - e^{-\lambda\sigma'}) \right\} \quad (5.5) \end{aligned}$$

(1) En este Cap. tomamos α de manera que siempre sea positivo en condiciones de estabilidad con objeto de unificar la notación y comparar con otros trabajos (Saito 1980A).

donde $\alpha_0 = \alpha - \frac{D}{\rho^2}$, $S = \frac{Dt_c}{\rho^2}$, $\lambda = t_c^{-1}$ y hemos considerado una sencilla partición del dominio de integración.

A continuación presentamos la solución de estas integrales por medio de funciones confluentes. Obtenemos para las correlaciones

$$C(z) = S^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n S^n}{n! \lambda^2 (n+1)} (1 - e^{-\lambda z})^{n+1} e^{-\lambda n z} B(n+1, \alpha_0 \lambda^{-1}).$$

$$\begin{aligned} & \Phi_1(n+1, n+1 + \alpha_0 \lambda^{-1}, -S) \Phi_2(n+1, n+1 - \alpha_0 \lambda^{-1}, n+2; (1 - e^{-\lambda z}); \\ & S(1 - e^{-\lambda z}); -S(1 - e^{-\lambda z})) + 2S^2 e^{-\alpha_0 z} e^{-S} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^n}{\lambda^2 n!} \\ & (1 + e^{-\lambda z})^n \cdot B(n+1, \alpha_0 \lambda^{-1}) \cdot B(n+1, 2(\alpha_0 - \frac{D}{\rho^2}) \lambda^{-1}) \\ & \Phi_2(n+1, n+1 + 2(\alpha_0 - \frac{D}{\rho^2}) \lambda^{-1}, -2S(e^{-\lambda z} + 1)). \\ & \Phi_2(\alpha_0/\lambda, n+1 + \alpha_0 \lambda^{-1}, S e^{-\lambda z}). \end{aligned} \tag{5.6}$$

y para el valor cuadrático medio:

$$\langle \nu^2 \rangle_{ST} = S^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2S^n}{n! \lambda^2} B(n+1, \alpha_0 \lambda^{-1}) B(n+1, 2(\alpha_0 - \frac{D}{\rho^2}) \lambda^{-1}).$$

$$\Phi_1(n+1, n+1 + \alpha_0 \lambda^{-1}, -S). \tag{5.7}$$

$$\Phi_2(n+1, n+1 + 2(\alpha_0 - D/\rho^2) \lambda^{-1}, -4S).$$

Donde B , Φ_1 , Φ_2 son las funciones beta y las funciones confluentes de una y dos variables (Abramowitz 1972), definidas en series de potencias como:

$$\Phi_1(\alpha, \delta; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\delta)_n} \cdot \frac{x^n}{n!} \quad (5.8)$$

$$\Phi_2(\alpha, \beta, \delta; x, y) = \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{n+m} (\beta)_m}{(\delta)_{n+m} n! m!} x^n y^m$$

Siendo $(\alpha)_m = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-m+1)$.

Es interesante considerar las situaciones que ocurren cuando se toman distintos tiempos de correlación, pues luego servirán de comparación en modelos complicados. Vamos pues a suponer que el ruido tiene una intensidad constante $\frac{D}{\rho^2} < 2\alpha$ y que el tiempo de correlación toma todos los valores posibles. De esta forma, el sistema es siempre estable para $\langle N \rangle, \langle N^2 \rangle$ y se puede suponer cualquier valor del tiempo de correlación.

a) $t_c \rightarrow \infty$, el límite determinista. Tomando $\lambda \rightarrow 0$ en (5.5) el efecto del ruido desaparece y la varianza y correlación son:

$$C(z) = \langle N^2 \rangle = S^2 \alpha^{-2}$$

b) Desarrollando las expresiones anteriores en potencias de S y tomando el primer orden obtenemos:

$$\begin{aligned} C(z) = & \frac{S^2}{\alpha_0^2} \left\{ 1 + \frac{D/\rho^2}{(\alpha_0 - D/\rho^2)} e^{-\alpha_0 z} \right\} + S^2 S \left\{ -\frac{2\lambda}{\alpha_0^2(\alpha_0 + \lambda)} + \frac{\lambda^2}{\alpha_0^2(\alpha_0^2 - \lambda^2)} e^{-\lambda z} + \right. \\ & + \left. \left(\frac{\alpha_0 + 2\lambda}{\alpha_0^2(\alpha_0 + \lambda)} - \frac{2(\alpha_0 - D/\rho^2 + \lambda)(\lambda + \alpha_0) + \alpha_0 \lambda}{(\alpha_0 + \lambda)(\alpha_0 - D/\rho^2)(2(\alpha_0 - D/\rho^2) + \lambda)\alpha_0} \right) e^{-\alpha_0 z} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\lambda - \alpha_0}{\alpha_0^2(\alpha_0 + \lambda)} + \frac{2(\alpha_0 - D/\rho^2)\alpha_0 - (\alpha_0 + \lambda)\lambda}{\alpha_0(2(\alpha_0 - D/\rho^2) + \lambda)(\alpha_0 - D/\rho^2)(\alpha_0 + \lambda)} \right) e^{-(\alpha_0 + \lambda)z} \right\} \quad (5.9) \end{aligned}$$

como posteriormente veremos, esto está relacionado con aproximaciones basadas en los cumulantes de Van Kampen. Cuando el ruido es débil $D/\ell^2 \ll \alpha$ cubre una amplia región de interés $t_c \ll \frac{\ell^2}{D}$. A partir de (5.9) se obtiene la primera corrección en el tiempo de correlación del ruido blanco, válida cuando $t_c \ll D^{-1}\ell^2$; $t_c \ll \alpha^{-1}$:

$$C(z) = \frac{S^2}{\alpha_0^2} \left\{ 1 + \frac{D/\ell^2}{(\alpha_0 - D/\ell^2)} e^{-\alpha_0 t} \right\} + \frac{S^2 D t_c}{\ell^2} \left\{ -\frac{2}{\alpha_0^2} \left(\frac{2}{\alpha_0(\alpha_0 - \frac{D}{\ell^2})} - \frac{2}{\alpha_0^2} \right) e^{-\alpha_0 t} - \frac{e^{-\alpha_0 t}}{\alpha_0(\alpha_0 - D/\ell^2)} \right\} \quad (5.10)$$

$$\langle N^2 \rangle = \frac{S^2}{\alpha_0(\alpha_0 - D/\ell^2)} \left(1 - \frac{3D}{\ell^2} t_c \right) \quad (5.11)$$

Esta aproximación está relacionada con técnicas de derivación funcional desarrolladas por San Miguel (1981).

c) $t_c \rightarrow 0 \equiv \lambda \rightarrow \infty$, límite de ruido blanco. Tomando estos límites en (5.10), (5.11) se obtienen los resultados para el ruido blanco:

$$C(z) = \frac{S^2}{\alpha_0^2} \left\{ 1 + \frac{D/\ell^2}{(\alpha_0 - \frac{2D}{\ell^2})} e^{-\alpha_0 t} \right\} \quad (5.12)$$

$$\langle N^2 \rangle = \frac{S^2}{\alpha_0(\alpha_0 - \frac{2D}{\ell^2})} \quad (5.13)$$

que coincide con lo obtenido por diversos autores, (Williams (1971), Saito (1980 A)).

V.2.B. RUIDOS DE TIPO "VIBRACION" CON EFECTOS NO MARKOVIANOS.

Hemos visto en el capítulo II que existen dos tipos generales de ruidos de características muy diferentes. El que se ha estudiado anteriormente es de correlación exponencial y representa muchos procesos globales. También son muy importantes en reactores nucleares los ruidos que se originan por vibraciones de barras y estructuras (Williams 1974). A continua

ción vamos a hacer un estudio de estos ruidos cuya correlación es

$$\langle \xi_{\kappa}(t) \xi_{\kappa}(t') \rangle = \frac{D}{t_c} \cos \omega_0(t-t') \cdot \exp\left(-\frac{|t-t'|}{t_c}\right) \quad (5.14)$$

El método usual de tratamiento es linealizar la ecuación, con ello se pierde el carácter multiplicativo y por lo tanto parte de sus características. Nosotros vamos a utilizar una aproximación válida para tiempos de correlación pequeños. Como veremos, en esta aproximación se conserva el carácter multiplicativo del ruido, observando diferencias notables con la aproximación de linealización. Tenemos especial interés en hallar los efectos inducidos por el color del ruido y la frecuencia de vibración propia de la estructura, sobre todo en cuanto a estabilidad se refiere. Utilizaremos un método de derivación funcional (San Miguel (1981)),

a) Valor medio

Supongamos un modelo sin neutrones retardados representado por la ecuación (5.1), con ruido Gaussiano tipo "vibración" cuya función de correlación sea (5.14). Para el cálculo del valor medio promediamos respecto al ruido la ecuación (5.1):

$$\frac{d\langle N \rangle}{dt} = -\alpha \langle N \rangle + \left\langle \frac{\xi_{\kappa}}{\ell} N \right\rangle + S \quad (5.15)$$

y aplicamos la fórmula de derivación funcional de Novikov (1965):

$$\left\langle \frac{\xi_{\kappa}}{\ell} N \right\rangle = \int_0^t \langle \xi_{\kappa}(t) \xi_{\kappa}(u) \rangle \left\langle \frac{\delta N(t)}{\delta \xi_{\kappa}(u)} \right\rangle du. \quad (5.16)$$

La función respuesta $\frac{\delta N(t)}{\delta \xi_{\kappa}(u)}$ en este caso sencillo se calcula exactamente (ver V.3.a), siendo

$$\begin{aligned} \frac{\delta N(t)}{\delta \xi_{\kappa}(u)} &= \frac{N(t)}{\ell} - \frac{S}{\ell} \int_u^t ds e^{-\alpha(t-s)} \cdot \exp\left\{ \int_0^s \frac{\xi_{\kappa}(v)}{\ell} dv \right\} = \\ &= \frac{N(t)}{\ell} - \frac{S}{\ell} (t-u) \left[1 + O(\alpha(t-u)) + O\left(\sqrt{\frac{D}{\ell^2 t_c}} (t-u)\right) \right] \end{aligned} \quad (5.17)$$

donde hemos despreciado términos, que debido a la presencia del ruido en (5.16), van a dar contribuciones en la ecuación (5.15) de segundo orden en αt_c y $\frac{D t_c}{e^2}$.

Utilizando (5.17) en (5.16) obtenemos:

$$\frac{d \langle N(t) \rangle}{dt} = -\alpha \langle N \rangle + S + \frac{\langle N \rangle}{e^2} \int_0^t du \langle \xi_x(t) \xi_x(u) \rangle - \frac{S}{e^2} \int_0^t du (t-u) \langle \xi_x(t) \xi_x(u) \rangle \quad (5.18)$$

cuya validez estará garantizada, de acuerdo con lo anterior, cuando

$$\begin{aligned} \alpha t_c &\ll 1 \\ \frac{D}{e^2} t_c &\ll 1. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Cuando $\frac{D}{e^2} < \alpha$ (sistema estable) la primera condición implica la segunda. Es importante subrayar que la validez de esta aproximación no condiciona en absoluto a la frecuencia de vibración ω_0 . En el resto de este apartado se va a utilizar la misma aproximación cuya validez vendrá siempre dada por (5.19) por lo que no insistiremos en ello.

A partir de (5.18) se calcula el valor medio estacionario y se encuentra la expresión

$$\langle N \rangle_{st} = \frac{S \left[1 - \frac{D' t_c'}{e^2} \right]}{\alpha - D'/e^2} \quad (5.20)$$

con $D' = \frac{D}{(1 + \omega_0^2 t_c^2)}$ y $t_c' = \frac{t_c (1 - \omega_0^2 t_c^2)}{(1 + \omega_0^2 t_c^2)}$

Estudiemos los casos límites; cuando $\omega_0 t_c \ll 1$, es decir el periodo de vibración es mucho mayor que el tiempo de correlación, el efecto de la vibración es mínimo y se tiene:

$$\langle N \rangle_{st} = \frac{S \left[1 - \frac{D}{e^2} t_c \right]}{\alpha - D/e^2} \quad (5.21)$$

En el caso contrario $\omega_0 t_c \gg 1$, el efecto de la vibración es apreciable y llega incluso a anular el carácter multiplicativo del ruido $(\alpha - \frac{D'}{l^2}) \rightarrow \alpha$

$$\langle N \rangle_{ST} = \frac{S}{\alpha} \left[1 + \frac{D}{\alpha l^2} \frac{1}{\omega_0^2 t_c^2} \right], \quad (5.22)$$

en el sentido que ahora la estabilidad para el valor medio viene dada por $\alpha > 0$, en vez de $(\alpha - \frac{D'}{l^2}) > 0$.

En general no es difícil observar que $\langle N \rangle_{ST}$ es menor cuanto mayor es ω_0 , concluyendo que el efecto de la vibración es siempre estabilizador, tanto más cuanto mayor es ω_0 .

b) Valor cuadrático medio y fluctuaciones relativas

Si aplicamos el método anterior a la ecuación para $N(t)^2$:

$$\frac{d N^2(t)}{dt} = -2\alpha N^2(t) + 2S N(t) + \frac{2 f_K(t)}{l} N(t)^2$$

teniendo en cuenta que ahora la fórmula de Novikov se aplica sobre $\langle f_K(t) N(t)^2 \rangle$ como:

$$\begin{aligned} \langle f_K(t) N(t)^2 \rangle &= \int_0^t \langle f_K(t) f_K(u) \rangle \left\langle \frac{\delta N^2(t)}{\delta f_K(u)} \right\rangle du = \\ &= 2 \int_0^t \langle f_K(t) f_K(u) \rangle \langle N(t) \frac{\delta N(t)}{\delta f_K(u)} \rangle du \end{aligned} \quad (5.23)$$

obtenemos para el valor cuadrático medio la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{d \langle N^2(t) \rangle}{dt} &= -2\alpha \langle N^2(t) \rangle + 2S \langle N(t) \rangle + \frac{4}{l^2} \int_0^t \langle f_K(t) f_K(u) \rangle du \langle N^2(t) \rangle \\ &\quad - \frac{4S}{l^2} \int_0^t (t-u) \langle f_K(t) f_K(u) \rangle du \end{aligned} \quad (5.24)$$

donde se ha utilizado (5.17), y a partir de ella tenemos en el estado estacionario

$$\langle N^2 \rangle_{ST} = \frac{S (1 - 2 \frac{D' t_c^2}{l^2}) \langle N \rangle_{ST}}{(\alpha - 2 \frac{D' t_c^2}{l^2})} \quad (5.25)$$

y para las fluctuaciones relativas a partir de (5.20), (5.25):

$$S = \frac{\langle N^2 \rangle_{sT} - \langle N \rangle_{sT}^2}{\langle N \rangle_{sT}^2} = \frac{D'/e^2}{(\alpha - 2D'/e^2)} [1 - t_c'(\alpha - D'/e^2)] \quad (5.26)$$

Para los casos límites se tiene

$$\begin{aligned} \omega_0 t_c \ll 1 & \quad S = \frac{D'/e^2}{\alpha - 2D'/e^2} [1 - t_c(\alpha - D'/e^2)] \\ \omega_0 t_c \gg 1 & \quad S = \frac{D'/e^2}{\alpha \omega_0^2 t_c^2} [1 + t_c \alpha] \end{aligned}$$

A partir de estas expresiones se ve que las fluctuaciones son menores cuando $\omega_0 t_c \gg 1$. La estabilidad aumenta cuando $t_c(\omega_0)$ crezcan si $\omega_0 t_c \ll 1$ ($\omega_0 t_c \gg 1$). En la figura V.1 representamos las fluctuaciones en las siguientes condiciones: tomamos $\beta = 10^{-4}$ que es la vida neutrónica en un reactor térmico estándar, tomamos $\alpha = 0,13$ lo que equivale a una reactividad $\rho = 10^{-5}$ y $t_c = 1$, de esta forma nos encontramos en la región de validez de la aproximación: $\alpha t_c \ll 1$ y representamos las fluctuaciones en función de ω_0 para tres valores diferentes de la intensidad del ruido $D'/\alpha = 0,04; 0,01; 0,001$. La conclusión es que las fluctuaciones decrecen siempre con ω_0 creciente. El efecto de la vibración es por lo tanto estabilizador con ω_0 creciente.

c) Tiempo de relajación y función de correlación

Siguiendo con el mismo procedimiento multiplicamos la ec. (5.1) por $N(t')$, $t' < t$, promediamos respecto al ruido y con la aplicación de la fórmula de Novikov, que ahora se escribe:

$$\begin{aligned} \langle \xi_K(t) N(t) N(t') \rangle &= \int_0^t \langle \xi_K(t) \xi_K(u) \rangle \langle N(t') \frac{\delta N(t)}{\delta \xi_K(u)} \rangle du + \\ &+ \int_0^{t'} \langle \xi_K(t) \xi_K(u) \rangle \langle N(t) \cdot \frac{\delta N(t')}{\delta \xi_K(u)} \rangle, \end{aligned} \quad (5.27)$$

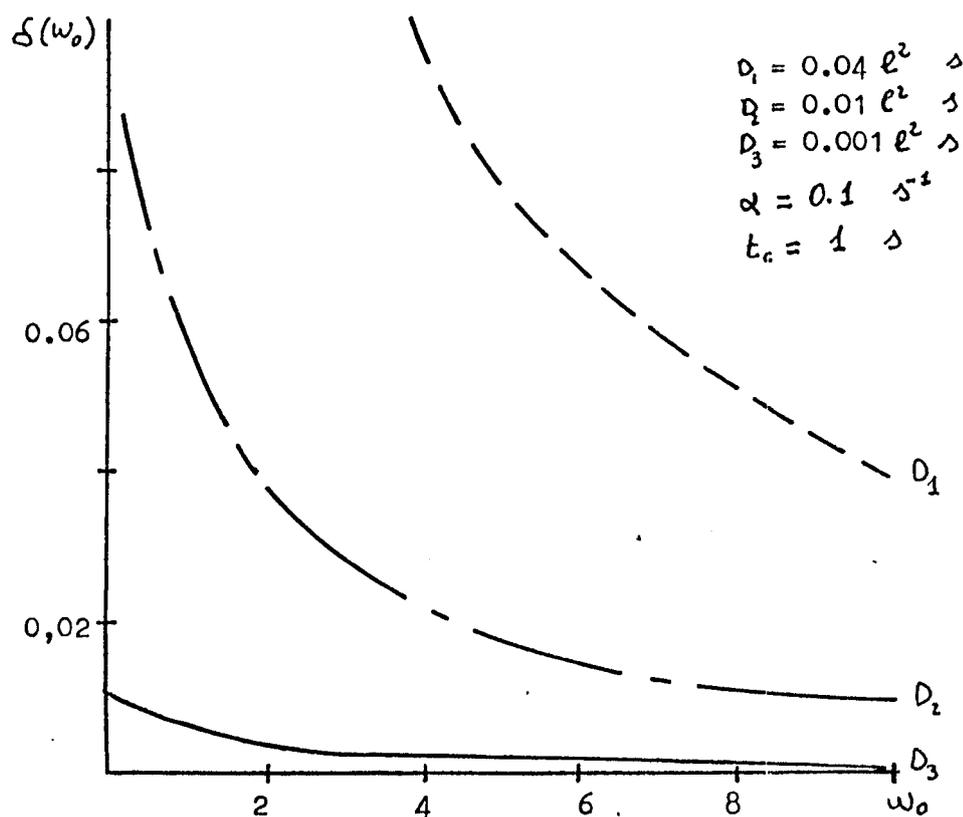


Fig. V.1.- Fluctuaciones relativas en función de la frecuencia propia.

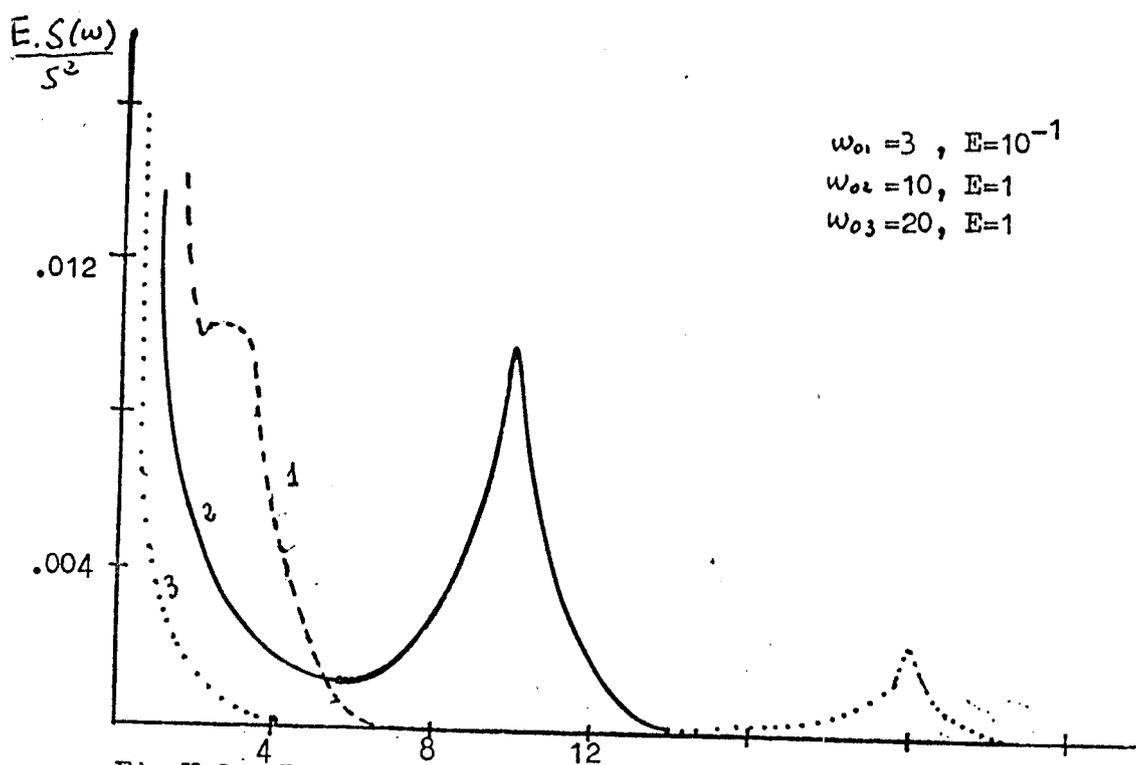


Fig.V.2.- Densidad espectral para distintos valores de ω_0 . ($\alpha = 0.1, \frac{D}{e^2} = 0.01, t_c = 1$)

y sustituyendo $\frac{\delta N}{\delta \xi_k}$ según (5.17) obtenemos la ecuación para $\langle N(t)N(t') \rangle$

$$\begin{aligned} \frac{d \langle N(t)N(t') \rangle}{dt} &= -\alpha \langle N(t)N(t') \rangle + S \langle N(t) \rangle + \frac{1}{\rho^2} \int_0^t \langle \xi_k(t) \xi_k(u) \rangle du \langle N(t)N(t') \rangle \\ &+ \frac{1}{\rho^2} \int_0^{t'} \langle \xi_k(t) \xi_k(u) \rangle du \langle N(t)N(t) \rangle \\ &= \frac{S}{\rho^2} \int_0^t (t-u) \langle \xi_k(t) \xi_k(u) \rangle \langle N(t') \rangle du - \frac{S}{\rho^2} \int_0^{t'} (t'-u) \langle \xi_k(t) \xi_k(u) \rangle du \langle N(t) \rangle \end{aligned} \quad (5.28)$$

En las aplicaciones interesan sobre todo los parámetros en el estado estacionario por lo que tomamos, como usualmente, las correlaciones estacionarias

$$C(\theta) = C(t-t') = \lim_{\substack{t, t' \rightarrow \infty \\ (t-t') = \theta}} \langle N(t+\theta)N(t') \rangle$$

$$C(\theta) = C(\theta) - \langle N \rangle_{ST}^2 \quad (5.29)$$

y definimos para lograr mayor compactitud en las ecuaciones:

$$\begin{aligned} C_0(\theta) &= C(\theta) \Big|_{\substack{dt=0 \\ dt'=0}} \\ C_0(\theta) &= C(\theta) \Big|_{\substack{dt=0 \\ dt'=0}} \\ \langle N \rangle_c &= \langle N \rangle \Big|_{\substack{dt=0 \\ dt'=0}} \\ \langle N^2 \rangle_c &= \langle N^2 \rangle \Big|_{\substack{dt=0 \\ dt'=0}} \\ \delta N_0 &= \delta N \Big|_{\substack{dt=0 \\ dt'=0}} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Con estas definiciones y operando en (5.28) se tiene para $C(\theta)$

$$\begin{aligned} \dot{C}(\theta) &= -\alpha C(\theta) + \frac{D}{\rho^2} C(\theta) + \frac{D}{\rho^2} C_0(\theta) e^{-\theta/\tau_c} \\ &\cdot (\cos \omega_0 \theta - \omega_0 \tau_c \sin \theta \omega_0) + S \left(1 - \frac{D \tau_c'}{\rho^2}\right) \langle N \rangle_{ST} \end{aligned} \quad (5.31)$$

donde hemos despreciado el último término de (5.28), ya que sus contribuciones a $\mathcal{A}(\theta)$ van a ser de segundo orden en αt_c y $\frac{D}{\ell^2} t_c$. Por la misma causa utilizamos en el último término de (5.31) $\mathcal{C}_0(\theta)$ en lugar de $\mathcal{C}(\theta)$.

El tiempo de relajación es uno de los parámetros que más importancia física tiene. Viene definido por

$$t_r = \frac{\int_0^\infty (\langle N(\theta) N(0) \rangle_{st} - \langle N^2 \rangle_{st}) d\theta}{\langle N^2 \rangle_{st} - \langle N \rangle_{st}^2} = \frac{\mathcal{L}\{\mathcal{A}(\theta)\}_0}{\mathcal{A}(0)} \quad (5.32)$$

donde $\mathcal{L}\{\}$ representa la transformada de Laplace.

En reactores nucleares no se ha utilizado esta definición debido a que en los cálculos linealizados el tiempo de relajación coincide con el determinista (en nuestro caso $1/\alpha$) y por ello se identifica el uno con el otro. Sin embargo, como ya se ha dicho, cuando se mantiene el carácter multiplicativo del ruido éste influye en el tiempo de relajación. Este hecho ha sido visto en el Capítulo IV en el estudio de las diferentes linealizaciones (IV.4).

