

Universidad de Cantabria

Tesis Doctoral

FORMACIÓN DE IMÁGENES EN ÓPTICA ADAPTATIVA

Vidal Fernández Canales

Capítulo 7

ESTADÍSTICA DE LA INTENSIDAD LUMINOSA

Cuando se utilizan longitudes de onda en el rango del visible, los sistemas de óptica adaptativa instalados en los telescopios astronómicos no pueden compensar totalmente las distorsiones introducidas por la atmósfera. La imagen está formada por un pico central, cuya intensidad varía tanto menos cuanto mayor es la corrección, rodeado de un halo de *speckle*, donde las fluctuaciones de luminosidad siguen siendo muy importantes. Por tanto, la intensidad luminosa en el plano imagen es una variable aleatoria, cuya distribución varía según la corrección y según la posición en el plano. Para describir por completo el proceso de formación de la imagen es necesario obtener la estadística de la

intensidad en función de ambas variables. Con ese objetivo se continúa la generalización del modelo de Goodman al caso de corrección parcial y se demuestra que la función densidad de probabilidad de la intensidad luminosa evoluciona desde una distribución exponencial típica del *speckle* a una distribución de Rice modificada al aumentar la corrección o acercarse al centro del campo. El conocimiento de la estadística de la intensidad puede resultar útil en múltiples aplicaciones: por ejemplo para caracterizar el comportamiento del sistema, optimizar el funcionamiento de los equipos, mejorar las técnicas de alta resolución, detectar fuentes débiles en fondos ruidosos, establecer analogías con otros campos, etc.

7.1 Función densidad de probabilidad de la intensidad

En este apartado se obtiene la distribución de la intensidad en el caso de corrección parcial, partiendo del modelo del frente de onda corregido descrito en el capítulo 5. La intensidad luminosa en el punto central del plano imagen se obtiene de la amplitud compleja del campo, que resulta de la suma de contribuciones de gran número de celdas elementales en el frente de onda de diámetro igual al parámetro generalizado de Fried (se supone $D \gg \rho_0$):

$$A(\vec{r}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\alpha_k| e^{i\phi_k} \quad (7.1)$$

donde N es el número de celdas, que se obtiene a partir del parámetro generalizado de Fried de (6.20), $|\alpha_k|/N$ es la amplitud y ϕ_k la fase de la celda k . Al considerar la atmósfera como una pantalla de fase la amplitud de cada celda es en realidad una constante igual a uno. Se ha escogido esta normalización para que se cumpla el teorema de Parseval. La parte real y la imaginaria de la amplitud compleja son:

$$\begin{aligned}
 A_r(\vec{r}) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \cos \phi_k \\
 A_i(\vec{r}) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \text{sen } \phi_k
 \end{aligned}
 \tag{7.2}$$

Al igual que en el capítulo 2, se considera un gran número de contribuciones por lo que la parte real y la imaginaria de la amplitud compleja son la suma de un gran número de variables aleatorias. Aplicando el teorema del límite central (Middleton 1960) ambas son variables aleatorias asintóticamente gaussianas. La función densidad de probabilidad conjunta es:

$$\begin{aligned}
 p_{r,i}(A_r, A_i) &= \frac{1}{2\pi\sigma_r\sigma_i(1-\rho_{ri}^2)^{1/2}} \\
 \times \exp &\left[-\frac{1}{2(1-\rho_{ri}^2)} \left(\frac{(A_r - \langle A_r \rangle)^2}{2\sigma_r^2} + \frac{(A_i - \langle A_i \rangle)^2}{2\sigma_i^2} - \frac{2\rho_{ri}(A_r - \langle A_r \rangle)(A_i - \langle A_i \rangle)}{\sigma_r\sigma_i} \right) \right]
 \end{aligned}
 \tag{7.3}$$

Para describir esta función densidad de probabilidad gaussiana es necesario y suficiente calcular el promedio y varianza de la parte real y de la parte imaginaria, además del coeficiente de autocorrelación (también llamado de covarianza) ρ_{ri} , que se define en función de las desviaciones estadísticas y covarianza de las partes real y compleja como:

$$\rho_{ri} = \frac{\langle (A_r - \langle A_r \rangle)(A_i - \langle A_i \rangle) \rangle}{\sigma_r\sigma_i} = \frac{\text{cov}_{ri}}{\sigma_r\sigma_i}
 \tag{7.4}$$

Por supuesto los resultados diferirán de los obtenidos en el capítulo 2 para el caso de frentes de onda sin compensar porque la estadística de la fase ya no es uniforme sino una gaussiana.

Los promedios estadísticos de la parte real y de la parte compleja resultan:

$$\begin{aligned}\langle A_r(\vec{r}) \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle \cos \phi_k \rangle \\ \langle A_i(\vec{r}) \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle \sen \phi_k \rangle\end{aligned}\tag{7.5}$$

Según el modelo de frente de onda compensado descrito en el capítulo 5, todas las contribuciones son independientes y se pueden considerar por separado. De la función característica de la fase (5.2) se puede calcular el promedio de seno y coseno (Goodman 1985). El promedio de las partes real e imaginarias de la amplitud compleja resulta:

$$\begin{aligned}\langle A_r(\vec{r}) \rangle &= \frac{1}{2} [M_\phi(1) + M_\phi(-1)] = \exp\left(-\frac{\Delta_j}{2}\right) \\ \langle A_i(\vec{r}) \rangle &= \frac{1}{2j} [M_\phi(1) - M_\phi(-1)] = 0\end{aligned}\tag{7.6}$$

donde j es $\sqrt{-1}$. El promedio de la parte compleja se anula porque el seno es una función impar y la distribución de la fase es par. De forma análoga se pueden obtener:

$$\begin{aligned}\langle A_r^2(\vec{r}) \rangle &= \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N \langle \cos \phi_k \cos \phi_m \rangle \\ \langle A_i^2(\vec{r}) \rangle &= \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N \langle \sen \phi_k \sen \phi_m \rangle \\ \langle A_r(\vec{r}) A_i(\vec{r}) \rangle &= \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N \langle \cos \phi_k \sen \phi_m \rangle\end{aligned}\tag{7.7}$$

De nuevo se pueden separar las contribuciones de celdas distintas y obtener el promedio de las funciones trigonométricas a partir de la función característica:

$$\begin{aligned}
 \langle \cos \phi_k \cos \phi_m \rangle &= \begin{cases} \frac{1}{4} [2M_\phi(1)M_\phi(-1) + M_\phi^2(1) + M_\phi^2(-1)] & k \neq m \\ \frac{1}{4} [2 + M_\phi(2) + M_\phi(-2)] & k = m \end{cases} \\
 \langle \sin \phi_k \sin \phi_m \rangle &= \begin{cases} \frac{1}{4} [2M_\phi(1)M_\phi(-1) - M_\phi^2(1) - M_\phi^2(-1)] & k \neq m \\ \frac{1}{4} [2 - M_\phi(2) - M_\phi(-2)] & k = m \end{cases} \\
 \langle \cos \phi_k \sin \phi_m \rangle &= \begin{cases} \frac{1}{4j} [M_\phi^2(1) - M_\phi^2(-1)] & k \neq m \\ \frac{1}{4j} [M_\phi(2) - M_\phi(-2)] & k = m \end{cases}
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

Sustituyendo (7.8) en (7.7) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \langle A_r^2(\vec{r}) \rangle &= \frac{1}{N} \left[\frac{2 + M_\phi(2) + M_\phi(-2)}{4} + (N-1) \frac{2M_\phi(1)M_\phi(-1) + M_\phi^2(1) + M_\phi^2(-1)}{4} \right] \\
 \langle A_i^2(\vec{r}) \rangle &= \frac{1}{N} \left[\frac{2 - M_\phi(2) - M_\phi(-2)}{4} + (N-1) \frac{2M_\phi(1)M_\phi(-1) - M_\phi^2(1) - M_\phi^2(-1)}{4} \right] \\
 \langle A_r(\vec{r})A_i(\vec{r}) \rangle &= \frac{1}{N} \left[\frac{M_\phi(2) - M_\phi(-2)}{4j} + (N-1) \frac{M_\phi^2(1) - M_\phi^2(-1)}{4j} \right]
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

Combinando (7.6) y (7.9) se calculan las varianzas y covarianza:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r^2 &= \frac{1}{N} \left[\frac{2 + M_\phi(2) + M_\phi(-2)}{4} - \frac{2M_\phi(1)M_\phi(-1) + M_\phi^2(1) + M_\phi^2(-1)}{4} \right] \\
 \sigma_i^2 &= \frac{1}{N} \left[\frac{2 - M_\phi(2) - M_\phi(-2)}{4} - \frac{2M_\phi(1)M_\phi(-1) - M_\phi^2(1) - M_\phi^2(-1)}{4} \right] \\
 \text{cov}_{ri} &= \frac{1}{N} \left[\frac{M_\phi(2) - M_\phi(-2)}{4j} - \frac{M_\phi^2(1) - M_\phi^2(-1)}{4j} \right]
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

donde σ_r^2 y σ_i^2 son respectivamente las varianzas de la parte real y de la imaginaria de la amplitud compleja y cov_{ri} la covarianza de ambas. Para el caso de una distribución de las fases par respecto al origen esta expresión se simplifica a:

$$\begin{aligned}\sigma_r^2 &= \frac{1}{N} \left[\frac{1 + M_\phi(2)}{2} - M_\phi^2(1) \right] \\ \sigma_i^2 &= \frac{1}{N} \left[\frac{1 - M_\phi(2)}{2} \right] \\ \text{cov}_{ri} &= 0\end{aligned}\tag{7.11}$$

