

Universidad de Cantabria

Tesis Doctoral

# FORMACIÓN DE IMÁGENES EN ÓPTICA ADAPTATIVA

Vidal Fernández Canales

## **Capítulo 4**

# **SIMULACIÓN DE SISTEMAS DE ÓPTICA ADAPTATIVA**

En este capítulo se describe un método de simulación de sistemas de óptica adaptativa desarrollado por N. Roddier (1990) en el que, por las razones expuestas en capítulos anteriores, se considera que la atmósfera sólo afecta a la fase de las ondas que la atraviesan y se desprecian las variaciones de la amplitud. Esta simulación nos permitirá en capítulos posteriores analizar las magnitudes que describen el comportamiento de los sistemas de formación de imágenes con óptica adaptativa:

- La función de estructura de fase, que contiene la información sobre la estadística del frente de onda.

- La función de transferencia óptica, que describe el efecto de la corrección en el espacio de frecuencias.
- La función imagen de un objeto puntual, que guarda la misma información que la anterior pero en el espacio directo.

El cálculo analítico de las funciones anteriores es en muchos casos imposible para los dispositivos de formación de imágenes que cuentan con sistemas de óptica adaptativa. La comprobación en sistemas reales es también muy complicada. El número de sistemas en funcionamiento es muy escaso y debido a su complejidad sus resultados son en ocasiones difíciles de interpretar.

La simulación del sistema permite una obtención más sencilla de los resultados, la realización de aproximaciones, la separación de las distintas contribuciones, la estimación de la precisión del cálculo e incluso acceder a todo tipo de condiciones experimentales, lo que de otra manera sería imposible. Su importancia para la realización de este trabajo justifica que se le dedique un capítulo. Como comprobación algunos resultados se comparan con los de otros autores (Noll 1976, Roddier N. 1990, Korff 1973, Wang y Markey 1978, Conan 1995).

## **4.1 Simulación de frentes de onda compensados**

En este apartado se describe el algoritmo escogido para simular frentes de onda aleatorios que sigan la estadística de la atmósfera y se ofrecen las razones de su elección. En primer lugar se describe la base de los polinomios de Zernike y la de las funciones de Karhunen-Loève, de uso común para representar funciones en pupilas circulares. A continuación se propone un nuevo criterio para estimar el número mínimo de modos necesarios en la descomposición del frente de onda. Por fin se enumeran los pasos a seguir para generar frentes de onda y se muestran algunos ejemplos ilustrativos.

### 4.1.1 Elección del algoritmo

El primer método para simular un sistema de óptica adaptativa para corregir frentes de onda distorsionados por la atmósfera fue propuesto por McGlamery (1976). La simulación del frente de onda distorsionado requiere diversos pasos. En primer lugar, se genera una matriz de números complejos aleatorios con distribución gaussiana. Para que el frente de onda simulado posea las mismas propiedades estadísticas que los que atraviesan la atmósfera, es necesario filtrar la matriz generada por el espectro de Kolmogorov. Se multiplica la matriz por la raíz cuadrada del espectro de potencias y se calcula su transformada de Fourier discreta (Brigham 1974, Press et al. 1989). Tanto la parte real como la imaginaria de esta matriz representan una pantalla de fase instantánea. Este método presenta dos problemas. Por una parte, el tiempo de cálculo es elevado porque requiere una transformada de Fourier bidimensional para pasar del espacio de frecuencias al espacio de las fases. Además, algunas aberraciones como el *tilt* son subestimadas, debido a un muestreo inadecuado de las bajas frecuencias. Como las aberraciones de bajo orden encierran un gran porcentaje del espectro de energías de la atmósfera, este método de simulación es inadecuado para estudiar sistemas de corrección parcial.

Se han desarrollado diferentes algoritmos de simulación para solucionar los problemas explicados (Johansson et al. 1990, Lane et al. 1992, Glindemann et al. 1993, Canon 1996, Kouznetsov et al. 1997, Roggemann 1996). Se ha elegido el desarrollado por N. Roddier (1990) por sus múltiples ventajas. El tiempo de cómputo es reducido y se estima de forma correcta la energía en cada modo. No requiere grandes cantidades de memoria pues cada simulación se caracteriza por un reducido grupo de parámetros. Se puede realizar la simulación para unas condiciones de atmósfera determinadas y luego adaptarla a otras. Por último la descomposición modal de la distorsión atmosférica hace especialmente sencilla la simulación de la corrección por óptica adaptativa: basta anular los coeficientes de las aberraciones corregidas.

### 4.1.2 Polinomios de Zernike y funciones de Karhünen-Loève

Los polinomios de Zernike forman una base ortonormal en la pupila circular de radio unidad y sus primeros términos se relacionan con las aberraciones clásicas, por lo que son comúnmente utilizados para desarrollar otras funciones en esta pupila. En el capítulo anterior se explicaron las ventajas de una representación modal del frente de onda en los sistemas reales. Se escoge la normalización sugerida por Noll (1976) para estos polinomios. En coordenadas polares  $(r, \theta)$  se expresan:

$$\begin{aligned} Z_{\text{par } i} &= \sqrt{n+1} R_n^m(r) \sqrt{2} \cos(m\theta) & m \neq 0 \\ Z_{\text{impar } i} &= \sqrt{n+1} R_n^m(r) \sqrt{2} \sin(m\theta) & m \neq 0 \\ Z_i &= \sqrt{n+1} R_n^0(r) & m = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde:

$$R_n^m(r) = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! [(n+m)/2 - s]! [(n-m)/2 - s]!} r^{n-2s} \quad (4.2)$$

Los primeros polinomios de Zernike se muestran en la tabla 4.1 (una representación gráfica de estos polinomios se puede encontrar en la figura 11.9). El frente de onda se desarrolla en la base de los coeficientes de Zernike:

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{i=2}^{i_{\max}} a_i Z_i(\vec{r}) \quad (4.3)$$

donde el primer coeficiente (*piston*) del desarrollo el frente de onda se supone nulo, ya que no se conoce, como se explicó en el capítulo anterior, pero no influye en la calidad de las imágenes. Es evidente que en una simulación no se puede usar un número infinito de polinomios y se denomina  $i_{\max}$  el número máximo de polinomios que se simulan. Al no usar las infinitas funciones de la base (es decir todos los polinomios) el frente de onda se representa con un error, que crece al disminuir el número de polinomios que se utilizan en el proceso. Se necesita establecer un criterio para decidir el número de polinomios

necesario en la simulación para unas condiciones dadas. Con tal fin se define la varianza residual del frente de onda sobre la superficie de la pupila tras la corrección de  $j$  polinomios de Zernike. Noll dedujo el valor de esta varianza:

$$\Delta_j = \langle \phi^2(\vec{r}) \rangle = \sum_{i=2}^{\infty} a_i^2 = \sum_{i=j}^{\infty} a_i^2 = \text{coef}(j) \left( \frac{D}{r_0} \right)^{5/3} \quad (4.4)$$

donde  $\text{coef}(j)$  es el coeficiente correspondiente a  $j$  polinomios corregidos. La tabla 4.2 muestra los valores predichos por Noll para esta varianza en función del grado de corrección. Un criterio para calcular el mínimo número de polinomios necesario es imponer que la varianza residual debida a los términos no incluidos en la simulación no exceda el valor de  $(\pi/5)^2 \text{ rad}^2$  (Conan 1995):

$$\Delta_{\text{imax}} = \sum_{i=\text{imax}}^{\infty} a_i^2 < \left( \frac{\pi}{5} \right)^2 \text{ rad}^2 \quad (4.5)$$

		Frecuencia acimutal (m)				
		0	1	2	3	4
orden radial (n)	0	$Z_1=1$ Constante				
	1		$Z_2=2r \cos \theta$ $Z_3=2r \sin \theta$ Tilts			
	2	$Z_4=3^{1/2} (2r^2 - 1)$ Desenfoque		$Z_5=6^{1/2} r^2 \sin 2 \theta$ $Z_6=6^{1/2} r^2 \cos 2 \theta$ Astigmatismo		
	3		$Z_7=8^{1/2} (3r^3 - 2r) \sin \theta$ $Z_8=8^{1/2} (3r^3 - 2r) \cos \theta$ Coma		$Z_9=8^{1/2} r^3 \sin 3 \theta$ $Z_{10}=8^{1/2} r^3 \cos 3 \theta$ Coma de curvatura 0	
	4	$Z_{11}=5^{1/2} (6r^4 - 6r^2 + 1)$ Esférica		$Z_{12}=10^{1/2} (4r^4 - 3r^2) \cos 2 \theta$ $Z_{13}=10^{1/2} (4r^4 - 3r^2) \sin 2 \theta$ Astigmatismo 5º orden		$Z_{14}=10^{1/2} r^4 \cos 4 \theta$ $Z_{15}=10^{1/2} r^4 \sin 4 \theta$

Tabla 4.1 Forma explícita de los 15 primeros polinomios de Zernike.

