

Universidad de Cantabria

Tesis Doctoral

# FORMACIÓN DE IMÁGENES EN ÓPTICA ADAPTATIVA

Vidal Fernández Canales

## Capítulo 8

# ESTADÍSTICA DE FOTONES

En gran número de aplicaciones la energía que, proveniente del objeto, alcanza el detector es muy escasa. Esto puede deberse a múltiples causas: lejanía de la fuente, escasa potencia de ésta, abertura limitada para evitar aberraciones, absorción por el medio o por alguna interfase que separe objeto y detector... En estos casos se emplean detectores como cámaras CCD o fotomultiplicadores que amplifican la débil señal luminosa y la convierten en una señal eléctrica. Ciertos dispositivos son tan sensibles que la detección se efectúa fotón a fotón. Las leyes de la mecánica cuántica aseguran que la detección de fotones es un proceso estocástico, aunque la energía que llegue al detector sea constante. En el caso de frentes de onda que atraviesan la atmósfera y se detectan en condiciones de baja luminosidad se tiene un doble proceso estocástico: por un lado las fluctuaciones aleatorias del índice de refracción de la atmósfera provocan que la intensidad que llega al

detector sea una variable aleatoria, cuya función densidad de probabilidad se describió en el capítulo anterior; en segundo lugar, la detección de esta señal luminosa (es decir, la interacción de la luz con la materia del detector) es otro proceso estocástico. En este capítulo se describe la estadística del número de fotones detectado en función del grado de corrección de los efectos de la atmósfera que se logra usando un sistema de óptica adaptativa.

## 8.1 Función densidad de probabilidad del número de fotones sin corrección

En este apartado se calcula la estadística del número de fotones detectados en el caso de corrección nula. En primer lugar se describe la distribución de Poisson que aparece en el proceso estocástico de la detección de fotones (Saleh 1978). A continuación se combina este resultado con la distribución exponencial de la intensidad luminosa para obtener la función densidad de probabilidad del número de fotones.

### 8.1.1 Señal de intensidad constante

Sea un detector al que llega una intensidad luminosa constante. Se considera que el tiempo de cuenta  $T$  es suficientemente pequeño para que el número medio de fotones detectado en un intervalo de cuenta no sea alto. El número de cuentas en un intervalo  $[t_0, t_0+T]$  sigue una distribución de Poisson:

$$p(n) = \frac{W^n}{n!} e^{-W} \quad (8.1)$$

donde  $W > 0$  se relaciona con la intensidad instantánea clásica mediante:

$$W = \frac{\eta}{h\nu} \int_{t_0}^{t_0+T} I(t) dt \quad (8.2)$$

donde  $\eta$  es la eficiencia cuántica del detector y  $h\nu$  la energía media de un fotón. El parámetro  $W$  es el único parámetro necesario para describir la distribución. Para no utilizar una notación excesivamente complicada se identifican en adelante  $W$  y la intensidad luminosa. En la figura 8.1 se muestra la distribución de Poisson para diversos valores del número medio de fotones  $W$ . La distribución evoluciona al crecer el valor medio desde una forma monótona decreciente similar a la exponencial a una campana gaussiana. Para completar el análisis de la distribución se ofrece su función generadora de momentos:

$$Q_n(s) = \exp\left[I(e^{-s} - 1)\right] \quad (8.3)$$

### 8.1.2 Estadística tras la propagación por la atmósfera

El número de fotones que se detecta en un punto del plano imagen de un telescopio situado sobre la superficie terrestre es una variable aleatoria, debido a los efectos de la atmósfera y al proceso de detección. Su función densidad de probabilidad se puede obtener de la función densidad de probabilidad de la intensidad luminosa en el plano imagen, descrita en el capítulo 2:

$$p(n) = \int_0^{\infty} p(I) p(n/I) dI \quad (8.4)$$

La propagación del frente de onda a través de la atmósfera y la detección de la señal son procesos estocásticos independientes. Por tanto, (8.4) se puede escribir:

$$p(n) = \int_0^{\infty} p(I) p(n) dI = \int_0^{\infty} p(I) \frac{I^n}{n!} e^{-I} dI \quad (8.5)$$