Calculando a partir de (5.31) la transformada de Laplace y reagrupando términos obtenemos una expresión compacta para el tiempo de relajación

$$t_r = \frac{1}{\alpha - D/\ell^2} + t_c' \quad (5.33)$$

Cuando ω_0 aumenta el tiempo de relajación disminuye, ya que $t_c' = t_c (1 - \omega_0^2 t_c^2) (1 + \omega_0^2 t_c^2)^{-1}$ y $D' = D (1 + \omega_0^2 t_c^2)^{-1}$ disminuyen.

En el caso de ruidos débiles $\frac{D}{\ell^2} \ll \alpha$ y para los casos límites se tiene para t_r

$$t_r(\omega_0 t_c \ll 1) \approx \frac{1}{\alpha} + t_c = t_d + t_c$$

$$t_r(\omega_0 t_c \gg 1) \approx \frac{1}{\alpha} - t_c = t_d - t_c$$

donde vemos que los efectos de color aumentan o disminuyen t_r (comparando con el resultado linealizado) dependiendo de la frecuencia de vibración. Para ruidos intensos, como es lógico, el tiempo de relajación difiere mucho del determinista, y los resultados que se obtienen por linealización no son válidos.

Estudiemos por último la función de correlación y la densidad espectral. Resolviendo la ecuación (5.31) y reagrupando hasta lograr una expresión compacta obtenemos para $\mathcal{L}(\theta)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta) = & e^{-(\alpha - D'/e^2)\theta} \mathcal{L}(0) + \frac{D' t_c'}{e^2} \langle N^2 \rangle_0 e^{-(\alpha - D'/e^2)\theta} (1 - \omega \omega_0 \alpha \cdot e^{-\theta/t_c}) \\ & - \frac{D' t_c'}{e^2} \langle N^2 \rangle_0^2 e^{-\theta/t_c} \cdot \omega \omega_0 \theta (1 - e^{-(\alpha - D'/e^2)\theta}) + \\ & + \frac{2 D' t_c'}{e^2} \frac{\omega_0 t_c}{1 - \omega_0^2 t_c^2} \text{den } \omega_0 \theta \cdot e^{-\theta/t_c} \left[\mathcal{L}(0) e^{-(\alpha - D'/e^2)\theta} + \langle N^2 \rangle_0^2 \right] \end{aligned} \quad (5.34)$$

Para ruidos vibratorios es más interesante el análisis en frecuencias que en tiempos por lo que calcularemos la función de densidad espectral:

$$\begin{aligned} S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(\theta) e^{i\omega\theta} \cdot d\theta = & \frac{S^2 D'/e^2}{(\alpha - D'/e^2)(\alpha - 2D'/e^2)} \left[\frac{2(1 - 2D'/e^2)}{(\alpha - D'/e^2)^2} \frac{1}{(1 + \omega^2 (\alpha - D'/e^2)^2)} \right. \\ & \left. - t_c t_c' \left(\frac{1 + \frac{\omega_0 t_c}{1 - \omega_0^2 t_c^2} (\omega - \omega_0) t_c}{1 + (\omega - \omega_0)^2 t_c^2} + \frac{1 - \frac{\omega_0 t_c}{1 - \omega_0^2 t_c^2} (\omega + \omega_0) t_c}{1 + (\omega + \omega_0)^2 t_c^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.35)$$

y analizaremos su forma.

En la fig. (V.2) representamos $S(\omega)/S_0$ para $\omega \geq 0$. Básicamente es la suma de dos Lorentzianas una de ellas centrada en $\omega = 0$ de anchura aproximada $(\alpha - D'/e^2)$, y la otra está centrada en $\omega = \omega_0$. Para $\omega_0^2 t_c^2 \lesssim 1$ la primera curva solapa a la segunda por lo que no será fácilmente observable en un análisis experimental. Para $\omega_0^2 t_c^2 \gg 1$ la

segunda curva empieza a destacar claramente por lo que su observación empieza a ser posible. Hacemos notar que tomando el segundo orden de aproximación en (5.17) se puede predecir, por la estructura de los términos, que aparecerá una nueva lorentziana centrada en ω_0 . Esto ha sido observado experimentalmente (Lucía (1973)) y su explicación teórica ha sido basada en consideraciones de tipo espacial (Pazsit (1977), ver Cap. II.2.A) Sugerimos aquí que también contribuye a la formación de dicho pico el considerar efectos multiplicativos. Un análisis de la contribución de estos efectos se realizará en futuros trabajos.

V.3. REACTORES PUNTUALES CON INCLUSION DE NEUTRONES RETARDADOS

Cuando se tienen en cuenta neutrones retardados las ecuaciones de evolución son al menos de dos dimensiones y los métodos de solución se complican respecto al caso unidimensional. En primer lugar vamos a revisar los últimos trabajos realizados en este tema para, tras percatarnos de los errores, desarrollar y aplicar nuevos métodos.

V.3.A. REVISION DE METODOS UTILIZADOS. VALIDEZ DE LA RELACION CAUSAL.

Las ecuaciones estocásticas en modelos de reactores puntuales con ruidos multiplicativos no blancos han sido estudiadas recientemente por varios autores usando básicamente dos tipos de métodos: la aproximación de Bourret (Quabili 1979) y métodos funcionales (Saito 1979B). Debido a la complejidad del problema no Markoviano, es necesario estudiar cuidadosamente las hipótesis hechas en las aproximaciones. Esto ha sido hecho en un trabajo reciente (Rodríguez 1983c) donde se demuestra que la hipótesis de causalidad empleada por los autores anteriores no es válida cuando se trata de ruidos externos no blancos. Entonces, con el uso de esta relación,

una parte de los efectos no Markovianos no es tenida en cuenta y los resultados obtenidos pueden ser erróneos.

a) Validez de la relación causal

Consideremos en principio un modelo sin neutrones retardados para demostrar que la relación causal no se cumple. La ecuación es la misma que en (5.1), y el ruido considerado también.

Es conveniente para futuros análisis introducir la función de Green del problema concreto:

$$\frac{d G(t,s)}{dt} = -\alpha G(t,s) + \frac{\xi_K(t)}{l} G(t,s) + \delta(t-s) \quad (5.36)$$

Una solución explícita es:

$$G(t,s) = H(t-s) \exp \left\{ -\alpha(t-s) + \int_s^t ds' \frac{\xi_K(s')}{l} \right\} \quad (5.37)$$

donde $H(t-s)$ es la función de Heaviside.

Entonces se obtiene para $N(t)$ la misma expresión que en (5.3) ahora en términos de la función de Green:

$$N(t) = G(t,t_0) N_0 + \int_{t_0}^t ds' G(t,s') S. \quad (5.39)$$

donde $N(t_0) = N_0$ es independiente de el ruido. Si se supone que S es constante el valor medio $\langle N \rangle$ viene dado por:

$$\langle N(t) \rangle = \langle G(t,t_0) \rangle N_0 + S \int_{t_0}^t ds' \langle G(t,s') \rangle. \quad (5.40)$$

Cuando el ruido es Gaussiano y de correlación exponencial se obtienen resultados exactos (Saito 1980A), (V.2.A).

A continuación vamos a usar estos resultados para estudiar la validez de la relación causal. Esta supone que cuando $t > t'$ el valor promedio de $\langle \xi(t) N(t') \rangle_{ST}$ es nulo, esto es, que existe causalidad entre la entrada $\xi_K(t)$ y la salida $N(t')$. Se va a demostrar que esto es falso, para ello vamos a calcular explícitamente:

$$\langle \xi_K(t) N(t') \rangle = S \int_{-\infty}^{t'} d\sigma \langle \xi_K(t) G(t', \sigma) \rangle \quad (5.41)$$

Aplicando la fórmula de Novikov obtenemos:

$$\langle \xi_K(t) G(t', \sigma) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} du \langle \xi_K(t) \xi_K(u) \rangle \left\langle \frac{\delta G(t', \sigma)}{\delta \xi_K(u)} \right\rangle \quad (5.42)$$

donde la derivada funcional se calcula fácilmente usando:

$$\frac{\delta}{\delta \xi_K(u)} \left[\exp \int_{-\infty}^{\infty} \xi_K(\sigma') / \ell \beta(\sigma') d\sigma' \right] = \frac{\beta(u)}{\ell} \exp \int_{-\infty}^{\infty} \xi_K(\sigma') / \ell \beta(\sigma') d\sigma' \quad (5.43)$$

con $\beta(\sigma) = H(t' - \sigma) - H(\sigma - \sigma')$

Entonces obtenemos

$$\frac{\delta G(t', \sigma)}{\delta \xi_K(u)} = [H(t' - u) - H(\sigma - u)] G(t', \sigma) / \ell \quad (5.44)$$

y de (5.41), (5.42)

$$\langle \xi_K(t) N(t') \rangle_{ST} = \frac{S}{\ell} \int_{-\infty}^{t'} d\sigma \left[\int_{-\infty}^{t'} \langle \xi_K(t) \xi_K(u) \rangle \right] \langle G(t', \sigma) \rangle \quad (5.45)$$

Obviamente esta expresión es diferente de cero cuando $\xi_K(t)$ es un ruido no blanco. Si queremos obtener el orden de magnitud de este término supongamos que el ruido es del tipo exponencial (5.2). Sustituyendo en (5.45) se obtiene:

$$\langle \xi_K(t) N(t') \rangle_{ST} = S \ell e^{-(t-t')/\ell c} \left[\frac{D/\ell^2}{(\alpha - D/\ell^2)(2 + \alpha \ell c)} + O\left(\frac{D^2}{\ell^4} \ell c^2\right) \right] \quad (5.46)$$

lo cual indica que en la correlación este término va a ser de orden t_c y si buscamos correcciones al ruido blanco, debe ser considerado (Ver V.3. A.c)

b) La ecuación para el valor medio

Para nuestro sencillo modelo es posible encontrar una ecuación exacta para $\langle N \rangle$. Comparando esta ecuación con la obtenida usando diferentes aproximaciones, podemos estudiar su validez.

Con el fin de obtener una ecuación para $\langle N \rangle$ tomo valores medios en la ecuación

$$\frac{d \langle N(t) \rangle}{dt} = -\alpha \langle N(t) \rangle + \left\langle \frac{f_K(t)}{e} N(t) \right\rangle + S \quad (5.47 a)$$

usando como siempre la fórmula de Novikov y las funciones de Green se puede tener una ecuación para el valor medio exacta:

$$\begin{aligned} \frac{d \langle N \rangle}{dt} = & -\alpha \langle N(t) \rangle + \left[\frac{1}{e^2} \int_0^t du \langle f_K(t) f_K(u) \rangle \right] \langle N(t) \rangle - \\ & - \frac{S}{e^2} \int_0^t ds' \langle G(t, s') \rangle \int_{t_0}^s du \langle f_K(t) f_K(u) \rangle + S \end{aligned} \quad (5.47 b)$$

si suponemos que el ruido es gaussiano de correlación exponencial:

$$\begin{aligned} \frac{d \langle N \rangle}{dt} = & -\alpha \langle N(t) \rangle + \frac{D}{e^2} (1 - e^{-(t-t_0)/t_c}) \langle N(t) \rangle + S - \\ & - S \left\{ \frac{D t_c}{e^2 (1 + t_c)} (1 - e^{-(\alpha + t_c^{-1} - D/e^2)(t-t_0)}) \right\} - \\ & - \frac{D e^{-(t-t_0)/t_c}}{e^2 (\alpha - t_c)} (1 - \frac{D}{e^2} t_c) (1 - e^{-(\alpha - D/e^2)(t-t_0)}) + O\left(\left(\frac{D}{e^2}\right)^2 t_c^2\right) \end{aligned} \quad (5.48)$$

Tomando $t_0 \rightarrow \infty$ y $\frac{d}{dt} \langle N \rangle = 0$, se puede obtener el valor medio en el estado estacionario

$$\langle N \rangle_{st} = \frac{S}{\alpha - D/\ell^2} \left[1 - \frac{D/\ell^2 t_c}{(1 + \alpha t_c)} + O\left(\left(\frac{D}{\ell^2}\right)^2 t_c^2\right) \right] \quad (5.49)$$

Este resultado coincide con el obtenido por Saito (1980A).

- Comparamos ahora la ecuación exacta (5.47b) con la obtenida por Saito (1979B) usando la relación causal.

Saito supone que $\frac{\delta N(t)}{\delta \xi_K(u)}$ es proporcional a $N(u)$ y usa la relación causal de tal forma que obtiene:

$$\left\langle \frac{\delta N(t)}{\delta \xi_K(u)} \right\rangle^S = H(t-u) \frac{\langle N(u) \rangle}{\ell} e^{-\alpha(t-u)} \quad (5.50)$$

Entonces la diferencia, al orden mas bajo en D, entre el resultado exacto y éste es:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta N(t)}{\delta \xi_K(u)} \right\rangle - \left\langle \frac{\delta N(t)}{\delta \xi_K(u)} \right\rangle^S &\approx H(t-u) e^{-\alpha(t-u)} \frac{S}{\ell} \left\langle \int_u^t d\sigma e^{-\alpha(u-\sigma)} \right. \\ &\left. \left(1 + \int_u^\sigma d\sigma' \frac{\xi_K(\sigma')}{\ell} \right) \left(\int_u^t d\sigma' \frac{\xi_K(\sigma')}{\ell} + \frac{1}{\ell^2} \int_u^t d\sigma' \int_u^{\sigma'} d\sigma'' \xi_K(\sigma') \xi_K(\sigma'') \right) \right\rangle = \quad (5.51) \\ &= H(t-u) e^{-\alpha(t-u)} \frac{SD}{\ell^3 \alpha} \left\{ (t-u) - \frac{\alpha t_c^2}{1 + \alpha t_c} (1 - e^{-(t-u)/t_c}) \right\} \end{aligned}$$

Esta diferencia es, pues, del orden $\frac{SD^2 t_c}{\ell^3 \alpha}$ en la ecuación para $\langle N(t) \rangle$. Concluimos que el resultado obtenido por Saito es válido solamente al primer orden en D. Por consiguiente no será válido cerca del estado crítico, ya que si $\frac{D}{\ell^2} \approx \alpha$, $\left(\frac{D}{\ell^2}\right)^2 t_c \approx \frac{D}{\ell^2} t_c$, que es del mismo que las correcciones no Markovianas consideradas por Saito. Por lo tanto la conclusión obtenida por Saito de que los efectos no-Markovianos son equivalentes a considerar "pseudo-precursores", no será válida cerca del estado crítico.

Como se verá más adelante, V.3.B.c, si nos acercamos suficientemente al estado crítico t_c puede aumentar cuando t_c aumenta.

- Analizamos ahora la aproximación usada por Quabili para obtener valores medios. Este método está basado en las aproximaciones de Van Kampen (1976) y Bourret (1962), usadas frecuentemente en ecuaciones diferenciales homogéneas en el contexto de la Mecánica Estadística. La generalización incluyendo un término fuente ha sido hecho por Quabili y otros (1979), pero como veremos, sus resultados son erróneos en los términos no Markovianos. Estos autores consideran una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{d \vec{x}}{dt} = [\bar{H} + \xi_{\kappa}(t) \bar{A}] \vec{x}(t) + \vec{S} \quad (5.52)$$

usando la aproximación de Bourret obtienen una ecuación integrodiferencial (Ver ecuación (5.68)) para $\langle \vec{x}(t) \rangle$. Para obtener una ecuación diferencial sustituyen $\langle \vec{x}(t-z) \rangle$ por:

$$\langle \vec{x}(t-z) \rangle \approx e^{-\bar{H}z} \langle \vec{x}(t) \rangle \quad (5.53)$$

y el efecto de la fuente y el ruido es despreciado. El efecto del ruido es del mismo orden que los términos despreciados en la aproximación de Bourret. Sin embargo, el efecto de la fuente es del mismo orden que el término no Markoviano retenido y no puede ser despreciable. Para verlo explícitamente presentamos la ecuación diferencial para $\langle \vec{x}(t) \rangle$ cuando el efecto de la fuente es incluido:

$$\begin{aligned} \frac{d \langle \vec{x}(t) \rangle}{dt} = & \bar{H} \langle \vec{x}(t) \rangle + \int_0^{\infty} dz \bar{A} e^{-\bar{H}z} \bar{A} e^{-\bar{H}z} \langle \xi_{\kappa}(t) \xi_{\kappa}(t-z) \rangle \langle \vec{x}(t) \rangle + \\ & + \vec{S} - \int_0^{\infty} dz \bar{A} e^{-\bar{H}z} \bar{A} \langle \xi_{\kappa}(t) \xi_{\kappa}(t-z) \rangle \int_0^z dz' e^{-\bar{H}z'} \vec{S} \end{aligned} \quad (5.54)$$

Si consideramos ahora nuestro modelo sencillo, la ecuación (5.54) se corresponde con la (5.48) despreciando términos transitorios $(t-t_0) \gg t_c$. Esta última, (5.48), proviene de la exacta tomando la aproximación

$$\langle G(t, t_0) \rangle \approx \exp(-\alpha(t-t_0)) \quad (5.55)$$

Entonces (5.54) es buena aproximación cuando $\frac{D t_c}{f^2} \ll 1$. El orden del último término en (5.54) es $\frac{S D t_c}{f^2}$. Cuando \bar{A} y \bar{M} conmutan el segundo término en (5.54) es independiente de t_c , y en este caso el término no Markoviano proviene únicamente del último, como ocurre en nuestro modelo sencillo. Sin embargo, si \bar{A} y \bar{M} no conmutan, aparecen términos no-Markovianos en el segundo término de la ecuación (5.54). Estos términos han sido obtenidos por Quabili (1979) (ecuaciones (60), (61)) y son de orden

$\frac{D t_c}{f^2} \langle \bar{x} \rangle \approx \frac{D t_c}{f^2} S$. Sin embargo, éstos y el último término de (5.54) son del mismo orden, y no podemos despreciar el efecto de la fuente en (5.53). El punto esencial es que, en lo referente a la fuente S, el segundo y el último término en (5.54) son del mismo orden, por ser $\langle \bar{x}^2 \rangle = \alpha(S)$. La única razón para despreciar el último término podría ser su carácter no-Markoviano. Entonces el resultado de Quabili es inconsistente, debido a que toma en cuenta términos no Markovianos despreciando el último término de (5.54). Otra forma de ver esta inconsistencia es considerar la ecuación (5.53) en el estado estacionario. En este caso es claro que (5.53) no es válida al menos que $z = 0$ porque $\langle x \rangle_{s,T}$ es constante. Teniendo en cuenta el efecto de la fuente obtenemos

$$\langle \bar{x}(t-z) \rangle \approx e^{-\bar{M}z} \langle x(t) \rangle + \int_t^{t-z} dt' e^{-\bar{M}(t-z-t')} S \quad (5.56)$$

lo cual es una identidad en el estado estacionario, cuando el efecto del ruido es despreciado, esto es: $\langle \bar{x} \rangle_{s,T} \approx -\bar{M}^{-1} S$. Ahora si consideramos efectos no Markovianos $z = O(t_c)$ (ver ecuación (5.54)) y entonces no

podemos despreciar el efecto de la fuente.

c) La ecuación para la función de correlación

El mismo tipo de términos provenientes de la fuente, que hemos considerado en el apartado anterior, han sido despreciados por Quabili en la ecuación para la varianza y la función de correlación. Pero otro tipo de términos, correspondientes a la correlación $\langle K(t)N(t') \rangle$ ($t > t'$), han sido también despreciados debido al uso de la relación causal.

En primer lugar obtenemos una ecuación exacta para la correlación para nuestro modelo (5.1). Después, comparando esta ecuación con la obtenida por Quabili, analizaremos los dos términos mencionados anteriormente

Sea la ecuación para la correlación

$$\frac{d}{dt} \langle N(t)N(t') \rangle = -\alpha \langle N(t)N(t') \rangle + \frac{1}{\rho} \langle F_K(t)N(t)N(t') \rangle + S \langle N(t') \rangle \quad (5.57)$$

Usando ahora la fórmula de Novikov como en (5.27) y sustituyendo

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta N(t)}{\delta F_K(u)} N(t') \right\rangle_{ST} &= \frac{1}{\rho} H(t-u) \left[\langle N(t)N(t') \rangle_{ST} - \int_u^t ds' \langle G(t,s') N(t') \rangle_{ST} \right] \\ \left\langle N(t) \frac{\delta N(t')}{\delta F_K(u)} \right\rangle_{ST} &= \frac{1}{\rho} H(t'u) S^2 \int_{-\infty}^t ds' \int_{-\infty}^u ds'' \langle G(t,s') G(t',s'') \rangle \end{aligned} \quad (5.58)$$

en la ecuación resultante, obtenemos para la correlación en el estado estacionario:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle N(t)N(t') \rangle_{ST} &= -\alpha \langle N(t)N(t') \rangle_{ST} + \frac{1}{\rho^2} \left[\int_{-\infty}^t du \langle K(t)K(u) \rangle \right] \langle N(t)N(t') \rangle_{ST} - \\ &- \frac{S^2}{\rho^2} \int_{-\infty}^t du \langle F_K(t)K(u) \rangle \int_u^t ds' \int_{-\infty}^u ds'' \langle G(t,s') G(t',s'') \rangle + \\ &+ \frac{S^3}{\rho^2} \int_{-\infty}^t du \langle K(t)K(u) \rangle \int_u^t ds' \int_{-\infty}^u ds'' \langle G(t,s') G(t',s'') \rangle + S \langle N \rangle_{ST} \end{aligned} \quad (5.59)$$

Esta ecuación, para nuestro modelo sencillo, es exacta.

Son posibles varias aproximaciones en ella. Despreciando el efecto del ruido en $G(t, \nu)$ (en 5.57, 5.58), $G(t, \nu) \approx H(t-\nu) \exp[-\alpha(t-\nu)]$ (ver ec. (5.37), obtengo la ecuación aproximada

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle N(t) N(t) \rangle_{ST} = & -\alpha \langle N(t) N(t) \rangle_{ST} + \frac{1}{\rho^2} \left[\int_{-\infty}^t du \langle f_K(t) f_K(u) \rangle \right] \langle N(t) N(t) \rangle_{ST} \\ & - \frac{S}{\rho^2} \int_{-\infty}^t du \langle f_K(t) f_K(u) \rangle \int_u^t ds' e^{-\alpha(t-s')} \langle N \rangle_{ST} + \\ & + \frac{S}{\rho} \int_{-\infty}^t ds' e^{-\alpha(t-s')} \langle f_K(t) N(s') \rangle_{ST} + S \langle N \rangle_{ST} \end{aligned} \quad (5.60)$$

donde hemos usado la fórmula de Novikov:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} du \langle f_K(t) f_K(u) \rangle \frac{S}{\rho} H(t-u) \int_{-\infty}^u ds'' \langle G(t', s'') \rangle = \\ \int_{-\infty}^{\infty} du \langle K(t) K(u) \rangle \left\langle \frac{\delta N(t)}{\delta f_K(u)} \right\rangle_{ST} = \langle K(t) N(t) \rangle_{ST} \end{aligned} \quad (5.61)$$

La ecuación (5.60) es la que se debería obtener por el método usado por Quabili cuando la relación causal no es utilizada y el efecto de la fuente es tenido en cuenta en la evolución de $\langle N \rangle$ desde ν' hasta t (ver discusión después de ec. 5.53).

Sustituyendo el valor de la correlación obtengo la ecuación (5.60) en primer orden en $\frac{D}{\rho^2} t_c$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle N(t) N(t) \rangle_{ST} = & (-\alpha + D/\rho^2) \langle N(t) N(t) \rangle_{ST} - \frac{S^2 D/\rho^2 t_c}{(1-\alpha t_c)(\alpha \cdot D/\rho^2)} + \\ & + \frac{S}{\alpha} e^{-|t-t'|/t_c} \frac{S D/\rho^2}{(\alpha \cdot D/\rho^2)(1+\alpha t_c)} + \frac{S^2}{(\alpha \cdot D/\rho^2)} \left(1 - \frac{D/\rho^2 t_c}{1+\alpha t_c} \right) \end{aligned} \quad (5.62)$$

Esta ecuación es válida al primer orden en t_c y D , es decir para ruidos débiles, $(D/\alpha)^{t_c} \ll 1$, $D/(e^2 \alpha) \ll 1$. Con ella se obtiene el resultado correcto cuando términos de orden $(\frac{D}{e^2})^2 \frac{t_c}{\alpha}$ son despreciables. Esto se puede verificar comparando con la solución exacta (V.2.A). La validez de (5.62) es la misma que la ecuación obtenida por Saito (1979B) para $\langle N \rangle$.

Hacemos notar que en la ec. (5.62) el término proporcional a $e^{-|t-t'|/t_c}$, proveniente de $\langle \kappa(t) N(t') \rangle_{ST}$, contribuye al orden t_c a la función de correlación, que es del mismo orden que la contribución de el término debido al efecto de la fuente.