Índice del último modo corregido $j$	Varianza residual $\Delta_j$ , $\text{rad}^2$
1	1.0299 $(D/r_0)^{5/3}$
2	0.582 $(D/r_0)^{5/3}$
3	0.134 $(D/r_0)^{5/3}$
4	0.111 $(D/r_0)^{5/3}$
5	0.0880 $(D/r_0)^{5/3}$
6	0.0648 $(D/r_0)^{5/3}$
7	0.0587 $(D/r_0)^{5/3}$
8	0.0525 $(D/r_0)^{5/3}$
9	0.0463 $(D/r_0)^{5/3}$
10	0.0401 $(D/r_0)^{5/3}$
11	0.0377 $(D/r_0)^{5/3}$
12	0.0352 $(D/r_0)^{5/3}$
13	0.0328 $(D/r_0)^{5/3}$
14	0.0304 $(D/r_0)^{5/3}$
15	0.0279 $(D/r_0)^{5/3}$
16	0.0267 $(D/r_0)^{5/3}$
17	0.0255 $(D/r_0)^{5/3}$
18	0.0243 $(D/r_0)^{5/3}$
19	0.0232 $(D/r_0)^{5/3}$
20	0.0220 $(D/r_0)^{5/3}$
21	0.0208 $(D/r_0)^{5/3}$
$j > 21$	$\approx 0.2944 j^{-\sqrt{3}/2} (D/r_0)^{5/3}$

Tabla 4.2 Varianza residual en el frente de onda tras la corrección de los  $j$  primeros polinomios de Zernike.

Este criterio presenta problemas si el máximo número de modos que puede corregir el sistema es del orden del número de modos que se utiliza. Por ejemplo, para unas condiciones de atmósfera y telescopio tales que  $D/r_0=40$ , el criterio anterior requiere emplear 861 polinomios (hasta el orden radial 40) en la descomposición del frente de onda. Esto significa que la varianza residual debida a los términos del 862 hasta el infinito se desprecia frente a la de los 861 primeros. Sin embargo, si se simula un sistema con suficientes microlentes y actuadores como para corregir 850 polinomios los resultados no serán fiables. Es evidente que el frente de onda representado sólo por los modos del 851 al 861 tendrá una varianza residual mucho menor de la que le corresponde, y que no se puede despreciar frente a ella la varianza de los términos del 862 en adelante. Por tanto, en este trabajo se propone un criterio distinto para calcular el número mínimo de polinomios en la simulación. Se ha de conocer el número máximo de modos que permite corregir el sistema  $N_R$  y hallar la varianza residual del frente de onda en ese nivel de corrección  $\Delta_R$ . Para hallar el número de modos  $i_{\max}$  que se ha de utilizar en la simulación se impone que la varianza residual debida a los términos no incluidos en la simulación sea al menos un orden de magnitud menor que  $\Delta_R$ :

$$\Delta_R = \sum_{i=N_R+1}^{\infty} a_i^2 \geq 10 \sum_{i=i_{\max}}^{\infty} a_i^2 \quad (4.6)$$

Una comprobación (que incluso podría ser otro método de hallar  $N_R$ ) consiste en obtener la función de estructura y cerciorarse de que el primer tramo ajusta a  $r^{5/3}$  (ver apartado 4.3).

Siguiendo el modelo de turbulencia de Kolmogorov se puede deducir que los coeficientes  $a_i$  del desarrollo del frente de onda en polinomios de Zernike son variables gaussianas con media nula. Sin embargo, no es posible simular un frente de onda obteniendo directamente estos coeficientes, ya que los coeficientes de los polinomios de Zernike no son estadísticamente independientes. Existe una base de funciones estadísticamente independientes: las funciones de Karhünen-Loève. Su inconveniente es que no son analíticas, pero, como cualquier otra función, se pueden desarrollar en la base de los polinomios de Zernike.

Por tanto, para simular un frente de onda se han de generar los coeficientes de las funciones de Karhünen-Loève (estadísticamente independientes), hallar a partir de estos los coeficientes del desarrollo en polinomios de Zernike (es decir, cambiar la base en la que se representa el frente de onda) y hallar el frente de onda de (4.3).

Para poder generar los coeficientes se han de calcular las covarianzas de los polinomios. Las covarianzas teóricas de los coeficientes de Zernike se pueden determinar por consideraciones energéticas (Noll 1976, Wang y Markey 1978):

$$C_{ii'} = \langle a_i^* a_{i'} \rangle = \frac{K_{zz'} \delta_z \Gamma\left(\frac{n+n'-5/3}{2}\right) \left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3}}{\Gamma\left(\frac{n-n'+17/3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n'-n+17/3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+n'+23/3}{2}\right)} \quad (4.7)$$

donde  $n, m, n'$  y  $m'$  son los órdenes radiales y las frecuencias acimutales de  $Z_i$  y  $Z_{i'}$ .  $\Gamma$  es la función gamma.  $\delta_z$  es una función cuyo valor es:

$$\delta_z = \begin{cases} 1 & \text{si } m = m' \text{ y si } \begin{cases} j + j' = \text{par} \\ \text{ó} \\ m = 0 \end{cases} \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases} \quad (4.8)$$

$K_{zz'}$  es un factor igual a:

$$K_{zz'} = 2.2698 (-1)^{(n+n'-2m)/2} \sqrt{(n+1)(n'+1)} \quad (4.9)$$

El factor  $(D/r_0)^{5/3}$  es un factor constante de escalado en la matriz  $C$ ; se puede ignorar durante el proceso de simulación y multiplicar al final el frente de onda por  $(D/r_0)^{5/6}$ . Por consiguiente una misma simulación puede servir para comprobar el sistema en distintas condiciones de la atmósfera. A continuación se muestra la matriz de covarianzas para los modos de la tabla 4.1 (excluyendo el *piston*) en unidades de  $(D/r_0)^{5/3}$ :

$$C = \begin{pmatrix} 04557 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -00144 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 04557 & 0 & 0 & 0 & -00144 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 00236 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -00039 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 00236 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -00039 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 00236 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -00039 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -00144 & 0 & 0 & 0 & 00063 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -00144 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 00063 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 00063 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 00063 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -00039 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 00025 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -00039 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 00025 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -00039 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 00025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 00025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 00025 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

De (4.7) se puede deducir que la matriz  $C$  de covarianzas es hermítica. Por tanto, se puede descomponer en el producto de tres matrices:

$$C = X S X^T \quad (4.11)$$

donde  $S$  es una matriz diagonal y  $X$  unitaria, es decir su traspuesta es igual a su inversa ( $X^{-1}=X^T$ ). Esta descomposición se suele denominar descomposición de valor singular (SVD). Como se describe en el siguiente apartado se usa para pasar de la base de los polinomios de Zernike a la de las funciones de Karhünen-Loève:  $X$  es la matriz de cambio de base y  $S$  la matriz de covarianzas de las funciones de Karhünen-Loève, que es diagonal al ser estos estadísticamente independientes.

### 4.1.3 Algoritmo de simulación y compensación

Según la discusión anterior se han de seguir los siguientes pasos para simular  $N_{\text{ex}}$  frentes de onda aleatorios distorsionados por la atmósfera:

1 - Estimación del número de polinomios  $N_R$  necesario en la simulación aplicando (4.6) (se excluye el *piston*).

2 - Descomposición SVD de la matriz de covarianzas para ese número de polinomios.

3 - Generación de  $N_R$  variables gaussianas  $b_i$  (con  $i$  variando de 1 hasta  $N_R$ ) de media nula y varianza  $S_{ii}$  (elementos de la diagonal de la matriz de covarianzas de las funciones de Karhünen-Loève).

$N_{ex}$  veces



4 - Cálculo de los coeficientes de Zernike mediante el cambio de base:  $A=XB$ , donde  $A$  es el vector de los coeficientes  $a_i$  de Zernike,  $B$  el vector de los coeficientes  $b_i$  de Karhünen-Loève y  $X$  la matriz de cambio de base.

corrección



5 - Multiplicación de los coeficientes  $a_i$  por  $(D/r_0)^{5/6}$  para incluir las condiciones de la atmósfera.

6 - Cálculo del frente de onda a partir de (4.3).

La descomposición modal de la distorsión atmosférica facilita la simulación de la compensación por óptica adaptativa. Corregir los  $j$  primeros coeficientes significa anularlos en el desarrollo del frente de onda. Incluso permite introducir un pequeño error aleatorio en la corrección: por ejemplo simular cada coeficiente corregido como una variable aleatoria gaussiana cuya anchura dependa de la desviación típica en la corrección del coeficiente y cuya media represente un error sistemático en su corrección. La simulación de la compensación en el esquema anterior supone la inclusión de un nuevo paso entre el 4 y el 5, donde los coeficientes corregidos tomen su nuevo valor.

En general, los sistemas corrigen los polinomios de Zernike, aunque se pueden desarrollar sistemas que corrijan las aberraciones de Karhünen-Loève. La ventaja de los polinomios de Zernike es que permiten una interpretación sencilla de la corrección: tienen forma analítica y se relacionan con aberraciones conocidas. La ventaja de las funciones de Karhünen-Loève es que se evita el cambio de base del paso 4 y que su corrección es más efectiva: en la tabla 4.3 se muestra la varianza residual tras la corrección de  $j$  de estas

funciones. Estos datos se confrontan en la figura 4.1 con los de la varianza residual tras corregir  $j$  polinomios de Zernike (tabla 4.2). Se observa que la corrección de Karhunen-Loève es más efectiva pues su varianza residual es menor para un mismo número de modos corregidos.