Es decir, la función densidad de probabilidad del número de fotones que se detecta en un punto del plano imagen de un telescopio es igual a la transformada de Poisson de la función densidad de probabilidad de la intensidad luminosa en dicho punto. Sustituyendo (2.14) en (8.5) se tiene que:

$$p(n) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\langle I \rangle} \exp\left(-\frac{I}{\langle I \rangle}\right) \frac{I^n}{n!} e^{-I} dI \quad (8.6)$$

La transformada de Poisson de la función exponencial se denomina distribución de Bose-Einstein, y su forma analítica es:

$$p(n) = \frac{\langle I \rangle^n}{(1 + \langle I \rangle)^{n+1}} \quad (8.7)$$

Su función generadora de momentos es (Saleh 1978):

$$Q_n(s) = \frac{1}{1 + \langle I \rangle - \langle I \rangle e^{-s}} \quad (8.8)$$

El promedio y varianza de esta distribución resultan:

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \langle I \rangle \\ \text{Var } n &= \langle I \rangle + \langle I \rangle^2 \end{aligned} \quad (8.9)$$

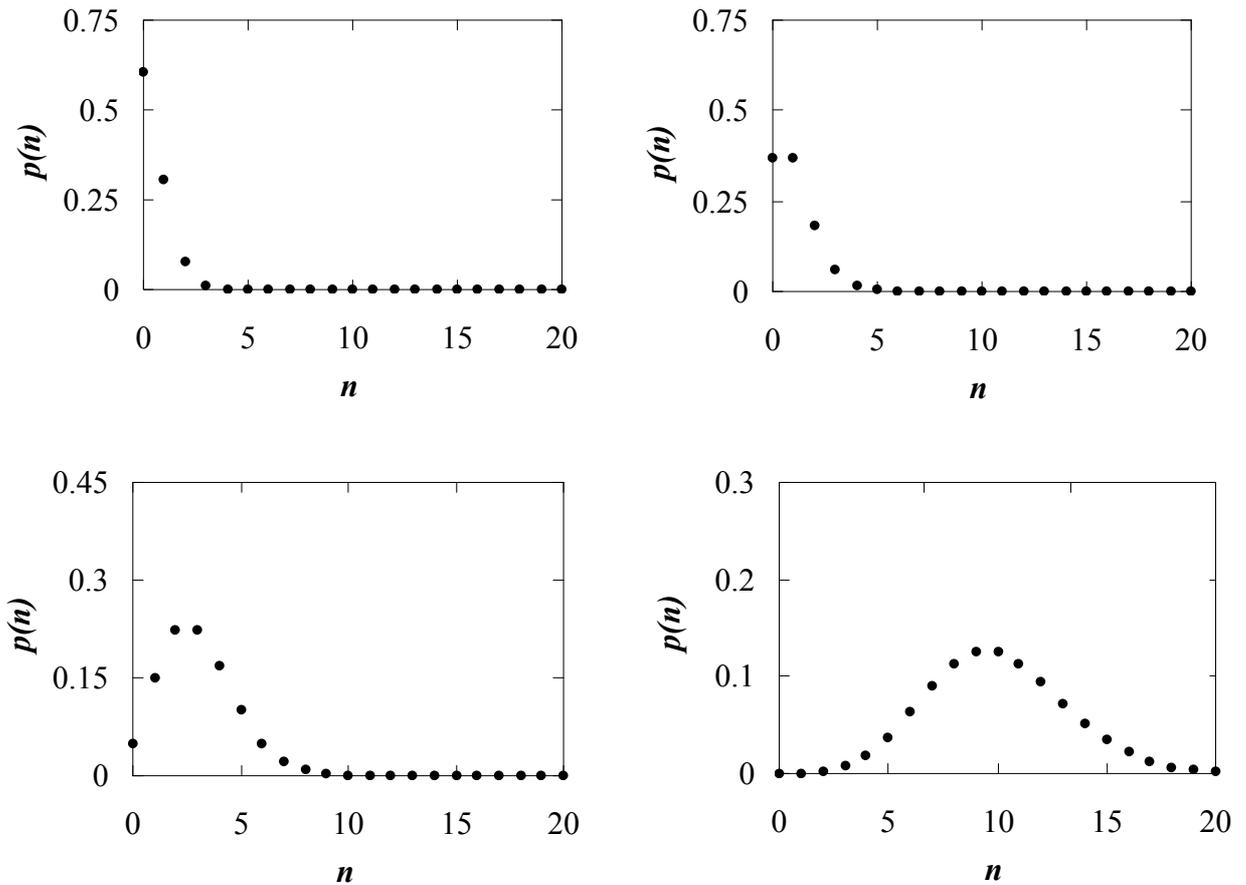


Figura 8.1 Distribución de Poisson para diversos valores del valor medio del número de fotones  $W$ . De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo,  $W=0.5, 1, 4$  y  $10$  fotones/ intervalo de cuenta.

## 8.2 Estadística en corrección parcial

En este apartado se calcula la estadística del número de fotones detectados en el caso de corrección parcial, combinando la distribución de Poisson con la distribución de la intensidad luminosa en el punto central del plano imagen hallada en el capítulo previo. Los resultados fundamentales se comprueban comparando los valores teóricos con los obtenidos por simulación.