Considerando el sistema (5.52), es posible obtener una ecuación similar a (5.60):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \vec{x}(t) \vec{x}^T(t) \rangle_{ST} &= \left\{ \bar{H} + \int_0^\infty dz \bar{A} e^{\bar{H}z} \bar{A} e^{-\bar{H}z} \langle \xi_k(t) \xi_k(t-z) \rangle \right\} \\ &\langle \vec{x}(t) \vec{x}^T(t) \rangle_{ST} - \int_0^\infty dz \bar{A} e^{\bar{H}z} \bar{A} \langle \xi_k(t) \xi_k(t-z) \rangle \int_0^z dz' e^{-\bar{H}z'} \bar{S} \langle \vec{x}^T \rangle_{ST} + \\ &+ \int_0^\infty dz \bar{A} e^{\bar{H}z} \bar{S} \langle \xi_k(t) \vec{x}^T(t) \rangle_{ST} + \bar{S} \langle \vec{x}^T \rangle_{ST} \end{aligned} \quad (5.63)$$

donde \vec{x}^T significa transpuesta, y hemos usado el mismo procedimiento seguido por Quabili (1979), pero teniendo en cuenta el efecto de la fuente. Estos autores han despreciado también el término $\langle \xi_k(t) \vec{x}^T(t) \rangle_{ST}$ asumiendo la validez de la relación causal. Analizamos ahora el orden de estos términos. El tercer término de la ecuación (5.63) es el último de (5.54) multiplicado por $\langle \vec{x}^T \rangle_{ST}$. Entonces, su orden es $\frac{SD}{e^2} t_c \langle \vec{x}^T \rangle_{ST} \approx s^2 \frac{D}{e^2} t_c$. En la ecuación (5.60) el término correspondiente es $S^2 \frac{D}{e^2} t_c (1 + \alpha t_c)^{-1} (\alpha - \gamma_{e^2})^{-1}$. Para el cuarto término de (5.63),

puede hallarse su orden usando la fórmula de Novikov:

$$\begin{aligned} \langle \xi_k(t) \bar{x}^T(t') \rangle_{ST} &= \int_{-\infty}^{t'} du \langle \xi_k(t) \xi_k(u) \rangle \left\langle \frac{\delta x^T(t')}{\delta \xi_k(u)} \right\rangle_{ST} \\ &\approx e^{-|t-t'|/t_c} \int_{-\infty}^{t'} du \langle \xi_k(t) \xi_k(u) \rangle [\bar{A} \cdot \langle \bar{x} \rangle_{ST}]^T \quad (5.64) \end{aligned}$$

donde hemos sustituido el valor de la correlación, ($t > t'$), y hemos obtenido la función respuesta al orden mas bajo en t_c (San Miguel 1980).

Entonces, el orden de este término es $\frac{S^2 D}{\rho^2} e^{-|t-t'|/t_c} \langle \bar{x} \rangle \approx S^2 \frac{D}{\rho^2} e^{-|t-t'|/t_c}$

Hacemos notar que el término correspondiente en (5.60) es

$$\frac{S^2 D}{\rho^2} e^{-|t-t'|/t_c} [\alpha(\alpha - D/\rho^2)(1 + \alpha t_c)]^{-1}$$

Así pues, la contribución de ambos términos a la función de correlación es de orden $S^2 \frac{D}{\rho^2} t_c$, como ocurría en (5.60). Sin embargo, existe una diferencia entre (5.63) y (5.60). En la ecuación (5.63) \bar{M} y \bar{A} son matrices que no conmutan, y hay también contribuciones no Markovianas del segundo término de la ecuación que no aparecen en (5.60). Estos términos sí son tenidos en cuenta por Quabili. Así pues, la densidad espectral calculada por estos autores es incorrecta a menos que $t_c = 0$, debido a que es inconsistente considerar un término de orden $S^2 \frac{D}{\rho^2} t_c$ y despreciar los otros dos que son del mismo orden.

La validez de la ecuación (5.63) con $\langle \xi_k(t) \bar{x}^T(t') \rangle_{ST}$ dado por (5.64) viene determinada por $\frac{D t_c}{\rho^2} \ll 1$, $\frac{D}{\rho^2} \ll 1$; es decir para ruido débiles. Concluimos diciendo que el mismo tipo de inconsistencias aparecen en los cálculos para las varianzas realizados por Quabili (1979).

El análisis efectuado en este apartado indica dos hechos importantes; el primero es que el estudio de modelos de reactores no-Markovianos no ha sido realizado correctamente hasta ahora y el segundo es que se debe tener

muy en cuenta el mecanismo de la aproximación efectuada y su grado de validez. Nosotros hemos hecho un estudio en detalle del orden de aproximación utilizado e incluso para ello nos hemos referido a un modelo sencillo resuelto exactamente. Estamos ya en condiciones de abordar el problema con neutrones retardados. Utilizaremos dos aproximaciones: la primera ha sido estudiada anteriormente en V.3.Ab (ver ecuación (5.54)) y se basa en la aplicación de técnicas de cumulantes (Van Kampen (1976)). Su validez viene dada por $\frac{D}{\rho^2} t_c \ll 1$; lo cual indica que para ruidos débiles (Gaussianos o no) el tiempo de correlación no tiene que ser pequeño. La segunda utiliza métodos funcionales y es válida en las condiciones $\alpha t_c \ll 1$, $\frac{D}{\rho^2} t_c \ll 1$. Básicamente es la utilizada en el apartado V.2.B. Ahora se generalizará el método a varias dimensiones y se aplicará a modelos de reactores con neutrones retardados. Físicamente la validez del método significa que para ruidos Gaussianos con tiempos de correlación menores que los de evolución determinista la aproximación será justificable. Insistimos en este aspecto pues es importante darse cuenta que en esta aproximación podrán estudiarse ruidos intensos, lo cual no es posible por métodos de linealización.

V.3.B. ESTUDIO DE MODELOS NO MARKOVIANOS CON TECNICAS DE CUMULANTES

La utilización de estas técnicas en reactores nucleares ha sido iniciada por Quabili (1979). Como ya hemos visto en el apartado V.3.A las inconsistencias en el tratamiento de Quabili aconsejan replantearse el problema. Como una primera aproximación al mismo, hemos realizado un estudio para el valor medio aclarando las inconsistencias de Quabili y sacando conclusiones interesantes que expondremos a continuación. Ya ha sido dicho en V.3.A que Quabili parte de una ecuación integrodiferencial para el valor medio (ecuación de Bourret) y realiza el paso a la ecuación dife

rencial (ecuación en cumulantes de Van Kampen) utilizando la aproximación (5.53). En principio las ecuaciones de Bourret y Van Kampen son del mismo orden de aproximación, pero sus resultados presentan diferencias notables. Vamos a estudiarlas por separado; en primer lugar la ecuación integrodiferencial y posteriormente la diferencial. Esta última es la usada erróneamente por Quabili por lo que nos detendremos en su análisis. Por último compararemos ambas y expondremos nuestras conclusiones.

Antes de comenzar con el estudio propiamente dicho conviene detenerse en el análisis de los modelos utilizados. Como se ha visto en el Capítulo III existen dos tipos de modelos de reactores puntuales con neutrones retardados y ruido paramétrico. El de Saito (1979B) supone que el ruido aparece en las ecuaciones de neutrones y precursores en la forma

$$\begin{aligned} \dot{N} &= \frac{\kappa_0(1-\beta) \cdot 1}{\ell} N + \lambda C + \frac{\xi_N(t)(1-\beta)}{\ell} N(t) + S \\ \dot{C} &= \frac{\beta}{\ell} \kappa_0 N + \frac{\beta}{\ell} \xi_C(t) N(t) - \lambda C. \end{aligned} \tag{5.65}$$

El de Quabili no considera la existencia de ruido en la ecuación para los precursores. En (III.3) vemos como con nuestra interpretación más precisa, considerando el ruido a nivel de la ecuación nuestra, cada uno de los modelos correspondía al caso de ruido en los coeficientes de fisión o de absorción. A continuación vamos a ver que cuando el efecto de neutrones retardados no es despreciable ambos modelos son equivalentes. En el caso contrario no sería necesario usar la ecuación para neutrones retardados y ambos modelos coincidirían en su descripción unidimensional. Para que los neutrones retardados tengan efecto se ha de cumplir que $(1-\kappa_0)$ sea del mismo orden o menor que β , por lo que $\kappa_0 \approx 1$. Entonces al exigir estabilidad $\frac{\beta}{\ell} \leq |1-\kappa_0| \approx \beta$, por lo que $\frac{\beta}{\ell} \xi_C(t) \ll \frac{\beta}{\ell} \approx \frac{\beta \kappa_0}{\ell}$ y el efecto del ruido en la ecuación para los precursores es despreciable. Este sencillo análisis es lo suficientemente significativo como para afir-

mar que en las condiciones de efecto de neutrones retardados ambos modelos son aproximadamente iguales. Es posible comprobarlo explícitamente comparando resultados en ambos modelos. Para no complicar excesivamente la exposición no expondremos dichos cálculos.

Por otra parte Quabili utiliza un cambio de escala en el tiempo haciendo $\tau^Q = \frac{t\beta}{\ell}$. Nosotros preferimos mantener la escala inicial pues bajo nuestro punto de vista el análisis físico de los resultados es más sencillo como veremos posteriormente. Utilizaremos por sencillez el modelo de Quabili de tal forma que nuestras ecuaciones de partida serán:

$$\begin{aligned} \dot{N} &= -\alpha N + \frac{\beta k_0(t)}{\ell} N + \lambda C + S \\ \dot{C} &= \frac{\beta k_0}{\ell} N - \lambda C \end{aligned} \quad (5.66)$$

con $\alpha = \frac{1 - k_0(1-\beta)}{\ell}$

En forma matricial (5.66) se escribe como (5.52) con

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \begin{pmatrix} -\alpha & \lambda \\ \frac{\beta k_0}{\ell} & -\lambda \end{pmatrix} & \bar{A} &= \begin{pmatrix} \lambda/\ell & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \bar{X} &= \begin{pmatrix} N \\ C \end{pmatrix} & \bar{S} &= \begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.67)$$

a) Ecuación integrodiferencial

La ecuación de Burrett ha sido aplicada a sistemas mecánicos en los que normalmente no existe un término fuente (ec. diferenciales homogéneas). La generalización al caso de reactores nucleares con término fuente puede hacerse utilizando la técnica de proyectores de la misma forma que ha si-

do hecho por Terwiel (1974) en el caso de ec. homogéneas. Cuando la fuente es independiente del ruido se obtiene en el primer orden de aproximación una ecuación sencilla. A partir de (5.52) se obtiene:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{M} \bar{x} + \int_0^t ds \langle \xi_k(t) \xi_k(s) \rangle \bar{A} \exp\{\bar{M}(t-s)\} \bar{A} \bar{x}(s) + S. \quad (5.68)$$

con \bar{M} , \bar{A} y \bar{x} dados por (5.67). Resolvemos ahora esta ecuación calculando primero los autovalores de \bar{M} :

$$N_{1,2} = \frac{-(\lambda + \alpha) \pm [(\lambda + \alpha)^2 + 4\lambda(\frac{\beta k_0}{\ell} - \alpha)]^{\frac{1}{2}}}{2} \quad (5.69)$$

El término exponencial se puede calcular como:

$$e^{\bar{M}z} = R R^{-1} e^{\bar{M}z} R R^{-1} = R \begin{bmatrix} e^{N_1 z} & 0 \\ 0 & e^{N_2 z} \end{bmatrix} R^{-1} \quad (5.70)$$

con

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\lambda + N_1}{\beta k_0 / \ell} & \frac{\lambda + N_2}{\beta k_0 / \ell} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad R^{-1} = \frac{\beta k_0}{\ell(N_1 - N_2)} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{(\lambda + N_2)}{\beta k_0 / \ell} \\ -1 & \frac{(\lambda + N_1)}{\beta k_0 / \ell} \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

Efectuando, se tiene para los valores medios

$$\frac{d\langle N \rangle}{dt} = -\alpha \langle N \rangle + \lambda \langle C \rangle + S + \frac{1}{(N_1 - N_2)} \int_0^t ds \langle \xi_k(t) \xi_k(s) \rangle. \quad (5.72)$$

$$[(\lambda + N_1) e^{N_1(t-s)} - (\lambda + N_2) e^{N_2(t-s)}]$$

$$\frac{d\langle C \rangle}{dt} = \frac{\beta k_0}{\ell} \langle N \rangle - \lambda \langle C \rangle$$

Tomando la correlación de tipo exponencial (5.2) obtenemos para el valor medio estacionario:

$$\langle N \rangle = \frac{S}{\left(\alpha - \frac{\beta}{\rho} K_0 \right) - \frac{\rho}{\rho^2} \left(\frac{k\lambda + 1}{(1-N_1 t_c)(1-N_2 t_c)} \right)} \quad (5.73)$$

Los valores propios N_1 y N_2 han de ser siempre negativos para asegurar la estabilidad del sistema determinista. En el límite de ruido blanco $t_c \rightarrow 0$ se obtiene el resultado correcto. A partir de (5.73) es inmediato ver que cuando el tiempo de correlación crece el valor medio disminuye obteniéndose en el límite $t_c \rightarrow \infty$ el valor determinista $N_0 = \frac{S}{\alpha}$. La aproximación es pues coherente para todo valor de t_c . Diremos por último que cuando el ruido sea dicotómico la ecuación obtenida y sus resultados son exactos (Shapiro 1978).

b) Ecuación diferencial

A partir de la ecuación (5.68) Quabili pasa a una ecuación diferencial haciendo $\langle \tilde{x}(t-z) \rangle \approx e^{-\bar{N}z} \langle x(t) \rangle$. Se ha analizado esta aproximación en V.III.A, llegando a la conclusión que Quabili desprecia términos que deben ser tenidos en cuenta. La ecuación correcta que se estudiará en este apartado es la (5.54). Vamos ahora a resolver esta ecuación de la misma forma en que lo ha sido la integrodiferencial. Los términos exponenciales que aparecen en ella serán en este caso:

$$\bar{A} e^{\bar{N}z} \bar{A} e^{-\bar{N}z} = \bar{A} \bar{R} \begin{bmatrix} e^{N_1 z} & 0 \\ 0 & e^{N_2 z} \end{bmatrix} \bar{R}^{-1} \bar{A} \bar{R} \begin{bmatrix} e^{-N_1 z} & 0 \\ 0 & e^{-N_2 z} \end{bmatrix} \bar{R}^{-1}$$

obteniéndose para el valor medio las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d\langle N \rangle}{dt} &= -\alpha \langle N \rangle + \lambda \langle C \rangle + S + \frac{\rho}{\rho^2(N_1 - N_2)^2} \left\{ D_1 \langle N \rangle + D_2 \lambda \langle C \rangle + D_3 S \right\} \\ \frac{d\langle C \rangle}{dt} &= \frac{\beta}{\rho} K_0 \langle N \rangle - \lambda \langle C \rangle \end{aligned} \quad (5.74)$$

con

$$D_1 = \left[(\lambda + N_1)^2 + (\lambda + N_2)^2 + \frac{\lambda \beta K_0}{\rho} \left(\frac{1}{1 + (N_1 - N_1) t_c} + \frac{1}{1 + (N_1 - N_2) t_c} \right) \right]$$

$$D_2 = \left[(\lambda - \alpha) - \frac{(\lambda + N_1)}{1 + (N_2 - N_1) t_c} - \frac{(\lambda + N_2)}{1 + (N_1 - N_2) t_c} \right] \quad (5.75)$$

$$D_3 = \frac{(\lambda + N_1)^2}{N_1} + \frac{(\lambda + N_2)^2}{N_2} - \frac{\lambda (N_1 - N_2)}{N_1 N_2} \left(\frac{\lambda + N_1}{1 - N_1 t_c} - \frac{\lambda + N_2}{1 - N_2 t_c} \right) + \frac{\lambda \beta K_0}{\rho} \left[\frac{1}{N_2 (1 + (N_1 - N_1) t_c)} + \frac{1}{N_1 (1 + (N_1 - N_2) t_c)} \right]$$

Resolviendo (5.74) en el estado estacionario obtenemos para $\langle N \rangle_{ST}$

$$\langle N \rangle_{ST} = S \left[1 + \frac{D}{\rho^2 (N_1 - N_2)^2} \left\{ \frac{(\lambda + N_1)^2}{N_1} + \frac{(\lambda + N_2)^2}{N_2} + \frac{\lambda (N_1 - N_2)^2 [1 + \lambda t_c]}{N_1 N_2 [1 - (N_1 + N_2) t_c + N_1 N_2 t_c^2]} \right\} + \frac{\lambda \beta K_0}{\rho N_1 N_2} \frac{(N_1 + N_2) + (N_1 - N_2)^2 t_c}{1 - (N_1 - N_2)^2 t_c^2} \right] \left[(\alpha - \frac{\beta}{\rho} K_0) - \frac{D}{\rho^2} \left(1 - \frac{t_c \beta K_0 (N_1 + N_2) t_c + 1}{\rho (1 - (N_1 + N_2)^2 t_c^2)} \right) \right]^{-1} \quad (5.76)$$

En el límite de ruido blanco $t_c \rightarrow 0$, se encuentra la expresión correcta

$$\langle N \rangle_{ST}^0 = \frac{S}{(\alpha - \frac{\beta}{\rho} K_0) - \frac{D}{\rho^2}} \quad (5.77)$$

en el primer orden del tiempo de correlación obtenemos:

$$\langle N \rangle_{ST} = \frac{S}{[\alpha - \frac{\beta}{\rho} K_0 - \frac{D}{\rho^2}]} \left[1 - \frac{D t_c}{\rho^2} - \frac{\frac{D t_c}{\rho^2} \frac{\beta}{\rho} K_0}{(\alpha - \frac{\beta}{\rho} K_0 - \frac{D}{\rho^2})} \right] \quad (5.78)$$

La expresión (5.76) es la obtenida por Quabili (1979) si exceptuamos el factor que multiplica a S, que como se ve en (5.78) es de orden $[1 - \frac{D t_c}{\rho^2}]$ lo que confirma el análisis efectuado en V.3.A. Este factor disminuye el valor de $\langle N \rangle_{ST}$ por lo que los resultados de Quabili presentan al

reactor con más inestabilidad que la correcta.

Para el análisis de la estabilidad estudiamos el denominador de la expresión (5.76). De acuerdo con las ecuaciones (5.74) $\langle N \rangle_{\tau}$ será finito cuando se cumpla:

$$\left(\alpha - \frac{\beta K_0}{\ell} \right) > \frac{D_c}{\ell^2} \left[1 + t_c \frac{K_0 \beta}{\ell} \frac{(\lambda + \alpha) t_c - 1}{1 - (N_1 - N_2)^2 t_c^2} \right] \quad (5.79)$$

El segundo término de (5.79) presenta un mínimo para

$$t_c^{\min} = \frac{(\alpha + \lambda)}{(N_1 \cdot N_2)^2} \left[1 - \left(1 - \frac{(N_1 - N_2)^2}{(\alpha + \lambda)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

y se hace infinito para $t_c^{\infty} = (N_1 - N_2)^{-2}$. La región de estabilidad aumenta para $t_c < t_c^{\min}$ y disminuye para $t_c > t_c^{\min}$ hasta llegar a anularse para $t_c = t_c^{\infty}$. Para $t_c = (\lambda + \alpha)^{-1}$ se obtiene la misma región que para el ruido blanco, aunque $\langle N \rangle_{\tau}$ es menor debido al numerador en (5.76). Estos resultados contradicen los obtenidos con el método integro-diferencial. El problema radica en la aproximación (5.56) que permite pasar de una ecuación integro-diferencial a una diferencial. En esta aproximación se incluye un factor que crece con el tiempo ya que se toma el movimiento determinista hacia atrás. Roerdink (1981) ha estudiado este problema en general obteniendo el mismo resultado para t_c^{∞} y una estimación del orden de los términos despreciados en (5.54). El resultado demuestra que ahora el parámetro que debe ser pequeño es $\frac{D_c t_c}{\ell^2} [1 - (N_1 - N_2) t_c]^{-2}$ en vez de $\frac{D_c t_c}{\ell^2}$. Utilizando (5.69) obtenemos la condición

$$\frac{D_c t_c}{\ell^2} [1 - (\lambda + \alpha) t_c \epsilon^{\frac{1}{2}}]^{-2} \ll 1$$

donde hemos usado $(1 - \epsilon) = 4 \lambda (\alpha - \frac{\beta K_0}{\ell}) (\lambda + \alpha)^{-2}$. Si los neutrones retardados son importantes, $\epsilon \approx 1$ por lo que t_c no podrá ser del orden de $(\lambda + \alpha)^{-1}$ para que la condición anterior se cumpla. Por consiguiente

te la validez del método diferencial queda limitado en este caso a t_c no muy grandes. Concluimos que el método integro-diferencial tiene una región de validez más amplia que el diferencial.

V.3.C. ESTUDIO DE MODELOS NO MARKOVIANOS CON TECNICAS FUNCIONALES

Realizamos a continuación un estudio paralelo al realizado en V.2.B. a partir del modelo definido por las ecuaciones (5.66), mediante técnicas funcionales. Nuevamente la validez vendrá dada por (5.19).

a) Valores medios

Para el cálculo del valor medio promediamos la ecuación (5.52) y aplicamos la fórmula de Novikov:

$$\langle f_{x_c}(t) \bar{x} \rangle = \int_0^t \langle f_{x_c}(t) f_{x_c}(u) \rangle \left\langle \frac{\delta \bar{x}(t)}{\delta f_{x_c}(u)} \right\rangle du \quad (5.80)$$

Ahora el cálculo de la función respuesta es más complicado pero no supone diferencia esencial respecto al caso unidimensional. En el primer orden de $(t-u)$ se obtiene (Hernandez 1983B)

$$\frac{\partial \langle \bar{x}(t) \rangle}{\partial f_{x_c}(u)} = \bar{A} \langle \bar{x}(t) \rangle - (t-u) \bar{A} [\bar{A} \bar{S} + \bar{A} \bar{M} \bar{x} - \bar{M} \bar{A} \bar{x}] + q(t-u) \quad (5.81)$$

Considerando el ruido Gaussiano de correlación exponencial (5.2) y sustituyendo (5.80) y (5.81) hallamos para el valor medio la siguiente ecuación

$$\frac{d \langle \bar{x} \rangle}{d t} = \bar{M} \langle \bar{x} \rangle + \bar{S} + D \bar{A}^2 \langle \bar{x} \rangle - D t_c \bar{A}^2 \bar{M} \langle \bar{x} \rangle + D t_c \bar{A} \bar{M} \bar{A} \langle \bar{x} \rangle \quad (5.82)$$

En nuestro caso con \bar{M} , \bar{S} , \bar{A} , \bar{x} dados por (5.67) y en el estado estacionario se tiene:

$$\langle c \rangle_{st} = \frac{\beta \epsilon K_0}{\lambda} \langle N \rangle_{st} \quad (5.83)$$

$$\langle N \rangle_{st} = \frac{S}{\frac{1-K_0}{\epsilon} - \frac{D}{\epsilon^2}} \left[1 - \frac{D}{\epsilon^2} t_c - \frac{D t_c \beta \epsilon K_0}{\frac{1-K_0}{\epsilon} - \frac{D}{\epsilon^2}} \right] \quad (5.84)$$

que coincide con (5.78).

A partir de (5.84) observamos que cuando $\beta = 0$ recuperamos la expresión sin neutrones retardados. El valor medio disminuye siempre que β o t_c aumentan lo cual quiere decir que ambos efectos, el de neutrones retardados y el de color del ruido son estabilizadores (al menos para el valor medio). En efecto, la región de estabilidad:

$$\frac{1-K_0}{\epsilon} > \frac{D}{\epsilon^2} \left[1 - t_c \frac{\beta}{\epsilon} K_0 \right] \quad (5.85)$$

aumenta siempre con β o t_c crecientes.

b) Momentos cuadráticos y fluctuaciones relativas:

Para el cálculo de los momentos cuadráticos utilizamos la ecuación vectorial (5.67) separando cada componente. De esta forma se obtiene para los productos $x_i(t) x_j(t)$ la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_i(t) x_j(t) &= (\bar{A} \bar{x}^e)_i x_j + (\bar{A} \bar{x}^e)_j x_i + S_i x_j + S_j x_i \\ &+ \xi_{x_i}(t) (\bar{A} \bar{x}^e)_i x_j + \xi_{x_j}(t) (\bar{A} \bar{x}^e)_j x_i \end{aligned} \quad (5.86)$$

Promediando, utilizando la fórmula de Novikov y sustituyendo las funciones respuesta por su aproximación en el primer orden de $(+u)$ (5.81), llegamos a las siguientes ecuaciones para $c_{ij} = \{ c_{11} = \langle N^2 \rangle, c_{12} = c_{21} = \langle NC \rangle, c_{22} = \langle C^2 \rangle \}$

$$\dot{C}_{12} = (M_{21} + t_c \frac{D}{e^2} M_{11}) C_{11} + (M_{12} + M_{11} + \frac{D}{e^2}) C_{12} + (M_{12} - \frac{D}{e^2} M_{12}) C_{12} + S(1 - \frac{D t_c}{e^2}) \langle C \rangle$$

$$\dot{C}_{11} = 2(M_{11} + \frac{2D}{e^2}) C_{11} + 2(M_{12} - \frac{2D}{e^2} t_c M_{12}) C_{12} + 2S(1 - \frac{2D}{e^2} t_c) \langle N \rangle \quad (5.87)$$

$$\dot{C}_{22} = 2 M_{12} C_{12} + 2 M_{21} C_{12}$$

Para los valores en el estado estacionario se obtiene a partir de este último sistema:

$$\langle N^2 \rangle_{ST} = \frac{S \langle N \rangle_{ST} (A_1 + \frac{\beta}{e} K_0)}{A_1(\alpha - \frac{2D}{e^2}) - \lambda \frac{\beta}{e} K_0} \left[1 - \frac{2D}{e^2} t_c - \frac{D}{e^2} t_c \frac{\beta}{e} K_0 A_1^{-1} - \lambda \frac{\beta}{e} K_0 \frac{D}{e^2} t_c (\alpha + \lambda - D/e^2) A_1^{-2} A_2^{-1} \right] \quad (5.88)$$

con

$$A_1 \equiv \left(\frac{1-K_0}{e} + \lambda - D/e^2 \right)$$

$$A_2 \equiv \left(\frac{1-K_0}{e} + \frac{\beta K_0}{e} - \frac{2D}{e^2} \right) - \lambda \frac{\beta}{e} K_0 A_1^{-1} \quad (5.89)$$

El parámetro a considerar en las aplicaciones prácticas suele ser la fluctuación relativa que a partir de (5.88) y (5.84) se calcula obteniéndose:

$$S N = \frac{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}{\langle N \rangle^2} = B_1 (1 + t_c B_2) \quad (5.91)$$

donde B_1 son las fluctuaciones correspondientes al ruido blanco y B_2 las correcciones debidas al primer orden en el tiempo de correlación, cuyas expresiones son

$$B_1 = \rho/\epsilon^2 \left[\left(\frac{1-k_0}{\epsilon} - \frac{\rho}{\epsilon^2} \right) + \frac{\beta k_0}{\epsilon} \left(\frac{1-k_0}{\epsilon} - \frac{\rho}{\epsilon^2} \right) \Pi_1^{-1} \right]^{-1} \quad (5.92)$$

$$B_2 = \frac{\beta}{\epsilon} k_0 \left(1 + \Pi_1^{-1} \frac{\beta}{\epsilon} k_0 \right) - \left(1 + \Pi_1^{-1} \frac{\beta}{\epsilon} k_0 \right)^2 \left(\frac{1-k_0}{\epsilon} - \frac{\rho}{\epsilon^2} \right) - \\ - \frac{\beta}{\epsilon} k_0 \Pi_1^{-1} \left(1 + \Pi_1^{-1} \frac{\beta}{\epsilon} k_0 \right)^2 \Pi_1^{-1} \left(\frac{1-k_0}{\epsilon} - \frac{\rho}{\epsilon^2} \right) \quad (5.93)$$

La expresión de las fluctuaciones para ruido blanco B_1 coincide con la obtenida por Quabili (1979) (en este caso su cálculo es correcto ver V.3.A). Es fácil observar a partir de (5.92) que las fluctuaciones crecen cuando λ crece (el tiempo de retardo es menor), y disminuyen cuando β crece (el número de neutrones retardados es mayor). Los neutrones retardados estabilizan pues el sistema cuando su retardo o su fracción es mayor.