Índice del último modo corregido $j$	Varianza residual $\Delta_j$ , rad <sup>2</sup>
1	1.0299 $(D/r_0)^{5/3}$
2	0.581 $(D/r_0)^{5/3}$
3	0.133 $(D/r_0)^{5/3}$
4	0.109 $(D/r_0)^{5/3}$
5	0.0849 $(D/r_0)^{5/3}$
6	0.0617 $(D/r_0)^{5/3}$
7	0.0551 $(D/r_0)^{5/3}$
8	0.0485 $(D/r_0)^{5/3}$
9	0.0422 $(D/r_0)^{5/3}$
10	0.0360 $(D/r_0)^{5/3}$
11	0.0333 $(D/r_0)^{5/3}$
12	0.0306 $(D/r_0)^{5/3}$
13	0.0281 $(D/r_0)^{5/3}$
14	0.0260 $(D/r_0)^{5/3}$
15	0.0239 $(D/r_0)^{5/3}$
16	0.0225 $(D/r_0)^{5/3}$
17	0.0211 $(D/r_0)^{5/3}$
18	0.0202 $(D/r_0)^{5/3}$
19	0.0192 $(D/r_0)^{5/3}$
20	0.0182 $(D/r_0)^{5/3}$
21	0.0172 $(D/r_0)^{5/3}$

Tabla 4.3 Varianza residual en el frente de onda tras la corrección de los  $j$  primeros polinomios de Karhunen-Loève.

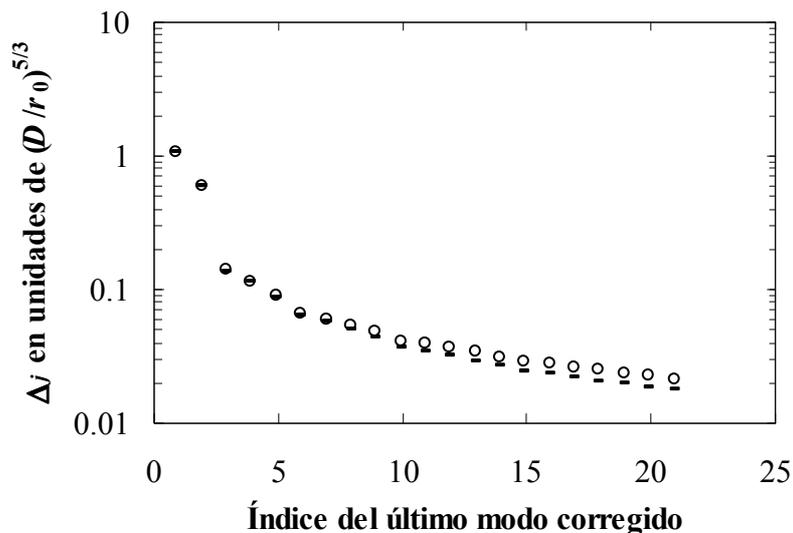


Figura 4.1 Varianza residual en el frente de onda tras la corrección de  $j$  modos de Zernike (círculos) y de Karhünen-Loëve (líneas). La corrección de Karhünen-Loëve es más efectiva pues su varianza residual es menor para un mismo número de modos corregidos

Se aprecia además que la contribución a la varianza residual de los primeros modos es mucho mayor que la de los siguientes. Si esto no fuera así, la simulación no ofrecería resultados válidos porque se utiliza un número finito de coeficientes.

A continuación se muestran frentes de onda simulados siguiendo el proceso descrito. En todos los casos un frente de onda plano atraviesa la atmósfera turbulenta y llega a la pupila del telescopio. Las condiciones de la atmósfera son siempre iguales,  $D/r_0=38.4$ , pero se varía el número de polinomios de Zernike o de funciones de Karhünen-Loëve corregidos. La figura 4.2 muestra un frente de onda con 21 polinomios de Zernike corregidos y otro en que se han corregido 81 polinomios y se puede apreciar que las fases toman valores menores. Por tanto se asemeja más que en el caso anterior a un frente de onda plano. En la figura 4.3 se presentan sendos frentes de onda, uno con 21 funciones de Karhünen-Loëve corregidas y otro con 81. Apenas se aprecia diferencia con la figura 4.2. aunque la corrección sea más efectiva. Además se presenta en la figura 4.4 el corte de la figura 4.2 con un plano que pasa por el origen para comparar más adelante con el resto de funciones de las que, en general, se muestran cortes bidimensionales en lugar de la función tridimensional, para facilitar su análisis.

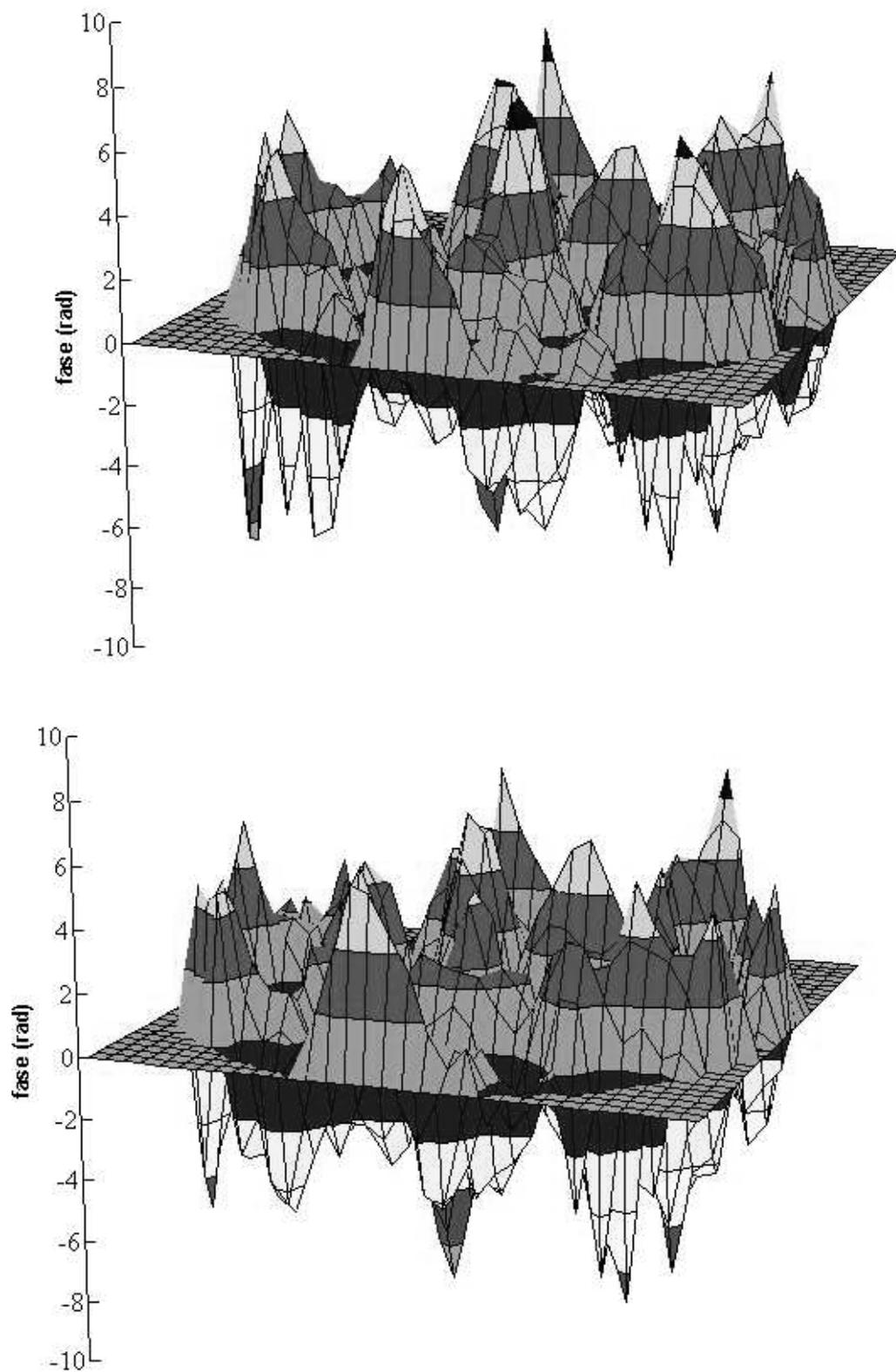


Figura 4.2 Frentes de onda simulados con  $D/r_0=38.4$  y 21 (arriba) o 81 (abajo) polinomios de Zernike corregidos.

