UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Dpto. Matemáticas, Estadística y Computación

TESIS DOCTORAL

Aplicaciones separadoras sobre espacios de funciones. Representación y continuidad automática

Luis Dubarbie Fernández

Santander, 2010

Dirigida por Jesús Araujo Gómez

Agradecimientos

Deseo aprovechar estas líneas para agradecer el apoyo y la confianza que tantas personas han depositado en mí para llevar a cabo esta laboriosa tarea.

El primer agradecimiento va dirigido a Jesús Araujo, mi director de tesis, quien ha sabido contagiarme su pasión por las Matemáticas. Su apoyo, su dedicación, su capacidad para transmitir conocimiento y su colaboración, basada en una profunda comprensión del tema abordado, han resultado fundamentales para el desarrollo de esta Memoria.

Quisiera dar las gracias a todos y cada uno de los miembros del Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación de la Universidad de Cantabria, por hacer sumamente enriquecedora esta etapa de mi vida, tanto profesional como personalmente. En especial, a todos mis compañeros del programa de doctorado, a las personas con las que he compartido despacho (Carlos Beltrán y Cruz E. Borges) y a mi amigo Álvar por su ayuda incondicional.

También merece ser reconocido el excepcional trato recibido por el personal del Departamento de Matemáticas de la Universidad Jaume I de Castellón durante el tiempo que compartí junto a ellos. Agradezco a Juan J. Font su gran labor como anfitrión y el interés por la evolución de mis investigaciones, y a Ana M. Ródenas su colaboración para que mi estancia en Castellón fuese completamente satisfactoria.

Para el final, aunque no por ello menos importante, reservo los agradecimientos personales. En primer lugar, a mis padres, Luis y Reme, los responsables de que en estos momentos pueda estar escribiendo estas líneas y sea quien soy. Muchas gracias por la educación recibida y los valores que me habeis inculcado. A mi hermana Beatriz y mi cuñado Eloy, por vuestro infatigable apoyo y ánimo, y por darme la mayor alegría de todo este período de duro trabajo, Noemí. A Fonso, Irene y Maite por vuestro ánimo constante. Y finalmente, a la persona que siempre ha estado a mi lado, la que más ha sufrido mis frustraciones y ha sabido alentarme para que continúe con más fuerza, la que responde con una sonrisa siempre que las cosas se complican, a la persona con la que tantas cosas me quedan por hacer... Por todo esto y mucho más, gran parte de este trabajo es mérito suyo. Gracias Arantxa.

A mi familia

Índice general

Introducción

La presente Memoria se enmarca dentro del estudio de las aplicaciones lineales definidas entre espacios de funciones continuas. En particular, nos centraremos en el análisis de tres tipos de aplicaciones lineales que se encuentran estrechamente relacionadas; en primer lugar, las aplicaciones biseparadoras, que serán consideradas entre espacios de funciones absolutamente continuas (Capítulo 1) y espacios de funciones de Lipschitz (Capítulo 2). Seguidamente, en el Capítulo 3, analizaremos las isometrías definidas entre espacios de funciones de Lipschitz y, finalmente, las aplicaciones que preservan ceros comunes definidas entre ciertos subespacios de funciones continuas, entre los que se incluyen los anteriores (Capítulo 4). Así, nuestro propósito es proporcionar algunos resultados sobre la representación de cada una de las aplicaciones lineales consideradas. Además, parte importante de nuestro estudio consiste en determinar las condiciones en las que algunas de estas aplicaciones son continuas.

Aplicaciones separadoras

El estudio de las aplicaciones separadoras entre espacios de funciones continuas fue iniciado por E. Beckenstein y L. Narici en [17, 18] a finales de los años 80. Sin embargo, estas aplicaciones ya habían sido consideradas con anterioridad en el contexto de los retículos vectoriales por Y. A. Abramovich en [1, 2], E. Albrecht y M. Neumann en [3, 4] o B. de Pagter en [65]. En concreto, si X e Y son espacios topológicos y $A(X)$ y $A(Y)$ son subespacios de funciones continuas definidas en X e Y, respectivamente, diremos que una aplicación lineal $T : A(X) \to A(Y)$ es *separadora* si $Tf \cdot Tg \equiv 0$ siempre que $f, g \in A(X)$ satisfagan $f \cdot g \equiv 0$. Además, diremos que T es *biseparadora* si es biyectiva y tanto ella como su inversa son separadoras. Ejemplos de aplicaciones separadoras son la derivación, los homomorfismos de álgebras y las aplicaciones composición con peso.

El primer resultado que permite identificar las biyecciones separadoras con las aplicaciones biseparadoras en este contexto fue obtenido por K. Jarosz en el año 1990 (véase [44]). En el mismo, se prueba que

"Si X e Y son espacios compactos y Hausdorff y $T : C(X) \to C(Y)$ es una biyección separadora, entonces existen un homeomorfismo $h : Y \to X$ y una función $\varphi \in C(Y)$ con $\varphi(y) \neq 0$ para todo $y \in Y$ tales que

$$Tf(y) = \varphi(y) f(h(y)) \tag{1}$$

para toda $f \in C(X)$ e $y \in Y$. Además, T es continua y biseparadora."

A partir de este momento, surgen numerosas generalizaciones de este resultado. Por ejemplo, en [35, 48] probaron que, cuando X e Y son espacios localmente compactos, toda biyección separadora entre los espacios de funciones continuas que se anulan en el infinito $C_0(X)$ y $C_0(Y)$ definidas en X e Y, respectivamente, induce un homeomorfismo entre los espacios X e Y. En [10], J. Araujo, E. Beckenstein y L. Narici trataron de obtener un resultado similar al dado por K. Jarosz eliminando la compacidad de los espacios sobre los que se definen las funciones continuas. Para ello, en algunos casos al menos, debieron asumir que la biyección separadora tenía también inversa separadora. De esta manera, para cualesquiera espacios de Tichonov X e Y, probaron que toda aplicación biseparadora entre $C(X)$ y $C(Y)$ induce un homeomorfismo entre las realcompactificaciones de los espacios X e Y. Además, también se obtiene una representación análoga a la dada en (1) de las aplicaciones biseparadoras $T : C(X) \to C(Y)$ cuando X e Y son espacios realcompactos. Posteriormente, estos mismos autores, en [11], se plantearon el siguiente problema:

> *¿Qué condiciones deben satisfacer los espacios de Tichonov X e Y para que toda biyección separadora entre $C(X)$ y $C(Y)$ tenga inversa separadora?*

Pues bien, las conclusiones a las que llegaron fueron que, tanto en el caso en que Y es conexo como en el caso en que X es cero-dimensional, toda biyección separadora $T : C(X) \to C(Y)$ es biseparadora. En realidad, esta cuestión constituye uno de los principales problemas abiertos en el contexto de las aplicaciones separadoras entre espacios de funciones continuas.

Debemos mencionar también que, relacionado con los espacios de funciones objeto de estudio en esta Memoria, A. Jiménez-Vargas ha obtenido recientemente la versión para ciertas subálgebras del espacio de funciones de Lipschitz del resultado de K. Jarosz (véase [50]).

Hasta el momento, todos los resultados mencionados involucran aplicaciones separadoras entre subespacios de funciones continuas que toman valores escalares, es decir, valores reales o complejos. Sin embargo, nosotros estamos interesados en el caso en que las funciones toman valores en espacios normados arbitrarios. Por tanto, lo primero que debemos hacer es adaptar la definición de aplicación separadora a este nuevo contexto. Para ello, dados un espacio topológico X, un espacio normado E y una función $f : X \to E$, llamaremos *cozero* asociado a la función f al conjunto $\mathrm{coz}(f) := \{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Además, $C(X, E)$ denotará el espacio normado de las funciones continuas definidas en X que toman valores en E. De esta manera, si $A(X, E)$ y $A(Y, F)$ son subespacios vectoriales de $C(X, E)$ y $C(Y, F)$, respectivamente, diremos que una aplicación lineal $T : A(X, E) \to A(Y, F)$ es *separadora* si $\mathrm{coz}(Tf) \cap \mathrm{coz}(Tg) = \emptyset$ siempre que $f, g \in A(X, E)$ satisfagan $\mathrm{coz}(f) \cap \mathrm{coz}(g) = \emptyset$. De manera equivalente, se puede definir una aplicación separadora T entre $A(X, E)$ y $A(Y, F)$ como una aplicación lineal tal que $\|Tf(y)\|\|Tg(y)\| = 0$ para todo $y \in Y$ siempre que $f, g \in A(X, E)$ satisfagan $\|f(x)\|\|g(x)\| = 0$ para todo $x \in X$. Finalmente, al igual que en el caso anterior, diremos que una aplicación es *biseparadora* si es biyectiva y tanto ella como su inversa son separadoras.

Los primeros en considerar las aplicaciones biseparadoras entre espacios de funciones continuas que toman valores en espacios de Banach fueron S. Hernández, E. Beckenstein y L. Narici en [40]. En concreto, establecieron una relación entre las aplicaciones biseparadoras y ciertas isometrías lineales suprayectivas definidas entre $C(X, E)$ y $C(Y, F)$, siendo X e Y espacios compactos y E y F espacios de Banach. En el año 2003, H. L. Gau, J. S. Jeang y N. C. Wong ([39]) probaron que, si X e Y son espacios compactos y Hausdorff, E y F son espacios de Banach y $T : C(X, E) \to C(Y, F)$ es una aplicación biseparadora, entonces existen un homeomorfismo $h : Y \to X$ y una aplicación lineal y biyectiva $Jy : E \to F$ para cada $y \in Y$ tales que

$$Tf(y) = (Jy)(f(h(y))) \tag{2}$$

para toda $f \in C(X, E)$ e $y \in Y$. Además, observaron que T es continua si y sólo si cada aplicación Jy es continua. Para obtener una completa información acerca de la representación y las condiciones bajo las que se tiene la continuidad de las aplicaciones biseparadoras entre ciertos subespacios de funciones continuas definidas en espacios no necesariamente compactos y que toman valores en espacios normados pueden consultarse los trabajos [6, 7, 8, 15] de J. Araujo. Este mismo autor, en [5], obtuvo una caracterización de las aplicaciones biseparadoras entre espacios de funciones diferenciables. En particular, se deduce que, dados $X \subset \mathbb{R}^p$ e $Y \subset \mathbb{R}^q$ abiertos, E y F espacios de Banach y una aplicación $T : C^n(X, E) \to C^m(Y, F)$ biseparadora, se tiene que $p = q$, $n = m$, y existen un C^n-difeomorfismo $h : Y \to X$ y una aplicación lineal y biyectiva $Jy : E \to F$ para cada $y \in Y$ tales que

$$Tf(y) = (Jy)(f(h(y)))$$

para toda $f \in C^n(X, E)$ e $y \in Y$. Además, considerando ciertas topologías naturales en $C^n(X, E)$ y $C^m(Y, F)$, la aplicación T es continua.

Por otro lado, de manera prácticamente simultánea a los resultados que se presentan en esta Memoria, en [54], se obtiene una descripción análoga a la dada en (2) cuando la aplicación biseparadora T está definida entre $lip_\alpha(X, E)$ y $lip_\alpha(Y, F)$ para $\alpha \in (0, 1)$, siendo X e Y espacios métricos compactos y E y F espacios de Banach. Además, los autores observaron que, bajo ciertas condiciones, es posible deducir la continuidad automática de la aplicación biseparadora. Para finalizar, cabe mencionar el trabajo desarrollado por D. H. Leung ([60]) con posterioridad a la publicación de los resultados expuestos en esta Memoria. En el mismo, para espacios métricos completos X e Y y espacios de Banach E y F, el autor estudia las aplicaciones biseparadoras definidas entre *espacios de Lipschitz generalizados* (que incluyen, entre otros, los espacios de funciones uniformemente continuas y de Lipschitz).

En lo relativo a esta Memoria, los Capítulos 1 y 2 están dedicados al estudio de las aplicaciones (bi)separadoras entre distintos subespacios de funciones continuas. En el primero de ellos, consideraremos tales aplicaciones entre espacios de funciones absolutamente continuas definidas en subconjuntos compactos de la recta real que toman valores en espacios de Banach arbitrarios. Por un lado, si suponemos que los espacios normados tienen la misma dimensión finita, es posible obtener una completa caracterización de las biyecciones separadoras, que incluye un homeomorfismo entre los espacios de base (véase el Corolario 1.4.7). Además, como consecuencia de dicha caracterización, podemos concluir su continuidad y el carácter separador de su inversa en los Teoremas 1.4.8 y 1.4.9. Por otro lado, en el caso en que los espacios de Banach sean de dimensión infinita, asumiremos que las aplicaciones definidas entre espacios de funciones absolutamente continuas son biseparadoras. De nuevo, podemos probar la existencia de un homeomorfismo entre los espacios de base que nos permitirá obtener una descripción de las aplicaciones biseparadoras en el Corolario 1.5.9. Sin embargo, a diferencia del caso finito-dimensional, para deducir la continuidad de tales aplicaciones es necesario suponer que los espacios de base no tienen puntos aislados, como vemos en el Teorema 1.5.11. Para finalizar este primer capítulo, trataremos de caracterizar las isometrías biseparadoras entre espacios de funciones absolutamente continuas (véase el Teorema 1.6.3).

En el Capítulo 2, analizaremos las aplicaciones biseparadoras entre espacios de funciones de Lipschitz definidas en espacios métricos completos que toman valores en espacios normados arbitrarios. En el Teorema 2.5.15 se prueba la existencia de un homeomorfismo entre los espacios de base que nos permite obtener una completa descripción de las aplicaciones biseparadoras entre espacios de funciones de Lipschitz (véase el Teorema 2.6.9). Para estudiar la continuidad de tales aplicaciones, es necesario añadir la completitud de los espacios normados. Incluso bajo estas nuevas condiciones, observaremos que no es posible deducir en general la continuidad automática de las aplicaciones biseparadoras entre espacios de funciones de Lipschitz. Sin embargo, construiremos una aplicación biseparadora y continua asociada a cada una de ellas que nos permitirá concluir la continuidad de éstas en ciertos casos particulares (Corolarios 2.7.11 y 2.7.12). Finalmente, se analiza el caso en que las biyecciones separadoras están definidas entre espacios de funciones de Lipschitz que toman valores escalares. En este contexto, observaremos que, siempre que los espacios métricos de base sean compactos, tales aplicaciones son automáticamente biseparadoras (véase el Teorema 2.8.3), lo que nos permitirá obtener una caracterización y la continuidad automática de las biyecciones separadoras en el Corolario 2.8.4.

Isometrías

En 1932, S. Banach demostró que dos espacios métricos compactos X e Y son topológicamente homeomorfos si los correspondientes espacios de funciones continuas $C(X)$ y $C(Y)$ son linealmente isométricos (véase [16]). Posteriormente, en [71], M. Stone generalizó el resultado de S. Banach para espacios compactos y Hausdorff no necesariamente métricos. Todo ello dio lugar a un resultado clásico en la teoría de las isometrías lineales entre espacios de funciones continuas que recibe el nombre de Teorema de Banach-Stone, en el que se afirma que

"Si X e Y son espacios compactos y Hausdorff y $T : C(X) \to C(Y)$ una isometría lineal suprayectiva, entonces existen un homeomorfismo $h : Y \to X$ y una función $\varphi \in C(Y)$ con $|\varphi(y)| = 1$ para todo $y \in Y$ tales que

$$Tf(y) = \varphi(y) f(h(y))$$

para toda $f \in C(X)$ e $y \in Y$."

A su vez, este resultado ha sido generalizado en numerosas direcciones. Por ejemplo, W. Holsztyński, en [42], obtuvo una versión de este teorema para isometrías lineales no necesariamente suprayectivas. En concreto, si X e Y son espacios compactos y Hausdorff y T es una isometría lineal entre $C(X)$ y $C(Y)$, probó la existencia de un subconjunto Y_0 de Y y de sendas aplicaciones continuas $h : Y_0 \to X$ y $\varphi : Y_0 \to \mathbb{K}$ de manera que

$$Tf(y) = \varphi(y) f(h(y))$$

para toda $f \in C(X)$ e $y \in Y_0$. Además, el Teorema de Banach-Stone también ha sido extendido a diversos subespacios de funciones continuas, como pueden ser el espacio de las funciones diferenciables (ver [22]) o el espacio de las funciones absolutamente continuas en [66]. Otros resultados interesantes en los que se aborda este tema son [13, 14, 48, 64]. Sin embargo, nuestro interés se centra en obtener una generalización de dicho teorema en el caso en que las isometrías están definidas entre espacios de funciones de Lipschitz. Hasta los años 90, varios autores habían estudiado las isometrías entre espacios de funciones de Lipschitz (véase [45, 62, 69, 72]), pero el resultado más destacado en este contexto es el obtenido por N. Weaver en [73]. En el mismo, se prueba que, para espacios métricos X e Y completos, 1-conexos y cuyo diámetro sea a lo sumo 2, cualquier isometría lineal suprayectiva $T : \mathrm{Lip}(X) \to \mathrm{Lip}(Y)$ es de la forma

$$Tf(y) = \alpha f(h(y))$$

para toda $f \in \mathrm{Lip}(X)$ e $y \in Y$, siendo $h : Y \to X$ una isometría y $\alpha \in \mathbb{K}$ con $|\alpha| = 1$. Resulta inmediato observar que esta caracterización es más concisa que la obtenida en el Teorema de Banach-Stone, puesto que se prueba que la función φ debe ser constante. De manera reciente, en [52], A. Jiménez-Vargas y M. Villegas-Vallecillos han obtenido la versión para espacios de funciones de Lipschitz del resultado de W. Holsztyński sobre isometrías lineales no necesariamente suprayectivas.

Por otro lado, también ha despertado el interés de diversos autores la extensión del Teorema de Banach-Stone al caso en que las funciones toman valores en espacios normados. En primer lugar, debemos indicar que dicha extensión no puede realizarse de manera automática, sino que es necesario añadir alguna condición sobre los espacios normados, en este caso geométrica. Así pues, el primer resultado que surge en este contexto fue obtenido por M. Jerison ([49]) en 1950, donde prueba que, si X e Y son espacios compactos, E es un espacio de Banach estrictamente convexo y $T : C(X,E) \to C(Y,E)$ es una isometría lineal suprayectiva, entonces existen un homeomorfismo $h : Y \to X$ y una isometría lineal suprayectiva $Jy : E \to E$ para cada $y \in Y$ tales que

$$Tf(y) = (Jy)(f(h(y)))$$

para toda $f \in C(X,E)$ e $y \in Y$ (véase [40] para una prueba de un resultado análogo basada en aplicaciones biseparadoras). En [21], M. Cambern extendió el resultado de W. Holsztyński para isometrías lineales no suprayectivas al caso en que las funciones toman valores en espacios de Banach estrictamente convexos. Además, E. Behrends, en [19], demostró que, si X e Y son espacios localmente compactos y E es un espacio de Banach con centralizador trivial, entonces toda isometría lineal suprayectiva entre $C_0(X,E)$ y $C_0(Y,E)$ induce un homeomorfismo entre los espacios X e Y, con lo que obtuvo una generalización del resultado de M. Jerison, pues los espacios normados con centralizador trivial incluyen, entre otros, a los espacios normados estrictamente convexos. Para el caso no necesariamente suprayectivo, en [46] probaron que, si X e Y son espacios localmente compactos y Hausdorff, E y F son espacios de Banach, F es además estrictamente convexo y $T : C_0(X,E) \to C_0(Y,F)$ es una isometría lineal, entonces existe un subconjunto Y_0 de Y, una aplicación continua $h : Y_0 \to X$ y una isometría lineal $Jy : E \to F$ para cada $y \in Y_0$ tales que

$$Tf(y) = (Jy)(f(h(y)))$$

para toda $f \in C_0(X,E)$ e $y \in Y_0$. Otros resultados similares pueden ser consultados en [34, 47].

Recientemente, J. Araujo, en [9], trabajó con ciertos subespacios de funciones continuas definidas en espacios no necesariamente compactos y que toman valores en espacios normados con centralizador trivial. En concreto, prueba que, en estas condiciones, toda isometría lineal suprayectiva es biseparadora, además de obtener una representación de las mismas de la forma composición con peso. En el año 2009, A. Jiménez-Vargas y M. Villegas-Vallecillos ([53]) han obtenido los resultados de M. Jerison (isometrías lineales suprayectivas) y de M. Cambern (isometrías lineales no suprayectivas) para espacios de funciones de Lipschitz definidas en espacios métricos compactos que toman valores en espacios de Banach estrictamente convexos. Finalmente, para obtener una amplia información acerca de las isometrías lineales entre espacios de funciones continuas y seguir la evolución del Teorema de Banach-Stone en los últimos años, recomendamos la referencia [38] de M. I. Garrido y J. A. Jaramillo y los libros [32, 33] de R. J. Fleming y J. E. Jamison.

En el Capítulo 3 de esta Memoria, caracterizaremos las isometrías lineales suprayectivas entre espacios de funciones de Lipschitz definidas en espacios métricos completos que toman valores en espacios normados estrictamente convexos. De manera previa, veremos que, bajo ciertas condiciones, toda isometría lineal suprayectiva es biseparadora (véase el Teorema 3.3.5). Además, la caracterización de dichas aplicaciones será obtenida de dos maneras distintas. Por un lado, añadiendo condiciones acerca del comportamiento de las propias isometrías, lo que nos permitirá extender, en el Teorema 3.5.1, el resultado obtenido por A. Jiménez-Vargas y M. Villegas-Vallecillos en [53]. Por otra parte, añadiremos condiciones sobre los espacios métricos en los que se definen las funciones. En particular, asumiremos la 1-conectividad de los mismos, obteniendo así una generalización del resultado dado por N. Weaver en [73] (véase el Teorema 3.6.4).

Aplicaciones que preservan ceros comunes

Resultados similares al Teorema de Banach-Stone también han sido obtenidos en el caso en que se considere un orden en los espacios de funciones continuas que les dota de estructura de retículo. En particular, si X e Y son espacios compactos y Hausdorff, se tiene que todo isomorfismo de retículos entre $C(X)$ y $C(Y)$ induce un homeomorfismo entre X e Y (véase [57]). Además, en [43], se prueba que dicha conclusión también es cierta para espacios X e Y realcompactos. Pues bien, recientemente, teniendo como base este tipo de resultados, se ha intentado obtener resultados del tipo Banach-Stone considerando espacios de funciones continuas que toman valores en retículos de Banach. Sin embargo, dados X e Y espacios compactos y Hausdorff, y E y F retículos de Banach, la existencia de un isomorfismo de retículos entre $C(X,E)$ y $C(Y,F)$ no implica que X e Y sean homeomorfos (véase [23]). Como consecuencia, en este mismo artículo, los autores decidieron añadir una hipótesis adicional, es decir, consideraron isomorfismos de retículos $T : C(X,E) \to C(Y,F)$ que satisfacen la siguiente propiedad:

$$Z(f) \neq \emptyset \Longleftrightarrow Z(Tf) \neq \emptyset \tag{P}$$

para toda $f \in C(X,E)$, siendo $Z(f) := \{x \in X : f(x) = 0\}$. Concretamente, fue probado que, si X e Y son espacios compactos y Hausdorff, E es un retículo de Banach y $F = \mathbb{R}$, entonces X e Y son homeomorfos y E y $\mathbb{R}$ son isomorfos como retículos. Continuando con el estudio de este tipo de aplicaciones, en [63] demostraron que, en el caso en que X e Y sean espacios compactos y Hausdorff, E y F sean retículos de Banach y F no tenga divisores de cero, entonces todo isomorfismo de retículos entre $C(X,E)$ y $C(Y,F)$ que satisface la propiedad (P) induce un homeomorfismo entre X e Y y un isomorfismo de retículos entre E y F. Posteriormente, resultados análogos al anterior han sido obtenidos para distintos tipos de retículos normados. Por ejemplo, Z. Ercan y S. Önal obtienen el mismo resultado siendo F un AM-espacio con unidad (es decir, un $C(K)$-espacio) en [30], mientras que en [31] lo prueban cuando E y F son retículos localmente sólidos. Finalmente, en el año 2008, J. X. Chen, Z. L. Chen y N. C. Wong ([24]) resolvieron el problema en su versión más general. En concreto, el resultado obtenido es el siguiente:

"Sean X e Y espacios compactos y Hausdorff, E y F retículos de Banach y $T : C(X,E) \to C(Y,F)$ un isomorfismo de retículos que satisface la propiedad (P). *Entonces existen un homeomorfismo $h : Y \to X$ y un isomorfismo de retículos $Jy : E \to F$ para cada $y \in Y$ tales que*

$$Tf(y) = (Jy)(f(h(y))) \tag{3}$$

para toda $f \in C(X,E)$ e $y \in Y$."

La versión para espacios de Lipschitz de este resultado ha sido obtenida en [51] considerando subretículos del espacio de funciones de Lipschitz que separan y unen puntos uniformemente. Para finalizar, haremos referencia al reciente trabajo llevado a cabo por D. H. Leung y W. K. Tang en [61]. En el mismo se observa que, si $A(X,E)$ y $A(Y,F)$ son dos subretículos de funciones continuas y $T : A(X,E) \to A(Y,F)$ es un isomorfismo de retículos, entonces la propiedad (P) es equivalente a la siguiente propiedad:

$$\cap_{i=1}^{k} Z(f_i) \neq \emptyset \Longleftrightarrow \cap_{i=1}^{k} Z(Tf_i) \neq \emptyset \tag{Z}$$

para cualesquiera $k \in \mathbb{N}$ y $(f_i)_{i=1}^{k}$ en $A(X,E)$. De esta manera, analizando isomorfismos de retículos que satisfacen la propiedad (Z) entre retículos de funciones continuas, son capaces de obtener una nueva prueba del resultado dado en (3). Además, también se obtiene la versión de este resultado para el caso diferenciable, en donde se afirma que

"Si $X \subset \mathbb{R}^p$ e $Y \subset \mathbb{R}^q$ son abiertos, E y F son espacios vectoriales topológicos Hausdorff y $T : C^n(X,E) \to C^m(Y,F)$ es un isomorfismo que satisface la propiedad (Z)*, entonces $p = q$, $n = m$, y existen un C^n-difeomorfismo $h : Y \to X$ y un isomorfismo $Jy : E \to F$ para cada $y \in Y$ tales que*

$$Tf(y) = (Jy)(f(h(y)))$$

para toda $f \in C^n(X,E)$ e $y \in Y$."

Por último, en el Capítulo 4 de esta Memoria, motivados por el estudio realizado por D. H. Leung y W. K. Tang en [61], consideraremos aplicaciones $T : A(X,E) \to A(Y,F)$ que satisfacen

$$Z(f) \cap Z(g) \neq \emptyset \Longleftrightarrow Z(Tf) \cap Z(Tg) \neq \emptyset$$

para cualesquiera $f, g \in A(X,E)$, siendo $A(X,E)$ y $A(Y,F)$ subespacios de $C(X,E)$ y $C(Y,F)$, respectivamente. Dichas aplicaciones reciben el nombre de *aplicaciones que preservan ceros comunes*. Así, cuando X e Y son espacios métricos y E y F son espacios normados, determinaremos las propiedades que deben satisfacer los subespacios de funciones continuas $A(X,E)$ y $A(Y,F)$ para poder obtener una completa descripción de las aplicaciones que preservan ceros comunes definidas entre ellos (véase el inicio de la Sección 4.2 y el Teorema 4.4.5). Como consecuencia de esta caracterización, en el Corolario 4.4.8, veremos que dichas aplicaciones son automáticamente biseparadoras, lo que nos permitirá aplicar resultados conocidos sobre tales aplicaciones para deducir la continuidad automática de las aplicaciones que preservan ceros comunes entre espacios de funciones absolutamente continuas (Teorema 4.5.1), de Lipschitz (Teorema 4.5.2) o diferenciables (Teorema 4.5.5).

Notación y preliminares

Nota 0.0.1 *En relación con el desarrollo de los próximos capítulos debemos indicar que, en general, al inicio de cada uno de ellos y de sus correspondientes apartados, haremos mención de las condiciones que vamos a asumir para el desarrollo de los mismos. Ello implica que éstas no se verán reflejadas en los enunciados de los resultados, salvo en aquellos que sean más relevantes.*

A continuación, vamos a recoger la notación común que aparece en esta Memoria.

Como es habitual, denotaremos por $\mathbb{N}$ (respectivamente $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) al conjunto de los números naturales (respectivamente reales, complejos). Además, utilizaremos $\mathbb{K}$ para designar tanto a $\mathbb{R}$ como a $\mathbb{C}$.

Dados un espacio topológico X y un subconjunto A de X, $int_X(A)$, $cl_X(A)$ y $fr_X(A)$ representarán el interior del conjunto A en X, la clausura de A en X y la frontera de A en X, respectivamente. Si no hay lugar a confusión, estos conjuntos serán denotados como $int(A)$, $cl(A)$ y $fr(A)$. Además, escribiremos χ_A para designar la función característica en A.

En el caso en que X sea un espacio métrico dotado de una métrica d, dados un punto x_0 en X y un número real positivo r, $B(x_0, r)$ denotará la bola abierta de centro x_0 y radio r. Por otro lado, dados dos subconjuntos no vacíos A y B de X, representaremos como $d(A, B)$ la distancia entre los conjuntos A y B, es decir,

$$d(A, B) = \text{ínf}\,\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}\,.$$

Finalmente, se define el diámetro de un espacio métrico X como

$$\text{diam}(X) := \sup\{d(x, y) : x, y \in X\}\,.$$

Si E y F son espacios normados, entonces $L'(E, F)$ denotará el conjunto de las aplicaciones lineales y biyectivas de E en F, mientras que $L(E, F)$ será el subconjunto de $L'(E,F)$ formado por las aplicaciones continuas. Por otro lado, el conjunto formado por las isometrías lineales y suprayectivas de E en F será representado como $I(E,F)$. En el caso en que $E=F$, escribiremos $I(E) := I(E,E)$.

Tanto $L(E,F)$ como $I(E,F)$ estarán dotados de la topología *Strong Operator Topology*, cuya base de entornos es

$$N(S;D,\varepsilon) := \{R \in L(E,F) \text{ (resp. } I(E,F)) : \|(S-R)(\mathrm{e})\| < \varepsilon \ \forall \mathrm{e} \in D\}$$

para cualesquiera subconjunto finito D de E y $\varepsilon > 0$. A lo largo de esta Memoria, la única convergencia en $L(E,F)$ (resp. $I(E,F)$) que se precisará utilizar será de tipo sucesional. Por lo tanto, recordemos que (S_n) en $L(E,F)$ (resp. $I(E,F)$) converge a $S \in L(E,F)$ (resp. $I(E,F)$) si y sólo si $(S_n(\mathrm{e}))$ converge a $S(\mathrm{e})$ para todo $\mathrm{e} \in E$ (véase [28, página 476]).

La dimensión de cualquier espacio normado E (sobre $\mathbb{K}$) será denotada por $\dim(E)$.

Escribiremos $\mathbf{1}_X : X \to \mathbb{K}$ para designar la función que toma el valor constante 1. Por otro lado, si E es un espacio normado, para cada $\mathrm{e} \in E$, $\tilde{\mathrm{e}} : X \to E$ representará la función que toma el valor constante e.

Dada una función $f : X \to E$, el conjunto cozero asociado a f se denota como $\mathrm{coz}(f)$ y se define

$$\mathrm{coz}(f) := \{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$

Sean X un espacio topológico compacto y Hausdorff y E un espacio normado. Denotaremos mediante $C(X,E)$ al espacio normado de las funciones continuas definidas en X que toman valores en E dotado con la norma del supremo. Dicha norma se representa como $\|.\|_\infty$ y se define

$$\|f\|_\infty := \sup\{\|f(x)\| : x \in X\}$$

para toda $f \in C(X,E)$. Además, en el caso en que $E = \mathbb{K}$, escribiremos $C(X) := C(X,\mathbb{K})$. La misma norma se puede definir en el espacio de funciones continuas y acotadas con valores en E sin necesidad de asumir la compacidad de X.

Si $A(X,E)$ es un subespacio de $C(X,E)$ y x un punto de X, entonces δ_x denotará el funcional evaluación en el punto x definido en $A(X,E)$, es decir,

$$\begin{array}{rccc} \delta_x : & A(X,E) & \to & E \\ & f & \mapsto & \delta_x(f) := f(x). \end{array}$$

Si (f_n) es una sucesión de funciones, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ representará la suma puntual de las mismas.

A continuación, enunciaremos la definición de aplicación separadora entre subespacios de funciones continuas (no se asume necesariamente compacidad sobre X ni sobre Y).

Definición 0.0.2 *Sean $A(X,E)$ y $A(Y,F)$ subespacios vectoriales de $C(X,E)$ y $C(Y,F)$, respectivamente. Se dice que $T : A(X,E) \to A(Y,F)$ es separadora si es lineal y además*

$$\mathrm{coz}(Tf) \cap \mathrm{coz}(Tg) = \emptyset$$

siempre que $f, g \in A(X,E)$ satisfagan

$$\mathrm{coz}(f) \cap \mathrm{coz}(g) = \emptyset.$$

De manera equivalente, diremos que $T : A(X,E) \to A(Y,F)$ es separadora si es lineal y además, para cualesquiera $f, g \in A(X,E)$, se tiene que

$$\|Tf(y)\| \|Tg(y)\| = 0 \textit{ para todo } y \in Y$$

siempre que

$$\|f(x)\| \|g(x)\| = 0 \textit{ para todo } x \in X.$$

Finalmente, diremos que T es biseparadora si es biyectiva y tanto T como su inversa T^{-1} son separadoras.

Sean ahora $A(X,E)$ y $A(X)$ subespacios de $C(X,E)$ y $C(X)$, respectivamente. Entonces, dadas dos funciones $f \in A(X,E)$ y $g \in A(X)$, se define el producto $f \cdot g$ como

$$(f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$$

para todo $x \in X$.

Definición 0.0.3 *Sean $A(X,E)$ un subespacio de $C(X,E)$ y $A(X)$ un subanillo de $C(X)$. Se dice que $A(X,E)$ es un módulo sobre $A(X)$ si $f \cdot g \in A(X,E)$ siempre que $f \in A(X,E)$ y $g \in A(X)$.*

Ahora, realizaremos una adaptación del Teorema del Grafo Cerrado al ámbito que nos ocupa (véase [59, Teorema 7.3.2]). Este resultado será utilizado en varias ocasiones a lo largo de esta Memoria para probar la continuidad de ciertas aplicaciones.

Para la siguiente definición y el posterior teorema, vamos a suponer que $A(X,E)$ y $A(Y,F)$ son subespacios de $C(X,E)$ y $C(Y,F)$, respectivamente, y que $T : A(X,E) \to A(Y,F)$ es una aplicación lineal.

Definición 0.0.4 *Diremos que T tiene el grafo cerrado si, dada una sucesión (f_n) en $A(X,E)$ que converge a 0 tal que (Tf_n) converge a una función $g \in A(Y,F)$, se tiene que $g \equiv 0$.*

Teorema 0.0.5 *Si $A(X,E)$ y $A(Y,F)$ son espacios de Banach y T tiene el grafo cerrado, entonces T es continua.*

Por último, indiquemos que, a lo largo de esta Memoria, homeomorfismo será sinónimo de *homeomorfismo suprayectivo.*

Capítulo 1

Aplicaciones separadoras sobre espacios de funciones absolutamente continuas

1.1. Introducción

Este capítulo está dedicado al estudio de las aplicaciones separadoras y biyectivas entre espacios de funciones absolutamente continuas definidas en subconjuntos compactos de la recta real que toman valores en espacios de Banach arbitrarios. Nuestro propósito es obtener una completa caracterización de dichas aplicaciones que nos permita deducir su continuidad y el carácter separador de su inversa.

En general, las aplicaciones definidas entre espacios de funciones absolutamente continuas han sido estudiadas en el caso en que éstas toman valores escalares, es decir, valores reales o complejos (véase [41, Sección 18] para obtener más información acerca de estas funciones). Por ejemplo, V. D. Pathak, en [66], obtuvo un resultado en el que se describen las isometrías lineales entre espacios de funciones absolutamente continuas. En concreto, demostró que, si X e Y son subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ y $T : AC(X) \to AC(Y)$ es una isometría lineal suprayectiva con $T\mathbf{1}_X = \mathbf{1}_Y$, entonces existe una aplicación $h : Y \to X$ tal que

$$Tf(y) = f(h(y))$$

para toda $f \in AC(X)$ e $y \in Y$.

Sin embargo, nosotros estamos interesados en un cierto tipo de aplicaciones definidas entre espacios de funciones absolutamente continuas que toman valores en espacios de Banach arbitrarios. Por este motivo, dedicaremos la Sección 1.2 al estudio de las principales propiedades de dichos espacios de funciones.

En la Sección 1.4, veremos que las aplicaciones separadoras y biyectivas entre espacios de funciones absolutamente continuas definidas en subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ que toman valores en espacios normados con la misma dimensión finita inducen un homeomorfismo entre los espacios de base (Teorema 1.4.3). Como consecuencia, es posible obtener una completa descripción de tales aplicaciones (Corolario 1.4.7). Además, dicha caracterización nos permite concluir su continuidad de manera automática y que su inversa es también separadora en los Teoremas 1.4.8 y 1.4.9 (en [8, Teorema 5.4] se obtiene un resultado similar en el contexto de las funciones continuas que se anulan en el infinito).

Ahora bien, en general, no suele ser suficiente el estudio de las biyecciones separadoras para obtener resultados sobre su continuidad, sino que es necesario asumir que su inversa también es separadora. Por este motivo, en el caso infinito-dimensional, proporcionaremos una completa descripción de las aplicaciones biseparadoras que incluye, de nuevo, un homeomorfismo entre los espacios de base (Corolario 1.5.9). A diferencia del caso finito-dimensional, la continuidad de tales aplicaciones no se puede obtener de manera automática, por lo que debemos añadir una condición adicional sobre los espacios de base para poder hacerlo, como se observa en el Teorema 1.5.11.

Para finalizar este capítulo, en la Sección 1.6, trataremos de caracterizar las isometrías lineales suprayectivas de la forma Banach-Stone definidas entre espacios de funciones absolutamente continuas que toman valores en espacios de Banach arbitrarios (Definición 1.6.1). En particular, utilizando las descripciones de las aplicaciones biseparadoras obtenidas en las Secciones 1.4 y 1.5, no resultará demasiado complicado observar, en el Teorema 1.6.3, que las isometrías de la forma Banach-Stone son equivalentes a las isometrías biseparadoras.

Nota 1.1.1 *Antes de continuar con el desarrollo del capítulo, debemos mencionar que algunos resultados obtenidos en las Secciones 1.2 y 1.3 son conocidos o bien se deducen de las pruebas de otros ya conocidos.*

1.2. Propiedades de $AC(X, E)$

A lo largo de este capítulo, X e Y denotarán sendos subconjuntos compactos no vacíos de la recta real. Además, E y F serán espacios de Banach.

Llamaremos *partición* de un subconjunto A de X a cualquier familia finita $\{x_i\}_{i=0}^n$ de puntos de A tal que $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$.

A continuación, enunciaremos las definiciones de función absolutamente continua y de variación asociada a dicha función.

Definición 1.2.1 *Se dice que una función $f : X \to E$ es absolutamente continua en X si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que*

$$\sum_{i=1}^{n} \|f(b_i) - f(a_i)\| < \varepsilon$$

para toda familia finita de intervalos abiertos y disjuntos dos a dos $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ cuyos extremos pertenecen a X y satisfacen

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta.$$

El conjunto de todas las funciones absolutamente continuas definidas en X que toman valores en E será denotado como $AC(X, E)$. En el caso en que $E = \mathbb{K}$, escribiremos $AC(X) := AC(X, \mathbb{K})$.

Definición 1.2.2 *Dada $f \in AC(X, E)$, definimos la variación de f en X como*

$$V(f; X) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|f(x_i) - f(x_{i-1})\| : \{x_i\}_{i=0}^n \text{ es una partición de } X,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

A partir de este momento, vamos a probar algunas propiedades del espacio de funciones absolutamente continuas que serán de gran utilidad en el desarrollo de este capítulo. Entre otras, veremos que es posible dotar $AC(X, E)$ de una norma que lo convierte en un espacio de Banach y, por otro parte, la existencia de partición de la unidad en $AC(X)$.

Consideremos la norma $\|.\|_{AC}$ en $AC(X, E)$ definida como

$$\|f\|_{AC} := \|f\|_\infty + V(f; X)$$

para toda $f \in AC(X, E)$.

Lema 1.2.3 *$(AC(X, E), \|.\|_{AC})$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Supongamos que (f_n) es una sucesión de Cauchy en $(AC(X, E), \|.\|_{AC})$. Veamos que es convergente.

Por definición de la norma $\|.\|_{AC}$, sabemos que, si $f, g \in AC(X, E)$ y $\|f - g\|_{AC} \leq \varepsilon$, entonces $\|f - g\|_{\infty} \leq \varepsilon$. Por tanto, como (f_n) es de Cauchy en $(AC(X, E), \|.\|_{AC})$, se tiene que también lo es en $(C(X, E), \|.\|_{\infty})$, y como éste es un espacio de Banach, existe $f \in C(X, E)$ tal que (f_n) converge a f para la norma $\|.\|_{\infty}$. Si probamos que $f \in AC(X, E)$ y además (f_n) converge a f para la norma $\|.\|_{AC}$, entonces quedará demostrado el resultado.

Veamos que $f \in AC(X, E)$. Para ello, fijemos $\varepsilon > 0$. Puesto que (f_n) es de Cauchy en $AC(X, E)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n, m \geq n_0$, entonces $V(f_n - f_m; X) < \varepsilon/4$. En particular, se tiene que $V(f_n - f_{n_0}; X) < \varepsilon/4$ siempre que $n \geq n_0$. Por otro lado, como $f_{n_0} \in AC(X, E)$, existe $\delta > 0$ tal que, para cualquier familia finita de intervalos abiertos y disjuntos dos a dos $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^k$ con extremos en X y $\sum_{i=1}^k (b_i - a_i) < \delta$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{k} \|f_{n_0}(b_i) - f_{n_0}(a_i)\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

En particular, para cada $n \geq n_0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} \|f_n(b_i) - f_n(a_i)\| &\leq \sum_{i=1}^{k} \|f_{n_0}(b_i) - f_{n_0}(a_i)\| + \\
&\quad \sum_{i=1}^{k} \|(f_n - f_{n_0})(b_i) - (f_n - f_{n_0})(a_i)\| \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + V(f_n - f_{n_0}; X) \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Ahora bien, si fijamos $k \in \mathbb{N}$, como (f_n) converge a f para la norma $\|.\|_{\infty}$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f\|_{\infty} < \varepsilon/4k$ siempre que $n \geq n_1$. Finalmente, si definimos

$$N := \max\{n_0, n_1\},$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\|f(b_i)-f(a_i)\| &\le \sum_{i=1}^{k}\|f(b_i)-f_N(b_i)\|+\sum_{i=1}^{k}\|f_N(b_i)-f_N(a_i)\|+\\ &\quad \sum_{i=1}^{k}\|f_N(a_i)-f(a_i)\|\\ &\le 2k\|f-f_N\|_\infty+\sum_{i=1}^{k}\|f_N(b_i)-f_N(a_i)\|\\ &< 2k\,\frac{\varepsilon}{4k}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Como este proceso se puede llevar a cabo para cualquier $k\in\mathbb{N}$, podemos concluir que f pertenece a $AC(X,E)$.

Probemos ahora que (f_n) converge a f para la norma $\|.\|_{AC}$. Para ello, será suficiente ver que la sucesión $(V(f_n-f;X))$ converge a 0. Sea $\varepsilon>0$. Puesto que (f_n) es una sucesión de Cauchy en $(AC(X,E),\|.\|_{AC})$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$V(f_n-f_m;X)<\frac{\varepsilon}{2}$$

siempre que $n,m\ge n_0$. En particular, para cualquier partición $\{x_i\}_{i=0}^k$ de X, se tiene que, para todo $n,m\ge n_0$,

$$\sum_{i=1}^{k}\|(f_n-f_m)(x_i)-(f_n-f_m)(x_{i-1})\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Concretamente, si hacemos tender m hacia infinito, obtenemos que

$$\sum_{i=1}^{k}\|(f_n-f)(x_i)-(f_n-f)(x_{i-1})\|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

concluyendo así que $(V(f_n-f;X))$ converge a 0 y, por tanto, que (f_n) converge a f para la norma $\|.\|_{AC}$. □

Lema 1.2.4 *$AC(X,E)$ es un módulo sobre $AC(X)$.*

Demostración. Debemos ver que, dadas $f\in AC(X)$ y $g\in AC(X,E)$, se tiene que $f\cdot g\in AC(X,E)$.

Puesto que $f \in AC(X)$, tenemos que, dado $\varepsilon_f > 0$, existe $\delta_f > 0$ que satisface la condición dada en la Definición 1.2.1 en el caso escalar. De manera análoga, como $g \in AC(X,E)$, para cada $\varepsilon_g > 0$, existe $\delta_g > 0$ que satisface la Definición 1.2.1. Por tanto, si fijamos $\varepsilon > 0$ y consideramos, siempre que tanto f como g sean funciones no nulas,

$$\varepsilon_f = \frac{\varepsilon}{2\|g\|_\infty} > 0,\ \varepsilon_g = \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty} > 0,\ \delta = \min\{\delta_f, \delta_g\},$$

tenemos que, dada cualquier familia finita de intervalos abiertos y disjuntos dos a dos $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^n$ con extremos en X tal que $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \|(f\cdot g)(b_i) - (f\cdot g)(a_i)\| &\leq \sum_{i=1}^n \|(f\cdot g)(b_i) - f(b_i)g(a_i)\| + \\
&\quad \sum_{i=1}^n \|f(b_i)g(a_i) - (f\cdot g)(a_i)\| \\
&\leq \|f\|_\infty \sum_{i=1}^n \|g(b_i) - g(a_i)\| + \\
&\quad \|g\|_\infty \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| \\
&< \|f\|_\infty\, \varepsilon_g + \|g\|_\infty\, \varepsilon_f = \varepsilon,
\end{aligned}$$

quedando probado que $f \cdot g$ pertenece a $AC(X,E)$. □

A continuación, mostraremos la existencia de funciones absolutamente continuas que satisfacen determinadas propiedades y que resultarán de gran utilidad en el desarrollo de las secciones posteriores.

Lema 1.2.5 *Dados $x_0, x_1 \in X$ con $x_0 \neq x_1$, existe $f \in AC(X,E)$ tal que $f(x_0) \neq f(x_1)$.*

Demostración. Puesto que $x_0 \neq x_1$, si tomamos $\mathrm{e} \in E$, $\mathrm{e} \neq 0$, podemos definir

$$f(x) := \max\left\{0, 1 - \frac{|x - x_0|}{|x_1 - x_0|}\right\} \cdot \mathrm{e}$$

para todo $x \in X$. Es sencillo observar que $f \in AC(X,E)$ y que además $f(x_0) = \mathrm{e} \neq 0$ y $f(x_1) = 0$. □

Lema 1.2.6 *Sean $U \subset X$ abierto y $x_0 \in X$ tales que $x_0 \notin cl(U)$. Entonces existe $f \in AC(X, E)$ tal que $f(x_0) \neq 0$ y $f \equiv 0$ en U.*

Demostración. Dado que $x_0 \notin cl(U)$, existe $r > 0$ tal que

$$(x_0 - r, x_0 + r) \cap U = \emptyset.$$

Por tanto, tomando $\mathrm{e} \in E$ no nulo y considerando la función

$$f(x) := \max\left\{0, 1 - \frac{|x - x_0|}{r}\right\} \cdot \mathrm{e}$$

para cada $x \in X$, tenemos que $f \in AC(X, E)$, $f(x_0) = \mathrm{e} \neq 0$, y además $\mathrm{coz}(f) \subset (x_0 - r, x_0 + r)$, por lo que $f \equiv 0$ en U. $\square$

Lema 1.2.7 *Sean U un subconjunto abierto de X y $x_0 \in U$. Entonces existe $f \in AC(X)$ tal que $0 \leq f \leq 1$, $f(x_0) = 1$ y $\mathrm{coz}(f) \subset U$.*

Demostración. Como U es abierto en X y $x_0 \in U$, sabemos que existe $r > 0$ tal que

$$(x_0 - r, x_0 + r) \cap X \subset U.$$

Finalmente, definamos

$$f(x) := \max\left\{0, 1 - \frac{|x - x_0|}{r}\right\}$$

para todo $x \in X$. Al igual que en los casos anteriores, se puede comprobar que f es una función absolutamente continua en X y además satisface que $0 \leq f \leq 1$, $f(x_0) = 1$ y $\mathrm{coz}(f) \subset (x_0 - r, x_0 + r) \cap X \subset U$. $\square$

Corolario 1.2.8 *Sea $U \subset X$ abierto no vacío. Entonces existe $f \in AC(X, E)$ no nula tal que $\mathrm{coz}(f) \subset U$.*

Demostración. Considerando $\mathrm{e} \in E$, $\mathrm{e} \neq 0$, y una función $g \in AC(X)$ no nula que satisface que $\mathrm{coz}(g) \subset U$ (ver lema anterior), podemos definir la función no nula

$$f := g \cdot \tilde{\mathrm{e}}$$

que pertenece a $AC(X, E)$ por ser éste un módulo sobre $AC(X)$. Obviamente, se tiene que $\mathrm{coz}(f) \subset U$. $\square$

Lema 1.2.9 *Dados $K \subset U \subset X$ siendo K compacto y U abierto, existe $f \in AC(X)$ tal que $0 \leq f \leq 1$, $f \equiv 1$ en K y $\mathrm{coz}(f) \subset U$.*

Demostración. Puesto que K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, sabemos que existen el mínimo y el máximo de K, que denotaremos mediante m y M, repectivamente. Por tanto, $K \subset [m, M]$. Por otro lado, por ser U un abierto que contiene a K, existe $\lambda > 0$ tal que $(m - \lambda, m + \lambda) \cap X \subset U$ y $(M - \lambda, M + \lambda) \cap X \subset U$. Finalmente, definamos la función f como

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < m - \lambda/2 \\ (2/\lambda)(x - m) + 1 & \text{si } m - \lambda/2 \leq x < m \\ 1 & \text{si } m \leq x < M \\ (-2/\lambda)(x - M) + 1 & \text{si } M \leq x < M + \lambda/2 \\ 0 & \text{si } x \geq M + \lambda/2 \end{cases}$$

para todo $x \in X$. Veamos que $f \in AC(X)$. Para ello, fijado $\varepsilon > 0$, no es difícil observar que, por definición de f, basta tomar $\delta = \lambda\varepsilon/2$ para que, dada cualquier familia finita de intervalos abiertos y disjuntos dos a dos $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ con extremos en X tal que $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$, se obtenga que

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

Para finalizar, resulta inmediato observar que $0 \leq f \leq 1$, $f \equiv 1$ en K y $\mathrm{coz}(f) \subset (m - \lambda/2, M + \lambda/2) \cap X \subset U$. □

Este resultado nos permitirá probar la existencia de partición de la unidad en $AC(X)$. Precisamente, esto es lo que veremos en el siguiente lema.

