



**Facultad de Educación**

**MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN  
SECUNDARIA**

**Finlandia, más que cuentos de hadas  
Finland, more than fairy stories**

**Alumna:** Huerta Marín, Laura

**Especialidad:** Matemáticas

**Director:** Fioravanti Villanueva, Mario Alfredo

**Curso Académico:** 2017/2018

**Fecha:** Octubre de 2018

**Vº Bº DIRECTOR**



## **Resumen**

El presente documento pretende, partiendo del conocimiento y análisis previo del sistema educativo finlandés, obtener aquellas herramientas (métodos y técnicas de enseñanza y aprendizaje de matemáticas) que, sin requerir cambios estructurales o de base del sistema educativo español, sean de fácil aplicación y de eficacia demostrada en el día a día. Se trata, no sólo de definir dichas herramientas en su marco teórico, si no de mostrar ejemplos concretos de su uso; de qué, cómo y durante cuánto tiempo. Un manual práctico para la docencia.

**Palabras clave:** *Sistema Educativo finlandés, Aprendizaje Constructivista, Resolución de Problemas, Cálculo Mental, Autoevaluación.*

## **Abstract**

Using our knowledge based on previous analysis of the Educational Finnish System, the present document aims to get the tools of proven efficacy on a daily basis (methods and skills for teaching and learning mathematics) that are easy to implement, without needing structural changes of the Educational Spanish System. It is not just about defining these tools in their theoretical frame, but also about showing concrete examples of their use; which methods, how to apply them and for how long. A practical manual for teaching.

**Key words:** *Educational Finnish System, Constructivist Learning, Problem Solving, Mental Calculation, Self-evaluation.*



# ÍNDICE

<b>Resumen.....</b>	<b>3</b>
<b>1. Introducción.....</b>	<b>7</b>
<b>2. Qué es el sistema educativo. Finlandia y España.....</b>	<b>10</b>
<b>3. Éxitos del sistema educativo finlandés .....</b>	<b>13</b>
<b>4. Breve recorrido histórico por las últimas décadas.....</b>	<b>18</b>
<b>5. Análisis del subsistema escolar finlandés en el Curriculum (NBE, 1994) y LUMA 1996 .....</b>	<b>22</b>
5.1. Modelo constructivista de aprendizaje. ....	23
5.2. Métodos alternativos de enseñanza de matemáticas.....	28
5.3. Estructura de una clase de matemáticas en Finlandia.....	31
<b>6. Las “herramientas” del éxito .....</b>	<b>33</b>
6.1. Cálculo mental.....	33
6.2. Resolución de Problemas .....	37
6.2.1. Qué es un problema.....	37
6.2.2. Tipos de problemas.....	38
6.2.3. La Resolución de Problemas en los libros de texto y en la enseñanza en las aulas.....	47
6.3. Métodos alternativos de evaluación. La autoevaluación .....	50
<b>Conclusiones .....</b>	<b>53</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>57</b>



## 1. Introducción.

Es por todos conocido el éxito obtenido en los primeros años de este siglo por los alumnos finlandeses en las pruebas internacionales que evalúan las competencias en matemáticas, ciencias y lectura de los estudiantes. Todos los medios divulgaron análisis, comentarios y entrevistas sobre el sistema educativo de este país con objeto de dar a conocer el “secreto” de su éxito. Se habló de la calidad de su profesorado y de su formación, de la escasez de tareas a realizar en casa por los alumnos y de su reducida jornada escolar, etc., en la mayoría de los casos con escaso rigor y profundidad.

Esos excelentes resultados iniciados en 2000, obtuvieron su máxima expresión en 2006 para, a partir de esta fecha, iniciar un paulatino declive hasta la actualidad. Esta circunstancia ha supuesto un vuelco en la imagen internacional del sistema educativo finlandés, transmitiéndose en estos últimos años la idea de que su “modelo educativo” es un fiasco.

En realidad, tanto las informaciones divulgadas inicialmente ofreciendo “recetas simplistas del éxito finlandés” como las conclusiones actuales que indican que no era un modelo a seguir, inducen al error. Tim Oates, investigador del centro de preparación y evaluación de exámenes Cambridge Assessment, de la Universidad de Cambridge, es autor de un estudio de 2015 titulado *Cuentos de hadas finlandeses*. Pese a que su título hace presuponer que su objetivo es denigrar el sistema educativo finlandés, nada más lejos de la realidad:

This analysis is not intended to denigrate the achievements of educators and members of society who put enormous, concerted effort into substantial reform of education in Finland. It is, however, designed to correct a whole series of misconceptions and misrepresentations about what was done when in that reform process. The reforms in Finland were impressive. But due to myopia and elementary errors in enquiry, what foreign analysts have taken from Finland frequently has amounted to ‘Finnish fairy stories’. (Oates, 2015, p.2)

En definitiva, se hace necesario un análisis más riguroso que permita eliminar estereotipos erróneos (en uno y otro sentido) y obtener información

sobre aquellos métodos y técnicas de enseñanza y aprendizaje de probada eficacia en el subsistema escolar finlandés que sí constituyen un modelo a imitar.

Mención aparte requiere la postura defendida por Gabriel Heller Sahlgren, director de investigaciones del Centro para el Estudio de Reformas de Mercado en Educación (CMRE) con sede en Londres y autor del libro *Real Finnish Lessons*. En una entrevista realizada por Héctor G. Barnés en abril de 2018, Sahlgren afirma que los buenos resultados obtenidos por los estudiantes finlandeses a principios del siglo XXI se deben al método tradicional de educación y no a las reformas implantadas en los años 90 e insiste en que “fue el sistema antiguo el que produjo buenos resultados y el bueno, el que tanto gusta a todo el mundo, es el que está haciendo bajar las notas.” (Barnés, 2018). Y añade:

(...) también puedes fijarte en los años 90, cuando Finlandia participaba en el TIMSS que se centra en Ciencias y Matemáticas. Entre 1990 y 2011, los alumnos de séptimo grado (13 años) bajaron 38 puntos, que equivalen a más de un año entero de escolarización. Cuando vimos las puntuaciones del año 2000 y dijimos “Finlandia lo está haciendo muy bien”, en realidad las notas ya estaban cayendo. (Barnés, 2018)

Pero los datos no dicen eso. Finlandia participa por primera vez en las pruebas TIMSS en 1999, obteniendo una puntuación de 520 (alumnos de 13 años que tenían 8 años cuando se puso en marcha el innovador currículum de 1994 y participantes del proyecto LUMA desde 1996 que, como veremos a lo largo de este estudio, sentaron las bases de las reformas aludidas); dicha puntuación, lejos de bajar, se incrementó en 2011 hasta los 545 puntos. De igual manera, los alumnos finlandeses presentados a las pruebas PISA, con una edad de 15 años en el año 2000 (tras 6 años de reformas), obtuvieron ese año 536 puntos en competencia Matemática; 544 puntos en 2003 (1º puesto de la OCDE) y 548 puntos en 2006. En ambos casos (2003 y 2006), se trata de alumnos que se han formado única y exclusivamente en el sistema educativo resultante de las reformas.