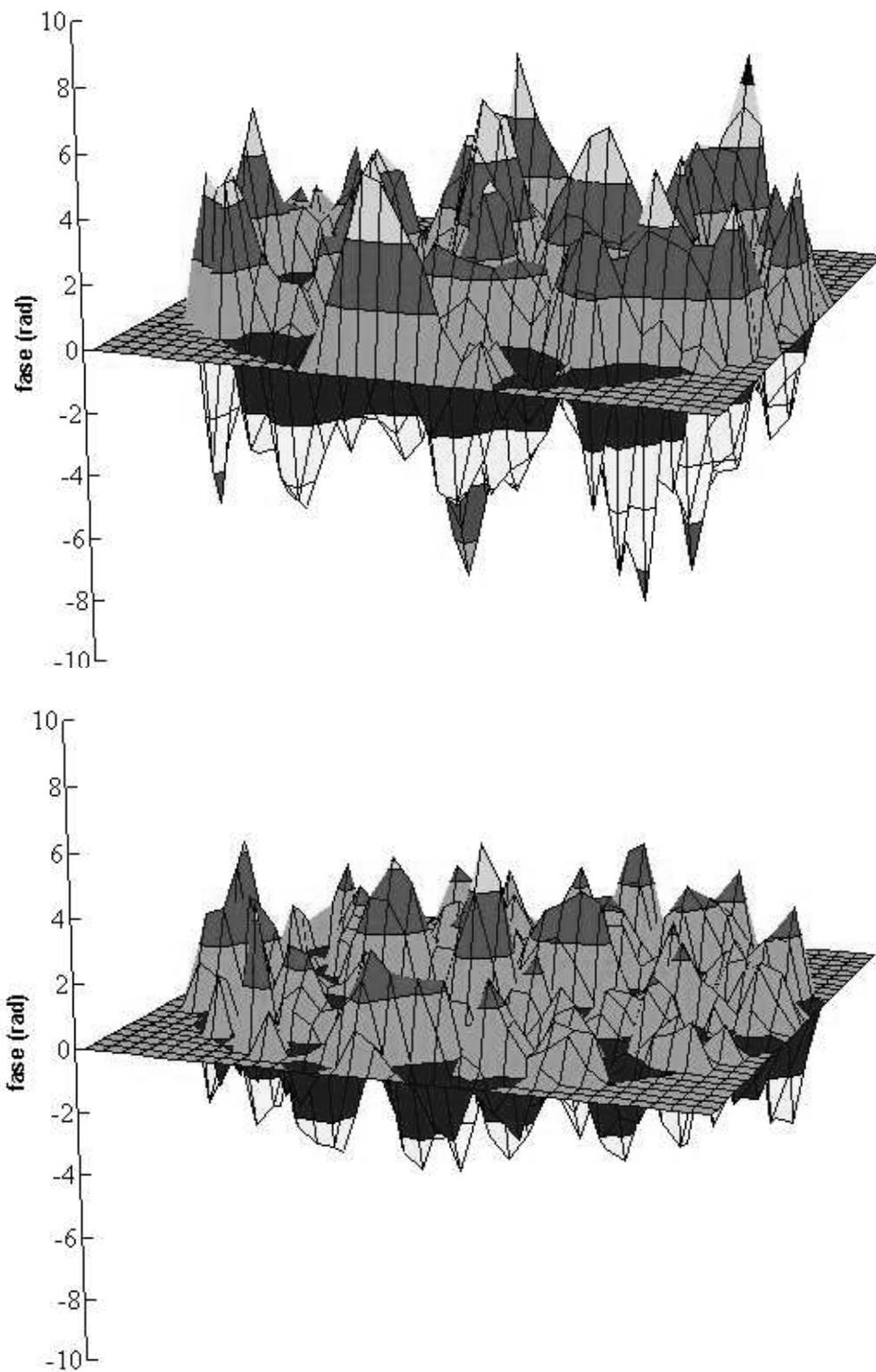


Figura 4.3 Frentes de onda simulados con  $D/r_0=38.4$  y 21 (arriba) o 81 (abajo) polinomios de Karhünen-Loève corregidos.

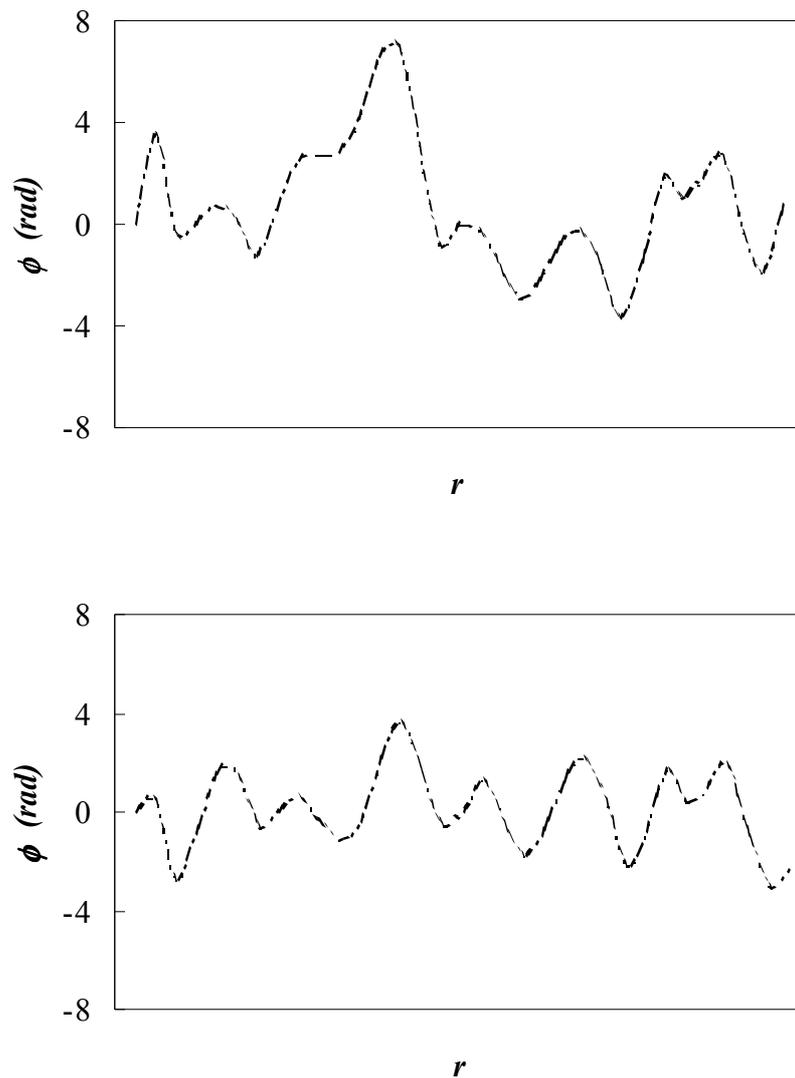


Figura 4.4 Corte de los frente de onda simulados con  $D/r_0=38.4$  y 21 (arriba) o 81 (abajo) polinomios de Zernike corregidos.

## 4.2 Varianza residual en el frente de onda

La estacionariedad del frente de onda distorsionado por la atmósfera surge del hecho de que todos los puntos del frente de onda son equivalentes y fue introducida en el primer capítulo. Sin embargo, tras la corrección del frente de onda en un sistema de óptica

adaptativa, los puntos ya no son equivalentes. Por ejemplo, en el caso de la corrección del *piston*, al punto central de la pupila se le resta el promedio de la fase en un círculo a su alrededor; sin embargo, a un punto en el borde se le resta el promedio de la fase en un disco excéntrico a él. Es obvio que a ambos puntos no se les trata de forma similar y ya no son equivalentes tras la corrección de tan sólo el primero de los coeficientes. Todos los puntos siguen manteniendo la estadística gaussiana de media nula, pero la varianza ya no es igual en todos ellos. La varianza residual sobre la pupila a la que se ha aludido anteriormente es en realidad un promedio sobre toda la superficie.