Lema 1.2.10 *Sea $\{V_i\}_{i=1}^n$ un recubrimiento abierto finito de X. Entonces existe $\{f_i\}_{i=1}^n \subset AC(X)$ con $0 \leq f_i \leq 1$ tal que*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1$$

para todo $x \in X$ y $\mathrm{coz}(f_i) \subset V_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Demostración. Sea $x \in X$ y denotemos por U_x un entorno compacto de x tal que $U_x \subset V_i$ para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$. Puesto que X es compacto, existe un subconjunto finito de puntos $\{x_1, \ldots, x_m\}$ en X de manera que

$$X \subset \bigcup_{j=1}^{m} U_{x_j}.$$

Definamos ahora, para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$,

$$K_i := \bigcup \left\{ U_{x_j} : U_{x_j} \subset V_i \right\}.$$

Es obvio que cada K_i es compacto y que $K_i \subset V_i$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$, siendo V_i abierto. Entonces, por el Lema 1.2.9, es posible tomar $g_i \in AC(X)$ con $0 \leq g_i \leq 1$, $g_i \equiv 1$ en K_i y $\mathrm{coz}(g_i) \subset V_i$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$. Ahora, definamos las siguientes funciones:

$$\begin{array}{rcl}
f_1 & := & g_1, \\
f_2 & := & (\mathbf{1}_X - g_1)g_2, \\
& \vdots & \\
f_{n-1} & := & (\mathbf{1}_X - g_1)(\mathbf{1}_X - g_2)\cdots(\mathbf{1}_X - g_{n-2})g_{n-1}, \\
f_n & := & (\mathbf{1}_X - g_1)(\mathbf{1}_X - g_2)\cdots(\mathbf{1}_X - g_{n-2})(\mathbf{1}_X - g_{n-1})g_n.
\end{array}$$

Por definición de cada g_i, es inmediato observar que $f_i \in AC(X)$, $0 \leq f_i \leq 1$ y $\mathrm{coz}(f_i) \subseteq \mathrm{coz}(g_i) \subset V_i$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$. Por otro lado, fijado $x \in X$, se tiene que

$$\begin{array}{rcl}
f_1(x) + f_2(x) & = & g_1(x) + (\mathbf{1}_X - g_1)(x)g_2(x) \\
& = & 1 - (1 - g_1(x))(1 - g_2(x)).
\end{array}$$

De manera inductiva, es sencillo observar que

$$f_1(x) + \cdots + f_n(x) = 1 - (1 - g_1(x))(1 - g_2(x))\cdots(1 - g_n(x)).$$

Finalmente, como $x \in X$, existe $j_0 \in \{1,\ldots,m\}$ tal que $x \in U_{x_{j_0}}$, y, por definición de cada K_i, existe $i_0 \in \{1,\ldots,n\}$ de manera que $x \in K_{i_0}$. Teniendo en cuenta las propiedades de g_{i_0}, se tiene que $g_{i_0}(x) = 1$, lo que nos permite concluir que

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1.$$

Como este razonamiento se puede aplicar para cualquier $x \in X$, queda probado que $AC(X)$ admite una partición de la unidad. $\square$

1.3. Resultados preliminares

Este apartado está dedicado a probar una serie de resultados que nos permitirán obtener una completa caracterización de las aplicaciones (bi)separadoras definidas entre espacios de funciones absolutamente continuas.

A partir de este momento y mientras no se especifique lo contrario, vamos a suponer que $T : AC(X, E) \to AC(Y, F)$ es una aplicación separadora y biyectiva.

Definición 1.3.1 *Para cada $y \in Y$, consideramos la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \delta_y \circ T: & AC(X,E) & \to & F \\ & f & \mapsto & (\delta_y \circ T)(f) := Tf(y). \end{array}$$

Por otro lado, el soporte asociado a la aplicación $\delta_y \circ T$ se define como

$$\operatorname{supp}(\delta_y \circ T) := \{x \in X : \forall U \text{ entorno abierto de } x,\ \exists f \in AC(X,E) \text{ con } \operatorname{coz}(f) \subseteq U \text{ y } Tf(y) \neq 0\}.$$

Lema 1.3.2 *Para cada $y \in Y$, el soporte de $\delta_y \circ T$ es un único punto.*

Demostración. Veamos que, fijado $y \in Y$, el soporte de $\delta_y \circ T$ es no vacío y además contiene un único punto.

En primer lugar, probemos que el soporte de la aplicación $\delta_y \circ T$ es no vacío. Asumamos, por el contrario, que $\operatorname{supp}(\delta_y \circ T) = \emptyset$. Entonces, teniendo en cuenta la definición de $\operatorname{supp}(\delta_y \circ T)$ y que X es compacto, es sencillo deducir la existencia de un recubrimiento abierto finito $\{U_i\}_{i=1}^n$ de X que satisface que, para toda $f \in AC(X, E)$ con $\operatorname{coz}(f) \subseteq U_i$ para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene que $Tf(y) = 0$. Por otro lado, según el Lema 1.2.10, sabemos que existe una familia finita de funciones $\{f_i\}_{i=1}^n$ en $AC(X)$ con $\operatorname{coz}(f_i) \subseteq U_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\sum_{i=1}^n f_i = \mathbf{1}_X$. Por tanto, dada cualquier función $f \in AC(X, E)$, se tiene que

$$f = \sum_{i=1}^n f_i \cdot f,$$

y entonces, puesto que $\operatorname{coz}(f_i \cdot f) \subseteq \operatorname{coz}(f_i) \subseteq U_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, obtenemos que

$$Tf(y) = T\left(\sum_{i=1}^n f_i \cdot f\right)(y) = \sum_{i=1}^n T(f_i \cdot f)(y) = 0.$$

Así, acabamos de ver que $Tf(y) = 0$ para toda $f \in AC(X, E)$. Sin embargo, esto contradice que T sea suprayectiva ya que, para cualquier $\mathrm{f} \in F$ no nulo, la función $\tilde{\mathrm{f}}$ pertenece a $AC(Y, F)$.

Finalmente, veamos que el soporte de $\delta_y \circ T$ es único. Supongamos que existen $x_1, x_2 \in \mathrm{supp}(\delta_y \circ T)$ con $x_1 \neq x_2$. Tomemos U_1 y U_2 entornos abiertos disjuntos de x_1 y x_2, respectivamente. Por definición del soporte asociado a la aplicación $\delta_y \circ T$, existen $f_1, f_2 \in AC(X, E)$ con

$$\mathrm{coz}(f_1) \subseteq U_1, \ Tf_1(y) \neq 0,$$

y

$$\mathrm{coz}(f_2) \subseteq U_2, \ Tf_2(y) \neq 0.$$

Por tanto, deducimos que

$$y \in \mathrm{coz}(Tf_1) \cap \mathrm{coz}(Tf_2),$$

mientras que

$$\mathrm{coz}(f_1) \cap \mathrm{coz}(f_2) = \emptyset,$$

lo cual es absurdo puesto que T es separadora. □

Observación 1.3.3 *Como consecuencia de este lema, es posible definir una aplicación $h : Y \to X$ que envía cada punto $y \in Y$ al único punto $h(y)$ que pertenece al conjunto $\mathrm{supp}(\delta_y \circ T)$. Esta aplicación recibe el nombre de función soporte asociada a la aplicación separadora T.*

Lema 1.3.4 *Sea $f \in AC(X, E)$ tal que $f \equiv 0$ en un subconjunto abierto U de X. Entonces $Tf \equiv 0$ en $h^{-1}(U)$.*

Demostración. Sea $y \in h^{-1}(U)$. Entonces, teniendo en cuenta la definición de la función soporte, existe $g \in AC(X, E)$ con $\mathrm{coz}(g) \subseteq U$ y $Tg(y) \neq 0$. Ahora, puesto que las funciones f y g tienen cozeros disjuntos y T es una aplicación separadora, concluimos que $Tf(y) = 0$. Aplicando este razonamiento a todo $y \in h^{-1}(U)$, obtenemos que $Tf \equiv 0$ en $h^{-1}(U)$. □

A continuación, veremos algunas propiedades de la función soporte h asociada a la aplicación separadora T.

Lema 1.3.5 *La función soporte h es continua y suprayectiva.*

Demostración. Veamos, primeramente, que h es continua. Sea (y_n) una sucesión en Y que converge a $y_0 \in Y$ y supongamos que $(h(y_n))$ no converge hacia $h(y_0)$. Entonces, es posible tomar un entorno abierto U de $h(y_0)$ de modo que $h(y_n) \notin cl(U)$ para infinitos $n \in \mathbb{N}$. Ahora, por definición de $h(y_0)$, existe $f \in AC(X,E)$ con

$$\operatorname{coz}(f) \subseteq U \text{ y } Tf(y_0) \neq 0.$$

Puesto que Tf es continua e (y_n) converge a y_0, resulta sencillo observar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$Tf(y_{n_0}) \neq 0 \text{ y } h(y_{n_0}) \notin cl(U).$$

Como consecuencia, podemos considerar un entorno abierto V de $h(y_{n_0})$ tal que $U \cap V = \emptyset$ y, de nuevo, por definición del conjunto soporte, existe una función g en $AC(X,E)$ tal que

$$\operatorname{coz}(g) \subseteq V \text{ y } Tg(y_{n_0}) \neq 0,$$

obteniendo así dos funciones f y g de cozeros disjuntos con

$$y_{n_0} \in \operatorname{coz}(Tf) \cap \operatorname{coz}(Tg),$$

lo que nos lleva a una contradicción puesto que T es separadora.

En segundo lugar, probemos que h es suprayectiva. Para ello, puesto que $h : Y \to X$ es una aplicación continua definida en un espacio compacto y que toma valores en un espacio Hausdorff, se tiene que h es cerrada, por lo que será suficiente ver $h(Y)$ es un subconjunto denso de X para probar que h es suprayectiva. En suma, debemos ver que $cl(h(Y)) = X$.
Supongamos que $h(Y)$ no es denso en X. Entonces, existe $x \in X$ tal que $x \notin cl(h(Y))$, lo que nos permite tomar dos entornos abiertos y disjuntos U y V de x y $h(Y)$, respectivamente. Teniendo en cuenta el Corolario 1.2.8, podemos considerar $f \in AC(X,E)$ no nula que satisface que $\operatorname{coz}(f) \subset U$. Es obvio entonces que $f \equiv 0$ en V, y aplicando el Lema 1.3.4, se tiene que $Tf \equiv 0$ en $h^{-1}(V)$. Sin embargo, $h(Y) \subset V$, con lo que $Y \subset h^{-1}(V)$, luego $Tf \equiv 0$ en Y, siendo esto imposible puesto que T es inyectiva y f es una función no nula. $\square$

El siguiente resultado es la herramienta clave para el desarrollo de las dos secciones posteriores.

Proposición 1.3.6 *Sean $f \in AC(X,E)$ e $y \in Y$ tales que $f(h(y)) = 0$. Se tiene que:*

(i) *Si $fr(h^{-1}(h(y))) = \emptyset$, entonces $Tf \equiv 0$ en $h^{-1}(h(y))$.*

(ii) *Si $fr(h^{-1}(h(y))) \neq \emptyset$, entonces $Tf \equiv 0$ en $fr(h^{-1}(h(y)))$.*

Demostración. Fijemos $f \in AC(X,E)$ e $y_0 \in Y$ y supongamos que $f(h(y_0)) = 0$.

(i) Si asumimos que $fr(h^{-1}(h(y_0))) = \emptyset$, se tiene que $h^{-1}(h(y_0))$ es un conjunto abierto y cerrado (véase [29, Teorema 1.3.2]). Ahora, por la continuidad de la aplicación h, deducimos que $\{h(y_0)\}$ también es abierto, y, puesto que $f(h(y_0)) = 0$ por hipótesis, podemos concluir que $Tf \equiv 0$ en $h^{-1}(h(y_0))$ aplicando el Lema 1.3.4.

(ii) Supongamos ahora que $fr(h^{-1}(h(y_0))) \neq \emptyset$. Debemos probar que $Tf(y) = 0$ para todo $y \in fr(h^{-1}(h(y_0)))$. Para ello, comenzaremos definiendo las funciones

$$f_A := \chi_A \cdot f, \text{ donde } A = (-\infty, h(y_0)) \cap X,$$

y

$$f_B := \chi_B \cdot f, \text{ donde } B = (h(y_0), \infty) \cap X.$$

Puesto que $f(h(y_0)) = 0$, es sencillo observar que tanto f_A como f_B están bien definidas y ambas pertenecen a $AC(X,E)$. Además, se tiene que

$$f = f_A + f_B,$$

por lo que

$$Tf = Tf_A + Tf_B. \tag{1.1}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la definición de los conjuntos A y B, probemos que

$$\left[cl(h^{-1}(A)) \backslash h^{-1}(A)\right] \bigcup \left[cl(h^{-1}(B)) \backslash h^{-1}(B)\right] = fr(h^{-1}(h(y_0))). \tag{1.2}$$

Para ello, sea $y \in cl(h^{-1}(A)) \backslash h^{-1}(A)$. Entonces, existe una sucesión (y_n) en $h^{-1}(A)$ que converge hacia y. Por ser h continua, se tiene que $(h(y_n))$ converge a $h(y)$, y como $(h(y_n))$ es una sucesión en A, obtenemos que $h(y) \in cl(A)$.

Además, sabemos que $h(y) \notin A$, por lo que $h(y) \in cl(A) \setminus A = \{h(y_0)\}$, y, por tanto, $y \in h^{-1}(h(y_0))$. Supongamos ahora que $y \in int(h^{-1}(h(y_0)))$, entonces

$$y \in int(h^{-1}(h(y_0))) \subseteq int(Y \setminus h^{-1}(A)) = Y \setminus cl(h^{-1}(A)),$$

obteniendo una contradicción con nuestra hipótesis inicial. Por tanto, ha sido probado que $y \in h^{-1}(h(y_0)) \setminus int(h^{-1}(h(y_0))) \subseteq fr(h^{-1}(h(y_0)))$, y, de hecho, en este caso ambos conjuntos coinciden por ser h una aplicación continua. Si tomamos $y \in cl(h^{-1}(B)) \setminus h^{-1}(B)$, podemos aplicar un razonamiento análogo para ver que $y \in fr(h^{-1}(h(y_0)))$.
Veamos ahora la otra inclusión. Sea $y \in fr(h^{-1}(h(y_0)))$. Entonces

$$\begin{aligned} y \;\; \in \;\; & Y \setminus int(h^{-1}(h(y_0))) = cl(Y \setminus h^{-1}(h(y_0))) = \\ & cl(h^{-1}(A) \cup h^{-1}(B)) = cl(h^{-1}(A)) \cup cl(h^{-1}(B)). \end{aligned}$$

Por otro lado, si $y \in h^{-1}(A)$, por ser éste abierto, se tiene que

$$y \in int(h^{-1}(A)) \subseteq int(Y \setminus h^{-1}(h(y_0))) = Y \setminus cl(h^{-1}(h(y_0))),$$

lo que contradice que $y \in fr(h^{-1}(h(y_0)))$. Razonando similarmente para el conjunto $h^{-1}(B)$ podemos concluir que $y \notin h^{-1}(A) \cup h^{-1}(B)$, quedando así probada la igualdad (1.2).

Como consecuencia de esta igualdad, bastará ver que $Tf(y) = 0$ para cada $y \in cl(h^{-1}(A)) \setminus h^{-1}(A)$ e $y \in cl(h^{-1}(B)) \setminus h^{-1}(B)$. En particular, teniendo en cuenta (1.1), será suficiente ver que $Tf_A(y) = 0$ y $Tf_B(y) = 0$.

A partir de este momento, supongamos que $y \in cl(h^{-1}(A)) \setminus h^{-1}(A)$. Por definición de f_B, es obvio que $f_B \equiv 0$ en A, por lo que aplicando el Lema 1.3.4 obtenemos que $Tf_B \equiv 0$ en $h^{-1}(A)$. Así, en virtud de la continuidad de la función Tf_B, se tiene que $Tf_B(y) = 0$.

Veamos ahora que $Tf_A(y) = 0$. Supongamos que no es cierto, esto es, que $Tf_A(y) \neq 0$. Como hemos visto anteriormente que $h(y) = h(y_0)$ siempre que $y \in cl(h^{-1}(A)) \setminus h^{-1}(A)$, se tiene que $f_A(h(y)) = 0$, y, por la continuidad de la función soporte h, podemos considerar una sucesión (y_n) en $h^{-1}(A)$ que converge a y tal que

$$\|f_A(h(y_n))\| < \frac{1}{n^3}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Tomando una subsucesión de (y_n) si es necesario, vamos a definir, para cada $n \in \mathbb{N}$, entornos abiertos mutuamente disjuntos U_n de $h(y_n)$ tales que

$$\|f_A(x)\| < \frac{1}{n^3} \tag{1.3}$$

para todo $x \in U_n$ y además

$$V(f_A; U_n) < \frac{1}{n^3}. \tag{1.4}$$

Si tomamos ahora un entorno compacto K_n de $h(y_n)$ tal que $K_n \subset U_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, en virtud del Lema 1.2.9, podemos considerar $f_n \in AC(X)$ tal que $0 \leq f_n \leq 1$, $f_n \equiv 1$ en K_n, $\mathrm{coz}(f_n) \subset U_n$ y $V(f_n; X) = 2$. A continuación, para todo $n \in \mathbb{N}$, definiremos las funciones

$$g_n := n f_n,$$

que pertenecen a $AC(X)$ y satisfacen que $g_n \equiv n$ en K_n, $\mathrm{coz}(g_n) \subset U_n$, $\|g_n\|_\infty = n$ y $V(g_n; X) = 2n$. Finalmente, consideraremos

$$g_0 := \sum_{n=1}^{\infty} f_A \cdot g_n.$$

Para ver que g_0 pertenece a $AC(X, E)$, puesto que $(AC(X, E), \|.\|_{AC})$ es un espacio de Banach, será suficiente comprobar que

$$\|f_A \cdot g_n\|_{AC} < \frac{4}{n^2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por definición de cada g_n, se tiene que $\mathrm{coz}(f_A \cdot g_n) \subset U_n$, por lo que bastará analizar $\|f_A \cdot g_n\|_{AC}$ en U_n. Teniendo en cuenta (1.3), es inmediato observar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\|f_A \cdot g_n\|_\infty < 1/n^2$ en U_n. Por otro lado, si tomamos una partición $\{x_i\}_{i=0}^m$ cualquiera de U_n, tenemos que, aplicando (1.3), (1.4) y las propiedades de las funciones g_n,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \|(f_A \cdot g_n)(x_i) - (f_A \cdot g_n)(x_{i-1})\| &\leq \sum_{i=1}^{m} \|(f_A \cdot g_n)(x_i) - f_A(x_i) g_n(x_{i-1})\| + \\
&\quad \sum_{i=1}^{m} \|f_A(x_i) g_n(x_{i-1}) - (f_A \cdot g_n)(x_{i-1})\| \\
&\leq \|f_{A|_{U_n}}\|_\infty \sum_{i=1}^{m} |g_n(x_i) - g_n(x_{i-1})| + \\
&\quad \|g_n\|_\infty \sum_{i=1}^{m} \|f_A(x_i) - f_A(x_{i-1})\| \\
&\leq \|f_{A|_{U_n}}\|_\infty V(g_n; U_n) + \|g_n\|_\infty V(f_A; U_n) \\
&< \frac{1}{n^3}\, 2n + n\, \frac{1}{n^3} = \frac{3}{n^2}.
\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que $V(f_A \cdot g_n; U_n) \leq 3/n^2$ para cada $n \in \mathbb{N}$, quedando así probado que

$$\|f_A \cdot g_n\|_{AC} = \|f_A \cdot g_n\|_\infty + V(f_A \cdot g_n; X) < \frac{4}{n^2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que nos permite afirmar que $g_0 \in AC(X, E)$.

Sea ahora V_n un entorno abierto de $h(y_n)$ tal que $V_n \subset K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es obvio que

$$g_0 \equiv n f_A \text{ en } V_n,$$

y aplicando el Lema 1.3.4, concluimos que

$$Tg_0 \equiv nTf_A \text{ en } h^{-1}(V_n).$$

Como consecuencia

$$Tg_0(y_n) = nTf_A(y_n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, puesto que $Tf_A(y_n)$ converge a $Tf_A(y) \neq 0$, podemos deducir que Tg_0 es una función no acotada, lo cual es absurdo.

Para finalizar, en el caso en que $cl(h^{-1}(B)) \backslash h^{-1}(B)$ sea no vacío, de manera análoga podemos comprobar que $Tf(y) = 0$ siempre que y pertenece a $cl(h^{-1}(B)) \backslash h^{-1}(B)$. $\square$

1.4. Caso finito-dimensional

A lo largo de esta sección, vamos a estudiar las aplicaciones separadoras y biyectivas entre espacios de funciones absolutamente continuas definidas en subconjuntos compactos de la recta real que toman valores en espacios normados de dimensión finita.

El siguiente ejemplo ilustra que, en el caso en que los espacios normados en los cuales toman valores las funciones no tengan la misma dimensión, no toda aplicación biyectiva y separadora tiene inversa separadora.

Ejemplo 1.4.1 *Consideremos* $T : AC([0, 1], \mathbb{R}^2) \to AC([0, 1] \cup [2, 3], \mathbb{R})$ *definida como*

$$Tf(y) = a_1$$
$$Tf(2 + y) = a_2,$$

siendo $f(y) = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ *para cada* $y \in [0, 1]$. *Resulta sencillo comprobar que* T *es una aplicación biyectiva y separadora. Sin embargo, su inversa no es separadora.*

Por este motivo, a partir de este momento vamos a suponer que E y F son espacios normados n-dimensionales y que $\{\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n\}$ y $\{\mathrm{f}_1, \dots, \mathrm{f}_n\}$ constituyen sendas bases de E y F, respectivamente. Recordemos también que estamos asumiendo que X e Y son subconjuntos compactos de la recta real y que $T : AC(X, E) \to AC(Y, F)$ es una aplicación separadora y biyectiva.

En el siguiente resultado probaremos que, a partir de la base de E, es posible obtener una nueva base de F.

Lema 1.4.2 *Dado $x \in X$, existe $y \in h^{-1}(x)$ tal que $\{T\tilde{\mathrm{e}}_i(y) : i = 1, \dots, n\}$ es una base de F.*

Demostración. Como en el Lema 1.3.5 hemos visto que h es una aplicación suprayectiva, es obvio que, fijado cualquier $x_0 \in X$, existe $y_0 \in Y$ tal que $y_0 \in h^{-1}(x_0)$. Veamos ahora que $\{T\tilde{\mathrm{e}}_i(y_0) : i = 1, \dots, n\}$ es una base de F. Puesto que E y F tienen la misma dimensión, bastará probar que los vectores $T\tilde{\mathrm{e}}_1(y_0), \dots, T\tilde{\mathrm{e}}_n(y_0)$ son linealmente independientes.

Supongamos que no es cierto y que $T\tilde{\mathrm{e}}_1(y_0), \dots, T\tilde{\mathrm{e}}_n(y_0)$ son linealmente dependientes. Por tanto, es posible tomar $\mathrm{f} \in F$ linealmente independiente con ellos. Ahora, consideremos la función $T^{-1}\tilde{\mathrm{f}}$ y afirmamos que no se anula en todo X, pues de lo contrario, aplicando la Proposición 1.3.6, la función $\tilde{\mathrm{f}}$ se anularía en algún punto de Y, y con ello $\mathrm{f} = 0$, lo que contradice que f sea linealmente independiente con $T\tilde{\mathrm{e}}_1(y_0), \dots, T\tilde{\mathrm{e}}_n(y_0)$. Por otro lado, como $\{\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n\}$ es una base de E, existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, no todos ellos nulos, tales que

$$T^{-1}\tilde{\mathrm{f}}(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{e}_i.$$

Si consideramos la función

$$g := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tilde{\mathrm{e}}_i$$

que pertenece a $AC(X, E)$, es inmediato observar que

$$\left(T^{-1}\tilde{\mathrm{f}} - g\right)(x_0) = 0,$$

y por tanto, aplicando la Proposición 1.3.6,

$$\left(\tilde{\mathrm{f}} - Tg\right)(y_0) = 0.$$

Esto implica que

$$\mathrm{f} = \tilde{\mathrm{f}}(y_0) = Tg(y_0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T\tilde{\mathrm{e}}_i(y_0),$$

lo cual es una contradicción puesto que estábamos asumiendo que f era linealmente independiente con $T\tilde{\mathrm{e}}_1(y_0), \ldots, T\tilde{\mathrm{e}}_n(y_0)$. □

En estos momentos, estamos en disposición de probar la existencia de un homeomorfismo entre los espacios X e Y.

Teorema 1.4.3 *La función soporte h es un homeomorfismo.*

Demostración. En el Lema 1.3.5 hemos visto que h es continua y suprayectiva. Además, en la demostración de dicho lema también hemos indicado que h es una aplicación cerrada, por lo que bastará probar que h es inyectiva para deducir el resultado.

Supongamos, por el contrario, que existen dos puntos distintos $y_0, y_1 \in Y$ tales que $h(y_0) = h(y_1)$. A continuación, analizaremos las tres situaciones que se pueden presentar en estas condiciones y trataremos de obtener una contradicción en cada una de ellas.

1. En primer lugar, vamos a suponer que $y_0, y_1 \in fr(h^{-1}(h(y_0)))$. Como T es una aplicación suprayectiva, existen $g_1, \ldots, g_n \in AC(X,E)$ tales que

$$Tg_i = \tilde{\mathrm{f}}_i$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, siendo $\{\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_n\}$ una base de F. Veamos que $g_1(h(y_0)), \ldots, g_n(h(y_0))$ son linealmente independientes, con lo que se deduce que forman una base de E. Supongamos que no es cierto. Entonces, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, no todos nulos, tales que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(h(y_0)) = 0.$$

Aplicando la Proposición 1.3.6, se tiene que

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i\right)(y_0) = 0,$$

o lo que es lo mismo,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{f}_i = 0,$$

obteniendo una contradicción puesto que $\{\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_n\}$ es una base de F. Por tanto, para cada $f \in AC(X, E)$, tenemos que

$$f(h(y_0)) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i g_i(h(y_0)) = f(h(y_1))$$

siendo $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ no todos nulos. De nuevo, por la Proposición 1.3.6, se tiene que

$$Tf(y_0) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i g_i\right)(y_0) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \tilde{\mathrm{f}}_i(y_0) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathrm{f}_i$$

y

$$Tf(y_1) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i g_i\right)(y_1) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \tilde{\mathrm{f}}_i(y_1) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathrm{f}_i,$$

con lo que se prueba que $Tf(y_0) = Tf(y_1)$ para toda $f \in AC(X, E)$. Sin embargo, por ser T suprayectiva, obtenemos una contradicción con el Lema 1.2.5.

2. Supongamos, en segundo lugar, que $fr(h^{-1}(h(y_0))) = \emptyset$, y siguiendo un razonamiento análogo al del caso anterior, llegaremos a la misma contradicción. Sea $\{\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_n\}$ la base de F. Puesto que T es suprayectiva, existen $g_1, \ldots, g_n \in AC(X, E)$ tales que

$$Tg_i = \tilde{\mathrm{f}}_i$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Al igual que en el caso anterior, es sencillo probar que $g_1(h(y_0)), \ldots, g_n(h(y_0))$ forman una base de E. Por este motivo, existen $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$, no todos nulos, tales que

$$f(h(y_0)) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i g_i(h(y_0)) = f(h(y_1))$$

para cada $f \in AC(X,E)$. Ahora bien, como $fr(h^{-1}(h(y_0))) = \emptyset$ e $y_0, y_1 \in h^{-1}(h(y_0))$ por hipótesis, aplicando la Proposición 1.3.6 deducimos que

$$Tf(y_0) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i Tg_i(y_0) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathrm{f}_i$$

y

$$Tf(y_1) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i Tg_i(y_1) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathrm{f}_i,$$

obteniendo de nuevo que $Tf(y_0) = Tf(y_1)$ para toda $f \in AC(X,E)$, lo que nos lleva a una contradicción.

3. Finalmente, asumamos que $y_0 \in fr(h^{-1}(h(y_0)))$ e $y_1 \in int(h^{-1}(h(y_0)))$. Teniendo en cuenta el Corolario 1.2.8, sabemos que existe una función $g \in AC(Y,F)$ no nula con $\mathrm{coz}(g) \subset int(h^{-1}(h(y_0)))$. Probemos ahora la existencia de un punto x_0 en X con $x_0 \neq h(y_0)$ tal que $T^{-1}g(x_0) \neq 0$. Si suponemos que esto no es cierto, se tiene que $T^{-1}g \equiv 0$ en $X \backslash \{h(y_0)\}$. Entonces, puesto que $h(y_0)$ no es un punto aislado (pues de lo contrario tendríamos que $fr(h^{-1}(h(y_0))) = \emptyset$), deducimos que $T^{-1}g \equiv 0$ en X, lo que contradice que g sea una función no nula. Por tanto, si tomamos la base $\{\mathrm{e}_i : i = 1, \dots, n\}$ de E, tenemos que

$$T^{-1}g(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tilde{\mathrm{e}}_i(x_0) \neq 0$$

para $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ no todos ellos nulos. Para finalizar, aplicando la Proposición 1.3.6 obtenemos que, para algún $y_2 \in fr(h^{-1}(x_0))$,

$$g(y_2) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T\tilde{\mathrm{e}}_i(y_2),$$

mientras que el Lema 1.4.2 nos permite concluir que $g(y_2) \neq 0$. Sin embargo, por ser h continua, se tiene que $fr(h^{-1}(x_0)) \subset h^{-1}(x_0)$, obteniendo así que $y_2 \in h^{-1}(x_0)$, lo que nos lleva a una contradicción puesto que $x_0 \neq h(y_0)$ y $\mathrm{coz}(g) \subset int(h^{-1}(h(y_0)))$.

De esta manera, podemos afirmar que la función soporte $h : Y \to X$ es inyectiva, y, por tanto, que es un homeomorfismo. $\square$

Una vez probado que, en el caso en que E y F son espacios normados con la misma dimensión finita, toda aplicación $T : AC(X,E) \to AC(Y,F)$ biyectiva y separadora induce un homeomorfismo entre X e Y, el próximo objetivo es obtener una completa descripción de dichas aplicaciones.

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del teorema anterior y de la Proposición 1.3.6.

Corolario 1.4.4 *Sean $f \in AC(X,E)$ e $y \in Y$ tales que $f(h(y)) = 0$. Entonces $Tf(y) = 0$.*

Como veremos a continuación, este corolario es la herramienta fundamental para deducir la representación de la aplicación T.

Observación 1.4.5 *Fijemos $f \in AC(X,E)$ e $y \in Y$ y definamos la siguiente función:*

$$g := f - \widetilde{f(h(y))}.$$

Es obvio que $g \in AC(X,E)$ y que $g(h(y)) = 0$, por lo que, teniendo en cuenta el Corolario 1.4.4, deducimos que $Tg(y) = 0$. Por este motivo, se tiene que

$$Tf(y) = T\widetilde{f(h(y))}(y).$$

A la vista de esta representación de T, definamos, para cada $y \in Y$, la aplicación Jy de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rccc} Jy: & E & \to & F \\ & \mathrm{e} & \mapsto & (Jy)(\mathrm{e}) := T\tilde{\mathrm{e}}(y). \end{array}$$

Lema 1.4.6 *Para cada $y \in Y$, Jy es lineal, biyectiva y continua.*

Demostración. Fijemos $y_0 \in Y$.

- Jy_0 es lineal: sean $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2 \in E$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Entonces, por ser T una aplicación lineal, se tiene que

$$\begin{aligned} (Jy_0)(\alpha \mathrm{e}_1 + \beta \mathrm{e}_2) &= T(\widetilde{\alpha \mathrm{e}_1 + \beta} \mathrm{e}_2)(y_0) \\ &= \alpha T\tilde{\mathrm{e}}_1(y_0) + \beta T\tilde{\mathrm{e}}_2(y_0) \\ &= \alpha (Jy_0)(\mathrm{e}_1) + \beta (Jy_0)(\mathrm{e}_2), \end{aligned}$$

  concluyendo que Jy_0 es lineal.

- Jy_0 es inyectiva: sea $\mathrm{e} \in E$, $\mathrm{e} \neq 0$. Puesto que $\{\mathrm{e}_i : i = 1, \ldots, n\}$ es una base de E, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, no todos nulos, tales que

$$\mathrm{e} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{e}_i,$$

por lo que

$$\tilde{\mathrm{e}}(h(y_0)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tilde{\mathrm{e}}_i(h(y_0)).$$

Ahora bien, teniendo en cuenta el Corolario 1.4.4, obtenemos que

$$T\tilde{\mathrm{e}}(y_0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T\tilde{\mathrm{e}}_i(y_0),$$

mientras que el Lema 1.4.2 nos permite concluir que $T\tilde{\mathrm{e}}(y_0) \neq 0$, o lo que es lo mismo, que

$$(Jy_0)(\mathrm{e}) \neq 0,$$

quedando así probado que Jy_0 es inyectiva.

- Jy_0 es suprayectiva: como estamos asumiendo que E y F son espacios normados con la misma dimensión finita y acabamos de probar que Jy_0 es inyectiva, se tiene que también es suprayectiva.

- Jy_0 es continua: se deduce de manera inmediata por tratarse de una aplicación lineal definida en un espacio normado de dimensión finita.

Por tanto, queda probado que, para cualquier $y \in Y$, la aplicación Jy es lineal, biyectiva y continua. $\square$

Fruto de todo el estudio realizado a lo largo de esta sección, es sencillo obtener el siguiente resultado en el que se describen las aplicaciones separadoras entre espacios de funciones absolutamente continuas.

Corolario 1.4.7 *Sean X e Y subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$, E y F espacios normados con la misma dimensión finita y $T : AC(X, E) \to AC(Y, F)$ una biyección separadora. Entonces existen un homeomorfismo $h : Y \to X$ y una aplicación continua $J : Y \to L(E, F)$ tales que*

$$Tf(y) = (Jy)(f(h(y)))$$

para toda $f \in AC(X, E)$ e $y \in Y$.

Demostración. En primer lugar, definamos la aplicación J como

$$\begin{array}{rccc} J: & Y & \to & L(E,F) \\ & y & \mapsto & Jy. \end{array}$$

El Lema 1.4.6 nos permite comprobar que la aplicación J está bien definida. Además, teniendo en cuenta la representación de T obtenida en la Observación 1.4.5 y la definición de la aplicación Jy para cada $y \in Y$, es trivial deducir que

$$Tf(y) = (Jy)(f(h(y)))$$

para toda $f \in AC(X,E)$ e $y \in Y$. Por otro lado, la existencia del homeomorfismo h definido entre X e Y fue probada en el Teorema 1.4.3. Por tanto, para finalizar la demostración, debemos ver que la aplicación J es continua. Para ello, consideremos una sucesión (y_n) en Y que converge hacia $y \in Y$. Si fijamos cualquier $\mathrm{e} \in E$, se tiene que $((Jy_n)(\mathrm{e})) = (T\tilde{\mathrm{e}}(y_n))$ converge hacia $T\tilde{\mathrm{e}}(y) = (Jy)(\mathrm{e})$ debido a la continuidad de la función $T\tilde{\mathrm{e}}$. Por tanto, como $L(E,F)$ está dotado de la topología *Strong Operator Topology*, (Jy_n) converge hacia Jy, quedando así probado que J es continua. □

Gracias a la descripción de la aplicación T obtenida en el corolario anterior, vamos a comprobar que, en este contexto, las biyecciones separadoras son automáticamente continuas y que su inversa también es separadora.

Teorema 1.4.8 *T es continua.*

Demostración. Para probar que T es continua aplicaremos el Teorema del Grafo Cerrado (véanse la Definición 0.0.4 y el Teorema 0.0.5). Por tanto, debemos ver que, si (f_n) es una sucesión en $AC(X,E)$ que converge a 0 y (Tf_n) converge a una función $g \in AC(Y,F)$, entonces $g \equiv 0$.

Fijemos $y_0 \in Y$. En primer lugar, veamos que la aplicación $\delta_{y_0} \circ T$ es continua. Está claro que $\delta_{y_0} \circ T$ es lineal. Además, gracias a la representación de T obtenida en el Corolario 1.4.7 y a que Jy_0 es una aplicación continua, se tiene que

$$\|\delta_{y_0} \circ T(f)\| = \|Tf(y_0)\| = \|(Jy_0)(f(h(y_0)))\| \leq \|Jy_0\| \|f\|_\infty$$

para cada $f \in AC(X,E)$, lo que nos permite concluir que $\delta_{y_0} \circ T$ es continua. Como consecuencia, $(\delta_{y_0} \circ T(f_n)) = (Tf_n(y_0))$ converge a 0.

Por otro lado, tenemos que

$$\|Tf_n(y_0) - g(y_0)\| \leq \|Tf_n - g\|_\infty \leq \|Tf_n - g\|_{AC}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, y como estamos suponiendo que (Tf_n) converge hacia g, obtenemos que $(Tf_n(y_0))$ converge a $g(y_0)$.

Finalmente, como este razonamiento se puede aplicar para cualquier punto $y \in Y$, se tiene que $g(y) = 0$ para todo $y \in Y$. $\square$

Teorema 1.4.9 *T es biseparadora.*

Demostración. Veamos que $T^{-1} : AC(Y, F) \to AC(X, E)$ es también una aplicación separadora. Supongamos, por el contrario, que T^{-1} no es separadora. Entonces, existen $f, g \in AC(Y, F)$ con

$$\mathrm{coz}(f) \cap \mathrm{coz}(g) = \emptyset$$

tales que

$$\mathrm{coz}(T^{-1}f) \cap \mathrm{coz}(T^{-1}g) \neq \emptyset.$$

Por tanto, sabemos que existe $x_0 \in X$ tal que

$$T^{-1}f(x_0) \neq 0 \text{ y } T^{-1}g(x_0) \neq 0.$$

Si tenemos en cuenta la representación de la aplicación T obtenida en el Corolario 1.4.7, deducimos que

$$T(T^{-1}f)(h^{-1}(x_0)) = (Jh^{-1}(x_0))(T^{-1}f(x_0))$$

y

$$T(T^{-1}g)(h^{-1}(x_0)) = (Jh^{-1}(x_0))(T^{-1}g(x_0)).$$

Como consecuencia, por ser Jy una aplicación biyectiva para todo $y \in Y$, podemos concluir que

$$f(h^{-1}(x_0)) \neq 0 \text{ y } g(h^{-1}(x_0)) \neq 0,$$

lo que contradice que f y g tengan cozeros disjuntos. $\square$

1.5. Caso infinito-dimensional

Para comenzar esta sección, lo primero que vamos a hacer es mostrar un ejemplo, basado en la misma idea que el Ejemplo 1.4.1, que ilustra que, en el caso en que los espacios normados E y F sean de dimensión infinita (incluso siendo Banach), no toda aplicación $T : AC(X, E) \to AC(Y, F)$ biyectiva y separadora es necesariamente biseparadora.

Ejemplo 1.5.1 *Sea c_0 el espacio de las sucesiones escalares que convergen a 0 y consideremos la aplicación*

$$T : AC([0,1], c_0) \to AC([0,1] \cup [2,3], c_0)$$

definida como

$$Tf(y) = (\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5, \ldots)$$
$$Tf(2+y) = (\lambda_2, \lambda_4, \lambda_6, \ldots),$$

siendo $f(y) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \ldots) \in c_0$ para cada $y \in [0,1]$. Es sencillo comprobar que T es biyectiva y separadora, sin embargo, su inversa no es separadora.

Por este motivo, puesto que en esta sección asumiremos que E y F son espacios de Banach de dimensión infinita, incluso cuando $E = F$ (como en el ejemplo anterior), vamos a considerar que $T : AC(X,E) \to AC(Y,F)$ es una aplicación biseparadora, es decir, una aplicación biyectiva en la que tanto ella como su inversa son separadoras (recordemos que X e Y son subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$).

Observación 1.5.2 *Puesto que la aplicación $T : AC(X,E) \to AC(Y,F)$ es biseparadora, como vimos al inicio de la Sección 1.3, podemos obtener sendas funciones soporte continuas $h : Y \to X$ y $k : X \to Y$ asociadas a las aplicaciones separadoras T y T^{-1}, respectivamente.*

Para probar el siguiente lema, basta asumir que $T : AC(X,E) \to AC(Y,F)$ es una aplicación solamente separadora.

Lema 1.5.3 *Para cada $f \in AC(X,E)$, se tiene que $h(\mathrm{coz}(Tf)) \subset cl(\mathrm{coz}(f))$.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que existen $f \in AC(X,E)$ e $y \in \mathrm{coz}(Tf)$ tales que

$$h(y) \notin cl(\mathrm{coz}(f)).$$

Por tanto, podemos considerar un entorno abierto U de $h(y)$ tal que

$$U \cap \mathrm{coz}(f) = \emptyset.$$

Ahora, teniendo en cuenta la definición de la función soporte h, existe una función $g \in AC(X,E)$ que satisface

$$\mathrm{coz}(g) \subset U \text{ y } Tg(y) \neq 0.$$

Como f y g tienen cozeros disjuntos y T es separadora, se tiene que

$$\operatorname{coz}(Tf) \cap \operatorname{coz}(Tg) = \emptyset,$$

de donde deducimos que $Tf(y) = 0$, lo cual contradice que $y \in \operatorname{coz}(Tf)$. $\square$

Para probar el primer resultado importante de esta sección tendremos en cuenta la Observación 1.5.2 y el Lema 1.5.3. En particular, probaremos que X e Y son homeomorfos.

Teorema 1.5.4 *La función soporte h es un homeomorfismo.*

Demostración. Puesto que tanto h como k son continuas (véase la Observación 1.5.2), para probar este resultado será suficiente ver que k es la función inversa de h. Para ello, debemos comprobar que $(h \circ k)(x) = x$ para todo $x \in X$ y que $(k \circ h)(y) = y$ para todo $y \in Y$. Veamos la primera de las igualdades y la otra se prueba de manera análoga.

Supongamos que no es cierto que $(h \circ k)(x) = x$ para todo $x \in X$, por lo que existe $x_0 \in X$ tal que $h(k(x_0)) \neq x_0$. Sea U un entorno abierto de $h(k(x_0))$ tal que $x_0 \notin cl(U)$. Ahora, por la definición de la función soporte h asociada a T, sabemos que existe $f_1 \in AC(X,E)$ con

$$\operatorname{coz}(f_1) \subset U \text{ y } Tf_1(k(x_0)) \neq 0. \tag{1.5}$$

De esta manera, por un lado, sabemos que

$$x_0 \notin cl(\operatorname{coz}(f_1)),$$

y, por otro lado, como $k(x_0) \in \operatorname{coz}(Tf_1)$, teniendo en cuenta el Lema 1.5.3, obtenemos que

$$h(k(x_0)) \in cl(\operatorname{coz}(f_1)).$$

Ahora, en virtud del Lema 1.2.6, existe $f_2 \in AC(X,E)$ tal que $f_2(x_0) \neq 0$ y $f_2 \equiv 0$ en $\operatorname{coz}(f_1)$. Resulta obvio entonces que

$$\operatorname{coz}(f_1) \cap \operatorname{coz}(f_2) = \emptyset,$$

y por ser T separadora,

$$\operatorname{coz}(Tf_1) \cap \operatorname{coz}(Tf_2) = \emptyset.$$

Observando (1.5), deducimos que $\mathrm{coz}(Tf_1)$ es un entorno abierto de $k(x_0)$, y, de nuevo, por la definición de la función soporte k asociada a la aplicación separadora T^{-1}, existe $f_3 \in AC(Y, F)$ tal que

$$\mathrm{coz}(f_3) \subset \mathrm{coz}(Tf_1) \text{ y } T^{-1}f_3(x_0) \neq 0.$$

Por tanto, se tiene que

$$\mathrm{coz}(f_3) \cap \mathrm{coz}(Tf_2) = \emptyset,$$

y puesto que T^{-1} es separadora,

$$\mathrm{coz}(T^{-1}f_3) \cap \mathrm{coz}(f_2) = \emptyset,$$

llegando a una contradicción puesto que $T^{-1}f_3(x_0) \neq 0$ y $f_2(x_0) \neq 0$. □

Sin más que tener en cuenta la Proposición 1.3.6 y el Teorema 1.5.4, se deduce de manera inmediata el siguiente resultado.

Corolario 1.5.5 *Sean $f \in AC(X, E)$ e $y \in Y$ tales que $f(h(y)) = 0$. Entonces $Tf(y) = 0$.*

En esta ocasión, podemos enunciar el resultado análogo asociado a la aplicación separadora T^{-1} y con función soporte k.

Corolario 1.5.6 *Sean $g \in AC(Y, F)$ y $x \in X$ tales que $g(k(x)) = 0$. Entonces $T^{-1}g(x) = 0$.*

Observación 1.5.7 *Siguiendo el mismo razonamiento que en la Observación 1.4.5 y teniendo en cuenta el Corolario 1.5.5, podemos obtener que, en el caso que nos ocupa, para toda $f \in AC(X, E)$ e $y \in Y$,*

$$Tf(y) = T\widetilde{f(h(y))}(y).$$

Además, para cada $y \in Y$, se define una nueva aplicación $Jy : E \to F$ del mismo modo en que lo hicimos en la Observación 1.4.5.

En este caso, cada aplicación Jy está definida entre espacios de Banach de dimensión infinita, por lo que, a diferencia del caso finito-dimensional, no podemos deducir su continuidad de manera automática.

Lema 1.5.8 *Jy es lineal y biyectiva para cada $y \in Y$.*

Demostración. El razonamiento seguido en el Lema 1.4.6 para probar que cada aplicación Jy es lineal es también aplicable en este contexto. Por tanto, debemos ver que cada Jy es biyectiva. Para ello, fijemos $y_0 \in Y$.

- Jy_0 es inyectiva: supongamos que existe $\mathrm{e} \in E$ tal que $(Jy_0)(\mathrm{e}) = 0$. Teniendo en cuenta la Observación 1.5.2 y la demostración del Teorema 1.5.4, deducimos que la aplicación soporte $k : X \to Y$ asociada a la aplicación separadora T^{-1} es un homeomorfismo, por lo que existe $x_0 \in X$ tal que $k(x_0) = y_0$, obteniendo así que

  $$(Jk(x_0))(\mathrm{e}) = T\tilde{\mathrm{e}}(k(x_0)) = 0.$$

  Si consideramos ahora el Corolario 1.5.6, se tiene que

  $$T^{-1}\left(T\tilde{\mathrm{e}}\right)(x_0) = 0,$$

  es decir, que $\tilde{\mathrm{e}}(x_0) = 0$, lo que nos permite concluir que $\mathrm{e} = 0$, quedando así probado que Jy_0 es inyectiva.