Sustituyendo al fin la función característica (5.2) resulta:

$$\begin{aligned}\sigma_r^2 &= \frac{1}{N} \left[\frac{1 + \exp(-2\Delta_j)}{2} - \exp(-\Delta_j) \right] \\ \sigma_i^2 &= \frac{1}{N} \left[\frac{1 - \exp(-2\Delta_j)}{2} \right] \\ \text{cov}_{ri} &= 0\end{aligned}\tag{7.12}$$

La covarianza es nula por lo que la parte real y compleja del campo son estadísticamente independientes. La función densidad de probabilidad conjunta de la parte real e imaginaria de la amplitud queda:

$$p_{r,i}(A_r, A_i) = \frac{1}{2\pi\sigma_r\sigma_i} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{(A_r - \langle A_r \rangle)^2}{2\sigma_r^2} + \frac{(A_i)^2}{2\sigma_i^2} \right) \right]\tag{7.13}$$

donde el promedio de la parte real se calcula de (7.6) y las varianzas de (7.12). Esta función densidad de probabilidad no es una función densidad circular gaussiana, como en el caso de atmósfera sin corregir. Un análisis similar al desarrollado en el capítulo 2 permite encontrar la función densidad de probabilidad de la intensidad. La intensidad, I , y la fase, θ , del campo resultante están relacionados con la parte real y la parte imaginaria de la amplitud compleja por la transformación:

$$\begin{aligned} A_r &= \sqrt{I} \cos \theta \\ A_i &= \sqrt{I} \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \quad (7.14)$$

o equivalentemente:

$$\begin{aligned} I &= A_r^2 + A_i^2 \\ \theta &= \tan^{-1} \frac{A_r}{A_i} \end{aligned} \quad (7.15)$$

La función densidad de probabilidad conjunta de I y θ , se expresa a partir de la función densidad de las partes real e imaginaria, siguiendo las técnicas habituales de transformación de variables aleatorias (Davenport y Root 1958):

$$p_{I,\theta}(I, \theta) = p_{r,i}(\sqrt{I} \cos \theta, \sqrt{I} \operatorname{sen} \theta) \|J\| \quad (7.16)$$

donde $\| \cdot \|$ representa el módulo del determinante y $\|J\|$ es el jacobiano de la transformación:

$$\|J\| = \begin{vmatrix} \frac{\partial A_r}{\partial I} & \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \\ \frac{\partial A_i}{\partial I} & \frac{\partial A_i}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \quad (7.17)$$

Sustituyendo (7.13) en (7.16) se encuentra que:

$$p_{I,\theta}(I, \theta) = \frac{1}{4\pi\sigma_r\sigma_i} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{(\sqrt{I} \cos \theta - \langle A_r \rangle)^2}{2\sigma_r^2} + \frac{(\sqrt{I} \operatorname{sen} \theta)^2}{2\sigma_i^2} \right) \right] \quad (7.18)$$

La función densidad marginal de la fase es:

$$\begin{aligned}
p_{\theta}(\theta) &= \int_0^{\infty} p_{I,\theta}(I, \theta) dI = \\
&= \frac{1}{4\pi\sigma_r\sigma_i} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{(\sqrt{I}\cos\theta - \langle A_r \rangle)^2}{2\sigma_r^2} + \frac{(\sqrt{I}\sin\theta)^2}{2\sigma_i^2}\right)\right] dI \quad -\pi \leq \theta < \pi \quad (7.19)
\end{aligned}$$

Más interesante resulta conocer la función densidad de probabilidad marginal de la intensidad luminosa (Canales y Cagigal 1997, Cagigal y Canales 1997, 1998a,b):

$$\begin{aligned}
p_I(I) &= \int_{-\pi}^{\pi} p_{I,\theta}(I, \theta) d\theta = \\
&= \frac{1}{4\pi\sigma_r\sigma_i} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{(\sqrt{I}\cos\theta - \langle A_r \rangle)^2}{2\sigma_r^2} + \frac{(\sqrt{I}\sin\theta)^2}{2\sigma_i^2}\right)\right] d\theta \quad I \geq 0 \quad (7.20)
\end{aligned}$$

Esta función no se puede integrar analíticamente como en el caso de (2.14), sino que se ha de calcular numéricamente, lo que además de dificultar el cálculo, impide predecir de forma sencilla la evolución de la función con el grado de corrección, las condiciones atmosféricas, etc. Para bajas correcciones la varianza residual es grande, el promedio de la parte real (7.6) tiende a cero y las varianzas (7.12) tienden a ser iguales a:

$$\begin{aligned}
\sigma_r^2 &= \frac{1}{2N} \\
\sigma_i^2 &= \frac{1}{2N}
\end{aligned} \quad (7.21)$$

Por tanto en el caso de baja corrección, (7.20) tiende a (2.14), se recupera la distribución exponencial que caracteriza al *speckle*. Sin embargo, no es evidente el comportamiento de (7.20) al aumentar la corrección. En las figuras 7.1 y 7.2 se muestra la evolución con el grado de corrección de los tres parámetros que caracterizan la función densidad de probabilidad de la intensidad. El promedio de la parte real es una función creciente con el número de modos corregidos como se observa en la figura 7.1. Está relacionada con el valor medio de la distribución de probabilidad de la intensidad en el punto central, que obviamente crece al compensar el efecto de la atmósfera. La figura 7.2 demuestra que la

varianza de la parte real y la de la compleja no difieren mucho aun en alta corrección. Son funciones cuyo crecimiento satura más rápido que el del promedio de la parte real.

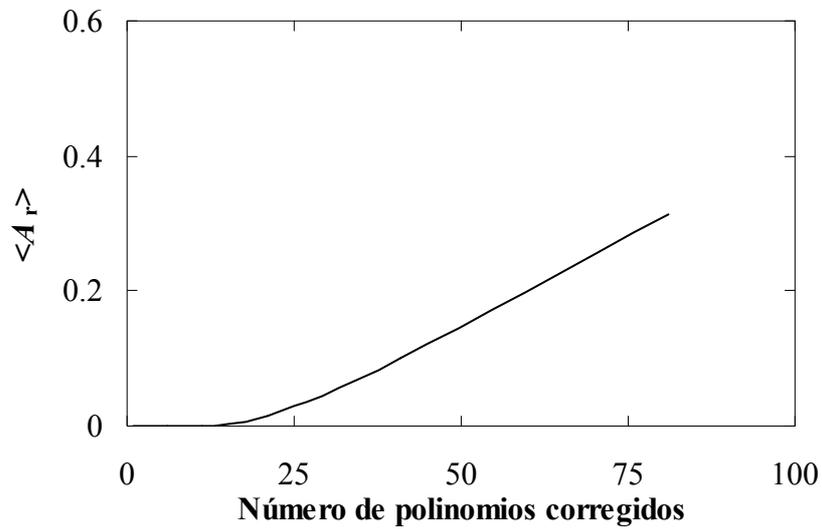


Figura 7.1 Evolución del promedio de la parte real de la amplitud compleja en función del grado de corrección.

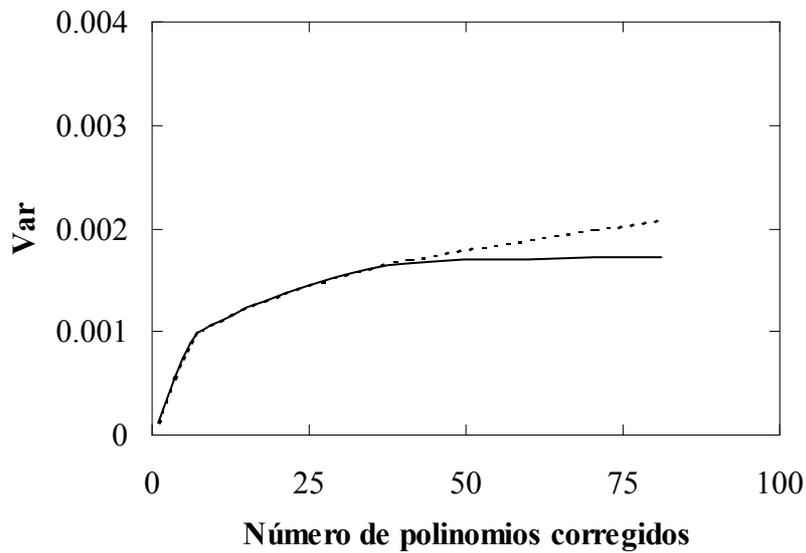


Figura 7.2 Evolución de la varianza de la parte real de la amplitud compleja (línea continua) y de la varianza de la parte imaginaria (línea discontinua) en función del grado de corrección.