Como ejemplo, a continuación se halla la varianza residual en cada punto del frente de onda en el caso más simple, corrección del primero de los coeficientes. Sea  $\phi$  la fase sin corregir y  $\phi_C$  la fase tras corrección del *piston* sobre la pupila de área  $S_p$ :

$$\phi_C(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) - \frac{1}{S_p} \int_{S_p} \phi(\vec{\rho}) d\vec{\rho} \quad \vec{r} \in S_p \quad (4.12)$$

Para hallar la varianza residual en el frente de onda corregido sin que aparezcan términos de valor infinito se escribe:

$$\begin{aligned} \langle \phi_C(\vec{r})^2 \rangle &= \frac{1}{S_p^2} \int \int_{S_p, S_p} \langle [\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{\rho})][\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{\rho}')] \rangle d\vec{\rho} d\vec{\rho}' = \\ &= \frac{1}{S_p^2} \int \int_{S_p, S_p} \left\langle \frac{1}{2} [\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{\rho})]^2 + \frac{1}{2} [\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{\rho}')]^2 - \frac{1}{2} [\phi(\vec{\rho}) - \phi(\vec{\rho}')]^2 \right\rangle d\vec{\rho} d\vec{\rho}' \end{aligned} \quad (4.13)$$

que se puede expresar en la forma:

$$\langle \phi_C(\vec{r})^2 \rangle = \frac{1}{S_p} \int_{S_p} D_\phi(\vec{r} - \vec{\rho}) d\vec{\rho} - \frac{1}{2S_p^2} \int \int_{S_p, S_p} D_\phi(\vec{\rho} - \vec{\rho}') d\vec{\rho} d\vec{\rho}' \quad (4.14)$$

dónde  $D_\phi$  es la función de estructura de fase sin corregir. En el segundo término de la igualdad, el primer sumando depende de la posición del punto en la pupila, mientras el segundo es una constante. Para obtener el primer sumando se utiliza la función de estructura de fase propuesta por Kolmogorov, ecuación (1.11), y se integra

numéricamente. El valor del sumando constante se puede hallar integrando la ecuación anterior en toda la pupila:

$$\frac{1}{S_p} \int_{S_p} \langle \phi_C(\vec{r})^2 \rangle d\vec{r} = \frac{1}{2S_p^2} \iint_{S_p, S_p} D_\phi(\vec{\rho} - \vec{r}) d\vec{\rho} d\vec{r} \quad (4.15)$$

El primer término de esta ecuación es la varianza promedio en el frente de onda tras la corrección del *piston*, cuyo valor fue predicho por Noll (tabla 4.2):

$$\frac{1}{S_p} \int_{S_p} \langle \phi_C(\vec{r})^2 \rangle d\vec{r} = 1.0299 \left( \frac{D}{r_0} \right)^{5/3} \quad (4.16)$$

Esta constante se introduce en (4.14) y se obtiene la varianza residual que se muestra en la figura 4.5. Se compara con los valores hallados por simulación. Los valores ajustan perfectamente, lo que constituye la primera comprobación del funcionamiento correcto de los programas de simulación que se han desarrollado para este trabajo.

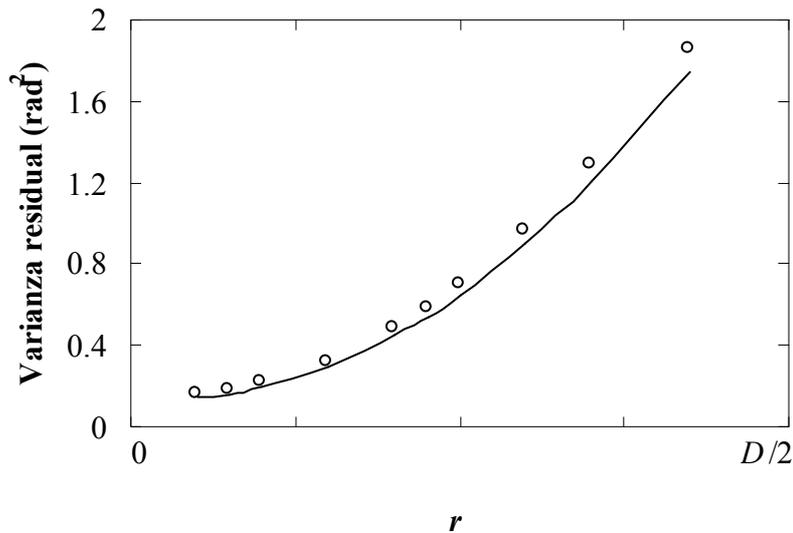


Figura 4.5 Varianza residual obtenida por simulación para  $D/r_0=1$  y 1 polinomio de Zernike corregido (puntos), comparada con el valor teórico (línea continua).

A medida que se corrigen más modos, la varianza del frente de onda cambia en menor medida al variar la posición en la pupila (Conan 1995, Cagigal y Canales 1997). En la figura 4.6 se muestra la varianza residual obtenida por simulación para 10 polinomios corregidos (reescalada para comparar con la anterior). Se puede observar que aunque la varianza no es uniforme, su valor varía mucho menos que en el caso de un solo coeficiente corregido. En realidad, con muy pocos polinomios corregidos la varianza en cada punto es muy similar a la varianza promedio sobre toda la superficie del frente de onda, por lo que se recupera la estacionariedad.

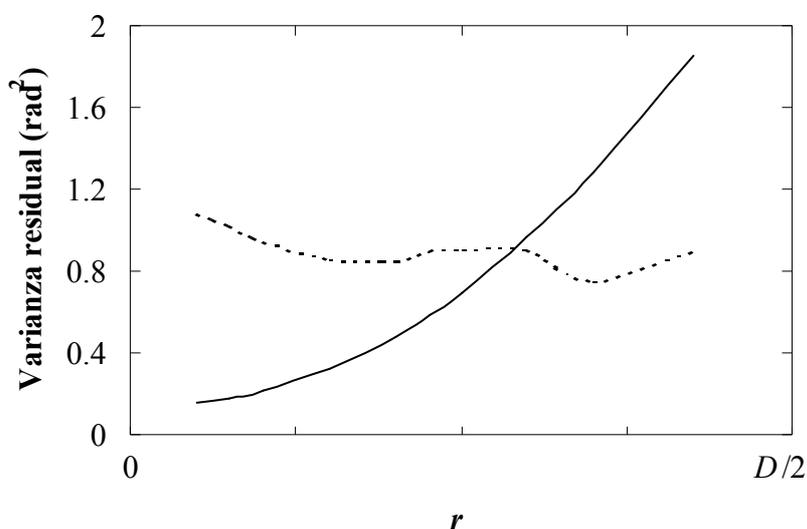


Figura 4.6 Varianza residual obtenida por simulación para 1 (línea continua) y para 10 (discontinua) polinomios. Esta última ha sido reescalada, de forma que se puede observar que, aunque la varianza no es uniforme, su valor varía mucho menos que en el caso de un solo coeficiente corregido.

La varianza residual es fundamental para caracterizar las prestaciones de los sistemas de óptica adaptativa. En la figura 4.7 se muestra la varianza promedio sobre todo el frente de onda en función del grado de corrección. Se compara con los valores teóricos de la tabla 4.2. La simulación ofrece resultados idénticos a los teóricos.

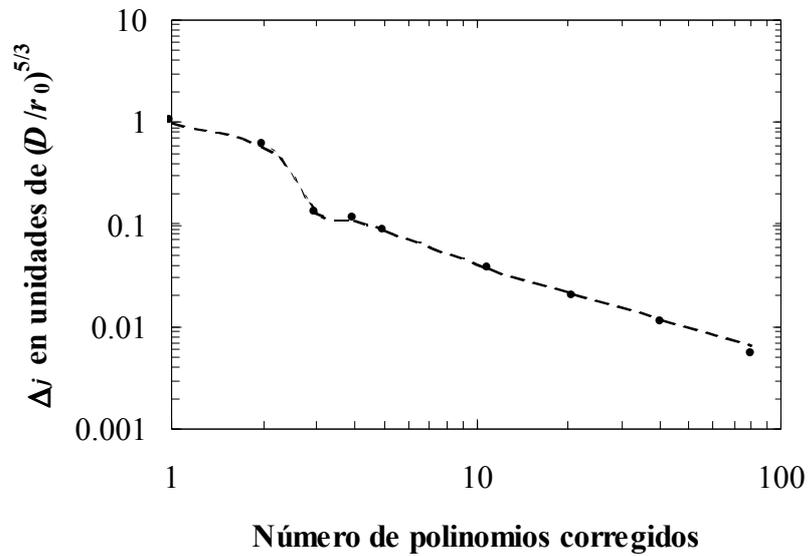


Figura 4.7 Varianza promedio sobre la superficie del frente de onda en función del grado de corrección. Se comparan los valores teóricos de la tabla 4.2 (línea discontinua) con los que ofrece la simulación (puntos).

### 4.3 Función de estructura

La función de estructura se puede obtener directamente de pantallas de fase simuladas siguiendo la definición (1.10), pero teniendo en cuenta que la pérdida de la estacionariedad conduce a que la función de estructura no dependa sólo del vector que une dos puntos, sino de la posición de los propios puntos:

$$D_\phi(\vec{r}, \vec{\rho}) = \left\langle (\phi(\vec{r} + \vec{\rho}) - \phi(\vec{r}))^2 \right\rangle \quad (4.17)$$

Si se simula una pantalla de fase con  $N \times N$  puntos, el número de valores de la función de estructura es del orden de  $N^4$ . El muestreo de la pantalla de fase ha de ser suficiente para reproducir con precisión los polinomios que se utilicen en la descomposición modal. En

la práctica se utilizan al menos 64x64 puntos. Por tanto, el número de valores de la función de estructura es enorme. En general no es posible manejar tal cantidad de información, y se define como función de estructura el promedio de (4.17) sobre todas las parejas de puntos de la pupila cuya distancia sea  $\rho$ :

$$D_\phi(\rho) = \frac{\int D_\phi(\vec{r}, \rho) P(\vec{r}) P(\vec{r} + \rho) d\vec{r}}{\int P(\vec{r}) P(\vec{r} + \rho) d\vec{r}} \quad (4.18)$$

Es útil desarrollar (4.18) y cambiar el orden de los promedios espacial y temporal, de forma que la función de estructura se exprese como:

$$D_\phi(\rho) = \frac{\left\langle \int [\phi^2(\vec{r}) + \phi^2(\vec{r} + \rho)] P(\vec{r}) P(\vec{r} + \rho) d\vec{r} - 2 \int \phi(\vec{r}) \phi(\vec{r} + \rho) P(\vec{r}) P(\vec{r} + \rho) d\vec{r} \right\rangle}{\int P(\vec{r}) P(\vec{r} + \rho) d\vec{r}} \quad (4.19)$$

La primera integral del numerador es el doble de la correlación de  $\phi^2 P$  con  $P$ ; el segundo dos veces la autocorrelación de  $\phi P$ . El numerador es la autocorrelación de  $P$ . Estos términos se calculan en cada pantalla de fase aprovechando las propiedades de la transformada de Fourier, y posteriormente se promedian para hallar la función de estructura.<sup>1</sup> En la figura 4.8 se muestra la función de estructura para unas condiciones de  $D/r_0=38.4$  y distintos números de polinomios corregidos. Se puede observar que, tras la corrección, la función de estructura se comporta a distancias pequeñas como la función de estructura sin corregir, es decir, obedece a una ley  $r^{5/3}$ . A mayores distancias la función de estructura satura a un valor constante.