- Jy_0 es suprayectiva: dado $\mathrm{f} \in F$, debemos encontrar $\mathrm{e} \in E$ tal que

  $$(Jy_0)(\mathrm{e}) = \mathrm{f}.$$

  Puesto que T es suprayectiva, existe $g \in AC(X,E)$ tal que $Tg = \tilde{\mathrm{f}}$, y, en particular, $Tg(y_0) = \mathrm{f}$. Definamos ahora

  $$\mathrm{e} := g(h(y_0)) \in E.$$

  Es sencillo observar que

  $$(\tilde{\mathrm{e}} - g)(h(y_0)) = 0,$$

  por lo que aplicando el Corolario 1.5.5 deducimos que

  $$T(\tilde{\mathrm{e}} - g)(y_0) = 0.$$

  Por tanto,

  $$(Jy_0)(\mathrm{e}) = T\tilde{\mathrm{e}}(y_0) = Tg(y_0) = \mathrm{f}.$$

Como este razonamiento se puede aplicar a cualquier $y \in Y$, queda probado que la aplicación Jy es biyectiva para todo $y \in Y$. $\square$

Teniendo en cuenta todos los resultados vistos en esta sección, estamos en disposición de obtener una descripción de las aplicaciones biseparadoras entre espacios de funciones absolutamente continuas que toman valores en espacios de Banach de dimensión infinita.

Corolario 1.5.9 *Sean X e Y subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$, E y F espacios de Banach de dimensión infinita y $T : AC(X,E) \to AC(Y,F)$ una aplicación biseparadora. Entonces existen un homeomorfismo $h : Y \to X$ y una aplicación $J : Y \to L'(E,F)$ tales que*

$$Tf(y) = (Jy)(f(h(y)))$$

para cada $f \in AC(X,E)$ e $y \in Y$.

Demostración. Comenzaremos indicando que la aplicación J se define como se hizo en la demostración del Corolario 1.4.7. Por otro lado, resulta inmediato deducir la representación de T si tenemos en cuenta la Observación 1.5.7 y la definición de la aplicación Jy para cada $y \in Y$. Finalmente, el Teorema 1.5.4 y el Lema 1.5.8 nos permiten completar la prueba de este resultado. $\square$

Ahora bien, a diferencia del caso finito-dimensional, cuando los espacios de Banach E y F tienen dimensión infinita, no es posible concluir la continuidad de la aplicación biseparadora $T : AC(X,E) \to AC(Y,F)$ de manera automática. Con el siguiente ejemplo pretendemos ilustrar este hecho.

Ejemplo 1.5.10 *Supongamos que $X = Y = \{a,b\}$, $a,b \in \mathbb{R}$, y $E = F = c_0$. Tomemos $\psi : c_0 \to \mathbb{K}$ un funcional lineal no acotado que satisface que $\psi(1,0,0,\ldots) \neq -1$, y definamos las siguientes aplicaciones lineales y biyectivas:*

$$\begin{array}{rccc} Ja: & c_0 & \to & c_0 \\ & \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots) & \mapsto & (\alpha_1 + \psi(\alpha), \alpha_2, \alpha_3, \ldots) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccc} Jb: & c_0 & \to & c_0 \\ & (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots) & \mapsto & (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots). \end{array}$$

Finalmente, podemos definir la aplicación $T : AC(\{a,b\},c_0) \to AC(\{a,b\},c_0)$ *como*

$$Tf(y) := (Jy)(f(y))$$

para toda $f \in AC(\{a,b\},c_0)$ *e* $y \in \{a,b\}$. *Resulta sencillo comprobar que* T *es lineal y biseparadora, sin embargo, se trata de una aplicación no acotada.*

Como consecuencia, en el caso que nos ocupa, es necesario establecer alguna condición adicional para poder deducir la continuidad de la aplicación biseparadora. Precisamente, esto es lo que se prueba en el siguiente resultado.

Teorema 1.5.11 *Sean* X *e* Y *subconjuntos compactos de* $\mathbb{R}$, E *y* F *espacios de Banach de dimensión infinita y* $T : AC(X,E) \to AC(Y,F)$ *una aplicación biseparadora. Entonces, si* Y *no tiene puntos aislados,* T *es continua.*

Demostración. Para probar que T es continua, en primer lugar, veamos que la aplicación $\delta_y \circ T$ es continua para cada $y \in Y$. Supongamos que existe $y_0 \in Y$ tal que $\delta_{y_0} \circ T$ no es continua. Entonces, podemos considerar una sucesión (g_n) en $AC(X,E)$ tal que

$$\|g_n\|_{AC} \leq \frac{1}{n^3}$$

y

$$\|\delta_{y_0} \circ T(g_n)\| = \|Tg_n(y_0)\| > 1$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora, si definimos $\mathrm{e}_n := g_n(h(y_0))$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\|\mathrm{e}_n\| \leq \|g_n\|_\infty \leq \|g_n\|_{AC} \leq \frac{1}{n^3}.$$

Además, si tenemos en cuenta la representación de la aplicación T obtenida en el Corolario 1.5.9, deducimos que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|T\tilde{\mathrm{e}}_n(y_0)\| &= \|(Jy_0)(\tilde{\mathrm{e}}_n(h(y_0)))\| \\ &= \|(Jy_0)(\mathrm{e}_n)\| \\ &= \|(Jy_0)(g_n(h(y_0)))\| \\ &= \|Tg_n(y_0)\| > 1. \end{aligned}$$

Por tanto, acabamos de construir una sucesión (e_n) en E tal que

$$\|\mathrm{e}_n\| \leq \frac{1}{n^3} \text{ y } \|T\tilde{\mathrm{e}}_n(y_0)\| > 1$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, puesto que Y no posee puntos aislados, es posible encontrar una sucesión (y_n) en Y, estrictamente monótona y que converge hacia y_0, tal que
$$\|T\tilde{e}_n(y_n)\| > 1 \tag{1.6}$$
para cada $n \in \mathbb{N}$. Si consideramos entornos abiertos y mutuamente disjuntos U_n de cada $h(y_n)$, sabemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $r_n > 0$ tal que

$$(h(y_n) - r_n, h(y_n) + r_n) \cap X \subset U_n.$$

Por tanto, de manera análoga a la demostración del Lema 1.2.7, podemos definir, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) := \text{máx}\left\{0, 1 - \frac{|x - h(y_n)|}{r_n}\right\}$$

para todo $x \in X$. Es inmediato comprobar que $f_n \in AC(X)$, $f_n(h(y_n)) = 1$, $\operatorname{coz}(f_n) \subset (h(y_n) - r_n, h(y_n) + r_n) \cap X \subset U_n$ y además

$$\|f_n\|_{AC} = \|f_n\|_\infty + V(f_n; X) \leq 1 + 2 = 3$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, consideremos la función

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot \tilde{e}_n.$$

Puesto que $(AC(X, E), \|.\|_{AC})$ es un espacio de Banach y además

$$\|f_n \cdot \tilde{e}_n\|_{AC} = \|e_n\|\|f_n\|_{AC} \leq \frac{3}{n^3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos afirmar que $f \in AC(X, E)$. Ahora, por un lado, resulta inmediato observar que

$$f(h(y_0)) = 0,$$

por lo que, aplicando el Corolario 1.5.5, se deduce que

$$Tf(y_0) = 0.$$

Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$(f - \tilde{e}_n)(h(y_n)) = 0,$$

y de nuevo, por el Corolario 1.5.5,

$$Tf(y_n) = T\tilde{e}_n(y_n).$$

Esto implica, atendiendo a la desigualdad (1.6), que

$$\|Tf(y_n)\| > 1$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual es absurdo si tenemos en cuenta que (y_n) converge a y_0, que Tf es continua y que $Tf(y_0) = 0$. Por tanto, queda probado que la aplicación $\delta_y \circ T$ es continua para todo $y \in Y$.

Para finalizar, aplicando el Teorema del Grafo Cerrado de manera análoga a la demostración del Teorema 1.4.8, podemos concluir que la aplicación T es continua. $\square$

En la demostración del siguiente resultado, estableceremos un método para construir aplicaciones biseparadoras discontinuas entre espacios de funciones absolutamente continuas.

Lema 1.5.12 *Sean X un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ y E un espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces, si X tiene puntos aislados, existe una aplicación biseparadora $T : AC(X,E) \to AC(X,E)$ discontinua.*

Demostración. Supongamos que X contiene un punto aislado y veamos que es posible construir una aplicación $T : AC(X,E) \to AC(X,E)$ biseparadora y discontinua. Sean x_0 un punto aislado de X y $J : E \to E$ una biyección lineal discontinua. Finalmente, definamos la aplicación T como

$$Tf(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ J(f(x)) & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

para toda $f \in AC(X,E)$. Ahora, en primer lugar, debemos ver que T está bien definida, esto es, que $Tf \in AC(X,E)$ siempre que $f \in AC(X,E)$. Fijemos $f \in AC(X,E)$ y tomemos $\varepsilon > 0$. Por ser f una función absolutamente continua, existe $\delta_f > 0$ que satisface la condición dada en la Definición 1.2.1. Además, como x_0 es un punto aislado en X, existe $r > 0$ tal que $|x - x_0| > r$ para todo $x \neq x_0$. Por tanto, considerando $\delta := \min\{r, \delta_f\}$, para toda familia finita de intervalos abiertos y disjuntos dos a dos $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ cuyos extremos pertenecen a X y satisfacen $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$, se tiene que $a_i \neq x_0 \neq b_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, y, por definición de la aplicación T,

$$\sum_{i=1}^n \|Tf(b_i) - Tf(a_i)\| = \sum_{i=1}^n \|f(b_i) - f(a_i)\| < \varepsilon,$$

quedando probado que $T : AC(X,E) \to AC(X,E)$ está bien definida. Por otro lado, si tenemos en cuenta la definición de la propia aplicación T, resulta sencillo comprobar que es lineal y biseparadora. Así, debemos probar que es una aplicación discontinua. Supongamos, por el contrario, que T es continua. Entonces, para cualquier función $f \in AC(X,E)$, se tiene que

$$\|J(f(x_0))\| = \|Tf(x_0)\| \leq \|Tf\|_{AC} \leq \|T\|\|f\|_{AC}. \tag{1.7}$$

Ahora, para cada $\mathrm{e} \in E$, definamos la función

$$f_{\mathrm{e}}(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq x_0 \\ \mathrm{e} & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

Puesto que x_0 es un punto aislado de X, se tiene que f_{e} es una función continua. Además, es sencillo observar que $f_{\mathrm{e}} \in AC(X,E)$ y que

$$\|f_{\mathrm{e}}\|_{AC} = \|f_{\mathrm{e}}\|_\infty + V(f_{\mathrm{e}}; X) \leq 3\|\mathrm{e}\|.$$

Por tanto, como consecuencia de (1.7), tenemos que, para todo $\mathrm{e} \in E$,

$$\|J(\mathrm{e})\| = \|J(f_{\mathrm{e}}(x_0))\| \leq \|T\|\|f_{\mathrm{e}}\|_{AC} \leq 3\|T\|\|\mathrm{e}\|,$$

lo que contradice que J sea una aplicación discontinua de E en E. De esta manera, queda probado que T es una aplicación biseparadora discontinua. $\square$

Corolario 1.5.13 *Sean X e Y subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ y E y F espacios de Banach de dimensión infinita. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *Toda aplicación biseparadora $T : AC(X,E) \to AC(Y,F)$ es continua.*

(ii) *X no tiene puntos aislados.*

Demostración. Veamos que (ii) $\Longrightarrow$ (i). Sea $T : AC(X,E) \to AC(Y,F)$ una aplicación biseparadora cualquiera. Puesto que T es biseparadora, en el Teorema 1.5.4, ha sido probada la existencia de un homeomorfismo entre X e Y, por lo que Y tampoco tiene puntos aislados. Finalmente, aplicando el Teorema 1.5.11, podemos concluir la implicación.

Para probar que (i) $\Longrightarrow$ (ii), vamos a ver que, si X tiene puntos aislados, entonces es posible obtener una aplicación $T : AC(X,E) \to AC(Y,F)$ biseparadora que no es continua.

Supongamos que existe una aplicación $T_0 : AC(X, E) \to AC(Y, F)$ biseparadora y continua, y que además X tiene puntos aislados. Entonces, por el Lema 1.5.12, es conocida la existencia de una aplicación biseparadora $S : AC(X, E) \to AC(X, E)$ discontinua. Finalmente, si consideramos la aplicación

$$T := T_0 \circ S : AC(X, E) \to AC(Y, F),$$

obtenemos una aplicación biseparadora (por tratarse de la composición de dos aplicaciones biseparadoras) que no es continua (por ser la composición de una aplicación continua y otra que no lo es). Así pues, queda probada esta última implicación. $\square$

1.6. Isometrías

Para finalizar el capítulo, trataremos de caracterizar un cierto tipo de isometrías definidas entre espacios de funciones absolutamente continuas; en concreto, nos centraremos en las isometrías de la forma Banach-Stone. Para ello, aprovecharemos las caracterizaciones de las aplicaciones biseparadoras obtenidas en las secciones anteriores.

Recordemos que X e Y son subconjuntos compactos no vacíos de $\mathbb{R}$ y que E y F denotan sendos espacios de Banach.

Definición 1.6.1 *Una isometría lineal suprayectiva $T : AC(X, E) \to AC(Y, F)$ se dice que es de la forma Banach-Stone si existen un homeomorfismo $h : Y \to X$ y una aplicación continua $J : Y \to I(E, F)$ tales que*

$$Tf(y) = (Jy)(f(h(y)))$$

para toda $f \in AC(X, E)$ e $y \in Y$.

En el siguiente resultado, se obtiene una descripción de las aplicaciones biseparadoras y continuas definidas entre espacios de funciones absolutamente continuas.

Proposición 1.6.2 *Sea $T : AC(X, E) \to AC(Y, F)$ una aplicación biseparadora y continua. Entonces existen un homeomorfismo $h : Y \to X$ y una aplicación continua $J : Y \to L(E, F)$ tales que*

$$Tf(y) = (Jy)(f(h(y)))$$

para toda $f \in AC(X, E)$ e $y \in Y$.

Demostración. Si tenemos en cuenta los Corolarios 1.4.7 y 1.5.9, para obtener el resultado necesitamos, por un lado, comprobar que la aplicación

$$\begin{array}{rccc} Jy: & E & \to & F \\ & \mathrm{e} & \mapsto & (Jy)(\mathrm{e}) := T\tilde{\mathrm{e}}(y) \end{array}$$

es continua para cada $y \in Y$. Para ello, fijemos $y \in Y$. Ahora, como estamos asumiendo que T es continua, es sencillo observar que

$$\|(Jy)(\mathrm{e})\| = \|T\tilde{\mathrm{e}}(y)\| \leq \|T\tilde{\mathrm{e}}\|_{AC} \leq \|T\| \, \|\tilde{\mathrm{e}}\|_{AC} = \|T\| \, \|\mathrm{e}\|$$

para todo $\mathrm{e} \in E$, lo que nos permite concluir que Jy es continua. Por tanto, queda probado que la aplicación

$$\begin{array}{rccc} J: & Y & \to & L(E,F) \\ & y & \mapsto & Jy \end{array}$$

está bien definida. Para finalizar, aplicando el razonamiento desarrollado en la demostración del Corolario 1.4.7, obtenemos que J es continua. □

Por último, veremos que toda isometría lineal suprayectiva que sea de la forma Banach-Stone es biseparadora. Además, el recíproco también es cierto, esto es, toda isometría biseparadora ha de ser de la forma Banach-Stone.

Teorema 1.6.3 *Sean X e Y subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$, E y F espacios de Banach y $T : AC(X,E) \to AC(Y,F)$ una isometría lineal suprayectiva. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *T es de la forma Banach-Stone.*

(ii) *T es biseparadora.*

Demostración. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Supongamos que, para toda $f \in AC(X,E)$ e $y \in Y$, la isometría T es de la forma

$$Tf(y) = (Jy)(f(h(y))),$$

siendo $h : Y \to X$ un homeomorfismo y $J : Y \to I(E,F)$ una aplicación continua. Veamos que T es biseparadora.

En primer lugar, asumamos que $f, g \in AC(X,E)$ satisfacen $Tf(y_0) \neq 0$ y $Tg(y_0) \neq 0$ para algún $y_0 \in Y$. Entonces, teniendo en cuenta la representación de T, se tiene que $(Jy_0)(f(h(y_0))) \neq 0$ y $(Jy_0)(g(h(y_0))) \neq 0$. Ahora bien, como Jy_0 es biyectiva, podemos deducir que $h(y_0) \in \mathrm{coz}(f) \cap \mathrm{coz}(g)$. Por tanto, T es una aplicación separadora.

Como acabamos de ver que T es separadora siempre que es de la forma Banach-Stone, bastará probar que T^{-1} es de la forma Banach-Stone para deducir que es separadora. Para ello, puesto que h es un homeomorfismo, sabemos que $h^{-1} : X \to Y$ también lo es. Además, como $Jh^{-1}(x) \in I(E,F)$ para cada $x \in X$, podemos considerar $(Jh^{-1}(x))^{-1} \in I(F,E)$ para todo $x \in X$, lo que nos permite definir una aplicación K como

$$\begin{array}{rccl} K: & X & \to & I(F,E) \\ & x & \mapsto & Kx := (Jh^{-1}(x))^{-1}. \end{array}$$

Por último, consideremos la aplicación $S : AC(Y,F) \to AC(X,E)$ definida como

$$Sg(x) := (Kx)(g(h^{-1}(x)))$$

para toda $g \in AC(Y,F)$ y $x \in X$. Veamos ahora que S coincide con T^{-1}. Para probarlo, vamos a comprobar que $(T \circ S)(g) = g$ para toda $g \in AC(Y,F)$ y que $(S \circ T)(f) = f$ para toda $f \in AC(X,E)$. En primer lugar, dada $g \in AC(Y,F)$, para cualquier $y \in Y$, se tiene que

$$\begin{aligned} (T \circ S)(g)(y) = T(Sg)(y) &= (Jy)\left[Sg(h(y))\right] \\ &= (Jy)\left[(Kh(y))(g(y))\right] \\ &= (Jy)\left[(Jy)^{-1}(g(y))\right] \\ &= g(y). \end{aligned}$$

Análogamente se puede ver que $(S \circ T)(f)(x) = f(x)$ para toda $f \in AC(X,E)$ y $x \in X$. Como consecuencia, $T^{-1} \equiv S$, lo que nos permite afirmar que la aplicación $T^{-1} : AC(Y,F) \to AC(X,E)$ es de la forma

$$T^{-1}g(x) := (Kx)(g(h^{-1}(x)))$$

para toda $g \in AC(Y,F)$ y $x \in X$. Finalmente, para deducir que T^{-1} es de la forma Banach-Stone, basta probar que la aplicación K es continua. Primeramente, si tomamos $\tilde{\mathrm{f}} \in AC(Y,F)$ para cualquier $\mathrm{f} \in F$, tenemos que

$$T^{-1}\tilde{\mathrm{f}}(x) = (Kx)(\tilde{\mathrm{f}}(h^{-1}(x))) = (Kx)(\mathrm{f}),$$

lo que nos permite ver que, para cada $x \in X$, la aplicación Kx toma la forma

$$\begin{array}{rccl} Kx: & F & \to & E \\ & \mathrm{f} & \mapsto & (Kx)(\mathrm{f}) = T^{-1}\tilde{\mathrm{f}}(x). \end{array}$$

Finalmente, consideremos una sucesión (x_n) en X que converge hacia $x \in X$. Entonces, para todo $\mathrm{f} \in F$, se tiene que la sucesión $((Kx_n)(\mathrm{f})) = (\widetilde{T^{-1}\mathrm{f}}(x_n))$ converge hacia $\widetilde{T^{-1}\mathrm{f}}(x) = (Kx)(\mathrm{f})$ debido a la continuidad de la función $\widetilde{T^{-1}\mathrm{f}}$. Por tanto, como $I(F,E)$ está dotado de la topología *Strong Operator Topology*, se tiene que K es continua. Así, ha quedado probado que T^{-1} es de la forma Banach-Stone, y, en consecuencia, que es separadora.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Si atendemos a la Proposición 1.6.2, para probar que T es de la forma Banach-Stone será suficiente comprobar que, para cada $y \in Y$, la aplicación Jy es una isometría.

Fijemos $y_0 \in Y$ y veamos que $\|(Jy_0)(\mathrm{e})\| = \|\mathrm{e}\|$ para todo $\mathrm{e} \in E$. Para ello, dado $\mathrm{e} \in E$, es inmediato observar que

$$\|(Jy_0)(\mathrm{e})\| = \|T\tilde{\mathrm{e}}(y_0)\| \leq \|T\tilde{\mathrm{e}}\|_\infty \leq \|T\tilde{\mathrm{e}}\|_{AC} = \|\tilde{\mathrm{e}}\|_{AC} = \|\mathrm{e}\|.$$

Supongamos ahora que $\|(Jy_0)(\mathrm{e})\| < \|\mathrm{e}\|$, esto es, que $\|T\tilde{\mathrm{e}}(y_0)\| < \|\mathrm{e}\|$. A continuación, definamos la función constante $g \in AC(Y,F)$ como

$$g := \widetilde{T\tilde{\mathrm{e}}(y_0)}.$$

Puesto que T es suprayectiva, sabemos que existe $f \in AC(X,E)$ tal que $Tf = g$. Por tanto,

$$\|f\|_\infty \leq \|f\|_{AC} = \|Tf\|_{AC} = \|g\|_{AC} = \|g\|_\infty = \|T\tilde{\mathrm{e}}(y_0)\| < \|\mathrm{e}\|,$$

lo que nos permite deducir que la función $\tilde{\mathrm{e}} - f$ no se anula en ningún punto de X. Finalmente, como consecuencia del Corolario 1.5.6, se obtiene que la función $T(\tilde{\mathrm{e}} - f)$ tampoco se anula en ningún punto de Y. Sin embargo, esto es absurdo puesto que

$$T\tilde{\mathrm{e}}(y_0) = \widetilde{T\tilde{\mathrm{e}}(y_0)}(y_0) = g(y_0) = Tf(y_0).$$

De esta manera, acabamos de probar que Jy_0 es una isometría.

Como este razonamiento se puede aplicar para cada $y \in Y$, queda probado que toda aplicación Jy es una isometría y, en consecuencia, que T es de la forma Banach-Stone. $\square$

Capítulo 2

Aplicaciones biseparadoras sobre espacios de funciones de Lipschitz

2.1. Introducción

Las principales propiedades de los espacios de funciones de Lipschitz son conocidas desde los años 60 (véanse [25, 56, 70]). Posteriormente, en los años 90, N. Weaver llevó a cabo un profundo estudio de las propiedades algebraicas, geométricas, de orden, etc, de dichos espacios de funciones que fue recopilado en el libro *Lipschitz Algebras* ([74]). Sin embargo, el estudio de las aplicaciones definidas entre espacios de funciones de Lipschitz constituye una disciplina matemática de muy reciente desarrollo. Por ejemplo, B. Pavlović, en [67, 68], trató de establecer condiciones que garantizasen la continuidad de los homomorfismos definidos entre álgebras de funciones de Lipschitz y álgebras de Banach arbitrarias.

Relacionado con el estudio de aplicaciones entre espacios de funciones de Lipschitz, surge el problema de determinar relaciones topológicas entre los espacios métricos en los que se definen las funciones Lipschitzianas a partir de relaciones algebraicas, geométricas o de orden establecidas entre los correspondientes espacios de funciones. En este ámbito, M. I. Garrido y J. A. Jaramillo, en [36], probaron que es condición necesaria y suficiente para que dos espacios métricos completos sean Lipschitz homeomorfos que los correspondientes espacios de funciones de Lipschitz sean isomorfos como retículos vectoriales unitarios. Además, los espacios métricos para los cuales su estructura de Lipschitz viene determinada por la estructura reticular del espacio de funciones de Lipschitz definidas sobre ellos son analizados por estos mismos autores en [37]. Finalmente, en [20], se describen los homomorfismos sobre ciertos subespacios de funciones de Lipschitz definidas en espacios métricos realcompactos.

Sin embargo, el estudio de las aplicaciones (bi)separadoras definidas entre espacios de funciones de Lipschitz es aún más reciente. De hecho, A. Jiménez-Vargas estableció el primer resultado sobre aplicaciones biyectivas y separadoras entre determinadas subálgebras de funciones de Lipschitz definidas en espacios métricos compactos en [50]. Acto seguido, el propio A. Jiménez-Vargas junto con otros colaboradores, llevó a cabo, en [54] y [55], un estudio de las aplicaciones biseparadoras definidas entre ciertas subálgebras de funciones de Lipschitz en el caso en que éstas toman valores en espacios de Banach arbitrarios. Por último, D. H. Leung, en [60], se hace eco de los resultados contenidos en esta Memoria para analizar las aplicaciones biseparadoras definidas entre espacios de funciones denominados *espacios de Lipschitz generalizados*, que entre otros, incluye al espacio de funciones de Lipschitz y al espacio de funciones uniformemente continuas.

En este capítulo, nos vamos a ocupar del estudio de las aplicaciones biseparadoras entre espacios de funciones de Lipschitz definidas en espacios métricos completos que toman valores en espacios normados arbitrarios. Al igual que hicimos en el capítulo anterior, dedicaremos la Sección 2.4 al estudio de las principales propiedades de los espacios de funciones de Lipschitz. Así, el primer resultado relevante del capítulo surge en la Sección 2.5, en el que se deduce que dichas aplicaciones inducen un homeomorfismo entre los espacios métricos de base (Teorema 2.5.15). Este resultado nos va a permitir obtener una completa descripción de las aplicaciones biseparadoras en la sección siguiente (Teorema 2.6.9). Para tratar de analizar la continuidad de dichas aplicaciones, es necesario añadir la completitud de los espacios normados. Por tanto, bajo estas nuevas condiciones, en la Sección 2.7, comprobaremos que, en general, tales aplicaciones no son continuas, pero veremos que es posible construir una aplicación biseparadora asociada a ésta que resulta serlo, y que además nos permitirá deducir la continuidad de las primeras en ciertos casos particulares (Corolarios 2.7.11 y 2.7.12). Para finalizar, analizaremos las aplicaciones separadoras y biyectivas entre espacios de funciones de Lipschitz que toman valores escalares obteniendo que, en el caso en que los espacios métricos de base sean compactos, éstas tienen inversa separadora y además son continuas (Teorema 2.8.3 y Corolario 2.8.4).

2.2. Definiciones y resultados preliminares

Si representamos mediante (X, d_1) e (Y, d_2) sendos espacios métricos, diremos que una aplicación

$$f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$$

es de *Lipschitz* (o que satisface la condición de Lipschitz) si existe una constante $k \geq 0$ tal que

$$d_2(f(x), f(y)) \leq kd_1(x, y)$$

para todo $x, y \in X$. La menor de las constantes k que satisfacen esta propiedad se denomina *número de Lipschitz* y se denota por $L(f)$. De manera equivalente, $L(f)$ se puede definir como

$$L(f) := \sup \left\{ \frac{d_2(f(x), f(y))}{d_1(x, y)} : x, y \in X, x \neq y \right\}.$$

Diremos que una función f es *bi-Lipschitz* cuando es biyectiva y tanto ella como su inversa son Lipschitz.

Por otro lado, si E representa un espacio normado (sobre $\mathbb{K}$), podemos considerar las aplicaciones

$$f : (X, d) \to (E, \|.\|)$$

que satisfacen la condición de Lipschitz, es decir, aquellas para las cuales existe una constante $k \geq 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq kd(x, y)$$

para todo $x, y \in X$. De manera análoga al caso anterior, se define el número de Lipschitz asociado a f como

$$L(f) := \sup \left\{ \frac{\|f(x) - f(y)\|}{d(x, y)} : x, y \in X, x \neq y \right\}.$$

Así, a partir de este momento, denotaremos por $\mathrm{Lip}(X, E)$ al espacio de todas las funciones de Lipschitz *acotadas* definidas en X que toman valores en E, es decir,

$$\mathrm{Lip}(X, E) := \{f : X \to E : f \text{ es de Lipschitz y acotada}\}.$$

Cuando $E = \mathbb{K}$, definiremos $\mathrm{Lip}(X) := \mathrm{Lip}(X, \mathbb{K})$, esto es,

$$\mathrm{Lip}(X) := \{f : X \to \mathbb{K} : f \text{ es de Lipschitz y acotada}\}.$$

Observación 2.2.1 *Resulta inmediato observar que, para cualquier* $\mathrm{e} \in E$, *la función constante* $\tilde{\mathrm{e}}$ *satisface* $L(\tilde{\mathrm{e}}) = 0$, *lo que implica que* $L(\cdot)$ *no determina una norma en* $\mathrm{Lip}(X, E)$. *Sin embargo, se tiene que*

(i) $L(\alpha f) = |\alpha|\, L(f)$ *para toda* $f \in \mathrm{Lip}(X, E)$ *y* $\alpha \in \mathbb{K}$,

(ii) $L(f + g) \leq L(f) + L(g)$ *para toda* $f, g \in \mathrm{Lip}(X, E)$,

es decir, $L(\cdot)$ *es una seminorma. Así, introduciremos una norma* $\|.\|_L$ *en* $\mathrm{Lip}(X, E)$ *definida como*

$$\|f\|_L := \max\{\|f\|_\infty, L(f)\}$$

para cada $f \in \mathrm{Lip}(X, E)$. *Con esta norma,* $\mathrm{Lip}(X, E)$ *es completo siempre que* E *sea un espacio de Banach (se puede demostrar de manera análoga a [74, Proposición 1.6.2(a)]).*

A continuación, introduciremos dos familias de funciones de Lipschitz que serán de gran utilidad en el desarrollo de este capítulo. Por un lado, dados un punto x_0 en X y un número real positivo r, definimos la función $\psi_{x_0,r} : X \to \mathbb{K}$ como

$$\psi_{x_0,r}(x) := \max\left\{0, 1 - \frac{d(x, x_0)}{r}\right\} \tag{2.1}$$

para todo $x \in X$. Resulta sencillo comprobar que se trata de una función de Lipschitz y que además satisface que $\psi_{x_0,r}(x_0) = 1$, $\mathrm{coz}(\psi_{x_0,r}) = B(x_0, r)$, $\|\psi_{x_0,r}\|_\infty = 1$ y $L(\psi_{x_0,r}) \leq 1/r$.
Por otro lado, dados $x_0 \in X$ y $r > 0$, definimos $\varphi_{x_0,r} : X \to \mathbb{K}$ como

$$\varphi_{x_0,r}(x) := \max\left\{0, 1 - \frac{d(x, B(x_0, r))}{r}\right\} \tag{2.2}$$

para todo $x \in X$. Es obvio que $\varphi_{x_0,r}$ es una función de Lipschitz que satisface que $\varphi_{x_0,r}(B(x_0, r)) \equiv 1$, $\mathrm{coz}(\varphi_{x_0,r}) = B(x_0, 2r)$, $\|\varphi_{x_0,r}\|_\infty = 1$ y de nuevo $L(\varphi_{x_0,r}) \leq 1/r$.

Para dar por finalizada esta sección, probaremos un resultado técnico del que haremos uso más adelante en varias ocasiones.

Lema 2.2.2 *Sean* X *un espacio métrico y* (x_n) *una sucesión de elementos distintos dos a dos en* X. *Entonces:*

(i) *Si* (x_n) *converge a un punto* $x_0 \in X$*, existe una subsucesión* (z_n) *tal que* $d(z_{n+1}, x_0) < d(z_n, x_0)/4$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. En tal caso, si se define* $r_n := d(z_n, x_0)/4$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*, obtenemos una sucesión* (r_n) *que converge a cero y satisface*

$$B(z_n, r_n) \cap B(z_m, r_m) = \emptyset$$

siempre que $n \neq m$*. Además,*

$$cl\left(\cup_{n=1}^{\infty} B(z_n, r_n)\right) \setminus \cup_{n=1}^{\infty} cl\left(B(z_n, r_n)\right) \subset \{x_0\}.$$

(ii) *Si* (x_n) *no tiene ninguna subsucesión de Cauchy, entonces existen una subsucesión* (z_n) *y una constante positiva* r *tales que*

$$B(z_n, r) \cap B(z_m, r) = \emptyset$$

siempre que $n \neq m$*. Además, si* $s := r/5$*,*

$$cl\left(\cup_{n=1}^{\infty} B(z_n, s)\right) = \cup_{n=1}^{\infty} cl\left(B(z_n, s)\right).$$

Demostración. (i) Definamos $z_1 := x_1$ y consideremos $r_1 := d(z_1, x_0)/4$. Puesto que (x_n) converge hacia x_0, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_1$, $x_n \in B(x_0, r_1)$. Tomemos entonces $z_2 := x_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(x_0, r_1)$ y definamos $r_2 := d(z_2, x_0)/4$. Repitiendo este proceso, obtenemos una subsucesión (z_n) de (x_n) que satisface

$$d(z_{n+1}, x_0) < \frac{d(z_n, x_0)}{4}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. A su vez, hemos construido una sucesión (r_n) de números reales positivos que converge a 0 tal que, para todo $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$,

$$B(z_n, r_n) \cap B(z_m, r_m) = \emptyset.$$

Veamos ahora que $cl\left(\cup_{n=1}^{\infty} B(z_n, r_n)\right) \setminus \cup_{n=1}^{\infty} cl\left(B(z_n, r_n)\right) \subset \{x_0\}$. Tomemos $x' \in X$ con $x' \neq x_0$ y $\varepsilon > 0$ de modo que $d(x', x_0) = 2\varepsilon$. Puesto que (z_n) converge a x_0, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(z_n, x_0) < \varepsilon/2$ para todo $n > n_0$. Además, como (r_n) converge a 0, existe $n_1 > n_0$ tal que, para todo $n > n_1$, $r_n < \varepsilon/2$. Por tanto, si fijamos $n > n_1$, tenemos que, para todo $x \in B(z_n, r_n)$,

$$d(x, x_0) \leq d(x, z_n) + d(z_n, x_0) < r_n + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

En consecuencia, $B(z_n, r_n) \subset B(x_0, \varepsilon)$ para todo $n > n_1$. Finalmente, como estamos suponiendo que $d(x', x_0) = 2\varepsilon$, podemos concluir que

$$B(x', \varepsilon) \cap (\cup_{n>n_1} B(z_n, r_n)) = \emptyset. \tag{2.3}$$

Así, si $x' \notin \cup_{n=1}^{\infty} cl\,(B(z_n, r_n))$, en particular, $x' \notin cl\,(B(z_1, r_1)) \cup \ldots \cup cl\,(B(z_{n_1}, r_{n_1}))$, y junto a (2.3), podemos asegurar que $x' \notin cl\,(\cup_{n=1}^{\infty} B(z_n, r_n))$, quedando así probado el primer item.

(ii) Comencemos definiendo $B_1 := \mathbb{N}$, $z_1 := x_1$ y

$$r_1 := \liminf_{n \in B_1} d(z_1, x_n).$$

Como (x_n) no contiene ninguna subsucesión de Cauchy, se tiene que z_1 no es el límite de ninguna subsucesión, lo que nos permite concluir que $r_1 > 0$. Tomemos entonces

$$B_2 := \{n \in B_1 : r_1/2 \leq d(z_1, x_n) \leq 2r_1\}.$$

Se tiene que B_2 es un conjunto infinito. Consideremos ahora $n_2 := \min B_2$ y $z_2 := x_{n_2}$. De nuevo, como z_2 no es el límite de ninguna subsucesión, tenemos que

$$r_2 := \liminf_{n \in B_2} d(z_2, x_n) > 0.$$

Este proceso se puede repetir de manera que, si conocemos B_k, z_k y r_k, podemos considerar el conjunto infinito

$$B_{k+1} := \{n \in B_k : r_k/2 \leq d(z_k, x_n) \leq 2r_k\},$$

lo que nos permite definir $n_{k+1} := \min B_{k+1}$, $z_{k+1} := x_{n_{k+1}}$ y

$$r_{k+1} := \liminf_{n \in B_{k+1}} d(z_{k+1}, x_n) > 0.$$

Finalmente, supongamos que $\liminf_{n \in \mathbb{N}} r_n = 0$. Entonces, existe una subsucesión (r_{n_i}) de (r_n) que converge hacia 0. Ahora, por construcción, para cada $i \in \mathbb{N}$, se tiene que $d(z_{n_i}, z_{n_k}) \leq 2r_{n_i}$ para todo $k \geq i$, lo que nos permite afirmar que (z_{n_i}) es una subsucesión de Cauchy de (x_n), en contra de la hipótesis inicial. Por tanto, $R := \liminf_{n \in \mathbb{N}} r_n > 0$. Definiendo $r := R/8$, podemos concluir que, siempre que $n \neq m$,

$$B(z_n, r) \cap B(z_m, r) = \emptyset. \tag{2.4}$$

Para finalizar, definamos $s := r/5$ y veamos que

$$cl\,(\cup_{n=1}^{\infty} B(z_n, s)) = \cup_{n=1}^{\infty} cl\,(B(z_n, s))\,.$$

Supongamos que no es cierto. Entonces, existe $x' \in cl\,(\cup_{n=1}^{\infty} B(z_n, s))$ tal que $x' \notin cl\,(B(z_n, s))$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Si $B(x', s) \cap B(z_n, s) = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

  $$B(x', s) \cap (\cup_{n=1}^{\infty} B(z_n, s)) = \emptyset,$$

  lo que implica que $x' \notin cl\,(\cup_{n=1}^{\infty} B(z_n, s))$.

- Supongamos que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $B(x', s) \cap B(z_{n_1}, s) \neq \emptyset$. Entonces, se tiene que $B(x', s) \cap B(z_n, s) = \emptyset$ para todo $n \neq n_1$. En caso contrario, tomemos $x_2 \in B(x', s) \cap B(z_{n_2}, s)$ para algún $n_2 \neq n_1$. Por hipótesis, existe $x_1 \in B(x', s) \cap B(z_{n_1}, s)$, luego

  $$\begin{aligned} d(z_{n_1}, z_{n_2}) &\leq d(z_{n_1}, x_1) + d(x_1, x_2) + d(x_2, z_{n_2}) \\ &< s + 2s + s = 4s < r. \end{aligned}$$

  Sin embargo, como hemos visto que $B(z_{n_1}, r) \cap B(z_{n_2}, r) = \emptyset$ en (2.4), podemos afirmar que $d(z_{n_1}, z_{n_2}) \geq r$, lo que nos lleva a una contradicción. Así,

  $$B(x', s) \cap (\cup_{n \neq n_1} B(z_n, s)) = \emptyset,$$

  y como $x' \notin cl\,(B(z_{n_1}, s))$, se tiene que $x' \notin cl\,(\cup_{n=1}^{\infty} B(z_n, s))$.

En ambos casos hemos obtenido una contradicción, quedando entonces probado que $cl\,(\cup_{n=1}^{\infty} B(z_n, s)) = \cup_{n=1}^{\infty} cl\,(B(z_n, s))$. $\square$

2.3. Compactificación γX

En este apartado, dado un espacio métrico X, introduciremos una compactificación γX de X asociada a un subespacio de funciones continuas $A(X)$ definidas en X. Ello nos permitirá considerar la función soporte asociada a una aplicación biseparadora definida entre espacios de funciones de Lipschitz (como veremos en la Sección 2.5).

Puesto que todo espacio métrico X es completamente regular, sabemos que éste admite una compactificación de Stone-Čech, la cual usualmente se denota como βX. Esto implica que toda función continua $f : X \to \mathbb{K}$ admite una extensión continua a βX que denotaremos por

$$f^{\beta X} : \beta X \to \mathbb{K} \cup \{\infty\}.$$

En particular, si tenemos una aplicación continua $f : X \to E$ y consideramos la función continua $\|f\|$ definida como

$$\begin{array}{rccc} \|f\| : & X & \to & \mathbb{K} \\ & x & \mapsto & \|f\|(x) := \|f(x)\|, \end{array}$$

entonces representaremos como $\|f\|^{\beta X}$ su extensión continua a βX.

Por otro lado, si $A(X)$ es un subanillo del espacio de funciones continuas $C(X)$ que separa cada punto de X de cada punto de su compactificación de Stone-Čech βX (es decir, dados $x_1 \in X$ y $x_2 \in \beta X \setminus X$, siempre existe f en $A(X)$ tal que $f(x_1) \neq f^{\beta X}(x_2)$), podemos definir en βX la siguiente relación de equivalencia:

$$x \sim y \Longleftrightarrow f^{\beta X}(x) = f^{\beta X}(y) \text{ para toda } f \in A(X).$$

De esta manera, obtenemos un espacio cociente

$$\gamma X := \beta X / \sim$$

que identifica los puntos de βX cuyas imágenes coinciden al extender cualquier función de $A(X)$. Así, podemos considerar la aplicación cociente

$$q : \beta X \to \gamma X$$

que envía cada punto de βX a su clase de equivalencia. Además, la topología inducida en γX por la aplicación cociente q viene dada por

$$\tau := \{V \subset \gamma X : q^{-1}(V) \text{ es abierto en } \beta X\}.$$

Ahora, observando la topología τ inducida en γX y teniendo en cuenta que βX es una compactificación de X, podemos asegurar que γX es una nueva compactificación Hausdorff de X. Además, se tiene que γX satisface la misma propiedad de extensión de funciones continuas que βX, es decir, toda función $f \in A(X)$ es continuamente extendible a una función

$$f^{\gamma X} : \gamma X \to \mathbb{K} \cup \{\infty\}.$$

A continuación, aparecen dos definiciones que se encuentran estrechamente relacionadas con la compactificación γX y que desempeñarán un papel importante en el desarrollo de las siguientes secciones.

Definición 2.3.1 *Diremos que un subanillo $A(X)$ de $C(X)$ es fuertemente regular si, dados $x_0 \in \gamma X$ y un subconjunto cerrado no vacío K de γX que no contiene a x_0, existe $f \in A(X)$ tal que $f^{\gamma X} \equiv 1$ en un entorno de x_0 y $f^{\gamma X} \equiv 0$ en K.*

Definición 2.3.2 *Sea $A(X,E) \subset C(X,E)$ un módulo sobre $A(X)$. Diremos que $A(X,E)$ es compatible con $A(X)$ si satisface las siguientes propiedades:*

(i) *Para cada $x \in X$, existe $f \in A(X,E)$ con $f(x) \neq 0$.*

(ii) *Dados dos puntos cualesquiera $x, y \in \beta X$ tales que $x \sim y$, se tiene que $\|f\|^{\beta X}(x) = \|f\|^{\beta X}(y)$ para toda $f \in A(X,E)$.*

Como consecuencia inmediata de la definición anterior tenemos que, si $A(X,E)$ es compatible con $A(X)$, entonces, para cada $f \in A(X,E)$, la función $\|f\| : X \to \mathbb{K}$ puede ser extendida de manera continua a

$$\|f\|^{\gamma X} : \gamma X \to \mathbb{K} \cup \{\infty\}.$$

Finalmente, probaremos, en el contexto de las funciones de Lipschitz, un resultado que caracteriza los puntos de un espacio métrico completo X como los únicos puntos de su compactificación γX que son un conjunto G_δ. Para ello, seguiremos la pauta dada por J. Araujo y J. J. Font en [14] para funciones uniformemente continuas. Antes de ello, recordaremos la definición de conjunto G_δ en un espacio topológico arbitrario.

Definición 2.3.3 *Un subconjunto de un espacio topológico Z se dice que es un conjunto G_δ en Z si se puede obtener como intersección contable de subconjuntos abiertos de Z.*

En el siguiente resultado, vamos a suponer que γX es la compactificación de un espacio métrico X cuando $A(X) = \mathrm{Lip}(X)$.

Lema 2.3.4 *Sea X un espacio métrico completo. Entonces, los únicos puntos de γX que son un conjunto G_δ en γX son los de X.*

Demostración. La prueba de este resultado consta de dos partes. Por un lado, debemos ver que cualquier punto de X es un conjunto G_δ en γX, y, por otro lado, probaremos que ningún punto de $\gamma X \setminus X$ puede ser un conjunto G_δ en γX.

En primer lugar, veamos que, para todo $x \in X$, $\{x\}$ es un conjunto G_δ en γX. Fijemos $x_0 \in X$ y tomemos una sucesión (r_n) de números reales positivos que converge a 0. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos la función

$$\psi_{x_0,r_n} \in \mathrm{Lip}(X)$$

dada en (2.1) y definamos la familia $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos abiertos de γX como

$$U_n := \left\{x \in \gamma X : \psi^{\gamma X}_{x_0,r_n}(x) > 0\right\}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Es obvio que

$$x_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n,$$

por lo que será suficiente probar que es el único punto que hay en dicha intersección para deducir que $\{x_0\}$ es un conjunto G_δ en γX. Así, supongamos que existe un punto $x_1 \in \gamma X$, $x_1 \neq x_0$, tal que $x_1 \in \cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Tomemos ahora U y V entornos abiertos y disjuntos de x_0 y x_1 en γX, respectivamente. Por ser U un entorno abierto de x_0 en γX y X un espacio métrico, es inmediato deducir que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B(x_0, r_{n_0}) \subset U \cap X$. Ahora bien, por definición de $\psi_{x_0,r_{n_0}}$, se tiene que $U_{n_0} \cap X \subset B(x_0, r_{n_0})$ y, por tanto,

$$(U_{n_0} \cap X) \cap V = \emptyset. \tag{2.5}$$

Veamos que esto implica que

$$U_{n_0} \cap V = \emptyset.$$

Supongamos que existe $x_2 \in U_{n_0} \cap V$. Si $x_2 \in X$, es obvio entonces que $(U_{n_0} \cap X) \cap V \neq \emptyset$, lo que va en contra de (2.5). Por tanto, asumiremos que $x_2 \in \gamma X \setminus X$. Esto implica que existe una red (x_α) en X que converge a x_2. Ahora bien, como $x_2 \in U_{n_0} \cap V$, siendo tanto U_{n_0} como V subconjuntos abiertos de γX, es inmediato deducir la existencia de α_1 tal que $x_{\alpha_1} \in U_{n_0} \cap V$, obteniendo de nuevo una contradicción con (2.5). Como consecuencia, puesto que $U_{n_0} \cap V = \emptyset$, deducimos que $x_1 \notin \cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, quedando así probado que x_0 es el único punto de $\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

Para finalizar, probemos que, si $x \in \gamma X \setminus X$, entonces $\{x\}$ no es un conjunto G_δ en γX. Supongamos, por el contrario, que existe $x_0 \in \gamma X \setminus X$

tal que $\{x_0\}$ es un conjunto G_δ en γX. Entonces, existe una familia contable $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos abiertos de γX tal que

$$\{x_0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n.$$

Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $cl_{\gamma X}(U_{n+1}) \subset U_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, tomando un punto $x_n \in U_n \cap X$ para todo $n \in \mathbb{N}$, construimos una sucesión (x_n) en X. Veamos que (x_n) converge a x_0. Sea U un entorno abierto cualquiera de x_0 en γX. Entonces, es obvio que

$$(\gamma X \backslash U) \bigcap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \right) = \emptyset,$$

por lo que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $U_{n_0} \subset U$. Ahora bien, por el modo en que hemos construido la sucesión (x_n), resulta inmediato comprobar que, para todo $n > n_0$, $x_n \in U$. Por tanto, (x_n) converge a x_0.
Otra observación sencilla acerca de la sucesión (x_n) es que ninguna subsucesión suya es de Cauchy, puesto que si lo fuera, como X es un espacio métrico completo, ésta convergería a un punto en X, y acabamos de ver que (x_n) converge a $x_0 \in \gamma X \backslash X$. Por este motivo, si tenemos en cuenta el Lema 2.2.2(ii), es posible encontrar una subsucesión (z_n) de (x_n) y $r > 0$ de manera que

$$d(z_n, z_m) > r$$

para todo $n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$. Si consideramos ahora los conjuntos

$$A := \{z_n : n \text{ par}\}$$

y

$$B := \{z_n : n \text{ impar}\},$$

es sencillo deducir que $d(A, B) \geq r > 0$, lo que nos permite definir la función $f \in \mathrm{Lip}(X)$ como

$$f(x) := \max \left\{ 0, 1 - \frac{d(x, B)}{d(A, B)} \right\}$$

para todo $x \in X$. Es inmediato comprobar que f toma el valor 0 en A y el valor 1 en B, con lo que hemos construido una función en $\mathrm{Lip}(X)$ que no puede ser extendida a γX, lo que nos lleva a una contradicción. $\square$

2.4. Propiedades de $\mathrm{Lip}(X,E)$

Al igual que ya hiciéramos en el capítulo anterior, en este caso también vamos a dedicar una sección a enunciar y probar una serie de resultados en los que se abordan ciertas propiedades de los espacios de funciones de Lipschitz.

Lema 2.4.1 *Dada $f \in \mathrm{Lip}(X,E)$, se tiene que $\|f\|$ pertenece a $\mathrm{Lip}(X)$.*

Demostración. Sea $f \in \mathrm{Lip}(X,E)$ y recordemos que la función $\|f\| : X \to \mathbb{K}$ se define como $\|f\|(x) := \|f(x)\|$ para todo $x \in X$. Veamos que se trata de una función de Lipschitz. Obviamente, $\|f\|$ es acotada por serlo f. Ahora, sean $x, y \in X$, $x \neq y$. Entonces

$$\frac{|\|f\|(x) - \|f\|(y)|}{d(x,y)} = \frac{|\|f(x)\| - \|f(y)\||}{d(x,y)} \leq \frac{\|f(x) - f(y)\|}{d(x,y)} \leq L(f),$$

lo que implica que $L(\|f\|) \leq L(f)$, luego $\|f\| \in \mathrm{Lip}(X)$. □

Lema 2.4.2 $\mathrm{Lip}(X,E)$ *es un módulo sobre* $\mathrm{Lip}(X)$.