Para conocer como se comporta la función densidad de probabilidad marginal de la intensidad (7.20) al corregir los efectos de la atmósfera, se muestra en la figura 7.3 para distintos grados de corrección. Se observa como evoluciona desde una estadística exponencial (que corresponde al caso de corrección nula) hacia una distribución similar a una gaussiana, cuya anchura relativa disminuye al aumentar la corrección. Se comparan los valores con histogramas normalizados de la intensidad obtenidos por simulación. El acuerdo entre la simulación y la ecuación (7.20) en todo el amplio rango de corrección elegido confirma la validez del desarrollo.

Al no tener la distribución una forma analítica, se podría deducir que los momentos de la distribución sólo se pueden calcular de forma numérica. Sin embargo, como la parte real y la parte compleja de la amplitud siguen una estadística gaussiana, es posible relacionar los momentos de orden alto con los de bajo orden, es decir, con los tres parámetros que definen la distribución. Se calculan a continuación el valor medio y la varianza de la intensidad luminosa. El procedimiento para momentos de mayor orden es similar. El valor medio y la varianza de la intensidad resultan:

$$\begin{aligned}\langle I \rangle &= \langle A_r^2 \rangle + \langle A_i^2 \rangle \\ \sigma_I^2 &= \langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2 = \langle A_r^4 \rangle + \langle A_i^4 \rangle + 2\langle A_r^2 A_i^2 \rangle - \left(\langle A_r^2 \rangle + \langle A_i^2 \rangle \right)^2\end{aligned}\quad (7.22)$$

Como la parte real y la parte compleja de la amplitud siguen una estadística gaussiana se cumple que:

$$\langle A_r^4 \rangle = \langle A_r \rangle^4 + 6\sigma_r^2 \langle A_r \rangle^2 + 3\sigma_r^4 \quad (7.23)$$

Por consiguiente (7.22) queda:

$$\begin{aligned}\langle I \rangle &= \sigma_r^2 + \sigma_i^2 + \langle A_r \rangle^2 \\ \sigma_I^2 &= 4\sigma_r^2 \langle A_r \rangle^2 + 2\sigma_r^4 + 2\sigma_i^4\end{aligned}\quad (7.24)$$

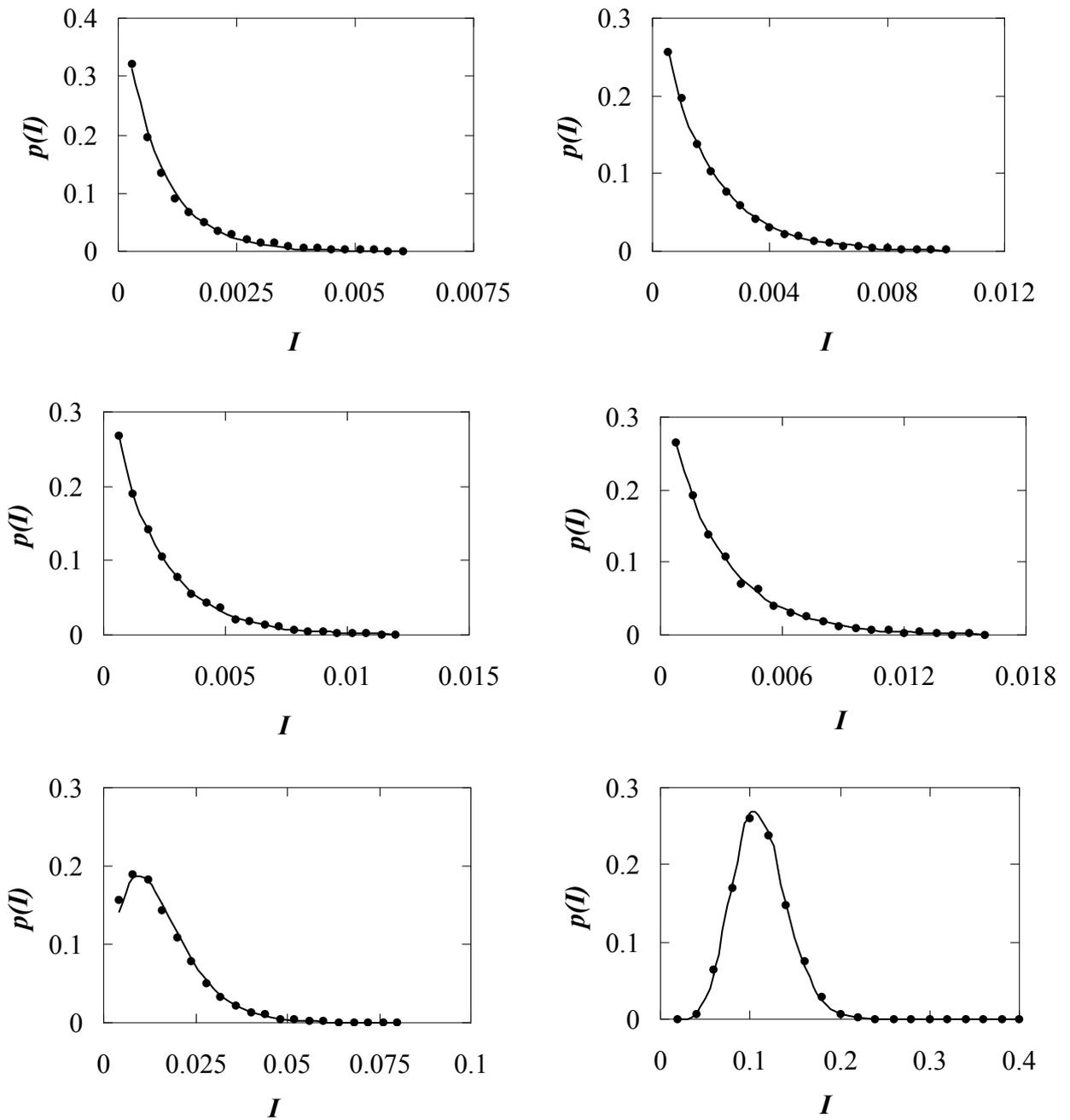


Figura 7.3 Función densidad de probabilidad marginal de la intensidad (7.20) para distintos grados de corrección (línea continua). De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, 1, 6, 11, 21, 41 y 81 modos corregidos. Se comparan los valores con histogramas normalizados de la intensidad obtenidos por simulación (puntos). Todos los valores de la intensidad están normalizados por el valor central de la macha de Airy cuando no existe atmósfera. El cociente D/r_0 es 38.4.

Estos dos momentos quedan determinados a partir de los parámetros de la distribución, que son funciones de la varianza residual y del parámetro de Fried generalizado. Para completar este análisis se estudia el momento de primer orden y el contraste, y se comparan con valores provenientes de la simulación. La figura 7.4 muestra el valor medio de la intensidad en esta distribución. Comparando con la figura 7.1 se aprecia que la curva que sigue la intensidad crece de forma similar al promedio de la parte real de la amplitud. En la figura 7.5 se muestra el contraste C , definido por:

$$C = \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle} \quad (7.25)$$

Cuando no existe corrección y la distribución es la propia de *speckle* el contraste vale 1. Al aumentar la corrección el contraste decrece por lo que aumenta su inversa, el cociente señal-ruido. La concordancia con los datos de la simulación es buena en ambos casos.

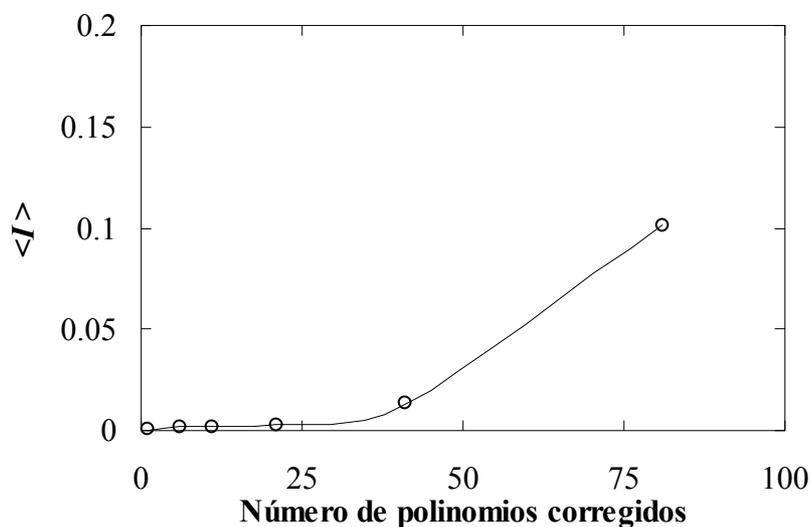


Figura 7.4 Valor medio de la intensidad en la distribución definida por (7.20) en función del grado de corrección (línea continua) comparado con el valor simulado (puntos). Los valores de la intensidad están normalizados por el valor central de la macha de Airy cuando no existe atmósfera.