Todas estas discrepancias e imágenes distorsionadas hacen necesario un estudio riguroso del sistema educativo finlandés que, utilizando en gran medida fuentes del propio país, permita acabar con esta controversia y dilucidar la existencia o no de lecciones que aprender de su subsistema escolar (concepto al que nos referiremos más adelante).

Los objetivos de este trabajo, por tanto, son:

- Conocer la evolución del sistema educativo finlandés en las últimas décadas.
- Analizar las reformas que condujeron a los excelentes resultados de principios de siglo.
- Identificar los métodos de enseñanza de matemáticas (tanto tradicionales como implantados durante las reformas) que han propiciado sus éxitos y que sean fácilmente trasladables a las aulas españolas.

A ello dedicaremos los siguientes apartados según el siguiente esquema:

En primer lugar (Capítulo 2), definiremos el **concepto de Sistema Educativo** para entender su complejidad y las diferencias estructurales entre España y Finlandia.

A continuación (Capítulo 3) **analizaremos los resultados** obtenidos por el sistema educativo finlandés en las pruebas internacionales y situaremos sus éxitos en el tiempo, con el objeto de determinar su origen; no siempre ha estado Finlandia entre los países con mejores resultados de aprendizaje y se trata, por tanto, de concretar cuándo llegó a estarlo para poder determinar qué le llevó a ello.

Con este objetivo, realizaremos en el Capítulo 4 un **recorrido histórico por las últimas décadas del sistema educativo finlandés** para entender su evolución y los cambios introducidos que condujeron al éxito.

En el Capítulo 5 analizaremos el **subsistema escolar resultante de estos cambios**: describiremos el modelo de aprendizaje/enseñanza adoptado por Finlandia y la práctica diaria en las clases de matemáticas finlandesas en busca de métodos de probada eficacia.

A continuación (Capítulo 6), definiremos las **“herramientas”** que, según los datos obtenidos, hayan resultado determinantes en el éxito finlandés y sean directamente aplicables en las aulas españolas, sin necesidad de realizar previamente cambios estructurales.

Finalmente (Conclusiones), propondremos **una aplicación práctica de dichas “herramientas” en el día a día de las aulas españolas**; indicando qué, cómo y durante cuánto tiempo.

## **2. Qué es el sistema educativo. Finlandia y España.**

El sistema educativo es el conjunto de influencias educativas que una persona recibe desde el nacimiento hasta la edad adulta a través de instituciones, agentes y organizaciones formales de una sociedad que transmiten conocimientos y la herencia cultural correspondiente, y que influyen en el crecimiento social e intelectual del individuo. (Melgarejo, 2013, p.30)

Conforme al análisis de los sistemas educativos finlandés y español que hace Xavier Melgarejo (2013) en *Gracias, Finlandia*, al que nos ceñiremos en todo momento para este estudio, el objetivo educativo es formar personas en base a un “modelo” de ciudadano reflejado en la Constitución de cada Estado, integrando los valores fundamentales recogidos en ella. En el caso de Finlandia dichos valores son equidad y eficiencia, mientras que en España son libertad e igualdad. Debe interpretarse la equidad como la capacidad de dar a cada uno lo que requiere, necesita o merece, frente a la igualdad entendida como dar a todos lo mismo; lo que parece ser uno de los errores sobre los que se sustenta nuestro sistema.

Existen tres componentes esenciales del sistema educativo que mantienen una relación de interconexión y retroalimentación entre ellos: el subsistema escolar, el subsistema familiar y el subsistema sociocultural. Y el “centro”, el “corazón” del sistema educativo, lo constituyen los valores de la sociedad, que deberían corresponderse con los de la Constitución a los que nos hemos referido anteriormente (Melgarejo, 2013).

Es obvio que los valores de la sociedad finlandesa no parecen tener mucho en común con los de la sociedad española, particularmente en lo que se refiere a aspectos como el esfuerzo personal (cada individuo es responsable de su propia vida, de su propia formación), la valoración de las personas por lo que hacen y son (no por su procedencia) y la confianza en sus instituciones: accesibilidad, transparencia y servicios públicos de calidad.

Pero, además, resulta fundamental que los valores que reciben los alumnos en la escuela sean coincidentes con lo que se les transmite en casa y en el resto de la sociedad. Que los subsistemas coincidan en los valores a transmitir. Esto sienta las bases de lo que Melgarejo define como el “engranaje perfecto” del sistema educativo finlandés, de sus subsistemas.

Sin embargo, en España, el subsistema escolar debe enfrentarse a los valores que, en lo referente a desarrollo personal, se prodigan tanto en la calle como, muy a menudo, a nivel familiar y que apuntan, fundamentalmente, a admirar al que “se las arregla para vivir mejor sin trabajar”; lo que en el ámbito escolar se traduce en que los alumnos que se esfuerzan ocultan este hecho ante sus compañeros para evitar ser ridiculizados.

En cuanto al subsistema sociocultural, pese a ciertos avances, seguimos manteniendo servicios demasiado estancos y burocratizados que dificultan el acceso a la cultura. Tampoco se colabora desde este ámbito con la educación, existiendo recursos desaprovechados (bibliotecas, ludotecas, centros culturales,...) que podrían dinamizarse y optimizarse mediante actividades fruto de la cooperación con los centros educativos. También debería iniciarse un proceso encaminado a la eliminación del doblaje en el cine y la televisión, que podría comenzar con los programas y películas infantiles para acabar incorporando la versión original a todas las emisiones en horario infantil.