Este valor es correctamente predicho en algunas referencias (Conan 1995, Goodman 1985), aunque la forma de cálculo es un tanto inexacta. En estas referencias se sustituye la primera integral, dividida por el denominador, por  $2\Delta_j$  (promedio de la varianza residual sobre la pupila). En el apartado anterior se demostró que la varianza residual sobre la pupila no es uniforme y que esta sustitución no es válida. Se ha comprobado en la simulación que al realizar este cambio se obtienen resultados erróneos. Sin embargo, a

<sup>1</sup> Todas las funciones implicadas en este cálculo deben estar definidas en una zona con diámetro al menos  $2D$  (doble del diámetro del telescopio) para cumplir la condición de Nyquist.

largas distancias la sustitución es válida, ya que la zona de intersección de  $\phi^2(\vec{r})P(\vec{r})$  y  $P(\vec{r} + \vec{\rho})$  es muy pequeña y por tanto la varianza es casi constante en ella. La segunda integral de (4.19) es la autocorrelación de la fase y se anula para distancias mayores que la longitud de correlación. Por consiguiente, la función de estructura tiende a  $2\Delta_j$  a largas distancias, como se comprueba en la figura 4.9.

Para estimar el error cometido se supone que se genera una serie de M pantallas de fase. La función de estructura representa un cálculo de la varianza de la fase, así que se puede utilizar la fórmula del error en la estimación de la varianza de una variable aleatoria gaussiana:

$$\sigma_{D(\vec{r},\vec{\rho})} = \sqrt{\frac{2}{M-1}} D_\phi(\vec{r},\vec{\rho}) \tag{4.20}$$

El promedio espacial sólo puede reducir el ruido, por lo que se concluye que:

$$\sigma_{D(\rho)} \leq \sqrt{\frac{2}{M-1}} D_\phi(\vec{\rho}) \tag{4.21}$$

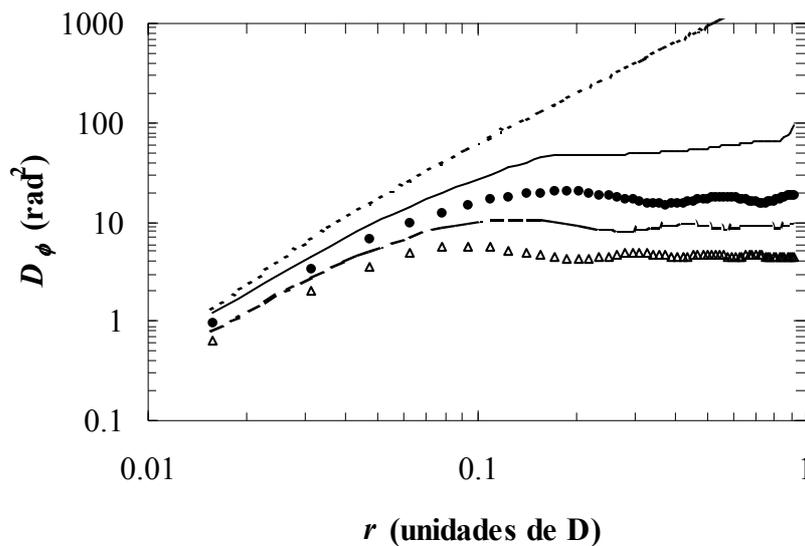


Figura 4.8 Funciones de estructura de fase simuladas para  $D/r_0=38.4$  para 1 (línea discontinua trazo corto), 6 (línea continua), 21 (puntos), 41 (línea discontinua trazo largo) y 81 (triángulos) polinomios de Zernike corregidos.

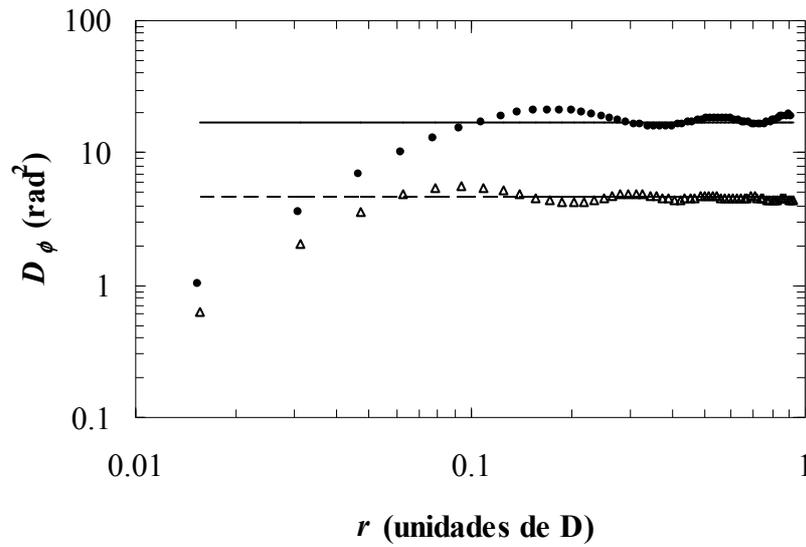


Figura 4.9 Funciones de estructura de fase simuladas para  $D/r_0=38.4$  con 21 (puntos), y 81 (triángulos) polinomios de Zernike corregidos. La línea continua es el doble de la varianza residual promedio en el frente de onda tras la corrección de 21 polinomios; la discontinua representa lo mismo tras corregir 81 polinomios.

## 4.4 Función de transferencia óptica

La función de transferencia óptica puede obtenerse directamente a partir de una pantalla de fase simulada. Según (2.29) la función de transferencia óptica es la autocorrelación de la amplitud compleja en la pupila del telescopio. Por tanto, dada una pantalla de fase  $\phi$ , la función de transferencia óptica se puede hallar por:

$$S(\vec{r}) = \text{TF}^{-1} \left( \left| \text{TF}[P(\vec{r}) \exp(i\phi(\vec{r}))] \right|^2 \right) \quad (4.23)$$

donde TF significa transformada de Fourier y  $\text{TF}^{-1}$  es la transformada inversa. La función de transferencia de larga exposición es el promedio de la funciones de transferencia de corta exposición:

$$\langle S(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M S(\vec{r}) \quad (4.24)$$

donde  $M$  es el número de pantallas de fase simuladas. La ecuación (4.24) representa el promedio de  $M$  números complejos; como consecuencia, el ruido a altas frecuencias es muy importante. La expresión del error es de la forma (Conan 1995):

$$\sigma_{FTO} \leq \sqrt{\frac{FTS - FTO^2}{M}} \quad (4.25)$$

donde la  $FTS$  es la función de transferencia de speckle, estimada por:

$$FTS(\vec{r}) \approx \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M |S(\vec{r})|^2 \quad (4.26)$$

y que se describe en el siguiente apartado. En la figura 4.10 se puede apreciar el ruido a altas frecuencias en la función de transferencia. Con el fin de evitar el promedio de valores complejos, se pueden utilizar (2.34) o (2.37) para calcular la  $FTO$  del sistema o de la atmósfera respectivamente, a partir de la función de estructura (4.18). De esta manera se promedian valores reales en lugar de complejos. El error en el cálculo de la  $FTO$  es en este caso:

$$\sigma_{FTO} < \sqrt{\frac{2}{M-1}} \frac{D_\phi(\rho) FTO(\rho)}{2} \quad (4.27)$$

En la figura 4.10 se compara una  $FTO$  calculada usando (4.24) con otra calculada a partir de la función de estructura. Se observa que el segundo método elimina el ruido a altas frecuencias. Por fin, en la figura 4.11 se muestra la  $FTO$  calculada para  $D/r_0=38.4$  y distintos números de polinomios corregidos. Se aprecia como al crecer el grado de compensación de las distorsiones atmosféricas la  $FTO$  recupera la información de altas frecuencias.