Demostración. Veamos que, si $f \in \mathrm{Lip}(X)$ y $g \in \mathrm{Lip}(X,E)$, entonces $f \cdot g \in \mathrm{Lip}(X,E)$. Dados $x, y \in X$, $x \neq y$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(y)\| &\leq |f(x)|\,\|g(x) - g(y)\| + \|g(y)\|\,|f(x) - f(y)| \\ &\leq \|f\|_\infty L(g) d(x,y) + \|g\|_\infty L(f) d(x,y) \\ &= k d(x,y) \end{aligned}$$

siendo $k = \|f\|_\infty L(g) + \|g\|_\infty L(f) \geq 0$, por lo que $f \cdot g \in \mathrm{Lip}(X,E)$. □

Los dos lemas siguientes se encuentran relacionados con las definiciones que hemos mencionado en la sección anterior.

Lema 2.4.3 $\mathrm{Lip}(X,E)$ *es compatible con* $\mathrm{Lip}(X)$.

Demostración. Veamos que $\mathrm{Lip}(X,E)$ satisface las propiedades de la Definición 2.3.2. En primer lugar, acabamos de comprobar que $\mathrm{Lip}(X,E)$ es un módulo sobre $\mathrm{Lip}(X)$. Por otro lado, para cada $x_0 \in X$, si tomamos cualquier $\mathrm{e} \in E$ no nulo y definimos la función

$$f := \tilde{\mathrm{e}} \in \mathrm{Lip}(X,E),$$

tenemos que $f(x_0) = \mathrm{e} \neq 0$. Finalmente, dada cualquier $f \in \mathrm{Lip}(X, E)$, en el Lema 2.4.1 hemos visto que $\|f\|$ pertenece a $\mathrm{Lip}(X)$, por lo que, si $x, y \in \beta X$ y además $x \sim y$, por la propia definición de la relación de equivalencia $\sim$, se tiene que

$$\|f\|^{\beta X}(x) = \|f\|^{\beta X}(y),$$

quedando así probado que $\mathrm{Lip}(X, E)$ es compatible con $\mathrm{Lip}(X)$. $\square$

Lema 2.4.4 $\mathrm{Lip}(X)$ *es fuertemente regular.*

Demostración. Supongamos que K y L son dos subconjuntos cerrados y disjuntos de γX. Puesto que $C(\gamma X)$ es normal, sabemos que existe una función f_0 en $C(\gamma X)$ con $0 \leq f_0 \leq 1$ que satisface que $f_0(K) \equiv 0$ y $f_0(L) \equiv 1$. Si consideramos los conjuntos

$$K_0 := \{x \in \gamma X : f_0(x) \leq 1/3\}$$

y

$$L_0 := \{x \in \gamma X : f_0(x) \geq 2/3\},$$

obtenemos dos entornos compactos (puesto que son subconjuntos cerrados de un compacto) y disjuntos de K y L, respectivamente. Definamos ahora $K_1 := K_0 \cap X$ y $L_1 := L_0 \cap X$, y veamos que $d(K_1, L_1) > 0$.

Supongamos que $d(K_1, L_1) = 0$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos asumir que existen $x_n \in K_1$ y $z_n \in L_1$ tales que $d(x_n, z_n) < 1/n$. Puesto que K_0 es compacto, el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene un punto de acumulación x_0 en K_0. Como consecuencia, existe una red $(x_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ en $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ que converge a x_0. Resulta obvio que, para cada $\alpha \in \Omega$, $x_\alpha = x_{n_\alpha}$ para algún $n_\alpha \in \mathbb{N}$. Como paso siguiente, consideremos la red $(z_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ en $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ definida, para cada $\alpha \in \Omega$, como

$$z_\alpha := z_{n_\alpha} \text{ siempre que } x_\alpha = x_{n_\alpha}.$$

De nuevo, por la compacidad de L_0, sabemos que existe una subred $(z_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de $(z_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ que converge a un punto z_0 en L_0. Veamos ahora que $x_0 = z_0$. Obviamente, si bien x_0, o bien z_0, pertenece a X, entonces se tiene que ambos coinciden, por lo que asumiremos que ninguno de ellos pertenece a X. Así, sean ahora U y V entornos abiertos de x_0 y z_0, respectivamente. Veamos que, dado $n_0 \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, tal que $x_n \in U$ y $z_n \in V$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x_1,\ldots,x_{n_0} \notin U$ y $z_1,\ldots,z_{n_0} \notin V$. Ahora, sabemos que la red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ definida, para cada $\lambda \in \Lambda$, como

$$x_\lambda := x_{n_\lambda} \text{ siempre que } z_\lambda = z_{n_\lambda},$$

converge a x_0 (puesto que se trata de una subred de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$) y $(z_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a z_0. Por tanto, existen $\lambda^{x_0} \in \Lambda$ y $\lambda^{z_0} \in \Lambda$ tales que $x_\lambda \in U$ para todo $\lambda \geq \lambda^{x_0}$ y $z_\lambda \in V$ para todo $\lambda \geq \lambda^{z_0}$. Por definición de conjunto dirigido, podemos considerar $\lambda \in \Lambda$ tal que $\lambda \geq \lambda^{x_0}, \lambda^{z_0}$, lo que nos permite deducir que $x_\lambda \in U$ y $z_\lambda \in V$. Por tanto, existe $n_\lambda \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_\lambda} = x_\lambda \in U$ y $z_{n_\lambda} = z_\lambda \in V$. Así, acabamos de probar que, para cualquier $n_0 \in \mathbb{N}$, siempre es posible encontrar $n > n_0$ con $x_n \in U$ y $z_n \in V$. De esta manera, para cualquier función g en $\mathrm{Lip}(X)$, se tiene que

$$\left|g^{\gamma X}(x_n) - g^{\gamma X}(z_n)\right| = |g(x_n) - g(z_n)| \leq L(g) d(x_n, z_n),$$

lo que implica que $g^{\gamma X}(x_0) = g^{\gamma X}(z_0)$. Finalmente, por definición de γX, deducimos que $x_0 = z_0$, obteniendo una contradicción puesto que $K_0 \cap L_0 = \emptyset$.

Por tanto, podemos asegurar que $d(K_1, L_1) > 0$. Como consecuencia, es posible definir la función $f \in \mathrm{Lip}(X)$ como

$$f(x) := \max\left\{0, 1 - \frac{d(x, L_1)}{d(K_1, L_1)}\right\}$$

para todo $x \in X$, la cual satisface que $0 \leq f \leq 1$, $f(K_1) \equiv 0$ y $f(L_1) \equiv 1$. Esto implica que su extensión $f^{\gamma X} : \gamma X \to \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ toma valor 0 en K y valor 1 en L, lo que permite concluir que $\mathrm{Lip}(X)$ es fuertemente regular. $\square$

El siguiente resultado será utilizado en numerosas ocasiones a lo largo de este capítulo.

Lema 2.4.5 *Sean $f \in \mathrm{Lip}(X,E)$ y $x_0 \in X$ tales que $f(x_0) = 0$. Entonces, para cualquier $r > 0$, se tiene que $L(f \cdot \varphi_{x_0,r}) \leq 3\, L(f)$.*

Demostración. Fijemos $r > 0$. Es obvio que $f \cdot \varphi_{x_0,r} \in \mathrm{Lip}(X,E)$ por ser éste un módulo sobre $\mathrm{Lip}(X)$ y además $\mathrm{coz}(f \cdot \varphi_{x_0,r}) \subset B(x_0, 2r)$ por definición de $\varphi_{x_0,r}$ (véase (2.2)). Ahora, si tomamos $x \in B(x_0, 2r)$, tenemos que

$$\|f(x)\| = \|f(x) - f(x_0)\| \leq L(f) d(x, x_0) < 2r L(f).$$

Como consecuencia, si $x, y \in B(x_0, 2r)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|(f \cdot \varphi_{x_0,r})(x) - (f \cdot \varphi_{x_0,r})(y)\| &\leq \|f(x)\| \, |\varphi_{x_0,r}(x) - \varphi_{x_0,r}(y)| + \\
&\quad\; |\varphi_{x_0,r}(y)| \, \|f(x) - f(y)\| \\
&< 2rL(f)L(\varphi_{x_0,r})d(x,y) + \\
&\quad\; \|\varphi_{x_0,r}\|_\infty L(f)d(x,y) \\
&\leq 2rL(f)(1/r)d(x,y) + L(f)d(x,y) \\
&= 3L(f)d(x,y).
\end{aligned}$$

Finalmente, si $x \in B(x_0, 2r)$ e $y \notin B(x_0, 2r)$, basándonos en la desigualdad anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|(f \cdot \varphi_{x_0,r})(x) - (f \cdot \varphi_{x_0,r})(y)\| &\leq 2rL(f)(1/r)d(x,y) \\
&= 2L(f)d(x,y).
\end{aligned}$$

Por tanto, queda probado que $L(f \cdot \varphi_{x_0,r}) \leq 3L(f)$. □

Para dar por finalizada esta sección, probaremos una propiedad de la suma de funciones de Lipschitz que se convertirá en una herramienta fundamental en el resto del capítulo.

Lema 2.4.6 *Sea (f_n) una sucesión de funciones en* Lip(X, E) *con cozeros disjuntos dos a dos y tal que $L(f_n) \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, siendo M una constante positiva. Entonces, si $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ pertenece a $C(X, E)$, se tiene que f es una función de Lipschitz.*

Demostración. Para probar que f es una función de Lipschitz, debemos ver que existe $k \geq 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq kd(x, y)$ para todo $x, y \in X$. Para ello, dados $x, y \in X$, analizaremos los posibles casos.

- Por un lado, supongamos que $f(x) = f_{n_0}(x)$ y $f(y) = f_{n_0}(y)$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$. Puesto que las funciones de la sucesión tienen cozeros disjuntos dos a dos y $L(f_{n_0}) \leq M$, tenemos que

$$\|f(x) - f(y)\| = \|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)\| \leq Md(x, y).$$

- Por otro lado, asumamos que $f(x) = f_n(x) \neq 0$ y $f(y) = f_m(y) \neq 0$ para $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$. De nuevo, por tratarse de funciones con cozeros disjuntos dos a dos y tener número de Lipschitz acotado por una misma constante positiva M, se deduce que

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \|f_n(x) - f_m(y)\| \\ &\leq \|f_n(x)\| + \|f_m(y)\| \\ &= \|f_n(x) - f_n(y)\| + \|f_m(y) - f_m(x)\| \\ &\leq 2Md(x, y). \end{aligned}$$

- El resto de casos se estudian trivialmente y se obtiene que $L(f) \leq M$ en todos ellos.

Como consecuencia, tomando $k = 2M$, podemos concluir que $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es una función de Lipschitz. □

2.5. X e Y son homeomorfos

A lo largo de esta sección vamos a suponer que X e Y son espacios métricos completos y que E y F son espacios normados. Así, el objetivo que nos planteamos consiste en probar que toda aplicación biseparadora de $\mathrm{Lip}(X, E)$ en $\mathrm{Lip}(Y, F)$ induce un homeomorfismo entre X e Y.

El proceso que vamos a desarrollar en esta sección fue llevado a cabo por J. Araujo en [6] para ciertos espacios de funciones. Sin embargo, parece indicado añadir este razonamiento en el caso particular de las funciones de Lipschitz para enriquecer el capítulo que nos ocupa.

A partir de este momento, si no se especifica lo contrario, T denotará una aplicación biseparadora de $\mathrm{Lip}(X, E)$ en $\mathrm{Lip}(Y, F)$, lo que implica que, obviamente, $T^{-1} : \mathrm{Lip}(Y, F) \to \mathrm{Lip}(X, E)$ es también biseparadora. Además, γX será la compactificación de X en el caso en que $A(X) = \mathrm{Lip}(X)$.

La noción de punto soporte que daremos en esta sección es esencialmente la misma que la que hemos utilizado en el capítulo anterior, aunque consideraremos una notación distinta a la usada previamente.

Definición 2.5.1 *Diremos que $x \in \gamma X$ es un punto soporte de $y \in Y$ si, para todo entorno U de x en γX, existe $f \in \mathrm{Lip}(X, E)$ con $\mathrm{coz}(f) \subset U$ tal que $Tf(y) \neq 0$.*

De manera previa a la construcción de la aplicación soporte asociada a la aplicación biseparadora T, debemos probar un par de lemas que nos permitirán afirmar que el punto soporte asociado a cada $y \in Y$ existe y además es único.

Lema 2.5.2 *Dados un punto x_0 en X y un entorno abierto U de x_0 en γX, existe $f \in \mathrm{Lip}(X, E)$ tal que $\mathrm{coz}(f) \subset U$ y $f(x_0) \neq 0$.*

Demostración. Consideremos una función $k \in \mathrm{Lip}(X)$ tal que

$$k(x_0) = 1$$

y

$$k^{\gamma X} \equiv 0 \text{ en } \gamma X \setminus U,$$

lo cual es posible puesto que $\mathrm{Lip}(X)$ es fuertemente regular. Ahora, para cualquier e $\in E$, e $\neq 0$, definamos la función $f \in \mathrm{Lip}(X, E)$ como

$$f := k \cdot \tilde{\mathrm{e}}.$$

Es inmediato observar que $\mathrm{coz}(f) \subset U$ y $x_0 \in \mathrm{coz}(f)$. $\square$

Lema 2.5.3 *Dadas $f, g \in \mathrm{Lip}(X, E)$ con $\mathrm{coz}(f) \subset \mathrm{coz}(g)$, se tiene que $\mathrm{coz}(Tf) \subset cl_{\gamma Y}(\mathrm{coz}(Tg))$.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que $f, g \in \mathrm{Lip}(X, E)$ satisfacen que $\mathrm{coz}(f) \subset \mathrm{coz}(g)$ pero existe

$$y_0 \in \mathrm{coz}(Tf) \setminus cl_{\gamma Y}(\mathrm{coz}(Tg)).$$

Puesto que $y_0 \notin cl_{\gamma Y}(\mathrm{coz}(Tg))$, podemos encontrar un entorno abierto U de y_0 en γY tal que

$$U \cap \mathrm{coz}(Tg) = \emptyset.$$

Entonces, por el Lema 2.5.2, sabemos que existe $k \in \mathrm{Lip}(Y, F)$ tal que

$$k(y_0) \neq 0$$

y

$$\mathrm{coz}(k) \subset U,$$

lo que implica que $\mathrm{coz}(k) \cap \mathrm{coz}(Tg) = \emptyset$. Como consecuencia, por ser T^{-1} separadora, $\mathrm{coz}(T^{-1}k) \cap \mathrm{coz}(g) = \emptyset$. Ahora bien, como $\mathrm{coz}(f) \subset \mathrm{coz}(g)$ y T es separadora, podemos concluir que $\mathrm{coz}(k) \cap \mathrm{coz}(Tf) = \emptyset$. Sin embargo, esto conduce a una contradicción puesto que $y_0 \in \mathrm{coz}(k) \cap \mathrm{coz}(Tf)$. $\square$

Proposición 2.5.4 *Dado $y \in Y$, existe un único punto soporte de y en γX.*

Demostración. Fijemos $y \in Y$ y definamos

$$C_y := \{f \in \mathrm{Lip}(Y,F) : y \in \mathrm{coz}(f)\}$$

y

$$H(y) := \bigcap_{f \in C_y} cl_{\gamma X}(\mathrm{coz}(T^{-1}f)).$$

Veamos, en primer lugar, que el conjunto $H(y)$ es no vacío. Para ello, probaremos que la familia

$$\left\{cl_{\gamma X}(\mathrm{coz}(T^{-1}f)) : f \in C_y\right\}$$

satisface la propiedad de la intersección finita. Sean $f_1, \ldots, f_n \in C_y$. Puesto que $\cap_{i=1}^n \mathrm{coz}(f_i)$ es un entorno abierto de y en Y, sabemos que existe $f \in C_y$ tal que

$$\mathrm{coz}(f) \subset \bigcap_{i=1}^n \mathrm{coz}(f_i).$$

En particular, se tiene que $\mathrm{coz}(f) \subset \mathrm{coz}(f_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Aplicando el Lema 2.5.3 asociado a la aplicación biseparadora T^{-1}, podemos concluir que

$$\mathrm{coz}(T^{-1}f) \subset cl_{\gamma X}(\mathrm{coz}(T^{-1}f_i))$$

para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por tanto,

$$\mathrm{coz}(T^{-1}f) \subset \bigcap_{i=1}^n cl_{\gamma X}(\mathrm{coz}(T^{-1}f_i)),$$

por lo que $\cap_{i=1}^n cl_{\gamma X}(\mathrm{coz}(T^{-1}f_i)) \neq \emptyset$. Finalmente, por la compacidad de γX, podemos deducir que $H(y)$ es un conjunto no vacío.

En segundo lugar, probemos que $H(y)$ contiene un único punto. Supongamos que existen dos puntos diferentes x_1 y x_2 que pertenecen a $H(y)$. Tomemos, para cualquier $\mathrm{f} \in F$, $\mathrm{f} \neq 0$, la función constante $\tilde{\mathrm{f}} \in \mathrm{Lip}(Y,F)$. Es obvio que $\tilde{\mathrm{f}}(y) \neq 0$, por lo que $\tilde{\mathrm{f}} \in C_y$. Así, por definición de $H(y)$, se tiene que

$$x_1, x_2 \in cl_{\gamma X}(\mathrm{coz}(T^{-1}\tilde{\mathrm{f}})).$$

Si tomamos ahora un entorno cerrado U_1 de x_1 en γX tal que $x_2 \notin U_1$, puesto que Lip(X) es fuertemente regular, podemos encontrar $f \in \mathrm{Lip}(X)$ tal que

$$f^{\gamma X} \equiv 1 \text{ en un entorno de } x_2$$

y

$$f^{\gamma X} \equiv 0 \text{ en } U_1.$$

Resulta sencillo observar que la función $\tilde{\mathrm{f}}$ se puede escribir como

$$\tilde{\mathrm{f}} = T(f \cdot T^{-1}\tilde{\mathrm{f}}) + T((\mathbf{1}_X - f) \cdot T^{-1}\tilde{\mathrm{f}})$$

y, puesto que $\tilde{\mathrm{f}}(y) \neq 0$, se tiene que y pertenece al cozero de al menos uno de los sumandos. Si suponemos que

$$y \in \mathrm{coz}(T(f \cdot T^{-1}\tilde{\mathrm{f}})),$$

entonces, como $x_1 \in H(y)$, se deduce que

$$x_1 \in cl_{\gamma X}(\mathrm{coz}(f \cdot T^{-1}\tilde{\mathrm{f}})),$$

lo que nos lleva a una contradicción por construcción de f. Por otro lado, si

$$y \in \mathrm{coz}(T((\mathbf{1}_X - f) \cdot T^{-1}\tilde{\mathrm{f}})),$$

puesto que $x_2 \in H(y)$, podemos concluir que

$$x_2 \in cl_{\gamma X}(\mathrm{coz}((\mathbf{1}_X - f) \cdot T^{-1}\tilde{\mathrm{f}})),$$

lo cual es imposible de nuevo por definición de f, lo que nos permite afirmar que el conjunto $H(y)$ contiene un único punto.

Para finalizar, veamos que, si $x_0 \in H(y)$, entonces x_0 es un punto soporte de y. Esto es, dado un entorno cualquiera U de x_0 en γX, tenemos que probar la existencia de una función $f \in \mathrm{Lip}(X, E)$ con $\mathrm{coz}(f) \subset U$ y $Tf(y) \neq 0$. Sea $\mathrm{f} \in F \setminus \{0\}$ y consideremos $\tilde{\mathrm{f}} \in \mathrm{Lip}(Y, F)$. Es obvio que $\tilde{\mathrm{f}}(y) \neq 0$. Si además el conjunto $\mathrm{coz}(T^{-1}\tilde{\mathrm{f}})$ está contenido en U, entonces el resultado queda probado tomando $f := T^{-1}\tilde{\mathrm{f}}$. Supongamos ahora que no es éste el caso. Por ser U un entorno abierto de x_0 en γX y Lip(X) fuertemente regular (véase el Lema 2.4.4), existe una función $g \in \mathrm{Lip}(X)$ tal que $g^{\gamma X} \equiv 1$ en un entorno de x_0 y $g^{\gamma X} \equiv 0$ en $\gamma X \setminus U$. A continuación, definamos la función l como

$$l(x) := 2 \,\mathrm{máx}\, \{g(x) - 1/2, 0\}$$

para todo $x \in X$. Obviamente $l \in \mathrm{Lip}(X)$, $l^{\gamma X} \equiv 1$ en un entorno de x_0 y además
$$cl_{\gamma X}(\mathrm{coz}(l)) \subseteq \left\{x \in \gamma X : g^{\gamma X}(x) \geq 1/2\right\} \subset U.$$
Ahora bien, está claro que
$$T^{-1}\tilde{\mathrm{f}} = l \cdot T^{-1}\tilde{\mathrm{f}} + (\mathbf{1}_X - l) \cdot T^{-1}\tilde{\mathrm{f}},$$
y como $\tilde{\mathrm{f}}(y) \neq 0$, se tiene que
$$T(l \cdot T^{-1}\tilde{\mathrm{f}})(y) \neq 0$$
o
$$T((\mathbf{1}_X - l) \cdot T^{-1}\tilde{\mathrm{f}})(y) \neq 0.$$
En el caso en que $y \in \mathrm{coz}(T((\mathbf{1}_X - l) \cdot T^{-1}\tilde{\mathrm{f}}))$, puesto que $x_0 \in H(y)$, tenemos que $x_0 \in cl_{\gamma X}(\mathrm{coz}((\mathbf{1}_X - l) \cdot T^{-1}\tilde{\mathrm{f}}))$, lo cual es imposible por definición de la función l. Por tanto, el problema queda resuelto tomando $f := l \cdot T^{-1}\tilde{\mathrm{f}}$.

Así, en virtud de lo probado anteriormente, es posible afirmar que, para cada $y \in Y$, existe un único punto soporte de y en γX. □

Observación 2.5.5 *La Proposición 2.5.4 nos permite definir una aplicación $h : Y \to \gamma X$ que envía cada $y \in Y$ a su único punto soporte $h(y) \in \gamma X$. Esta aplicación h recibe el nombre de aplicación soporte asociada a la aplicación biseparadora T.*

Los dos próximos lemas son dos resultados clásicos de la teoría de representación de aplicaciones biseparadoras entre espacios de funciones.

Lema 2.5.6 *Sean $f \in \mathrm{Lip}(X,E)$ e $y \in Y$ tales que $\|f\|^{\gamma X} \equiv 0$ en un entorno abierto de $h(y)$ en γX. Entonces $Tf \equiv 0$ en un entorno de y.*

Demostración. Sea U un entorno abierto de $h(y)$ en γX en el que $\|f\|^{\gamma X} \equiv 0$. Por definición de punto soporte, existe $g \in \mathrm{Lip}(X,E)$ con $\mathrm{coz}(g) \subset U$ tal que $Tg(y) \neq 0$. Como $\mathrm{coz}(f) \cap \mathrm{coz}(g) = \emptyset$ y T es biseparadora, se tiene que $\mathrm{coz}(Tf) \cap \mathrm{coz}(Tg) = \emptyset$. Por tanto, $Tf \equiv 0$ en $\mathrm{coz}(Tg)$, que resulta ser un entorno de y. □

Lema 2.5.7 *Para toda $f \in \mathrm{Lip}(X,E)$, $h(\mathrm{coz}(Tf)) \subset cl_{\gamma X}(\mathrm{coz}(f))$.*

Demostración. Supongamos que existen $f \in \mathrm{Lip}(X,E)$ e $y \in \mathrm{coz}(Tf)$ tales que $h(y) \notin cl_{\gamma X}(\mathrm{coz}(f))$. Entonces, podemos encontrar un entorno abierto U de $h(y)$ en γX tal que $U \cap \mathrm{coz}(f) = \emptyset$. Ahora, por definición de $h(y)$, sabemos que existe $g \in \mathrm{Lip}(X,E)$ con $\mathrm{coz}(g) \subset U$ y $Tg(y) \neq 0$. Puesto que $\mathrm{coz}(f) \cap \mathrm{coz}(g) = \emptyset$ y T es biseparadora, se tiene que $\mathrm{coz}(Tf) \cap \mathrm{coz}(Tg) = \emptyset$, de donde deducimos que $Tf(y) = 0$, en contra de nuestra hipótesis inicial. $\square$

En este momento, disponemos de las herramientas suficientes para comprobar que la aplicación soporte h asociada a la aplicación biseparadora $T : \mathrm{Lip}(X,E) \to \mathrm{Lip}(Y,F)$ es continua.

Lema 2.5.8 *$h : Y \to \gamma X$ es continua.*

Demostración. Veamos que h es continua en cada punto de Y. Para ello, tomemos $y_0 \in Y$ y un entorno abierto U de $h(y_0)$ en γX. Como $C(\gamma X)$ es completamente regular, existe $g \in C(\gamma X)$ con $g(h(y_0)) = 1$ y $g \equiv 0$ en $\gamma X \setminus U$. Así, definiendo $V := \{x \in \gamma X : g(x) > 1/2\}$, obtenemos un nuevo entorno abierto V de $h(y_0)$ en γX tal que $cl_{\gamma X} V \subset U$. Ahora, por ser $h(y_0)$ un punto soporte, existe $f \in \mathrm{Lip}(X,E)$ con $\mathrm{coz}(f) \subset V$ y $Tf(y_0) \neq 0$. Por tanto, tenemos que $\mathrm{coz}(Tf)$ es un entorno abierto de y_0 en Y que satisface $h(\mathrm{coz}(Tf)) \subset cl_{\gamma X}(\mathrm{coz}(f))$ en virtud del Lema 2.5.7, luego $h(\mathrm{coz}(Tf)) \subset U$, lo que nos permite afirmar que h es continua en y_0. $\square$

Observación 2.5.9 *Puesto que $h : Y \to \gamma X$ es una aplicación continua y γX es compacto, sabemos que h puede ser extendida a una aplicación continua $\widehat{h} : \beta Y \to \gamma X$ (véase [29, Teorema 3.6.1]).*

Lo que haremos a continuación será probar dos resultados que nos permitirán ver que la extensión $\widehat{h}$ de h se puede definir en la compactificación γY de Y.

Lema 2.5.10 *Sean $y_0 \in \beta Y$ y U un entorno abierto de $\widehat{h}(y_0)$ en γX. Entonces existe $f \in \mathrm{Lip}(X,E)$ tal que $\mathrm{coz}(f) \subset U$ y $\|Tf\|^{\beta Y}(y_0) \neq 0$.*

Demostración. Sea $g \in \mathrm{Lip}(Y,F)$ tal que $\|g\|^{\beta Y}(y_0) \neq 0$. Ahora, puesto que $\mathrm{Lip}(X)$ es fuertemente regular, tomemos $k \in \mathrm{Lip}(X)$ tal que $k^{\gamma X} \equiv 0$ en $\gamma X \setminus U$ y $k^{\gamma X} \equiv 1$ en un entorno abierto V de $\widehat{h}(y_0)$. Si consideramos

$$f := k \cdot T^{-1} g \in \mathrm{Lip}(X,E),$$

resulta obvio que $\mathrm{coz}(f) \subset U$. Por otro lado, $\widehat{h}^{-1}(V)$ es un entorno de y_0, por lo que $\widehat{h}^{-1}(V) \cap Y \neq \emptyset$. Si tomamos $y \in \widehat{h}^{-1}(V) \cap Y$, entonces $h(y) \in V$, y, como consecuencia de la definición de la función k,

$$f - T^{-1}g \equiv 0 \text{ en } V \cap X,$$

lo que implica que

$$\left\| f - T^{-1}g \right\|^{\gamma X} \equiv 0 \text{ en un entorno de } h(y) \text{ en } \gamma X.$$

Aplicando el Lema 2.5.6, deducimos que $Tf(y) = g(y)$. Finalmente, dado que esto ocurre para todo $y \in \widehat{h}^{-1}(V) \cap Y$, podemos concluir que

$$\|Tf\|^{\beta Y}(y_0) = \|g\|^{\beta Y}(y_0).$$

Como inicialmente hemos tomado $g \in \mathrm{Lip}(Y, F)$ con $\|g\|^{\beta Y}(y_0) \neq 0$, se deduce que $\|Tf\|^{\beta Y}(y_0) \neq 0$, quedando así probado el lema. $\square$

Lema 2.5.11 *Dados $y_1, y_2 \in \beta Y$ con $y_1 \sim y_2$, entonces $\widehat{h}(y_1) = \widehat{h}(y_2)$.*

Demostración. Supongamos que $\widehat{h}(y_1) \neq \widehat{h}(y_2)$ y tomemos U y V entornos abiertos disjuntos de $\widehat{h}(y_1)$ y $\widehat{h}(y_2)$ en γX, respectivamente. En virtud del resultado anterior, existen $f_1, f_2 \in \mathrm{Lip}(X, E)$ tales que

$$\mathrm{coz}(f_1) \subset U, \ \|Tf_1\|^{\beta Y}(y_1) \neq 0,$$

y

$$\mathrm{coz}(f_2) \subset V, \ \|Tf_2\|^{\beta Y}(y_2) \neq 0.$$

Ahora, como T es biseparadora, se tiene que $\mathrm{coz}(Tf_1) \cap \mathrm{coz}(Tf_2) = \emptyset$. Por tanto, $Tf_1(y) = 0$ para todo $y \in \mathrm{coz}(Tf_2)$, lo que nos permite deducir que

$$\|Tf_1\|^{\beta Y}(y_2) = 0.$$

Así, teniendo en cuenta que $\|Tf_1\|^{\beta Y}(y_1) \neq 0$ y que $y_1 \sim y_2$ por hipótesis, obtenemos una contradicción con el hecho de que $\mathrm{Lip}(Y, F)$ sea compatible con $\mathrm{Lip}(Y)$. $\square$

Proposición 2.5.12 *La aplicación soporte h puede ser extendida a una aplicación continua $\widehat{h}$ de γY en γX.*

Demostración. Como ya hemos mencionado en la Observación 2.5.9, la aplicación h puede ser extendida a una aplicación continua $\widehat{h}$ de βY en γX. Ahora bien, según el Lema 2.5.11, es posible definir la imagen de cada $y \in \gamma Y$ como la imagen por $\widehat{h}$ de cualquier elemento de su clase de equivalencia. De esta manera, está claro que hemos obtenido una extensión continua $\widehat{h}$ de h definida en la compactificación γY (véase [29, Proposición 2.4.2]). □

Observación 2.5.13 *Puesto que T^{-1} es también una aplicación biseparadora, existe una aplicación soporte continua $k : X \to \gamma Y$ asociada a T^{-1} cuya extensión continua a γX denotaremos mediante $\widehat{k}$.*

Proposición 2.5.14 *$\widehat{h} : \gamma Y \to \gamma X$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Para probar que la aplicación $\widehat{h}$ es un homeomorfismo, será suficiente comprobar que $\widehat{k}$ (dada en la Observación 2.5.13) es su aplicación inversa, puesto que ya hemos visto que ambas son continuas. Por tanto, debemos ver que $(\widehat{h} \circ \widehat{k})(x) = x$ para todo $x \in \gamma X$ y además que $(\widehat{k} \circ \widehat{h})(y) = y$ para todo $y \in \gamma Y$.

Veamos que la primera de las igualdades es cierta. Para ello, actuaremos en dos pasos. En primer lugar, veremos que es cierto para todo $x \in X$, y finalmente, que también lo es para cada $x \in \gamma X \setminus X$. De manera análoga se prueba la segunda igualdad.

Supongamos que existe $x_0 \in X$ tal que $\widehat{h}(k(x_0)) \neq x_0$ y tomemos U y V entornos abiertos disjuntos de $\widehat{h}(k(x_0))$ y x_0 en γX, respectivamente. Teniendo en cuenta el Lema 2.5.2, sabemos que existe $f \in \mathrm{Lip}(X, E)$ tal que $x_0 \in \mathrm{coz}(f)$ y $\mathrm{coz}(f) \subset V$. Ahora, aplicando el Lema 2.5.7 asociado a la aplicación biseparadora T^{-1}, deducimos que

$$k(x_0) \in cl_{\gamma Y}(\mathrm{coz}(Tf)).$$

Por otro lado, como $\widehat{h} : \gamma Y \to \gamma X$ es continua, sabemos que existe un entorno abierto U_1 de $k(x_0)$ en γY tal que, si $y \in U_1$, entonces $\widehat{h}(y) \in U$. Ahora, puesto que

$$k(x_0) \in U_1 \cap cl_{\gamma Y}(\mathrm{coz}(Tf)),$$

deducimos que

$$U_1 \cap \mathrm{coz}(Tf) \neq \emptyset.$$

Pues bien, sea $y_0 \in U_1 \cap \mathrm{coz}(Tf)$. Como $y_0 \in U_1$, tenemos que $\widehat{h}(y_0) \in U$, pero además, puesto que $y_0 \in \mathrm{coz}(Tf)$, podemos concluir que $y_0 \in Y$. Por lo tanto,

$\widehat{h}(y_0) = h(y_0)$. Así, por definición de punto soporte, existe $g \in \mathrm{Lip}(X, E)$ con $\mathrm{coz}(g) \subset U$ y $Tg(y_0) \neq 0$. Entonces, dado que $\mathrm{coz}(f) \cap \mathrm{coz}(g) = \emptyset$ y T es una aplicación biseparadora, $\mathrm{coz}(Tf) \cap \mathrm{coz}(Tg) = \emptyset$. Sin embargo, esto contradice que y_0 pertenece a los cozeros de las funciones Tf y Tg. Ello nos permite deducir que $\widehat{h}(\widehat{k}(x)) = x$ para todo $x \in X$.

Para finalizar, consideremos $x_0 \in \gamma X \setminus X$ y sea (x_α) una red en X que converge a x_0. Puesto que tanto $\widehat{h}$ como $\widehat{k}$ son continuas, tenemos que

$$\widehat{h}(\widehat{k}(x_\alpha)) \longrightarrow \widehat{h}(\widehat{k}(x_0)).$$

Por otro lado, cada x_α pertenece a X, por lo que aplicando el apartado anterior podemos observar que

$$\widehat{h}(\widehat{k}(x_\alpha)) = \widehat{h}(k(x_\alpha)) = x_\alpha,$$

lo que nos permite concluir que

$$\widehat{h}(\widehat{k}(x_0)) = x_0.$$

Como este razonamiento se puede llevar a cabo para cualquier $x \in \gamma X \setminus X$, queda probado que $\widehat{h}(\widehat{k}(x)) = x$ para todo $x \in \gamma X \setminus X$. $\square$

Todo el razonamiento desarrollado a lo largo de esta sección, junto con el Lema 2.3.4, nos permitirá deducir que X e Y son homeomorfos.

Teorema 2.5.15 *Sean X e Y espacios métricos completos, E y F espacios normados y $T : \mathrm{Lip}(X, E) \to \mathrm{Lip}(Y, F)$ una aplicación biseparadora. Entonces X e Y son homeomorfos.*

Demostración. En el Lema 2.3.4, hemos caracterizado los puntos de un espacio métrico completo X como los únicos puntos de γX que son un conjunto G_δ en γX. Por tanto, como $\widehat{h} : \gamma Y \to \gamma X$ es un homeomorfismo y además una extensión de la aplicación $h : Y \to \gamma X$ (véanse las Proposiciones 2.5.14 y 2.5.12), es inmediato deducir que, para cada $y \in Y$, $h(y)$ debe ser un conjunto G_δ en γX, por lo que $h(y) \in X$. El mismo razonamiento puede llevarse a cabo para la aplicación $\widehat{k} : \gamma X \to \gamma Y$ considerada en la Observación 2.5.13, que además resulta ser, como hemos visto en la prueba de la Proposición 2.5.14, la inversa de $\widehat{h}$. Así, hemos obtenido que $\widehat{h}(Y) \subset X$ y $\widehat{h}^{-1}(X) = \widehat{k}(X) \subset Y$, por lo que la aplicación $h = \widehat{h}_{|_Y} : Y \to X$ es un homeomorfismo. $\square$

2.6. Representación

En esta sección continuaremos asumiendo que X e Y son espacios métricos completos, E y F espacios normados y T una aplicación biseparadora entre los espacios de funciones $\mathrm{Lip}(X,E)$ y $\mathrm{Lip}(Y,F)$, salvo que se especifique lo contrario. Finalmente, $h : Y \to X$ será el homeomorfismo asociado a la aplicación biseparadora T construido en la sección anterior.

El objetivo en este apartado es tratar de obtener una completa descripción de la aplicación biseparadora T, es decir, obtener una forma general mediante la cual se representen todas las aplicaciones biseparadoras definidas entre espacios de funciones de Lipschitz.

Lo primero que haremos será, puesto que ha quedado demostrado que h es un homeomorfismo entre X e Y, adaptar los enunciados de los Lemas 2.5.6 y 2.5.7 probados en la sección anterior.

Lema 2.6.1 *Sean $f \in \mathrm{Lip}(X,E)$ e $y \in Y$ tales que $f \equiv 0$ en un entorno abierto U de $h(y)$. Entonces $Tf \equiv 0$ en $h^{-1}(U)$.*

Lema 2.6.2 *$h(\mathrm{coz}(Tf)) \subset cl(\mathrm{coz}(f))$ para toda $f \in \mathrm{Lip}(X,E)$.*

El siguiente resultado técnico será de gran importancia en la demostración de la Proposición 2.6.4 y en otras que veremos más adelante.

Lema 2.6.3 *Sean $x_0 \in X$ y (r_n) una sucesión de números reales positivos que converge hacia cero tal que $2r_{n+1} < r_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para cada $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, se tiene que*

$$[B(x_0, 2r_{2n}) \backslash B(x_0, r_{2n+1})] \cap [B(x_0, 2r_{2m}) \backslash B(x_0, r_{2m+1})] = \emptyset.$$

Demostración. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$. Supongamos que existe un punto x en X tal que

$$x \in [B(x_0, 2r_{2n}) \backslash B(x_0, r_{2n+1})] \cap [B(x_0, 2r_{2m}) \backslash B(x_0, r_{2m+1})].$$

Entonces, es sencillo observar que

$$r_{2n+1} \leq d(x, x_0) < 2r_{2n}$$

y

$$r_{2m+1} \leq d(x, x_0) < 2r_{2m}.$$

Ahora, si $n, m \in \mathbb{N}$ satisfacen $n > m$, es inmediato comprobar que $2n > 2m + 1$, por lo que $2r_{2n} < r_{2m+1}$. Sin embargo, esto es absurdo puesto que

$$d(x, x_0) < 2r_{2n} \text{ y } r_{2m+1} \leq d(x, x_0).$$

Obtenemos una conclusión similar si suponemos que $m > n$. $\square$

A continuación, probaremos un resultado fundamental para deducir la representación de cualquier aplicación biseparadora definida entre espacios de funciones de Lipschitz.

Proposición 2.6.4 *Sean $f \in \mathrm{Lip}(X, E)$ e $y_0 \in Y$ tales que $f(h(y_0)) = 0$. Entonces $Tf(y_0) = 0$.*

Demostración. En el caso en que $h(y_0)$ sea un punto aislado de X, es obvio que $\{h(y_0)\}$ es un entorno abierto del propio punto, lo que aplicando el Lema 2.6.1 nos permite concluir que $Tf(y_0) = 0$.

Así, a partir de este momento, asumiremos que $h(y_0)$ no es aislado. Tomemos entonces una sucesión de números reales positivos (r_n) que converja a 0 y satisfaga

$$2r_{n+1} < r_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Definamos a continuación

$$B_n := B(h(y_0), r_n), \; B_n^2 := B(h(y_0), 2r_n),$$

y

$$\varphi_n := \varphi_{h(y_0), r_n} \text{ (véase (2.2))}$$

para $h(y_0) \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Ahora, consideremos la función de $g \in \mathrm{Lip}(X, E)$ dada por

$$g := f \cdot \varphi_1,$$

y definamos

$$g_1 := \sum_{n=1}^{\infty} f \cdot (\varphi_{2n} - \varphi_{2n+1})$$

y

$$g_2 := \sum_{n=1}^{\infty} f \cdot (\varphi_{2n-1} - \varphi_{2n}).$$

Resulta sencillo comprobar que

$$g = g_1 + g_2.$$

Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\mathrm{coz}(\varphi_{2n} - \varphi_{2n+1}) \subset B_{2n}^2 \backslash B_{2n+1},$$

y teniendo en cuenta el Lema 2.6.3, sabemos que, siempre que $n \neq m$,

$$[B_{2n}^2 \backslash B_{2n+1}] \cap [B_{2m}^2 \backslash B_{2m+1}] = \emptyset,$$

lo que implica que

$$\mathrm{coz}(\varphi_{2n} - \varphi_{2n+1}) \cap \mathrm{coz}(\varphi_{2m} - \varphi_{2m+1}) = \emptyset$$

para todo $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$. Por tanto, g_1 (y respectivamente g_2) es una función que se define como una suma infinita de funciones cuyos cozeros son disjuntos. Además, puesto que

$$\cap_{n=1}^{\infty} B_n = \{h(y_0)\}, \tag{2.6}$$

para probar que g_1 (y respectivamente g_2) es una función continua, bastará ver que lo es en el punto $h(y_0)$. Para ello, como $f(h(y_0)) = 0$ por hipótesis, se tiene que

$$g_1(h(y_0)) = 0.$$

Además, teniendo en cuenta que f es continua y que $\|g_1(x)\| \leq \|f(x)\|$ para todo $x \in X$, podemos asegurar que g_1 (y análogamente g_2) es continua. Para finalizar, aplicando el Lema 2.4.5, se tiene que

$$\begin{aligned} L(f \cdot (\varphi_{2n} - \varphi_{2n+1})) &\leq L(f \cdot \varphi_{2n}) + L(f \cdot \varphi_{2n+1}) \\ &\leq 6\ L(f) \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, el Lema 2.4.6 nos permite concluir que g_1 (y de manera análoga g_2) pertenece a $\mathrm{Lip}(X, E)$. Ahora bien, puesto que $\varphi_1 \equiv 1$ en B_1, tenemos que

$$g \equiv f \text{ en } B_1,$$

y teniendo en cuenta el Lema 2.6.1,

$$Tg(y_0) = Tf(y_0).$$

En consecuencia, como pretendemos probar que $Tf(y_0)=0$, bastará ver que $Tg_1(y_0)=0$ y que $Tg_2(y_0)=0$.

A continuación, probaremos que, dado $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$cl\left(\operatorname{coz}\left(g_1\right)\right) \subset \left(\bigcup_{n=1}^{n_0-1} cl\left(B_{2n}^2 \setminus B_{2n+1}\right)\right) \bigcup cl\left(B_{2n_0}^2\right). \tag{2.7}$$

En primer lugar,

$$\begin{aligned}
\operatorname{coz}\left(g_1\right) &\subset \operatorname{coz}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_{2n}-\varphi_{2n+1})\right) \\
&\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{coz}(\varphi_{2n}-\varphi_{2n+1}) \\
&= \left(\bigcup_{n=1}^{n_0-1} \operatorname{coz}(\varphi_{2n}-\varphi_{2n+1})\right) \bigcup \left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} \operatorname{coz}(\varphi_{2n}-\varphi_{2n+1})\right).
\end{aligned}$$

Por un lado, si $n<n_0$, por definición de φ_n,

$$\operatorname{coz}\left(\varphi_{2n}-\varphi_{2n+1}\right) \subset B_{2n}^2 \setminus B_{2n+1},$$

y, por otro lado,

$$\bigcup_{n=n_0}^{\infty} \operatorname{coz}(\varphi_{2n}-\varphi_{2n+1}) \subset B_{2n_0}^2$$

puesto que $B_{2n}^2 \subset B_{2n_0}^2$ siempre que $n>n_0$. Esto nos permite dar por finalizada la prueba de la inclusión (2.7).

Por último, consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$y_n \in h^{-1}(B_{2n-1}) \setminus cl(h^{-1}(B_{2n}^2)),$$

y veamos que $h(y_n) \notin cl\left(\operatorname{coz}(g_1)\right)$. Para ello, fijemos $n_0 \in \mathbb{N}$, y, teniendo en cuenta (2.7), será suficiente ver que $h(y_{n_0}) \notin cl\left(B_{2n}^2 \setminus B_{2n+1}\right)$ siempre que $n<n_0$ y que $h(y_{n_0}) \notin cl(B_{2n_0}^2)$. Si suponemos que $n<n_0$, se tiene que $2n+1 \leq 2n_0-1$, por lo que $B_{2n_0-1} \subseteq B_{2n+1}$. Ahora, como B_{2n+1} es abierto, se deduce que $cl\left(B_{2n}^2 \setminus B_{2n+1}\right) \subset X \setminus B_{2n+1}$, y así, puesto que

$h(y_{n_0}) \in B_{2n_0-1} \subseteq B_{2n+1}$, tenemos que $h(y_{n_0}) \notin cl\,(B_{2n}^2 \setminus B_{2n+1})$. En segundo lugar, sabemos, puesto que h es un homeomorfismo, que

$$h(y_{n_0}) \in B_{2n_0-1} \setminus cl(B_{2n_0}^2),$$

y, en particular,

$$h(y_{n_0}) \notin cl(B_{2n_0}^2).$$

Así pues, $h(y_n) \notin cl\,(\mathrm{coz}(g_1))$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo cual existe un entorno abierto U_n de cada $h(y_n)$ tal que

$$U_n \cap \mathrm{coz}(g_1) = \emptyset,$$

es decir, $g_1 \equiv 0$ en U_n. Aplicando el Lema 2.6.1, tenemos que $Tg_1 \equiv 0$ en $h^{-1}(U_n)$ y, por tanto,

$$Tg_1(y_n) = 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora, por la propiedad (2.6) y dado que h es un homeomorfismo, se deduce que la sucesión (y_n) converge hacia y_0. Finalmente, como Tg_1 es continua, resulta inmediato concluir que

$$Tg_1(y_0) = 0.$$

De manera análoga se puede obtener que $Tg_2(y_0) = 0$, y, por tanto,

$$Tf(y_0) = Tg(y_0) = Tg_1(y_0) + Tg_2(y_0) = 0,$$

quedando así probado el resultado. □

Puesto que $T : \mathrm{Lip}(X, E) \to \mathrm{Lip}(Y, F)$ es una aplicación biseparadora, sabemos que su inversa $T^{-1} : \mathrm{Lip}(Y, F) \to \mathrm{Lip}(X, E)$ también lo es. Por tanto, existe un homeomorfismo $k : X \to Y$ asociado a T^{-1} que nos permite enunciar un resultado análogo a la Proposición 2.6.4.

Corolario 2.6.5 *Sean $g \in \mathrm{Lip}(Y, F)$ y $x_0 \in X$ tales que $g(k(x_0)) = 0$. Entonces $T^{-1}g(x_0) = 0$.*

Con la ayuda de estos resultados, es posible obtener la representación de las aplicaciones biseparadoras entre espacios de funciones de Lipschitz (a partir de aquí, seguiremos un razonamiento similar al del capítulo anterior que conviene ser mencionado de nuevo).

Observación 2.6.6 *Tomemos $f \in \mathrm{Lip}(X,E)$, $y \in Y$, y definamos la función*

$$g := f - \widetilde{f(h(y))}.$$

Es inmediato observar que $g \in \mathrm{Lip}(X,E)$ y además $g(h(y)) = 0$, por lo que, aplicando la Proposición 2.6.4, $Tg(y) = 0$. Como consecuencia,

$$Tf(y) = T\widetilde{f(h(y))}(y)$$

para toda $f \in \mathrm{Lip}(X,E)$ e $y \in Y$.

Definición 2.6.7 *Para cada $y \in Y$, definamos la aplicación Jy como*

$$\begin{array}{rccc} Jy: & E & \rightarrow & F \\ & \mathrm{e} & \mapsto & (Jy)(\mathrm{e}) := T\tilde{\mathrm{e}}(y). \end{array}$$

Lema 2.6.8 *La aplicación Jy es lineal y biyectiva para cada $y \in Y$.*

Demostración. Fijemos $y_0 \in Y$.

- Jy_0 es lineal: sean $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2 \in E$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Entonces, por ser T lineal, se tiene que

$$\begin{array}{rcl} (Jy_0)(\alpha \mathrm{e}_1 + \beta \mathrm{e}_2) & = & T(\widetilde{\alpha \mathrm{e}_1 + \beta} \mathrm{e}_2)(y_0) \\ & = & \alpha T\tilde{\mathrm{e}}_1(y_0) + \beta T\tilde{\mathrm{e}}_2(y_0) \\ & = & \alpha (Jy_0)(\mathrm{e}_1) + \beta (Jy_0)(\mathrm{e}_2). \end{array}$$

- Jy_0 es inyectiva: tomemos $\mathrm{e} \in E$ con $(Jy_0)(\mathrm{e}) = 0$. Debido a la existencia de un homeomorfismo $k : X \to Y$ asociado a la aplicación biseparadora T^{-1}, $y_0 = k(x_0)$ para algún $x_0 \in X$. Por este motivo, tenemos que

$$(Jk(x_0))(\mathrm{e}) = T\tilde{\mathrm{e}}(k(x_0)) = 0.$$

Considerando el Corolario 2.6.5, obtenemos que

$$T^{-1}\left(T\tilde{\mathrm{e}}\right)(x_0) = 0,$$

o lo que es lo mismo, $\tilde{\mathrm{e}}(x_0) = 0$, de donde deducimos que $\mathrm{e} = 0$, quedando probado que Jy_0 es inyectiva.