En lo referente al subsistema escolar, atendiendo de nuevo al análisis de Melgarejo (2013), podemos sintetizar que en Finlandia:

- El Estado fija únicamente la estructura básica del currículum. El 90% de las decisiones, tanto en lo que respecta a la planificación y estructura de la

enseñanza como a la gestión del personal, se toman muy cerca de los ciudadanos. El director del colegio selecciona al profesorado y estos estructuran el currículo ellos mismos.

- Se aplica un exhaustivo proceso de selección de los aspirantes a estudiar Magisterio que consta de las siguientes fases:

Fase 1: Se exige una media superior a 9 en bachillerato y en las pruebas de acceso a la universidad, y se valora la realización de actividades sociales (como voluntario, monitor o similar)

Fase 2: Se efectúa una entrevista personal; además, el aspirante debe realizar el resumen de un libro, la explicación de un tema ante una clase reducida y demostrar aptitudes artísticas. Desde 1994, además, se realiza una prueba de matemáticas y otra de tecnologías de la información.

- Los alumnos seleccionados mediante este proceso, reciben una formación impartida por los mejores profesores que incluye tanto aspectos pedagógicos y metodológicos, como específicos de las materias a impartir.
- Las prácticas se realizan en centros “ejemplares” que están vinculados a la universidad y en los que imparten clase los mejores con las metodologías más adecuadas.
- Posteriormente, el programa LUMA garantiza una formación continua para los profesores en ejercicio mediante cursos y material de estudio pedagógico, favoreciendo el intercambio de experiencias e información a todos los niveles; se impulsa la innovación en la enseñanza.

Mientras que en España, Melgarejo (2013) afirma que:

- El subsistema escolar se basa en el intervencionismo estatal y autonómico que establece los contenidos que se deben impartir en las aulas. “Se transmiten conocimientos, que son los que el Estado central diseña, sobre lo que debemos y no debemos aprender, se fomenta la dependencia del Estado, el servilismo y la lotería como medidas de ascenso social.” (Melgarejo, 2013, p.169)
- La selección y formación del profesorado requiere lo siguiente:

- Se accede a facultades de educación con baja nota media y sólo existe un posterior proceso de selección mediante oposiciones que no valoran exactamente los conocimientos adquiridos ni valores esenciales como la sensibilidad social y la empatía.
- Hay menos horas de formación que en Finlandia.
- La masificación en las aulas implica clases magistrales en grupos de tamaño medio.
- Se prima la transmisión de conocimientos por encima de la didáctica (que podría potenciar el espíritu crítico e investigador de los alumnos)
- La formación continua para los profesores en ejercicio se convierte en una “fábrica de puntos” para opositar o promocionar en tu puesto, sin un objetivo pedagógico ni metodológico.
- Las prácticas se realizan en cualquier centro, sin control alguno de su nivel ni de la calidad de su profesorado.

Todos estos factores indican la necesidad de un gran cambio estructural o de base en el sistema educativo español; pero, tal y como indicábamos en las primeras líneas de este documento, nuestro objetivo es identificar aquellos métodos de enseñanza de matemáticas cuya implantación en el sistema educativo finlandés haya propiciado sus éxitos y que sean fácilmente trasladables a las aulas españolas sin otro requisito que la conformidad del Centro Educativo.

A ello dedicaremos los siguientes apartados según el siguiente esquema: Analizaremos los resultados de los alumnos finlandeses en las pruebas internacionales; estudiaremos la evolución de su subsistema escolar y los cambios introducidos en las últimas décadas; y, finalmente, identificaremos y definiremos las “herramientas” adoptadas que le condujeron al éxito.

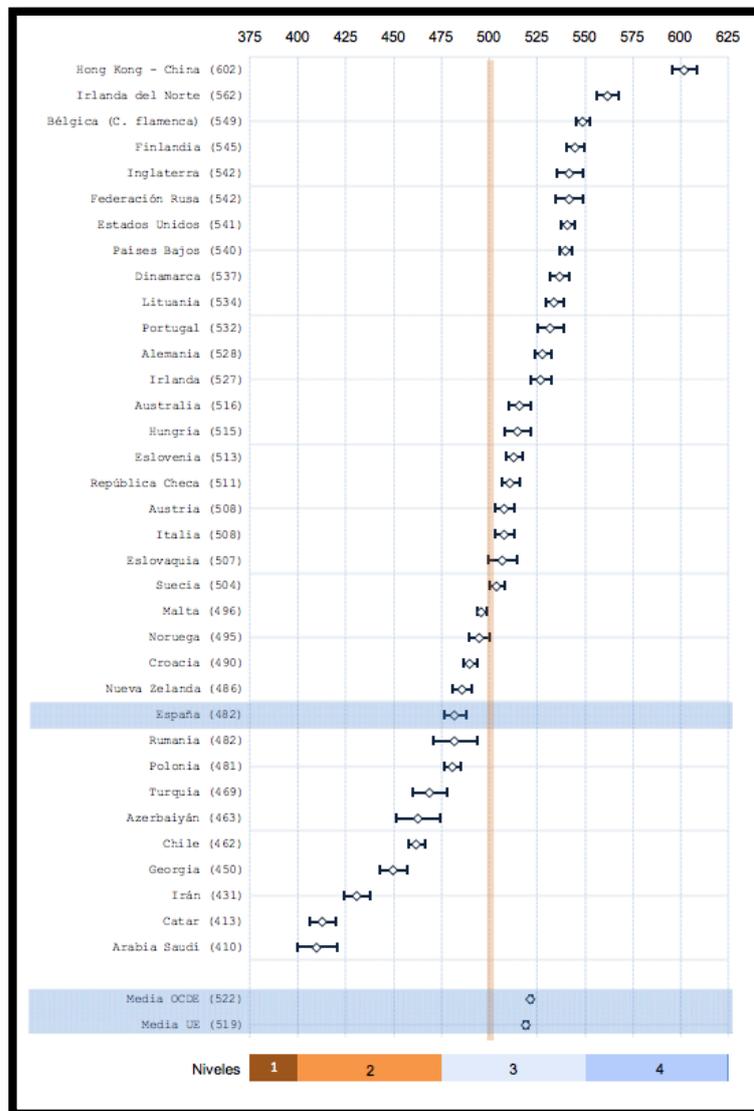
### **3. Éxitos del sistema educativo finlandés**

Es de todos conocido el éxito obtenido, en la primera década de este siglo, por el sistema educativo finlandés en las pruebas de evaluación internacional:

*Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS), desde 1995, y Programme for International Student Assessment (PISA), desde el año 2000.