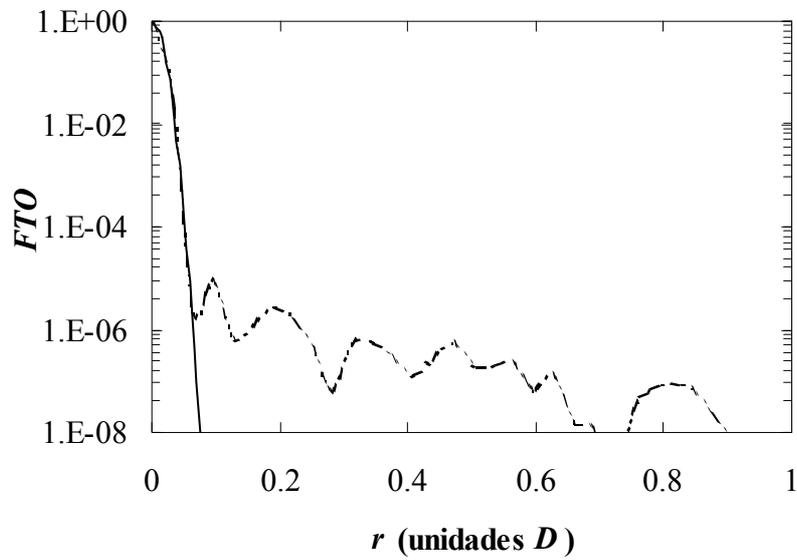


Figura 4.10 Comparación entre la función de transferencia óptica hallada de (4.24) (línea discontinua) y aquella calculada a partir de la función de estructura (línea continua).

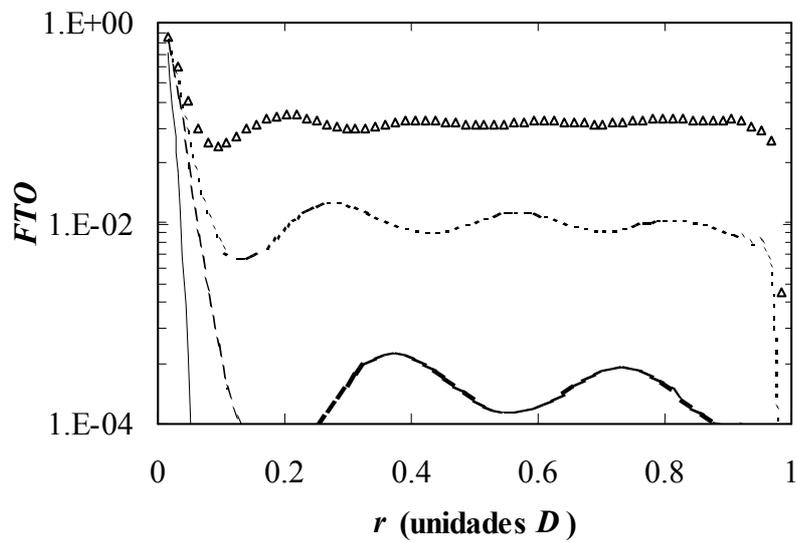


Figura 4.11 Funciones de transferencia óptica simuladas para  $D/r_0=38.4$  para 1 (línea continua), 21 (línea discontinua trazo largo), 41 (línea discontinua trazo corto) y 81 (triángulos) polinomios de Zernike corregidos.

## 4.5 Función de transferencia de *speckle*

La función de transferencia de *speckle* es el promedio del cuadrado del módulo de la función de transferencia instantánea:

$$FTS(\vec{r}) = \langle |S(\vec{r})|^2 \rangle \quad (4.28)$$

Se necesita describir esta función porque en el apartado anterior se ha hallado el error en la simulación de la función de transferencia óptica, a partir del valor de la función de transferencia de *speckle*. Además se aprovecha para realizar un nuevo examen a la simulación que se ha desarrollado, comparando los valores teóricos con los valores simulados. Una última razón es que la función de transferencia de *speckle* tiene una gran importancia en la interferometría de *speckle* y en las técnicas híbridas, en las que se procesan imágenes que provienen de un sistema de óptica adaptativa: esta función retiene información en altas frecuencias espaciales que se pierde en la función de transferencia de larga exposición.

El valor teórico de la función de transferencia de *speckle* en ausencia de corrección fue calculado por Korff (1973), y es igual a:

$$FTS(\vec{r}) = \frac{\int d\vec{u} Q(\vec{r}, \vec{u}) X(\vec{r}, \vec{u})}{\left[ \int d\vec{v} W^2(\vec{v}) \right]^2} \quad (4.29)$$

donde:

$$X(\vec{r}, \vec{u}) = \int d\vec{v} W\left(\frac{\vec{v} + \vec{u} - 2\lambda\vec{r}}{2}\right) W\left(\frac{\vec{v} + \vec{u}}{2}\right) W\left(\frac{\vec{v} - \vec{u} - 2\lambda\vec{r}}{2}\right) W\left(\frac{\vec{v} - \vec{u}}{2}\right) \quad (4.30)$$

con:

$$W(\vec{v}) = 1 \quad \text{si } \vec{v} < D \quad (4.31)$$

y por fin:

$$Q(\bar{r}, \bar{u}) = \exp(-D_\phi(\lambda\bar{r})) \exp \left[ -6.88 \left[ \left( \frac{u}{r_0} \right)^{5/3} - \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{|\bar{u} + \lambda\bar{r}|}{r_0} \right)^{5/3} + \left( \frac{|\bar{u} - \lambda\bar{r}|}{r_0} \right)^{5/3} \right\} \right] \right] \quad (4.32)$$

En la figura 4.12 se comparan los valores teóricos con los simulados para diversos valores de  $D/r_0$ . Los resultados son similares a los obtenidos por otros autores (Conan 1995): se observa que los valores simulados se ajustan perfectamente a los teóricos, salvo que se subestiman ligeramente en el caso de  $D/r_0=38.4$ . Esto se debe a que la contribución de los modos no incluidos en la simulación es mayor cuanto mayor es  $D/r_0$ . Este problema se subsana aumentando el número de modos en el desarrollo del frente de onda simulado.

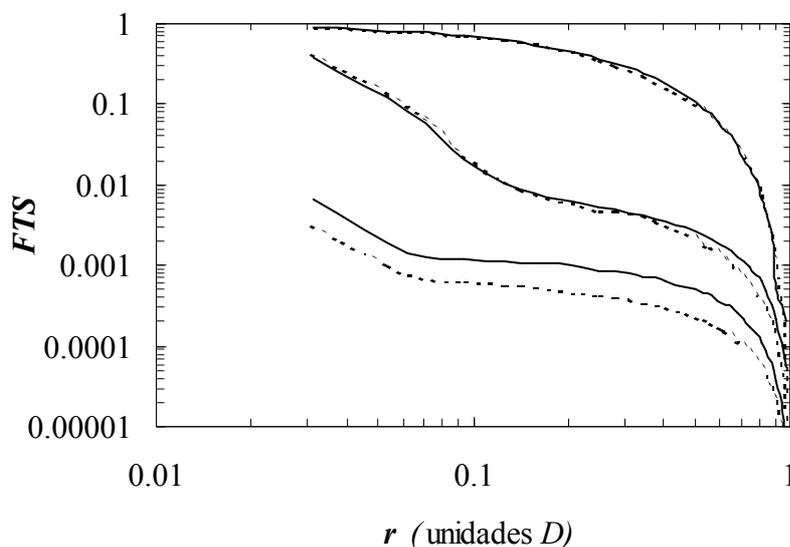


Figura 4.12 Función de transferencia de *speckle* o promedio del cuadrado del módulo de la función de transferencia. Se compara la teoría de Korff (líneas continuas) con los valores que se obtienen de la simulación (líneas discontinuas) en los casos  $D/r_0 = 1$  (líneas superiores), 11.7 (intermedias) y 38.4 (inferiores).

Es importante destacar que para calcular esta función se promedian números reales, y no se tienen por tanto los problemas descritos en la función de transferencia óptica de larga exposición. El error se expresa en la forma:

$$\sigma_{FTS} = \frac{FTS}{\sqrt{M}} \quad (4.33)$$

donde M es de nuevo el número de pantallas de fase que se incluyen en el promedio (4.26).

## 4.6 Función imagen de un punto

La imagen de cualquier objeto se puede hallar a partir de la función de transferencia óptica utilizando (2.1) o (2.25) según la imagen sea de corta o larga exposición. Sin embargo en el caso de la imagen de un objeto puntual (*PSF*) el proceso se simplifica y queda en función de la pantalla de fase:

$$PSF(\vec{x}) = |TF[P(\vec{r})\exp(i\phi(\vec{r}))]|^2 \quad (4.34)$$

En el caso de larga exposición se promedia esta PSF. En la figura 4.13 se muestran imágenes de corta exposición que corresponden a las condiciones  $D/r_0=38.4$ , y 21 y 81 polinomios de Zernike corregidos. Es decir, que corresponden a los frentes de onda mostrados en la figura 4.2. Como se puede observar en el primer caso la imagen muestra un patrón interferencial característico del *speckle*, mientras en el segundo se destaca un pico sobre un débil fondo. En la figura 4.14 se muestra el promedio de 1000 imágenes tomadas en las condiciones de la figura anterior. Al promediar aparece un pico ancho para 21 polinomios corregidos, mientras que para 81 el pico apenas ha cambiado, aunque el ruido es menor. La figura 4.15 es un corte de estas *PSF* (normalizadas por el valor central de la mancha de Airy en corrección perfecta) con un plano que pasa por el origen. Se

muestra la escala, con lo que se aprecia que la *PSF* es más alta y estrecha cuantos más polinomios se corrijan. Comparando con la función de transferencia óptica (figura 4.11) se comprueba que cuando la *FTO* retiene información a altas frecuencias se consigue mayor resolución en la *PSF*.