- Jy_0 es suprayectiva: dado $\mathrm{f} \in F$, debemos encontrar $\mathrm{e} \in E$ tal que

$$(Jy_0)(\mathrm{e}) = \mathrm{f}.$$

Para ello, sea f en F. Puesto que T es suprayectiva, existe una función $g \in \mathrm{Lip}(X, E)$ tal que $Tg = \tilde{\mathrm{f}}$ y, en particular, $Tg(y_0) = \mathrm{f}$. Definamos ahora

$$\mathrm{e} := g(h(y_0)) \in E.$$

Es sencillo observar que

$$(\tilde{\mathrm{e}} - g)(h(y_0)) = 0,$$

por lo que aplicando la Proposición 2.6.4 deducimos que

$$T(\tilde{\mathrm{e}} - g)(y_0) = 0.$$

Por tanto,

$$(Jy_0)(\mathrm{e}) = T\tilde{\mathrm{e}}(y_0) = Tg(y_0) = \mathrm{f}.$$

Como este razonamiento se puede aplicar para cualquier $y \in Y$, concluimos que la aplicación Jy es lineal y biyectiva para todo $y \in Y$. □

Finalmente, nos encontramos en disposición de enunciar un resultado acerca de la representación de las aplicaciones biseparadoras entre espacios de funciones de Lipschitz.

Teorema 2.6.9 *Sean X e Y espacios métricos completos, E y F espacios normados y supongamos que $T : \mathrm{Lip}(X, E) \to \mathrm{Lip}(Y, F)$ es una aplicación biseparadora. Entonces existen un homeomorfismo $h : Y \to X$ y una aplicación $J : Y \to L'(E, F)$ tales que*

$$Tf(y) = (Jy)(f(h(y)))$$

para toda $f \in \mathrm{Lip}(X, E)$ e $y \in Y$.

Demostración. En primer lugar, definamos la aplicación J como

$$\begin{array}{rccc} J: & Y & \to & L'(E, F) \\ & y & \mapsto & Jy, \end{array}$$

que se encuentra bien definida si tenemos en cuenta el Lema 2.6.8. Por otro lado, en virtud de la representación de T obtenida en la Observación 2.6.6

y de la definición de la aplicación Jy para cada $y \in Y$ (véase la Definición 2.6.7), es inmediato deducir que

$$Tf(y) = (Jy)(f(h(y)))$$

para cada $f \in \mathrm{Lip}(X, E)$ e $y \in Y$. Finalmente, en el Teorema 2.5.15, fue probado que h es un homeomorfismo. $\square$

Observación 2.6.10 *Si consideramos la aplicación biseparadora T^{-1}, podemos definir, para cada $x \in X$, la aplicación Kx como*

$$\begin{array}{rccc} Kx: & F & \rightarrow & E \\ & \mathrm{f} & \mapsto & (Kx)(\mathrm{f}) := T^{-1}\tilde{\mathrm{f}}(x). \end{array}$$

De manera similiar al Lema 2.6.8, se puede probar que Kx es lineal y biyectiva para todo $x \in X$. Por tanto, es posible obtener un resultado análogo al obtenido en el Teorema 2.6.9 asociado a T^{-1}.

Corolario 2.6.11 *Sean X e Y espacios métricos completos, E y F espacios normados y supongamos que $T : \mathrm{Lip}(X, E) \rightarrow \mathrm{Lip}(Y, F)$ es una aplicación biseparadora. Entonces existen un homeomorfismo $k : X \rightarrow Y$ y una aplicación $K : X \rightarrow L'(F, E)$ tales que*

$$T^{-1}g(x) = (Kx)(g(k(x)))$$

para toda $g \in \mathrm{Lip}(Y, F)$ y $x \in X$.

2.7. Continuidad

A diferencia de las secciones anteriores, para tratar de deducir la continuidad de las aplicaciones biseparadoras definidas entre espacios de funciones de Lipschitz debemos suponer que los espacios normados E y F son completos. Entre otros, emplearemos el Teorema del Grafo Cerrado, por lo que necesitaremos que los espacios de funciones $\mathrm{Lip}(X, E)$ y $\mathrm{Lip}(Y, F)$ sean de Banach; de ahí la necesidad de asumir la completitud de E y F.

En estas condiciones veremos que, aunque en general no se puede deducir la continuidad de tales aplicaciones de manera automática, es posible encontrar una aplicación continua asociada a toda aplicación biseparadora definida entre espacios de funciones de Lipschitz. Ello nos permitirá deducir la continuidad de ésta en algunos casos particulares.

Observando la representación de las aplicaciones biseparadoras obtenida en la sección anterior, resulta inmediato deducir que su continuidad se encuentra estrechamente relacionada con la continuidad de las aplicaciones Jy para cada $y \in Y$ (véase la Definición 2.6.7). Por tanto, en los siguientes resultados analizaremos la continuidad de dichas aplicaciones.

Así pues, a partir de este momento, y mientras no se indique lo contrario, vamos a suponer que X e Y son espacios métricos completos, que E y F son espacios de Banach y que $T : \mathrm{Lip}(X, E) \to \mathrm{Lip}(Y, F)$ es una aplicación biseparadora.

En la demostración del siguiente resultado se pone de manifiesto, por primera vez, la necesidad de asumir que tanto E como F sean espacios de Banach.

Lema 2.7.1 $\inf \{\|(Jy)(\mathrm{e})\| : y \in Y\} > 0$ *para cada* $\mathrm{e} \in E$ *no nulo.*

Demostración. Supongamos que el resultado no es cierto. Entonces podemos asumir la existencia de una sucesión (y_n) en Y y $\mathrm{e} \in E$ con $\|\mathrm{e}\| = 1$ tales que

$$\| (Jy_n) (\mathrm{e})\| = \|T\tilde{\mathrm{e}}(y_n)\| < 1/n^3 \tag{2.8}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Si suponemos que el conjunto $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene un punto de acumulación y_0 en Y, entonces sabemos que existe una subsucesión (y_{n_i}) de (y_n) que converge a y_0. En tal caso, podemos asegurar que

$$\| (Jy_0) (\mathrm{e})\| = 0,$$

lo cual es absurdo puesto que la aplicación Jy_0 es inyectiva. Por tanto, concluimos que el conjunto $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ no tiene ningún punto de acumulación en Y. Ahora, por ser Y completo, podemos deducir que no existen subsucesiones de Cauchy de (y_n), lo que implica, observando el Lema 2.2.2(ii), que existen una subsucesión de (y_n) (que continuaremos denotando como (y_n)) y una constante positiva r tales que

$$d(y_n, y_m) > r \tag{2.9}$$

siempre que $n \neq m$.

Por otro lado, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$T^{-1}(T\tilde{\mathrm{e}})(h(y_n)) = \tilde{\mathrm{e}}(h(y_n)) = \mathrm{e},$$

y además, aplicando el Corolario 2.6.11, obtenemos que

$$T^{-1}(T\tilde{\mathrm{e}})(h(y_n)) = (Kh(y_n))(T\tilde{\mathrm{e}}(y_n)).$$

Como consecuencia, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\|\left(Kh(y_n)\right)\left(T\tilde{\mathrm{e}}(y_n)\right)\| = \|\mathrm{e}\| = 1. \tag{2.10}$$

Ahora, puesto que $\mathrm{e} \neq 0$ y Jy_n es inyectiva para cada $n \in \mathbb{N}$, deducimos que $(Jy_n)(\mathrm{e}) \neq 0$, lo que nos permite definir $\mathrm{f}_n \in F$ como

$$\mathrm{f}_n := T\tilde{\mathrm{e}}(y_n)/\|T\tilde{\mathrm{e}}(y_n)\|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Es obvio que $\|\mathrm{f}_n\| = 1$ y además, teniendo en cuenta (2.8) y (2.10), es sencillo observar que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|T^{-1}\tilde{\mathrm{f}}_n(h(y_n))\| &= \|(Kh(y_n))(\tilde{\mathrm{f}}_n(y_n))\| \\ &= \|\left(Kh(y_n)\right)(\mathrm{f}_n)\| \\ &= (1/\|T\tilde{\mathrm{e}}(y_n)\|)\, \|(Kh(y_n))(T\tilde{\mathrm{e}}(y_n))\| \\ &> n^3. \end{aligned} \tag{2.11}$$

De manera análoga a (2.1), vamos a definir, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función

$$\psi_n(y) := \text{máx}\left\{0, 1 - \frac{3\ d(y,y_n)}{r}\right\}$$

para todo $y \in Y$, que obviamente pertenece a $\mathrm{Lip}(Y)$. Finalmente, consideremos

$$g := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n \cdot \tilde{\mathrm{f}}_n}{n^2}.$$

Es inmediato observar que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\|\psi_n \cdot \tilde{\mathrm{f}}_n/n^2\right\|_\infty \leq 1/n^2,$$

lo que nos permite afirmar, por ser F (y, en consecuencia $C(Y,F)$) un espacio normado completo, que g es una función continua. Además, por definición de cada ψ_n, es sencillo comprobar que $\operatorname{coz}(\psi_n) = B(y_n, r/3)$, por lo que, teniendo en cuenta (2.9), podemos deducir que

$$\operatorname{coz}(\psi_n) \cap \operatorname{coz}(\psi_m) = \emptyset$$

para todo $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$. Por otro lado, como $L(\psi_n) \leq 3/r$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$L(\psi_n \cdot \tilde{\mathrm{f}}_n/n^2) = (\|\mathrm{f}_n\|/n^2)L(\psi_n) \leq 3/rn^2$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, acabamos de comprobar que g reúne todas las condiciones necesarias para que, aplicando el Lema 2.4.6, podamos concluir que dicha función pertenece a $\operatorname{Lip}(Y, F)$.

Para finalizar la demostración, es inmediato observar que

$$g(y_n) = \mathrm{f}_n/n^2$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, y aplicando el Corolario 2.6.5, obtenemos que

$$T^{-1}g(h(y_n)) = (1/n^2)T^{-1}\tilde{\mathrm{f}}_n(h(y_n)).$$

Así, teniendo en cuenta la desigualdad (2.11), deducimos que

$$\left\|T^{-1}g(h(y_n))\right\| = (1/n^2)\left\|T^{-1}\tilde{\mathrm{f}}_n(h(y_n))\right\| > n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual es absurdo pues $T^{-1}g$ es una función acotada. □

Como $T^{-1} : \operatorname{Lip}(Y, F) \to \operatorname{Lip}(X, E)$ es también biseparadora, podemos enunciar un resultado análogo al anterior asociado a la aplicación K dada en el Corolario 2.6.11.

Corolario 2.7.2 $\inf\{\|(Kx)(\mathrm{f})\| : x \in X\} > 0$ *para cada* $\mathrm{f} \in F$ *no nulo.*

A continuación, estudiaremos el conjunto de los puntos y en Y para los cuales la aplicación Jy no es continua. Veremos que se trata de un conjunto finito formado por puntos aislados de Y.

Definición 2.7.3 *Se define el conjunto* Y_d *como*

$$Y_d := \{y \in Y : Jy \text{ es discontinua}\}.$$

Proposición 2.7.4 *El conjunto* $\{\|Jy\| : y \in Y \setminus Y_d\}$ *está acotado. Además,* Y_d *es finito y cada punto de* Y_d *es aislado en* Y.

Demostración. Supongamos que existe una sucesión (y_n) en Y que satisface que $\|Jy_n\| > n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como consecuencia, podemos asumir la existencia de una sucesión (e_n) en E, con $\|\mathrm{e}_n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|(Jy_n)(\mathrm{e}_n)\| = \|T\tilde{\mathrm{e}}_n(y_n)\| > n^2 \tag{2.12}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora, tenemos dos posibilidades con respecto a la sucesión (y_n). Por un lado, que converja a un punto $y_0 \in Y$ y, por otro lado, que no tenga ninguna subsucesión de Cauchy. Como ya hemos visto en el Lema 2.2.2, en el primero de los casos, existen una subsucesión de (y_n), que continuaremos denotando como (y_n), que converge a y_0 y una sucesión (r_n) de números reales positivos que converge a 0 tales que

$$B(y_n, r_n) \cap B(y_m, r_m) = \emptyset \tag{2.13}$$

siempre que $n \neq m$. En el segundo caso, existen una subsucesión de (y_n), que también denotaremos como (y_n), y una sucesión constante (r_n) tales que, siempre que $n \neq m$,

$$B(y_n, r_n) \cap B(y_m, r_m) = \emptyset. \tag{2.14}$$

A partir de este momento, cada vez que mencionemos las sucesiones (y_n) y (r_n), asumiremos que estamos en uno de los dos casos mencionados anteriormente. Definamos ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función

$$\xi_n(y) := \max\{0, r_n - d(y, y_n)\}$$

para todo $y \in Y$. Se tiene que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\xi_n \in \mathrm{Lip}(Y)$, $\xi_n(y_n) = r_n$, $\mathrm{coz}(\xi_n) = B(y_n, r_n)$, $\|\xi_n\|_\infty = r_n$ y $L(\xi_n) \leq 1$. Finalmente, tomemos $\mathrm{f} \in F$ con $\|\mathrm{f}\| = 1$ y consideremos la función

$$g := \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \cdot \tilde{\mathrm{f}}.$$

Por definición de cada función ξ_n y teniendo en cuenta (2.13) y (2.14), resulta inmediato deducir, en cualquiera de los dos casos considerados, que

$$\mathrm{coz}(\xi_n) \cap \mathrm{coz}(\xi_m) = \emptyset \tag{2.15}$$

siempre que $n \neq m$. Además, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$L(\xi_n \cdot \tilde{\mathrm{f}}) = \|\mathrm{f}\| \, L(\xi_n) \leq 1.$$

Con todo esto, como pretendemos ver que g pertenece a $\mathrm{Lip}(Y, F)$, por el Lema 2.4.6, bastará probar que g es continua. En primer lugar, analizaremos el caso en que la sucesión (y_n) converge a y_0. Observando el Lema 2.2.2(i) y teniendo en cuenta que $\mathrm{coz}(\xi_n) = B(y_n, r_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$cl(\cup_{n=1}^{\infty} \mathrm{coz}(\xi_n)) \setminus \cup_{n=1}^{\infty} cl(\mathrm{coz}(\xi_n)) \subset \{y_0\}.$$

Así, para cualquier $y' \neq y_0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que el conjunto

$$A := \{n \in \mathbb{N} : B(y', \varepsilon) \cap \mathrm{coz}(\xi_n) \neq \emptyset\}$$

es finito. Por tanto, para todo $y \in B(y', \varepsilon)$, se tiene que

$$g(y) = \sum_{n \in A} \xi_n(y) \mathrm{f},$$

con lo que g es continua en y'. Por tanto, podemos afirmar que la función g es continua en cualquier punto de Y distinto de y_0. Veamos ahora que también es continua en el punto y_0. Es sencillo observar que, en este caso, como (r_n) converge a 0 e (y_n) converge a y_0, se tiene que $g(y_0) = 0$. Como consecuencia, para probar que g es continua en el punto y_0, debemos ver que, para todo $\varepsilon > 0$, existe un entorno U de y_0 tal que $\|g(y)\| < \varepsilon$ para todo $y \in U$. Así, fijemos $\varepsilon > 0$. Por un lado, como (r_n) es una sucesión que converge a 0, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $r_n < \varepsilon$ para todo $n > n_0$. Por otro lado, para $i = 1, \ldots, n_0$, sabemos que la función ξ_i es continua en el punto y_0, por lo que existen entornos U_i de y_0 tal que $|\xi_i(y)| < \varepsilon$ para todo $y \in U_i$ e $i \in \{1, \ldots, n_0\}$. Finalmente, definamos el entorno U de y_0 como

$$U := U_1 \cap \ldots \cap U_{n_0}.$$

Sea $y \in U$. Si $g(y) = 0$, ya lo tenemos. En otro caso, como sabemos que $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de funciones con cozeros mutuamente disjuntos, existe un único $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $y \in \mathrm{coz}(\xi_{n_1})$. Si $n_1 \leq n_0$, puesto que $y \in U_{n_1}$, se tiene que $\|g(y)\| = |\xi_{n_1}(y)| < \varepsilon$. Por otro lado, si $n_1 > n_0$, por definición de la función ξ_{n_1}, $\|g(y)\| = |\xi_{n_1}(y)| \leq r_{n_1} < \varepsilon$, lo que prueba la función g es continua en el punto y_0.

En el caso en que (y_n) no tiene ninguna subsucesión de Cauchy, aplicando el Lema 2.2.2(ii), deducimos la existencia de una sucesión constante (r_n) tal que $B(y_n, r_n) \cap B(y_m, r_m) = \emptyset$ siempre que $n \neq m$, con lo que se satisface (2.15) y además

$$cl(\cup_{n=1}^{\infty} \mathrm{coz}(\xi_n)) = \cup_{n=1}^{\infty} cl(\mathrm{coz}(\xi_n)),$$

lo que permite concluir de manera sencilla que g es una función continua. Por tanto, podemos asegurar que $g \in \mathrm{Lip}(Y, F)$.

A continuación, tomemos la función $f \in \mathrm{Lip}(X, E)$ definida como

$$f := T^{-1} g.$$

Teniendo en cuenta la caracterización de la aplicación T^{-1} obtenida en el Corolario 2.6.11, resulta sencillo deducir que

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} T^{-1} \left(\xi_n \cdot \tilde{\mathrm{f}} \right),$$

por lo que f viene dada por la suma infinita de funciones con cozeros disjuntos si tenemos en cuenta (2.15) y que T es biseparadora. Si consideramos ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) := \left\| T^{-1} \left(\xi_n \cdot \tilde{\mathrm{f}} \right)(x) \right\|$$

para todo $x \in X$, como sabemos que las funciones f_n tienen cozeros disjuntos, podemos concluir que

$$\|f\| = \sum_{n=1}^{\infty} f_n, \tag{2.16}$$

la cual pertenece a $\mathrm{Lip}(X)$ aplicando el Lema 2.4.1. En este momento, definamos la función

$$f_0 := \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot \tilde{\mathrm{e}}_n$$

y probemos que se trata de una función de $\mathrm{Lip}(X, E)$. Para ello, bastará ver que existe una constante positiva C tal que

$$L(f_n) \leq C \tag{2.17}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, puesto que, en tal caso, f_0 es una función continua dada por la suma infinita de funciones con cozeros disjuntos que satisfacen

$$L(f_n \cdot \tilde{\mathrm{e}}_n) = \|\mathrm{e}_n\| \, L(f_n) \leq C$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, lo que nos permite concluir que f_0 pertenece a $\mathrm{Lip}(X, E)$ aplicando el Lema 2.4.6. Por tanto, probemos la desigualdad (2.17). Supongamos que no es cierto. Entonces, podemos asumir que, tomando una subsucesión si es necesario, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$L(f_n) > n.$$

Por este motivo, tomaremos dos sucesiones (x_n) y (z_n) en X que satisfacen que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq z_n$, y además

$$\frac{|f_n(x_n) - f_n(z_n)|}{d(x_n, z_n)} > n. \tag{2.18}$$

A partir de este momento, vamos a suponer, sin pérdida de generalidad, que $x_n \in \mathrm{coz}(f_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y, a continuación, analizaremos las distintas posibilidades que se pueden presentar para la sucesión (z_n).

1. Existe una subsucesión (z_{n_i}) de (z_n) tal que $z_{n_i} \in \mathrm{coz}(f_{n_i})$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Entonces, atendiendo a (2.16) y (2.18), tenemos que

$$\frac{|\|f\|(x_{n_i}) - \|f\|(z_{n_i})|}{d(x_{n_i}, z_{n_i})} = \frac{|f_{n_i}(x_{n_i}) - f_{n_i}(z_{n_i})|}{d(x_{n_i}, z_{n_i})} > n_i$$

   para todo $i \in \mathbb{N}$, lo que contradice que la función $\|f\|$ pertenece a $\mathrm{Lip}(X)$. Por tanto, se tiene que $\{n \in \mathbb{N} : z_n \in \mathrm{coz}(f_n)\}$ es finito.

2. Existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y una subsucesión (z_{n_i}) de (z_n) tales que $z_{n_i} \in \mathrm{coz}(f_{n_0})$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Entonces, siempre que $n_i \neq n_0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{|(\|f\| - f_{n_0})(x_{n_i}) - (\|f\| - f_{n_0})(z_{n_i})|}{d(x_{n_i}, z_{n_i})} &= \frac{|f_{n_i}(x_{n_i})|}{d(x_{n_i}, z_{n_i})} \\ &= \frac{|f_{n_i}(x_{n_i}) - f_{n_i}(z_{n_i})|}{d(x_{n_i}, z_{n_i})} > n_i, \end{aligned}$$

   obteniendo una nueva contradicción puesto que $\|f\| - f_{n_0} \in \mathrm{Lip}(X)$. Esto implica que, fijado $n_0 \in \mathbb{N}$, $\{n \in \mathbb{N} : z_n \in \mathrm{coz}(f_{n_0})\}$ es finito.

3. Existe una subsucesión (z_{n_i}) de (z_n) tal que $z_{n_i} \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{coz}(f_n)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\frac{|\|f\|(x_{n_i}) - \|f\|(z_{n_i})|}{d(x_{n_i}, z_{n_i})} = \frac{|f_{n_i}(x_{n_i})|}{d(x_{n_i}, z_{n_i})} = \frac{|f_{n_i}(x_{n_i}) - f_{n_i}(z_{n_i})|}{d(x_{n_i}, z_{n_i})} > n_i$$

   para cada $i \in \mathbb{N}$, lo cual es imposible puesto que $\|f\| \in \mathrm{Lip}(X)$. Así, $\left\{n \in \mathbb{N} : z_n \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{coz}(f_n)\right\}$ es finito.

4. Recopilando la información obtenida en los tres apartados anteriores, nos queda por analizar el siguiente caso. Supongamos que $\mathfrak{F}$ es un subconjunto de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ en el que existen infinitos $n\in\mathbb{N}$ distintos que son la primera coordenada de un elemento de $\mathfrak{F}$ y además $(n,m)\in\mathfrak{F}$ para algún $m>n$. Como consecuencia, es posible tomar una sucesión $((n_i,m_i))$ en $\mathfrak{F}$ que satisface
$$n_1<m_1<n_2<m_2<\dots$$
Tomemos entonces una subsucesión (z_{n_i}) de (z_n) tal que $z_{n_i}\in\operatorname{coz}(f_{m_i})$ para todo $i\in\mathbb{N}$. Recordemos además que $x_{n_i}\in\operatorname{coz}(f_{n_i})$ para cada $i\in\mathbb{N}$. Por tanto, observando (2.18),
$$\begin{aligned}\frac{|\|f\|(x_{n_i})-\|f\|(z_{n_i})|}{d(x_{n_i},z_{n_i})} &= \frac{|f_{n_i}(x_{n_i})|}{d(x_{n_i},z_{n_i})}+\frac{|f_{m_i}(z_{n_i})|}{d(x_{n_i},z_{n_i})}\\ &= \frac{|f_{n_i}(x_{n_i})-f_{n_i}(z_{n_i})|}{d(x_{n_i},z_{n_i})}+\frac{|f_{m_i}(z_{n_i})|}{d(x_{n_i},z_{n_i})}>n_i\end{aligned}$$
para todo $i\in\mathbb{N}$, lo que contradice que $\|f\|\in\operatorname{Lip}(X)$.

Una vez analizados todos los casos posibles, queda probada la existencia de una constante positiva C tal que $L(f_n)\le C$ para todo $n\in\mathbb{N}$, lo que implica que f_0 pertenece a Lip(X,E). Ahora, debido a la caracterización de la aplicación biseparadora T obtenida en el Teorema 2.6.9, se tiene que
$$Tf_0=\sum_{n=1}^{\infty}T(f_n\cdot\tilde{\mathrm{e}}_n),$$
por lo que Tf_0 está definida como una suma infinita de funciones de cozeros disjuntos puesto que T es una aplicación biseparadora.

Por otro lado, sabemos que, para cada $n\in\mathbb{N}$, $y_n\in\operatorname{coz}(\xi_n)=\operatorname{coz}(\xi_n\cdot\tilde{\mathrm{f}})$. Por tanto, según el Lema 2.6.2, podemos concluir que
$$h(y_n)\in cl(\operatorname{coz}(T^{-1}(\xi_n\cdot\tilde{\mathrm{f}}))).$$
Ahora, teniendo en cuenta la representación de T^{-1} obtenida en el Corolario 2.6.11, que $\xi_n(y_n)=r_n>0$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y que $\mathrm{f}\neq 0$, observamos que
$$T^{-1}(\xi_n\cdot\tilde{\mathrm{f}})(h(y_n))=(Kh(y_n))(\xi_n(y_n)\mathrm{f})\neq 0,$$

por lo que, de hecho, $h(y_n) \in \text{coz}(T^{-1}(\xi_n \cdot \tilde{\text{f}}))$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por definición de cada f_n, $\text{coz}(T^{-1}(\xi_n \cdot \tilde{\text{f}})) = \text{coz}(f_n)$, luego $h(y_n) \in \text{coz}(f_n)$. Además, en el Corolario 2.7.2, hemos probado la existencia de una constante $M > 0$ tal que

$$\|(Kh(y_n))(\text{f})\| = \left\|T^{-1}\tilde{\text{f}}(h(y_n))\right\| > M$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que nos permite deducir, junto con la definición de cada función ξ_n, que

$$\begin{aligned} f_n(h(y_n)) &= \left\|T^{-1}\left(\xi_n \cdot \tilde{\text{f}}\right)(h(y_n))\right\| \\ &= \|(Kh(y_n))(\xi_n(y_n)\text{f})\| \\ &= \xi_n(y_n)\,\|(Kh(y_n))(\text{f})\| \\ &> Mr_n \end{aligned} \tag{2.19}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. A continuación, aplicando de nuevo el Lema 2.6.2 asociado a la aplicación biseparadora T^{-1}, puesto que $h(y_n) \in \text{coz}(f_n) = \text{coz}(f_n \cdot \tilde{\text{e}}_n)$, se obtiene que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$k(h(y_n)) = y_n \in cl(\text{coz}(T(f_n \cdot \tilde{\text{e}}_n))).$$

Si tenemos en cuenta ahora la representación de T obtenida en el Teorema 2.6.9, que $f_n(h(y_n)) \neq 0$ y que $\text{e}_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos deducir que

$$T(f_n \cdot \tilde{\text{e}}_n)(y_n) = (Jy_n)(f_n(h(y_n))\text{e}_n) \neq 0,$$

por lo que $y_n \in \text{coz}(T(f_n \cdot \tilde{\text{e}}_n))$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, aplicando las desigualdades (2.12) y (2.19), obtenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\|Tf_0(y_n)\| = \|T(f_n \cdot \tilde{\text{e}}_n)(y_n)\| = f_n(h(y_n))\,\|(Jy_n)(\text{e}_n)\| > Mr_nn^2. \tag{2.20}$$

Para finalizar, si analizamos el caso en que la sucesión (y_n) converge a un punto $y_0 \in Y$, en virtud del Lema 2.2.2(i), sabemos que la sucesión (r_n) considerada al inicio de esta demostración satisface

$$4r_n = d(y_n, y_0)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, teniendo en cuenta (2.20) y fijado $n \in \mathbb{N}$, obtenemos que

$$\frac{\|Tf_0\,(y_n) - Tf_0(y_0)\|}{d(y_n, y_0)} = \frac{\|Tf_0\,(y_n)\,\|}{4r_n} > \frac{Mr_nn^2}{4r_n} = \frac{Mn^2}{4},$$

lo que nos permite concluir que $L(Tf_0) > Mn^2/4$ para todo $n \in \mathbb{N}$, llegando a una contradicción puesto que Tf_0 es una función de Lipschitz.
En el caso en que (y_n) no posea ninguna subsucesión de Cauchy, puesto que la sucesión (r_n) considerada es constante (véase Lema 2.2.2(ii)), atendiendo a la desigualdad (2.20), podemos deducir que Tf_0 es una función no acotada, lo cual es absurdo.

Por este motivo, podemos afirmar que el conjunto $\{\|Jy\| : y \in Y \setminus Y_d\}$ está acotado. De esta manera, Y_d ha de ser un conjunto finito formado por puntos aislados de Y. □

Corolario 2.7.5 $d(h(Y_d), X \setminus h(Y_d)) > 0$.

Demostración. Si tenemos en cuenta que h es un homeomorfismo, la Proposición 2.7.4 nos permite deducir que $h(Y_d)$ es un conjunto finito de puntos aislados en X. Por tanto, como cada punto $x \in h(Y_d)$ es aislado en X, se tiene que

$$d(x, X \setminus h(Y_d)) > 0.$$

Finalmente, puesto que $h(Y_d)$ es un conjunto finito, se puede concluir que

$$d(h(Y_d), X \setminus h(Y_d)) = \text{mín}\,\{d(x, X \setminus h(Y_d)) : x \in h(Y_d)\} > 0.$$

□

Observación 2.7.6 *Resulta trivial comprobar que, dada $f \in \mathrm{Lip}(X, E)$, su restricción a $X \setminus h(Y_d)$ continúa siendo una función de Lipschitz acotada, que denotaremos por f_d. Por otro lado, se tiene que el recíproco también es cierto. Esto es, dada una función de $\mathrm{Lip}(X \setminus h(Y_d), E)$, es posible obtener una función de $\mathrm{Lip}(X, E)$ que sea una extensión de la anterior. Precisamente, esto es lo que probaremos en el siguiente lema.*

Lema 2.7.7 *Sea $f \in \mathrm{Lip}(X \setminus h(Y_d), E)$. Entonces, la función*

$$f^d(x) := \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in X \setminus h(Y_d) \\ 0 & \text{if } x \in h(Y_d) \end{cases}$$

pertenece a $\mathrm{Lip}(X, E)$.

Demostración. Puesto que $h(Y_d)$ es un conjunto finito de puntos aislados en X, es inmediato deducir que f^d es una función continua. Veamos ahora que se trata de una función de Lipschitz. Para ello, probemos que $L\left(f^d\right) < \infty$. Por un lado, si tomamos $x_1, x_2 \in h(Y_d)$, $x_1 \neq x_2$, por definición tenemos que

$$\frac{\|f^d(x_1) - f^d(x_2)\|}{d(x_1, x_2)} = 0.$$

Por otro lado, sean $x_1, x_2 \in X \setminus h(Y_d)$, $x_1 \neq x_2$. Entonces

$$\frac{\|f^d(x_1) - f^d(x_2)\|}{d(x_1, x_2)} = \frac{\|f(x_1) - f(x_2)\|}{d(x_1, x_2)} \leq L(f).$$

Finalmente, si consideramos $x_1 \in h(Y_d)$ y $x_2 \in X \setminus h(Y_d)$, se tiene que

$$\frac{\|f^d(x_1) - f^d(x_2)\|}{d(x_1, x_2)} \leq \frac{\|f(x_2)\|}{d(h(Y_d), X \setminus h(Y_d))} \leq \frac{\|f\|_\infty}{d(h(Y_d), X \setminus h(Y_d))},$$

expresión que está bien definida si tenemos en cuenta el Corolario 2.7.5. Por tanto, podemos concluir que $f^d \in \mathrm{Lip}(X, E)$ puesto que

$$L(f^d) \leq \max\left\{L(f), \frac{\|f\|_\infty}{d(h(Y_d), X \setminus h(Y_d))}\right\} < \infty. \tag{2.21}$$

$\square$

El análisis previo del conjunto de puntos y en Y para los cuales la aplicación Jy no es continua, nos permite definir una aplicación biseparadora y continua asociada a T.

Definición 2.7.8 *Sean $T : \mathrm{Lip}(X, E) \to \mathrm{Lip}(Y, F)$ una aplicación biseparadora, $h : Y \to X$ el homeomorfismo asociado a T y $J : Y \to L'(E, F)$ la aplicación considerada en el Teorema 2.6.9. Entonces, definimos la aplicación $T_d : \mathrm{Lip}(X \setminus h(Y_d), E) \to \mathrm{Lip}(Y \setminus Y_d, F)$ como*

$$T_d f(y) := (Jy)(f(h(y)))$$

para cada $f \in \mathrm{Lip}(X \setminus h(Y_d), E)$ e $y \in Y \setminus Y_d$.

Proposición 2.7.9 *T_d es una aplicación biseparadora.*

Demostración. Para probar que T_d es una aplicación biseparadora, será suficiente ver que, puesto que T es una aplicación biseparadora, para toda $f \in \mathrm{Lip}(X \setminus h(Y_d), E)$ e $y \in Y \setminus Y_d$,

$$T_d f(y) = \left(Tf^d\right)_d(y).$$

Tomemos $f \in \mathrm{Lip}(X \setminus h(Y_d), E)$ e $y \in Y \setminus Y_d$. Si consideramos la extensión de f a X dada en el Lema 2.7.7, tenemos que

$$Tf^d(y) = (Jy)(f^d(h(y)))$$

por la representación de la aplicación T obtenida en el Teorema 2.6.9. Además, como $y \in Y \setminus Y_d$, se tiene que $h(y) \in X \setminus h(Y_d)$, y, de nuevo, por la definición de f^d dada en el Lema 2.7.7,

$$f^d(h(y)) = f(h(y)).$$

Por tanto, tomando la restricción de la función Tf^d a $Y \setminus Y_d$ (véase la Observación 2.7.6), tenemos que

$$(Tf^d)_d(y) = (Jy)(f(h(y))) = T_d f(y),$$

con lo que el resultado queda probado. $\square$

Teorema 2.7.10 *T_d es una aplicación continua.*

Demostración. Para probar que T_d es continua, aplicaremos el Teorema del Grafo Cerrado. Por lo tanto, debemos ver que, dada una sucesión (f_n) en $\mathrm{Lip}(X \setminus h(Y_d), E)$ que converge a 0 tal que $(T_d f_n)$ converge a una cierta función $g \in \mathrm{Lip}(Y \setminus Y_d, F)$, se tiene que $g \equiv 0$.

Si consideramos, para todo $n \in \mathbb{N}$, la extensión f_n^d de cada función f_n dada en el Lema 2.7.7 y aplicamos la desigualdad (2.21), se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\|f_n^d\right\|_L &= \max\left\{\left\|f_n^d\right\|_\infty, L(f_n^d)\right\} \\
&\leq \max\left\{\|f_n\|_\infty, \max\left\{L(f_n), \frac{\|f_n\|_\infty}{d(h(Y_d), X \setminus h(Y_d))}\right\}\right\} \\
&\leq \|f_n\|_L \max\left\{1, 1/d(h(Y_d), X \setminus h(Y_d))\right\}.
\end{aligned}$$

Por tanto, como estamos asumiendo que (f_n) converge a 0, esto nos permite deducir que (f_n^d) también converge a 0. Si fijamos ahora $y \in Y \setminus Y_d$, por definición de Y_d, sabemos que Jy es continua y, por tanto, la sucesión

$$\left((Jy)\left(f_n^d(h(y))\right)\right) = (Tf_n^d(y))$$

converge a 0. Ahora bien, en la prueba de la proposición anterior, hemos visto que

$$Tf_n^d(y) = T_d f_n(y),$$

por lo que $(T_d f_n(y))$ converge a 0.

Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, sabemos que

$$\|T_d f_n(y) - g(y)\| \leq \|T_d f_n - g\|_\infty \leq \|T_d f_n - g\|_L .$$

Así, como por hipótesis tenemos que $(T_d f_n)$ converge a g, podemos concluir que $(T_d f_n(y))$ converge a $g(y)$.

Combinando los dos razonamientos previos, tenemos que $g(y) = 0$ para todo $y \in Y \setminus Y_d$. □

Los dos próximos corolarios resultan inmediatos si tenemos en cuenta la definición de la aplicación T_d y sus propiedades.

Corolario 2.7.11 *Si Y no tiene puntos aislados, entonces T es continua.*

Demostración. Puesto que Y no contiene puntos aislados, se tiene que $Y_d = \emptyset$, y por tanto $T \equiv T_d$. Entonces, por el Teorema 2.7.10, se deduce que T es continua. □

Corolario 2.7.12 *Si E tiene dimensión finita, entonces F tiene la misma dimensión que E y además T es continua.*

Demostración. En el Lema 2.6.8 hemos visto que, para cada $y \in Y$, $Jy : E \to F$ es lineal y biyectiva. Por tanto, si E tiene dimensión finita, resulta trivial deducir que F tiene la misma dimensión que E y que Jy es continua para todo $y \in Y$. De esta manera, $Y_d = \emptyset$ y entonces $T \equiv T_d$, por lo que T es continua. □

Por tanto, acabamos de comprobar que, bajo ciertas condiciones, es posible deducir la continuidad de las aplicaciones biseparadoras definidas entre espacios de funciones de Lipschitz. Pues bien, en el caso en que asumamos que la aplicación biseparadora es además continua, una nueva caracterización de las mismas se puede obtener. A diferencia del resto de la sección, como en esta ocasión la aplicación es continua, no es necesario suponer que E y F sean espacios normados completos.

Teorema 2.7.13 *Sean X e Y espacios métricos completos, E y F espacios normados y $T : \mathrm{Lip}(X, E) \to \mathrm{Lip}(Y, F)$ una aplicación biseparadora y continua. Entonces existen un homeomorfismo $h : Y \to X$ y una aplicación de Lipschitz $J : Y \to L(E, F)$ tales que*

$$Tf(y) = (Jy)(f(h(y)))$$

para toda $f \in \mathrm{Lip}(X, E)$ e $y \in Y$.

Demostración. Teniendo en cuenta la representación de las aplicaciones biseparadoras dada en el Teorema 2.6.9, bastará probar que Jy es continua para todo $y \in Y$ y que además J satisface la condición de Lipschitz.

Fijemos $y_0 \in Y$ y consideremos Jy_0. Entonces, como estamos suponiendo que T es continua, tenemos que

$$\|(Jy_0)(\mathrm{e})\| = \|T\tilde{\mathrm{e}}(y_0)\| \leq \|T\tilde{\mathrm{e}}\|_\infty \leq \|T\tilde{\mathrm{e}}\|_L \leq \|T\| \, \|\tilde{\mathrm{e}}\|_L = \|T\| \, \|\mathrm{e}\|$$

para todo $\mathrm{e} \in E$, con lo que $\|Jy_0\| \leq \|T\|$. Así, podemos asegurar que Jy_0 es continua. Como este proceso se puede realizar para cualquier punto y en Y, deducimos que cada aplicación Jy pertenece a $L(E, F)$.

Finalmente, veamos que J es una aplicación de Lipschitz. Para ello, dados $y_1, y_2 \in Y$, si tomamos cualquier $\mathrm{e} \in E$, es sencillo comprobar que

$$\|(Jy_1 - Jy_2)(\mathrm{e})\| = \|T\tilde{\mathrm{e}}(y_1) - T\tilde{\mathrm{e}}(y_2)\| \leq \|T\tilde{\mathrm{e}}\|_L \, d(y_1, y_2) \leq \|T\| \, \|\mathrm{e}\| \, d(y_1, y_2),$$

con lo que

$$\|Jy_1 - Jy_2\| \leq \|T\| \, d(y_1, y_2),$$

quedando así probado que J es de Lipschitz. □

Para ir finalizando esta sección, veremos que la función soporte h, además de un homeomorfismo, es una función bi-Lipschitz en el caso en que los espacios métricos X e Y sean acotados. Al igual que en el teorema anterior, para el siguiente resultado tampoco es necesario que E y F sean completos.

Proposición 2.7.14 *Sean X e Y espacios métricos completos y acotados, E y F espacios normados y $T : \mathrm{Lip}(X, E) \to \mathrm{Lip}(Y, F)$ una aplicación biseparadora. Entonces $h : Y \to X$ es bi-Lipschitz.*

Demostración. Para ver que h es bi-Lipschitz, debemos probar que tanto ella como su inversa son funciones de Lipschitz. Será suficiente probar que h lo es, puesto que su inversa h^{-1}, que coincide con k (véase la demostración del Teorema 2.5.15), es la función soporte asociada a la aplicación T^{-1}, que a su vez es también biseparadora.

Definamos la aplicación $T_0 : \mathrm{Lip}(X) \to \mathrm{Lip}(Y)$ dada por

$$T_0 f(y) := f(h(y))$$

para cada $f \in \mathrm{Lip}(X)$ e $y \in Y$. Es sencillo observar que, dada $f \in \mathrm{Lip}(X)$, por ser h un homeomorfismo, su imagen $T_0 f$ es una función continua y acotada en Y. Veamos que se trata de una función de Lipschitz. Puesto que para cada $f \in \mathrm{Lip}(X)$, existen $f_r, f_c \in \mathrm{Lip}(X, \mathbb{R})$ tales que

$$f = f_r + i f_c,$$

y a su vez podemos considerar $f_r^+, f_r^-, f_c^+, f_c^- \in \mathrm{Lip}(X, \mathbb{R})$, todas ellas positivas, de manera que

$$f = (f_r^+ - f_r^-) + i(f_c^+ - f_c^-),$$

será suficiente probar que $T_0 f$ es de Lipschitz para cualquier $f \in \mathrm{Lip}(X, \mathbb{R})$ con $f \geq 0$. Si tomamos $\mathrm{e} \neq 0$ en E, sabemos que, aplicando el Lema 2.7.1, existe $M > 0$ tal que

$$\|(Jy)(\mathrm{e})\| = \|T\tilde{\mathrm{e}}(y)\| \geq M$$

para todo $y \in Y$. Por este motivo, podemos definir la función g como

$$\begin{array}{rccl} g: & Y & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & g(y) := 1/\left\|T\tilde{\mathrm{e}}(y)\right\|. \end{array}$$

En primer lugar, sabemos que $\|T\tilde{\mathrm{e}}\| \in \mathrm{Lip}(Y)$ puesto que $T\tilde{\mathrm{e}} \in \mathrm{Lip}(Y, F)$ (véase el Lema 2.4.1). Además, $\|T\tilde{\mathrm{e}}(y)\| \geq M > 0$ para todo $y \in Y$, lo que nos permite deducir que g pertenece a $\mathrm{Lip}(Y)$ aplicando [74, Proposición 1.5.3(b)].

Por otro lado, como estamos asumiendo que $f \in \mathrm{Lip}(X, \mathbb{R})$ y que además es positiva, si definimos $l := T_0 f \cdot \|T\tilde{\mathrm{e}}\|$ y tomamos $y_1, y_2 \in Y$, podemos comprobar que

$$\begin{aligned}
|l(y_1)-l(y_2)| &= |T_0f(y_1)\,\|T\tilde{\mathrm{e}}(y_1)\| - T_0f(y_2)\,\|T\tilde{\mathrm{e}}(y_2)\||\\
&= |f(h(y_1))\,\|(Jy_1)\,(\mathrm{e})\| - f(h(y_2))\,\|(Jy_2)\,(\mathrm{e})\||\\
&= |\|(Jy_1)\,(f(h(y_1))\mathrm{e})\| - \|(Jy_2)\,(f(h(y_2))\mathrm{e})\||\\
&\leq \|(Jy_1)(f(h(y_1))\mathrm{e}) - (Jy_2)(f(h(y_2))\mathrm{e})\|\\
&= \|T(f\cdot\tilde{\mathrm{e}})(y_1) - T(f\cdot\tilde{\mathrm{e}})(y_2)\|\\
&\leq L(T(f\cdot\tilde{\mathrm{e}}))d(y_1,y_2)
\end{aligned}$$

puesto que $T(f\cdot\tilde{\mathrm{e}})\in\mathrm{Lip}(Y,F)$. Por tanto, la función l pertenece a $\mathrm{Lip}(Y)$. Finalmente, tenemos que

$$g\cdot l = (1/\,\|T\tilde{\mathrm{e}}\|)\cdot T_0f\cdot\|T\tilde{\mathrm{e}}\| = T_0f,$$

y, como consecuencia del Lema 2.4.2, concluimos que T_0f pertenece a $\mathrm{Lip}(Y)$. Un proceso análogo se puede realizar para $T_0^{-1}:\mathrm{Lip}(Y)\to\mathrm{Lip}(X)$ dada por

$$T_0^{-1}g(x) = g(k(x))$$

para cada $g\in\mathrm{Lip}(Y)$ y $x\in X$, lo que nos permite deducir que T_0 es una aplicación biyectiva y biseparadora (inmediato por construcción). Además, por ser T_0 biseparadora, aplicando el Corolario 2.7.12, podemos asegurar que T_0 es continua.

Veamos finalmente que h es Lipschitz. Sean $y_1,y_2\in Y$, $y_1\neq y_2$, y definamos

$$f_1(x) := d(h(y_1),x)$$

para todo $x\in X$. Puesto que estamos asumiendo que X es un espacio métrico acotado, se tiene que f_1 es una función de Lipschitz acotada y que además satisface

$$\|f_1\|_L = \max\{\|f_1\|_\infty, L(f_1)\} \leq \max\{\mathrm{diam}(X),1\}.$$

Ahora, si definimos $K:=\max\{\mathrm{diam}(X),1\}$ y tenemos en cuenta que T_0 es una aplicación continua, podemos observar que

$$\frac{\|T_0f_1(y_1)-T_0f_1(y_2)\|}{d(y_1,y_2)} \leq L(T_0f_1) \leq \|T_0f_1\|_L \leq \|T_0\|\|f_1\|_L \leq K\|T_0\|.$$

Por otro lado, atendiendo a las definiciones de T_0 y f_1, tenemos que

$$T_0f_1(y_1) = f_1(h(y_1)) = 0$$

y

$$T_0 f_1(y_2) = f_1(h(y_2)) = d(h(y_1), h(y_2)),$$

por lo que sustituyendo en la expresión anterior, obtenemos que

$$d(h(y_1), h(y_2)) \leq K \|T_0\| d(y_1, y_2),$$

lo que nos permite concluir que h es una función de Lipschitz. □

Para finalizar, es fácil ver que, uniendo el Teorema 2.6.9 y la Proposición 2.7.14, se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 2.7.15 *Sean X e Y espacios métricos completos y acotados, E y F espacios normados y $T : \mathrm{Lip}(X, E) \to \mathrm{Lip}(Y, F)$ una aplicación biseparadora. Entonces existen un homeomorfismo bi-Lipschitz $h : Y \to X$ y una aplicación $J : Y \to L'(E, F)$ tales que*

$$Tf(y) = (Jy)(f(h(y)))$$

para toda $f \in \mathrm{Lip}(X, E)$ e $y \in Y$.

2.8. Caso escalar

La última sección de este capítulo está dedicada al estudio de las aplicaciones biyectivas y separadoras entre los espacios de funciones $\mathrm{Lip}(X)$ y $\mathrm{Lip}(Y)$ cuando X e Y son espacios métricos completos. A diferencia de las secciones anteriores, en esta ocasión no asumiremos que T tiene inversa separadora y trabajaremos con funciones de Lipschitz que toman valores escalares (de ahí el nombre que recibe la sección).

Por tanto, el objetivo propuesto para esta sección consiste en analizar las condiciones bajo las cuales podemos obtener una completa descripción de las aplicaciones $T : \mathrm{Lip}(X) \to \mathrm{Lip}(Y)$ biyectivas y separadoras, además de obtener resultados relativos a su continuidad.

Empezaremos, sin embargo, con un resultado relativo a la caracterización de las aplicaciones biseparadoras definidas entre los espacios de funciones $\mathrm{Lip}(X)$ y $\mathrm{Lip}(Y)$ que se deduce fácilmente utilizando algunos resultados obtenidos en las secciones previas.

Teorema 2.8.1 *Sean X e Y espacios métricos completos y supongamos que $T : \mathrm{Lip}(X) \to \mathrm{Lip}(Y)$ es una aplicación biseparadora. Entonces existen un homeomorfismo $h : Y \to X$ y una función $\tau \in \mathrm{Lip}(Y)$ con $\tau(y) \neq 0$ para todo $y \in Y$ tales que*

$$Tf(y) = \tau(y)f(h(y))$$

para toda $f \in \mathrm{Lip}(X)$ e $y \in Y$. Además, T es continua.

Demostración. Aplicando el Teorema 2.6.9, como $E = F = \mathbb{K}$, podemos deducir la existencia de un homeomorfismo $h : Y \to X$ y una aplicación

$$\begin{array}{rccc} J: & Y & \to & L(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \\ & y & \mapsto & Jy \end{array}$$

tales que, para toda $f \in \mathrm{Lip}(X)$ e $y \in Y$, se tiene que $Tf(y) = (Jy)(f(h(y)))$. Esto implica que, para cada $y \in Y$, existe un escalar $\tau(y)$ con

$$Tf(y) = \tau(y)f(h(y))$$

para toda $f \in \mathrm{Lip}(X)$. En particular, como $\mathbf{1}_X \in \mathrm{Lip}(X)$, se tiene que

$$T\mathbf{1}_X(y) = \tau(y)\mathbf{1}_X(h(y)) = \tau(y)$$

para todo $y \in Y$, lo que nos permite concluir que $\tau \equiv T\mathbf{1}_X \in \mathrm{Lip}(Y)$. Además, $\tau(y) \neq 0$ para todo $y \in Y$ puesto que cada aplicación Jy es biyectiva. Por último, la continuidad de la aplicación biseparadora T se deduce directamente del Corolario 2.7.12. $\square$

Por otro lado, puesto que todo isomorfismo de álgebras es una aplicación biseparadora, podemos enunciar un resultado análogo para este tipo de aplicaciones.