La prueba TIMSS, desarrollada por la Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo (IEA, fundada en 1958), valora contenidos comunes en la enseñanza de los países participantes: números y operaciones, medidas, algebra, geometría, estadística y probabilidad; en el campo cognitivo se valoran aspectos como el conocimiento, uso de procedimientos básicos, investigación y resolución de problemas, razonamiento y comunicación (Kupari, Reinikainen y Törnoos, 2007).

Tabla 1 Promedios globales en Matemáticas TIMSS 2011(IEA, 2012)



En 1995 se llevó a cabo el primer estudio con el nombre de Third International Mathematics and Science Study y dió comienzo la serie en ciclos de cuatro años. España únicamente ha participado en 1995 y 2011, obteniendo en esta última fecha una puntuación en matemáticas de 482 puntos (5 menos que en 1995) y ocupando el puesto 22 de los 25 países de la OCDE que han realizado esta prueba. Por el contrario, Finlandia ocupa el 3º puesto en 2011, con 545 puntos (25 puntos más que en 1999).

Por su parte, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo económico (OCDE), mediante la prueba PISA, valora desde el año 2000 y cada tres años, tres áreas del conocimiento (lectura, matemáticas y ciencias); en concreto, en el campo de las matemáticas, se valora “la capacidad del estudiante para analizar, explicar y comunicar sus pensamientos eficazmente cuando define, formula, resuelve e interpreta problemas matemáticos en diversas situaciones o contextos” (Kupari, Reinikainen y Törnoos, 2007, p.12).

En cada edición, el proyecto PISA evalúa una de las áreas de conocimiento con un mayor grado de exhaustividad y precisión. En 2003 y 2012 se ha centrado en la competencia matemática, de modo que dos terceras partes (66%) del examen (una hora y veinte minutos) se dedicaron a matemáticas por los veinte minutos a lectura y otros veinte minutos a ciencias.

Por este motivo se consideran especialmente relevantes, a efectos de este estudio, los datos procedentes de las pruebas PISA realizadas en 2003 y 2012.

Los resultados obtenidos a lo largo de los años en esta prueba confirman, en todo caso, tanto la situación de España por debajo de la media de los países de la OCDE participantes, como la superioridad de Finlandia con respecto a los mismos. Finlandia ocupa el 1º puesto en PISA2003 con 544 puntos y España el puesto 25 de los 31 países, con 485 puntos.

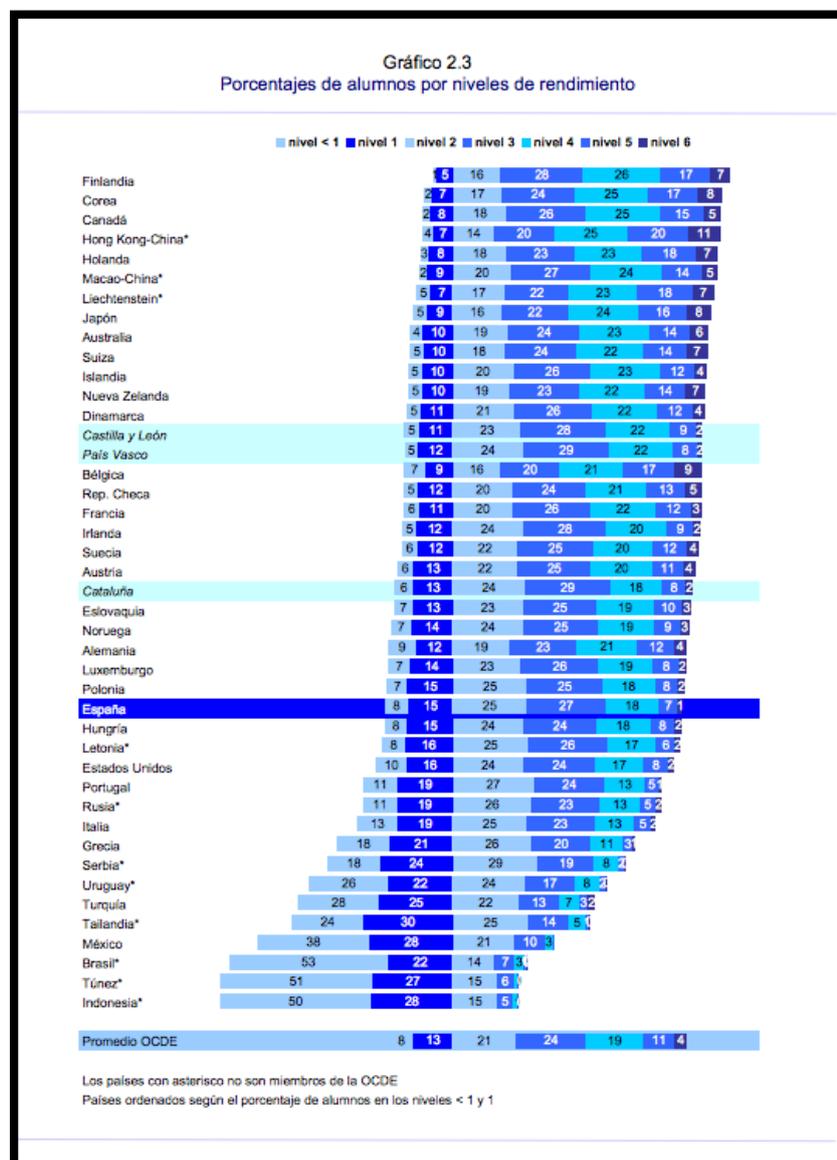
Pero el éxito también estriba en conseguir que un alto porcentaje de los alumnos sean capaces de contestar preguntas de dificultad media-alta (niveles de rendimiento 4, 5 y 6) y, sobre todo, que el menor porcentaje posible de alumnos se encuentre en los niveles inferiores (1 y -1), que indican una

situación de insuficiente rendimiento y falta de desarrollo en competencia matemática.

A este respecto, Finlandia consigue en 2003 que el 50% de los alumnos se encuentre en los tres mejores niveles (frente al 26% de los alumnos españoles) y menos del 7% se sitúen en los dos peores niveles (en España un alarmante 23%).