El efecto estabilizador del color del ruido puede ser visto a través del comportamiento de B_2 . Analizando el signo de $\frac{\partial B_2}{\partial \beta}$ se observa que para los valores posibles de $\beta = [0, 1)$ siempre es negativo y $B_2(\beta \rightarrow 0) < 0$, indicando que las fluctuaciones decrecen cuando el tiempo de correlación

δ β aumentan (esto ocurre para cualquier valor de λ). Nuevamente observamos el efecto estabilizador del color del ruido.

c) Tiempo de relajación, función de correlación y densidad espectral

Partimos de la ecuación (5.66) en la que tomamos la componente $x_i(t)$ y multiplicamos por $x_j(t')$ ($t' > t$)

$$\frac{d x_i(t) x_j(t')}{dt} = (\bar{A} \bar{x}^s)_i x_j(t') + (\bar{A} \bar{x}^s)_j x_i(t) f_{\kappa}(t) + S_i x_j(t') \quad (5.94)$$

Siguiendo con el método, promediamos esta ecuación respecto al ruido, aplicamos la fórmula de Novikov, y sustituimos en primer orden de aproximación del tiempo la función respuesta por (5.80) (Hernández 1983A).

Haciendo

$$C_{ij}(\theta) = \left\{ \begin{aligned} C_{11}(\theta) &= \langle N(\theta)N(0) \rangle; \quad C_{12}(\theta) = \langle N(\theta)C(0) \rangle; \quad C_{21}(\theta) = \langle C(\theta)N(0) \rangle; \\ & ; \quad C_{22}(\theta) = \langle C(\theta)C(0) \rangle \end{aligned} \right\}$$

podemos expresar la ecuación obtenida por:

$$\begin{aligned} \frac{d C_{ij}(\theta)}{d\theta} &= M_{ik} C_{kj}(\theta) + S_i \langle x_j \rangle + \frac{D}{\rho^2} A_{im} A_{ne} C_{ej} - \frac{D}{\rho^2} t_c \\ &- \frac{D}{\rho^2} t_c A_{im} A_{ne} M_{er} C_{rj} + \frac{D}{\rho^2} t_c A_{im} M_{ne} A_{er} C_{rj} - \\ &- \frac{D}{\rho^2} t_c A_{im} A_{ne} S_e \langle x_j \rangle + \frac{D}{\rho^2} \exp(-\theta/t_c) A_{ik} A_{jr} C_{kj} \end{aligned} \quad (5.95)$$

Al igual que en (5.29) definimos $C_{ij}(\theta) = \langle x_i(\theta)x_j(0) \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle$

y para las correlaciones C_{11} , C_{21} obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{C}_{11}(\theta) &= (M_{11} + \frac{D}{\rho^2}) C_{11} + M_{12} (1 - \frac{D}{\rho^2} t_c) C_{21} + \frac{D}{\rho^2} \exp(-\theta/t_c) C_{11} \\ \dot{C}_{21}(\theta) &= M_{21} C_{11} + M_{22} C_{21} \end{aligned} \quad (5.96)$$

Para el cálculo del tiempo de relajación operamos como en (5.32):

$$t_r = \frac{\mathcal{L}_0 \{ \epsilon_{11} \}}{\epsilon_{11}(0)}$$

y después de un tedioso pero sencillo cálculo obtenemos

$$t_r = t_r^0 + t_c \Delta_1 \quad (5.97)$$

siendo t_r^0 el tiempo de relajación debido a considerar ruido blanco ($t_c = 0$), cuya expresión es

$$t_r^0 = \frac{1 + \frac{\beta/c \kappa_0}{\alpha - \frac{\beta}{e} \kappa_0 - \frac{D}{e^2}} + \lambda + \frac{D}{e^2}}{\frac{\alpha - \beta}{e} \kappa_0 - \frac{D}{e^2}} \quad (5.98)$$

y Δ_1 la primera corrección de color que viene dada por

$$\Delta_1 = \frac{(1 + \beta/c \kappa_0 F_1^{-1})}{(\alpha - \frac{\beta}{e} \kappa_0 - \frac{D}{e^2})^2} \left[(\alpha - \frac{\beta}{e} \kappa_0 - \frac{D}{e^2})^2 \left[1 + \frac{\beta}{e} \kappa_0 F_1^{-1} \right] - \right. \\ \left. - \frac{2\beta}{e} \kappa_0 \frac{D}{e^2} + \lambda \frac{D}{e^2} \frac{\beta}{e} \kappa_0 F_1^{-1} \right] \quad (5.99)$$

Analicemos primero el término de ruido blanco t_r^0 . Es fácil de ver que t_r^0 disminuye cuando λ aumenta, es decir cuando los neutrones son menos retardados. t_r^0 aumenta cuando β aumenta, esto es cuando la fracción de neutrones retardados aumenta.

En lo que se refiere al término β e correlación, va a ser siempre positivo salvo que estemos muy cerca de la zona crítica en la que el término $-\frac{2\beta}{e} K_0 D^2/e^2$ en (5.99) supere a los otros dos términos positivos. En esta región el efecto de color no sería equiparable a la existencia de pseudo-precursores, por lo que los resultados de Saito (1979b) no se pueden extrapolar al caso de una zona muy cercana a la crítica.

Estudiamos por último la densidad espectral que se obtiene como la parte real de $\mathcal{L}\{c_{11}\}:\omega$. Después de reagrupar términos tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{S(\omega)}{C_{11}(0)} &= \frac{-x_1(x_1 + \beta)}{x_1 - x_2} \frac{1}{(\omega^2 + x_1^2)} + \frac{x_2(x_2 + \beta)}{x_1 - x_2} \frac{1}{(\omega^2 + x_2^2)} + \\ &+ \frac{t_c}{(1 + \omega^2 t_c^2)} \left(\alpha - \frac{\beta}{e} K_0 - \frac{D}{e^2} \right) \left[1 + \frac{\beta}{e} \frac{K_0}{[\alpha + \lambda - \frac{\beta}{e} - \frac{D}{e^2}]} \right] \quad (5.100) \\ &\cdot \left[\frac{(x_2 + \lambda)(x_2 - t_c \omega^2)}{(x_1 - x_2)(\omega^2 + x_2^2)} - \frac{(x_1 + \lambda)(x_1 - t_c \omega^2)}{(x_1 - x_2)(x_1^2 + \omega^2)} \right] \end{aligned}$$

con

$$x_{1,2} = \frac{-(\lambda + \alpha - \frac{D}{e^2}) \pm \left[(\lambda + \alpha - \frac{D}{e^2})^2 + 4\lambda \frac{\beta}{e} K_0 \left(1 - \frac{D}{e^2} t_c \right) \right]^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$\beta = \lambda \left(\alpha + \lambda - \frac{D}{e^2} \right) \Pi_1^{-1} + \frac{\lambda \beta}{e} K_0 t_c \Pi_1^{-1}$$

$$\left[\left(\alpha - \beta \frac{K_0}{e} - \frac{D}{e^2} \right) \left(1 + \beta \frac{K_0}{e} \Pi_1^{-1} \right) - \frac{D}{e^2} \left(\alpha + \lambda - \frac{D}{e^2} \right) \Pi_1^{-1} \right]$$

En el límite de ruido blanco $t_c \rightarrow 0$ la expresión (5.100) coincide con la obtenida por Quabili (1979). Si analizamos la forma de (5.100) se observa que va a ser la suma de tres lorentzianas centradas en el punto ce-

ro y de anchuras proporcionales a x_1, x_2, τ^{-1} . En la zona $\omega \ll \tau^{-1}$ dominan los términos de anchuras x_1, x_2 sin embargo en la zona $\omega \approx \tau^{-1}$ los tres términos son del mismo orden por lo que la contribución debida al color será apreciable. En la fig. (V.3) se ha representado $\frac{S(\omega)}{L_u(0)}$ para un caso de ruido blanco $\tau=0$ y para otro con un cierto tiempo de correlación. El efecto del tiempo de correlación es perfectamente apreciable en la zona $\omega \approx \tau^{-1}$.

$$\frac{1}{2} \frac{S(\omega)}{C_{11}(0)}$$

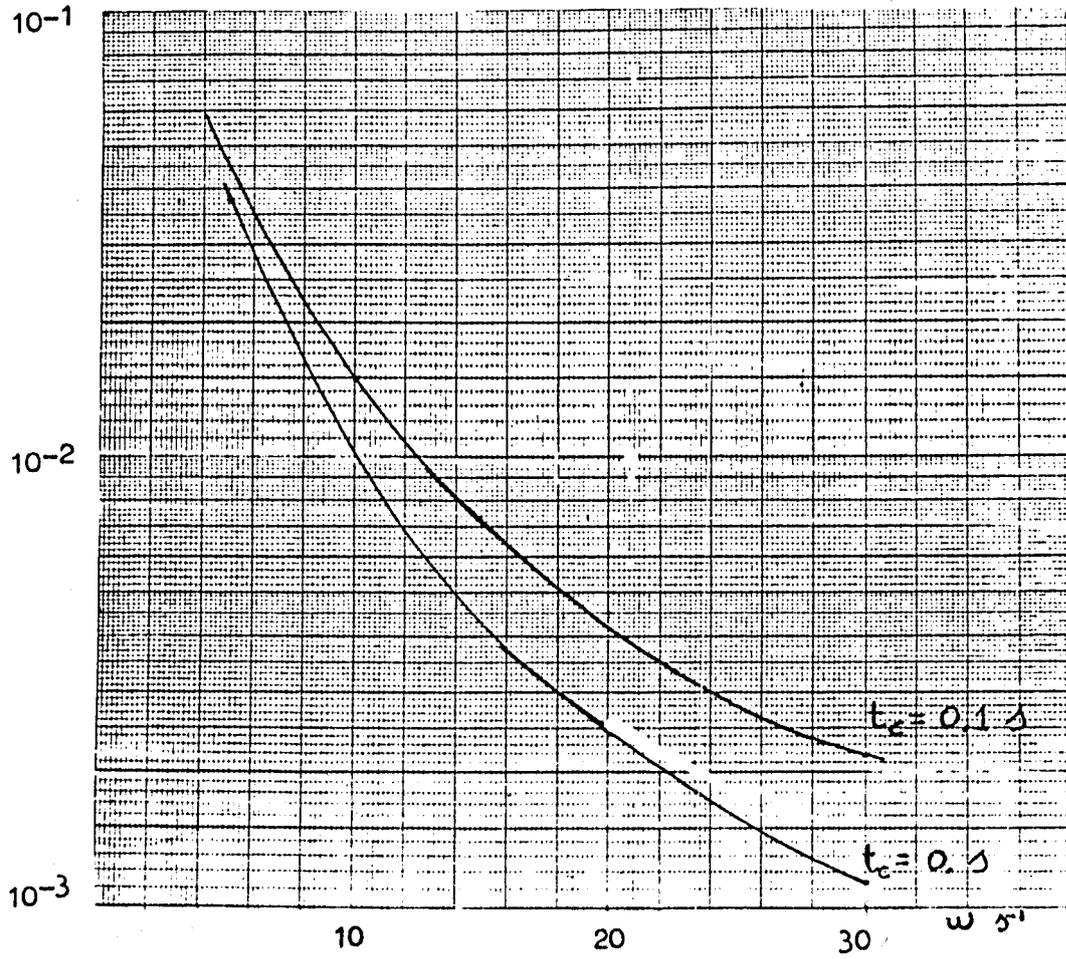


Fig. V.3.- Densidad espectral con efecto de color

$$\alpha = 1.4 s^{-1}, \quad \frac{\rho}{\rho_c} = 0.01 s^{-1}, \quad \ell = \beta \kappa_0 s, \quad \lambda = 0.01 s^{-1}$$

CAPITULO VI:

ESTUDIO DE PROPIEDADES DE TIPO ASINTOTICO EN REACTORES NUCLEARES

En el estudio de las fluctuaciones en reactores nucleares el cálculo de valores medios, cuadráticos y correlaciones ocupa un lugar importante en cuanto a sus aplicaciones prácticas (técnicas de diagnóstico y seguimiento del estado del reactor). Ya hemos visto que para su obtención no es necesario el conocimiento de la función de probabilidad y que existen aproximaciones que hacen posible resultados analíticos aún en sistemas complejos. Existen otro tipo de propiedades y parámetros estadísticos de considerable interés práctico que exigen un mayor conocimiento de la función de probabilidad y que no son fácilmente calculables por linealización u otro tipo de aproximación. Dos de ellos, la probabilidad de extinción y el estudio de fluctuaciones en la puesta en marcha del reactor tienen particular interés en la teoría de reactores (Williams 1974).

Este tipo de problemas ha sido estudiado en modelos lineales, en sus orígenes por Frankel, Feynman y Schrödinger (ver Williams (1974)); posteriormente, en trabajos más serios, por Hansen (1960) y Hurtwitz (1963) y finalmente con técnicas más sofisticadas incluyendo efectos espaciales por Bell (1965) y Williams (1974). El fundamento de estos trabajos se basa en suponer que las familias neutrónicas originadas por la inyección de algún precursor son independientes entre sí pudiendo aplicar la teoría de procesos "en cadena". Hemos de señalar que los orígenes de estos problemas se encuentran en los trabajos de los naturalistas Galton y Watson sobre extinción de especies.

La probabilidad de extinción y las fluctuaciones en la puesta en marcha del reactor son dos casos particulares de una teoría más general que estudia la probabilidad de paso de un umbral, el primer tiempo en el que se realiza dicho paso y los momentos asintóticos (Lindenberg 1975). Matemáticamente esta teoría se fundamenta en la resolución de ecuaciones maestras con barreras absorbentes o reflectantes. Cuando estas barreras son naturales, como ocurre en el caso de un reactor sin fuente, y están en el origen $N = 0$, tenemos el caso particular de la probabilidad de extinción.

Cuando estas barreras representan físicamente un umbral de peligrosidad (normalmente situado en la parte asintótica de la probabilidad), la probabilidad de ocurrencia del primer paso refleja la ocurrencia de accidentes o situaciones no deseadas, por lo que su cálculo adquiere mucha importancia en las previsiones de seguridad en reactores. Por otra parte se comprueba que la parte asintótica de la probabilidad es muy sensible al modelo utilizado (West 1980) por lo que los tiempos de paso y propiedades asintóticas pueden ser usados como test muy preciso de comprobación de modelos (ver apéndice C).

El cálculo de probabilidades y primeros tiempos de paso ha sido también empleado en sistemas físicos y químicos en el estudio de la disociación molecular, paso de barreras de potencial, etc. (Procaccia 1978), (Seshadri 1980), (West 1980).

El objetivo principal de este capítulo es estudiar este tipo de problemas en modelos de reactores nucleares lineales y no lineales con efecto de temperatura. Para ello consideraremos antes el uso de barreras absorbentes y las definiciones precisas (VI.1). En reactores nucleares, incluso para modelos lineales, no existen estudios de este tipo. El problema fundamental consiste en desarrollar un método por funciones generatrices que tenga en cuenta la existencia de barreras absorbentes. Esto será hecho en la segunda sección de este capítulo y aplicado a ejemplos sencillos. La tercera sección trata del estudio de modelos no lineales. En este caso el método por funciones generatrices no es aplicable por lo que se utilizan nuevos métodos. Posteriormente aplicamos nuestros resultados al estudio de la probabilidad de extinción y fluctuaciones en la puesta en marcha comparando con los resultados lineales.

VI.1. DEFINICIONES E INTRODUCCION DE BARRERAS

Supongamos que nuestro sistema en estudio se encuentra bien definido

a través de una ecuación maestra que en general presenta varios saltos (3.43) . El sistema es pues Markoviano y toda la información se encuentra en la probabilidad de transición $P(N,t | N',t')$ que cuando el sistema es lineal es posible calcular. Esta probabilidad de transición cumplirá una ecuación maestra directa (de derecha a izquierda), o inversa (de izquierda a derecha) cuya conveniencia vendrá dada por el tipo de problema a resolver. La ecuación directa está relacionada con la ecuación cinética, mientras que la ecuación inversa está relacionada con la ecuación adjunta (ecuación para la función importancia, Bell (1965)). En páginas sucesivas se verá con más detalle las aplicaciones de ambas ecuaciones; ahora estamos interesados en introducir otro tipo de problemas a través de condiciones de contorno o barreras. Supongamos que queremos calcular las probabilidades de que partiendo de un estado en el instante inicial, se llegue a otro estado en el instante final pero con la condición que sea la primera vez que ello ocurra. Vemos por el sentido físico que este tipo de cálculos va a tener mucha aplicación práctica. En efecto, si el estado final es un estado considerado como peligroso, como accidental, o es simplemente el estado que hace funcionar una alarma (en reactores nucleares puede ser el número de neutrones umbral que hace que caiga la barra de parada del reactor), habremos calculado la probabilidad de ocurrencia del accidente o hecho en cuestión.

Matemáticamente la descripción de estas condiciones se consigue a través de condiciones de contorno (en el caso de ecuaciones maestras continuas), o de inserción de barreras absorbentes o reflectantes (en el caso de ecuaciones maestras discretas). Supongamos sin pérdida de generalidad que nuestro sistema viene dado por la ecuación maestra:

$$\frac{\partial P(N,t)}{\partial t} = \sum_r W(N|N-r) P(N-r,t) - \sum_r W(N+r|N) P(N,t) \quad (6.1)$$

Denotamos las barreras absorbentes por subíndices y las reflectantes

por superíndices. Por ejemplo:

$P_{m_1, m_2}(N, t / N', t')$ denotará la probabilidad de que el sistema se encuentre en N en el tiempo t , cuando en un instante inicial se encontraba en N' con la condición de no haber sobrepasado las barreras (inferior m_1 y superior m_2). La ecuación maestra que cumple ahora nuestra probabilidad condicionada es idéntica a (6.1) con las condiciones de barrera absorbente:

$$W_{m_1, m_2}(N+r/N) = Y(N-m_1) Y(m_2-N) W(N+r/N) \quad (6.2)$$

siendo $Y(x)$ la función escalón de Heaviside. Una barrera reflectante permite la "vuelta atrás" o reflexión del estado por lo que $P^{m_1, m_2}(N, t / N', t')$ representará lo mismo que anteriormente pero ahora condicionado únicamente a que no atravesase las barreras y retorne. Las probabilidades de transición son:

$$\begin{aligned} W^{m_1, m_2}(N+r/N) &= Y(N-m_1) W(N+r/N) & \forall r < 0 \\ W^{m_1, m_2}(N+r/N) &= Y(m_2-N) W(N+r/N) & \forall r > 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

La aplicación de barreras puede hacerse lo mismo en ecuaciones directas que en inversas. Cuando las probabilidades de transición cumplen (6.2) ó (6.3) para un cierto estado sin necesidad de imponerlo externamente se dice que el sistema tiene barreras naturales. En un reactor nuclear sin fuentes se observa una barrera absorbente natural para $N = 0$.

a) Problemas independientes del tiempo

Quizá el más tratado de los problemas independientes del tiempo es el cálculo de la función de probabilidad estacionaria. Cuando ésta existe

y en ausencia de barreras, la probabilidad estacionaria se suele obtener resolviendo la ecuación maestra o la equivalente en funciones generatrices con el término $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$. También es posible su cálculo a través de la ecuación inversa aunque más complicado. Con el uso de barreras se pueden presentar los siguientes casos importantes y con utilidad práctica:

- $P_{sr}^{m_1, m_2}(N) = P^{m_1, m_2}(N, \infty | N', 0)$ Probabilidad estacionaria, independiente de las condiciones iniciales, con barreras reflectantes. En reactores nucleares existe una variante de este tipo que tiene interés práctico; consiste en tener en cuenta el hecho de que un reactor puede tener un sistema de control de tal forma que en un cierto número de neutrones considerado excesivo m_1 existe un dispositivo que al detectar este umbral introduce una barra de absorbente y las probabilidades de absorción se pueden poner como $(\Sigma_c \text{ absorción introducida por la barra})$:

$$\omega_r(N-1/N) = \omega(N-1/N) + \Sigma_c \gamma(N-m_1) \omega(N-1/N). \quad (6.4)$$

- $P_{m_1, m_2}(m_1, \infty | N, 0)$ Probabilidad de extinción por m_1 cuando no se ha alcanzado nunca la barrera m_2 . Depende del instante inicial N pero la ecuación que cumple es independiente del tiempo. Representa la probabilidad que tiene un sistema de autoextinción sin llegar nunca a un estado m_2 normalmente considerado peligroso.

- $P_{m_1}(m_1, \infty | N, 0)$ En un sistema explosivo representa la probabilidad de extinción por la barrera m_1 . (Si el sistema es estable siempre $P_{m_1} = 1$). Con frecuencia m_1 suele ser la barrera natural en el origen y entonces representa la probabilidad de extinción normalmente calculada. En apartados posteriores se verá la necesidad de generalizar esta probabilidad de extinción usual al caso con barreras cuando se toma en cuenta algún efecto no lineal (usualmente el de temperatura).

b) Problemas dependientes del tiempo

En un estudio de propiedades asintóticas resulta interesante conocer, por un lado, la probabilidad de ocurrencia de un determinado suceso y, por el otro, el tiempo promedio en que ocurrirá. Tales propiedades constituyen el estudio de la estadística de extremos y primeros tiempos de paso

Definimos $\frac{\delta P(N, t | N_0, t_0)}{\delta t} dt$ la probabilidad de que el sistema se encuentre en N en un tiempo $(t, t + dt)$. Entonces definimos el momento temporal i de permanencia en N , como

$$T^i(N, N_0) = \int_0^{\infty} t^i \frac{\delta P(N, t | N_0, 0)}{\delta t} dt = i \int_0^{\infty} t^{i-1} P(N, t | N_0, 0) dt \quad (6.5)$$

Lógicamente, para un sistema estable sin barreras absorbentes T^i será infinito, sin embargo tendrá significado en un sistema con barreras absorbentes (cuando no lleva índices suponemos $i = 1$): $T_{m_1, m_2}(N, N_0)$ es el tiempo promedio que el sistema se encuentra en N antes de ser absorbido por las barreras. A partir de esta definición resultan inmediatas las siguientes:

$$T_{m_1, m_2}(N_0) = \sum_{N=m_1+1}^{m_2-1} T_{m_1, m_2}(N, N_0) \quad (6.6)$$

es el primer tiempo de paso a través de las barreras m_1, m_2

$$T_{m_1, m_2} = \sum_{N_0=m_1+1}^{m_2-1} \sum_{N=m_1+1}^{m_2-1} T_{m_1, m_2}(N, N_0) \cdot P(N_0) \quad (6.7)$$

es el primer tiempo de paso cuando las condiciones iniciales son $P(N_0)$

Para el estudio de los extremos definimos la función de distribución acumulada por:

$$F_{m_1, m_2}(t, N_0) = \sum_{N=m_1+1}^{m_2-1} P_{m_1, m_2}(N, t | N_0, 0) \quad (6.8)$$

que representa la probabilidad de no extinción en el tiempo t .

La probabilidad de alcanzar en ese tiempo uno de los extremos será pues:

$$\text{Prob} \{ N(t) = m_1, m_2 / N(0) = N_0 \} = (1 - F_{m_1, m_2}(t, N_0)) \quad (6.9)$$

y en general para cualquier estado x sin barreras absorbentes

$$\text{Prob} \{ N(t) = x / N(0) = 0 \} = (1 - F_x(t, N_0)) \quad (6.10)$$

por lo tanto se definirán los momentos extremos como

$$\psi_i(t / N_0) = \sum_x x^i [F^x(t, N_0) - F^{x+1}(t, N_0)] \quad (6.11)$$

La utilidad de estas definiciones a aplicaciones concretas en reactores nucleares se verá más adelante. Por ahora nos encontramos con el problema de hallar métodos de solución para ecuaciones directas o inversas y con barreras absorbentes o reflectantes. Hacemos notar que los métodos sencillos usualmente conocidos son sólo válidos para ecuaciones con un salto. Una de las particularidades de los problemas de reactores nucleares respecto a otros (cinética química, láser ...) es que la fisión es responsable de que aparezca en las ecuaciones maestras más de un salto. Por esto, en reactores se ha empleado casi exclusivamente el método de las funciones generatrices (Pacilio, 1975). Continuando con ello vamos a generalizar en el siguiente apartado dicho método en presencia de barreras absorbentes (el caso de barreras reflectantes es similar).