Corolario 2.8.2 *Sean X e Y espacios métricos completos y supongamos que $I : \mathrm{Lip}(X) \to \mathrm{Lip}(Y)$ es un isomorfismo de álgebras. Entonces existe un homeomorfismo $h : Y \to X$ tal que*

$$If(y) = f(h(y))$$

para toda $f \in \mathrm{Lip}(X)$ e $y \in Y$. Además, I es continuo.

El siguiente teorema proporciona una condición suficiente que nos permite afirmar que toda aplicación biyectiva y separadora $T : \mathrm{Lip}(X) \to \mathrm{Lip}(Y)$ tiene inversa separadora. Así, junto con los resultados vistos anteriormente, podemos obtener una completa caracterización de dichas aplicaciones.

Teorema 2.8.3 *Sean X e Y espacios métricos completos y supongamos que $T : \mathrm{Lip}(X) \to \mathrm{Lip}(Y)$ es una aplicación biyectiva y separadora. Entonces, si Y es compacto, T es biseparadora.*

Demostración. Veamos que T^{-1} es separadora. Para ello, tomemos dos funciones cualesquiera $f, g \in \mathrm{Lip}(X)$ con $\mathrm{coz}(f) \cap \mathrm{coz}(g) \neq \emptyset$. Debemos probar que $\mathrm{coz}(Tf) \cap \mathrm{coz}(Tg) \neq \emptyset$.

Puesto que $\mathrm{coz}(f) \cap \mathrm{coz}(g) \neq \emptyset$, existe $x_0 \in X$ que satisface que $f(x_0) \neq 0$ y $g(x_0) \neq 0$. Por otro lado, por ser T suprayectiva, existe $\phi \in \mathrm{Lip}(X)$ tal que

$$T\phi \equiv \mathbf{1}_Y.$$

Por tanto, podemos tomar $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tales que

$$(\alpha f + \phi)(x_0) = 0$$

y

$$(\beta g + \phi)(x_0) = 0.$$

En el caso en que x_0 sea un punto aislado de X, deducimos que la función $\chi_{\{x_0\}}$ pertenece a $\mathrm{Lip}(X)$. Además, es inmediato observar que

$$\mathrm{coz}(\alpha f + \phi) \cap \mathrm{coz}(\chi_{\{x_0\}}) = \emptyset$$

y

$$\mathrm{coz}(\beta g + \phi) \cap \mathrm{coz}(\chi_{\{x_0\}}) = \emptyset,$$

y como T es una aplicación separadora,

$$\mathrm{coz}(T(\alpha f + \phi)) \cap \mathrm{coz}(T\chi_{\{x_0\}}) = \emptyset$$

y

$$\mathrm{coz}(T(\beta g + \phi)) \cap \mathrm{coz}(T\chi_{\{x_0\}}) = \emptyset.$$

Ahora, puesto que T es inyectiva, existe $y_0 \in \mathrm{coz}(T\chi_{\{x_0\}})$, y, por lo anterior, $T(\alpha f + \phi)(y_0) = 0$ y $T(\beta g + \phi)(y_0) = 0$, o lo que es lo mismo,

$$\alpha Tf(y_0) + 1 = 0$$

y

$$\beta Tg(y_0) + 1 = 0.$$

Esto nos permite concluir que $y_0 \in \mathrm{coz}(Tf) \cap \mathrm{coz}(Tg)$, con lo que T^{-1} es una aplicación separadora siempre que x_0 sea un punto aislado de X.

Como consecuencia, a partir de este momento, vamos a suponer que x_0 no es un punto aislado de X. En primer lugar, tomemos, de manera análoga a la demostración de la Proposición 2.6.4, una sucesión (r_n) de números reales positivos que converge a 0 y satisface

$$2r_{n+1} < r_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, definamos

$$B_n := B(x_0, r_n), \; B_n^2 := B(x_0, 2r_n),$$

y

$$\varphi_n := \varphi_{x_0, r_n} \text{ (véase (2.2))}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Por último, para simplificar la notación, escribamos

$$l := \alpha f + \phi.$$

Ahora, puesto que x_0 no es un punto aislado en X, $\cap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{x_0\}$ y $\mathrm{coz}(\varphi_n - \varphi_{n+1}) \subset B_n^2 \setminus B_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos asumir, tomando una subsucesión si es necesario, que $\mathrm{coz}(\varphi_n - \varphi_{n+1}) \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, por ser T una aplicación inyectiva, vamos a considerar

$$y_n \in \mathrm{coz}(T(\varphi_n - \varphi_{n+1}))$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la compacidad de Y, el conjunto $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene un punto de acumulación y_0 en Y, y lo que veremos es que $Tl(y_0) = 0$.

Para ello, empezaremos tomando una subsucesión (y_{n_i}) de (y_n) que converge a y_0 cuyos índices satisfagan

$$|n_i - n_j| \geq 3 \tag{2.22}$$

siempre que $i \neq j$. En segundo lugar, definamos

$$l_1 := \sum_{k=1}^{\infty} l \cdot (\varphi_{n_{2k}-1} - \varphi_{n_{2k}+2})$$

y

$$l_2 := l - l_1,$$

por lo que será suficiente probar que $Tl_1(y_0) = 0 = Tl_2(y_0)$ para ver que $Tl(y_0) = 0$. De nuevo, para tratar de simplificar la notación, en lo que resta de demostración denotaremos, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\xi_k := \varphi_{n_{2k}-1} - \varphi_{n_{2k}+2}.$$

Lo primero que debemos comprobar es que tanto l_1 como l_2 son funciones de Lipschitz. Para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\mathrm{coz}(\xi_k) \subset B^2_{n_{2k}-1} \setminus B_{n_{2k}+2} \tag{2.23}$$

por definición de ξ_k. Ahora, siguiendo un razonamiento análogo al del Lema 2.6.3 y teniendo en cuenta (2.22), podemos deducir que

$$\left[B^2_{n_{2i}-1} \setminus B_{n_{2i}+2}\right] \cap \left[B^2_{n_{2j}-1} \setminus B_{n_{2j}+2}\right] = \emptyset$$

siempre que $i, j \in \mathbb{N}$ con $i \neq j$. Por este motivo, se tiene que

$$\mathrm{coz}(\xi_i) \cap \mathrm{coz}(\xi_j) = \emptyset$$

siempre que $i \neq j$. Por tanto, l_1 se define como una suma infinita de funciones cuyos cozeros son disjuntos. Además, puesto que

$$\cap_{n=1}^{\infty} B_n = \{x_0\},$$

para probar que l_1 es una función continua, es suficiente ver que lo es en el punto x_0. Como sabemos que $l(x_0) = 0$, se tiene que $l_1(x_0) = 0$. Además, teniendo en cuenta que l es continua y que $|l_1(x)| \leq |l(x)|$ para todo $x \in X$, podemos concluir que, en efecto, l_1 es continua. Por otro lado, como ya vimos en el Lema 2.4.5, sabemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$L(l \cdot \varphi_n) \leq 3L(l),$$

y como consecuencia

$$L(l \cdot \xi_k) \leq L(l \cdot \varphi_{n_{2k}-1}) + L(l \cdot \varphi_{n_{2k}+2}) \leq 6L(l)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Por tanto, podemos afirmar, aplicando el Lema 2.4.6, que $l_1 \in \mathrm{Lip}(X)$, y, por consiguiente, que l_2 también pertenece a $\mathrm{Lip}(X)$.

Fijemos ahora $k_0 \in \mathbb{N}$. Por un lado, se tiene que

$$\mathrm{coz}(\varphi_{n_{2k_0-1}} - \varphi_{n_{2k_0-1}+1}) \subset B^2_{n_{2k_0-1}} \backslash B_{n_{2k_0-1}+1},$$

mientras que, por otro lado, como vimos en (2.23), para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{coz}(\xi_k) \subset B^2_{n_{2k}-1} \backslash B_{n_{2k}+2}.$$

Por tanto, teniendo en cuenta la desigualdad (2.22), se puede comprobar que

$$\left[B^2_{n_{2k_0-1}} \backslash B_{n_{2k_0-1}+1}\right] \cap \left[B^2_{n_{2k}-1} \backslash B_{n_{2k}+2}\right] = \emptyset,$$

y, por consiguiente, que

$$\mathrm{coz}(\varphi_{n_{2k_0-1}} - \varphi_{n_{2k_0-1}+1}) \cap \mathrm{coz}(\xi_k) = \emptyset$$

para todo $k \in \mathbb{K}$. Entonces

$$\mathrm{coz}\left(\varphi_{n_{2k_0-1}} - \varphi_{n_{2k_0-1}+1}\right) \bigcap \mathrm{coz}\left(\sum_{k=1}^{\infty} l \cdot \xi_k\right) = \emptyset,$$

y por ser T una aplicación separadora, se tiene que

$$\mathrm{coz}\left(T(\varphi_{n_{2k_0-1}} - \varphi_{n_{2k_0-1}+1})\right) \bigcap \mathrm{coz}\left(T\left(\sum_{k=1}^{\infty} l \cdot \xi_k\right)\right) = \emptyset.$$

Ahora bien, por definición de $y_{n_{2k_0-1}}$, se tiene que

$$y_{n_{2k_0-1}} \in \mathrm{coz}(T(\varphi_{n_{2k_0-1}} - \varphi_{n_{2k_0-1}+1})),$$

lo que nos permite concluir que

$$Tl_1(y_{n_{2k_0-1}}) = T\left(\sum_{k=1}^{\infty} l \cdot \xi_k\right)(y_{n_{2k_0-1}}) = 0.$$

Finalmente, como esto es cierto para cualquier $k_0 \in \mathbb{N}$ y Tl_1 es continua, deducimos que $Tl_1(y_0) = 0$.

Por otro lado, si fijamos $k \in \mathbb{N}$ y consideramos

$$x \in \mathrm{coz}(\varphi_{n_{2k}} - \varphi_{n_{2k}+1}) \subset B^2_{n_{2k}} \setminus B_{n_{2k}+1},$$

se puede comprobar que

$$x \in B_{n_{2k}-1} \setminus B^2_{n_{2k}+2}.$$

Ahora, por construcción de ξ_k, sabemos que

$$\xi_k \equiv 1 \text{ en } B_{n_{2k}-1} \setminus B^2_{n_{2k}+2},$$

y por tanto

$$\xi_k(x) = 1.$$

Además, por definición de l_1 y l_2, se tiene que

$$l_2 = l - l_1 = l - \sum_{k=1}^{\infty} l \cdot \xi_k = l \cdot \left(\mathbf{1}_X - \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \right), \tag{2.24}$$

donde $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ es la suma puntual de funciones con cozeros disjuntos. Por tanto, como acabamos de ver que $\xi_k(x) = 1$ siempre que x pertenece a $\text{coz}(\varphi_{n_{2k}} - \varphi_{n_{2k}+1})$, esto implica, junto con (2.24), que $l_2(x) = 0$ para todo $x \in \text{coz}(\varphi_{n_{2k}} - \varphi_{n_{2k}+1})$. En consecuencia,

$$\text{coz}(\varphi_{n_{2k}} - \varphi_{n_{2k}+1}) \cap \text{coz}(l_2) = \emptyset.$$

Finalmente, por ser T separadora,

$$\text{coz}(T(\varphi_{n_{2k}} - \varphi_{n_{2k}+1})) \cap \text{coz}(Tl_2) = \emptyset,$$

y por definición del punto $y_{n_{2k}}$, tenemos que

$$Tl_2(y_{n_{2k}}) = 0.$$

Por último, como este razonamiento se puede aplicar para todo $k \in \mathbb{N}$, la continuidad de Tl_2 nos permite concluir que $Tl_2(y_0) = 0$.

Así, es sencillo observar que

$$0 = Tl_1(y_0) + Tl_2(y_0) = Tl(y_0) = T(\alpha f + \phi)(y_0) = \alpha Tf(y_0) + 1,$$

lo que implica que $Tf(y_0) \neq 0$.

Como el punto y_0 es independiente de f, un argumento análogo aplicado a la función $\beta g + \phi$ nos permite deducir que $Tg(y_0) \neq 0$, con lo que obtenemos que

$$y_0 \in \text{coz}(Tf) \cap \text{coz}(Tg),$$

quedando probado que T^{-1} es una aplicación separadora. □

Para finalizar, resulta inmediato enunciar un resultado que caracteriza las aplicaciones biyectivas y separadoras entre los espacios de funciones $\text{Lip}(X)$ y $\text{Lip}(Y)$.

Corolario 2.8.4 *Sean X e Y espacios métricos completos y supongamos que $T : \mathrm{Lip}(X) \to \mathrm{Lip}(Y)$ es una aplicación biyectiva y separadora. Entonces, si Y es compacto, existen un homeomorfismo bi-Lipschitz $h : Y \to X$ y una función $\tau \in \mathrm{Lip}(Y)$ con $\tau(y) \neq 0$ para todo $y \in Y$ tales que*

$$Tf(y) = \tau(y) f(h(y))$$

para toda $f \in \mathrm{Lip}(X)$ e $y \in Y$. Además, T es continua.

Demostración. Aplicando el Teorema 2.8.3 deducimos que T es una aplicación biseparadora. Por tanto, si tenemos en cuenta el Teorema 2.8.1, sólo necesitamos probar que h es bi-Lipschitz para concluir la demostración. Así, puesto que Y es compacto y h un homeomorfismo, podemos deducir que X e Y son espacios métricos acotados, por lo que la Proposición 2.7.14 nos permite asegurar que h es bi-Lipschitz. $\square$

Capítulo 3

Isometrías sobre espacios de funciones de Lipschitz

3.1. Introducción

Un resultado clásico en la teoría de isometrías lineales entre espacios de funciones continuas es el Teorema de Banach-Stone. En el mismo se afirma que, si X e Y son espacios compactos y Hausdorff y $T : C(X) \to C(Y)$ es una isometría lineal suprayectiva, entonces existen un homeomorfismo $h : Y \to X$ y una función $\varphi \in C(Y)$ con $|\varphi(y)| = 1$ para todo $y \in Y$ tales que

$$Tf(y) = \varphi(y)f(h(y)) \tag{3.1}$$

para toda $f \in C(X)$ e $y \in Y$.

Si consideramos espacios de funciones continuas que toman valores en espacios normados arbitrarios, no es posible, en general, obtener una representación de las isometrías lineales definidas entre ellos análoga a la dada en (3.1). Sin embargo, en el caso en que E sea un espacio de Banach estrictamente convexo, M. Jerison probó en [49] que, si X e Y son espacios compactos y $T : C(X, E) \to C(Y, E)$ es una isometría lineal suprayectiva, entonces existen un homeomorfismo $h : Y \to X$ y una aplicación continua $J : Y \to I(E)$ tales que

$$Tf(y) = (Jy)(f(h(y)))$$

para toda $f \in C(X, E)$ e $y \in Y$. Una prueba de este resultado basada en aplicaciones biseparadoras puede consultarse en [40].

En este capítulo, estamos interesados en obtener una generalización del Teorema de Banach-Stone para espacios de funciones de Lipschitz que toman valores en espacios normados. A este respecto, en el caso escalar, N. Weaver demostró en [73] que, si X e Y son espacios métricos completos, 1-conexos y cuyo diámetro es a lo sumo 2, entonces toda isometría lineal suprayectiva $T : \mathrm{Lip}(X) \to \mathrm{Lip}(Y)$ es de la forma

$$Tf(y) = \alpha f(h(y)) \tag{3.2}$$

para toda $f \in \mathrm{Lip}(X)$ e $y \in Y$, donde $\alpha \in \mathbb{K}$ con $|\alpha| = 1$ y $h : Y \to X$ es una isometría. Es inmediato observar que esta descripción de las isometrías es más precisa que la obtenida en (3.1), pues se prueba que la función φ debe ser constante. Además, la 1-conectividad de los espacios métricos es una condición necesaria para poder obtener tal representación, como así se pone de manifiesto en el ejemplo que aparece en [74, página 61]. Finalmente, debemos indicar que el resultado establecido por N. Weaver proporciona una condición necesaria y suficiente para describir las isometrías entre espacios de funciones de Lipschitz. De hecho, si consideramos que h es un homeomorfismo cualquiera, la representación dada en (3.2) no determina una isometría entre los espacios de funciones de Lipschitz (véase el Ejemplo 3.2.2).

Recientemente, en [53], A. Jiménez-Vargas y M. Villegas-Vallecillos han probado que, si X e Y son espacios métricos compactos, E es un espacio de Banach estrictamente convexo y $T : \mathrm{Lip}(X, E) \to \mathrm{Lip}(Y, E)$ es una isometría lineal suprayectiva tal que $T\tilde{\mathrm{e}} = \tilde{\mathrm{e}}$ para algún $\mathrm{e} \in E$ con $\|\mathrm{e}\| = 1$, entonces existen un homeomorfismo bi-Lipschitz $h : Y \to X$ y una aplicación de Lipschitz $J : Y \to I(E)$ tales que $Tf(y) = (Jy)(f(h(y)))$ para toda $f \in \mathrm{Lip}(X, E)$ e $y \in Y$, obteniendo así la versión para el espacio de funciones de Lipschitz del resultado de M. Jerison. Además, también es considerado el caso no necesariamente suprayectivo.

Pues bien, en este capítulo caracterizaremos las isometrías lineales suprayectivas entre espacios de funciones de Lipschitz definidas en espacios métricos completos que toman valores en espacios normados estrictamente convexos. Por un lado, añadiremos condiciones acerca del comportamiento de las propias isometrías, lo que nos permitirá obtener una generalización del resultado dado en [53] (véase el Teorema 3.5.1), y, por otro lado, asumiremos la 1-conectividad de los espacios métricos en los que se definen las funciones, obteniendo así una completa descripción de las isometrías lineales suprayectivas en el Teorema 3.6.4 análoga a la dada por N. Weaver en [73].

3.2. Preliminares

Nota 3.2.1 *A lo largo de este capítulo seguiremos la misma notación que hemos utilizado en el Capítulo 2.*

Para iniciar este apartado, mostraremos, con un ejemplo sencillo, que no es suficiente considerar que la aplicación $h : Y \to X$ dada en (3.2) es un homeomorfismo para que la aplicación T describa una isometría entre espacios de funciones de Lipschitz.

Ejemplo 3.2.2 *Sean $X = [-1, 1]$ e $Y = [-1/2, 1/2]$ espacios métricos dotados con la métrica usual y sea $h : Y \to X$ el homeomorfismo definido como $h(y) := 2y$ para todo $y \in Y$. Es sencillo observar que $L(h) = 2$ y además $L(h^{-1}) = 1/2$, por lo que h es un homeomorfismo bi-Lipschitz. Definamos ahora la aplicación*

$$T : \mathrm{Lip}(X) \to \mathrm{Lip}(Y)$$

como

$$Tf(y) := f(h(y))$$

para cada $f \in \mathrm{Lip}(X)$ e $y \in Y$. Si consideramos la función $g \in \mathrm{Lip}(X)$ definida como

$$g(x) := \text{máx}\,\{0, 1 - 2d(x, 0)\}$$

para todo $x \in X$, es inmediato comprobar que $\|g\|_\infty = 1$ y $L(g) = 2$. Sin embargo, se tiene que, para todo $y \in Y$,

$$Tg(y) = g(h(y)) = g(2y) = \text{máx}\,\{0, 1 - 2d(2y, 0)\},$$

con lo que $\|Tg\|_\infty = 1$ y $L(Tg) = 4$. Por tanto, se tiene que $\|g\|_L \neq \|Tg\|_L$, quedando probado que T no es una isometría.

Como consecuencia de lo anterior, introduciremos un tipo de aplicación definida entre espacios métricos que nos permitirá considerar isometrías entre espacios de funciones de Lipchitz.

Definición 3.2.3 *Dados sendos espacios métricos X e Y, diremos que una aplicación $h : Y \to X$ preserva distancias menores que 2 si es biyectiva y además $d(h(y_1), h(y_2)) = d(y_1, y_2)$ siempre que $y_1, y_2 \in Y$ satisfacen que* $\text{mín}\,\{d(y_1, y_2), d(h(y_1), h(y_2))\} < 2$.

En realidad, lo que pretendemos expresar con la definición anterior es que una aplicación biyectiva $h : Y \to X$ preserva distancias menores que 2 si tanto ella como su inversa h^{-1} preservan la distancia entre puntos que se encuentran a distancia menor que 2. Esto es, dados $y_1, y_2 \in Y$,

(i) si $d(y_1, y_2) < 2$, entonces $d(h(y_1), h(y_2)) = d(y_1, y_2)$,

(ii) si $d(h(y_1), h(y_2)) < 2$, entonces $d(h^{-1}(h(y_1)), h^{-1}(h(y_2))) = d(h(y_1), h(y_2))$, es decir, $d(y_1, y_2) = d(h(y_1), h(y_2))$.

Relacionado con dichas aplicaciones, surge el siguiente resultado.

Lema 3.2.4 *Sean X e Y espacios métricos y sea $h : Y \to X$ una aplicación que preserva distancias menores que 2. Entonces h es un homeomorfismo.*

Demostración. Como estamos asumiendo que toda aplicación que preserva distancias menores que 2 es biyectiva, para ver que h es un homeomorfismo será suficiente probar que tanto h como h^{-1} son aplicaciones continuas. Para ello, veamos que h es continua en un punto y_0 de Y.

1. Supongamos que $0 < \varepsilon < 2$. Entonces, tomando $\delta = \varepsilon$, si asumimos que $d(y, y_0) < \delta$, puesto que h preserva distancias menores que 2, se tiene que $d(h(y), h(y_0)) = d(y, y_0) < \delta = \varepsilon$.

2. En el caso en que $\varepsilon \geq 2$, basta tomar $\delta = 2$.

Como este razonamiento puede aplicarse para cualquier punto $y \in Y$, queda probado que h es una aplicación continua. De manera análoga se tiene que su inversa también lo es. $\square$

A continuación, vamos a establecer un método para construir isometrías lineales suprayectivas entre espacios de funciones de Lipschitz que toman valores en espacios normados arbitrarios.

Proposición 3.2.5 *Sean X e Y espacios métricos y E y F espacios normados. Entonces, si $h : Y \to X$ es una aplicación que preserva distancias menores que 2 y $\mathbf{J} : E \to F$ es una isometría lineal suprayectiva, toda aplicación T definida como*

$$Tf(y) = \mathbf{J}(f(h(y)))$$

para toda $f \in \mathrm{Lip}(X, E)$ e $y \in Y$, determina una isometría lineal suprayectiva entre $\mathrm{Lip}(X, E)$ y $\mathrm{Lip}(Y, F)$.

Demostración. En primer lugar, vamos a ver que T está bien definida. Para ello, probaremos que $Tf \in \mathrm{Lip}(Y, F)$ siempre que $f \in \mathrm{Lip}(X, E)$. Por tanto, consideremos $f \in \mathrm{Lip}(X, E)$ y veamos que $\|Tf\|_L < \infty$.

Por un lado, puesto que toda aplicación $h : Y \to X$ que preserva distancias menores que 2 es un homeomorfismo (ver Lema 3.2.4), y además $\mathbf{J} : E \to F$ es una isometría, resulta inmediato deducir que $\|Tf\|_\infty = \|f\|_\infty$, por lo que Tf es una función acotada. Para ver que $L(Tf) < \infty$, realizaremos los dos pasos siguientes:

1. Supongamos que $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$, satisfacen que $d(y_1, y_2) < 2$. Entonces, teniendo en cuenta que $\mathbf{J}$ es una isometría lineal y que h preserva distancias menores que 2, se puede comprobar que

$$\begin{aligned} \frac{\|Tf(y_1) - Tf(y_2)\|}{d(y_1, y_2)} &= \frac{\|\mathbf{J}(f(h(y_1))) - \mathbf{J}(f(h(y_2)))\|}{d(y_1, y_2)} \\ &= \frac{\|\mathbf{J}(f(h(y_1)) - f(h(y_2)))\|}{d(y_1, y_2)} \\ &= \frac{\|f(h(y_1)) - f(h(y_2))\|}{d(y_1, y_2)} \\ &\leq \frac{L(f) d(h(y_1), h(y_2))}{d(y_1, y_2)} \\ &= L(f). \end{aligned}$$

2. Sean ahora $y_1, y_2 \in Y$ tales que $d(y_1, y_2) \geq 2$. Entonces, repitiendo el razonamiento anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\|Tf(y_1) - Tf(y_2)\|}{d(y_1, y_2)} &= \frac{\|f(h(y_1)) - f(h(y_2))\|}{d(y_1, y_2)} \\ &\leq \frac{2\|f\|_\infty}{2} \\ &= \|f\|_\infty . \end{aligned}$$

Por tanto, podemos concluir que

$$L(Tf) \leq \max\{L(f), \|f\|_\infty\} = \|f\|_L < \infty, \tag{3.3}$$

con lo que damos por probado que Tf pertenece a $\mathrm{Lip}(Y, F)$ y, en consecuencia, que T está bien definida.

Es obvio que T es una aplicación lineal. Así, veamos ahora que se trata de una isometría. Tomemos una función cualquiera $f_0 \in \mathrm{Lip}(X, E)$ y probemos que $\|Tf_0\|_L = \|f_0\|_L$. Al inicio de esta demostración ya fue probado que $\|Tf_0\|_\infty = \|f_0\|_\infty$, y si además tenemos en cuenta (3.3), se deduce de inmediato que

$$\begin{aligned} \|Tf_0\|_L &= \max\{\|Tf_0\|_\infty, L(Tf_0)\} \\ &\leq \max\{\|f_0\|_\infty, L(f_0)\} \\ &= \|f_0\|_L. \end{aligned}$$

Por tanto, debemos ver que $\|f_0\|_L \leq \|Tf_0\|_L$. En primer lugar, como $\mathbf{J}$ es una isometría suprayectiva y h es biyectiva, es posible considerar sus aplicaciones inversas $\mathbf{J}^{-1} : F \to E$ y $h^{-1} : X \to Y$, respectivamente, lo que nos permite definir la aplicación $S : \mathrm{Lip}(Y, F) \to \mathrm{Lip}(X, E)$ como

$$Sg(x) := \mathbf{J}^{-1}(g(h^{-1}(x)))$$

para toda $g \in \mathrm{Lip}(Y, F)$ y $x \in X$. Obviamente $\mathbf{J}^{-1}$ es una isometría lineal suprayectiva y h^{-1} es una aplicación que preserva distancias menores que 2, por lo que, al igual que hicimos al comienzo de esta demostración, es posible probar que S está bien definida, es decir, que $Sg \in \mathrm{Lip}(X, E)$ siempre que $g \in \mathrm{Lip}(Y, F)$. Lo que vamos a comprobar a continuación es que S es la aplicación inversa de T, esto es, que

$$(S \circ T)(f) = f$$

para toda $f \in \mathrm{Lip}(X, E)$, y que

$$(T \circ S)(g) = g$$

para toda $g \in \mathrm{Lip}(Y, F)$. Para probar la primera de las igualdades, tomemos $f \in \mathrm{Lip}(X, E)$ y $x \in X$. Entonces

$$(S \circ T)(f)(x) = S(Tf)(x) = \mathbf{J}^{-1}\left[Tf(h^{-1}(x))\right] = \mathbf{J}^{-1}\left[\mathbf{J}(f(x))\right] = f(x).$$

Igualmente, podemos ver que $(T \circ S)(g)(y) = g(y)$ para toda $g \in \mathrm{Lip}(Y, F)$ e $y \in Y$. En consecuencia, $T^{-1} \equiv S$, con lo que T es suprayectiva. Por otro lado, a tenor de la definición de T^{-1}, es sencillo comprobar que $\|T^{-1}g\|_\infty = \|g\|_\infty$

para toda $g \in \mathrm{Lip}(Y, F)$. Finalmente, aplicando la desigualdad (3.3) asociada a la aplicación T^{-1}, se tiene que

$$\begin{aligned} \|f_0\|_L = \left\|T^{-1}(Tf_0)\right\|_L &= \text{máx}\left\{\left\|T^{-1}(Tf_0)\right\|_\infty, L(T^{-1}(Tf_0))\right\} \\ &\leq \text{máx}\left\{\|Tf_0\|_\infty, L(Tf_0)\right\} \\ &= \|Tf_0\|_L . \end{aligned}$$

Como este razonamiento se puede aplicar a cualquier función f de $\mathrm{Lip}(X, E)$, queda probado que T es una isometría. $\square$

Observación 3.2.6 *En relación con la proposición anterior, debemos indicar que no es posible asegurar, en general, que h sea una isometría o que preserve la distancia entre puntos que se encuentran a distancia igual a 2. De hecho, siguiendo las mismas ideas que en [74, Proposición 1.7.1], se tiene que, si (Z, d) es un espacio métrico con diámetro mayor que 2, entonces existe una nueva métrica $d'(\cdot,\cdot) := \text{mín}\{2, d(\cdot,\cdot)\}$ en Z de modo que (Z, d') tiene diámetro igual a 2 y tal que, si E es un espacio normado, $\mathrm{Lip}(Z, E)$ con respecto a d y $\mathrm{Lip}(Z, E)$ con respecto a d' son linealmente isométricos.*

Lema 3.2.7 *Sean (X, d_1) e (Y, d_2) dos espacios métricos y definamos las métricas $d_1'(\cdot,\cdot) := \text{mín}\{2, d_1(\cdot,\cdot)\}$ en X y $d_2'(\cdot,\cdot) := \text{mín}\{2, d_2(\cdot,\cdot)\}$ en Y. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *$h : (Y, d_2) \to (X, d_1)$ preserva distancias menores que 2.*

(ii) *$h : (Y, d_2') \to (X, d_1')$ es una isometría.*

Demostración. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Supongamos que $h : (Y, d_2) \to (X, d_1)$ preserva distancias menores que 2 y tomemos $y_1, y_2 \in Y$. Si $d_2'(y_1, y_2) < 2$, por definición de d_2', $d_2'(y_1, y_2) = d_2(y_1, y_2)$. Ahora, por hipótesis, $d_2(y_1, y_2) = d_1(h(y_1), h(y_2))$, y por definición de d_1', $d_1(h(y_1), h(y_2)) = d_1'(h(y_1), h(y_2))$. Por tanto, $d_2'(y_1, y_2) = d_1'(h(y_1), h(y_2))$. En el caso en que $d_2'(y_1, y_2) = 2$, es obvio que $d_2(y_1, y_2) \geq 2$, y como $h^{-1} : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ también preserva distancias menores que 2, $d_1(h(y_1), h(y_2)) \geq 2$. Por tanto, $d_1'(h(y_1), h(y_2)) = 2$, lo que prueba que $h : (Y, d_2') \to (X, d_1')$ es una isometría.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Asumamos ahora que $h : (Y, d_2') \to (X, d_1')$ es una isometría. Sean $y_1, y_2 \in Y$ tales que $d_2(y_1, y_2) < 2$. Entonces $d_2(y_1, y_2) = d_2'(y_1, y_2)$, y por hipótesis, $d_2'(y_1, y_2) = d_1'(h(y_1), h(y_2))$. Así, $d_1'(h(y_1), h(y_2)) < 2$, por lo que $d_1'(h(y_1), h(y_2)) = d_1(h(y_1), h(y_2))$, luego $d_2(y_1, y_2) = d_1(h(y_1), h(y_2))$.

Si suponemos que $d_1(h(y_1), h(y_2)) < 2$, obtenemos que $d_1(h(y_1), h(y_2)) = d_2(y_1, y_2)$, lo que implica que $h : (Y, d_2) \to (X, d_1)$ preserva distancias menores que 2. $\square$

Para finalizar este apartado, recordaremos la definición de espacio normado estrictamente convexo y una de las propiedades que este tipo de espacios satisface (véase [58, páginas 332-336]).

Definición 3.2.8 *Un espacio normado E se dice que es estrictamente convexo si, para cualesquiera $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2 \in E$, $\mathrm{e}_1 \neq \mathrm{e}_2$ con $\|\mathrm{e}_1\| = \|\mathrm{e}_2\| = 1$, se tiene que $\|\mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2\| < 2$. De manera equivalente, diremos que E es un espacio normado estrictamente convexo si, dados $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2 \in E$, siempre que $\|\mathrm{e}_1\| = \|\mathrm{e}_2\| = 1$ y $\|\mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2\| = 2$, se tiene que $\mathrm{e}_1 = \mathrm{e}_2$.*

Observación 3.2.9 *Sea E un espacio normado estrictamente convexo. Entonces, dados $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2 \in E$ no nulos, se tiene que*

$$\|\mathrm{e}_1\|, \|\mathrm{e}_2\| < \max\{\|\mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2\|, \|\mathrm{e}_1 - \mathrm{e}_2\|\}. \tag{3.4}$$

3.3. Resultados iniciales

A lo largo de esta sección vamos a suponer que X e Y son espacios métricos y que E y F son espacios normados estrictamente convexos. Además, asumiremos que $T : \mathrm{Lip}(X, E) \to \mathrm{Lip}(Y, F)$ es una isometría lineal suprayectiva que satisface que el conjunto A definido como

$$A := \{y \in Y : T\tilde{\mathrm{e}}(y) = 0 \ \forall \mathrm{e} \in E\} \tag{3.5}$$

es vacío. Así, el objetivo en esta sección es tratar de probar que T es una aplicación biseparadora.

Lema 3.3.1 *Sean $f \in \mathrm{Lip}(X, E)$ y $x_0 \in X$ tales que $f(x_0) \neq 0$. Entonces existe una función $g \in \mathrm{Lip}(X, E)$ con*

$$L(g) < \|g\|_\infty = \|g(x_0)\|$$

tal que

$$L(g + f) < \|g + f\|_\infty = \|(g + f)(x_0)\| = \|g(x_0)\| + \|f(x_0)\|.$$

Demostración. Sea $\mathrm{e} := f(x_0) \in E$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\|\mathrm{e}\| = 1$. Definamos ahora la función $l \in \mathrm{Lip}(X, E)$ como

$$l(x) := \max\{0, 2 - d(x, x_0)\} \cdot \mathrm{e}$$

para cada $x \in X$. Es sencillo observar que l satisface que $\|l(x_0)\| = 2$, $\|l(x)\| < 2$ para todo $x \in X$ tal que $x \neq x_0$ y además $L(l) \leq 1$. Finalmente, consideremos $n \in \mathbb{N}$ con

$$n > \|f\|_L$$

y definamos

$$g := nl.$$

Resulta inmediato comprobar que g pertenece a $\mathrm{Lip}(X, E)$ y que satisface que $\|g(x_0)\| = 2n$, $\|g(x)\| < 2n$ para todo $x \in X \setminus \{x_0\}$ y $L(g) = nL(l) \leq n$, por lo que

$$L(g) < \|g\|_\infty = \|g(x_0)\|.$$

Por otro lado, puesto que $\mathrm{e} = f(x_0)$, es obvio que

$$\|(g + f)(x_0)\| = \|g(x_0)\| + \|f(x_0)\| = 2n + 1.$$

Además, para cada $x \in X \setminus \{x_0\}$ con $d(x, x_0) < 2$, dado que $\|f(x)\| \leq \|f(x_0)\| + L(f)d(x, x_0)$ y $n > L(f)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|(g + f)(x)\| &\leq \|g(x)\| + \|f(x)\| \\
&\leq 2n - nd(x, x_0) + \|f(x_0)\| + L(f)d(x, x_0) \\
&< 2n + \|f(x_0)\| \\
&= 2n + 1,
\end{aligned}$$

y en el caso en que $d(x, x_0) \geq 2$, se tiene que $g(x) = 0$, por lo que

$$\|(g + f)(x)\| = \|f(x)\| \leq \|f\|_\infty < n.$$

Para finalizar, como sabemos que $L(g) \leq n$ y $L(f) < n$, tenemos que

$$L(g + f) < 2n,$$

lo que nos permite concluir que

$$L(g + f) < \|g + f\|_\infty = \|(g + f)(x_0)\| = \|g(x_0)\| + \|f(x_0)\|.$$

□

Nota 3.3.2 *El resultado anterior es válido para cualquier espacio normado, no es necesario asumir que sea estrictamente convexo.*

Lema 3.3.3 *Sea $f \in \mathrm{Lip}(X,E)$ tal que $L(Tf) < \|Tf\|_\infty = \|Tf(y_0)\|$ para algún $y_0 \in Y$. Entonces $L(f) \leq \|f\|_\infty$.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que $\|f\|_\infty < L(f)$. Entonces, por ser T una isometría, se tiene que

$$L(f) = \|f\|_L = \|Tf\|_L = \|Tf(y_0)\|. \tag{3.6}$$

Por otra parte, para cualquier $\mathrm{e} \in E$, existe una constante positiva M tal que $\|f\|_\infty + M\|\mathrm{e}\| < L(f)$, por lo que

$$\|f \pm M\tilde{\mathrm{e}}\|_\infty < L(f) = L(f \pm M\tilde{\mathrm{e}}),$$

lo que implica que $\|f \pm M\tilde{\mathrm{e}}\|_L = L(f)$. Por tanto, teniendo en cuenta (3.6), podemos concluir que

$$\|T(f \pm M\tilde{\mathrm{e}})(y_0)\| \leq \|T(f \pm M\tilde{\mathrm{e}})\|_L = \|f \pm M\tilde{\mathrm{e}}\|_L = L(f) = \|Tf(y_0)\|,$$

y, por ser F estrictamente convexo, atendiendo a la desigualdad (3.4), deducimos que $T\tilde{\mathrm{e}}(y_0) = 0$ para todo $\mathrm{e} \in E$, por lo que $y_0 \in A$. Sin embargo, esto es imposible puesto que estamos asumiendo que el conjunto A (definido en (3.5)) es vacío. □

A continuación probaremos que, si T es una isometría para la norma $\|.\|_L$, entonces también lo es para la norma $\|.\|_\infty$.

Corolario 3.3.4 *T es una isometría con respecto a la norma del supremo.*

Demostración. Supongamos que $\|f\|_\infty < \|Tf\|_\infty$. Entonces, podemos tomar $\varepsilon > 0$ e $y_0 \in Y$ tales que

$$\|f\|_\infty + \varepsilon < \|Tf(y_0)\|. \tag{3.7}$$

Ahora, por el Lema 3.3.1, sabemos que existe $g \in \mathrm{Lip}(Y,F)$ con

$$L(g) < \|g\|_\infty = \|g(y_0)\| \tag{3.8}$$

tal que

$$L(g + Tf) < \|g + Tf\|_\infty = \|(g + Tf)(y_0)\| = \|g(y_0)\| + \|Tf(y_0)\|. \tag{3.9}$$

Entonces, aplicando el Lema 3.3.3 en (3.8), obtenemos que

$$L(T^{-1}g) \leq \left\|T^{-1}g\right\|_{\infty},$$

y si le aplicamos en (3.9),

$$L(T^{-1}g + f) \leq \left\|T^{-1}g + f\right\|_{\infty}.$$

Finalmente, puesto que T es una isometría, atendiendo a (3.8) y (3.9), podemos deducir, respectivamente, que

$$\left\|T^{-1}g\right\|_{\infty} = \left\|T^{-1}g\right\|_{L} = \|g\|_{L} = \|g(y_0)\| \tag{3.10}$$

y que

$$\left\|T^{-1}g + f\right\|_{\infty} = \left\|T^{-1}g + f\right\|_{L} = \|g + Tf\|_{L} = \|(g + Tf)(y_0)\|.$$

Sin embargo, esto no es posible, puesto que si tenemos en cuenta (3.7) y (3.10), se tiene que

$$\begin{aligned} \left\|T^{-1}g + f\right\|_{\infty} &\leq \left\|T^{-1}g\right\|_{\infty} + \|f\|_{\infty} \\ &< \|g(y_0)\| + \|Tf(y_0)\| - \varepsilon \\ &< \|(g + Tf)(y_0)\|. \end{aligned}$$

Si asumimos que $\|Tf\|_{\infty} < \|f\|_{\infty}$, por ser T^{-1} una isometría, aplicando un razonamiento análogo al anterior obtenemos la misma conclusión, lo que nos permite afirmar que T es una isometría para la norma $\|.\|_{\infty}$. □

En estos momentos, disponemos de las herramientas suficientes para poder abordar el principal resultado de esta sección. La demostración del mismo es una adaptación al contexto de los espacios de funciones de Lipschitz de la dada en [40, Corolario 4.3].

Teorema 3.3.5 *Sean X e Y espacios métricos, E y F espacios normados estrictamente convexos y $T : \mathrm{Lip}(X, E) \to \mathrm{Lip}(Y, F)$ una isometría lineal suprayectiva que satisface $\{y \in Y : T\tilde{\mathrm{e}}(y) = 0 \ \forall \mathrm{e} \in E\} = \emptyset$. Entonces T es biseparadora.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que T no es separadora. Entonces existen dos funciones f y g en $\mathrm{Lip}(X, E)$ con cozeros disjuntos tales que $\mathrm{coz}(Tf) \cap \mathrm{coz}(Tg) \neq \emptyset$. Por tanto, existe $y_0 \in Y$ tal que $Tf(y_0) = \mathrm{f}_1 \neq 0$

y $Tg(y_0) = \mathrm{f}_2 \neq 0$. Además, como F es estrictamente convexo, si tenemos en cuenta la desigualdad (3.4), podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que

$$\|\mathrm{f}_2\| \leq \|\mathrm{f}_1\| < \|\mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2\| .$$

Consideremos ahora

$$\lambda := \frac{1}{3}\left(\|\mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2\| - \|\mathrm{f}_1\|\right)$$

y definamos los siguientes conjuntos:

$$U := \{y \in Y : \|Tf(y)\| < \|\mathrm{f}_1\| + \lambda\}$$

y

$$V := \{y \in Y : \|Tg(y)\| < \|\mathrm{f}_2\| + \lambda\} .$$

Es inmediato observar que $U \cap V$ es un entorno abierto de y_0, por lo que existe $r > 0$ tal que $B(y_0, r) \subset U \cap V$. A continuación, definamos una función $k \in \mathrm{Lip}(Y, F)$ como

$$k(y) := \text{máx}\left\{0, 1 - \frac{d(y, y_0)}{r}\right\} \cdot \frac{\mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2}{\|\mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2\|}$$

para todo $y \in Y$, y para finalizar, tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > \text{máx}\left\{\|Tf\|_\infty , \|Tg\|_\infty\right\} ,$$

consideremos

$$l := nk.$$

Resulta obvio que $l \in \mathrm{Lip}(Y, F)$, $\mathrm{coz}(l) = \mathrm{coz}(k) = B(y_0, r)$, y además

$$\|l\|_\infty = \|l(y_0)\| = n\,\|k(y_0)\| = n.$$

Ahora, por un lado, puesto que $\mathrm{f}_1 = Tf(y_0)$ y $\mathrm{f}_2 = Tg(y_0)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|l + Tf + Tg\|_\infty &\geq \|(l + Tf + Tg)(y_0)\| \\ &= \|l(y_0)\| + \|(Tf + Tg)(y_0)\| \\ &= n + \|\mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2\| . \end{aligned} \tag{3.11}$$

Por otro lado, como estamos asumiendo que las funciones f y g tienen cozeros disjuntos, es sencillo observar que

$$\left\|T^{-1}l + f + g\right\|_\infty = \text{máx}\left\{\left\|T^{-1}l + f\right\|_\infty , \left\|T^{-1}l + g\right\|_\infty\right\} ,$$

y como hemos visto en el Corolario 3.3.4 que T es una isometría con respecto a la norma del supremo, se tiene que

$$\|l + Tf + Tg\|_\infty = \text{máx}\{\|l + Tf\|_\infty, \|l + Tg\|_\infty\}. \tag{3.12}$$

Ahora bien, como $\text{coz}(l) = B(y_0, r) \subset U \cap V$, atendiendo a las definiciones de los conjuntos U y V dadas anteriormente, se puede deducir que, para todo $x \in B(y_0, r)$,

$$\|(l + Tf)(x)\| \leq \|l(x)\| + \|Tf(x)\| < n + \|\mathrm{f}_1\| + \lambda,$$

y además, si $x \in X \setminus B(y_0, r)$, por definición de n, se tiene que

$$\|(l + Tf)(x)\| = \|Tf(x)\| \leq \|Tf\|_\infty < n.$$

De manera análoga, si $x \in B(y_0, r)$, se tiene que

$$\|(l + Tg)(x)\| \leq \|l(x)\| + \|Tg(x)\| < n + \|\mathrm{f}_2\| + \lambda,$$

mientras que si $x \notin B(y_0, r)$,

$$\|(l + Tg)(x)\| = \|Tg(x)\| \leq \|Tg\|_\infty < n.$$

Por tanto, podemos concluir que

$$\|l + Tf\|_\infty < n + \|\mathrm{f}_1\| + \lambda < n + \|\mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2\|$$

y que

$$\|l + Tg\|_\infty < n + \|\mathrm{f}_2\| + \lambda < n + \|\mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2\|,$$

lo que, atendiendo a la igualdad (3.12), implica que

$$\|l + Tf + Tg\|_\infty < n + \|\mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2\|,$$

en contra de lo probado en (3.11). Así pues, T es una aplicación separadora. Para ver que su inversa T^{-1} tambiés lo es, se puede proceder de manera análoga. □

3.4. R-componentes

En este apartado, vamos a definir una relación de equivalencia en los espacios métricos de base que nos permitirá obtener una completa descripción de las isometrías lineales suprayectivas entre espacios de funciones de Lipschitz definidas sobre ellos.

Es sencillo comprobar que, en la siguiente definición, $\sim_R$ constituye una relación de equivalencia en un espacio métrico.

Definición 3.4.1 *Sean $R > 0$ y (X, d) un espacio métrico. Dados $x, y \in X$, se dice que x está R-relacionado con y ($x \sim_R y$) si existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ con $x_1 = x$, $x_n = y$ y $d(x_i, x_{i+1}) < R$ para $i = 1, \ldots, n-1$.*
Llamaremos R-componente a cada clase de equivalencia en X por la relación de equivalencia $\sim_R$. El conjunto de todas las R-componentes de X será denotado como $\mathtt{Comp}_R(X)$.

Ejemplo 3.4.2 *Si consideramos el conjunto de los números naturales dotado de la métrica usual, es trivial observar que obtenemos un espacio métrico en el que hay infinitas 1-componentes, es decir,*

$$\mathtt{Comp}_1(\mathbb{N}) = \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\},$$

y, sin embargo, sólo hay una única 2-componente, esto es,

$$\mathtt{Comp}_2(\mathbb{N}) = \{\mathbb{N}\}.$$

Por otro lado, si tomamos el conjunto $X = (0,1) \cup (3,4)$ dotado de nuevo de la métrica usual, tenemos que

$$\mathtt{Comp}_1(X) = \{(0,1), (3,4)\} = \mathtt{Comp}_2(X),$$

mientras que

$$\mathtt{Comp}_3(X) = \{X\}.$$

A lo largo de esta sección, continuaremos con la misma notación que en la anterior, es decir, X e Y serán espacios métricos, E y F espacios normados estrictamente convexos y $T : \mathrm{Lip}(X, E) \to \mathrm{Lip}(Y, F)$ una isometría lineal suprayectiva tal que el conjunto $A = \{y \in Y : T\tilde{e}(y) = 0 \ \forall e \in E\}$ es vacío.

Así, a partir de este momento, lo que pretendemos es determinar el comportamiento, en cada una de las R-componentes del espacio métrico Y, de la imagen por T de las funciones constantes.