### 8.2.1 Distribución exacta

Tras el proceso de corrección, la función densidad de probabilidad del número de fotones que se detecta en un punto del plano imagen de un telescopio dotado con un sistema de óptica adaptativa sigue siendo igual a la transformada de Poisson de la función densidad de probabilidad de la intensidad luminosa en dicho punto. En el capítulo anterior se ofreció un amplio estudio de la distribución de la intensidad en corrección parcial. La transformada de Poisson de la función densidad de probabilidad exacta (7.20) que ofrece el modelo de formación de la imagen tiene la forma:

$$p(n) = \frac{1}{4\pi\sigma_r\sigma_i} \times \int_0^\infty \frac{1}{\langle I \rangle} \exp\left(-\frac{I}{\langle I \rangle}\right) \frac{I^n}{n!} e^{-I} dI \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left[-\frac{1}{2} \left( \frac{(\sqrt{I} \cos \theta - \langle A_r \rangle)^2}{2\sigma_r^2} + \frac{(\sqrt{I} \sin \theta)^2}{2\sigma_i^2} \right)\right] d\theta \quad (8.10)$$

Todos los inconvenientes derivados del hecho de que (7.20) sólo se pueda calcular de forma numérica se multiplican en (8.10) al tener que realizar dos integraciones en lugar de una. La forma de (8.10) no permite obtener a primera vista información sobre sus propiedades. Tan sólo la integración numérica de cada caso proporciona información sobre la estadística del número de fotones. Por tanto, es conveniente utilizar la distribución de Rice, porque se ha demostrado que ofrece resultados casi idénticos a los de la función densidad exacta (7.20).

### 8.2.2 Distribución de Laguerre

La transformada de Poisson de la distribución de Rice (7.26) es la distribución de Laguerre:

$$p(n) = \frac{(2\sigma^2)^n}{(1+2\sigma^2)^{n+1}} \exp\left(-\frac{a^2}{1+2\sigma^2}\right) L_n\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2(1+2\sigma^2)}\right) \quad (8.11)$$

donde  $L_n$  es el polinomio de Laguerre de orden  $n$ . Los parámetros de la distribución son los mismos de la distribución de Rice que se calculan en (7.28) a partir de los parámetros de la distribución exacta, o lo que es lo mismo, a partir de la varianza residual y del parámetro de Fried generalizado (Cagigal y Canales 1999, Canales y Cagigal 1999b,c).