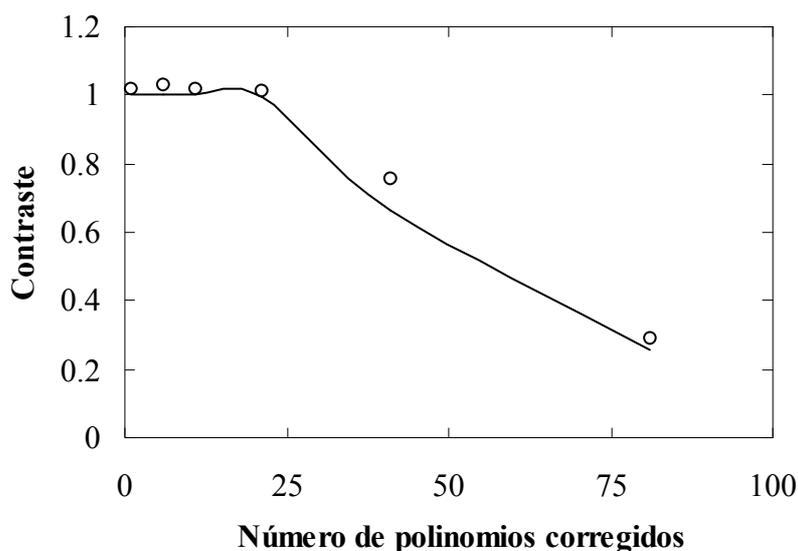


Figura 7.5 Contraste en la distribución definida por (7.20) (línea continua) en función del grado de corrección sobre el frente de onda, comparado con los valores ofrecidos por la simulación (puntos).

7.2 Distribución de Rice

En el apartado anterior se ha obtenido la función densidad de probabilidad de la intensidad luminosa en corrección parcial. Esta distribución presenta un inconveniente: no se puede integrar analíticamente como en el caso de (2.14), sino que se ha de calcular numéricamente, lo que dificulta el cálculo e impide predecir la evolución de la función con el grado de corrección y las condiciones atmosféricas, etc. En este apartado se demuestra que se puede aproximar la distribución (7.20) por una distribución de tipo Rice modificada, que ofrece casi idénticos resultados. En primer lugar, se establece la analogía física entre el caso de corrección parcial y la suma de un patrón de *speckle* más un fondo coherente (caso por ejemplo de la holografía), cuya distribución es la de Rice modificada. Esto se consigue describiendo la formación de la amplitud compleja en la imagen como un camino aleatorio en el plano complejo. A continuación se explica el cálculo de los parámetros de la distribución de Rice y se comprueba que ofrece resultados similares a los histogramas simulados.

La suma de las diferentes contribuciones del plano de la pupila para formar la amplitud compleja en el plano imagen se puede interpretar como un camino aleatorio en el plano complejo, como se mostró en la figura 2.2 para el caso de un frente de onda sin compensar. Cuando se utiliza un sistema de óptica adaptativa para corregir las distorsiones provocadas por la atmósfera, el promedio de la parte real de la amplitud y las varianzas de la parte real y compleja crecen como indican las figuras 7.1 y 7.2. Por tanto el camino aleatorio en el plano complejo cambia. Su resultante quedará cercana al eje real, con una longitud igual, salvo fluctuaciones, al promedio de la parte real. Como además, según la figura 7.2, las varianzas apenas se diferencian, la figura que describa el camino aleatorio será muy similar a la figura 2.4 que describe la suma de un patrón de *speckle* y un fondo coherente (en este caso de intensidad $\langle A_r \rangle^2$). Por analogía física se puede utilizar la distribución de Rice modificada que describe este caso para la distribución de la intensidad luminosa en corrección parcial.

Existe otra forma de deducir que la figura que describe el camino aleatorio en corrección parcial evoluciona de la forma de la figura 2.2 a la de la figura 2.4. Según el modelo de frente de onda compensado descrito en el capítulo 5 la fase pasa de una distribución uniforme a una gaussiana cuya anchura disminuye al aumentar la corrección. Por tanto, los vectores que se suman para construir la resultante en el plano complejo tienen fases en general próximas a cero y quedan cercanos al eje real. Así pues el valor final de la resultante será un vector sobre el eje real salvo fluctuaciones.

La expresión de la distribución de Rice modificada es (Frieden 1983):

$$p(I) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{I+a^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{a\sqrt{I}}{\sigma^2}\right) \quad (7.26)$$

donde I_0 es la función modificada de Bessel de primera especie y orden cero. Esta distribución requiere dos parámetros para estar completamente definida: a y σ . Para calcular sus parámetros a partir de los de la distribución exacta¹ se impone la condición de que el valor medio y la varianza de la intensidad sean las correctas (Canales y Cagigal 1998, 1999a). El valor medio y la varianza en la distribución de Rice modificada son:

¹ Aunque la distribución exacta (7.20) parecía requerir tres parámetros (el promedio de la parte real y las varianzas de las partes real e imaginaria), en realidad estos tres parámetros no son independientes, y se pueden calcular a partir de sólo dos: la varianza residual y el parámetro generalizado de Fried.

$$\begin{aligned}\langle I \rangle &= 2\sigma^2 + a^2 \\ \sigma_I^2 &= (2\sigma^2)^2 + 4\sigma^2 a^2\end{aligned}\tag{7.27}$$

Igualando (7.27) con (7.24) se hallan los parámetros de la distribución de Rice que cumplen la condición exigida, a partir de los parámetros de la distribución exacta, es decir, a partir de la varianza residual y del parámetro de Fried generalizado:

$$\begin{aligned}2\sigma^2 &= \sigma_r^2 + \sigma_i^2 + \langle A_r \rangle^2 - \left[\langle A_r \rangle^4 + 2\langle A_r \rangle^2 (\sigma_r^2 - \sigma_i^2) - (\sigma_r^2 - \sigma_i^2)^2 \right]^{1/2} \\ a^2 &= \left[\langle A_r \rangle^4 + 2\langle A_r \rangle^2 (\sigma_r^2 - \sigma_i^2) - (\sigma_r^2 - \sigma_i^2)^2 \right]^{1/2}\end{aligned}\tag{7.28}$$

La figura 7.6 muestra la función densidad de probabilidad marginal de la intensidad (7.20) y la función densidad aproximada de tipo de Rice (7.26), en la que los parámetros se estiman de (7.28). Se comparan los valores con histogramas normalizados de la intensidad obtenidos por simulación. Se observa que la distribución de Rice y la exacta siguen idénticos comportamientos: evolucionan desde una estadística exponencial hacia una distribución en forma de campana, similar a una gaussiana, cuya anchura relativa disminuye al aumentar la corrección. La distribución aproximada de Rice reproduce con tal exactitud los valores simulados que no se aprecia diferencia con la distribución exacta (7.20).

Dado que las distribuciones son tan semejantes, los momentos estadísticos de la intensidad luminosa se pueden identificar con los momentos de la distribución de Rice, que se pueden calcular de una manera más sencilla que la apuntada en el apartado anterior. Los momentos de la distribución de Rice se obtienen de:

$$\langle I^m \rangle = (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial s^m} Q_I(s) \Big|_{s=0}\tag{7.29}$$

donde $Q_I(s)$ es la función generadora de momentos, igual a la transformada de Laplace de la función de Rice modificada:

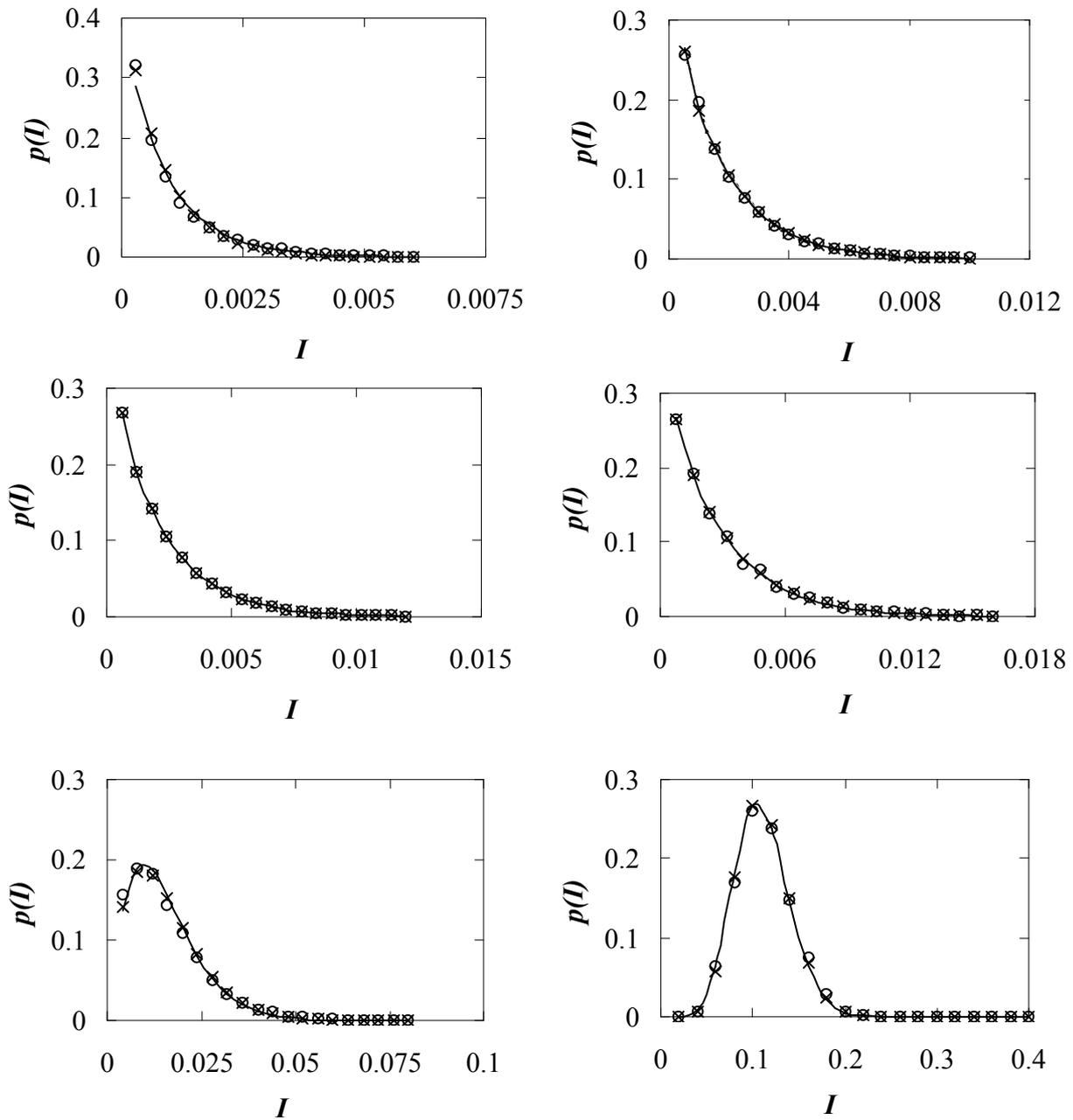


Figura 7.6 Función densidad de probabilidad marginal de la intensidad (7.20) (equis) y función densidad aproximada de tipo de Rice (7.26) (línea continua), en la que los parámetros se estiman de (7.28). De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, 1, 6, 11, 21, 41 y 81 modos corregidos. Se comparan los valores con histogramas normalizados de la intensidad obtenidos por simulación (puntos). Todos los valores de la intensidad están normalizados por el valor central de la macha de Airy cuando no existe atmósfera.

$$Q_I(s) = \int_0^{\infty} e^{-sI} P(I) dI = \frac{1}{1 + 2\sigma^2 s} \exp\left(\frac{-sa^2}{1 + 2\sigma^2 s}\right) \quad (7.30)$$

El momento de orden m resulta (Saleh 1978):

$$\langle I^m \rangle = m! (2\sigma^2)^m L_m\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \quad (7.31)$$

donde L_m representa el polinomio de Laguerre de orden m . Como ejemplo el valor medio y la varianza se mostraron en (7.27).

7.3 Aproximaciones de la distribución de Rice

En esta sección se va a derivar una aproximación de la distribución de Rice que facilita la interpretación física de los parámetros y su relación con las magnitudes que caracterizan el comportamiento del sistema. Si se observa la expresión de a^2 en (7.28) se puede deducir que el primer sumando de la raíz domina sobre los otros (se supone que el número de zonas es suficientemente grande, lo cual se cumple salvo para muy altas correcciones) y se aproxima el parámetro a^2 por:

$$a^2 \approx M_{\phi}^2(1) = \exp(-\Delta_j) \quad (7.32)$$

Por tanto, en primera aproximación el parámetro a^2 sólo depende de la varianza residual del frente de onda y es igual a la energía coherente definida en (6.2). Para el valor de $D/r_0 = 38.4$ que se utiliza generalmente en la simulación esta aproximación es válida hasta 90 modos corregidos.

Por otra parte, el valor medio de la intensidad luminosa suele considerarse un parámetro conocido al describir la estadística de la intensidad luminosa (Goodman 1984). Los parámetros de la distribución de Rice se pueden entonces expresar como:

$$\begin{aligned} a^2 &\approx \exp(-\Delta_j) \\ 2\sigma^2 &\approx \langle I \rangle - \exp(-\Delta_j) \end{aligned} \quad (7.33)$$

La distribución de probabilidad queda:

$$p(I) = \frac{1}{\langle I \rangle - a^2} \exp\left(-\frac{I + a^2}{\langle I \rangle - a^2}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{a^2 I}}{\langle I \rangle - a^2}\right) \quad (7.34)$$

En las figuras 7.7 y 7.8 se puede observar el comportamiento de ambos parámetros en función del grado de corrección. Su interpretación se ha simplificado al depender de la varianza residual y del promedio de la intensidad luminosa. Cuando la corrección es muy baja, apenas existe energía en el pico coherente, por lo que el valor del parámetro a^2 es despreciable. En tal caso, $2\sigma^2$ es igual a la intensidad en el punto central. La distribución es exponencial como en el caso de *speckle* y sólo requiere el parámetro $2\sigma^2$ para ser descrita. Al aumentar la corrección crece la energía en el pico coherente hasta que en corrección muy alta (aunque no tanto que no sea válida 7.32) la contribución del halo de *speckle* en el punto central se puede despreciar y a^2 representa toda la energía del punto central. Este resultado concuerda con el clásico (6.21) que también se puede obtener aproximando (6.19). En alta corrección $2\sigma^2$ (normalizado al valor de la intensidad) tiende a cero.

En la figura 7.9 se muestra la función densidad de probabilidad de la intensidad de tipo de Rice (7.34), en la que los parámetros se aproximan usando (7.33). Se comparan los valores con histogramas normalizados de la intensidad obtenidos por simulación. La distribución con los parámetros aproximados reproduce con exactitud los valores simulados.

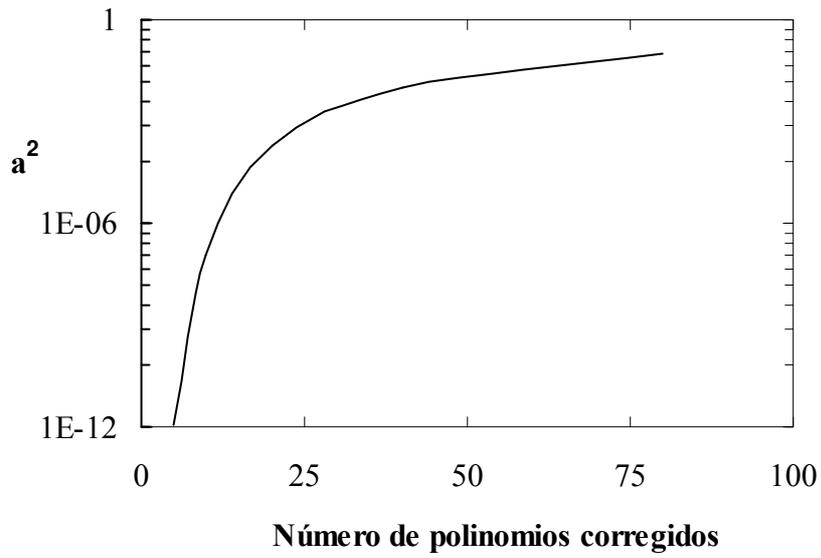


Figura 7.7 Comportamiento del parámetro a^2 en función del grado de corrección.

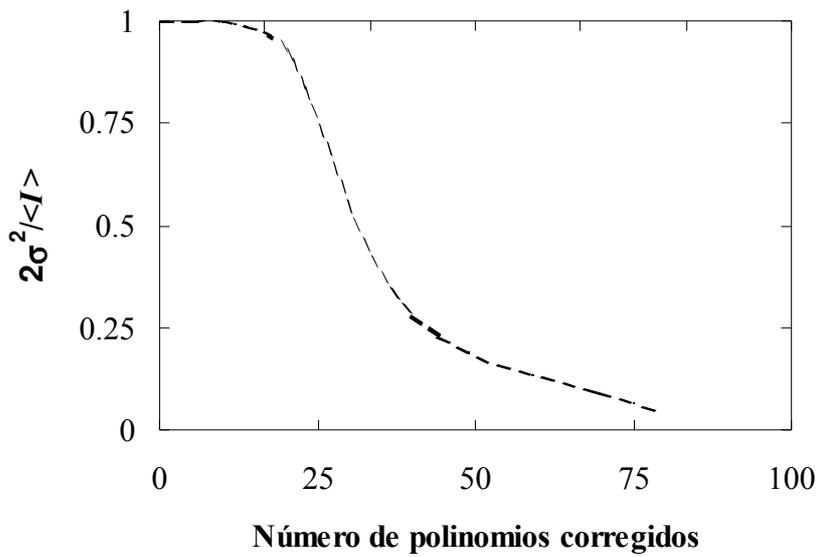


Figura 7.8. Comportamiento del parámetro $2\sigma^2$, normalizado al valor de la intensidad, en función del grado de corrección.