Proposición 3.4.3 *Para cualquier* $\mathrm{e} \in E$*, se tiene que* $T\tilde{\mathrm{e}}$ *es constante en cada* 1*-componente de* Y *y además* $\|T\tilde{\mathrm{e}}(y)\| = \|\mathrm{e}\|$ *para todo* $y \in Y$*.*

Demostración. Supongamos que existe $\mathrm{e} \in E$ no nulo tal que la función $T\tilde{\mathrm{e}}$ no es constante en una 1-componente de Y. Entonces, existen dos puntos distintos $y_1, y_2 \in Y$, con $y_1 \sim_1 y_2$, tales que $\mathrm{f}_1 := T\tilde{\mathrm{e}}(y_1)$ y $\mathrm{f}_2 := T\tilde{\mathrm{e}}(y_2)$ son diferentes. Puesto que los puntos y_1 e y_2 pertenecen a la misma 1-componente de Y, podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que

$$D := d(y_1, y_2) < 1.$$

Supongamos ahora que $\mathrm{f}_1 \neq 0$ y consideremos la función $g \in \mathrm{Lip}(Y, F)$ definida como

$$g(y) := \max\left\{0, 1 - \frac{d(y, y_1)}{D}\right\} \cdot \mathrm{f}_1$$

para todo $y \in Y$. Es sencillo observar que $g(y_1) = \mathrm{f}_1$, $g(y_2) = 0$ y además

$$L(g) = \frac{\|\mathrm{f}_1\|}{D} > \|\mathrm{f}_1\| = \|g\|_\infty ,$$

lo que implica que $\|g\|_L = \|\mathrm{f}_1\| / D$. Además, si tenemos en cuenta que T^{-1} es también una isometría y aplicamos el Corolario 3.3.4, obtenemos que

$$\left\|T^{-1}g\right\|_L > \left\|T^{-1}g\right\|_\infty ,$$

por lo que $\|T^{-1}g\|_\infty < L(T^{-1}g)$. De este modo, podemos tomar una constante positiva M tal que

$$\left\|T^{-1}g \pm M\tilde{\mathrm{e}}\right\|_\infty \leq \left\|T^{-1}g\right\|_\infty + M\|\mathrm{e}\| < L(T^{-1}g) = L(T^{-1}g \pm M\tilde{\mathrm{e}}),$$

y como consecuencia

$$\left\|T^{-1}g \pm M\tilde{\mathrm{e}}\right\|_L = L(T^{-1}g \pm M\tilde{\mathrm{e}}) = L(T^{-1}g) = \left\|T^{-1}g\right\|_L = \frac{\|\mathrm{f}_1\|}{D}. \tag{3.13}$$

Por otro lado, puesto que F es estrictamente convexo, en virtud de la desigualdad (3.4), es obvio que

$$\|\mathrm{f}_1 + M(\mathrm{f}_1 - \mathrm{f}_2)\| > \|\mathrm{f}_1\| \tag{3.14}$$

o

$$\|\mathrm{f}_1 - M(\mathrm{f}_1 - \mathrm{f}_2)\| > \|\mathrm{f}_1\| . \tag{3.15}$$

Ahora, sin mas que sustituir por sus valores, es sencillo comprobar que

$$\begin{aligned} \left\|\left(g + MT\tilde{\mathrm{e}}\right)(y_1) - \left(g + MT\tilde{\mathrm{e}}\right)(y_2)\right\| &= \|\mathrm{f}_1 + M\mathrm{f}_1 - M\mathrm{f}_2\| \\ &= \|\mathrm{f}_1 + M\left(\mathrm{f}_1 - \mathrm{f}_2\right)\| \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} \left\|\left(g - MT\tilde{\mathrm{e}}\right)(y_1) - \left(g - MT\tilde{\mathrm{e}}\right)(y_2)\right\| &= \|\mathrm{f}_1 - M\mathrm{f}_1 + M\mathrm{f}_2\| \\ &= \|\mathrm{f}_1 - M\left(\mathrm{f}_1 - \mathrm{f}_2\right)\|, \end{aligned}$$

por lo que, gracias a (3.14) y (3.15), se tiene que

$$\frac{\left\|\left(g + MT\tilde{\mathrm{e}}\right)(y_1) - \left(g + MT\tilde{\mathrm{e}}\right)(y_2)\right\|}{d(y_1, y_2)} > \frac{\|\mathrm{f}_1\|}{d(y_1, y_2)} = \frac{\|\mathrm{f}_1\|}{D}$$

o

$$\frac{\left\|\left(g - MT\tilde{\mathrm{e}}\right)(y_1) - \left(g - MT\tilde{\mathrm{e}}\right)(y_2)\right\|}{d(y_1, y_2)} > \frac{\|\mathrm{f}_1\|}{d(y_1, y_2)} = \frac{\|\mathrm{f}_1\|}{D}.$$

Finalmente, esto nos permite concluir que

$$\|g + MT\tilde{\mathrm{e}}\|_L > \|\mathrm{f}_1\| / D$$

o

$$\|g - MT\tilde{\mathrm{e}}\|_L > \|\mathrm{f}_1\| / D,$$

lo cual es imposible si tenemos en cuenta la igualdad obtenida en (3.13) y que T es una isometría. Por tanto, queda probado que, para todo $\mathrm{e} \in E$, la aplicación $T\tilde{\mathrm{e}}$ es constante en cada 1-componente de Y.

Veamos ahora que, fijado $\mathrm{e} \in E$, $\|T\tilde{\mathrm{e}}(y)\| = \|\mathrm{e}\|$ para todo $y \in Y$. Supongamos que $T\tilde{\mathrm{e}}(y) = \mathrm{f}$ para todo y en $B \in \mathtt{Comp}_1(Y)$. Entonces, por un lado, resulta obvio que

$$\|\mathrm{f}\| \leq \|T\tilde{\mathrm{e}}\|_\infty \leq \|T\tilde{\mathrm{e}}\|_L = \|\tilde{\mathrm{e}}\|_L = \|\mathrm{e}\|.$$

Por otro lado, consideremos la función $g \in \mathrm{Lip}(Y, F)$ definida como

$$g := \chi_B \cdot T\tilde{\mathrm{e}},$$

es decir,

$$g(y) = \begin{cases} \mathrm{f} & \text{si } y \in B \\ 0 & \text{si } y \in Y \setminus B. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta la definición de la relación de equivalencia $\sim_1$, se tiene que $d(B, Y \setminus B) \geq 1$, con lo que

$$L(g) = \frac{\|\mathrm{f}\|}{d(B, Y \setminus B)} \leq \|\mathrm{f}\| = \|g\|_\infty ,$$

y como consecuencia $\|g\|_L = \|\mathrm{f}\|$. Definamos ahora $l \in \mathrm{Lip}(Y, F)$ como

$$l := \chi_{Y \setminus B} \cdot T\tilde{\mathrm{e}}.$$

Es obvio que $\mathrm{coz}(g) \cap \mathrm{coz}(l) = \emptyset$, y como en el Teorema 3.3.5 hemos visto que T es una aplicación biseparadora, concluimos que

$$\mathrm{coz}(T^{-1}g) \cap \mathrm{coz}(T^{-1}l) = \emptyset.$$

Además, es sencillo observar que $g + l = T\tilde{\mathrm{e}}$, por lo que

$$T^{-1}g + T^{-1}l = \tilde{\mathrm{e}},$$

lo que nos permite deducir que $T^{-1}g$ toma el valor e en algún punto de X. Por tanto, como T^{-1} es una isometría, se tiene que

$$\|\mathrm{e}\| \leq \left\|T^{-1}g\right\|_\infty \leq \left\|T^{-1}g\right\|_L = \|g\|_L = \|\mathrm{f}\| .$$

Así, para cualquier $\mathrm{e} \in E$, podemos afirmar que $\|T\tilde{\mathrm{e}}(y)\| = \|\mathrm{e}\|$ para todo y en una 1-componente de Y, y, en consecuencia, para todo $y \in Y$. $\square$

El siguiente resultado proporciona una descripción de la imagen por T de las funciones constantes en cada 1-componente de X.

Lema 3.4.4 *Existen una aplicación biyectiva $H : \mathtt{Comp}_1(X) \to \mathtt{Comp}_1(Y)$ y, para cada $A \in \mathtt{Comp}_1(X)$, una isometría lineal suprayectiva $\mathbf{J}_A : E \to F$ tales que*

$$T(\chi_A \cdot \tilde{\mathrm{e}}) = \chi_{H(A)} \cdot \widetilde{\mathbf{J}_A(\mathrm{e})} = \chi_{H(A)} \cdot T\tilde{\mathrm{e}}$$

para todo $\mathrm{e} \in E$.

Demostración. Fijemos $A \in \mathtt{Comp}_1(X)$ y $\mathrm{e} \in E$ no nulo, y definamos las funciones

$$f := \chi_A \cdot \tilde{\mathrm{e}}$$

y

$$g := \chi_{X \setminus A} \cdot \tilde{\mathrm{e}}$$

que pertenecen a $\mathrm{Lip}(X, E)$. Es obvio que $\mathrm{coz}(f) \cap \mathrm{coz}(g) = \emptyset$, por lo que $\mathrm{coz}(Tf) \cap \mathrm{coz}(Tg) = \emptyset$ en virtud del Teorema 3.3.5. Además, puesto que

$$f + g = \tilde{\mathrm{e}},$$

tenemos que

$$Tf + Tg = T\tilde{\mathrm{e}},$$

y por la proposición anterior, deducimos que $Tf + Tg$ es constante en cada 1-componente de Y. Ahora bien, teniendo en cuenta que Tf y Tg tienen cozeros disjuntos, se deduce que, para todo $y \in Y$,

$$Tf(y) \in \{0, T\tilde{\mathrm{e}}(y)\}$$

y

$$Tg(y) \in \{0, T\tilde{\mathrm{e}}(y)\}.$$

Veamos que Tf es constante en cada 1-componente de Y. Supongamos que no es así y que existen $y_1, y_2 \in Y$ con $y_1 \sim_1 y_2$ tales que $Tf(y_1) \neq 0$ y $Tf(y_2) = 0$. Podemos asumir que $d(y_1, y_2) < 1$ y además $\|Tf(y_1)\| = \|T\tilde{\mathrm{e}}(y_1)\| = \|\mathrm{e}\|$ (según la Proposición 3.4.3), lo que nos permite concluir que

$$\|Tf\|_L \geq L(Tf) \geq \frac{\|Tf(y_1) - Tf(y_2)\|}{d(y_1, y_2)} = \frac{\|\mathrm{e}\|}{d(y_1, y_2)} > \|\mathrm{e}\|. \tag{3.16}$$

Sin embargo, como $d(A, X \setminus A) \geq 1$ por ser A una 1-componente de X, tenemos que

$$L(f) = \frac{\|\mathrm{e}\|}{d(A, X \setminus A)} \leq \|\mathrm{e}\| = \|f\|_\infty,$$

lo que implica que $\|f\|_L = \|\mathrm{e}\|$, siendo esto imposible si tenemos en cuenta (3.16) y que T es una isometría. De esta manera, queda probado que la función Tf, es decir, $T(\chi_A \cdot \tilde{\mathrm{e}})$, es constante en cada 1-componente de Y.

Veamos ahora que existen una única 1-componente B de Y y $\mathrm{f} \in F$ con $\|\mathrm{f}\| = \|\mathrm{e}\|$ tales que $Tf = \chi_B \cdot \tilde{\mathrm{f}}$. Supongamos, por el contrario, que existen $B_1, B_2 \in \mathtt{Comp}_1(Y)$, $B_1 \neq B_2$, y $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 \in F$ con $\|\mathrm{f}_1\| = \|\mathrm{e}\| = \|\mathrm{f}_2\|$ tales que

$$Tf = \chi_{B_1} \cdot \tilde{\mathrm{f}}_1 + \chi_{B_2} \cdot \tilde{\mathrm{f}}_2.$$

En primer lugar, es obvio que $\mathrm{coz}(\chi_{B_1} \cdot \tilde{\mathrm{f}}_1) \cap \mathrm{coz}(\chi_{B_2} \cdot \tilde{\mathrm{f}}_2) = \emptyset$, y como en el Teorema 3.3.5 hemos visto que T es biseparadora, se tiene que

$$\mathrm{coz}\left(T^{-1}(\chi_{B_1} \cdot \tilde{\mathrm{f}}_1)\right) \bigcap \mathrm{coz}\left(T^{-1}(\chi_{B_2} \cdot \tilde{\mathrm{f}}_2)\right) = \emptyset.$$

Además, $f = T^{-1}(\chi_{B_1} \cdot \tilde{\mathrm{f}}_1) + T^{-1}(\chi_{B_2} \cdot \tilde{\mathrm{f}}_2)$, o equivalentemente,

$$\chi_A \cdot \tilde{\mathrm{e}} = T^{-1}(\chi_{B_1} \cdot \tilde{\mathrm{f}}_1) + T^{-1}(\chi_{B_2} \cdot \tilde{\mathrm{f}}_2).$$

Ahora, aplicando un razonamiento análogo al del inicio de esta demostración, podemos afirmar que las funciones $T^{-1}(\chi_{B_1} \cdot \tilde{\mathrm{f}}_1)$ y $T^{-1}(\chi_{B_2} \cdot \tilde{\mathrm{f}}_2)$ son constantes en cada 1-componente de X, y, en particular, lo son en A. Por tanto, como hemos visto que tienen cozeros disjuntos, una de ellas debe tomar el valor constante 0 en A, lo que implica que $T^{-1}(\chi_{B_1} \cdot \tilde{\mathrm{f}}_1) \equiv 0$ o $T^{-1}(\chi_{B_2} \cdot \tilde{\mathrm{f}}_2) \equiv 0$, siendo esto absurdo dado que T^{-1} es inyectiva.

En resumen, acabamos de ver que, para cada $A \in \mathtt{Comp}_1(X)$ y $\mathrm{e} \in E$, existen una única $B \in \mathtt{Comp}_1(Y)$ y $\mathrm{f} \in F$ con $\|\mathrm{f}\| = \|\mathrm{e}\|$ tales que

$$T(\chi_A \cdot \tilde{\mathrm{e}}) = \chi_B \cdot \tilde{\mathrm{f}}. \tag{3.17}$$

Esto nos permite definir sendas aplicaciones $H : \mathtt{Comp}_1(X) \to \mathtt{Comp}_1(Y)$ y $\mathbf{J}_A : E \to F$ tales que

$$T(\chi_A \cdot \tilde{\mathrm{e}}) = \chi_{H(A)} \cdot \widetilde{\mathbf{J}_A(\mathrm{e})} \tag{3.18}$$

para toda $A \in \mathtt{Comp}_1(X)$ y $\mathrm{e} \in E$. Por tanto, debemos probar que H es biyectiva y que, para cada $A \in \mathtt{Comp}_1(X)$, la aplicación $\mathbf{J}_A$ es una isometría lineal suprayectiva.

En primer lugar, veamos que H es inyectiva. Sean $A, B \in \mathtt{Comp}_1(X)$ con $A \neq B$. Es obvio entonces que $\mathrm{coz}(\chi_A \cdot \tilde{\mathrm{e}}) \cap \mathrm{coz}(\chi_B \cdot \tilde{\mathrm{e}}) = \emptyset$, y, según el Teorema 3.3.5, $\mathrm{coz}\,(T(\chi_A \cdot \tilde{\mathrm{e}})) \cap \mathrm{coz}\,(T(\chi_B \cdot \tilde{\mathrm{e}})) = \emptyset$. Finalmente, aplicando la caracterización (3.18), tenemos que

$$\mathrm{coz}\left(\chi_{H(A)} \cdot \widetilde{\mathbf{J}_A(\mathrm{e})}\right) \bigcap \mathrm{coz}\left(\chi_{H(B)} \cdot \widetilde{\mathbf{J}_B(\mathrm{e})}\right) = \emptyset$$

siendo $\mathbf{J}_A(\mathrm{e}) \neq 0$ y $\mathbf{J}_B(\mathrm{e}) \neq 0$, lo que implica que $H(A) \neq H(B)$, quedando probado que H es inyectiva.

Comprobemos, en segundo lugar, que H es suprayectiva. Para ello, sea $B \in \mathtt{Comp}_1(Y)$. Si tomamos $\mathrm{f} \in F$ no nulo, podemos considerar la función

$$\chi_B \cdot \tilde{\mathrm{f}} \in \mathrm{Lip}(Y, F).$$

Ahora, por ser T^{-1} una isometría lineal suprayectiva, aplicando un razonamiento análogo al que nos permite obtener (3.17), podemos deducir la existencia de $A \in \mathtt{Comp}_1(X)$ y $\mathrm{e} \in E$ con $\|\mathrm{e}\| = \|\mathrm{f}\|$ tales que

$$T^{-1}(\chi_B \cdot \tilde{\mathrm{f}}) = \chi_A \cdot \tilde{\mathrm{e}}, \tag{3.19}$$

y en consecuencia $T(\chi_A \cdot \tilde{\mathrm{e}}) = T[T^{-1}(\chi_B \cdot \tilde{\mathrm{f}})] = \chi_B \cdot \tilde{\mathrm{f}}$, por lo que $H(A) = B$. Por tanto, H es suprayectiva.

Queda por probar que, dada $A \in \mathtt{Comp}_1(X)$, la aplicación $\mathbf{J}_A : E \to F$ es una isometría lineal suprayectiva. Resulta trivial observar que $\mathbf{J}_A$ es lineal. Además, atendiendo a las caracterizaciones dadas en (3.17) y (3.18), se tiene que $\|\mathbf{J}_A(\mathrm{e})\| = \|\mathrm{f}\| = \|\mathrm{e}\|$ para todo $\mathrm{e} \in E$, por lo que $\mathbf{J}_A$ es una isometría. Finalmente, veamos que es suprayectiva. Para ello, sea $\mathrm{f} \in F$. Tomando $B \in \mathtt{Comp}_1(Y)$, según (3.19), existen $A \in \mathtt{Comp}_1(X)$ y $\mathrm{e} \in E$ tales que

$$T^{-1}(\chi_B \cdot \tilde{\mathrm{f}}) = \chi_A \cdot \tilde{\mathrm{e}},$$

lo que nos permite obtener que

$$T(\chi_A \cdot \tilde{\mathrm{e}}) = \chi_B \cdot \tilde{\mathrm{f}}.$$

Además, en (3.18), hemos visto que $T(\chi_A \cdot \tilde{\mathrm{e}}) = \chi_{H(A)} \cdot \widetilde{\mathbf{J}_A(\mathrm{e})}$, con lo que $\mathbf{J}_A(\mathrm{e}) = \mathrm{f}$, quedando así probado que $\mathbf{J}_A$ es suprayectiva.

Por último, fijada $A \in \mathtt{Comp}_1(X)$ y $\mathrm{e} \in E$, $\mathrm{e} \neq 0$, consideremos las funciones f y g definidas al inicio de esta demostración. Por la caracterización (3.18) y dado que T es lineal, tenemos que

$$T\tilde{\mathrm{e}} = T(f+g) = Tf + Tg = \chi_{H(A)} \cdot \widetilde{\mathbf{J}_A(\mathrm{e})} + Tg.$$

Para finalizar, como ya ha sido indicado, $\mathrm{coz}\left(\chi_{H(A)} \cdot \widetilde{\mathbf{J}_A(\mathrm{e})}\right) \bigcap \mathrm{coz}(Tg) = \emptyset$, lo que nos permite concluir que $\chi_{H(A)} \cdot T\tilde{\mathrm{e}} = \chi_{H(A)} \cdot \widetilde{\mathbf{J}_A(\mathrm{e})}$. □

Observación 3.4.5 *Como T es una isometría lineal suprayectiva, podemos considerar su inversa $T^{-1} : \mathrm{Lip}(Y,F) \to \mathrm{Lip}(X,E)$, que también lo es. Así, aplicando el lema anterior, es posible deducir la existencia de una aplicación biyectiva $M : \mathtt{Comp}_1(Y) \to \mathtt{Comp}_1(X)$ y, para cada $B \in \mathtt{Comp}_1(Y)$, una isometría lineal suprayectiva $\mathbf{K}_B : F \to E$ tales que, para todo $\mathrm{f} \in F$,*

$$T^{-1}(\chi_B \cdot \tilde{\mathrm{f}}) = \chi_{M(B)} \cdot \widetilde{\mathbf{K}_B(\mathrm{f})}.$$

Además, es sencillo observar que $M = H^{-1}$ y que, para cada $A \in \mathtt{Comp}_1(X)$, $\mathbf{K}_{H(A)} = \mathbf{J}_A^{-1}$. De esta manera, tenemos que

$$T^{-1}(\chi_{H(A)} \cdot \tilde{\mathrm{f}}) = \chi_A \cdot \widetilde{\mathbf{J}_A^{-1}(\mathrm{f})}$$

para toda $A \in \mathtt{Comp}_1(X)$ y $\mathrm{f} \in F$.

A continuación, veremos que la aplicación H descrita en el Lema 3.4.4 preserva distancias menores que 2.

Lema 3.4.6 *Sean* $A, B \in \mathtt{Comp}_1(X)$. *Si* $\min\{d(A,B), d(H(A),H(B))\} < 2$, *entonces* $d(A,B) = d(H(A),H(B))$.

Demostración. Supongamos que A y B son dos 1-componentes de X tales que $\min\{d(A,B), d(H(A),H(B))\} = d(H(A),H(B)) < 2$. Entonces, para probar el lema, basta ver que $d(A,B) \leq d(H(A),H(B))$. Para simplificar la notación, definiremos $D_1 := d(A,B)$ y $D_2 := d(H(A),H(B))$.

En primer lugar, tomemos $\mathrm{f} \in F$ no nulo y definamos $g \in \mathrm{Lip}(Y,F)$ como

$$g := \left(\chi_{H(A)} - \chi_{H(B)}\right) \cdot \tilde{\mathrm{f}},$$

es decir,

$$g(y) = \begin{cases} \mathrm{f} & \text{si } y \in H(A) \\ -\mathrm{f} & \text{si } y \in H(B) \\ 0 & \text{si } y \in Y \setminus (H(A) \cup H(B)). \end{cases}$$

Entonces, es obvio que $\|g\|_\infty = \|\mathrm{f}\|$. Además,

$$L(g) = \sup_{\substack{C \in \mathtt{Comp}_1(Y) \\ C \neq H(A), H(B)}} \left\{ \frac{\|\mathrm{f}\|}{d(H(A),C)}, \frac{\|-\mathrm{f}\|}{d(H(B),C)}, \frac{\|\mathrm{f} - (-\mathrm{f})\|}{D_2} \right\}. \tag{3.20}$$

Ahora, puesto que $d(H(A),C) \geq 1$ y $d(H(B),C) \geq 1$ para toda 1-componente C de Y, y estamos suponiendo que $D_2 < 2$, obtenemos que

$$L(g) = \frac{2\|\mathrm{f}\|}{D_2} > \|\mathrm{f}\| = \|g\|_\infty, \tag{3.21}$$

lo que implica que $\|g\|_L = 2\|\mathrm{f}\|/D_2$. Por otro lado, teniendo en cuenta la Observación 3.4.5, se tiene que

$$T^{-1}g = \chi_A \cdot \widetilde{\mathbf{J}_A^{-1}}(\mathrm{f}) - \chi_B \cdot \widetilde{\mathbf{J}_B^{-1}}(\mathrm{f}),$$

o lo que es lo mismo,

$$T^{-1}g(x) = \begin{cases} \mathbf{J}_A^{-1}(\mathrm{f}) & \text{si } x \in A \\ -\mathbf{J}_B^{-1}(\mathrm{f}) & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{si } x \in X \setminus (A \cup B). \end{cases}$$

Si tenemos en cuenta ahora que T^{-1} es también una isometría lineal suprayectiva, podemos aplicar el Corolario 3.3.4, con lo que T^{-1} es una isometría respecto a la norma del supremo. Así, observando (3.21), obtenemos que $\|T^{-1}g\|_L > \|T^{-1}g\|_\infty$. Además, como $\mathbf{J}_A^{-1}$ es una isometría para toda $A \in \mathtt{Comp}_1(X)$, tenemos que $\|T^{-1}g\|_\infty = \|\mathrm{f}\|$, por lo que un razonamiento análogo al seguido en (3.20) nos permite concluir que

$$\left\|T^{-1}g\right\|_L = L(T^{-1}g) = \frac{\left\|\mathbf{J}_A^{-1}(\mathrm{f}) - (-\mathbf{J}_B^{-1}(\mathrm{f}))\right\|}{d(A,B)} = \frac{\left\|\mathbf{J}_A^{-1}(\mathrm{f}) + \mathbf{J}_B^{-1}(\mathrm{f})\right\|}{D_1}.$$

Finalmente, por ser T^{-1} una isometría, tenemos que

$$\frac{2\,\|\mathrm{f}\|}{D_2} = \frac{\left\|\mathbf{J}_A^{-1}(\mathrm{f}) + \mathbf{J}_B^{-1}(\mathrm{f})\right\|}{D_1}.$$

Ahora bien, $\left\|\mathbf{J}_A^{-1}(\mathrm{f}) + \mathbf{J}_B^{-1}(\mathrm{f})\right\|/D_1 \leq 2\,\|\mathrm{f}\|/D_1$ por ser $\mathbf{J}_A^{-1}$ y $\mathbf{J}_B^{-1}$ sendas isometrías, luego

$$\frac{2\,\|\mathrm{f}\|}{D_2} \leq \frac{2\,\|\mathrm{f}\|}{D_1},$$

y como consecuencia $D_1 \leq D_2$. Esto prueba el lema en el caso en que $\min\{d(A,B), d(H(A),H(B))\} = d(H(A),H(B)) < 2$.

Para el caso en que $\min\{d(A,B), d(H(A),H(B))\} = d(A,B) < 2$, se procederá de manera análoga. □

Para finalizar esta sección, veremos un resultado que caracteriza la imagen por T de las funciones constantes definidas en X.

Corolario 3.4.7 *Existe una aplicación $J : Y \to I(E,F)$ constante en cada 2-componente de Y tal que $T\tilde{\mathrm{e}}(y) = (Jy)(\mathrm{e})$ para todo $\mathrm{e} \in E$ e $y \in Y$.*

Demostración. En virtud del Lema 3.4.4, sabemos que existe una isometría lineal suprayectiva $\mathbf{J}_A$ asociada a cada 1-componente A de X. De esta manera, podemos definir $Jy := \mathbf{J}_A$ para todo $y \in H(A)$, lo que nos permite considerar la aplicación

$$\begin{array}{rccc} J: & Y & \to & I(E,F) \\ & y & \mapsto & Jy. \end{array}$$

Veamos ahora que J es constante en cada 2-componente de Y. Por definición de cada Jy, será suficiente probar que $\mathbf{J}_A \equiv \mathbf{J}_B$ siempre que A y B sean dos 1-componentes de X que satisfacen que $d(H(A),H(B)) < 2$.

Para ello, tomemos $A, B \in \texttt{Comp}_1(X)$ tales que $d(H(A), H(B)) < 2$. En primer lugar, por el Lema 3.4.6, tenemos que $d(A, B) = d(H(A), H(B))$, por lo que también es cierto que $d(A, B) < 2$. Consideremos ahora $\mathrm{e} \in E$ no nulo y definamos $f \in \mathrm{Lip}(X, E)$ como

$$f := (\chi_A - \chi_B) \cdot \tilde{\mathrm{e}}.$$

Resulta sencillo observar que $\|f\|_\infty = \|\mathrm{e}\|$. Además, aplicando un razonamiento análogo al dado en (3.20), se tiene que

$$L(f) = \frac{\|\mathrm{e} - (-\mathrm{e})\|}{d(A, B)} = \frac{2\,\|\mathrm{e}\|}{d(A, B)},$$

y como $d(A, B) < 2$, podemos asegurar que

$$\|f\|_L = L(f) > \|f\|_\infty\,. \tag{3.22}$$

Ahora, en virtud del Lema 3.4.4, tenemos que

$$Tf = \chi_{H(A)} \cdot \widetilde{\mathbf{J}_A(\mathrm{e})} - \chi_{H(B)} \cdot \widetilde{\mathbf{J}_B(\mathrm{e})},$$

y como T es una isometría para la norma del supremo (ver Corolario 3.3.4), teniendo en cuenta (3.22) y aplicando un razonamiento similar al seguido en (3.20), deducimos que

$$\|Tf\|_L = L(Tf) = \frac{\|\mathbf{J}_A(\mathrm{e}) - (-\mathbf{J}_B(\mathrm{e}))\|}{d(H(A), H(B))} = \frac{\|\mathbf{J}_A(\mathrm{e}) + \mathbf{J}_B(\mathrm{e})\|}{d(H(A), H(B))}.$$

Esto nos permite concluir, por ser T una isometría, que

$$\frac{2\,\|\mathrm{e}\|}{d(A, B)} = \frac{\|\mathbf{J}_A(\mathrm{e}) + \mathbf{J}_B(\mathrm{e})\|}{d(H(A), H(B))},$$

y como además hemos visto que $d(A, B) = d(H(A), H(B))$,

$$\|\mathbf{J}_A(\mathrm{e}) + \mathbf{J}_B(\mathrm{e})\| = 2\,\|\mathrm{e}\|\,.$$

Si a esto último le unimos que $\|\mathbf{J}_A(\mathrm{e})\| = \|\mathrm{e}\| = \|\mathbf{J}_B(\mathrm{e})\|$ por ser $\mathbf{J}_A$ y $\mathbf{J}_B$ sendas isometrías, podemos afirmar que $\mathbf{J}_A(\mathrm{e}) = \mathbf{J}_B(\mathrm{e})$ puesto que F es un espacio normado estrictamente convexo. En consecuencia, para cualesquiera $A, B \in \texttt{Comp}_1(X)$ con $d(H(A), H(B)) < 2$, queda probado que $\mathbf{J}_A(\mathrm{e}) = \mathbf{J}_B(\mathrm{e})$

para todo $\mathrm{e} \in E$, y, por consiguiente, que la aplicación J es constante en cada 2-componente de Y.

Por último, tomemos $\mathrm{e} \in E$ e $y \in Y$. Si suponemos que y pertenece a una 1-componente cualquiera $H(A)$ de Y, por definición de Jy y el Lema 3.4.4, se tiene que

$$(Jy)(\mathrm{e}) = \mathbf{J}_A(\mathrm{e}) = T\tilde{\mathrm{e}}(y),$$

lo que da por concluida la demostración del resultado. $\square$

3.5. Condiciones sobre la isometría

Como ya hemos indicado en la introducción del capítulo que nos ocupa, una de las maneras de abordar el problema de caracterizar las isometrías definidas entre espacios de funciones de Lipschitz es imponiendo condiciones sobre el comportamiento de la propia isometría. Pues bien, asumiendo que las isometrías lineales suprayectivas satisfacen que el conjunto A (véase (3.5)) es vacío y utilizando todos los resultados vistos previamente, vamos a tratar de caracterizar dichas aplicaciones en el caso en que las funciones de Lipschitz estén definidas en espacios métricos completos y tomen valores en espacios normados estrictamente convexos. Puesto que toda isometría lineal suprayectiva que satisface que el conjunto A es vacío es automáticamente biseparadora (véase el Teorema 3.3.5), por ser los espacios métricos de base completos, podemos hacer uso de los resultados obtenidos en el Capítulo 2, en los que caracterizamos las aplicaciones biseparadoras entre espacios de funciones de Lipschitz. Si además tenemos en cuenta los resultados vistos a lo largo de este capítulo, es posible probar el siguiente teorema.

Teorema 3.5.1 *Sean X e Y espacios métricos completos, E y F espacios normados estrictamente convexos y $T : \mathrm{Lip}(X, E) \to \mathrm{Lip}(Y, F)$ una isometría lineal suprayectiva tal que el conjunto $A = \{y \in Y : T\tilde{\mathrm{e}}(y) = 0 \ \forall \mathrm{e} \in E\}$ es vacío. Entonces existen una aplicación $h : Y \to X$ que preserva distancias menores que 2 y una aplicación $J : Y \to I(E, F)$ constante en cada 2-componente de Y tales que*

$$Tf(y) = (Jy)(f(h(y)))$$

para toda $f \in \mathrm{Lip}(X, E)$ e $y \in Y$.

Demostración. Según el Corolario 3.4.7, bajo estas condiciones, está probada la existencia de una aplicación $J : Y \to I(E, F)$ constante en cada 2-componente de Y que satisface

$$(Jy)(\mathrm{e}) = T\tilde{\mathrm{e}}(y) \tag{3.23}$$

para todo $\mathrm{e} \in E$ e $y \in Y$. Ahora, fijemos $f \in \mathrm{Lip}(X, E)$ e $y \in Y$. Como en el Teorema 3.3.5 hemos visto que T es biseparadora, podemos considerar el homeomorfismo $h : Y \to X$ asociado a T obtenido en el Teorema 2.5.15 del Capítulo 2 y definir la función $g \in \mathrm{Lip}(X, E)$ como

$$g := f - \widetilde{f(h(y))}.$$

Es obvio que $g(h(y)) = 0$, por lo que aplicando la Proposición 2.6.4 vista en el capítulo anterior deducimos que

$$Tf(y) = T\widetilde{f(h(y))}(y).$$

Finalmente, teniendo en cuenta la caracterización de la aplicación Jy dada en (3.23), podemos concluir que

$$Tf(y) = (Jy)(f(h(y))). \tag{3.24}$$

Por tanto, para finalizar esta demostración, es suficiente ver que h preserva distancias menores que 2. Para ello, probemos que, si $y_1, y_2 \in Y$ satisfacen que $\min\{d(y_1, y_2), d(h(y_1), h(y_2))\} < 2$, entonces $d(h(y_1), h(y_2)) = d(y_1, y_2)$. Supongamos que $\min\{d(y_1, y_2), d(h(y_1), h(y_2))\} = d(y_1, y_2) < 2$. Entonces, debemos probar que $d(h(y_1), h(y_2)) \leq d(y_1, y_2)$. Para simplificar la notación, definiremos $D := d(h(y_1), h(y_2))$. Tomemos $\mathrm{e} \in E$ con $\|\mathrm{e}\| = 1$ y definamos la función $g \in \mathrm{Lip}(X, E)$ como

$$g(x) := \max\left\{-1, 1 - \frac{2\, d(x, h(y_1))}{D}\right\} \cdot \mathrm{e}$$

para cada $x \in X$. Es sencillo observar que

$$\|g\|_\infty = 1,\ \ g(h(y_1)) = \mathrm{e},\ \ g(h(y_2)) = -\mathrm{e} \text{ y } L(g) = 2/D.$$

Además, teniendo en cuenta (3.24) y que $Jy_1 = Jy_2$ (puesto que $d(y_1, y_2) < 2$ y J es constante en cada 2-componente de Y), se tiene que

$$\begin{aligned}
\|Tg\|_L &\geq \frac{\|Tg(y_1) - Tg(y_2)\|}{d(y_1, y_2)} \\
&= \frac{\|(Jy_1)(g(h(y_1))) - (Jy_2)(g(h(y_2)))\|}{d(y_1, y_2)} \\
&= \frac{\|(Jy_1)(\mathrm{e}) - (Jy_2)(-\mathrm{e})\|}{d(y_1, y_2)} \\
&= \frac{2\,\|\mathrm{e}\|}{d(y_1, y_2)} \\
&= \frac{2}{d(y_1, y_2)} > 1, \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

lo que nos permite concluir, por ser T una isometría, que $\|g\|_L > 1$. Ahora bien, como $\|g\|_\infty = 1$, se tiene que

$$\|g\|_L = L(g) = 2/D,$$

y por tanto

$$\|Tg\|_L = 2/D.$$

Como consecuencia, puesto que hemos visto en (3.25) que $\|Tg\|_L \geq 2/d(y_1, y_2)$, obtenemos que

$$\frac{2}{D} \geq \frac{2}{d(y_1, y_2)},$$

es decir, que $D \leq d(y_1, y_2)$. Así, queda probado que $d(h(y_1), h(y_2)) = d(y_1, y_2)$ siempre que $\min\{d(y_1, y_2), d(h(y_1), h(y_2))\} = d(y_1, y_2) < 2$. Para analizar el caso en que $\min\{d(y_1, y_2), d(h(y_1), h(y_2))\} = d(h(y_1), h(y_2)) < 2$ se puede desarrollar un razonamiento análogo. $\square$

3.6. Condiciones sobre los espacios métricos

A diferencia de la sección anterior, en esta nos ocuparemos del estudio de las isometrías lineales suprayectivas definidas entre espacios de funciones de Lipschitz sin ningún tipo de condicionamiento adicional sobre las mismas. Sin embargo, para poder obtener una completa caracterización de tales aplicaciones, debemos imponer alguna condición sobre los espacios métricos de base. En concreto, asumiremos que los espacios métricos en los que se definen las funciones de Lipschitz son completos y 1-conexos, obteniendo de esta manera una generalización del resultado dado por N. Weaver en [73] al caso en que las funciones de Lipschitz toman valores en espacios normados estrictamente convexos.

Lo primero que haremos será definir los espacios métricos 1-conexos y mencionar una propiedad de los mismos.

Definición 3.6.1 *Un espacio métrico se dice que es* 1*-conexo si no se puede descomponer en dos subconjuntos (no vacíos) disjuntos cuya distancia sea mayor o igual que* 1*.*

Observación 3.6.2 *Teniendo en cuenta la definición de R-componente de un espacio métrico (Definición 3.4.1) y la Definición 3.6.1, resulta sencillo darse cuenta de que, si X es un espacio métrico* 1*-conexo, entonces, para todo $R \geq 1$, se tiene que $\texttt{Comp}_R(X) = \{X\}$.*

Antes de probar el primer resultado de esta sección, recordemos que el conjunto A se define como $A := \{y \in Y : T\tilde{\mathrm{e}}(y) = 0 \ \forall \mathrm{e} \in E\}$.

Pues bien, en el siguiente resultado veremos que, siempre que los espacios métricos de base sean 1-conexos, toda isometría lineal suprayectiva definida entre espacios de funciones de Lipschitz satisface que el conjunto A es vacío.

Proposición 3.6.3 *Sean X e Y espacios métricos* 1*-conexos, E y F espacios normados estrictamente convexos y $T : \mathrm{Lip}(X, E) \to \mathrm{Lip}(Y, F)$ una isometría lineal suprayectiva. Entonces el conjunto A es vacío.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que $A \neq \emptyset$. Es inmediato observar que A^c es también no vacío, ya que al ser T inyectiva, para cualquier $\mathrm{e} \in E$ no nulo, $T\tilde{\mathrm{e}}(y) \neq 0$ para algún $y \in Y$, con lo que $y \notin A$. Ahora, puesto que Y es 1-conexo, tenemos que $d(A^c, A) < 1$, y como consecuencia, existen $y_0 \in A^c$ y $\varepsilon > 0$ de modo que

$$d(y_0, A) < 1 - 2\varepsilon. \tag{3.26}$$

A continuación, consideremos $\mathrm{f} \in F$ con $\|\mathrm{f}\| = 1$ y definamos la función $g \in \mathrm{Lip}(Y, F)$ como

$$g(y) := \text{máx}\{0, 2 - d(y, y_0)\} \cdot \mathrm{f}$$

para todo $y \in Y$. Resulta sencillo comprobar que g satisface

$$\|g\|_L = \|g\|_\infty = \|g(y_0)\| = 2, \tag{3.27}$$

$$L(g) \leq 1,$$

y para todo $y \in Y$ tal que $y \neq y_0$, se tiene que

$$\|g(y)\| < 2.$$

Veamos que $\|T^{-1}g\|_L = \|T^{-1}g\|_\infty$. Supongamos que no es cierto, por lo que $\|T^{-1}g\|_\infty < L(T^{-1}g)$. Entonces, para cualquier $\mathrm{e} \in E$, existe una constante positiva M tal que

$$\left\|T^{-1}g\right\|_\infty + M\|\mathrm{e}\| < L(T^{-1}g),$$

lo que nos permite deducir que

$$\left\|T^{-1}g \pm M\tilde{\mathrm{e}}\right\|_\infty < L(T^{-1}g) = L(T^{-1}g \pm M\tilde{\mathrm{e}}).$$

Así, tenemos que

$$\left\|T^{-1}g \pm M\tilde{\mathrm{e}}\right\|_L = L(T^{-1}g \pm M\tilde{\mathrm{e}}) = L(T^{-1}g) = \left\|T^{-1}g\right\|_L.$$

Ahora bien, puesto que T es una isometría, si observamos (3.27), obtenemos que

$$\|g \pm MT\tilde{\mathrm{e}}\|_L = \|g\|_L = \|g(y_0)\|,$$

lo que implica que, en particular,

$$\|g(y_0) \pm MT\tilde{\mathrm{e}}(y_0)\| \leq \|g(y_0)\|.$$

Por tanto, como F es un espacio normado estrictamente convexo, atendiendo a la desigualdad (3.4), podemos concluir que $T\tilde{\mathrm{e}}(y_0) = 0$ para cualquier $\mathrm{e} \in E$, lo que contradice que y_0 pertenece a A^c. Queda probado entonces que $\|T^{-1}g\|_L = \|T^{-1}g\|_\infty$. Como consecuencia, por ser T una isometría, si tenemos en cuenta (3.27), obtenemos que

$$\left\|T^{-1}g\right\|_\infty = \left\|T^{-1}g\right\|_L = \|g\|_L = 2,$$

por lo que existe un punto x_0 en X tal que

$$\left\|T^{-1}g(x_0)\right\| > 2 - \varepsilon. \tag{3.28}$$

Ahora, es obvio que

$$T^{-1}g(x_0) = \left\|T^{-1}g(x_0)\right\| \frac{T^{-1}g(x_0)}{\|T^{-1}g(x_0)\|},$$

y si definimos

$$\alpha := \left\|T^{-1}g(x_0)\right\|$$

y

$$\mathrm{e}_1 := \frac{T^{-1}g(x_0)}{\|T^{-1}g(x_0)\|},$$

obtenemos $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha > 2 - \varepsilon$ (véase (3.28)) y $\mathrm{e}_1 \in E$ con $\|\mathrm{e}_1\| = 1$ tales que

$$T^{-1}g(x_0) = \alpha \mathrm{e}_1.$$

Por tanto, es inmediato comprobar que

$$\left\|\tilde{\mathrm{e}}_1 + T^{-1}g\right\|_L \geq \left\|\tilde{\mathrm{e}}_1(x_0) + T^{-1}g(x_0)\right\| = \|\mathrm{e}_1 + \alpha\mathrm{e}_1\| = (1+\alpha)\|\mathrm{e}_1\| > 3 - \varepsilon,$$

lo que nos permite deducir que

$$\|T\tilde{\mathrm{e}}_1 + g\|_L > 3 - \varepsilon$$

por ser T una isometría. Ahora bien, puesto que

$$L(T\tilde{\mathrm{e}}_1 + g) \leq L(T\tilde{\mathrm{e}}_1) + L(g) \leq 1 + 1 = 2,$$

podemos concluir que

$$\|T\tilde{\mathrm{e}}_1 + g\|_\infty > 3 - \varepsilon,$$

y en consecuencia, que el conjunto

$$B := \{y \in Y : \|(T\tilde{\mathrm{e}}_1 + g)(y)\| > 3 - \varepsilon\}$$

es no vacío. Como $\|\mathrm{e}_1\| = 1$ y T es una isometría, se tiene que $\|T\tilde{\mathrm{e}}_1(y)\| \leq 1$ para todo $y \in Y$, por lo que los puntos de B deben satisfacer que

$$\|g(y)\| > 2 - \varepsilon,$$

o equivalentemente, por definición de g, que

$$d(y, y_0) < \varepsilon.$$

De esta manera, para algún $y_1 \in Y$ con $d(y_0, y_1) < \varepsilon$, se tiene que

$$\|T\tilde{\mathrm{e}}_1(y_1) + g(y_1)\| > 3 - \varepsilon,$$

lo que implica que

$$\|T\tilde{\mathrm{e}}_1(y_1)\| > 1 - \varepsilon.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la desigualdad (3.26), existe $y_2 \in A$ con $d(y_0, y_2) \leq 1 - 2\varepsilon$, y como consecuencia

$$d(y_1, y_2) < 1 - 2\varepsilon + \varepsilon = 1 - \varepsilon.$$

Finalmente, como $y_2 \in A$, tenemos que $T\tilde{\mathrm{e}}_1(y_2) = 0$, lo que nos permite observar que

$$\frac{\|T\tilde{\mathrm{e}}_1(y_1) - T\tilde{\mathrm{e}}_1(y_2)\|}{d(y_1, y_2)} = \frac{\|T\tilde{\mathrm{e}}_1(y_1)\|}{d(y_1, y_2)} > \frac{1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon} = 1,$$

concluyendo que $L(T\tilde{\mathrm{e}}_1) > 1$. Esto nos lleva a una contradicción puesto que $\|\mathrm{e}_1\| = 1$ y T es una isometría, quedando así probado que $A = \emptyset$. $\square$

Por tanto, este resultado nos permite eliminar hipótesis relativas al comportamiento de la isometría añadiendo la condición de 1-conectividad sobre las espacios métricos de base.

Para finalizar, gracias a la Proposición 3.6.3 y al Teorema 3.5.1, podemos obtener una completa caracterización de las isometrías entre espacios de funciones de Lipschitz que extiende la dada por N. Weaver en [73].

Teorema 3.6.4 *Sean X e Y espacios métricos completos y 1-conexos, E y F espacios normados estrictamente convexos y T una aplicación entre* $\mathrm{Lip}(X, E)$ *y* $\mathrm{Lip}(Y, F)$. *Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *T es una isometría lineal suprayectiva.*

(ii) *Existen una aplicación $h : Y \to X$ que preserva distancias menores que 2 y una isometría lineal suprayectiva $\mathbf{J} : E \to F$ tales que*

$$Tf(y) = \mathbf{J}(f(h(y)))$$

para toda $f \in \mathrm{Lip}(X, E)$ e $y \in Y$.

Demostración. Para probar la implicación (ii) $\Longrightarrow$ (i), es suficiente aplicar la Proposición 3.2.5.

Veamos que (i) $\Longrightarrow$ (ii). Atendiendo a la Proposición 3.6.3, observamos que el conjunto A es vacío. Por tanto, estamos en disposición de aplicar el Teorema 3.5.1, el cual nos permite confirmar la existencia de una aplicación $h : Y \to X$ que preserva distancias menores que 2 y de una aplicación $J : Y \to I(E, F)$ constante en cada 2-componente de Y tales que

$$Tf(y) = (Jy)(f(h(y)))$$

para toda $f \in \mathrm{Lip}(X, E)$ e $y \in Y$. Ahora bien, como hemos visto en la Observación 3.6.2, puesto que Y es un espacio métrico 1-conexo, se tiene que $\mathtt{Comp}_2(Y) = \{Y\}$, lo que implica que la aplicación J es constante en todo Y. Esto nos permite definir una isometría lineal suprayectiva $\mathbf{J} : E \to F$ como $\mathbf{J} := Jy$ para cualquier $y \in Y$. Finalmente, tenemos que

$$Tf(y) = \mathbf{J}(f(h(y)))$$

para toda $f \in \mathrm{Lip}(X, E)$ e $y \in Y$. $\square$

Capítulo 4

Aplicaciones que preservan ceros comunes

4.1. Introducción

En este capítulo pretendemos caracterizar las aplicaciones lineales y biyectivas que preservan ceros comunes entre ciertos subespacios de funciones continuas. Concretamente, dados $A(X,E) \subset C(X,E)$ y $A(Y,F) \subset C(Y,F)$, se dice que una aplicación $T : A(X,E) \to A(Y,F)$ preserva ceros comunes si

$$Z(f) \cap Z(g) \neq \emptyset \Longleftrightarrow Z(Tf) \cap Z(Tg) \neq \emptyset$$

para cualesquiera $f, g \in A(X,E)$, donde $Z(f) := \{x \in X : f(x) = 0\}$.

El estudio de estas aplicaciones viene motivado por el trabajo llevado a cabo por D. H. Leung y W. K. Tang en [61]. En este artículo, se consideran, para espacios de Tichonov X e Y, espacios vectoriales topológicos Hausdorff E y F y determinados subespacios de funciones continuas $A(X,E)$ y $A(Y,F)$, aplicaciones lineales $T : A(X,E) \to A(Y,F)$ que satisfacen

$$\cap_{i=1}^{n} Z(f_i) \neq \emptyset \Longleftrightarrow \cap_{i=1}^{n} Z(Tf_i) \neq \emptyset \tag{Z}$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier familia de funciones $(f_i)_{i=1}^{n}$ en $A(X,E)$. En particular, en el caso en que X e Y son espacios realcompactos, probaron que todo isomorfismo $T : C(X,E) \to C(Y,F)$ que satisface la propiedad (Z) es de la forma

$$Tf(y) = (Jy)(f(h(y)))$$

para toda $f \in C(X,E)$ e $y \in Y$, siendo $h : Y \to X$ un homeomorfismo y $Jy : E \to F$ un isomorfismo para cada $y \in Y$. Además, se obtiene un resultado análogo para espacios de funciones diferenciables. Asimismo, los resultados obtenidos en este trabajo resuelven una conjetura que Z. Ercan y S. Önal propusieron en [30] y en la que afirmaban que

"Si X e Y son espacios compactos y Hausdorff y E y F son retículos completos, entonces todo isomorfismo de retículos $T : C(X,E) \to C(Y,F)$ tal que

$$Z(f) \neq \emptyset \Longleftrightarrow Z(Tf) \neq \emptyset \tag{P}$$

para cualquier $f \in C(X,E)$ induce un homeomorfismo entre X e Y y un isomorfismo de retículos entre E y F."

En [24], N. C. Wong y sus colaboradores también demostraron dicha conjetura de manera casi simultánea. Anteriormente, ésta había sido estudiada tan sólo en ciertos casos particulares. Por ejemplo, cuando $F = \mathbb{R}$, la conjetura fue probada en [23], mientras que en [63] se prueba el caso en que F no tiene divisores de cero. Además, los propios Z. Ercan y S. Önal, en [30] y [31], obtienen dicho resultado para distintos tipos de retículos completos.

Por otro lado, la versión de Lipschitz de la conjetura anterior es obtenida en [51]. En concreto, se proporciona una completa descripción de los isomorfismos $T : A(X,E) \to A(Y,F)$ que satisfacen la propiedad (P), siendo X e Y espacios métricos compactos, E y F retículos completos y $A(X,E)$ y $A(Y,F)$ sendos subretículos de $\mathrm{Lip}(X,E)$ y $\mathrm{Lip}(Y,F)$, respectivamente, que separan y unen puntos uniformemente.

Después de motivar el tema que abordaremos en este capítulo, debemos indicar que el principal resultado obtenido en el mismo proporciona las propiedades que deben satisfacer los subespacios de funciones continuas $A(X,E)$ y $A(Y,F)$ (inicio de la Sección 4.2) para poder determinar una caracterización de las aplicaciones que preservan ceros comunes definidas entre ellos en el caso en que X e Y sean espacios métricos y E y F espacios normados (Teorema 4.4.5). Como consecuencia de esta descripción, comprobaremos que dichas aplicaciones se encuentran estrechamente relacionadas con las aplicaciones biseparadoras (Corolario 4.4.8), lo que nos permitirá aplicar resultados ya conocidos que caracterizan tales aplicaciones y deducir, en algunos casos concretos, la continuidad automática de las aplicaciones que preservan ceros comunes (Teoremas 4.5.1, 4.5.2 y 4.5.5).