La función generadora de momentos de esta distribución es:

$$Q_n(s) = \frac{\exp\left[\frac{a^2(e^{-s}-1)}{1+2\sigma^2-2\sigma^2e^{-s}}\right]}{1+2\sigma^2-2\sigma^2e^{-s}} \quad (8.12)$$

El promedio y varianza del número de fotones son, en función de los parámetros de la distribución:

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= a^2 + 2\sigma^2 \\ \text{Var } n &= a^2 + 2\sigma^2 + (2\sigma^2)^2 + 2a^2(2\sigma^2) \end{aligned} \quad (8.13)$$

Como se explicó en el capítulo anterior, el valor medio de la intensidad luminosa suele considerarse un parámetro conocido al describir la estadística de la intensidad luminosa (Goodman 1984). Lo mismo ocurre en este caso con el promedio del número de fotones (normalizado). Se aproxima el parámetro  $a^2$  por (7.33) y la distribución de fotones queda:

$$p(n) = \frac{(\langle n \rangle - a^2)^n}{(1 + \langle n \rangle - a^2)^{n+1}} \exp\left(-\frac{a^2}{1 + \langle n \rangle - a^2}\right) L_n\left(-\frac{a^2}{(\langle n \rangle - a^2)(1 + \langle n \rangle - a^2)}\right) \quad (8.14)$$

donde se recuerda que el parámetro  $a^2$  sólo depende de la varianza residual del frente de onda. En la figura 8.2 se muestra la distribución de fotones (8.14) para diversos grados de corrección, y se compara con valores simulados. Se observa que la distribución teórica ajusta el histograma normalizado con excelente precisión. La distribución de Laguerre

evoluciona desde una función similar a la Bose-Einstein para bajos niveles de corrección hacia una distribución cuya forma se asemeja a una gaussiana.

En la figura 8.3 se compara el valor de la varianza del número de fotones simulada con el valor teórico para la distribución de Laguerre predicho en (8.13). De nuevo se comprueba que los valores teóricos y simulados coinciden.