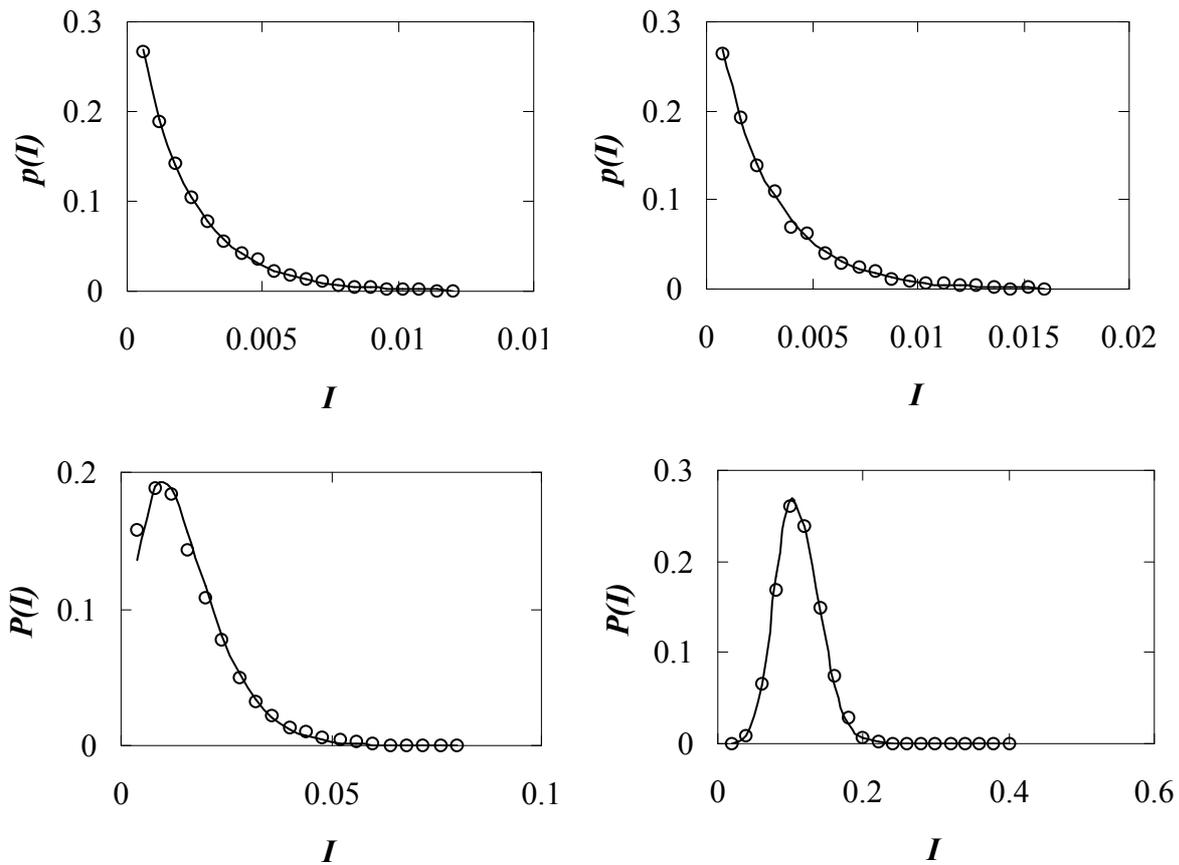


Figura 7.9 Función densidad de probabilidad de la intensidad de tipo de Rice (7.34), en la que los parámetros se aproximan usando (7.33) (línea continua). De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, 11, 21, 41 y 81 modos corregidos. Se comparan los valores con histogramas normalizados de la intensidad obtenidos por simulación (puntos). Todos los valores de la intensidad están normalizados por el valor central de la mancha de Airy cuando no existe atmósfera.

Además de aproximar los parámetros, se puede aproximar la función densidad de probabilidad de tipo de Rice en el caso de baja corrección. En tal caso el último término de (7.34) se puede aproximar por:

$$I_0 \left(\frac{2\sqrt{a^2 I}}{\langle I \rangle - a^2} \right) \approx 1 + \frac{a^2 I}{(\langle I \rangle - a^2)^2} \quad (7.35)$$

La función densidad de probabilidad aproximada queda:

$$p(I) \approx \frac{1}{\langle I \rangle - a^2} \exp\left(-\frac{I + a^2}{\langle I \rangle - a^2}\right) \left(1 + \frac{a^2 I}{(\langle I \rangle - a^2)^2}\right) \quad (7.36)$$

La gran ventaja de esta distribución es que es analítica. La figura 7.10 muestra la función densidad de probabilidad aproximada (7.36). Se comparan los valores con histogramas normalizados de la intensidad obtenidos por simulación. La distribución aproximada reproduce con exactitud los valores simulados si el número de modos corregidos es pequeño. El caso de alta corrección no se muestra porque sus resultados carecen de sentido.

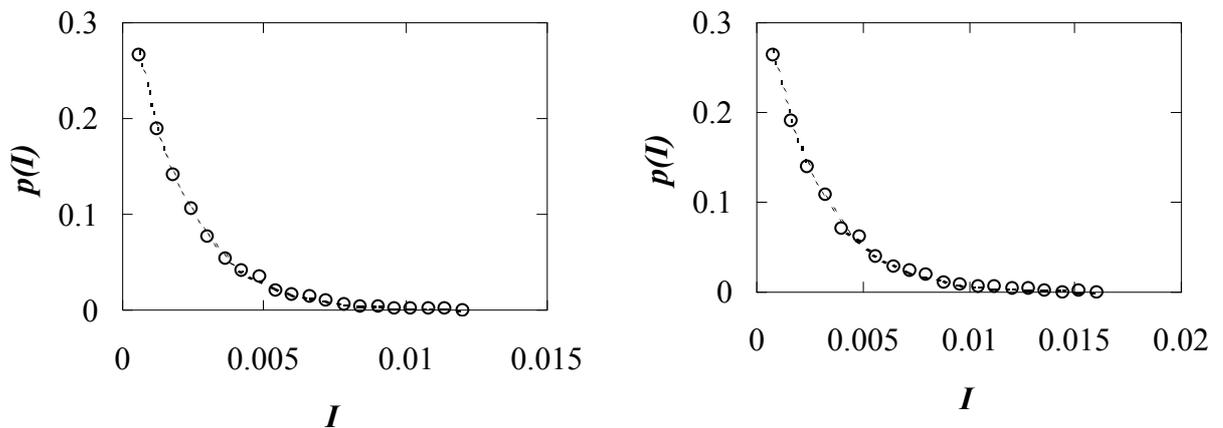


Figura 7.10 Función densidad de probabilidad aproximada (7.36) (línea discontinua). Se comparan los valores con histogramas normalizados de la intensidad obtenidos por simulación (puntos). De izquierda a derecha 11 y 21 modos corregidos. Todos los valores de la intensidad están normalizados por el valor central de la mancha de Airy cuando no existe atmósfera.

7.4 Extensión a todo el plano imagen

Se ha obtenido una expresión de la densidad de probabilidad de la intensidad luminosa en el punto central en función de la varianza residual en el frente de onda. Esta función densidad de probabilidad se puede extender a todo el plano. Utilizando el teorema de desplazamiento (Born y Wolf 1993) es posible cambiar de esfera de referencia² en el frente de onda, y, en consecuencia, de punto de observación en el plano imagen. Sea un frente de onda como el que se muestra en la figura 7.11, cuya varianza residual Δ_j se calcula a partir de (4.4). Si se cambia el punto de observación del punto central $P(0,0)$ a $P'(X,Y)$, se cambia la referencia de R a R' y el frente de onda, referido al nuevo plano R' , presenta una varianza residual Δ_j' . Esta nueva varianza es igual a la expresión (4.4) más dos términos que dependen de la distancia del punto de observación (X,Y) al punto central:

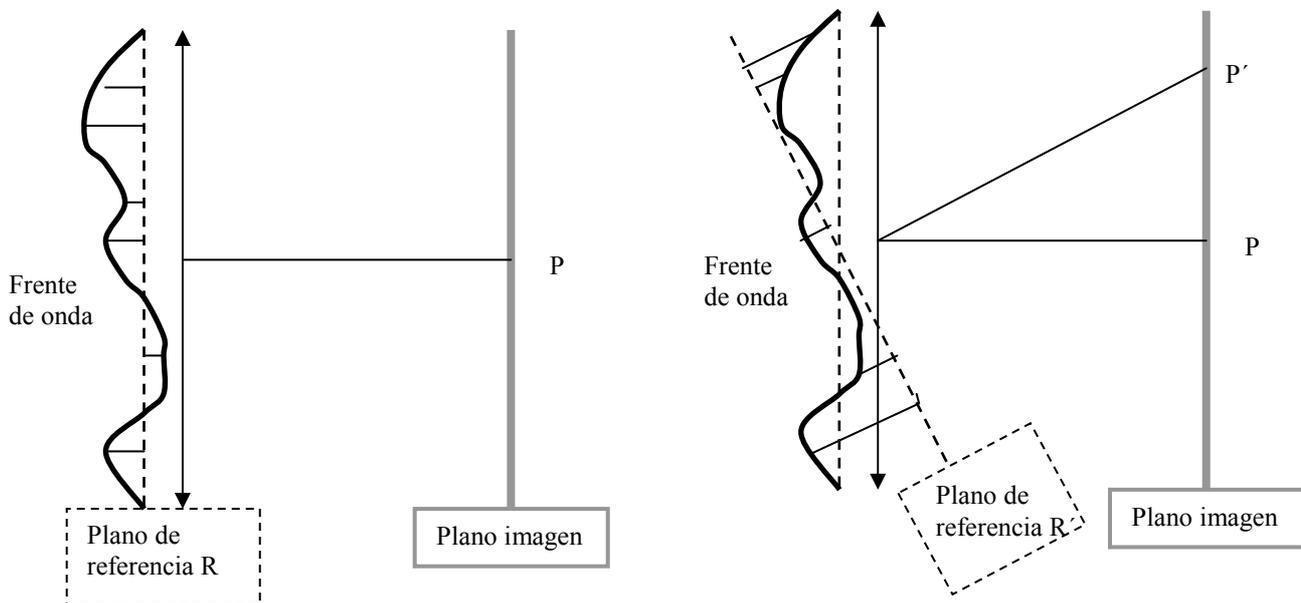


Figura 7.11 El teorema de desplazamiento permite obtener la varianza residual respecto al plano R' si se conoce la varianza del frente de onda respecto al plano de referencia R .

² Si se observa antes de la lente que forma la última imagen, la esfera de referencia es un plano de referencia, porque el objeto está en el infinito.

$$\Delta_j(X,Y) = \Delta_j(0,0) + \left(\frac{XD}{2f}\right)^2 + \left(\frac{YD}{2f}\right)^2 \quad (7.37)$$

donde f es la distancia focal del sistema de formación de la imagen. En consecuencia, la función densidad de probabilidad en un punto (X,Y) cualquiera del plano imagen se obtiene de (7.34), con el valor medio de la intensidad luminosa en el punto (X,Y) y cambiando Δ_j por la varianza residual (7.37) en el cálculo del parámetro a (7.33):

$$p(I_{P'}) = \frac{1}{\langle I_{P'} \rangle - a'^2} \exp\left(-\frac{I_{P'} + a'^2}{\langle I_{P'} \rangle - a'^2}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{a'^2 I_{P'}}}{\langle I_{P'} \rangle - a'^2}\right) \quad (7.38)$$

Este resultado se comprueba utilizando el proceso de simulación de frentes de onda compensados. Se simula el histograma normalizado de la intensidad luminosa en diversos puntos del plano imagen y se calcula la varianza residual para que la función (7.38) represente la mejor aproximación de los valores simulados. La figura 7.12 muestra la varianza residual ajustada en función de la distancia al punto central para el caso de $D/r_0=38.4$ y 80 modos corregidos. Sin pérdida de generalidad se ha escogido $Y=0$. El comportamiento de la curva es parabólico como predice (7.37).

El estudio de la evolución de la función densidad en función de la posición en el plano imagen se pospone hasta el próximo capítulo donde se deriva la estadística de fotones, si bien en el siguiente apartado se estudia la evolución de uno de los parámetros fundamentales, el cociente señal-ruido.

7.5 Cociente señal ruido

El cociente señal ruido es una de las magnitudes fundamentales en el estudio de las prestaciones de los sistemas de óptica adaptativa. Su valor en un punto (x,y) se puede estimar a partir de (7.27) y (7.33):

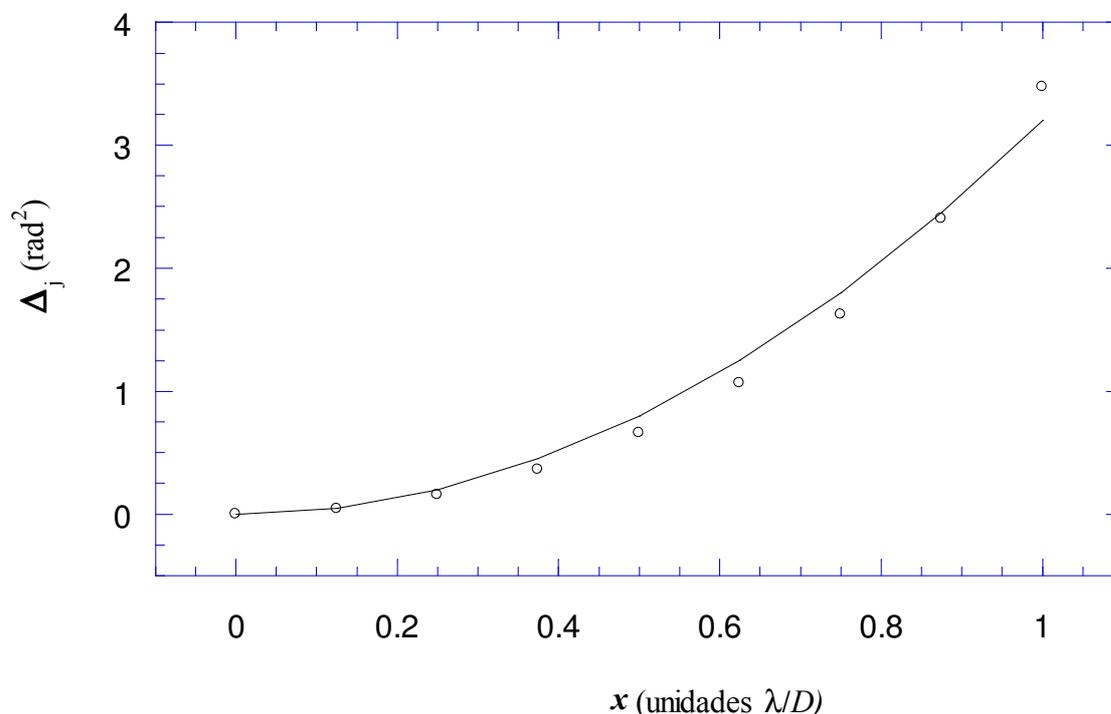


Figura 7.12 Varianza residual del frente de onda compensado en función de la posición del punto de observación en el plano imagen. Valores teóricos (línea continua), valores obtenidos ajustando (7.38) a los histogramas experimentales de la intensidad (puntos).

$$SNR(x, y) \cong \frac{I(x, y)}{\sqrt{I^2(x, y) - \exp(-2\Delta_j)}} \quad (7.39)$$

Esta ecuación tiene una importante consecuencia para aplicaciones como la búsqueda de exoplanetas. El SNR es función del grado de corrección, como se deduce de la figura 7.5, pero también es función del punto de observación. Este comportamiento se demuestra en la figura 7.13: para un grado de corrección fijo se representa el SNR simulado frente al obtenido de (7.39) donde la varianza residual en cada punto proviene de la figura 7.12. Se comprueba que la expresión (7.39) ofrece una buena aproximación del SNR y que, para un grado de corrección fijo, alcanza su valor máximo en el núcleo central de la PSF y

disminuye al alejarse hacia los bordes. Sólo en el caso de corrección nula, el SNR es constante en todo el plano imagen.

Dicha evolución del SNR se relaciona con la evolución de la distribución de la intensidad. Mientras que en el núcleo central la estadística tiende hacia una distribución gaussiana y el SNR crece, en los bordes de la PSF la estadística sigue siendo exponencial y el SNR se mantiene en el valor característico del *speckle*, la unidad.

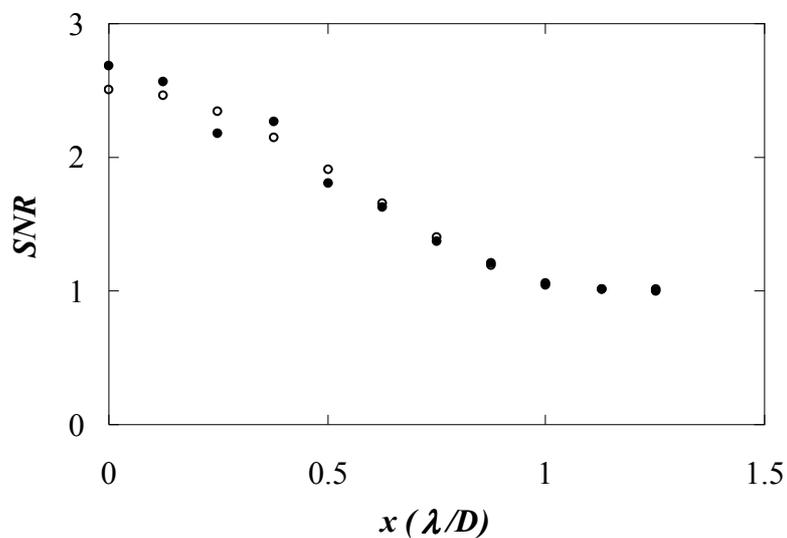


Figura 7.13 Evolución radial del SNR . Circunferencias: valores simulados. Puntos: valores obtenidos de (7.39).