En el gráfico de la Tabla 2, obtenido del *Estudio Español Pisa 2003 MATEMÁTICAS* (Instituto de Evaluación, Dirección General de Evaluación y Ordenación del Sistema Educativo, 2008, p.40) se detallan estos rendimientos:

Tabla 2. Porcentajes de alumnos por niveles de rendimiento



Este liderazgo del sistema educativo finlandés ha despertado el interés a nivel internacional y numerosos expertos han analizado las razones de su éxito.

En España, Xavier Melgarejo Draper (Barcelona, 1963-2017), licenciado en Psicología y doctor en Pedagogía, maestro, psicopedagogo y director del colegio Claret de Barcelona, ha destacado por su amplio conocimiento del sistema educativo finlandés, al que dedicó 15 años de investigación y su tesis doctoral. En el Colegio Claret aplicó directrices del sistema educativo de Finlandia, y en ocho años consiguió reducir el fracaso escolar del 22% al 1% sin ayuda exterior y en un contexto de recortes. En su publicación *Gracias, Finlandia* (2013), incide en la importancia de la reforma del sistema educativo finlandés que se inicia en los años 70, con la mejora del proceso de selección y formación del profesorado para, posteriormente, incorporar nuevos métodos de enseñanza.

Gabriel Heller Sahlgren, investigador sueco al que ya hemos mencionado anteriormente, al referirse al éxito obtenido por los estudiantes finlandeses en las pruebas internacionales desde 2000, señala: "Es simplista mirar al actual sistema de educación finlandés sin ver su historia". (Martins, 2015)

En la misma línea se pronuncia Tim Oates:

Oates advierte, al igual que Sahlgren, que los buenos resultados logrados en Finlandia en 2000 son producto no de la autonomía con que suele asociarse al sistema finlandés, sino de reformas implantadas en la década de los 70 y 80. (Martins, 2015)

Realicemos, entonces, un breve recorrido histórico por las últimas décadas del sistema educativo finlandés que nos permita identificar los factores determinantes de su éxito en la primera década del siglo XXI.

#### 4. Breve recorrido histórico por las últimas décadas

##### Los años 70

A lo largo de los años 70 Finlandia comienza una reforma de su sistema educativo que se centrará, inicialmente, en mejorar el **proceso de selección y formación del profesorado**. Mediante la incorporación del proceso selectivo que ya hemos descrito anteriormente, se garantiza que los alumnos que acceden a la facultad de magisterio no sólo sean los mejores académicamente sino que, además, posean aptitudes pedagógicas, de síntesis, de comunicación, artísticas y de compromiso social.

##### Los años 80

En el principio de los años 80, la enseñanza era principalmente **conductista**, basada en la repetición y la práctica: método llamado “*doble página por lección*”, incluyendo la teoría y ejercicios de distintas dificultades (Pehkonen y Rossi, 2007).

Sin embargo, ya en esta década, el concepto de aprendizaje empezó a cambiar en Finlandia. Frente al enfoque conductista, la psicología cognitiva señalaba el **constructivismo** como base para el aprendizaje. El Consejo de Educación General empezó a publicar, a finales de los 80, manuales de enseñanza para profesores basados en esta nueva forma de entender el aprendizaje y sobre nuevos métodos de enseñanza, como el libro sobre Investigaciones de Rossi y Pehkonen (1995). También los “cursos para profesores en-servicio” se centraban en aprender jugando, la resolución de problemas, el desarrollo de la creatividad, el uso de ordenador y calculadora, y la enseñanza de construcciones geométricas. (Pehkonen y Rossi, 2007)

El foco del aprendizaje estaba en las actividades de los alumnos y su manera de percibir y dar forma al mundo que les rodea. Desde esta perspectiva, un grupo de educadores (profesores de matemáticas finlandeses) escribió un libro sobre la enseñanza de matemáticas (Halinen, Hänninen, Joki, Leino, Näätänen, Pehkonen,..., Strang, 1991) que se centra en métodos como “*Resolución de Problemas*”, “*Investigaciones*” y “*Modelos de la vida real*”.

## Los años 90

La evolución de las dos décadas anteriores impulsará el gran cambio que tuvo lugar en los años 90 y **transformará los resultados en competencia matemática y ciencias naturales de los alumnos finlandeses, que hasta 1994 eran bastante mediocres (Melgarejo, 2013), en los excelentes resultados de 2003.**

Fuertemente influenciado por el enfoque constructivista del aprendizaje desarrollado en los años 80, el Consejo Nacional de Educación (National Board of Education, NBE) prescribe un nuevo Currículum “NBE,1994” mucho más flexible que los anteriores, menos centralizado y menos detallado que sus predecesores.

El Ministerio de Educación únicamente establece un currículo básico y la financiación del sistema. Las escuelas pertenecen a los Ayuntamientos y los profesores son funcionarios municipales.

Se trata de una estructura básica del currículum que incorpora métodos de enseñanza y aprendizaje en matemáticas con la “*Resolucion de Problemas*” y la “lógica matemática” como principios rectores. Y deben ser los centros escolares, con la participación de profesores, padres y alumnos, quienes lo definan y concreten. (Pehkonen y Krzywacki-Vainio, 2007)

En 1996, el Ministerio de Educación Finlandés publica un extenso programa denominado **LUMA**<sup>1</sup> para ser desarrollado de 1996 a 2002; formando parte de este programa como un subproyecto, el NBE pone en marcha en ese mismo año el Proyecto LUMA para la organización de programas de formación continua de larga duración y el desarrollo de material de estudio pedagógico para los profesores, favoreciendo el intercambio de experiencias e información entre colegios, instituciones vinculadas con la educación, etc., a todos los niveles; se establece una atmósfera positiva para la innovación en la enseñanza de las matemáticas.

Así, a lo largo de los 90, algunos libros de texto incorporan fuertemente métodos de enseñanza alternativos como la “Resolución de Problemas” para el

---

<sup>1</sup> **LUMA** Acrónimo de los términos finlandeses **Luonnontieteet** (Ciencias Naturales) y **Matematikka** (Matemáticas)

aprendizaje de matemáticas; entre ellos destacan *Mieti ja laske (Piensa y Calcula)* de Vähäpassi, Hartikainen, Vaahtokari y Hänninen (1997) y la serie de libros de texto *Matka matematiikkaan (Un viaje a las Matemáticas)* de Espo y Rossi (1996) que puso en práctica las ideas del libro de Halinen, Hänninen, Joki, Leino, Näätänen, Pehkonen,..., Strang (1991) mencionado anteriormente.