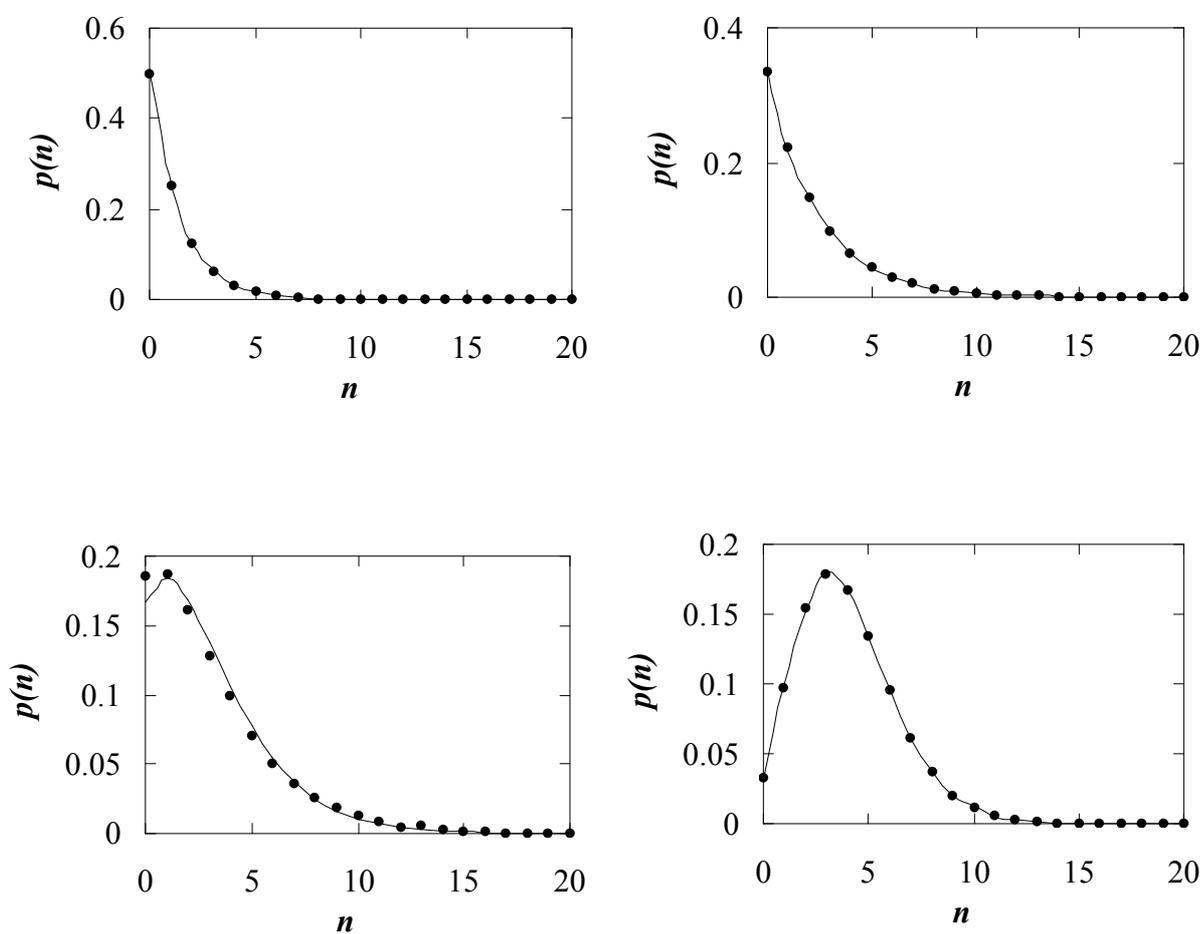


Figura 8.2 Distribución de fotones (8.14) (línea continua) para diversos grados de corrección, de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, 11, 21, 41 y 81 modos corregidos. Se compara con histogramas normalizados obtenidos por simulación (puntos). El valor de  $D/r_0$  es 38.4.

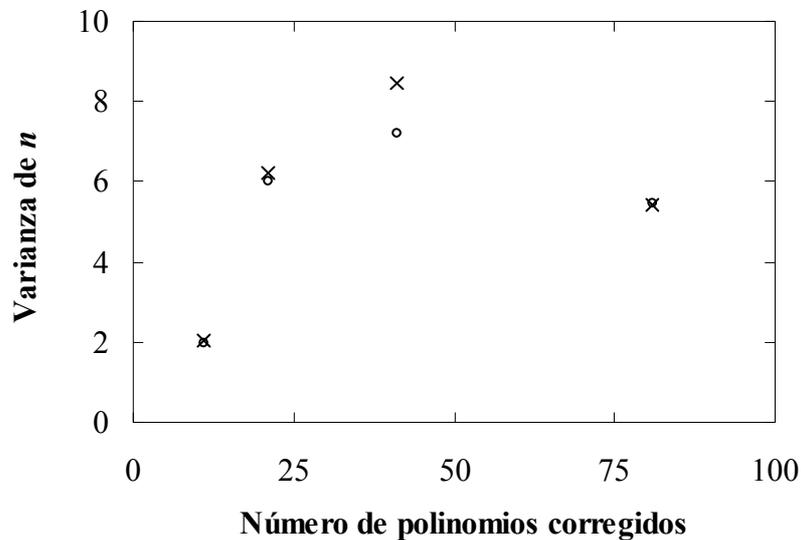


Figura 8.3 Varianza del número de fotones simulada (cruces) comparada con el valor teórico (puntos) que predice la distribución de Laguerre en (8.13).