7.6 Distribución semiempírica

En el capítulo 3 se analizaron las limitaciones que impiden a los sistemas de óptica adaptativa lograr una compensación total de las distorsiones del frente de onda, como son la limitación en la señal y el ruido en el sensor de frente de onda, el muestreo espacial finito de las aberraciones, el número limitado de grados de libertad en el elemento

compensador o los retrasos entre la medida de las aberraciones y su compensación. Los distintos errores que afectan al proceso de compensación pueden provocar en los sistemas reales que la estimación (4.4) de la varianza residual sea errónea. Por tanto, los parámetros de las diferentes distribuciones estudiadas arrastran este error y los valores teóricos no reproducen con exactitud los datos experimentales.

Con el fin de evitar este problema se han desarrollado en nuestro trabajo métodos semiempíricos (Canales y Cagigal 1998) para obtener la función densidad de probabilidad. Consisten en estimar los parámetros de la distribución a partir de medidas experimentales de la intensidad luminosa. En general, se ha demostrado que se necesitan dos parámetros para caracterizar la función densidad de probabilidad (salvo en el caso de corrección muy baja donde un solo parámetro puede ser suficiente). Por tanto, es necesario medir dos magnitudes para estimar la distribución; en este trabajo se han elegido el promedio de la intensidad luminosa y la varianza de la intensidad, por su significado físico y por ser de los momentos más sencillos de medir.

En el caso de la distribución exacta (7.20) es complicado el desarrollo de estos métodos, ya que se caracteriza por tres parámetros (no independientes): el promedio de la parte real de la amplitud compleja y las varianzas de la parte real y de la compleja. Por consiguiente, es necesario cambiar a unos parámetros independientes o aplicar técnicas mixtas, en la que dos de los parámetros anteriores se obtienen de las medidas experimentales y el restante de (7.6) o (7.12) (Canales y Cagigal 1997).

La aplicación de técnicas semiempíricas es mucho más directa en la distribución de Rice modificada (y las derivadas de ella) (Canales y Cagigal 1999a). Los parámetros de la distribución se pueden despejar de (7.27):

$$\begin{aligned} a^2 &= \sqrt{\langle I \rangle^2 - \sigma_I^2} \\ 2\sigma^2 &= \langle I \rangle - \sqrt{\langle I \rangle^2 - \sigma_I^2} \end{aligned} \quad (7.40)$$

Sustituyendo (7.40) en (7.26) la función densidad de probabilidad queda:

$$p(I) \approx \frac{1}{\langle I \rangle - \sqrt{\langle I \rangle^2 - \sigma_I^2}} \exp\left(-\frac{I + \sqrt{\langle I \rangle^2 - \sigma_I^2}}{\langle I \rangle - \sqrt{\langle I \rangle^2 - \sigma_I^2}}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{I}(\langle I \rangle^2 - \sigma_I^2)^{1/4}}{\langle I \rangle - \sqrt{\langle I \rangle^2 - \sigma_I^2}}\right) \quad (7.41)$$

En la figura 7.14 se muestra la función densidad de probabilidad de la intensidad semiempírica, en la que los parámetros se estiman usando (7.40). Se comparan los valores con histogramas normalizados de la intensidad obtenidos por simulación. También se compara con los valores ofrecidos por la distribución Rice cuando sus parámetros se hallan teóricamente usando (7.28). Para simular el error en el proceso de compensación mediante el modelo más simple posible, se supone que la varianza residual real es un 10% mayor de la teórica. Se observa que la distribución semiempírica ofrece mejores resultados que la teórica si la estimación de la varianza residual en el frente de onda no es precisa, sobre todo si el grado de corrección es elevado.

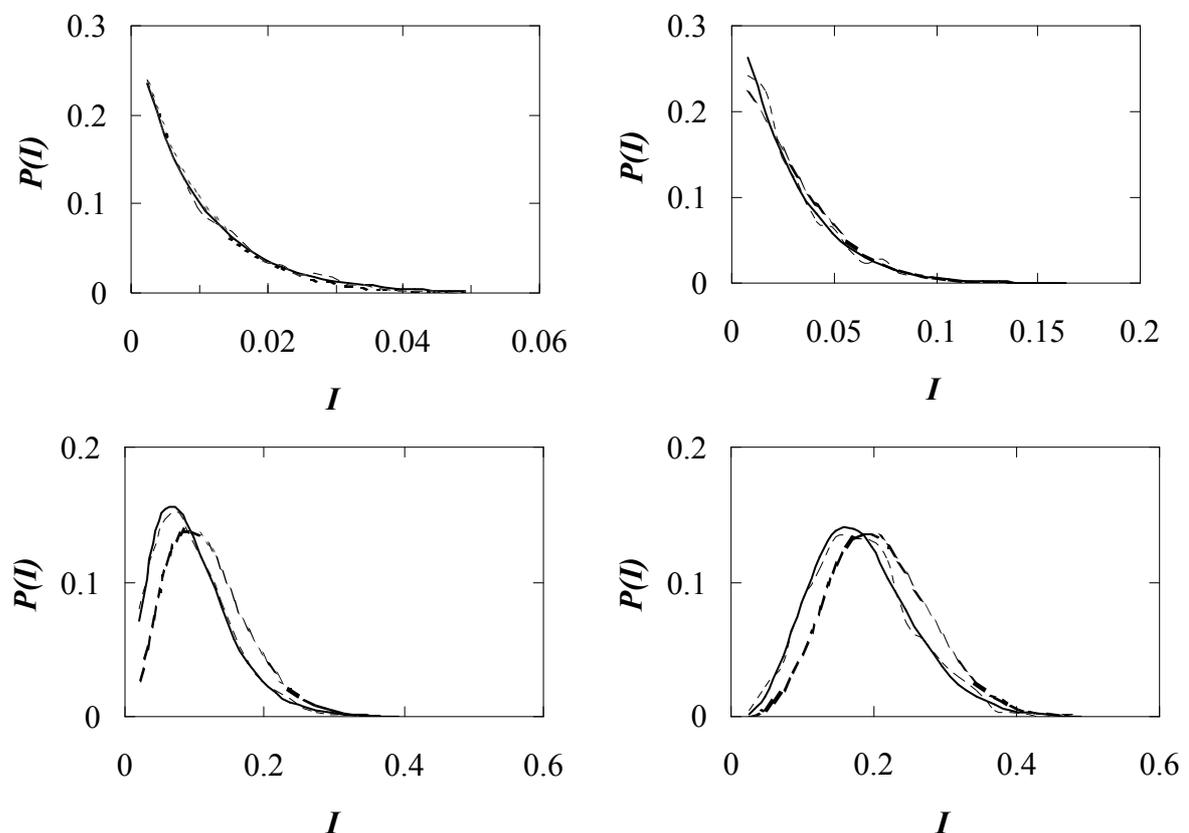


Figura 7.14 Función densidad de probabilidad de la intensidad semiempírica (línea continua), en la que los parámetros se estiman usando (7.40). De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, 21, 41 71 y 101 modos corregidos. Se comparan los valores con histogramas normalizados de la intensidad obtenidos por simulación (línea discontinua trazo corto). También se compara con los valores ofrecidos por la distribución de Rice cuando sus parámetros se hallan teóricamente usando (7.28) (línea discontinua trazo largo). Todos los valores de la intensidad están normalizados por el valor central de la macha de Airy cuando no existe atmósfera.

7.6 Conclusiones

Se ha descrito la estadística de la intensidad luminosa en el punto central del plano imagen. Generalizando el modelo de formación de imágenes de Goodman al caso de corrección parcial se ha obtenido una función densidad de probabilidad cuyos parámetros se obtienen de la varianza residual en el frente de onda y del parámetro generalizado de Fried. Se ha aproximado esta distribución por una distribución modificada de Rice explotando la analogía física entre el caso de corrección parcial y la suma de un patrón de *speckle* más un fondo coherente. A continuación se han obtenido diversas aproximaciones de esta distribución y se ha realizado la generalización a todo el plano imagen. Se ha demostrado que el cociente señal-ruido es función tanto del nivel de corrección como de la posición en el plano imagen. Este hecho es fundamental en el análisis de los sistemas de óptica adaptativa en aplicaciones como la búsqueda de exoplanetas. Por fin, se han explicado una serie de técnicas semiempíricas para estimar la estadística a partir de medidas experimentales cuando existen fuentes de error importantes.