### **Primera década del siglo XXI**

Llegamos así al éxito obtenido por los alumnos finlandeses en el 2003 al que ya nos hemos referido en repetidas ocasiones.

Finlandia encabezó en 2000, 2003 y 2006 las pruebas PISA, que comparan el desempeño en matemáticas, ciencia y lectura de medio millón de alumnos de 15 años en 65 países y son realizadas por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE).

Sin embargo, en los últimos resultados divulgados, el de los tests de 2012, Finlandia no está entre los primeros 10 en matemáticas. Los ocho lugares top son ocupados por sistemas asiáticos (Shanghái, Singapur, Hong Kong, Taiwán, Corea del Sur, Macao y Japón).<sup>2</sup>

Para Gabriel Heller Sahlgren, director de investigaciones del Centro para el Estudio de Reformas de Mercado en Educación (CMRE), con sede en Londres, el sistema finlandés está en declive. (Martins, 2015)

En 2007, Leila Pehkonen y Heidi Krzywacki-Vainio indicaban:

La actual versión del curriculum (NBE, 2004) difiere del anterior (NBE, 1994) en muchos aspectos. Toma un mayor control de los contenidos y es mucho mas detallado. El tiempo mostrará cuales son los resultados de esta reforma del curriculum. (p.157)

Pues bien, sin ánimo de simplificar aquello que merece un estudio mas profundo, **parece que en la actualidad los resultados ya se han mostrado.**

---

<sup>2</sup> Errata en documento de origen: son siete (y no ocho) los "lugares top" ocupados por sistemas asiáticos. El octavo lugar lo ocupa Liechtenstein.

Finlandia ocupó el 1º puesto en Competencia Matemática en PISA2003 con 544 puntos. Esta puntuación se vio incrementada hasta los 548 puntos en 2006 para, a continuación, iniciar un continuo declive desde 2009 hasta nuestros días (511 puntos en 2015).

Recordemos que sólo en 2003 y 2012 la prueba PISA se ha centrado en la competencia matemática, de modo que resulta especialmente reveladora la comparación de los 544 puntos de 2003 con los 519 puntos de 2012.

Veamos esta evolución más detalladamente para Finlandia, España y las distintas Comunidades Autónomas, en lo que va de siglo:

Tabla 3  
Resultados de CCAA, España, media OCDE y Finlandia (Sevillano, 2017)

	Competencia Matemáticas					
	2000	2003	2006	2009	2012	2015
Andalucía			463	462	472	466
Aragón			513	506	496	500
Asturias			497	494	500	492
Baleares				464	475	476
Canarias				435		452
Cantabria			502	495	491	495
Castilla la Mancha						486
Castilla y León		503	515	514	509	506
Cataluña		494	488	496	493	500
Com Valenciana						485
Extremadura					461	473
Galicia			494	489	489	491
La Rioja			526	504	503	505
Madrid				496	504	503
Murcia				478	462	470
Navarra			515	511	517	518
País Vasco		502	501	510	505	492
España	476	485	480	483	484	486
Media OCDE	500	500	498	496	494	490
<b>Finlandia</b>	<b>536</b>	<b>544</b>	<b>548</b>	<b>541</b>	<b>519</b>	<b>511</b>

En Nota de prensa del Ministro de Educación y Cultura de Finlandia, Sanni Grahn-Laasonen, publicada recientemente en el Sitio web de su Embajada en Madrid, se expresa lo siguiente:

Las puntuaciones indican que se necesitan reformas con urgencia en las escuelas públicas, ya que a muchos alumnos les falta motivación. Las reformas que ya han comenzado, como por ejemplo, el nuevo plan de estudios principal y la formación continua para profesores, son muy necesarias (Embajada de Finlandia en Madrid, 2017)

La presentación en 2016 de un nuevo Programa LUMA, de características similares a las del programa puesto en marcha en 1996 con el mismo nombre, forma parte del Proyecto principal del gobierno *Nueva Educación Pública*, y supone volver a incidir en el fomento de nuevos métodos pedagógicos y el apoyo a la formación básica y continua de los profesores con una amplia cooperación entre todas las partes implicadas; es decir, se recuperan las bases en que se fundamentó el éxito del sistema educativo finlandés de 2003.

Por tanto, nuestro análisis de este sistema educativo se va a centrar en las características implantadas en la reforma del Currículum de 1994 (NBE, 1994) y el Programa LUMA que se puso en marcha en 1996 (LUMA 1996).

## **5. Análisis del subsistema escolar finlandés en el Currículum (NBE, 1994) y LUMA 1996**

Todos los expertos en educación coinciden en señalar que el éxito educativo finlandés es fruto de las reformas realizadas en las últimas décadas del S. XX.

Pues bien, el breve recorrido histórico realizado anteriormente nos permite identificar dos factores determinantes introducidos en el sistema educativo en los años 90, con motivo del gran cambio impulsado por la evolución de las

décadas anteriores: el **Modelo Constructivista de Aprendizaje** y los **Métodos alternativos de enseñanza de matemáticas**.

Pero este análisis quedaría “cojo” si ignoráramos aquellas prácticas que tradicionalmente se han venido aplicando en las aulas finlandesas y que han coexistido con los nuevos métodos, complementándolos. Estudiaremos, por tanto, la **estructura de una clase de matemáticas en Finlandia** con el fin de conocer aquellas “herramientas” tradicionales que han participado activamente en los logros obtenidos.

## 5.1. Modelo Constructivista de aprendizaje

Tal y como se ha indicado anteriormente, ya desde los años 80 el concepto de aprendizaje empezó a cambiar en Finlandia hacia el **constructivismo** y su sistema educativo se volcó en la formación del profesorado en este enfoque de la enseñanza.

En la teoría constructivista (Vigotsky, 1974)<sup>3</sup>, el aprendiz requiere la acción de un agente mediador para acceder a la zona de desarrollo próximo, éste será responsable de ir tendiendo un andamiaje que proporcione seguridad y permita que aquél se apropie del conocimiento y lo transfiera a su propio entorno. (Calzadilla, 2002, p.3)

La concepción objetivista del aprendizaje<sup>4</sup> establece que los conocimientos pueden ser transferidos por los profesores o transmitidos a través de la tecnología y adquiridos por los alumnos. La concepción objetivista del diseño educativo incluye el análisis, la representación y la reordenación de los contenidos y de los ejercicios para transmitirlos con mayor anticipación y fiabilidad.