### 8.2.3 Aproximación de la distribución de Laguerre

En el caso de corrección de bajo orden la varianza residual es grande y  $a^2$  es despreciable, por lo que la función densidad (8.14) tiende a la distribución de Bose-Einstein (8.7). En este rango de corrección, se podría aproximar la distribución tomando los primeros términos del desarrollo del polinomio de Laguerre. Sin embargo, existe otra forma de hallar una aproximación de la estadística de fotones en baja corrección. En lugar de aproximar la función densidad de fotones se puede realizar la transformada de Poisson de la función densidad de la intensidad aproximada (7.36), válida para un escaso número de modos corregidos. De este modo se mantiene la coherencia con el capítulo anterior y se divide la función densidad en un término correspondiente a atmósfera sin corrección y otro que incluye todo el efecto de la compensación. Por tanto, aproximaremos (8.14) para el caso de baja corrección realizando la transformada de Poisson de la aproximación (7.36) de la distribución de Rice:

$$p(n) \approx \int_0^{\infty} \frac{1}{\langle I \rangle - a^2} \exp\left(-\frac{I + a^2}{\langle I \rangle - a^2}\right) \left(1 + \frac{a^2 I}{(\langle I \rangle - a^2)^2}\right) \exp\left(-\frac{I}{\langle I \rangle}\right) \frac{I^n}{n!} e^{-I} dI \quad (8.16)$$

El primer sumando es la transformada de Poisson de una distribución exponencial, es decir, una distribución de Bose-Einstein. El segundo es la transformada de una distribución  $\chi_4^2$ , que proporciona una distribución binomial negativa, en la que se recoge todo el efecto de la compensación con el sistema de óptica adaptativa:

$$p(n) \approx \frac{(\langle I \rangle - a^2)^n}{(1 + \langle I \rangle - a^2)^{n+1}} \exp\left(-\frac{a^2}{\langle I \rangle - a^2}\right) \left(1 + \frac{(n+1)a^2}{(\langle I \rangle - a^2)(1 + \langle I \rangle - a^2)}\right) \quad (8.17)$$

Sin incluir los factores de normalización, se analiza con brevedad la distribución binomial negativa. Su función generadora de momentos es:

$$Q_n(s) = \frac{1}{(1 + \langle I \rangle - \langle I \rangle e^{-s})^2} \quad (8.18)$$

El promedio y varianza de esta distribución son dos veces los correspondientes a la distribución de Bose-Einstein:

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= 2(\langle I \rangle - a^2) \\ \text{Var } n &= 2\left[(\langle I \rangle - a^2) + (\langle I \rangle - a^2)^2\right] \end{aligned} \quad (8.19)$$

En la figura 8.4 se muestra la distribución de fotones (8.17) para bajo grado de corrección, y se compara con valores simulados. Se observa que la distribución teórica reproduce el histograma normalizado en las condiciones elegidas, en las que la función es bastante similar a la Bose-Einstein.

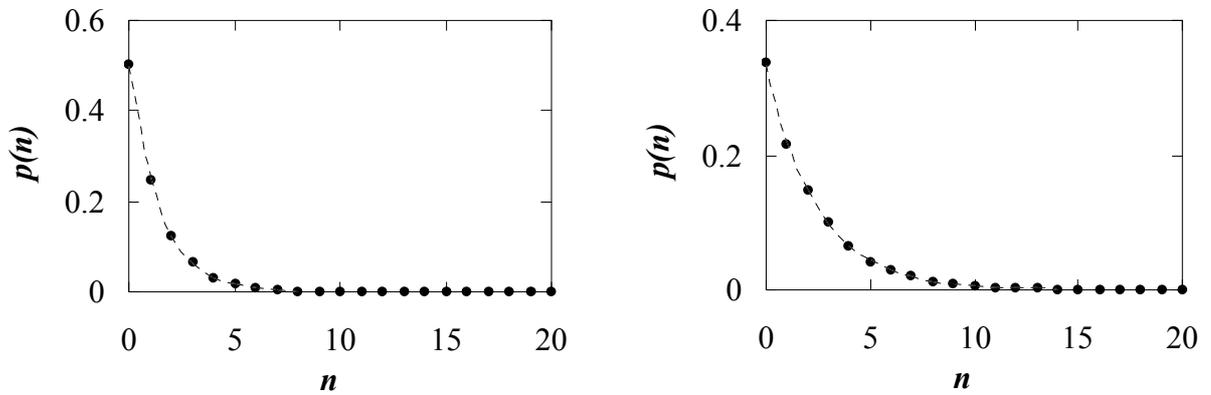


Figura 8.4 Distribución de fotones aproximada (8.17) (línea discontinua) comparada con valores simulados (puntos). De izquierda a derecha 11 y 21 modos corregidos. El valor de  $D/r_0$  es 38.4.