VI.2. METODO DE SOLUCION POR FUNCIONES GENERATRICES

Para fijar ideas tomemos una ecuación maestra directa, sin neutrones

retardados ni detector, con una barrera de absorción en M :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_H(N,t)}{\partial t} = & \lambda(N+1) Y(M-(N+1)) P_H(N+1,t) + S Y(M-(N-1)) P_H(N-1,t) + \\ & + \lambda \sum_{m=0}^I P(m) (N+1-m) Y(M-(N+1-m)) P_H(N+1-m,t) - \quad (6.12) \\ & - [S + (\lambda + \lambda) N] Y(M-N) P_H(N,t) \end{aligned}$$

donde λ y λ son los coeficientes de absorción y fisión usuales y $Y(x)$ es la función de Heaviside. Definamos la siguiente función generatriz generalizada:

$$G_H(x,t) = \sum_{N=0}^M x^N P_H(N,t) \quad (6.13)$$

de tal forma que la ecuación maestra (6.12) en términos de la función generatriz se escribe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_H(x,t)}{\partial t} = & S(x-1) G_H(x,t) + \lambda(1-x) \frac{\partial G_H}{\partial x} + \\ & + \lambda(\beta(x)-x) \frac{\partial G_H}{\partial x} - S x^{M+1} P_H(M-1,t) - \quad (6.14) \\ & - \lambda \sum_{m=0}^I P(m) x^m \sum_{N=M-m}^M x^N P_H(N,t) \end{aligned}$$

con $G_H(1,t) = 1$ y teniendo $\beta(x)$ y $P(m)$ el mismo significado que en (3.45)

La ecuación (6.14) aunque muy complicada, es resoluble. Vamos aquí a presentar un método por funciones de Green que resultará muy útil pues expresaremos la solución en función de la función generatriz sin barreras. Para mayor simplicidad supongamos que buscamos la solución estacionaria

$$\frac{\partial G_H(x,t)}{\partial t} = 0$$

y sea $G(x, x')$ la función de Green de la ecuación estacionaria, es decir

$$\delta(x-x') = S(x-1) G(x, x') + [\lambda(1-x) + \mathcal{L}(\beta(x)-x)] \frac{\partial G}{\partial x} \quad (6.15)$$

cuya solución es:

$$G(x, x') = \frac{G_0(x) Y(x-x')}{\lambda(1-x') + \mathcal{L}(\beta(x')-x')} G_0(x') \quad (6.16)$$

siendo $G_0(x)$ la función generatriz del problema sin barreras.

Ahora la solución vendrá dada por:

$$G_M(x) = A G_0(x) + S \int_0^x G(x, x') x'^{M+1} P_M(M) dx' + \\ + \mathcal{L} \int_0^x G(x, x') \sum_n P(n) x'^n \sum_{N=M-n}^M x'^N P_M(N) \quad (6.17)$$

es decir

$$G_M(x) = A G_0(x) + S G_0(x) P_M(M) \int_0^x \frac{x'^{M+1}}{G_0(x') [\lambda(1-x') + \mathcal{L}(\beta(x')-x')]} dx' \\ + \mathcal{L} G_0(x) \sum_n P(n) \sum_{N=M-n}^M \int_0^x \frac{x'^{M+n} P_M(N) dx'}{G_0(x') [\lambda(1-x') + \mathcal{L}(\beta(x')-x')]} \quad (6.18)$$

con

$$1 = A + S P_M(M) \int_0^1 \frac{x'^{M+1}}{G_0(x') [\lambda(1-x') + \mathcal{L}(\beta(x')-x')]} + \mathcal{L} \sum_n P(n) \sum_{N=M-n}^M P_M(N) \int_0^1 \frac{x'^{M+n} dx'}{G_0(x') [\lambda(1-x') + \mathcal{L}(\beta(x')-x')]} \quad (6.19)$$

Las condiciones iniciales $P_M(M-1) \dots P_M(M-1)$ se hallan resolviendo el siguiente sistema

$$P_M(j) = A P(j) + \frac{P_M(S)}{j!} \frac{\partial^j}{\partial x^j} \left[G_0(x) \int_0^x \frac{x'^{M+1} dx'}{G_0(x') [\lambda(1-x') + \mathcal{L}(\beta(x')-x')]} \right] + \\ + \frac{\mathcal{L}}{j!} \sum_n P(n) \sum_{N=M-n}^M \frac{\partial^j}{\partial x^j} \left(G_0(x) \int_0^x \frac{x'^{M+n} dx'}{G_0(x') [\lambda(1-x') + \mathcal{L}(\beta(x')-x')]} \right) P_M(N) \quad (6.20)$$

donde hemos utilizado

$$P_H(\nu) = \frac{1}{\nu!} \left. \frac{\delta^\nu G_H(x)}{\delta x^\nu} \right|_{x=0} ; \quad P(\nu) = \frac{1}{\nu!} \left. \frac{\delta^\nu G_0(x)}{\delta x^\nu} \right|_{\lambda=0} \quad (6.21)$$

Dada la dificultad de la resolución de estas ecuaciones en un caso general y con el fin de ilustrar su aplicabilidad, se resolverán en este mismo apartado para casos sencillos y todo tipo de ecuaciones. Antes de hacerlo vamos a exponer una técnica similar para el cálculo de tiempos de paso.

Integrando en t entre $0, \infty$ la ecuación 6.12 y aplicando (6.5) obtenemos para $T_H(N, N_0)$ la siguiente ecuación:

$$\delta_{N, N_0} = S T_H(N-1, N_0) + \lambda(N+1) T_H(N+1, N_0) + \sum_n^I P(n) \lambda(N-n+1) T_H(N-n+1, N_0) - (S + (\lambda + \lambda) N_0) T_H(N, N_0) \quad (6.22)$$

Definimos ahora la función generadora de momentos de tiempos como:

$$G_H^T(x, N_0) = \sum_{N=0}^{\infty} x^N T_H(N, N_0) \quad (6.23)$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} G_H^T(1, N_0) &= T_H(N_0) \\ G_H^T(0, N_0) &= T_H(0, N_0) \\ \frac{1}{i!} \left. \frac{\delta^i G_H^T}{\delta x^i} \right|_{x=0} &= T_H(i, N_0) \end{aligned} \quad (6.24)$$

entonces $G_H^T(x, N_0)$ cumple, a partir de (6.22), la siguiente ecuación:

$$x^{N_0} = S(x-1) G_H^T(x, N_0) + [\lambda(1-x) + \lambda(\beta(x)-x)] \frac{\partial G_H^T(x, N_0)}{\partial x} \quad (6.25)$$

Si aplicamos a esta ecuación la técnica de funciones de Green anterior resulta

$$G_H^T(x, N_0) = A G_0(x) + G_0(x) \int_0^x \frac{x' N_0 dx'}{G_0(x') [\lambda(1-x') + \mu(\beta(x') - x')]} \quad (6.26)$$

donde A es una constante que se determina a partir de $x = 0$

$$A = \frac{T_H(0, N_0)}{P(0)} \quad (6.27)$$

La expresión (6.26) permite (derivando sucesivamente respecto a x) obtener los tiempos de paso en función de las probabilidades estacionarias del sistema sin barreras. A continuación presentamos unos ejemplos que muestran la gran aplicación de estas técnicas.

A: Propiedades independientes del tiempo: Probabilidad estacionaria y probabilidad de extinción.

Tomemos como ejemplo el modelo representado por la ecuación (6.12) con las siguientes simplificaciones:

i) No existe fuente externa $S = 0$, por lo que además de la barrera absorbente en M existe otra natural en el origen $N = 0$.

ii) El modelo de fisión es cuadrático, $\rho(n) = \delta_{n,2}$, por lo que $f(x) = x^2$

En este caso sencillo la función generatriz sin barrera en M es $G_0(x) = 1$. La ecuación directa de Kolmogorof nos dará la forma de probabilidad estacionaria y la inversa las probabilidades de extinción:

A1: Ecuación directa. Forma de la probabilidad estacionaria

La función generatriz generalizada toma la forma:

$$G_H(x, N_0) = \sum_{N=0}^M x^N P_H(N, N_0) \quad (6.28)$$

Aplicando la ecuación (6.18) a este caso obtenemos:

$$\begin{aligned}
 G_H(x, N_0) = & A + \lambda M P_H(M, N_0) \int_0^x \frac{x'^{M-1}}{[\lambda - \lambda x']} dx' - \\
 & - \lambda M P_H(M, N_0) \int_0^x \frac{x'^{M+1}}{[\lambda - \lambda x']} dx' + \\
 & + \lambda (M-1) P_H(M-1, N_0) \int_0^x \frac{x'^{M+1}}{(1-x')(\lambda - \lambda x')} dx'
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

con las condiciones (6.19), (6.20)

$$1 = P_H(0, N_0) + P_H(M, N_0)$$

$$P_H(M, N_0) = \frac{1}{M!} \frac{\delta^M}{\delta x^M} \left[M \cdot P_H(M, N_0) \int_0^x x'^M dx' \right] \tag{6.30}$$

de tal forma que se obtiene para $G_H(x, N_0)$:

$$G(x, N_0) = P_H(0, N_0) + x^M P_H(M, N_0) \tag{6.31}$$

es decir, una expresión para la probabilidad

$$P_H(N, N_0) = P_H(0, N_0) \delta_{0,N} + P_H(M, N_0) \delta_{M,N} \tag{6.32}$$

como era de esperar. Obsérvese que este resultado es trivial puesto que se tienen dos barreras absorbentes en 0 y M; sin embargo, el hecho importante es que la teoría es capaz de reproducir perfectamente cálculos con barreras absorbentes, a diferencia de otras (Fracciones continuas Hagg (1979), Weidlich (1978)).

A2: Ecuación inversa. Probabilidades de extinción

Los coeficientes que quedan indeterminados en (6.32) $P_H(0, N_0)$ y $P_H(M, N_0)$ son precisamente las probabilidades de extinción por la barrera natural 0 y por la barrera artificial M. La forma de calcularlos es a través de la aplicación de los métodos anteriores a la ecuación inversa (de derecha a izquierda) de Kolmogorov.

Para el caso representado por (6.12) sin término de fuente independiente tal ecuación adquiere la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(N, t / N_0, t_0)}{\partial t_0} = & \lambda N_0 [P(N, t / N_0 - 1, t_0) - P(N, t / N_0, t_0)] + \\ & + \sum_i \lambda P(i) N_0 [P(N, t / N_0 + i - 1, t_0) - P(N, t / N_0, t_0)] \end{aligned} \quad (6.33)$$

Tomando independencia temporal e introduciendo una barrera absorbente en M, definimos la función generadora de probabilidad generalizada como

$$\overleftarrow{G}_H(x, N) = \sum_{N_0=0}^M x^{N_0} \cdot P_H(N, \infty / N_0, 0) \quad (6.34)$$

y si tenemos en cuenta que para el caso sin barreras la función generatriz independiente del tiempo es

$$\overleftarrow{G}_0(x) = \frac{1}{\lambda x f(\frac{1}{x}) - (\lambda + \delta) + \lambda x} \quad (6.35)$$

obtenemos operando como anteriormente:

$$\overleftarrow{G}_H(x, N) = \frac{A}{\lambda x f(\frac{1}{x}) - (\lambda + \delta) + \lambda x} + \frac{\lambda \sum_{i=0}^I P(i) \sum_{\ell=0}^{\ell-2} P_H(N | \ell) x^{\ell-i+1}}{\lambda x f(\frac{1}{x}) - (\lambda + \delta) + \lambda x} \quad (6.36)$$

y en el caso anterior con $f(x) = x^2$

$$\overleftarrow{G}_M(x, N) = \frac{\lambda x + \lambda P_H(N|0)}{(1-x)(\lambda - \lambda x)} \quad (6.37)$$

La probabilidad de extinción usual sin barrera en M vendrá dada por $\{P_H(0|0)=1\}$:

$$P_x(0|N_0) = \left(\frac{\lambda}{\lambda}\right)^{N_0} \quad (6.38)$$

obtenida a partir de (6.37):

$$\overleftarrow{G}_0(x, 0) = \frac{\lambda}{\lambda - \lambda x} \quad (6.39)$$

y que coincide con el resultado de Williams (1979).

B: Ejemplo de cálculo de tiempo de paso.

Para establecer una correspondencia con los métodos usuales de cálculo de tiempos de paso con un solo salto (Lindenberg 1975) supongamos un sistema que tenga probabilidad estacionaria en ausencia de barrera absorbente:

$$\frac{\partial P(N, t)}{\partial t} = \lambda(N+1) P(N+1, t) + S P(N-1, t) - (\lambda N + S) P(N, t) \quad (6.40)$$

Este representará un sistema no multiplicativo. Supongamos que introducimos una barrera absorbente en M y aplicamos la teoría anterior de tal manera que se obtiene para $T_H(N, N_0)$ la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \delta_{N, N_0} &= \lambda(N+1) \gamma(M-(N+1)) T_H(N+1, N_0) + S \gamma(M-(N-1)) \\ &T_H(N-1, N_0) - (\lambda N + S) \gamma(M-N) T_H(N, N_0) \end{aligned} \quad (6.41)$$

Con la siguiente definición de función generadora de momentos temporales

$$G_H^T(x, N_0) = \sum_{N=0}^{H-1} x^N T_H(N, N_0) \quad (6.42)$$

resulta la ecuación

$$x^{N_0} = \lambda(1-x) \frac{\partial G_H^T}{\partial x} + S(x-1) G_H^T - T_H(H-1, N_0) x^H S \quad (6.43)$$

cuya solución vendrá dada por

$$G_H^T(x, N_0) = A G_0(x) + G_0(x) \int_0^x \frac{x'^{N_0}}{\lambda(1-x') G_0(x')} dx' + G_0(x) T_H(H-1, N_0) \int_0^x \frac{x'^H S}{\lambda(1-x') G_0(x')} dx' \quad (6.44)$$

donde

$$T_H(i, N_0) = \frac{1}{i!} \left. \frac{\partial^i G(x, N_0)}{\partial x^i} \right|_{x=0} \quad (6.45)$$

utilizando las condiciones de contorno

$$G_H^T(0, N_0) = T(0, N_0) \quad (6.46)$$

y derivando sucesivamente (6.44) obtendríamos para $T_H(N, N_0)$

$$T_H(N, N_0) = \frac{P(N)}{P(0)} T(0, N_0) + \frac{1}{N!} \left. \frac{\partial^N G_0(x)}{\partial x^N} \int_0^x \frac{x'^{N_0}}{\lambda(1-x') G_0(x')} dx' \right|_{x=0} \quad (6.47)$$

En el ejemplo anterior $G_0(x) = \exp\left(\frac{S}{\lambda}(x-1)\right)$, que sustituido en (6.47) viene a dar

$$T_H(N, N_0) = \frac{P(N)}{P(0)} T(0, N_0) + \frac{1}{\lambda^N} \left[1 + \left(\frac{S}{\lambda}\right) \frac{1}{N-1} + \left(\frac{S}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{(N-1)(N-2)} \dots \right] \quad (6.48)$$

Esta expresión coincide plenamente con los resultados de Seshadri (1980). En resumen con estos sencillos ejemplos se comprueba que los métodos desarrollados con funciones generatrices generalizadas son capaces de trabajar

con naturalidad con barreras naturales o artificiales tanto en el cálculo de probabilidades estacionarias y primeros tiempos de paso como en el de probabilidades de extinción. En sistemas más complejos que los mencionados el cálculo precisa la obtención de derivadas n-ésimas de funciones complicadas. En realidad esto ocurre con todos los cálculos de probabilidades por funciones generatrices cuando hay mas de dos saltos. El análisis numérico de la función de probabilidad a partir de funciones generatrices ha sido realizado por Szeless (1971) y Marseguerra (1974) utilizando un algoritmo de derivación numérica. En trabajos posteriores esperamos sacar toda su potencia de cálculo a estos métodos en funciones generatrices, que no solamente sean aplicables a problemas en reactores nucleares sino en general a sistemas de poblaciones. Por el momento proseguimos nuestro análisis en reactores nucleares no lineales.

VI.3. MODELOS DE REACTORES NO LINEALES

Ya hemos indicado que las probabilidades de extinción y fluctuaciones en la puesta en marcha del reactor han sido exclusivamente estudiados en modelos lineales. Cuando se tiene en cuenta efectos de temperatura los neutrones no evolucionan de forma independiente sino que existe un fenómeno de cooperación de modo que es preciso replantear el problema en términos diferentes. A continuación estudiamos este planteamiento para la probabilidad de extinción para posteriormente aplicarlo al caso de umbrales cualesquiera:

VI.3.A. GENERALIZACION DE LA PROBABILIDAD DE EXTINCION EN MODELOS NO LINEALES

Si se inyecta un número de neutrones en un medio multiplicativo és-

tos pueden multiplicarse indefinidamente o por el contrario extinguirse. La probabilidad de no encontrar neutrones en un tiempo infinitamente alejado de la inyección es lo que llamamos probabilidad de extinción. El mismo problema trasladado a especies animales fue estudiado originariamente por Galton-Watson constituyendo las primeras aportaciones a la moderna teoría de "branching processes". Schrödinger plantea el problema de la probabilidad de extinción dependiente del espacio, es decir, teniendo en cuenta el lugar donde el primer neutrón ha sido inyectado. Con el formalismo de Bell (1965) se puede calcular la probabilidad de extinción como un caso particular de una forma muy elegante y que admite el tratamiento del efecto de neutrones retardados. Explicaremos brevemente este método que servirá como puente al utilizado por nosotros para el caso no lineal.

Bell define $P_n(R, t_f; r, \Omega, t)$ como la probabilidad de encontrar n neutrones en la región R y el tiempo final t_f cuando en el instante inicial t se ha inyectado un neutrón en r con dirección Ω (Ver II.2A) Supone pues una aproximación de un sólo grupo de energías sin neutrones retardados. Para P_n se puede escribir una ecuación de balance de probabilidades como ya ha sido visto en Cap II (II.2.A.a) y obtener una representación por funciones generatrices (ec. 2.2).

A partir de la definición de $P_n(R, t_f; r, \Omega, t)$ es inmediato ver que la probabilidad de extinción es un caso particular dado por:

$$P_{ex}(r, \Omega) = P_0(R, 0; r, \Omega, -\infty) = G(0; r, \Omega, -\infty)$$

Cuando el medio es supercrítico existe un valor no nulo para esta probabilidad y la ecuación para P_{ex} se hace independiente del tiempo:

$$-\Omega \cdot \nabla P_{ex}(r, \Omega) + \sum P_{ex}(r, \Omega) = \sum_{j=0}^I c_j \left[\frac{1}{\gamma \Omega} \int d\Omega' P_{ex}(r, \Omega') \right]^j \quad (6.49)$$

con las condiciones de contorno habituales. Esta ecuación admite aproximaciones en los casos de interés físico (cuando el medio es suavemente supercrítico $P_{ex} \approx 1$) y sus soluciones constituyen una generalización de los trabajos de Schrödinger. Esta elegante teoría permite no solamente tratar problemas de extinción sino muchos otros, como cálculo de momentos y correlaciones, con la ventaja de que la generalización a casos más realistas dependientes de la energía y con neutrones retardados es inmediata y proporciona ecuaciones íntimamente relacionadas con las ec. adjuntas deterministas del transporte o difusión. (Williams (1974)). Por desgracia una generalización de estas técnicas a casos no lineales es imposible pues, como veremos en seguida, la linealidad es un requisito imprescindible para su uso. El procedimiento de Bell tiene en realidad sus orígenes en estudios tratados anteriormente en cadenas de radiación cósmica, y en el contexto de la teoría de procesos se conoce como técnicas del primer tiempo de vuelo. Nosotros vamos a demostrar cómo estas técnicas son equivalentes a la aplicación de la ecuación de Kolmogorov inversa con la hipótesis de linealidad. Para ello supongamos un modelo puntual (no dependiente del espacio) en el que se contempla la creación y destrucción de partículas con unas ciertas probabilidades de transición $\omega(N+i/N)$. La ecuación de Kolmogorov inversa se escribiría para un sistema como éste:

$$P(N_f, t_f | N, t) = \sum_i P(N_f, t_f | N+i, t+\Delta t) P(N+i, t+\Delta t | N, t) \quad (6.50)$$

y en forma diferencial tomando las probabilidades de transición de modo que $P(N+i, t+\Delta | N, t) = \omega(N+i/N) \Delta + o(\Delta^2)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(N_f, t_f | N, t)}{\partial t} &= \sum_i \omega(N+i/N) P(N_f, t_f | N+i, t) - \\ &- \sum_i \omega(N+i/N) P(N_f, t_f | N, t) \end{aligned} \quad (6.51)$$

Si tenemos ahora en cuenta que en un sistema lineal (las probabilidades de transición son lineales) los neutrones no interaccionan entre sí, siendo independientes las cadenas originadas por cada neutrón inicial, es decir:

$$P(N_f, t_f / N, t) = \sum_{N_1 \dots N_w = N_f} P(N_1, t_f / 1, t) \cdot P(N_2, t_f / 1, t) \dots P(N_w, t_f / 1, t) \quad (6.52)$$

y particularizamos la ec. (6.51) para el caso de un solo neutrón inicial obtenemos:

$$\frac{\partial P(N_f, t_f / 1, t)}{\partial t} = \sum_i \omega(i/1) \cdot \sum_{N_1 \dots N_i = N_f} P(N_1, t_f / 1, t) \dots P(N_i, t_f / 1, t) - \sum_i \omega(i/1) P(N_f, t_f / 1, t) \quad (6.53)$$

que es la ecuación (6.49), (Bell 1965) sin efectos espaciales. La condición (6.52) no es válida cuando el sistema no es lineal por lo que en este caso hemos de partir de una ecuación como la (6.51) (de Kolmogorov inversa). Tratemos pues nuestro problema en un modelo sencillo puntual y sin efecto de neutrones retardados a partir de (6.51) y con probabilidades de transición no lineales. Para fijar ideas supongamos un modelo de reactor nuclear en el que las probabilidades de fisión o absorción dependen cuadráticamente del número de neutrones (Quabili, 1980). La imagen física es considerar una dependencia lineal de las secciones eficaces con la temperatura y ésta proporcional en cada instante al número de neutrones. Se trata pues de una aproximación de dependencia instantánea de la temperatura con el número de neutrones: (Ver Cap. IV)

$$\omega(N+i-1/N) = \rho(i) (\lambda + \Gamma_\lambda N) N, \text{ fisión de neutrones}$$

$$\omega(N-1/N) = (\lambda + \Gamma_\lambda N) N, \text{ absorción de neutrones}$$

La ecuación de Kolmogorov inversa para este problema concreto es ahora:

$$\frac{dP(N_f, t_f / N, t)}{dt} = \sum_i P(i) (\lambda + \beta_i N) N \cdot P(N_f, t_f / N+i-1, t) + \quad (6.54)$$

$$+ (\lambda + \beta_\lambda N) N \cdot P(N_f, t_f / N+1, t) - [(\lambda + \beta_\lambda N) + (\lambda + \beta_\lambda N)] N \cdot P(N_f, t_f / N, t)$$

donde β_λ y β_i representan los coeficientes de dependencia de las secciones eficaces con la temperatura a través del número de neutrones. Suponemos que no existen fuentes independientes de tal forma que existe una barrera natural de absorción en el origen de neutrones.

Antes de seguir adelante resulta conveniente observar el comportamiento determinista del sistema. La ecuación cinética puntual para un modelo de reactor como éste sería:

$$\frac{dN}{dt} = (\bar{\nu}-1)(\lambda + \beta_\lambda N) N - (\lambda + \beta_\lambda N) N \quad (6.55)$$

siendo $\bar{\nu}$ el número medio de neutrones originados en la fisión. La estabilidad del sistema viene ahora determinada por los coeficientes β_λ y β_i . Supongamos que, como realmente ocurre, dichos coeficientes son positivos, es decir, las secciones eficaces aumentan con la temperatura. Entonces las condiciones de estabilidad son:

$$(\bar{\nu}-1) \beta_\lambda < \beta_\lambda \quad \text{sistema estable} \quad (6.56)$$

$$(\bar{\nu}-1) \beta_\lambda \geq \beta_\lambda \quad \text{sistema inestable}$$

En un modelo de este tipo el concepto de criticidad como índice de la estabilidad pierde su validez (Ver también Cap. IV.) De hecho el sistema tiene un estado estacionario estable distinto del trivial ($N=0$) cuando es supercrítico $(\bar{\nu}-1)\lambda > \lambda$ y se cumple $\beta_\lambda > (\bar{\nu}-1)\beta_\lambda$, y su valor viene dado por

$$N_Q = \frac{(\bar{\nu}-1)\lambda - \lambda}{\beta_\lambda - (\bar{\nu}-1)\beta_\lambda} \quad (6.57)$$

Continuemos ahora con nuestro objetivo principal que es el cálculo de la probabilidad de extinción. La presencia en (6.54) de una barrera de absorción en el origen implica que cuando el sistema sea estable va a existir la solución estacionaria $N = 0$ con probabilidad 1, es decir la probabilidad de extinción es la unidad. En el caso de un sistema inestable existirá una cierta probabilidad de extinción diferente de 1.

A partir de $P(N_f, t_f | N, t)$ se puede definir la probabilidad de extinción $P_{ex}(N)$ cuando se inyectan N partículas en el instante inicial como:

$$P_{ex}(N) = P(0, \infty | N, 0)$$

que sustituido en (6.54) y teniendo presente que la ecuación se hace independiente del tiempo:

$$0 = \sum_i P(i) (\lambda + \mu_\lambda N) N \cdot P_{ex}(N+i-1) + (\lambda + \mu_\lambda N) P_{ex}(N-1) - [(\lambda + \mu_\lambda N) + (\lambda + \mu_\lambda N)] N \cdot P_{ex}(N) \quad (6.58)$$

Esta ecuación tiene una forma similar a la de Kolmogorov directa estacionaria. La condición inicial adecuada será $P_{ex}(0) = 1$, es decir, la probabilidad de extinción cuando no ha habido inyección de partículas es la unidad. Podríamos intentar la solución de (6.58) a través de la definición de una función generadora pero nuevamente nos encontramos que la no linealidad induce problemas que hace que se necesiten nuevos métodos de cálculo. En efecto la presencia de términos en N^2 y en general N^i hacen aparecer en la ecuación correspondiente a la función generatriz derivadas de orden i , necesitando por tanto para su solución i condiciones iniciales. En nuestro caso sólo disponemos de una por lo que se hace irresoluble por este método.

El estudio de cualquier otro tipo de problema con barreras puede ha-

cerse a partir de (6.54) con la debida introducción de la condición de barrera en las probabilidades de transición.

VI.3.B. METODO DE LAS FRACCIONES CONTINUADAS. APLICACION A REACTORES

El método de las fracciones continuadas, que aquí trataremos, ha sido utilizado por Hagg (1979, 1980) para el cálculo de la probabilidad estacionaria a partir de ecuaciones maestras directas. Dicho método presenta ventajas en el cálculo numérico debido a su convergencia rápida y a la posibilidad de conocimiento de las cotas de error (Hagg 1978). Nosotros le utilizaremos aplicado a la ecuación inversa calculando con ello probabilidades de paso y de extinción.