4.2. Notación y resultados preliminares

A partir de este momento y mientras no se especifique lo contrario, vamos a suponer que X e Y son espacios métricos y E y F espacios normados. Además, mediante $A(X,E)$ representaremos cualquier subespacio de $C(X,E)$ (respectivamente $A(Y,F) \subset C(Y,F)$) y $A(X)$ denotará cualquier subanillo de $C(X)$ (respectivamente $A(Y) \subset C(Y)$) que satisfacen las siguientes propiedades:

1. $A(X,E)$ contiene funciones que no se anulan en ningún punto de X.

2. $A(X,E)$ es un módulo sobre $A(X)$.

3. Para cada $x_0 \in X$, existe una función f_{x_0} en $A(X,E)$ tal que
$$Z(f_{x_0}) = \{x_0\}.$$

4. $A(X)$ es completamente regular, esto es, dados un punto x_0 en X y un subconjunto cerrado C de X tales que $x_0 \notin C$, existe una función $\varphi \in A(X)$ tal que $\varphi(x_0) = 1$ y $\varphi \equiv 0$ en C.

Se entiende que $A(Y,F)$ y $A(Y)$ también satisfacen las propiedades anteriormente mencionadas.

A continuación, enunciaremos las definiciones de conjunto *zero* asociado a una función y de aplicación que preserva ceros comunes definida entre subespacios de funciones continuas.

Definición 4.2.1 *Dada una función $f : X \to E$, definiremos el conjunto zero asociado a f como*
$$Z(f) := \{x \in X : f(x) = 0\}.$$

Definición 4.2.2 *Una aplicación lineal $T : A(X,E) \to A(Y,F)$ se dice que preserva ceros comunes si*
$$Z(f) \cap Z(g) \neq \emptyset \Longleftrightarrow Z(Tf) \cap Z(Tg) \neq \emptyset$$
para cualesquiera $f, g \in A(X,E)$.

Lema 4.2.3 *Si los subespacios $A(X,E)$ y $A(Y,F)$ satisfacen la propiedad* (3) *y $T : A(X,E) \to A(Y,F)$ es una aplicación lineal y biyectiva que preserva ceros comunes, entonces, para toda $f \in A(X,E)$, se tiene que*

$$Z(f) \neq \emptyset \Longleftrightarrow Z(Tf) \neq \emptyset.$$

Demostración. Para probar dicha propiedad, tomaremos una función f en $A(X,E)$ tal que $Z(f) \neq \emptyset$. Si consideramos un punto x_0 de $Z(f)$, sabemos, por hipótesis, que existe $f_{x_0} \in A(X,E)$ con $Z(f_{x_0}) = \{x_0\}$. Por tanto, $Z(f) \cap Z(f_{x_0}) = \{x_0\}$, lo que implica que $Z(Tf) \cap Z(Tf_{x_0}) \neq \emptyset$, y, en particular, $Z(Tf) \neq \emptyset$. El recíproco se prueba de manera análoga. □

Observación 4.2.4 *El lema anterior pone de manifiesto que las aplicaciones lineales y biyectivas que preservan ceros comunes entre subespacios de funciones continuas que satisfacen la propiedad* (3) *están estrechamente relacionadas con las aplicaciones consideradas en la conjetura mencionada en la introducción del capítulo. Además, el recíproco también es cierto en algunos casos particulares, esto es, existen aplicaciones definidas entre subespacios de funciones continuas que satisfacen la propiedad* (P) *y que preservan ceros comunes. De hecho, algunas de estas aplicaciones también satisfacen la propiedad* (Z). *A continuación, veremos un par de resultados que certifican este hecho (NOTA: en los dos próximos lemas, utilizaremos notación propia de retículos y de C^*-álgebras).*

Lema 4.2.5 *Sean X e Y espacios métricos, E y F retículos y $T : C(X,E) \to C(Y,F)$ un isomorfismo de retículos que satisface*

$$Z(f) \neq \emptyset \Longleftrightarrow Z(Tf) \neq \emptyset$$

para toda $f \in C(X,E)$. Entonces T satisface la propiedad (Z).

Demostración. Dadas $f_1, \ldots, f_n \in C(X,E)$, consideremos la función $f \in C(X,E)$ definida como

$$f := |f_1| \vee \cdots \vee |f_n|,$$

siendo $|f_i| = f_i \vee (-f_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Puesto que T es un isomorfismo de retículos, se tiene que

$$Tf = |Tf_1| \vee \cdots \vee |Tf_n|.$$

Por otro lado, no resulta demasiado complicado observar que

$$Z(f) = \cap_{i=1}^{n} Z(f_i).$$

Por tanto, a tenor de la propiedad que satisface la aplicación T por hipótesis, podemos concluir que

$$\cap_{i=1}^{n} Z(f_i) \neq \emptyset \Longleftrightarrow \cap_{i=1}^{n} Z(Tf_i) \neq \emptyset,$$

quedando así probado que T satisface la propiedad (Z). $\square$

Lema 4.2.6 *Sean X e Y espacios métricos, E y F sendas C^*-álgebras y $T : C(X,E) \to C(Y,F)$ un $*$-isomorfismo de álgebras que satisface*

$$Z(f) \neq \emptyset \Longleftrightarrow Z(Tf) \neq \emptyset$$

para toda $f \in C(X,E)$. Entonces T satisface la propiedad (Z)*.*

Demostración. Dadas $f_1, \ldots, f_n \in C(X,E)$, vamos a definir la función $f \in C(X,E)$ como

$$f := \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot f_i^*,$$

donde $f_i^*(x) = f_i(x)^*$ para todo $x \in X$. Es sencillo comprobar que

$$Z(f) = \cap_{i=1}^{n} Z(f_i).$$

Además, por ser T un $*$-isomorfismo de álgebras, se tiene que

$$Tf = \sum_{i=1}^{n} Tf_i \cdot (Tf_i)^*,$$

y si tenemos en cuenta la propiedad que satisface T, podemos deducir trivialmente que

$$\cap_{i=1}^{n} Z(f_i) \neq \emptyset \Longleftrightarrow \cap_{i=1}^{n} Z(Tf_i) \neq \emptyset.$$

$\square$

4.3. X e Y son homeomorfos

En esta sección, trataremos de probar que toda aplicación lineal y biyectiva que preserva ceros comunes definida entre subespacios de funciones continuas que satisfacen las propiedades mencionadas al inicio de la Sección 4.2 induce un homeomorfismo entre los espacios métricos X e Y.

Para simplificar la notación, a lo largo de esta sección asumiremos que T es una aplicación lineal y biyectiva que preserva ceros comunes definida entre $A(X, E)$ y $A(Y, F)$. Además, mediante Φ_X y Φ_Y denotaremos sendas funciones de $A(X, E)$ y $A(Y, F)$ que no se anulan en ningún punto de X ni de Y, respectivamente, y cuya existencia está garantizada por la propiedad (1) mencionada en la sección anterior.

Proposición 4.3.1 *Sea $x_0 \in X$. Entonces, existe un único punto y_0 en Y tal que $Z(Tf) = \{y_0\}$ siempre que $Z(f) = \{x_0\}$.*

Demostración. Sea $f \in A(X, E)$ tal que $Z(f) = \{x_0\}$. Teniendo en cuenta el Lema 4.2.3, es inmediato deducir que $Z(Tf) \neq \emptyset$. Supongamos ahora que existen dos puntos distintos y_1 e y_2 en Y que pertenecen a $Z(Tf)$. Puesto que estamos asumiendo que $A(Y)$ es completamente regular, sabemos que existe una función $\varphi \in A(Y)$ con $\varphi(y_1) = 1$ y $\varphi(y_2) = 0$. Ahora, si consideramos la función $\Phi_Y \in A(Y, F)$ que no se anula en Y y definimos

$$g := \varphi \cdot \Phi_Y$$

y

$$l := \Phi_Y - g,$$

resulta sencillo observar que tanto g como l pertenecen a $A(Y, F)$ por ser un módulo sobre $A(Y)$. Por definición de g y l, se tiene que $g(y_2) = 0$ y $l(y_1) = 0$, por lo que $Z(T^{-1}g) \neq \emptyset$ y $Z(T^{-1}l) \neq \emptyset$ en virtud del Lema 4.2.3. Ahora bien, como $y_2 \in Z(g) \cap Z(Tf)$, se deduce que $Z(T^{-1}g) \cap Z(f) \neq \emptyset$. Además, por hipótesis, sabemos que $Z(f) = \{x_0\}$, por lo que

$$x_0 \in Z(T^{-1}g).$$

De manera análoga, tenemos que $Z(T^{-1}l) \cap Z(f) \neq \emptyset$ pues $y_1 \in Z(l) \cap Z(Tf)$, y de nuevo, como $Z(f) = \{x_0\}$, se tiene que

$$x_0 \in Z(T^{-1}l).$$

Por consiguiente, podemos concluir que

$$0 = T^{-1}g(x_0) + T^{-1}l(x_0) = T^{-1}\Phi_Y(x_0),$$

y como consecuencia

$$Z(\Phi_Y) \neq \emptyset,$$

lo cual es absurdo puesto que Φ_Y es una función de $A(Y, F)$ que no se anula en ningún punto de Y.

Para finalizar, supongamos que existe una función $f_1 \in A(X, E)$ distinta de f que satisface que $Z(f_1) = \{x_0\}$. Entonces, por el razonamiento anterior, sabemos que existe un único punto en $Z(Tf_1)$. Además, $Z(Tf) \cap Z(Tf_1) \neq \emptyset$ dado que $x_0 \in Z(f) \cap Z(f_1)$, por lo que $Z(Tf_1)$ ha de coincidir con $Z(Tf)$.

Así, queda probado que existe un único y_0 en Y tal que $Z(Tf) = \{y_0\}$ siempre que $Z(f)$ está formado por un único punto de X. $\square$

Observación 4.3.2 *La proposición anterior nos permite definir una aplicación $k : X \to Y$ que envía cada punto $x \in X$ al único punto $y \in Y$ que satisface que $Z(Tf) = \{y\}$ siempre que $Z(f) = \{x\}$ para alguna función f en $A(X, E)$. Teniendo en cuenta la propiedad (3) mencionada en la sección anterior, se deduce de inmediato que el dominio de la aplicación k es todo el conjunto X.*

Lema 4.3.3 *Sean $f \in A(X, E)$ y $x_0 \in X$ tales que $f(x_0) = 0$. Entonces $Tf(k(x_0)) = 0$.*

Demostración. En virtud de la propiedad (3) dada en la sección anterior, sabemos que existe $f_{x_0} \in A(X, E)$ tal que $Z(f_{x_0}) = \{x_0\}$. Por tanto, se tiene que $Z(Tf_{x_0}) \cap Z(Tf) \neq \emptyset$ puesto que $x_0 \in Z(f_{x_0}) \cap Z(f)$. Además, si tenemos en cuenta la Proposición 4.3.1 y la definición de la aplicación k dada en la Observación 4.3.2, deducimos que $Z(Tf_{x_0}) = \{k(x_0)\}$, por lo que $k(x_0)$ pertenece a $Z(Tf)$. $\square$

Ahora bien, puesto que T es una aplicación biyectiva, podemos considerar su aplicación inversa $T^{-1} : A(Y, F) \to A(X, E)$, la cual también preserva ceros comunes. Por tanto, como consecuencia de la Proposición 4.3.1 y de la Observación 4.3.2, es posible construir una aplicación $h : Y \to X$ asociada a T^{-1}. Finalmente, relacionado con dicha aplicación h, podemos reenunciar el Lema 4.3.3 en términos de T^{-1}.

Lema 4.3.4 *Sean $g \in A(Y,F)$ e $y_0 \in Y$ tales que $g(y_0) = 0$. Entonces $T^{-1}g(h(y_0)) = 0$.*

El siguiente teorema constituye el primero de los resultados importantes que veremos en este capítulo.

Teorema 4.3.5 *$h : Y \to X$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Lo primero que haremos será probar que h es una aplicación biyectiva. Para ello, será suficiente ver que k es la aplicación inversa de h, por lo que debemos comprobar que $(k \circ h)(y) = y$ para todo $y \in Y$ y que $(h \circ k)(x) = x$ para todo $x \in X$.
Supongamos que no se tiene la primera de las igualdades. Por lo tanto, existe un punto y_0 en Y tal que $k(h(y_0)) \neq y_0$. Como estamos asumiendo que $A(Y)$ es completamente regular, podemos tomar $\varphi \in A(Y)$ con $\varphi(k(h(y_0))) = 1$ y $\varphi(y_0) = 0$, y finalmente definir

$$g := \varphi \cdot \Phi_Y.$$

Es obvio que $g \in A(Y,F)$ y que además $g(y_0) = 0$, por lo que el Lema 4.3.4 nos permite concluir que

$$T^{-1}g(h(y_0)) = 0.$$

Ahora bien, por el Lema 4.3.3, tenemos que $[T(T^{-1}g)](k(h(y_0))) = 0$, es decir,

$$g(k(h(y_0))) = 0,$$

lo que nos lleva a una contradicción puesto que $\varphi(k(h(y_0))) = 1$ y Φ_Y es una función que no se anula en Y. Por tanto, queda probado que $(k \circ h)(y) = y$ para todo $y \in Y$. La otra igualdad se prueba de manera similar.

Finalmente, debemos probar que tanto h como k son funciones continuas. Supongamos que h no es continua. Entonces, existe una sucesión (y_n) en Y que converge a un punto $y_0 \in Y$ de manera que $(h(y_n))$ no converge a $h(y_0)$. Por tanto, sabemos que existe un entorno abierto U de $h(y_0)$ tal que $h(y_n) \notin U$ para infinitos $n \in \mathbb{N}$. Ahora, teniendo en cuenta que $A(X)$ es completamente regular, existe una función $\varphi \in A(X)$ que satisface que $\varphi(h(y_0)) = 1$ y $\varphi \equiv 0$ en $X \setminus U$. Por último, definamos la función $f \in A(X,E)$ como

$$f := \varphi \cdot \Phi_X.$$

Resulta inmediato observar, por definición de f, que existen infinitos $n \in \mathbb{N}$ tales que $f(h(y_n)) = 0$. Entonces, aplicando el Lema 4.3.3, obtenemos que $Tf(k(h(y_n))) = 0$, y, si tenemos en cuenta la primera parte de esta demostración, $Tf(y_n) = 0$ para una cantidad infinita de $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, como (y_n) converge a y_0 y Tf es continua, podemos afirmar que $Tf(y_0) = 0$. Para finalizar, por el Lema 4.3.4, obtenemos que $[T^{-1}(Tf)](h(y_0)) = 0$, o de manera equivalente,

$$f(h(y_0)) = 0,$$

lo cual es absurdo según la definición de la función f. Con ello, queda probado que h es una aplicación continua. Para ver que la aplicación k también es continua se puede proceder de manera análoga. $\square$

4.4. Representación

El objetivo en esta sección es obtener una completa descripción de las aplicaciones que preservan ceros comunes definidas entre subespacios de funciones continuas que satisfacen las propiedades dadas en la Sección 4.2. Como consecuencia de esta descripción, es sencillo deducir que toda aplicación que preserva ceros comunes es biseparadora.

Al igual que en la sección anterior, T representará una aplicación lineal y biyectiva que preserva ceros comunes definida entre $A(X, E)$ y $A(Y, F)$, y Φ_X y Φ_Y serán funciones de $A(X, E)$ y $A(Y, F)$ que no se anulan en ningún punto de X ni de Y, respectivamente. Además, h denotará el homeomorfismo entre los espacios métricos X e Y obtenido en el Teorema 4.3.5.

Definición 4.4.1 *Para cada $y \in Y$, consideremos los subespacios normados*

$$E_y := \{f(h(y)) : f \in A(X, E)\}$$

y

$$F_y := \{g(y) : g \in A(Y, F)\}$$

de E y F, respectivamente.

Observación 4.4.2 *Como estamos asumiendo que existen funciones que no se anulan tanto en $A(X, E)$ como en $A(Y, F)$, es inmediato observar que, para cada $y \in Y$, los subespacios normados E_y y F_y son no triviales.*

Definición 4.4.3 *Para cada $y \in Y$, definimos la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} Jy: & E_y & \to & F_y \\ & \mathrm{e} & \mapsto & (Jy)(\mathrm{e}) := Tf(y) \end{array}$$

siendo $f \in A(X, E)$ tal que $f(h(y)) = \mathrm{e}$.

En primer lugar, veamos que, si fijamos $y_0 \in Y$, la aplicación Jy_0 está bien definida. Para ello, tomemos $\mathrm{e} \in E_{y_0}$ y supongamos que existen dos funciones distintas $f_1, f_2 \in A(X, E)$ tales que $f_1(h(y_0)) = \mathrm{e} = f_2(h(y_0))$. Es obvio entonces que $(f_1 - f_2)(h(y_0)) = 0$, por lo que aplicando el Lema 4.3.3 obtenemos que $T(f_1 - f_2)(y_0) = 0$, es decir, que $Tf_1(y_0) = Tf_2(y_0)$, quedando así probado que Jy_0 está bien definida.

Lema 4.4.4 *La aplicación Jy es lineal y biyectiva para cada $y \in Y$.*

Demostración. Fijemos un punto $y_0 \in Y$ y veamos que la aplicación $Jy_0 : E_{y_0} \to F_{y_0}$ es lineal y biyectiva.

- Jy_0 es lineal: sean $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2 \in E_{y_0}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Entonces, existen $f_1, f_2 \in A(X, E)$ tales que $f_1(h(y_0)) = \mathrm{e}_1$ y $f_2(h(y_0)) = \mathrm{e}_2$. Además, por ser T lineal, se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha(Jy_0)(\mathrm{e}_1) + \beta(Jy_0)(\mathrm{e}_2) &= \alpha Tf_1(y_0) + \beta Tf_2(y_0) \\ &= T(\alpha f_1 + \beta f_2)(y_0) \\ &= (Jy_0)(\alpha \mathrm{e}_1 + \beta \mathrm{e}_2) \end{aligned}$$

  puesto que $(\alpha f_1 + \beta f_2)(h(y_0)) = \alpha \mathrm{e}_1 + \beta \mathrm{e}_2$.

- Jy_0 es inyectiva: veamos que, si $(Jy_0)(\mathrm{e}) = 0$ para algún $\mathrm{e} \in E_{y_0}$, entonces $\mathrm{e} = 0$. Supongamos que existe $\mathrm{e} \in E_{y_0}$ tal que $(Jy_0)(\mathrm{e}) = 0$. Por definición de Jy_0, se tiene que $Tf(y_0) = 0$ para alguna función $f \in A(X, E)$ con $f(h(y_0)) = \mathrm{e}$. Por otro lado, puesto que $Tf(y_0) = 0$, si aplicamos el Lema 4.3.4, deducimos que $f(h(y_0)) = 0$, lo que nos permite concluir que $\mathrm{e} = 0$.

- Jy_0 es suprayectiva: tomemos $\mathrm{f} \in F_{y_0}$ y veamos que existe $\mathrm{e} \in E_{y_0}$ tal que $(Jy_0)(\mathrm{e}) = \mathrm{f}$. Puesto que $\mathrm{f} \in F_{y_0}$, existe una función $g \in A(Y, F)$ con $g(y_0) = \mathrm{f}$. Además, puesto que T es suprayectiva, tenemos que $g = Tf$ para alguna $f \in A(X, E)$. Por tanto, si definimos

$$\mathrm{e} := f(h(y_0)),$$

es obvio que $\mathrm{e} \in E_{y_0}$ y además

$$(Jy_0)(\mathrm{e}) = Tf(y_0) = g(y_0) = \mathrm{f}.$$

Como este proceso se puede llevar a cabo para cada $y \in Y$, el lema queda probado. $\square$

En el siguiente teorema, obtenemos una caracterización de las aplicaciones lineales y biyectivas que preservan ceros comunes.

Teorema 4.4.5 *Sea $T : A(X,E) \to A(Y,F)$ una aplicación lineal, biyectiva y que preserva ceros comunes. Entonces existen un homeomorfismo $h : Y \to X$, subespacios normados $E_y \subset E$ y $F_y \subset F$, y una aplicación $Jy : E_y \to F_y$ lineal y biyectiva para cada $y \in Y$ tales que*

$$Tf(y) = (Jy)(f(h(y))) \tag{4.1}$$

para toda $f \in A(X,E)$ e $y \in Y$. Recíprocamente, si una aplicación lineal y biyectiva $T : A(X,E) \to A(Y,F)$ tiene la forma dada en (4.1), entonces T preserva ceros comunes.

Demostración. Sean $f \in A(X,E)$ e $y \in Y$. Es obvio que $f(h(y)) \in E_y$, y, por definición de $Jy : E_y \to F_y$ (véase la Definición 4.4.3), resulta trivial observar que

$$(Jy)(f(h(y))) = Tf(y).$$

Además, la existencia del homeomorfismo h entre Y y X fue probada en el Teorema 4.3.5. Finalmente, en el Lema 4.4.4, hemos visto que Jy es lineal y biyectiva para cada $y \in Y$.

Para probar el recíproco, supongamos que f y g son funciones de $A(X,E)$ tales que $Z(f) \cap Z(g) \neq \emptyset$. Entonces, existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = 0 = g(x_0)$, y por ser $h : Y \to X$ un homeomorfismo, existe $y_0 \in Y$ que satisface que $f(h(y_0)) = 0 = g(h(y_0))$. Ahora bien, como Jy_0 es inyectiva, se tiene que

$$(Jy_0)(f(h(y_0))) = 0 = (Jy_0)(g(h(y_0))),$$

y la igualdad (4.1) nos permite concluir que

$$y_0 \in Z(Tf) \cap Z(Tg).$$

De manera análoga podemos ver que, si $Z(Tf) \cap Z(Tg) \neq \emptyset$ para $f, g \in A(X,E)$, entonces $Z(f) \cap Z(g) \neq \emptyset$. $\square$

Los siguientes ejemplos ponen de manifiesto que el homeomorfismo h definido entre los espacios métricos X e Y viene en ocasiones determinado por los subespacios normados F_y de F.

Ejemplo 4.4.6 *Este ejemplo muestra que el homeomorfismo h puede quedar totalmente determinado por los subespacios normados de F.*

Sean $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$, $E = F = \mathbb{R}^4$, $A(X) = C(X)$ y $A(Y) = C(Y)$. Ahora, consideremos tres subespacios $E(a)$, $E(b)$ y $E(c)$ de E tales que $\dim(E(a)) = 1$, $\dim(E(b)) = 2$ *y* $\dim(E(c)) = 3$, *y finalmente definamos*

$$A(X, E) := \{f \in C(X, E) : f(a) \in E(a), f(b) \in E(b), f(c) \in E(c)\}.$$

Por otro lado, tomemos tres subespacios normados $F(1)$, $F(2)$ y $F(3)$ de F con $\dim(F(1)) = 1$, $\dim(F(2)) = 2$ *y* $\dim(F(3)) = 3$, *y definamos*

$$A(Y, F) := \{g \in C(Y, F) : g(1) \in F(1), g(2) \in F(2), g(3) \in F(3)\}.$$

Resulta sencillo comprobar que $A(X, E)$, $A(Y, F)$, $A(X)$ y $A(Y)$ son subespacios de funciones continuas que satisfacen las propiedades dadas en la Sección 4.2. Por tanto, si suponemos que existe una biyección lineal que preserva ceros comunes entre $A(X, E)$ y $A(Y, F)$, atendiendo al Teorema 4.4.5 y a la Definición 4.4.1, sabemos que, para cada $y \in \{1, 2, 3\}$, se tiene que

$$F_y = \{g(y) : g \in A(Y, F)\} = F(y).$$

Por otro lado, también hemos visto que, para cada $y \in \{1, 2, 3\}$, existe una aplicación lineal y biyectiva

$$Jy : E_y \to F_y$$

siendo

$$E_y = \{f(h(y)) : f \in A(X, E)\}.$$

Por tanto, no queda otra posibilidad que definir el homeomorfismo h como $h(1) = a$, $h(2) = b$ y $h(3) = c$.

Ejemplo 4.4.7 *En este otro ejemplo vamos a ver que, a diferencia del caso anterior, el homeomorfismo h puede no ser único.*

Supongamos que $X = Y = \mathbb{N}$, $E = F = \mathbb{R}^3$, $A(X) = C(X)$, $A(Y) = C(Y)$ y consideremos

$$A(X, E) := \{f \in C(X, E) : f(2n-1) \in E(2n-1), f(2n) \in E(2n), n \in \mathbb{N}\}$$

siendo $E(2n-1)$ *y* $E(2n)$ *subespacios de* E *tales que* $\dim(E(2n-1)) = 1$ *y* $\dim(E(2n)) = 2$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Por otro lado, definamos*

$$A(Y,F) := \{g \in C(Y,F) : g(2n-1) \in F(2n-1), g(2n) \in F(2n), n \in \mathbb{N}\}$$

para $F(2n-1), F(2n) \subset F$ *con* $\dim(F(2n-1)) = 2$ *y* $\dim(F(2n)) = 1$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *De nuevo, observamos que* $A(X,E)$, $A(Y,F)$, $A(X)$ *y* $A(Y)$ *satisfacen las propiedades establecidas en la Sección 4.2, por lo que si existe una aplicación lineal y biyectiva definida entre* $A(X,E)$ *y* $A(Y,F)$ *que preserva ceros comunes, tenemos que, por un lado, para cada* $n \in \mathbb{N}$,

$$F_{2n-1} = \{g(2n-1) : g \in A(Y,F)\} = F(2n-1)$$

y

$$F_{2n} = \{g(2n) : g \in A(Y,F)\} = F(2n).$$

Ahora, por definición,

$$E_{2n-1} = \{f(h(2n-1)) : f \in A(X,E)\}$$

y

$$E_{2n} = \{f(h(2n)) : f \in A(X,E)\}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, *y, además, es conocida la existencia de una aplicación lineal y biyectiva*

$$Jn : E_n \to F_n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. *Como consecuencia, se tiene que la imagen por* h *de un número impar ha de ser un número par y la imagen de un número par ha de ser un número impar, aunque no quedan unívocamente determinados.*

Una vez caracterizadas las biyecciones lineales que preservan ceros comunes en el Teorema 4.4.5, observando su representación, resulta prácticamente trivial deducir que tales aplicaciones son biseparadoras.

Corolario 4.4.8 T *es biseparadora.*

Demostración. Para probar que T es biseparadora, debemos ver que tanto ella como su inversa son aplicaciones separadoras. Supongamos que existen $f, g \in A(X,E)$ tales que $\operatorname{coz}(Tf) \cap \operatorname{coz}(Tg) \neq \emptyset$. Entonces, existe un punto y_0 en Y que satisface

$$Tf(y_0) \neq 0 \text{ y } Tg(y_0) \neq 0.$$

Por la representación de T dada en (4.1), se tiene que

$$(Jy_0)(f(h(y_0))) \neq 0 \text{ y } (Jy_0)(g(h(y_0))) \neq 0.$$

Por tanto, puesto que Jy_0 es inyectiva, deducimos que

$$h(y_0) \in \operatorname{coz}(f) \cap \operatorname{coz}(g),$$

lo que implica que T es una aplicación separadora. Análogamente se prueba que T^{-1} es también separadora. □

4.5. Continuidad

En este apartado, mostraremos algunos ejemplos de subespacios de funciones continuas para los cuales podemos aplicar los resultados obtenidos acerca de las aplicaciones que preservan ceros comunes definidas entre ellos. Además de esto, nuestro objetivo es tratar de proporcionar conclusiones acerca de la continuidad de dichas aplicaciones en estos casos particulares.

A continuación, analizaremos tres tipos de subespacios de funciones continuas definidas sobre espacios métricos concretos que toman valores en espacios de Banach arbitrarios.

4.5.1. Espacio de funciones absolutamente continuas

El primero de los subespacios de funciones continuas en el que nos vamos a fijar será el espacio de las funciones absolutamente continuas. Así, a partir de este momento, X e Y serán subconjuntos compactos de la recta real, E y F espacios de Banach, $A(X,E) = AC(X,E)$ denotará el espacio de todas las funciones absolutamente continuas definidas en X que toman valores en E, y $A(X) = AC(X)$ (respectivamente $A(Y,F) = AC(Y,F)$ y $A(Y) = AC(Y)$).

En este caso, como veremos a continuación, resulta sencillo comprobar que se satisfacen las propiedades mencionadas en la Sección 4.2.

1. $AC(X,E)$ contiene funciones que no se anulan en ningún punto de X. Concretamente, las funciones constantes pertenecen a $AC(X,E)$, por lo que es suficiente considerar $\tilde{\mathrm{e}}$ para cualquier $\mathrm{e} \in E$ no nulo.

2. $AC(X,E)$ es un módulo sobre $AC(X)$ (véase el Lema 1.2.4).

3. Dado $x_0 \in X$, si consideramos $\mathrm{e} \in E \setminus \{0\}$ y definimos

$$f_{x_0}(x) := (x - x_0) \cdot \mathrm{e}$$

para cada $x \in X$, es sencillo observar que $f_{x_0} \in AC(X, E)$ y además $Z(f_{x_0}) = \{x_0\}$.

4. $AC(X)$ es completamente regular. Dados un punto $x_0 \in X$ y un subconjunto cerrado $C \subset X$ tales que $x_0 \notin C$, el hecho de que $d(x_0, C) > 0$ nos permite definir, para todo $x \in X$,

$$\varphi(x) := \text{mín} \left\{ 1, \frac{d(x, C)}{d(x_0, C)} \right\},$$

donde $d(x, C) := \text{ínf} \{|x - y| : y \in C\}$. Trivialmente se observa que φ es absolutamente continua en X, $\varphi(x_0) = 1$ y $\varphi \equiv 0$ en C.

De esta manera, queda probado que es posible aplicar el Teorema 4.4.5 para caracterizar las aplicaciones que preservan ceros comunes definidas entre espacios de funciones absolutamente continuas. Además, el Corolario 4.4.8, nos facilita la obtención de condiciones bajo las cuales dichas aplicaciones son continuas.

Teorema 4.5.1 *Sea $T : AC(X, E) \to AC(Y, F)$ una aplicación lineal y biyectiva que preserva ceros comunes. Entonces, T es continua si una de las siguientes condiciones se satisface:*

(i) *E y F tienen la misma dimensión finita.*

(ii) *Y no tiene puntos aislados.*

Demostración. En virtud del Corolario 4.4.8, obtenemos que T es una aplicación biseparadora. Por tanto, podemos concluir el resultado atendiendo a los Teoremas 1.4.8 y 1.5.11 vistos en el Capítulo 1. □

4.5.2. Espacio de funciones de Lipschitz

En segundo lugar, nos vamos a centrar en el estudio de la continuidad de las aplicaciones que preservan ceros comunes definidas entre espacios de funciones de Lipschitz. Para ello, asumiremos que X e Y son espacios métricos completos, E y F espacios de Banach, $A(X, E) = \text{Lip}(X, E)$ representará el espacio de todas las funciones de Lipschitz acotadas definidas en X y que toman valores en E, mientras que $A(X) = \mathrm{Lip}(X)$ (respectivamente $A(Y,F) = \mathrm{Lip}(Y,F)$ y $A(Y) = \mathrm{Lip}(Y)$).

De nuevo, no resulta complicado observar que el espacio de las funciones de Lipschitz también satisface las propiedades indicadas en la Sección 4.2.

1. $\mathrm{Lip}(X,E)$ contiene funciones que no se anulan en ningún punto de X. En particular, las funciones constantes satisfacen la condición de Lipschitz, por lo que basta tomar la función $\tilde{\mathrm{e}}$ para cualquier $\mathrm{e} \in E\backslash\{0\}$.

2. $\mathrm{Lip}(X,E)$ es un módulo sobre $\mathrm{Lip}(X)$ (véase el Lema 2.4.2).

3. Sea $x_0 \in X$. Si tomamos $\mathrm{e} \in E$, $\mathrm{e} \neq 0$, y definimos
$$f_{x_0}(x) := \min\{1, d(x,x_0)\} \cdot \mathrm{e}$$
para cada $x \in X$, es obvio que f_{x_0} pertenece a $\mathrm{Lip}(X,E)$ y además se tiene que $Z(f_{x_0}) = \{x_0\}$.

4. $\mathrm{Lip}(X)$ es completamente regular. Dados un punto $x_0 \in X$ y un subconjunto cerrado C de X tales que $x_0 \notin C$, podemos definir, para todo $x \in X$,
$$\varphi(x) := \min\left\{1, \frac{d(x,C)}{d(x_0,C)}\right\},$$
donde $d(x,C) := \inf\{d(x,y) : y \in C\}$. Es sencillo comprobar que $\varphi \in \mathrm{Lip}(X)$ y que además satisface $\varphi(x_0) = 1$ y $\varphi \equiv 0$ en C.

Por tanto, es posible aplicar el Teorema 4.4.5 y el Corolario 4.4.8 en este contexto. Además, también podemos obtener condiciones bajo las cuales toda aplicación que preserva ceros comunes entre espacios de Lipschitz es continua.

Teorema 4.5.2 *Sea $T : \mathrm{Lip}(X,E) \to \mathrm{Lip}(Y,F)$ una aplicación lineal y biyectiva que preserva ceros comunes. Entonces, T es continua si una de las siguientes condiciones se satisface:*

(i) *Y no tiene puntos aislados.*

(ii) *E y F tienen la misma dimensión finita.*

Demostración. Teniendo en cuenta el Corolario 4.4.8, deducimos que T es una aplicación biseparadora. Por tanto, en virtud de los Corolarios 2.7.11 y 2.7.12 obtenidos en el Capítulo 2, es inmediato deducir el resultado. $\square$

4.5.3. Espacio de funciones diferenciables

Para finalizar, trataremos de deducir la continuidad automática de las aplicaciones que preservan ceros comunes definidas entre espacios de funciones diferenciables. Por tanto, a lo largo de este apartado, vamos a suponer que X e Y son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$, respectivamente, con $p, q \in \mathbb{N}$, E y F serán espacios de Banach, $A(X, E) = C^n(X, E)$ denotará el espacio de las funciones definidas en X que toman valores en E cuyas derivadas parciales hasta el orden n existen y son continuas, y $A(X) = C^n(X)$ para algún $n \in \mathbb{N}$, siendo $C^n(X) := C^n(X, \mathbb{K})$ (respectivamente $A(Y, F) = C^m(Y, F)$ y $A(Y) = C^m(Y)$ para algún $m \in \mathbb{N}$).

A continuación, comprobaremos que, dado $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $C^n(X, E)$ y $C^n(X)$ satisfacen las propiedades dadas en la Sección 4.2.

1. $C^n(X, E)$ contiene funciones que no se anulan en ningún punto de X.

2. $C^n(X, E)$ es un módulo sobre $C^n(X)$. Para probar esto, debemos ver que, dadas $f \in C^n(X)$ y $g \in C^n(X, E)$, se tiene que $f \cdot g \in C^n(X, E)$. Sea $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^p$ con $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p \leq n$. Entonces, la derivada parcial

$$\frac{\partial^{|\alpha|} (f \cdot g)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_p^{\alpha_p}} \tag{4.2}$$

se puede expresar en términos de sumas y productos de las propias funciones f y g, y de sus derivadas parciales hasta el orden $|\alpha|$. Como estamos asumiendo que $f \in C^n(X)$ y $g \in C^n(X, E)$, se tiene que estas últimas existen y además son continuas. Por tanto, podemos concluir que la derivada parcial dada en (4.2) también existe y es continua, y como esto es cierto para cualquier $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^p$ con $|\alpha| \leq n$, se tiene que $f \cdot g \in C^n(X, E)$.

3. Sean X un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^p$ y x_0 un punto de X. Entonces, si $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0) \in X$ y $\mathrm{e} \in E \setminus \{0\}$, no resulta complicado comprobar que la función $f_{x_0} : X \to E$ definida como

$$f_{x_0}(x) := \left(|x_1 - x_1^0|^2 + |x_2 - x_2^0|^2 + \cdots + |x_p - x_p^0|^2\right) \cdot \mathrm{e}$$

para cada $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in X$ pertenece a $C^n(X, E)$ y además satisface que $Z(f_{x_0}) = \{x_0\}$.

4. Para probar que $C^n(X)$ es completamente regular, primero recordaremos el Corolario 1.2 dado en [75], en el que se afirma que

   "Dados un subconjunto cerrado A y otro subconjunto abierto V de X con $A \subset V$, existe una función $\varphi \in C^\infty(X)$ tal que:

   (i) $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ *para todo* $x \in X$.

   (ii) $\varphi(x) = 1$ *para todo* $x \in A$.

   (iii) $\varphi(x) = 0$ *para todo* $x \in X \setminus V$."

   Supongamos ahora que x_0 es un punto de X y C un subconjunto cerrado de X tales que $x_0 \notin C$. Entonces, puesto que $C^\infty(X) \subset C^n(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, si atendemos al resultado anterior, basta tomar $A = \{x_0\}$ y $V = B(x_0, r)$ de manera que $V \cap C = \emptyset$ para deducir la existencia de una función $\varphi \in C^n(X)$ tal que $\varphi(x_0) = 1$ y $\varphi \equiv 0$ en C, lo que implica que $C^n(X)$ es completamente regular.

Por tanto, todos los resultados obtenidos a lo largo de este capítulo son válidos en este contexto. En particular, atendiendo al Corolario 4.4.8, podemos enunciar el siguiente resultado.

Corolario 4.5.3 *Toda aplicación lineal y biyectiva $T : C^n(X,E) \to C^m(Y,F)$ que preserva ceros comunes es biseparadora.*

Para finalizar, dotaremos los espacios de funciones diferenciables de una topología que nos permita deducir que toda aplicación que preserva ceros comunes definida entre dichos espacios es continua.

Definición 4.5.4 *Una topología localmente convexa en $C^n(X,E)$ se dice que es compatible con la convergencia puntual si se satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) *$C^n(X,E)$ con dicha topología es un espacio completo.*

(ii) *Si (f_n) es una sucesión en $C^n(X,E)$ que converge a* 0, *entonces $(f_n(x))$ converge a* 0 *para todo $x \in X$.*

A continuación, enunciaremos un resultado probado por J. Araujo en [5] que resultará determinante para lograr nuestro propósito.

"Supongamos que $C^n(X,E)$ y $C^m(Y,F)$ están dotados con topologías compatibles con la convergencia puntual. Entonces toda aplicación biseparadora $T : C^n(X,E) \to C^m(Y,F)$ es continua."

Como consecuencia de este resultado y del Corolario 4.5.3, es inmediato obtener el siguiente teorema.

Teorema 4.5.5 *Sea $T : C^n(X,E) \to C^m(Y,F)$ una aplicación lineal y biyectiva que preserva ceros comunes. Entonces, si $C^n(X,E)$ y $C^m(Y,F)$ están dotados con topologías compatibles con la convergencia puntual, se tiene que T es continua.*

Bibliografía

[1] Y. A. Abramovich, *Multiplicative representation of disjointness preserving operators*, Indag. Math. 45 (1983), 265-279.

[2] Y. A. Abramovich, A. I. Veksler y A. V. Koldunov, *On operators preserving disjointness*, Soviet Math. Dokl. 248 (1979), 1033-1036.

[3] E. Albrecht y M. Neumann, *Automatic continuity for operators of local type*, Lecture Notes in Mathematics 975, Springer-Verlag (1983), 342-355.

[4] E. Albrecht y M. Neumann, *Automatic continuity of generalized local linear operators*, Manuscripta Math. 32 (1980), 263-294.

[5] J. Araujo, *Linear biseparating maps between spaces of vector-valued differentiable functions and automatic continuity*, Adv. Math. 187 (2004), 488-520.

[6] J. Araujo, *Realcompactness and Banach-Stone theorems*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 11 (2004), 247-258.

[7] J. Araujo, *Realcompactness and spaces of vector-valued functions*, Fundamenta Math. 172 (2002), 27-40.

[8] J. Araujo, *Separating maps and linear isometries between some spaces of continuous functions*, J. Math. Anal. Appl. 226 (1998), 23-39.

[9] J. Araujo, *The noncompact Banach-Stone theorem*, J. Operator Theory 55 (2006), 285-294.

[10] J. Araujo, E. Beckenstein y L. Narici, *Biseparating maps and homeomorphic realcompactifications*, J. Math. Anal. Appl. 192 (1995), 258-265.

[11] J. Araujo, E. Beckenstein y L. Narici, *When is a separating map biseparating?*, Arch. Math. (Basel) 67 (1996), 395-407.

[12] J. Araujo y L. Dubarbie, *Biseparating maps between Lipschitz function spaces*, J. Math. Anal. Appl. 357 (2009), 191-200.

[13] J. Araujo y J. J. Font, *Linear isometries between subspaces of continuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), 413-428.

[14] J. Araujo y J. J. Font, *Linear isometries on subalgebras of uniformly continuous functions*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 43 (2000), 139-147.

[15] J. Araujo y K. Jarosz, *Automatic continuity of biseparating maps*, Studia Math. 155 (2003), 231-239.

[16] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Chelsea, New York (1932).

[17] E. Beckenstein y L. Narici, *Automatic continuity of certain linear isomorphisms*, Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. 73 (1987), 191-200.

[18] E. Beckenstein, L. Narici y A. Todd, *Automatic continuity of linear maps on spaces of continuous functions*, Manuscripta Math. 62 (1988), 257-275.

[19] E. Behrends, *M-structure and the Banach-Stone theorem*, Lecture Notes in Mathematics 736, Springer, Berlin (1979).

[20] J. Bustamante y J. R. Arrazola, *Homomorphisms on Lipschitz spaces*, Monatsh. Math. 129 (2000), 25-30.

[21] M. Cambern, *A Holsztyński theorem for spaces of continuous vector-valued functions*, Studia Math. 63 (1978), 213-217.

[22] M. Cambern y V. D. Pathak, *Isometries of spaces of differentiable functions*, Math. Japon. 26 (1981), 253-260.

[23] J. Cao, I. Reilly y H. Xiong, *A lattice-valued Banach-Stone theorem*, Acta Math. Hungar. 98 (2003), 103-110.

[24] J. X. Chen, Z. L. Chen y N. C. Wong, *A Banach-Stone theorem for Riesz isomorphisms of Banach lattices*, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), 3869-3874.

[25] K. De Leeuw, *Banach spaces of Lipschitz functions*, Studia Math. 21 (1961/1962), 55-66.

[26] L. Dubarbie, *Maps preserving common zeros between subspaces of vector-valued continuous functions*, Positivity, doi: 10.1007/s11117-010-0046-z.

[27] L. Dubarbie, *Separating maps between spaces of vector-valued absolutely continuous functions*, Canad. Math. Bull., doi: 10.4153/CMB-2010-035-7.

[28] N. Dunford y J. T. Schwartz, *Linear operators. Part I: General theory*, Wiley Interscience, New York, (1958).

[29] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlín (1989).

[30] Z. Ercan y S. Önal, *Banach-Stone theorem for Banach lattice valued continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007), 2827-2829.

[31] Z. Ercan y S. Önal, *The Banach-Stone theorem revisited*, Topology Appl. 155 (2008), 1800-1803.

[32] R. J. Fleming y J. E. Jamison, *Isometries on Banach spaces: function spaces*, Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 129 (2003).

[33] R. J. Fleming y J. E. Jamison, *Isometries on Banach spaces: vector-valued function spaces*, Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 138 (2008).

[34] J. J. Font, *Linear isometries between certain subspaces of continuous vector-valued functions*, Illinois J. Math. 42 (1998), 389-397.

[35] J. J. Font y S. Hernández, *On separating maps between locally compact spaces*, Arch. Math. (Basel) 63 (1994), 158-165.

[36] M. I. Garrido y J. A. Jaramillo, *Homomorphisms on function lattices*, Monatsh. Math. 141 (2004), 127-146.

[37] M. I. Garrido y J. A. Jaramillo, *Lipschitz-type functions on metric spaces*, J. Math. Anal. Appl. 340 (2008), 282-290.

[38] M. I. Garrido y J. A. Jaramillo, *Variations on the Banach-Stone theorem*, Extracta Math. 17 (2002), 351-383.

[39] H. L. Gau, J. S. Jeang y N. C. Wong, *Biseparating linear maps between continuous vector-valued function spaces*, J. Aust. Math. Soc. 74 (2003), 101-109.

[40] S. Hernández, E. Beckenstein y L. Narici, *Banach-Stone theorems and separating maps*, Manuscripta Math. 86 (1995), 409-416.

[41] E. Hewitt y K. Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer-Verlag, New York (1975).

[42] W. Holsztyński, *Continuous mappings induced by isometries of spaces of continuous functions*, Studia Math. 26 (1966), 133-136.

[43] C. B. Huijsmans y B. de Pagter, *Subalgebras and Riesz subspaces of an f-algebra*, Proc. London Math. Soc. 48 (1984), 161-174.

[44] K. Jarosz, *Automatic continuity of separating linear isomorphisms*, Canad. Math. Bull. 33 (1990), 139-144.

[45] K. Jarosz y V. D. Pathak, *Isometries between function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 305 (1988), 193-206.

[46] J. S. Jeang y N. C. Wong, *Into isometries of $C_0(X, E)$'s*, J. Math. Anal. Appl. 207 (1997), 286-290.

[47] J. S. Jeang y N. C. Wong, *On the Banach-Stone problem*, Studia Math. 155 (2003), 95-105.

[48] J. S. Jeang y N. C. Wong, *Weighted composition operators of $C_0(X)$'s*, J. Math. Anal. Appl. 201 (1996), 981-993.

[49] M. Jerison, *The space of bounded maps into a Banach space*, Ann. of Math. 52 (1950), 309-327.

[50] A. Jiménez-Vargas, *Disjointness preserving operators between little Lipschitz algebras*, J. Math. Anal. Appl. 337 (2008), 984-993.

[51] A. Jiménez-Vargas, A. Morales Campoy y M. Villegas-Vallecillos, *The uniform separation property and Banach-Stone theorems for lattice-valued Lipschitz functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), 3769-3777.

[52] A. Jiménez-Vargas y M. Villegas-Vallecillos, *Into linear isometries between spaces of Lipschitz functions*, Houston J. Math. 34 (2008), 1165-1184.

[53] A. Jiménez-Vargas y M. Villegas-Vallecillos, *Linear isometries between spaces of vector-valued Lipschitz functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), 1381-1388.

[54] A. Jiménez-Vargas, M. Villegas-Vallecillos y Y. S. Wang, *Banach-Stone theorems for vector-valued little Lipschitz functions*, Publ. Math. Debrecen 74 (2009), 81-100.

[55] A. Jiménez-Vargas y Y. S. Wang, *Linear biseparating maps between vector-valued little Lipschitz function spaces*, prepublicación.

[56] J. A. Johnson, *Banach spaces of Lipschitz functions and vector-valued Lipschitz functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 148 (1970), 147-169.

[57] E. de Jonge y A. van Rooij, *Introduction to Riesz spaces*, Mathematical Centre Tracts 78, Amsterdam (1977).

[58] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley & Sons, New York-London-Sydney (1978).

[59] R. Larsen, *Functional Analysis. An introduction*, Pure and Applied Mathematics, Dekker, New York (1973).

[60] D. H. Leung, *Biseparating maps on generalized Lipschitz spaces*, Studia Math. 196 (2010), 23-40.

[61] D. H. Leung y W. K. Tang, *Banach-Stone theorems for maps preserving common zeros*, Positivity 14 (2010), 17-42.

[62] E. Mayer-Wolf, *Isometries between Banach spaces of Lipschitz functions*, Israel J. Math. 38 (1981), 58-74.

[63] X. Miao, J. Cao y H. Xiong, *Banach-Stone theorems and Riesz algebras*, J. Math. Anal. Appl. 313 (2006), 177-183.

[64] W. P. Novinger, *Linear isometries of subspaces of spaces of continuous functions*, Studia Math. 53 (1975), 273-276.

[65] B. de Pagter, *A note on disjointness preserving operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 90 (1984), 543-549.

[66] V. D. Pathak, *Linear isometries of spaces of absolutely continuous functions*, Canad. J. Math. 34 (1982), 298-306.

[67] B. Pavlović, *Automatic continuity of Lipschitz algebras*, J. Funct. Anal. 131 (1995), 115-144.

[68] B. Pavlović, *Discontinuous maps from Lipschitz algebras*, J. Funct. Anal. 155 (1998), 436-454.

[69] A. K. Roy, *Extreme points and linear isometries of the Banach space of Lipschitz functions*, Canad. J. Math. 20 (1968), 1150-1164.

[70] D. R. Sherbert, *Banach algebras of Lipschitz functions*, Pacific J. Math. 13 (1963), 1387-1399.

[71] M. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), 375-481.

[72] M. H. Vasavada, *Closed ideals and linear isometries of certain function spaces*, Ph.D. Thesis, Wisconsin University (1969).

[73] N. Weaver, *Isometries of noncompact Lipschitz spaces*, Canad. Math. Bull. 38 (1995), 242-249.

[74] N. Weaver, *Lipschitz algebras*, World Scientific Publishing (1999).

[75] J. Wloka, *Partial differential equations*, Cambridge University Press, Cambridge (1987).