---

<sup>3</sup> Errata en documento de origen: en la Bibliografía del propio documento se indica “VIGOTSKY (1979): El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Madrid, Editorial Grijalbo.”

<sup>4</sup> el conductismo es un enfoque “objetivista” de enseñanza.

La concepción constructivista del aprendizaje, por el contrario, establece que el conocimiento es elaborado individual y socialmente por los alumnos basándose en las interpretaciones de sus experiencias en el mundo. Puesto que el conocimiento no puede transmitirse, la enseñanza debería consistir en experiencias que faciliten la elaboración del conocimiento. (Jonassen, 2000, p.227)

El conductismo se centra en la clase magistral y la realización de ejercicios individuales mientras que, en el constructivismo, el profesor se constituye como guía, como facilitador del aprendizaje y las actividades se centran en el alumno.

Es el concepto de aprendizaje activo. El aprendizaje es útil en la medida en que el alumno es capaz de ampliar conexiones entre los conocimientos nuevos y los ya adquiridos.

Sin embargo, tal y como veremos mas adelante al analizar la estructura de una clase de matemáticas, en Finlandia ambas metodologías se complementan. En palabras del propio David Jonassen, profesor de Sistemas Educativos en la Universidad de Pensilvania:

(...) me inclino a creer que el objetivismo y el constructivismo ofrecen diferentes perspectivas del proceso educativo a partir de las cuales podemos hacer inferencias sobre cómo deberíamos elaborar el aprendizaje. La finalidad de mis trabajos escritos y mi actividad docente no consiste en rechazar o sustituir al objetivismo. La imposición de una única creencia o perspectiva es, sin duda alguna, anticonstructivista. Por el contrario, prefiero considerarlas como herramientas de diseño complementarias (algunos de los mejores entornos combinan diferentes métodos) que pueden aplicarse en distintos contextos. (Jonassen, 2000, p.227)

Sobre esta base, en la práctica educativa finlandesa, el trabajo individual se considera imprescindible para la correcta asimilación de nuevos contenidos. El profesor utilizará el método expositivo para la introducción y explicación de nuevos conceptos por entender que favorece la comprensión de los mismos por los alumnos.

(...) la exposición deberá ser organizada y desarrollada siguiendo el siguiente orden lógico. La parte introductoria de la exposición, además de captar el interés y la atención del alumno ante la importancia del tema, deberá activar en los alumnos los conocimientos previos con los que se relacionan los contenidos de la exposición. El desarrollo de la misma se deberá efectuar de forma estructurada con el fin de que permita observar la coherencia interna entre la información suministrada y consecuentemente elaborar una red o mapa conceptual de los contenidos adquiridos. Finalmente la fase final de cierre de la exposición debe posibilitar la elaboración de un resumen o síntesis de la información adquirida y facilitar la integración de los nuevos conocimientos con los adquiridos anteriormente. (De Miguel, 2005, p.84)

Pero esta exposición no consistirá en un “monólogo”. Resulta mucho más estimulante el aprendizaje cuando se plantean preguntas que requieren el esfuerzo intelectual del estudiante; cuando no se ofrece a los alumnos toda la información necesaria para solucionar el problema, sino que son ellos los que deben identificar y encontrar los recursos necesarios. Y, en caso de no conseguirlo, serán ellos los que requieran del profesor la información de la que carecen. Y así, el profesor asumirá el papel de “facilitador” (De Miguel, 2005), proporcionando una enseñanza que los propios alumnos han solicitado. En el desarrollo de esta labor resultan de gran utilidad los *Campos de Problemas (Problem fields)* en su modalidad *Variaciones de un problema método “Y si...?”* (Stacey y Groves, 1999; Liljedahl, 2005; Pehkonen, Hannula y Björkqvist, 2007) y las *buenas preguntas* (Sullivan y Clarke, 1991), *conceptos a los que nos referiremos más adelante.*

Por otra parte, los entornos de aprendizaje constructivistas se definen como “un lugar donde los alumnos deben trabajar juntos, ayudándose unos a otros, usando una variedad de instrumentos y recursos informativos que permitan la búsqueda de los objetivos de aprendizaje y actividades para la solución de problemas” (Wilson, 1992, p. 27). Es decir, en el modelo constructivista, el estudiante aprende más eficazmente cuando lo hace en forma cooperativa.

La colaboración con otros compañeros permite a los estudiantes exponer y argumentar sus puntos de vista o soluciones, plantear sus dudas o resolver las de los demás; y para ello, el alumno necesita realizar el esfuerzo de estructurar y organizar la información adquirida, lo que conllevará una mejor asimilación de los contenidos. Además, esta actividad le ayudará a detectar posibles deficiencias en el entendimiento del concepto de las que no era consciente (en ocasiones puede confundirse el “saber hacer” con el “entender”).

En este trabajo cooperativo de los estudiantes, el profesor debe desempeñar distintas tareas o roles para alcanzar los objetivos educativos buscados. En palabras de De Miguel (2005, p.103-104), son los siguientes:

El profesor como facilitador:

- Prepara el material de trabajo.
- Cuida la composición de los grupos y su seguimiento.
- Estructura procedimientos para que los grupos verifiquen la eficacia del trabajo.
- Ayuda a formular problemas, a definir tareas, etc...
- Verifica que cada miembro conozca los objetivos del trabajo.
- Se asegura que las funciones del grupo sean rotatorias.
- Estimula el intercambio de ideas, la justificación de las decisiones adoptadas y la valoración del trabajo realizado.
- Ayuda a buscar distintos procedimientos y ensayar otras soluciones.
- Fomenta el reconocimiento y la expresión libre de sentimientos que permita la definición y comprensión de conflictos y problemas.
- Aporta al grupo criterios de valoración y evaluación de las tareas o productos realizados.
- Plantea evaluaciones que comprenden tanto el proceso como el aprendizaje grupal e individual.

El profesor como modelo:

- Bajo la estrategia del “modelaje” el profesor despliega ante sus alumnos el repertorio de conductas y actitudes (verbales, gestuales, etc...) que desea aprendan los alumnos.