## 4.7 Conclusiones

Se ha comprobado el funcionamiento de la simulación desarrollada para este trabajo. Los resultados ofrecidos por la simulación reproducen las estimaciones teóricas de la varianza residual en el frente de onda y de la función de transferencia de *speckle*. La función de estructura y la *FTO* coinciden con las obtenidas por otros autores. Además se ha establecido gráficamente una relación entre el frente de onda, la función de transferencia y la *PSF* totalmente acorde con lo que cabría esperar: la función de transferencia satura al doble de la varianza residual en el frente de onda, y si este valor es grande la función de transferencia apenas retiene información de altas frecuencias y la *PSF* es ancha; si por el contrario se corrigen muchas aberraciones del frente de onda, la varianza residual es baja, la función de transferencia conserva un valor considerable hasta altas frecuencias y la *PSF* es alta y estrecha, lo que implica alta resolución.

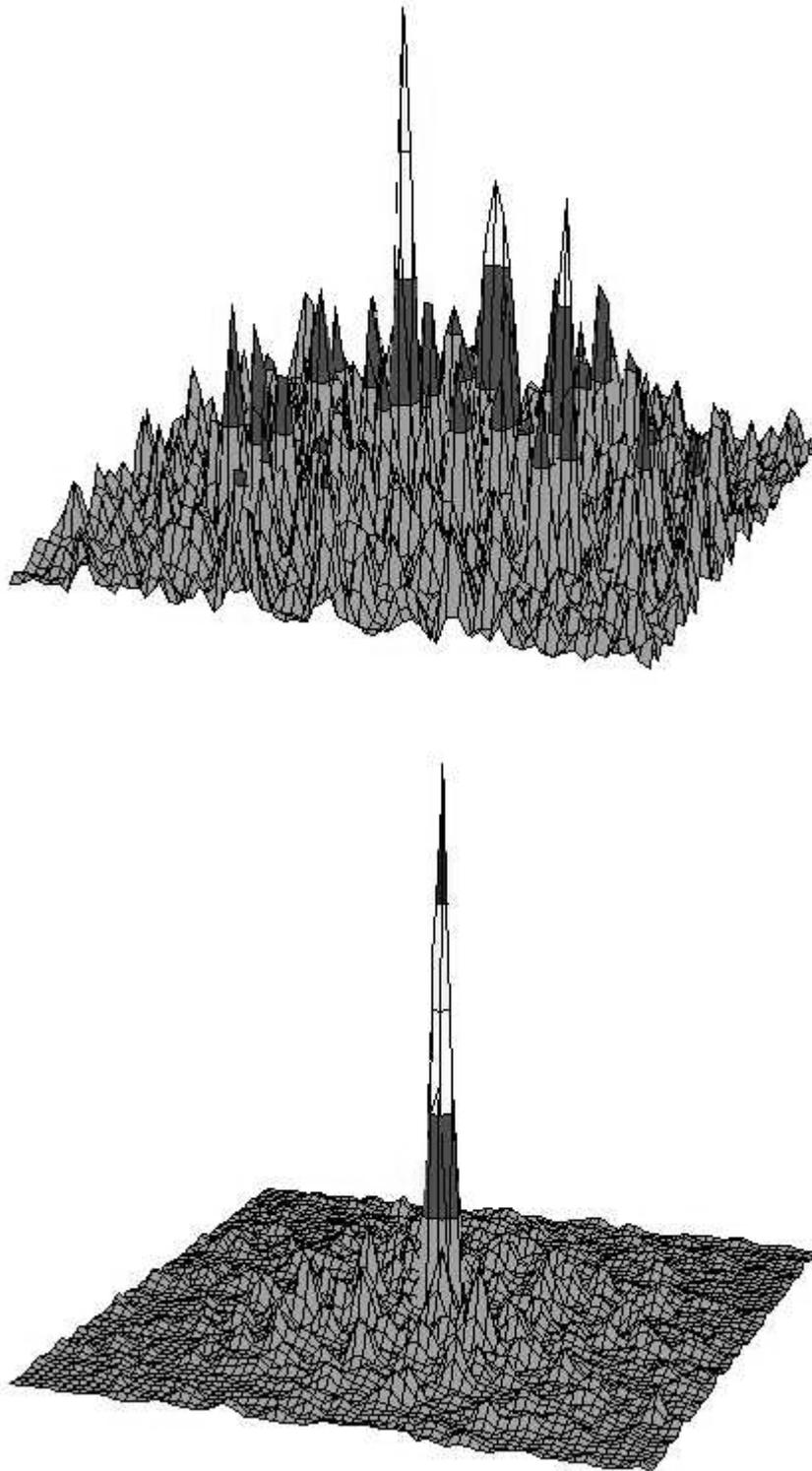


Figura 4.13 Imágenes de corta exposición que corresponden a las condiciones  $D/r_0=38.4$ , y 21 (gráfica superior) y 81 (inferior) polinomios de Zernike corregidos. Es decir corresponden a los frentes de onda mostrados en la figura 4.2.



Figura 4.14 Imágenes de larga exposición correspondientes a las condiciones  $D/r_0=38.4$ , y 21 (gráfica superior) y 81 (inferior) polinomios de Zernike corregidos.

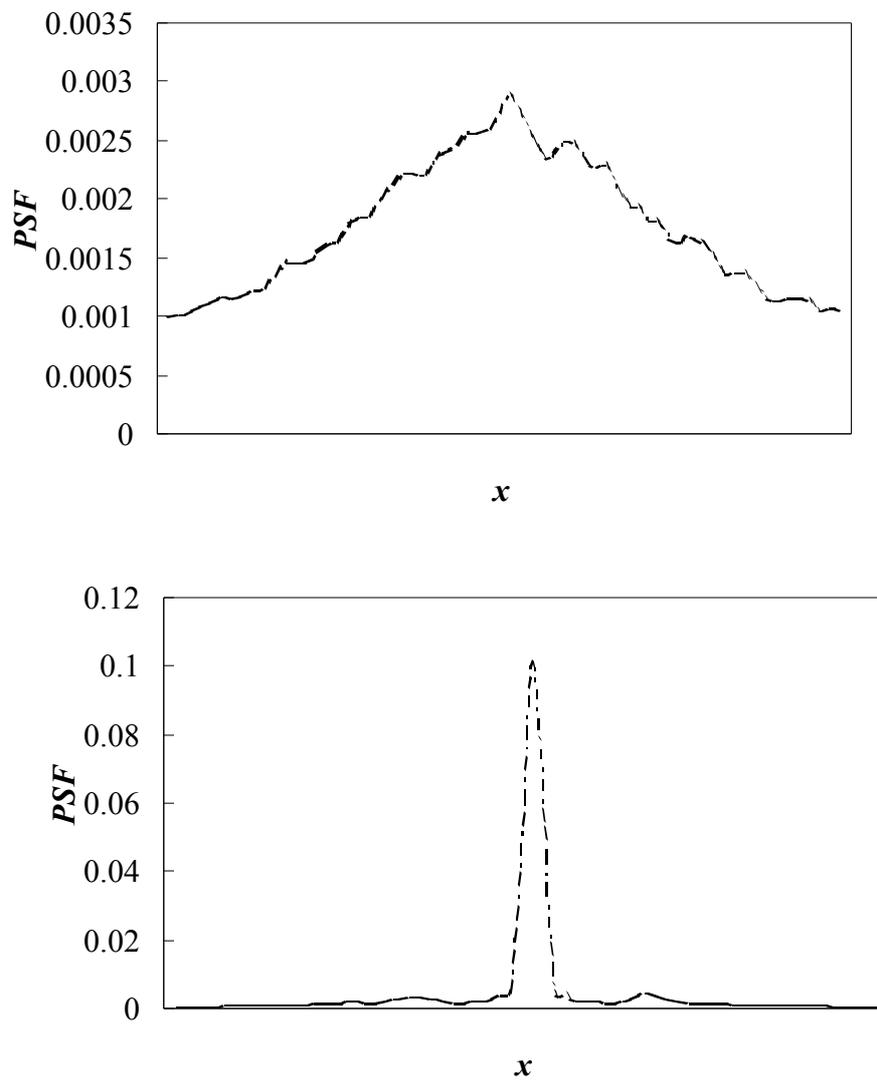


Figura 4.15 Corte de las  $PSF$  de la figura 4.14 con un plano que pasa por el origen.