Por simplicidad vamos a suponer un modelo de creación-destrucción en las probabilidades de fisión. Esta restricción no es esencial al método pues se puede generalizar al caso de un número cualquiera de pasos a costa de una complicación adicional como es el uso de matrices (Risken 1980).

a) Probabilidad de extinción en medios explosivos

En el modelo de creación-destrucción la ecuación (6.58) se transforma en:

$$0 = (\lambda + \mu_a N) N \cdot P_{ex}(N+1) + (\lambda + \mu_d N) N P_{ex}(N-1) - [(\lambda + \mu_a N) + (\lambda + \mu_d N)] N \cdot P_{ex}(N) \quad (6.59)$$

Se define ahora la razón entre vecinos $\mathcal{E}(N)$ como

$$\mathcal{E}(N) = \frac{P_{ex}(N)}{P_{ex}(N-1)} \quad (6.60)$$

de suerte que operando en (6.59) se tiene para \mathcal{E} la ecuación:

$$0 = (\lambda + \rho_L N) N \varepsilon(N+1) \varepsilon(N) + (\lambda + \rho_A N) - [\lambda + \rho_L N + \lambda + \rho_A N] N \varepsilon(N) \quad (6.61)$$

que en forma de fracción continuada:

$$\varepsilon(N) = \frac{(\lambda + \rho_A N) N}{[\lambda + \rho_L N + (\lambda + \rho_A N)] N - (\lambda + \rho_L N) N \varepsilon(N+1)} \quad (6.62)$$

Así pues, la probabilidad de extinción será:

$$P_{ex}(N) = \prod_{i=1}^N \varepsilon(i) \quad (6.63)$$

En las figuras VI.1 y VI.2 se presentan los resultados obtenidos numéricamente para el caso de un coeficiente positivo de temperatura en la fisión y nulo en la absorción $\rho_L > 0$; $\rho_A = 0$. El coeficiente viene dado, como es normal, en tantos por ciento de $\lambda(\rho_L)$; $\lambda(\rho_A)$. El factor de multiplicaciónes $K = \frac{\lambda(\rho_L)}{\lambda + \rho_L}$. La diferencia con el caso lineal crece, como es de esperar, con el número de neutrones inyectados. Para 100 neutrones inyectados y un coeficiente de temperatura del 1% existe una diferencia de 10 órdenes de magnitud (Fig.VI1). Es este un caso en el que el fenómeno cooperativo favorece la multiplicación de neutrones. El uso de la probabilidad de extinción como un índice de seguridad en situaciones accidentales (Williams, 1974) deberá tener presente, según los resultados expuestos, los posibles fenómenos de realimentación por temperatura.

b) Probabilidad de extinción en medios estables

En la práctica es usual que los efectos de temperatura actúen estabilizando el sistema de forma que un reactor de este tipo, aún en condiciones supercríticas, presenta estabilidad por lo que la probabilidad de extinción será 1. Existe la posibilidad de que, antes de lograr la extinción, alcance un número de neutrones suficientemente elevado que dañe el sistema. Se puede entonces considerar que este valor umbral no debe ser

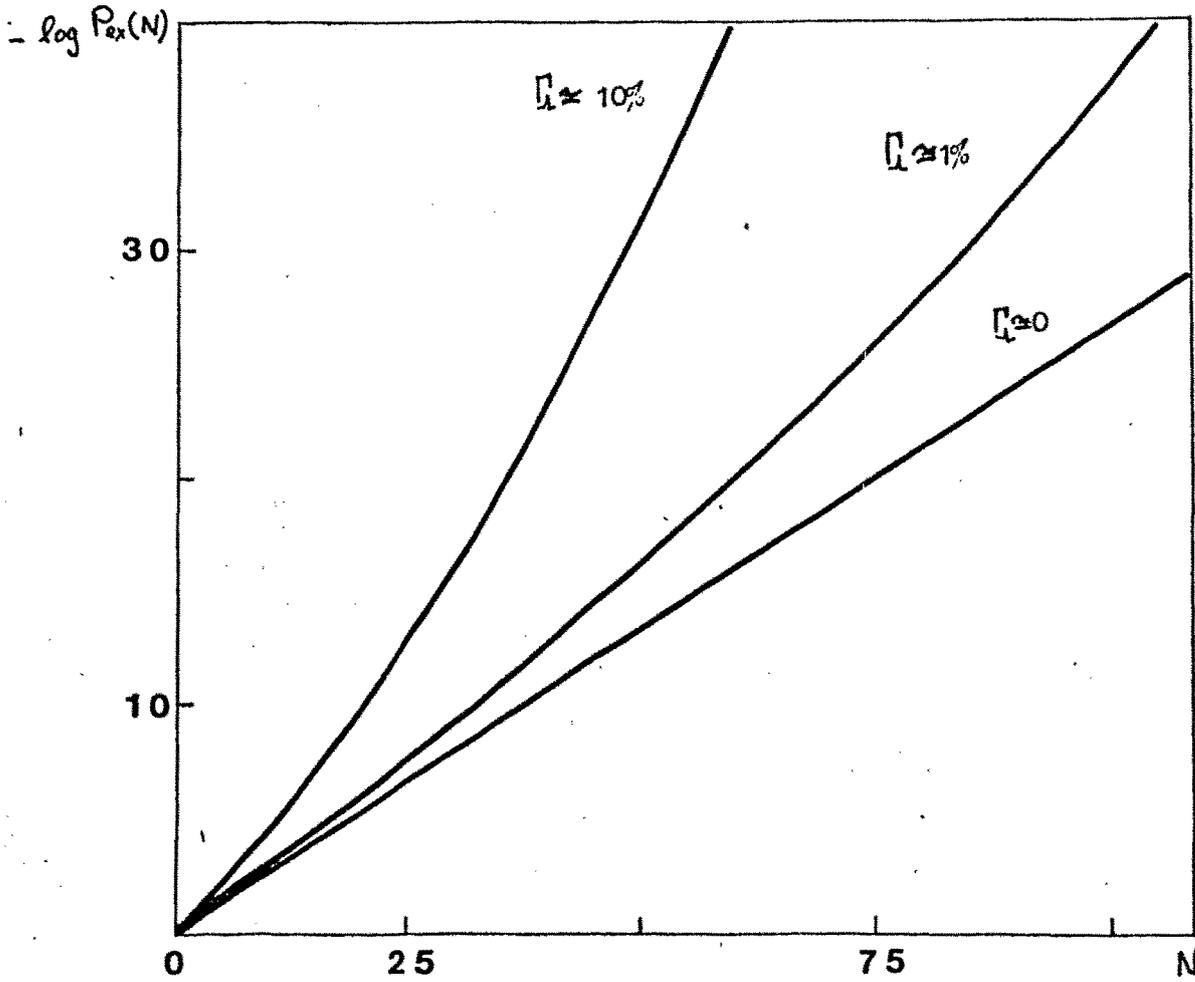


Fig.VI.1.- Probabilidad de extinción con N neutrones inyectados ($K=1.3$)

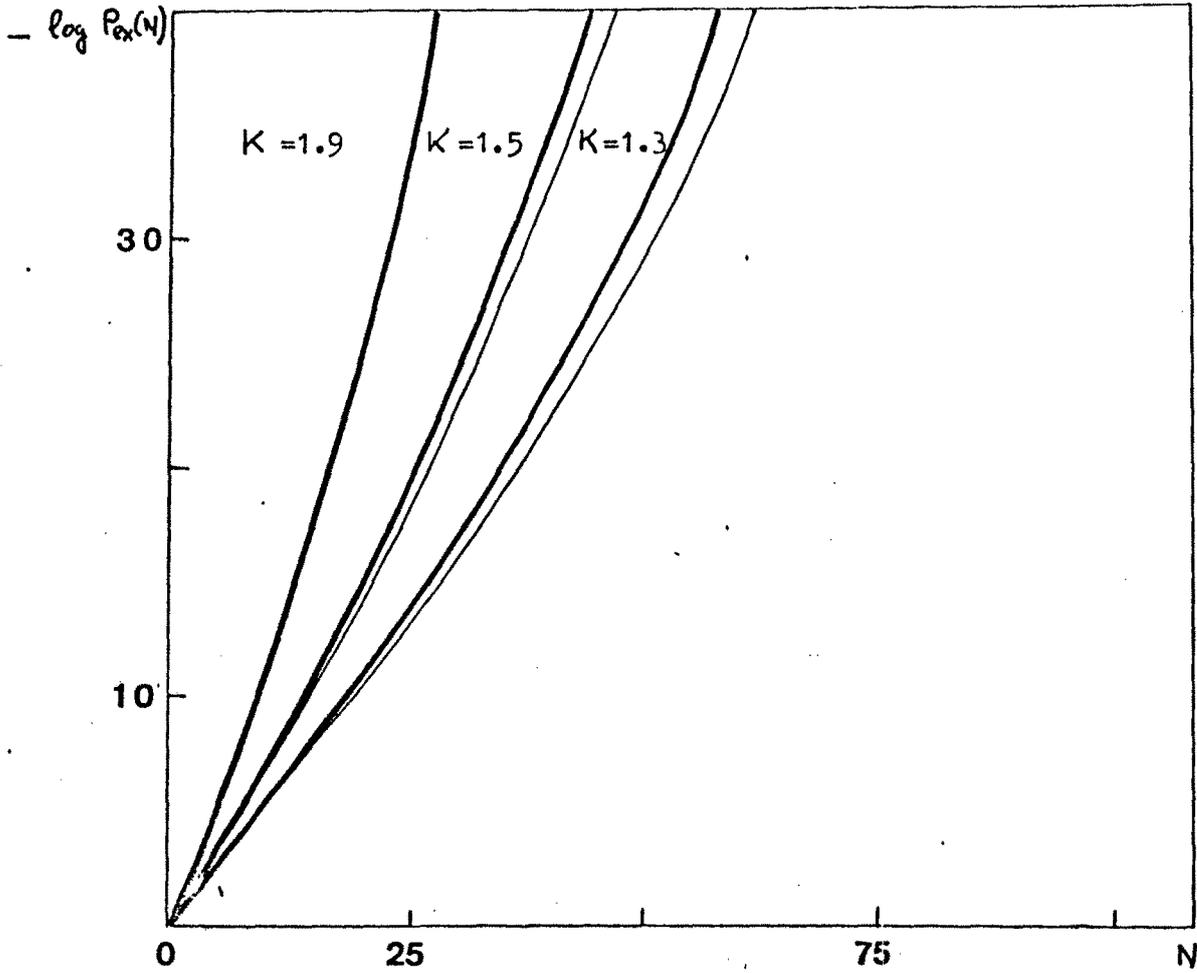


Fig.VI.2.- Probabilidad de extinción con N partículas inyectadas.
(Trazo fino es la aproximación analítica), $\Gamma_1 \approx 10\%$

alcanzado y redefinir una probabilidad de extinción "eficaz" como la probabilidad de extinción sin llegar al umbral crítico.

Utilizando los métodos anteriores se puede calcular esta probabilidad sin más que considerar una barrera absorbente artificial en N_0 (umbral crítico), es decir ahora:

$$\begin{aligned} \omega_{N_0}(N+1|N) &= \gamma(N_0-N) (\lambda + \beta_2 N) N \\ \omega_{N_0}(N-1|N) &= \gamma(N_0-N) (\lambda + \beta_2 N) N \end{aligned} \quad (6.63)$$

De esta manera, cuando $t \rightarrow \infty$ y con $N < N_0$ neutrones inyectados existe una probabilidad de extinción condicionada $P_{N_0}(0, t_f | N, -\infty)$ y una ecuación independiente del tiempo similar a (6.59). Aplicando el método de fracciones continuadas igual que en el caso anterior, ahora con:

$$\epsilon_{N_0}(N_0) = \frac{P_{N_0}(0, t_f | N_0, -\infty)}{P_{N_0}(0, t_f | N_0, -\infty)} = 0 \quad (6.64)$$

es posible el cálculo de soluciones exactas para la probabilidad de extinción condicionada :

$$P_{N_0}(N) = \epsilon_{N_0}(1) \cdot \epsilon_{N_0}(2) \dots \epsilon_{N_0}(N) \quad (6.65)$$

En la figura (VI.3) se representa la probabilidad de extinción condicionada por N_0 para diferentes valores de K . Existe una región en la que la probabilidad de extinción es prácticamente constante y a partir de un cierto $N > N_a$ se hace prácticamente 1. Esto puede interpretarse como que en la inyección de neutrones el sistema puede extinguirse inmediatamente o en caso contrario tiene una probabilidad de alcanzar un estado cuasiestacionario N_a (ver 6.57).

En la figura (VI.4) representamos la probabilidad de extinción condi-

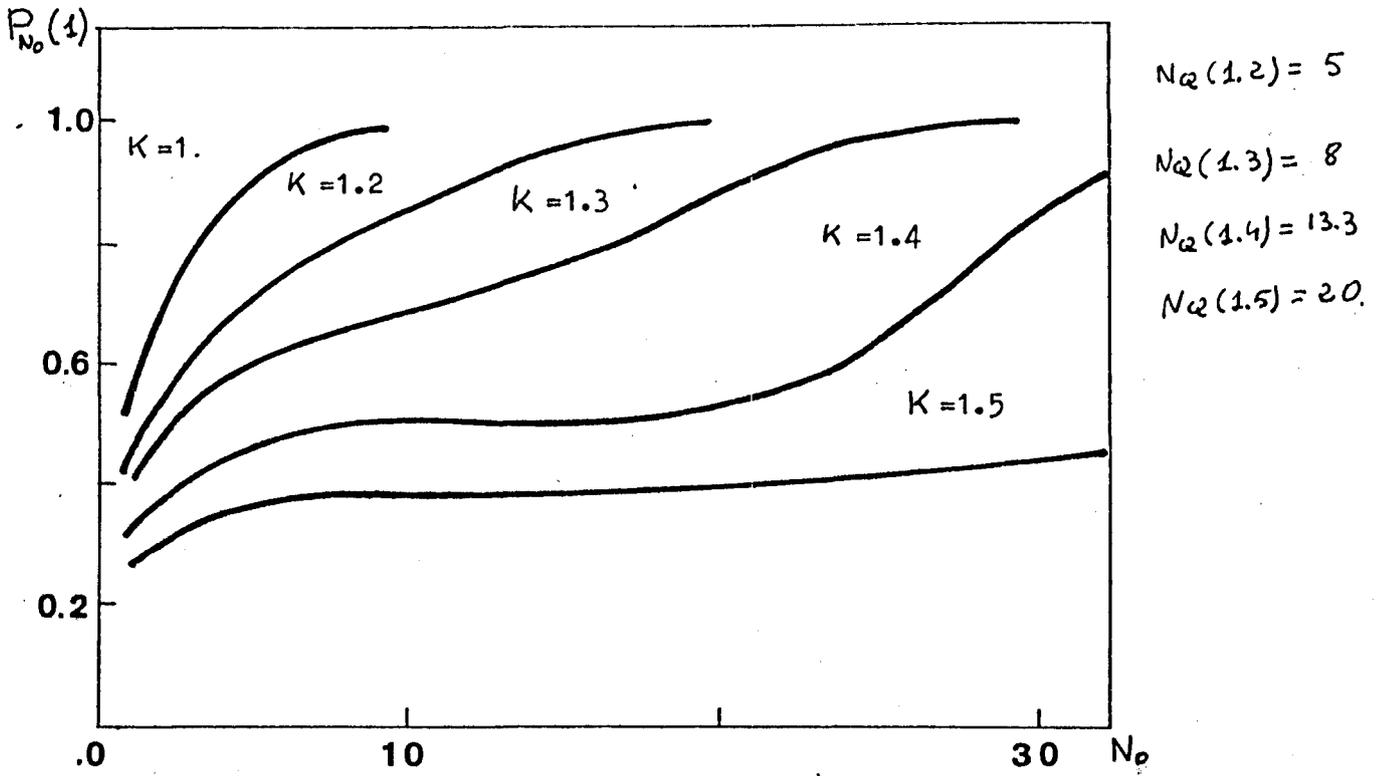


Fig. VI.3.- Probabilidad de extinción condicionada por N_0 , $\bar{P}_\lambda \approx 10\%$.

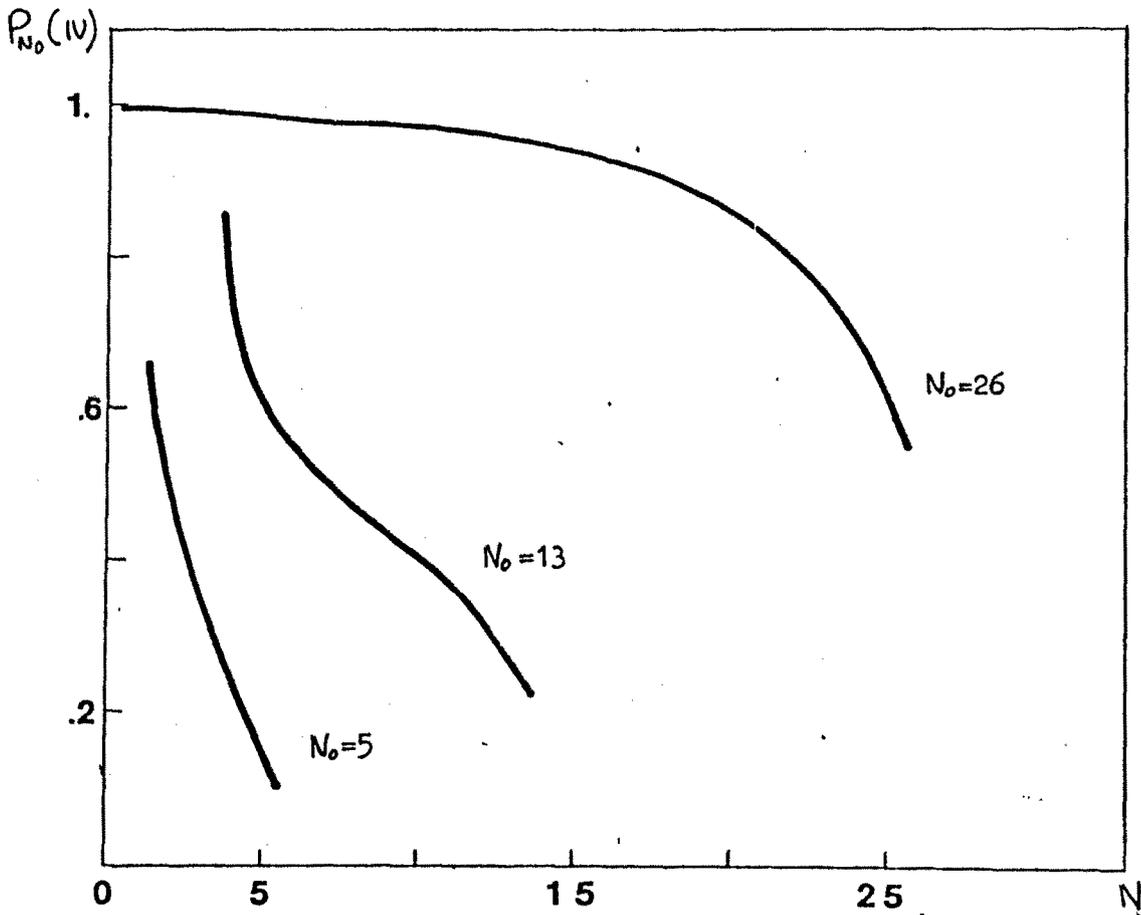


Fig.VI.4.- Probabilidad de extinción condicionada por N_0 en función del número de neutrones inyectados. ($K = 1.4$, $\Gamma_\lambda \approx 10\%$)

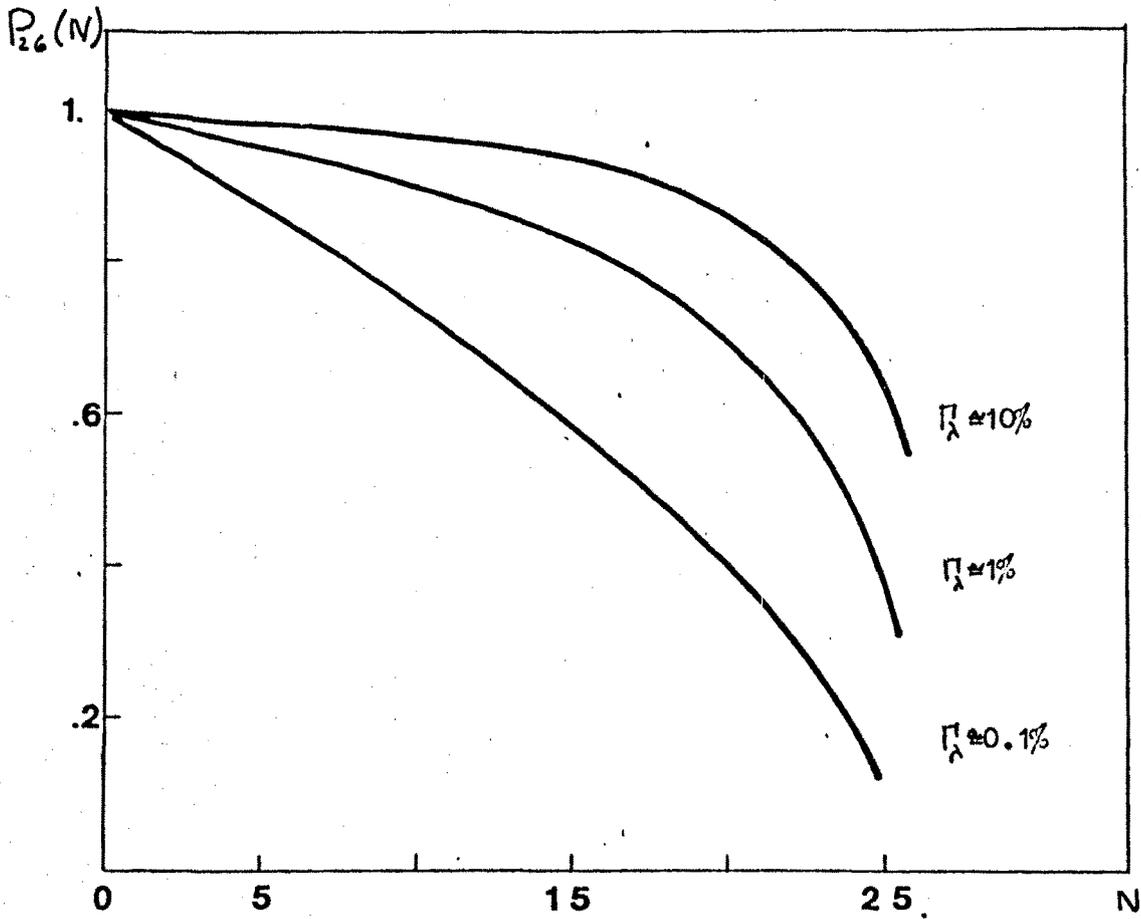


Fig. VI.5.- Probabilidad de extinción condicionada ($N_0=26$), para el caso de un mismo estado cuasiestacionario $N_Q=13.3$. ($K=1.4$)

cionada en función de los neutrones inyectados para un sistema con $N_a = 13,3$. Se observa que para $N_0 > N_a$ la curva decrece con derivada segunda positiva, para $N_0 < N_a$ lo hace con derivada segunda negativa y con $N_0 = N_a$ se encuentra en un caso intermedio entre ambas. En la figura (VI.5) representamos la probabilidad de extinción condicionada por un umbral alto $N_0 > N_a$ para diferentes valores de β . Cuanto menor es el coeficiente la probabilidad de extinción decrece más rápidamente, ello es debido a que los fenómenos cooperativos son menos intensos.

c) Fluctuaciones en la puesta en marcha

En la puesta en marcha de un reactor hay un período de tiempo inicial en el cual las fluctuaciones pueden ser importantes. La influencia de este instante inicial puede persistir en el tiempo con tal intensidad que en idénticas condiciones iniciales y en sucesivos experimentos se consigan encendidos diferentes. Esto cobra mayor interés en los reactores cuya puesta en marcha es por medio de fuentes de neutrones débiles. Un experimento realizado en el conjunto rápido GODIVA (Wimett et al, 1960), puso de manifiesto este hecho: En él se ponía instantáneamente al sistema un poco por encima del nivel crítico y la fuente de neutrones consistía en los neutrones espontáneos y rayos cósmicos. Midiendo el tiempo en el que se consigue la mayor potencia se encuentran dispersiones muy considerables entre unos experimentos y otros (del orden del 20% del tiempo total). El sistema se extingue por sí solo debido a un efecto de feedback de temperatura.

La utilidad práctica del análisis estadístico consiste en calcular el efecto de estas dispersiones de forma que el encendido pueda ser controlado con un amplio margen de seguridad. En palabras de Williams (1974): "La potencia debe llegar a un nivel detectable antes que la reactividad cruce un valor alto no deseable". Un problema biológico similar a éste se encuentra en el control de las epidemias donde existe un tiempo de in-

cubación del portador infeccioso en el cual debe ser posible la detección de la epidemia para que las medidas preventivas puedan ser tomadas (Bailey, ver Williams, 1974)

Con los métodos presentados podemos calcular la probabilidad de alcanzar un determinado umbral N_0 antes de la extinción cuando se inyecta un número de partículas n . Tal probabilidad vendrá dada por:

$$P_{N_0}(n) = P_{N_0-1}(n),$$

representada en la figura (VI.6).

Podemos observar que cuanto mayor es el número de partículas inyectadas el N máximo se acerca más al estado cuasiestacionario N_a . Cuanto menor es el número de partículas inyectadas la probabilidad de ocurrencia de excursiones largas aumenta lo cual esta de acuerdo con los resultados experimentales realizados en GODIVA.

Por último estudiaremos una aproximación del método de funciones continuadas que permite resultados analíticos en modelos con más de un salto. Tal aproximación consiste en suponer en la ecuación para la relación entre vecinos que $\epsilon_n \approx \epsilon_{n+1}$ (Haag 1979). Aplicada esta aproximación a (6.61) se obtiene inmediatamente para la probabilidad de extinción

$$P_{ex}(N) = \prod_{i=1}^N \left(\frac{\lambda + \beta_i i}{\lambda + \beta_i i} \right) \quad (6.66)$$

En la figura (VI.2) se comparan los resultados numéricos con esta aproximación (trazo fino) observándose que existe concordancia (tanto mejor cuanto mayor es K).