### 8.2.4 Evolución con la posición en el plano

Hasta ahora se ha descrito la estadística de fotones en el punto central del plano imagen, a partir de la distribución de la intensidad luminosa en dicho punto. Como se explicó en el apartado 7.4, es sencillo generalizar la función densidad de la intensidad a todo el plano. En cada punto  $P'$  del plano imagen la distribución de fotones es la transformada de Poisson de la distribución de Rice (7.38), es decir, una distribución de Laguerre, similar a (8.14) pero con los parámetros correspondientes al punto  $P'$ :

$$p(n_{P'}) = \frac{(\langle n_{P'} \rangle - a'^2)^{n_{P'}}}{(1 + \langle n_{P'} \rangle - a'^2)^{n_{P'} + 1}} \exp\left(-\frac{a'^2}{1 + \langle n_{P'} \rangle - a'^2}\right) L_n\left(-\frac{a'^2}{(\langle n_{P'} \rangle - a'^2)(1 + \langle n_{P'} \rangle - a'^2)}\right) \tag{8.20}$$

donde  $a'$  se obtiene de (7.33) teniendo en cuenta que la varianza residual se calcula usando (7.37). En la figura 8.5 se muestra la función densidad de probabilidad en varios puntos del plano imagen con unas condiciones de atmósfera y grado de compensación fijos:  $D/r_0=38.4$  y 81 modos corregidos. Se elige este alto grado de compensación para estudiar la evolución desde una varianza residual baja (punto central) hasta una varianza

residual elevada (puntos de la periferia). Se compara con los histogramas simulados. Los valores simulados son fielmente reproducidos por la función teórica (8.20). Se observa que la evolución al alejarse del centro es similar a la observada en un punto fijo al disminuir el grado de corrección. En el punto central la función densidad se asemeja a una campana porque el grado de corrección es alto. Sin embargo, las funciones de puntos alejados van tendiendo a una distribución del tipo Bose-Einstein. Por consiguiente, tanto el método de simulación que se ha utilizado en este trabajo como la expresión (8.20) confirman un resultado fundamental que fue sugerido por primera vez por (Roddier y Roddier 1986): la imagen en corrección parcial se compone de un pico central rodeado por un halo de *speckle* (ver capítulo 6).

### 8.3 Conclusiones

Se ha obtenido la función densidad de probabilidad del número de fotones en cualquier punto del plano imagen como la transformada de Poisson de la *PDF* de la intensidad luminosa. Se ha desarrollado una expresión en el caso de la distribución exacta de la  $P(I)$ , que requiere realizar una doble integración por métodos numéricos. Para evitar este problema se utiliza la distribución de Rice para la intensidad, con lo que se deduce que el número de fotocuentas sigue una distribución de Laguerre. Su forma es muy similar a la distribución de Bose-Einstein en el halo de *speckle*, y se asemeja a una función de corte gaussiano al acercarse al centro del pico de la mancha de Airy. Idéntica evolución se obtiene al aumentar el grado de compensación en un punto fijo. Por último se ha desarrollado una aproximación de la distribución de Laguerre para el caso de baja compensación.