Este resultado permite usar esta aproximación para un caso general que contemple en forma arbitraria las probabilidades de fisión. Tomando la ecuación (6.54) independiente del tiempo y utilizando la relación

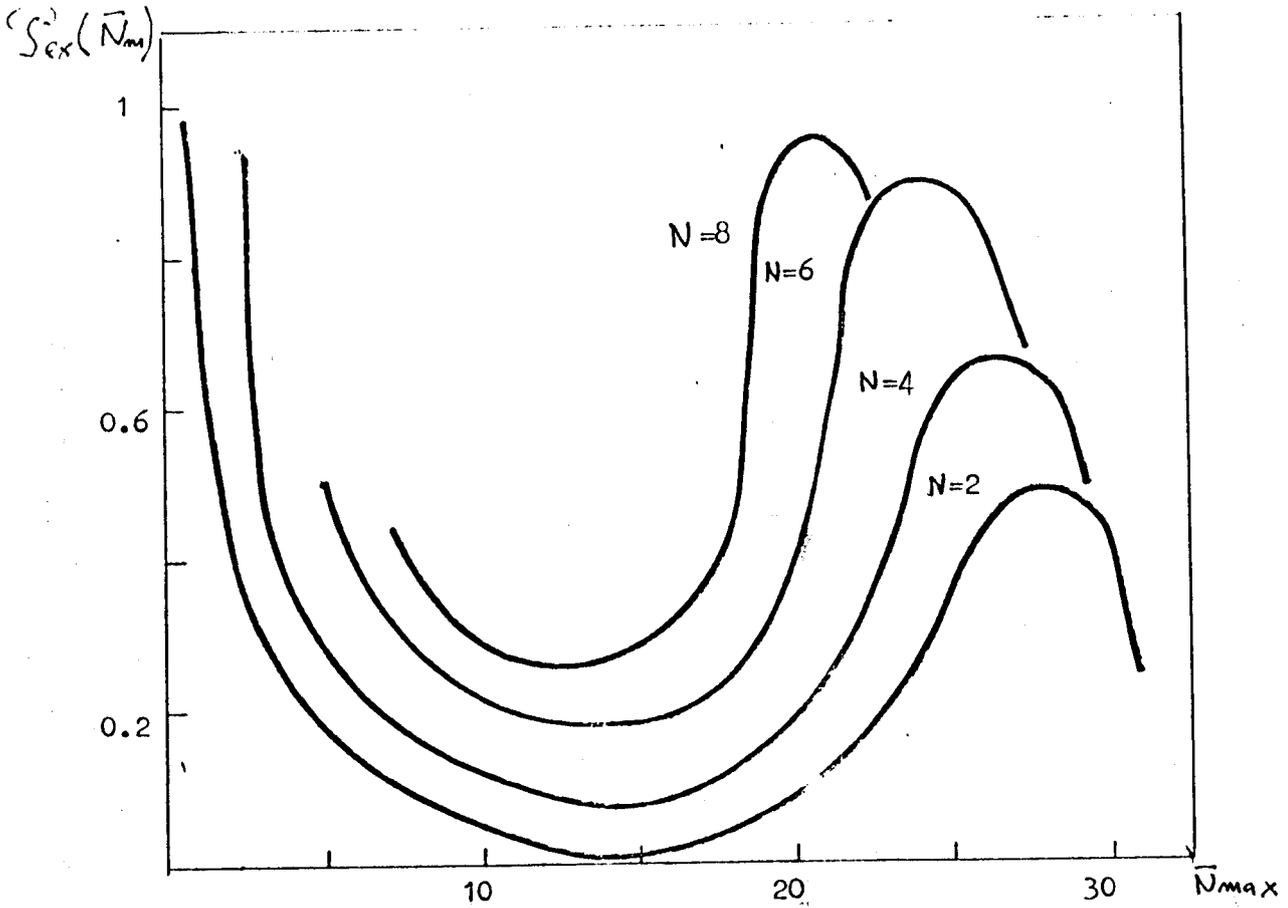


Fig. VI.6.- Probabilidad de alcanzar \bar{N}_{max} antes de extinguirse.

entre vecinos (6.60) obtenemos la ecuación

$$0 = (\lambda + \rho_\lambda N) \sum_i p(i) \xi(N+i-1) \xi(N+i-2) \dots \xi(N) + (\lambda + \rho_\lambda N) - \\ - [(\lambda + \rho_\lambda N) + (\lambda + \rho_\lambda N)] \xi(N) \quad (6.67)$$

Haciendo ahora $x = \frac{\lambda + \rho_\lambda N}{\lambda + \rho_\lambda N}$ y la aproximación anterior $\xi(N+i-1) \approx \xi(N)$ se tiene

$$0 = \sum_i p(i) \xi(N)^i + x - (1+x) \xi(N) \quad (6.68)$$

En medio explosivos, donde la probabilidad de extinción tiene sentido, $x \ll 1$, por lo que podemos resolver aproximadamente (6.68) considerando los primeros términos de $\xi(N) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m x(N)^m$ donde A_m puede ser hallado recursivamente por

$$\sum_i p(i) \sum_{m_1 + \dots + m_i = i} A_{m_1} A_{m_2} \dots A_{m_i} + \delta_{i,1} - A_i - A_{i-1} = 0 \quad (6.69)$$

y siendo los primeros términos

$$A_1 = \frac{1}{1 - p(1)} \quad A_2 = \frac{p(1)(p(2) + p(1) - 1) - (1 - p(1))(p(1) + p(2) - 1 - p(3))}{(1 - p(1))^2} \\ A_3 = \frac{p(1) - p(1) - 1}{(1 - p(1))^2} \quad A_4 = \frac{(2p(1) + p(2) - 1)(p(1)(p(2) + p(1) - 1) - (1 - p(1))(p(1) + p(2) - 1 - p(3)))}{(1 - p(1))^3} \quad (6.70)$$

y la probabilidad de extinción

$$P_{ex}(n) = \prod_{i=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left(\frac{\lambda + \rho_\lambda i}{\lambda + \rho_\lambda i} \right)^m \quad (6.71)$$

Utilizamos ahora las expresiones analíticas (6.66) y (6.71) para lograr algunos resultados cualitativos. Al ser el efecto no lineal cooperativo es de esperar que con un número pequeño de partículas inyectadas no exista diferencia con los resultados lineales. Es interesante conocer a par-

tir de qué número de partículas inyectadas el efecto cooperativo empieza a producirse. Para ello desarrollamos (6.66); ($\Gamma_\lambda = 0$):

$$P_{ex}(n) \approx \frac{\lambda^n}{2^n} \left(1 - \frac{\Gamma_\lambda n(n+1)}{2\lambda} + O\left(\frac{\Gamma_\lambda}{\lambda}\right)^2 \right)$$

y observamos que la contribución del efecto cooperativo se produce cuando

$$n(n+1) \approx \frac{2\lambda}{\Gamma_\lambda} \tag{6.72}$$

Por otra parte, cabe preguntarse de qué orden es el efecto de suponer aproximaciones en las probabilidades de fisión. Desarrollando en (6.71) obtenemos

$$P_{ex}(n) \approx \sum_{m_1, \dots, m_{n-1}} A_{m_1} A_{m_2} \dots A_{m_{n-1}} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\Gamma_\lambda}{2} \sum_{i=1}^{n-1} m_i\right) \tag{6.73}$$

Vamos a comparar en un caso realista; por ejemplo, las probabilidades de fisión para el U^{235} se ajustan a una distribución binomial de cuarto orden de media \bar{x} .

$$p(i) = \binom{4}{i} \left(1 - \frac{\bar{x}}{4}\right)^{4-i} \left(\frac{\bar{x}}{4}\right)^i$$

Si tomamos de media $\bar{x} = 2$, y comparamos los resultados obtenidos en una aproximación de creación-destrucción con la binomial anterior, obtenemos para la probabilidad de extinción con una partícula inyectada una dispersión aproximada del 15%, lo cual indica que la aproximación es válida para considerar resultados cualitativos como los realizados.

APENDICE A:

SOLUCION EXACTA DE UN MODELO ESPACIAL

Uno de los problemas espaciales más estudiados es el del ruido neu-trónico producido por la vibración aleatoria de una barra de control. La primera solución a este problema fué dada por Williams (1970) obteniendo que el carácter estadístico de la vibración aumentaba la absorción de la barra. Casi simultáneamente Barrett (1970) obtenía por métodos diferentes el resultado opuesto. Desde entonces el problema permanece abierto. Los resultados experimentales coinciden con Williams (Lucía 1973), sin embar-go no existe un argumento evidente pues ambas teorías usan un método de linealización cuyo error puede ser del orden de los resultados obtenidos. Siguiendo el modelo de Williams vamos a exponer un método que permite so-luciones exactas para ruidos Markovianos. Sea la ecuación de difusión en un grupo de energías y con una barra absorbente en el origen con una am-plitud de vibración

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \sum_1 \phi - \gamma \delta(x - \xi(t)) \phi + S \quad (A.1)$$

donde se toma un modelo de Galanin para tener en cuenta el efecto absor-bente de la barra. Tomemos la forma integral de (A.1) con condiciones iniciales en $-\infty$ (sin términos transitorios)

$$\phi(x, t) = \int_0^t dx' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(x, t | x', t') S(x', t') - \gamma \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(x, t | x', t') \delta(x' - \xi(t')) \phi(x', t') \quad (A.2)$$

siendo $G(x, t | x', t')$ la función de Green:

$$G(x, t | x', t') = \frac{1}{(4D(t-t'))^{1/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4D(t-t')} - \sum_1 (t-t')\right\} \quad (A.3)$$

multipliquemos esta ecuación (A.2) por $\delta(x - \xi(t))$, desarrollemos y hagamos el promedio respecto al ruido

$$\begin{aligned} \langle \phi(x, t) \delta(x - \xi(t)) \rangle &= \int_0^t dx' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(x, t | x', t') \langle \delta(x - \xi(t)) \rangle S(x', t') - \\ &- \gamma \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(x, t | x', t') \int_{-\infty}^{\infty} dx'' \int_0^t dt'' G(x', t' | x'', t'') \langle \delta(x - \xi(t)) \delta(x' - \xi(t')) \rangle S(x'', t'') \quad (A.4) \\ &S(x'', t'') + \gamma^2 \dots \end{aligned}$$

Ahora supongamos que el ruido es Markoviano estacionario de tal forma que

$$\begin{aligned} \langle \delta(x - \xi(t)) \rangle_{ST} &= \int \delta(x - \xi) \cdot P_{ST}(\xi) d\xi = P_{ST}(x) \\ \langle \delta(x - \xi(t)) \cdot \delta(x' - \xi(t')) \rangle_{ST} &= \int d\xi \int d\xi' \delta(x - \xi) \delta(x' - \xi') \cdot P(\xi, t; \xi', t') = \\ &= P(x, t; x', t') = \omega(x, t/x', t') \cdot P_{ST}(x') \end{aligned} \quad (A.5)$$

donde $P(x, t; x', t')$ es la probabilidad conjunta y $\omega(x, t/x', t')$ la condicionada.

Sustituyendo en la ecuación (A.4) y reagrupando se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \phi(x, t) \delta(x - \xi(t)) \rangle &= A(x, t) = \int_0^t dx' \int_{-\infty}^t dt' G(x, t/x', t') \cdot P_{ST}(x) \cdot S(x', t') - \\ &- \gamma \int_0^t dx' \int_{-\infty}^t dt' G(x, t/x', t') \omega(x, t/x', t') A(x', t') \end{aligned} \quad (A.6)$$

La ecuación (A.6) es una ecuación integral exacta; ahora el valor medio de $\langle \phi \rangle$ en el estado estacionario, suponiendo S constante, cumple:

$$0 = D \frac{\delta^2 \langle \phi \rangle}{\delta x^2} - \sum_i \langle \phi \rangle - \gamma A(x) + S \quad (A.7)$$

con $A(x)$ solución estacionaria de (A.6):

$$\begin{aligned} A(x) &= S P_{ST}(x) \int_{-\infty}^0 dt' \int_0^t dx' G(x, 0/x', t') - \\ &- \gamma \int_{-\infty}^0 dt' \int_0^t dx' G(x, 0/x', t') \omega(x, 0/x', t') A(x') dx' \end{aligned} \quad (A.8)$$

Estas ecuaciones son pues exactas para un ruido $\xi(t)$ Markoviano. El análisis de (A.7), (A.8), para un ruido mas complejo será objeto de futuros trabajos. Por ahora nos limitamos a considerar un ruido dicotómico con un tiempo de correlación $t_c = \frac{1}{\nu}$:

$$P_{ST}(x) = \frac{1}{2} \delta(x - \xi_0) + \frac{1}{2} \delta(x + \xi_0)$$

$$\omega(x, t/x', t') = \frac{1}{2} (1 + e^{-2\nu(t-t')}) \delta(x + \xi_0) + \frac{1}{2} (1 - e^{-2\nu(t-t')}) \delta(x - \xi_0)$$

y sustituimos en (A.8) con $A(x = \pm \xi_0)$:

$$\begin{aligned}
 A(\xi_0) &= \frac{1}{2} S \int_{-\infty}^0 dt' \int_0^{\infty} dx' G(\xi_0, 0 | x', t') - \frac{\delta}{2} \int_{-\infty}^0 dt' (1 + e^{-2\nu t'}) G(\xi_0, 0 | \xi_0, t') A(\xi_0) \\
 &\quad - \frac{\delta}{2} \int_{-\infty}^0 dt' (1 - e^{-2\nu t'}) G(\xi_0, 0 | -\xi_0, t') A(-\xi_0). dt' \tag{A.9} \\
 A(-\xi_0) &= \frac{1}{2} S \int_{-\infty}^0 dt' \int_0^{\infty} dx' G(-\xi_0, 0 | x', t') - \frac{\delta}{2} \int_{-\infty}^0 dt' (1 + e^{-2\nu t'}) G(-\xi_0, 0 | \xi_0, t') A(-\xi_0) dt' \\
 &\quad - \frac{\delta}{2} \int_{-\infty}^0 dt' (1 - e^{-2\nu t'}) G(-\xi_0, 0 | \xi_0, t') A(\xi_0)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo (A.3), haciendo $\kappa = 1$ e integrando obtenemos:

$$\begin{aligned}
 A(\xi_0) &= \frac{S_0 \sqrt{\pi}}{2 \Sigma_1} - \kappa_0 A(\xi_0) - \frac{1}{2} \kappa_1 A(-\xi_0) \\
 A(-\xi_0) &= \frac{S \sqrt{\pi}}{2 \Sigma_1} - \kappa_0 A(-\xi_0) - \frac{1}{2} \kappa_1 A(\xi_0) \tag{A.10}
 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
 \kappa_0 &= \left(\frac{\pi}{8D}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\Sigma_1^{-\frac{1}{2}} + (\Sigma_1 + 2\nu)^{-\frac{1}{2}} \right] \\
 \kappa_1(\xi) &= \left(\frac{1}{4D}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{\xi^2}{D \Sigma_1}\right)^{\frac{1}{4}} K_{\frac{1}{2}}\left(2\sqrt{\frac{\xi^2 \Sigma_1}{D}}\right) - \left(\frac{\xi^2}{D(\Sigma_1 + 2\nu)}\right)^{\frac{1}{4}} K_{\frac{1}{2}}\left(2\sqrt{\frac{\xi^2 (\Sigma_1 + 2\nu)}{D}}\right) \right] \tag{A.11}
 \end{aligned}$$

donde $K_{\frac{1}{2}}$ son las funciones esféricas de Bessel modificadas.

Resolviendo (A.10) tenemos

$$A(\xi_0) = A(-\xi_0) = \frac{S \sqrt{\pi}}{2 \Sigma_1} \left[\frac{1}{1 + \kappa_0 + \frac{1}{2} \kappa_1} \right] \tag{A.12}$$

Para $\xi_0^2 \ll \frac{D}{\Sigma_1}$ desarrollamos las funciones $K_{\frac{1}{2}}$ como

$$K_{\frac{1}{2}}(x) \sim \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-x}; \quad x \ll 1$$

obteniendo para $A(\xi_0)$:

$$A(\xi_0) = \frac{S\sqrt{\pi}}{2\Sigma_1} \left[1 + \left(\frac{\pi}{8D}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \Sigma_1^{-\frac{1}{2}} \left(e^{-2\sqrt{\frac{\xi_0^2 \Sigma_1}{D}} + 1} \right) - (\Sigma_1 + 2\nu)^{-\frac{1}{2}} \left(e^{-2\sqrt{\frac{\xi_0^2 (\Sigma_1 + \nu)}{D} - 1}} \right) \right\} \right]^{-1} \quad (\text{A.13})$$

Esta expresión aumenta con ξ_0 y ν aumentando, concluimos pues a la vista de (A.7) que el efecto de la absorción aumenta con ξ_0 y ν aumentando lo cual está de acuerdo con el resultado original de Williams. En este caso nuestro resultado es exacto.

APENDICE B:

EXTRACCION DE INFORMACION POR CONTAJE

En el capítulo III se ha presentado un método que considera simultáneamente ruido interno y externo en un reactor nuclear. El ruido externo es introducido a través de los coeficientes como una fluctuación paramétrica y la ecuación es promediada por métodos funcionales así como mediante técnicas de cumulantes. El ruido externo puede también presentarse en la misma ecuación maestra como una variable más y así el sistema aparece aumentado en una dimensión. Esta es una descripción alternativa a la anterior que tras una reducción exacta de variables resulta equivalente (Rodríguez 1983E).

Existe una aplicación de esta reducción muy interesante en sistemas físicos cuya información es extraída de forma indirecta mediante detectores. En concreto en reactores nucleares puede tener gran utilidad.

Supongamos un reactor nuclear cuya descripción viene dada por una ecuación maestra que aquí ponemos en forma operacional

$$\frac{\delta P(N,t)}{\delta t} = \hat{L}(N) P(N,t) \quad (B.1)$$

$$\text{con } \hat{L}(N) = \lambda (\hat{E}_N^{+1} - 1) + \sum_i p(i) \lambda (\hat{E}_N^{-i+1} - 1) + S (\hat{E}_N^{+1} + 1); \quad \hat{E}_N^i P(N,t) = P(N+i,t)$$

La información se consigue a través de un detector que cuenta neutrones sin perturbar la dinámica del reactor. Ello puede ser por considerar despreciable la absorción neutrónica del detector o por tratarse de un detector de gas no absorbente. Siendo R el número de cuentas la ecuación maestra en este caso será:

$$\frac{\delta P(N,R,t)}{\delta t} = \hat{L}(N) P(N,R,t) + \lambda_d N (\hat{E}_R^{-1} - 1) P(N,R,t) \quad (B.2)$$

siendo λ_d la tasa de detección por neutrón presente en el sistema. No es difícil ver que (B.2) presenta a N como un ruido externo respecto de R. En efecto, sumando los dos miembros de (B.2) para todos los

valores posibles de R obtenemos (B.1). Físicamente se ve que la evolución de N es independiente de la de R. En la forma de ruido externo paramétrico utilizada en el Cap. III la ecuación (B.2) es equivalente a

$$\frac{\partial P(R,t)}{\partial t} = \lambda \langle N(t) \rangle (\hat{E}_R - 1) P(R,t) \quad (B.3)$$

donde ahora $N(t)$ es el ruido externo.

Suponemos que el proceso de medida comienza en condiciones estacionarias de $N(t)$, lo cual se hace habitualmente en las experiencias. A partir de (B.2) ó (B.3) podemos llegar entonces a una ecuación maestra efectiva para R ya sea usando los métodos del capítulo III (para B.3) o a través de una reducción de variables exacta en (B.2) (Rodríguez 1983E).

Siguiendo las técnicas usuales de reactores nucleares consideramos la ecuación (B.3) en forma de funciones generatrices:

$$G(z,t) = \sum_{R=0}^{\infty} z^R P(R,t)$$

como

$$\frac{\partial G(z,t)}{\partial t} = \lambda \langle N \rangle_r (z-1) G(z,t) + \lambda \langle \delta N \rangle (z-1) G(z,t) \quad (B.4)$$

con $N(t) = \langle N \rangle_r + \delta N$; $\langle \delta N \rangle = 0$

Promediamos ahora $G(z,t)$ utilizando el método de cumulantes de Van Kampen (1974, 1976).

$$\frac{\partial \overline{G(z,t)}}{\partial t} = \lambda \langle N \rangle_r (z-1) \overline{G(z,t)} + \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{i-1}} dt_i \langle \langle \delta N(t) \delta N(t_1) \dots \delta N(t_i) \rangle \rangle \frac{\partial^i}{\partial z^i} (z-1)^{i+1} \overline{G(z,t)} \quad (B.5)$$

Esta ecuación es exacta. Toda la información de $N(t)$ está ahora contenida en $\overline{G(z,t)}$. Su extracción se hará a través de los momentos factoriales de R

$$\frac{d\langle R \rangle}{dt} = \lambda d \langle N \rangle$$

$$\frac{d\langle R(R-1) \rangle}{dt} = 2 \lambda d \langle N \rangle \langle R(t) \rangle + 2 \lambda d^2 \int_0^t dt' \langle \delta N(t) \delta N(t') \rangle dt' \quad (B.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\langle R(R-1)(R-2) \rangle}{dt} = & 4 \lambda d \langle N \rangle \langle R(R-1)(R-2) \rangle + 2 \lambda d \langle N \rangle \langle R(R-1) \rangle + \\ & + 6 \lambda d^2 \int_0^t dt' \langle \delta N(t) \delta N(t') \rangle \langle R(t) \rangle + 6 \lambda d^3 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle \delta N(t) \delta N(t_1) \delta N(t_2) \rangle \end{aligned}$$

Derivando con respecto a t la segunda ecuación de (B.6) obtenemos

$$\frac{d^2 \langle R^2 \rangle}{dt^2} = 2 \lambda d^2 \langle \bar{N} \rangle^2 + 2 \lambda d^2 c(t) \quad (B.7)$$

con $c(t) = \langle \langle \delta N(t) \delta N(0) \rangle \rangle_{ST}$. La ecuación (B.7) es la fórmula de Pluta obtenida de una manera elegante (ver ec. 3.39). A partir de la tercera ecuación es posible la extracción de información para momentos de N de orden superior al segundo. En este sentido la fórmula de Pluta es generalizada. Queremos remarcar el hecho que con la ecuación (B.5) ha sido exactamente transferida toda la información contenida en $N(t)$ a $R(t)$

$$\overline{G(z,t)} = \exp \left\{ \lambda d \langle N \rangle (z-1)t + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(t) (z-1)^n d^n \right\} \quad (B.8)$$

con $a_n(t) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \langle \delta N(t_1) \dots \delta N(t_n) \rangle$

APENDICE C:

COMPROBACION DE MODELOS POR PROPIEDADES ASINTOTICAS

Se ha indicado en el cap. VI que las propiedades asintóticas son particularmente sensibles al modelo y a la aproximación utilizadas. En algunos trabajos (Lindenberg (1979)) se ha sugerido su uso como un mecanismo de comprobación de modelos aunque experimentalmente no haya sido utilizado. En este apéndice vamos a esbozar las implicaciones teóricas y experimentales que lleva implícito el uso de las propiedades asintóticas como medio de comprobación de modelos.

Un parámetro asintótico observable puede ser el tiempo de paso de un determinado umbral suficientemente alejado. De hecho en vibraciones estructurales ha sido empleado por Robson para umbrales no muy asintóticos (ver Williams (1974)), como un método más del cálculo de parámetros.

Las dificultades experimentales, como se puede suponer, son esencialmente debidas al enorme tiempo de observación requerido para su medida.

La expresión del tiempo de paso para umbrales asintóticos es función casi exclusivamente de la probabilidad estacionaria. Como ha sido expuesto por Lindenberg (1975), para un proceso Markoviano, cuando los tiempos de observación son largos el proceso en cada observación se comporta como una variable aleatoria independiente (no está correlacionada con la observación anterior). En el caso de un modelo de creación-destrucción y denotando por $\omega(M | M-1)$ las probabilidades de transición y $P_{ST}(N)$ la probabilidad estacionaria, el tiempo de paso asintótico se escribe aproximadamente, (umbral en m , condiciones iniciales N_0):

$$T_{mp}(N_0) \approx \frac{\sum_{e=0}^{m-1} P_{ST}(e)}{P_{ST}(M-1) \omega(M|M-1)} = \frac{1}{P_{ST}(M-1) \omega(M|M-1)} \quad (C-1)$$

lo cual indica que efectivamente está en función de la probabilidad estacionaria. Para la comprobación del modelo se precisa pues un método que sea capaz de calcular la probabilidad en zonas asintóticas, es decir lejanas del valor de probabilidad máxima en calculo exacto unicamente es po-

sible en casos muy restringidos como pueda ser, para modelos no lineales generales, el de un solo salto en las probabilidades de transición. La revisión de los métodos existentes lleva a las siguientes conclusiones:

- El de funciones generatrices admite soluciones exactas para modelos lineales y cuadráticos con muchos saltos. Sin embargo las probabilidades han de calcularse por derivaciones sucesivas numéricamente, teniendo un límite práctico impuesto por el tiempo de cálculo que se acerca a $N \sim 100$ (Marseguerra 1975).

- El de fracciones continuadas admite soluciones exactas para un salto (Haag (1979)) y para dos en la absorción (Haag 1980).

- El de matrices continuadas se adapta al cálculo numérico con muchos saltos, sin embargo presenta los mismos problemas de tiempo de cálculo que el de fracciones generatrices (Riskin 1980)

Las aproximaciones usuales no se adaptan a cálculos de este tipo pues las propiedades asintóticas, al igual que para los modelos, son sensibles a las aproximaciones. Como ejemplo, se puede comprobar (Blomberg 1979) que los métodos usuales de desarrollo en tamaño (ver III.2) suponen una aproximación de tipo aditivo en el sentido que

$$|P(x) - P_{ap}(x)| \approx \varepsilon = \frac{1}{V}$$

de tal forma que asintóticamente, donde las probabilidades son muy pequeñas, el error en la aproximación puede ser del mismo orden y mayor que la probabilidad misma. Existe una posibilidad analítica interesante que es utilizar un método debido a Gortz (1976). Como demuestra Blomberg, el método de Gortz supone una aproximación de tipo multiplicativo en el sentido que

$$\frac{P(x)}{P_{ap}(x)} \approx |1 - \varepsilon|$$

de forma que reproduce aproximadamente resultados asintóticos. El método de Gortz aplicado a un modelo de creación destrucción informa sobre la validez de las aproximaciones de tipo aditivo. Supongamos en general que las probabilidades de transición vienen dadas por $w(N+1/N) = w_-(N)$ para la fisión y $w(N-1/N) = w_+(N)$ para la absorción. La expresión de la probabilidad exacta puede ser calculada por un método de fracciones continuadas similar al utilizado en VI. 3B y obteniéndose (Haag 1979):

$$P_{ST}(N) = P(0) \cdot \prod_{k=1}^N \frac{w_-(k-1)}{w_+(k)} \quad (C-2)$$

La variable N es extensiva, $m = N/\nu$ y para las probabilidades de transición en N deberá cumplirse (Ver III.2)

$$w(N \pm 1/N) = \nu \omega(m \pm 1/m) \quad (C-3)$$

Ahora tomamos P_{ST} de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} P_{ST}(N) &= P(0) \exp \left\{ \sum_{k=1}^N \frac{w_-(k-1)}{w_+(k)} \right\} = \\ &= P(0) \exp \left\{ \sum_{k=1}^N \ln \frac{w_-(k-1/\nu)}{w_+(k)} \right\} \end{aligned} \quad (C-3)$$

desarrollando en potencias de $\frac{1}{\nu}$

$$\ln \frac{w_-(m-1/\nu)}{w_+(m)} = z_0(m) + \frac{1}{\nu} z_1(m) + o\left(\frac{1}{\nu^2}\right) \quad (C-4)$$

y aplicando la regla de sumación de Euler-McLaurin en el exponente de P_{ST} se obtiene

$$P_{ST}(N) \approx P(0) \cdot \exp \left[\nu \int_0^m z_0(x) dx + \int_0^m z_1(x) dx - \frac{1}{2} z_0(m) \dots \right] \quad (C-5)$$

Con las aproximaciones hechas es claro que va a ser una buena aproximación asintótica.

No es difícil extender esta aproximación al caso de varios saltos en las probabilidades de transición. Suponiendo en este caso una forma similar a (C.5) para la probabilidad y sustituyendo en la ecuación maestra estacionaria (3.43) se obtiene en la aproximación de Gortz la siguiente ecuación:

$$\sum_{r=-1}^I \omega_{(n+r|M)} \{ \exp[r z_0(M)] - 1 \} = 0 \quad (C.6)$$

Esta ecuación ha sido estudiada por Blomberg (1979) concluyendo que solamente admite una solución físicamente aceptable. Puede ser el punto de partida para el cálculo de propiedades asintóticas.

Como un primer paso de aplicación en reactores vamos a aplicarla el caso de dos modelos de creación-destrucción, uno de ellos lineal cuya ecuación maestra será la (3.28) y el otro con efecto cuadrático de temperatura en la absorción cuya ecuación maestra es ahora:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(N,t)}{\partial t} = & (N+1) \left(\lambda + \frac{\mu}{V} (N+1) \right) P(N+1,t) + \lambda (N-1) P(N-1,t) + \\ & + S P(N-1,t) - \left(N \left(\lambda + \frac{\mu}{V} N \right) + N \lambda + \beta V \right) P(N,t). \end{aligned} \quad (C.7)$$

En la siguiente tabla se presentan las soluciones asintóticas para estos dos modelos por los métodos aproximados de Gortz, ecuación lineal de Fokker-Planck y ecuación no lineal de Fokker-Planck (Ver III.2). Se comprueba la gran sensibilidad que la parte asintótica tiene respecto a los modelos y aproximaciones utilizados. Señalamos también que estos cálculos son válidos para la información de probabilidades de accidentes (ver VI. 1) de mucha importancia práctica en reactores nucleares

	Görtz	F.P. lineal	F.P. no lineal
Lineal	$N^{2\mu/\lambda} \left(\frac{\lambda}{\lambda} \right)^N$	$\exp\left\{ \frac{N^2}{4\sigma V \lambda} \right\}$	$N \frac{2\lambda\beta V}{(\lambda+N)^2} \exp\left\{ -\frac{(d-\lambda)}{(\lambda+\lambda)} N \right\}$
Efecto T.	$(\pi M)^{-N} \cdot \bar{M}^{-\frac{\mu+\lambda}{\pi}} \cdot \exp\{N\}$	$\exp\left\{ -\frac{1}{2\pi^2} \mu^2 \right\}$	$M \frac{4\lambda V}{\pi} \cdot \exp(-2N)$

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

CONCLUSIONES

Con el fin de hacer un estudio de las fluctuaciones en reactores nucleares analizamos previamente los dos tipos de ruidos existentes: los internos, descritos por ecuaciones maestras, y los externos por ecuaciones estocásticas.

1.- Utilizamos el concepto de fuente equivalente siguiendo a Ackasu (1977) y con el método de desarrollo en potencias del volumen (System size Expansion) estudiamos la validez de las fuentes equivalentes usadas por diferentes autores. Como conclusión, deducimos que cuando las fluctuaciones escalan con el inverso del volumen, el uso de fuentes equivalentes es correcto. En el caso contrario, dicho uso conduce a errores como los observados en ciertos trabajos de reactores nucleares (Morishima, 1976) (Matthey 1979).

2.- Introducimos en el contexto de reactores nucleares una teoría (San Miguel 1982) para el tratamiento de ruidos externos e internos sin necesidad del uso de fuentes equivalentes (Rodríguez 1983B). Para comprobar su validez y consistencia utilizamos un modelo de creación y destrucción con fuentes de ruido blanco en los parámetros de absorción, fuente y fisión. En los límites de ruido externo ($D = 0$) interno ($V \rightarrow \infty$) ellos se reproducen las descripciones correctas. También como un primer paso en el estudio de ruidos más realistas incorporamos el ruido dicotómico, observando que el efecto de color es estabilizador.

3.- Generalizamos la teoría del ruido externo-interno para el caso de un modelo de reactor puntual general a potencia cero. Con ruidos blancos se obtienen para los momentos y correlaciones expresiones similares a las usuales sin ruido externo pero con la introducción de coeficientes eficaces que son función de la intensidad del ruido. Se tratan también los cambios en las condiciones de estabilidad para el primer y segundo momento observando que un ruido externo siempre desestabiliza el sistema.

4.- Nos servimos de nuestra teoría exacta para estudiar la validez del uso de fuentes equivalentes. Asimismo obtenemos, en función de los parámetros nucleares y del ruido, las regiones de validez de los posibles casos a tener en cuenta en un estudio simultáneo de varios tipos de ruido, discutiendo sus implicaciones en reactores nucleares.

5.- Aplicamos esta teoría de ruido externo-interno a un modelo sin neutrones retardados y con ruidos generales, empleando un método por acumulantes válido en la aproximación del primer orden en la intensidad del ruido. Con ello se aprecian los efectos de color del ruido en la estabilidad de los momentos, generalizando el resultado obtenido previamente con un ruido dicotómico.

En el capítulo IV se estudia diferentes modelos no lineales con efecto de temperatura que tiene en cuenta el funcionamiento del reactor para altas y bajas frecuencias.

6.- Con objeto de estudiar modelos no lineales usamos una imagen mecánico-cuántica que nos permite el análisis cualitativo de las fluctuaciones en reactores con ruidos externos blancos. La forma del potencial equivalente informa sobre la amplitud y tipo de fluctuación. Cuando el ruido es intenso aparecen fluctuaciones anómalas cuyo estudio se hace inabordable por métodos de linealización. Sin embargo, aunque el ruido sea débil las fluctuaciones resultan muy grandes cerca del estado crítico y entonces las condiciones de linealización son muy restrictivas.

7.- Valiéndonos del potencial equivalente se estudia las linealizaciones más comunes en reactores nucleares: usual, logarítmica y estadística. Mediante un ejemplo resoluble exactamente se analiza un tipo de linealización frecuentemente empleada en reactores como es el paso del ruido multiplicativo a aditivo.

8.- Aplicamos los resultados anteriores en tres tipos de modelos de reactores nucleares con acoplamiento de temperatura: con ruido intenso, con ruido débil y baja frecuencia y con ruido débil y frecuencias altas. Definimos cuatro regímenes de funcionamiento del reactor en función de los parámetros nucleares y del ruido. Tres de ellos se corresponden con los estados subcrítico, crítico y supercrítico. El cuarto, que no ha sido considerado hasta ahora, es el del dominio del ruido. Con él logramos explicar las fluctuaciones anómalas observadas en reactores de agua en ebullición, que hasta ahora no ha sido posible debido a su carácter de fenómeno no linealizable. Asimismo logramos conciliar teoría y experiencia en la explicación del fenómeno conocido por "catástrofe de varianza".

9.- Siguiendo con modelos no lineales y efectos de temperatura se analiza la respuesta del reactor con un ruido dicotómico con objeto de apreciar efectos del calor del ruido. Se comparan los acoplamientos de temperatura cuadrático y exponencial (debido al efecto Doppler en las secciones eficaces). La diferencia principal con el tratamiento linealizado es la aparición de una región de fluctuaciones fuertemente asimétricas que crece con la intensidad del ruido. Nuevamente contribuye a explicar los resultados observados experimentalmente.

En el capítulo V se tratan modelos no Markovianos con ruidos en la reactividad (no-lineales paramétricamente), haciendo hincapié en el cálculo de fluctuaciones relativas, tiempos de relajación y funciones de correlación.

10.- Calculamos exactamente varianzas y correlaciones en un modelo puntual sin neutrones retardados, con un ruido en la reactividad Gaussiano de correlación exponencial. Estos resultados son interesantes pues servirán como test de validez de las aproximaciones realizadas en modelos más

complejos (Rodríguez 1983A).

11.- En el estudio de un modelo puntual sin neutrones retardados con ruido Gaussiano de tipo "vibración", utilizamos técnicas funcionales con la aproximación en el primer orden del tiempo de correlación (Hernández, 1983). Analizamos la diferencia con los resultados lineales y la estabilidad inducida por la frecuencia propia de vibración del ruido. Calculamos la densidad espectral y las condiciones de observación del pico de vibración.

12.- Al revisar los últimos trabajos que tratan ruidos no Markovianos en reactores (Quabili 1979, Saito 1979B), demostramos que la hipótesis de causalidad entre el ruido y el número de neutrones, usada en los trabajos anteriores, es incorrecta. Observamos alguna otra incorrección matemática debida al desprecio de algunos términos del orden de la aproximación considerada. Concluimos que para varianzas y funciones de correlación es necesario replantearse nuevamente el problema.

Posteriormente, tratamos modelos puntuales no Markovianos y con neutrones retardados considerando dos tipos de aproximaciones que cubren un amplio margen de aplicaciones.

13.- La primera aproximación es en el primer orden de la intensidad del ruido y admite dos formulaciones: la diferencial, usada por Quabili (1979) y la integro-diferencial, adaptada por nosotros al caso de reactores. Corregimos la ecuación de Quabili y calculamos el valor medio en ambas formulaciones para un ruido con correlación exponencial concluyendo que la ecuación integro-diferencial es válida para una región mayor que la diferencial. Concluimos también que el efecto de color del ruido estabiliza el sistema.

14.- La segunda aproximación es la generalización a dos dimensiones de la utilizada para el ruido vibracional. Con ella hacemos un estudio

sistemático de valores medios, varianzas, fluctuaciones relativas, tiempo de relajación y densidad espectral para un ruido de tipo Ornstein-Uhlenbeck. Analizamos en cada caso las variaciones inducidas por el color del ruido y la forma de la densidad espectral.

En el capítulo VI estudiamos propiedades que implican un conocimiento detallado de la función de probabilidad, introduciendo barreras absorbentes y reflectantes en las ecuaciones maestras que amplían la posibilidad de estudio a propiedades asintóticas generales. En reactores nucleares sólo se había estudiado hasta ahora la probabilidad de extinción y las fluctuaciones en la puesta en marcha en modelos lineales.

15.- Desarrollamos un método para el cálculo de probabilidades asintóticas generales por funciones generatrices, adaptable a los problemas planteados en reactores nucleares lineales. Con la finalidad de comprobar la validez del método lo aplicamos al cálculo de la probabilidad de extinción y primeros tiempos de paso obteniendo resultados correctos.

16.- Estudiamos las probabilidades de extinción y fluctuaciones en la puesta en marcha en un modelo de reactor no lineal. Para ello, generalizamos la probabilidad de extinción condicionada al paso de un umbral y ponemos a punto un método de cálculo por fracciones continuadas. Presentamos la aplicación a un modelo de reactor nuclear con acoplamiento cuadrático de temperatura.

En el apéndice A iniciamos el estudio exacto del problema de vibración de barras en modelos espaciales. En el apéndice B abordamos exactamente el problema de la obtención de información por medio de detectores. Finalmente en el apéndice C se consideran ciertas propiedades asintóticas

muy sensibles al modelo utilizado, lo que podría permitir llevar a cabo identificación de modelos.

PERSPECTIVAS

1.- Siguiendo con la teoría de ruido externo-interno presentada en el Cap. III es posible la generalización a modelos de reactores no lineales y la solución exacta con acoplamiento cuadrático de temperatura en un caso de creación-destrucción. El análisis numérico en la zona de parámetros de criticidad presenta problemas de convergencia por lo que requerirá un análisis más detallado. En trabajos posteriores nos ocuparemos de este problema.

2.- En el futuro será interesante un estudio por simulación analógica y numérica y posterior comprobación experimental de las fluctuaciones anómalas que se producen en la zona que hemos llamado de "dominio del ruido" (Cap. IV). Este interés es general en otros problemas físicos y, en concreto por su evidencia experimental, en reactores nucleares.

3.- La aparición de picos de vibración en las funciones de densidad espectral no es solamente por efectos espaciales sino que además es debida al carácter multiplicativo del ruido (Cap. V). La contribución del efecto multiplicativo en ordenes superiores puede ser calculada por los métodos expuestos en el Cap. V y contribuirá a mejorar las posibilidades de diagnosis en reactores de agua a presión. Ya que los métodos están a punto podremos tratar este problema en un futuro inmediato.

4.- Los problemas de cálculo de propiedades asintóticas son fundamentalmente numéricos. Los métodos expuestos en el Cap. VI y apéndice C pueden ser una base sólida para comenzar un estudio numérico en modelos concretos de reactores nucleares. Las aplicaciones a la comprobación de modelos y cálculo de probabilidad de accidentes pueden ser de gran utilidad en la diagnosis y seguridad nuclear.

5.- En el apéndice A se ha resuelto exactamente un modelo espacial sencillo con ruido dicotómico. Es posible la generalización de esta teo-

ría con ruidos mas realistas y modelos en varios grupos de energía. El disponer de soluciones analíticas en modelos de tipo espacial nos será de gran utilidad para contrastar con las aproximaciones utilizadas en reactores y estudiar su validez.

BIBLIOGRAFIA

- Abramowitz, M., Stegun, A. (Ed.) (1972). Handbook of mathematical functions (Dover).
- Antonopoulos-Domis, M. (1975): J. Inst. Nucl. Eng. 17, 5
- Ackasu, Z. (1961): Nucl. Sci. Engn, 10, 337
- Ackasu, Z. and Osborn R.K. (1966): Nucl. Sci. Eng. 26, 13
- Ackasu, Z. Lellouche, S., Shotkin, H., (1975) Mathematical Methods in Nuclear Reactor Dynamics. Ed. Academic Press
- Ackasu, Z. (1977), J. Stat. Phys. 16, 33
- Albrecht R.W., Grove R.D. y otros (1982). Prog. in Nucl. Energy. 2, 37
- Barrett, P. (1970): Atomkernenergie 16, 285
- Bärts, B. (1975): Ann. nucl. Energy. 2, 107
- Bell, G. (1965): Nucl. Sci. Engn. 21, 39
- Bell and Gladstone (1970): Nuclear reactor theory, Ed. Van Nostrand Reinhold Company
- Blomberg, G. (1979): J. Statistical Physics 25, 1
- Borşwaldt, H., Stegemann D. (1965): Nukleonik, 7, 31
- Borşwaldt (1968): Nuckeonik 11, 76
- Bourret, R.C. (1962): Can. J. Phys. 40, 782
- Bourret, R.C., Frisch U., Pouquet P., (1973): Physica 65, 31
- Budgor, A. (1976): J. Statistical physics, vol. 15, nº 5, 355
- Cassell J.S. and Williams M.M.R., (1969): J. Nucl. Energy 23, 575
- Cohn, C.E. (1960): Nucl. Sci. Eng. 7, 472
- Chaturvedi S., (1982): Phys. Lett. 90A, 444
- Dalfes A. (1966): Nukleonik, 8, 94
- Diven B.C., Martín M.C. et al (1956): Phys. Rev. 101, 1.012
- Edelmann M. (1975): Ann. nucl. energy 2, 161
- Fujita, Y., Ozaki, H. (1982): Progress in Nucl. Energy, 9, 423.
- Fukunushi, K. (1977): Nucl. Sci. Engng. 62, 215.
- Gotoh, Y. (1975): Ann. Nucl. Energy 2, 119. ...
- Görtz, R. y Walls, D.F. (1976): Z. Physik B 25, 427.

- Gradshteyn, I.S., Ryzhik I.M., (1980): Table of integrals, Academic Press
- Graham, R., Schenzle, A. (1982): Phys. Rev. 25A, 1731
- Greef (1975): Ann. nucl. energy 2, 405
- Haag G. Hanggi, P. (1980): Z. Physik B 34, 417.
- Haag G. Hanggi, P. (1980): Z. Physik B 39, 269
- Hänggi, P., F. Rösler, and D. Trautmann (1978), Z. Naturforsch 33a, 402
- Haken (1975): Rev. Mod. Phys. 47, 67
- Hansen G.E. (1960): Nucl. Sci. Engng 8, 709
- Harris (1958): USAEC Report WAPD-TM-190
- Henry (1975): Nuclear Reactor Analysis, Ed. MIT Press. Cambridge
- Hernández-Machado, A. y San Miguel, M. (1983A): "Dynamic properties of non Markovian stochastic differential equations" J. of Math. Phys. (en prensa)
- Hernández-, A. y otros (1983B): "Joint prob. distribution of non-Mark, S,D.E" (Preprint)
- Horsthenke, W. y Brening, L. (1977): Z. Physik B 27, 341.
- Hurtwitz, H. (1963): Nucl. Sci. Engng. 15, 166
- Karmeshu and Bansal H.K. (1975): Nucl. Sci. Engng. 5, 32
- Kataoka (1975): Ann. Nucl. Energy 2, 407
- Kebabze (1975): Ann. nucl. Energy 2, 337
- Kerlin (1974): Nuclear Science and Technology 11. Ed. AP
- Kishida K. (1976): J. Nucl. Sci. Technol B, 19
- Kishida K. (1977): Thesis, Universidad de Osaka.
- Kitchara K., Horsthenke W., Lefever R., Ynaba Y., (1979) Progress of Theoretical Physics 64, 4
- Kosaly G. (1973): Nucl. Energy (Instum, Nucl. Engng) 14, 67
- Kosaly G., Manotti and Neskol (1975): Ann. nucl. Energy 2, 315
- Kosaly G., (1977): Progress in Nuclear Energy 1, 99
- Kosaly G., (1977): Ann. of nucl. Energy 4, 79
- Kubo R., Matsuo K. and Kitahara K. (1973) J. Stat, Phys. 1, 51
- Lamarsh (1965) Nuclear reactor theory, Ed. Addison Wesley

- Lewins, J. (1978): Proc. R. Soc. Lond. A, 362, 537
- Lindenberg, K., Shuler K.E. y otros (1975), Journal of Stat. Physics 12, 3
- Lindenberg, K., Seshadri, V. (1979) Journal of chemical physics, 10, 4075
- Lucia (1973): Atomkernenergie 22, 1
- Malek-Mansour M., y otros: Annals of Physics, 131, 283. (1984)
- Marseguerra, M. (1975): Nucl. Sci. Engng. 56, 16
- Matthes (1965), S. Bd. Heft, 2, 87
- Matsuo (1978): Journal of statistical Physics, 18, 6
- Matthey M. (1979): An. of Nucl. Energy 6, 345
- Moore, M.N. (1959): Nucl. Sci. Eng. 6, 448
- Mori, M. (1965): Progress of Theoretical Physics, vol. 33, n° 3
- Morishima (1973A): J. Nucl. Sci. Technol. 10, 29
- Morishima (1973B): J. Nucl. Sci. Technol. 10, 478
- Nishigori Z. (1976): J. Nucl. Sci. Technol, 13, 708
- Nomura (1975): Annals of Nucl. Energy 2, 379
- Nordholm S. and Zwanzig R. (1975): J. Stat. Phys. 13, 347
- Norelli F., Jorio V.M., Pacilio N. (1975): Ann. nucl. Energy 2, 67
- Novikov E.A. (1965): Soviet Physics JETP 20, 1290
- Orndoff, J.D. (1957): Nucl. Sci. Eng. 2, 450
- Osborn and Jip (1966): "The foundation of neutron transport theory",
Gordon and Breach
- Otsuka M. and Saito K. (1965): J. Nucl. Sci. Technol 2, 40
- Pacilio, N. (1975): Ann. Nucl. Energy. 2, 89
- Pal, L. (1958): Nuovo Cim. Supp., 7, 25
- Pazsit (1977): Atomkernenergie 30, 31, Nuclear Science and Engineering 39, 144
- Procaccia, I., Shaul Mukamel y otros (1978), J. Chem. Phys. 68, 7
- Quabili E.R., Karasulu M. (1979): Ann. Nucl. Energy 6, 133
- Quabili E.R., (1980): Ann. Nucl. Energy, 7, 185

- Risken, H. y Vollmer, H.D. (1979): Z. Physik B, 35, 313
- Risken, H. y Vollmer, H.D. (1980): Z. Physik B, 39, 339
- Rodríguez, M.A. (1982): "Fluctuaciones en Reactores Nucleares" (Comunicación presentada en la "Bienal de Física y Química", Santander)
- Rodríguez, M.A., Pesquera, L. (1983A): J. of Nucl. Sci. and Techn. 2, 174
- Rodríguez, M.A., San Miguel, M. y Sancho, J.M. (1983B): "Density fluctuations in simple reactor models", Annals Nucl. Energy (En prensa).
- Rodríguez, M.A., Pesquera, L. (1983C): "On some methods for non-Markovian stochastic point reactor kinetic equations" (Aceptado en Ann. Nucl. Energy)
- Rodríguez, M.A., San Miguel, M. y Sancho, J.M. (1983D): "Zero power theory of external and internal fluctuations on point reactor kinetics". Preprint.
- Rodríguez, M.A. y Pesquera, L. (1983E): "The external noise in master equations: an alternative method". Preprint.
- Roerdink J.B. (1981): Physica 109A, 23
- Saito, K. (1967): Nucl. Sci. Engng. 28, 384
- Saito, K. (1969): Nucl. Sci. Engng. 37, 316
- Saito, K. (1974): Ann. Nucl. Energy. 1, 31, 107, 209
- Saito, K. (1977): Progress in Nucl. Energy. 1, 241
- Saito, K. (1979A): Progress in Nucl. Energy, 3, 157
- Saito, K. (1979B): Ann. Nucl. Energy, 6, 591
- Saito, K. (1980A): J. Nucl. Sci. Technol., 17, 152
- Saito, K. (1980B): Ann. Nucl. Energy, 7, 83
- Sako, O. y otros (1981): Prog. in Nucl. Energy, 2, 325
- Salmi, U. (1980): Ann. Nucl. Energy, 7, 99
- Sancho, J.M. (1983A): Comunicación personal.
- Sancho, J.M. y San Miguel, M (1983B): "Theory of external noise on the presence of internal fluctuations". Preprint.
- San Miguel, M. y Sancho, J.M. (1980): Phys. Letter 76A, 97
- San Miguel, M. y Sancho, J.M. (1981): Z. Phys. B43.361
- San Miguel, M. y Sancho, J.M. (1982): Phys. Letter 90A, 455

- Schenzle, A. y Brand, A. (1979): Phys. Review A, 4, 29
- Schlögl, F. (1971): Z. Phys. 248, 446
- Seifritz, W. (1970): Atomkernenergie, 16, 29
- Seifritz, W. y Stegemann, D. (1971): Atom. Energy, 2, 129
- Serdula, K.J. (1975): Ann. Nucl. Energy, 2, 287
- Shapiro, V.E. y Loginov, U.M. (1978): Physica, 91A, 563
- Sheff, J.R. (1967): J. Nucl. Sci. Technol. 4, 443
- Seshadri V., West, B. y Lindenberg, K. (1980): J. Chem. Phys. 72, 1145
- SMORN I (1975): Ann. Nucl. Energy. 2
- SMORN II (1977): Progress in Nucl. Energy, 2 y 4
- SMORN III (1982): Progress in Nucl. Energy, 2
- Stratonovich (1966): SIAM J. on Control 4, 362
- Szeless, A. y Ruby L. (1971): Nucl. Sci. Engng. 45, 4
- Terwiel, R. H. (1974): Physica, 74, 248
- Thie, J.A. (1975): Ann. Nucl. Energy, 2, 253
- Uhrig, R. (1970): Random noise techniques in Nuclear Reactor Systems
Ed. Ronald
- Valkó, J. (1977): Prog. in Nucl. Energy, 1, 205
- Van Kampen, N.G. (1961): Can. J. Phys., 39, 551
- Van Kampen, N.G. (1974): Physica 72, 248
- Van Kampen, N.G. (1976A) : Adv. in Chem. Physics 34, 246
- Van Kampen, N.G. (1976B): Phys. Rep. 24, 171 (1176)
- Van Kampen, N.G. (1981): Journal of Statistical Physics 25, 3
- Weidlich, W. (1978): Z. Physik B, 30, 345
- West, B.J., Lindenberg, K. y Seshadri, V.J.: J. Chem. Phys. 72, 1151 (1980)
- Watson, F. (1979): Revista Brasileira de fisica, 2, 2
- Williams, M.M.R. (1970): Nucl. Sci. Engng. 40, 144
- Williams, M.M.R. (1971): J. Nucl. Energy, 25, 563
- Williams. M.M.R. (1974): Random processes in Nuclear Reactors, Ed. Pergamon Press, Oxford.

- Williams, M.M.R. (1979): Ann. Nucl. Energy, 6, 463
- Williams, M.M.R. (1982): Prog. Nucl. Energy, 2, 349
- Wimett, T.F. y otros (1960) : Nucl. Sci . Engngn, 8,691