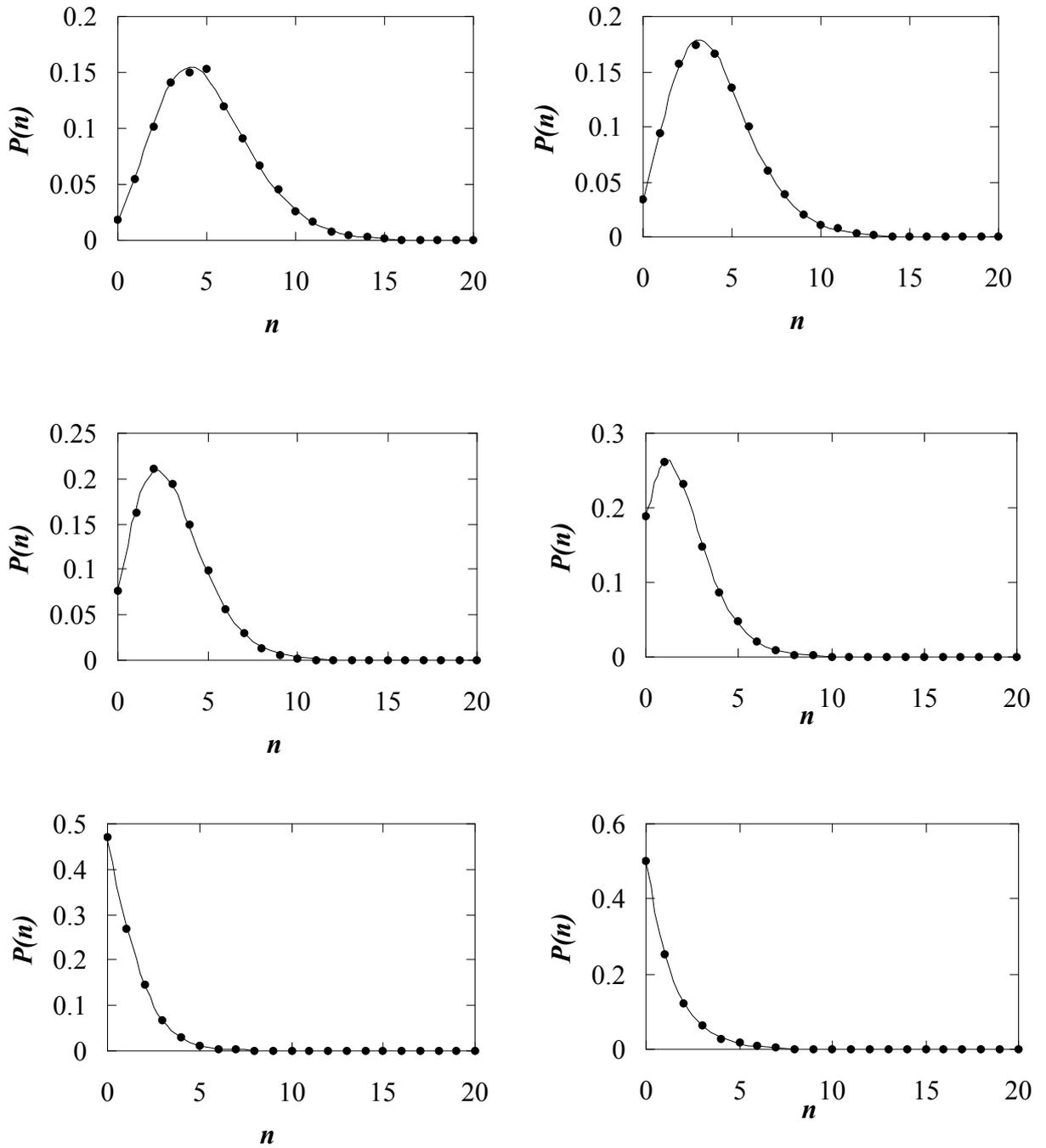


Figura 8.5 Función densidad de probabilidad (8.20) (línea continua) en varios puntos del plano imagen: la primera gráfica corresponde al punto central y de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo la separación aumenta  $\lambda/4D$  por gráfica. Las condiciones de atmósfera y grado de compensación son fijos: 81 modos corregidos y  $D/r_0=38.4$ . Se compara con los histogramas simulados (puntos).