El profesor como regulador de conflictos:

- Ayuda a resolver situaciones problemáticas en los grupos provenientes de factores de dificultad tales como: un alumno dominador, una alumna que no quiere trabajar en grupo, un alumno marginado, etc.

El profesor como observador:

- Observa de forma sistemática, fijando su atención en aspectos o conductas externas.
- Distingue con claridad entre lo que observa y la interpretación de lo que observa.

El profesor como refuerzo y evaluador:

- Da retroalimentación a cada grupo estableciendo canales de comunicación y reflexión a lo largo del trabajo, contribuye a la reducción de malentendidos que dificultan tanto la tarea como la satisfacción del grupo. (De Miguel Díaz, 2005, p.103 -104)

De esta manera, el modelo constructivista obtiene del aprendizaje cooperativo las herramientas que favorecen los siguientes aspectos:

- Motivación por la tarea.
- Actitudes de implicación y de iniciativa.
- Grado de comprensión de lo que se hace, cómo se hace y de por qué se hace (niveles cognitivo y metacognitivo).
- Aumento del volumen de trabajo realizado.
- Calidad del trabajo realizado.
- Grado de dominio de procedimientos y conceptos.
- Desarrollo del pensamiento crítico y de orden superior.
- Adquisición de estrategias de argumentación.
- Aprendizaje de las competencias sociales (comunicación, relación, resolución de conflictos,...). (De Miguel Díaz, 2005, p.105)

## 5.2. Métodos alternativos de enseñanza de matemáticas

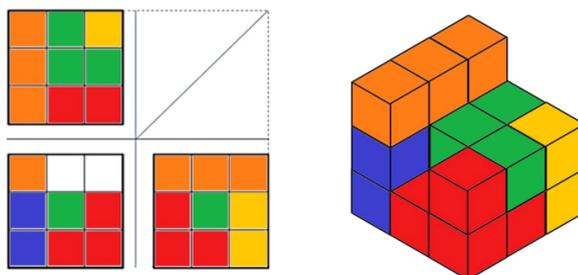
Desde los años 80 hasta la actualidad, las nuevas metodologías de enseñanza han constituido uno de los principales temas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. En este trabajo nos centraremos, únicamente, en la manera en que han sido introducidos y adoptados en el sistema educativo finlandés.

Erkki Pehkonen y Maarit Rossi (2007) utilizan el libro de texto *Matka matematiikkaan (Un viaje a las matemáticas)* de Espo y Rossi (1996) para identificar los métodos de enseñanza alternativos mas importantes que centraron las publicaciones y cursos de formación del profesorado finlandés en los años 80 y 90, que se describen a continuación:

### ➤ Modelos de la vida real

Tienen su utilidad para la enseñanza de conceptos como volúmenes, diferentes escalas, etc. Es el aprendizaje basado en la construcción y uso de maquetas.

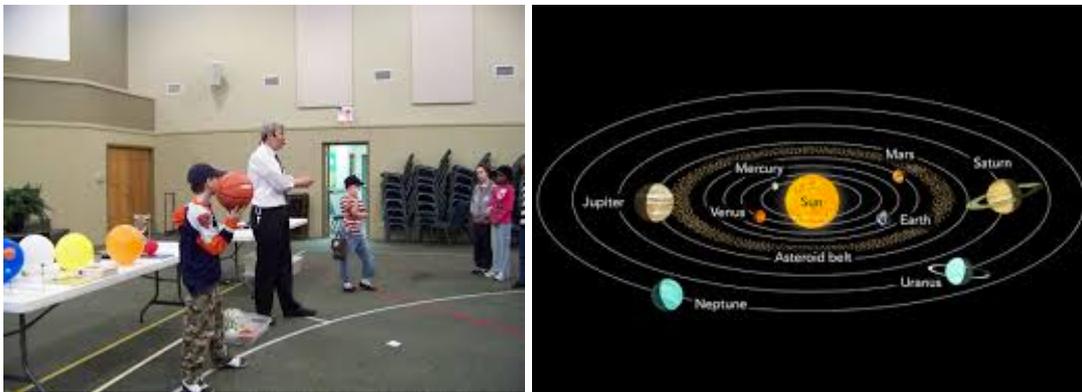
Un ejemplo de esto es el uso de construcciones formadas por cubos de un mismo tamaño. Se muestran a los alumnos las proyecciones o vistas frontal, superior y lateral. Algunos serán capaces de decir cuantos cubos contiene la construcción en total, pero la mayoría necesitarán construir la maqueta para contar los cubos. Tras la repetición de esto, no necesitarán construir la maqueta y les bastará con dibujarla; finalmente, serán capaces de percibir la construcción en su mente (visión espacial).



➤ Tareas de Actividad y Modelización Matemática

Se trata de recrear modelos/situaciones cuyo entendimiento sea difícil de asimilar intuitivamente. Utilizaremos un ejemplo tomado de los libros de texto de Espo y Rossi (1996) que ha sido probado muchas veces en clase: *Modelando nuestro sistema solar*. Se trata de representarlo a escala: algunos alumnos son planetas (el Sol, Mercurio, Venus, la Tierra,... ); otros alumnos son “medidores” y deben decidir dónde debe situarse cada planeta en función de la escala elegida.

Los comentarios de los alumnos mientras trabajan indican su conocimiento, su comprensión y sus dudas sobre la materia; el profesor tiene la posibilidad de recoger esta información y utilizarla en su enseñanza.



➤ Juegos Didácticos

Los Juegos Didácticos suponen un reto para los alumnos y promueven el desarrollo de actitudes positivas hacia el aprendizaje de matemáticas. Además mejoran las capacidades para el razonamiento matemático y la resolución de problemas.

Encontramos ejemplos en el libro finlandés de juegos didácticos (Pehkonen, y Pehkonen, 1993)

➤ Resolución de Problemas

Una tarea o ejercicio puede denominarse “problema” cuando para poder resolverla, el estudiante tiene la información necesaria pero necesita reorganizarla o conectarla de una manera nueva para él (Pehkonen,

Seppälä y Pekama, 1991). Lo importante es el proceso que el alumno desarrolla cuando resuelve el problema.

Conviene que el profesor proponga un debate con toda la clase con objeto de que surjan diferentes métodos para resolver problemas y así poder tenerlos presentes: uso de tablas, dibujar un modelo, razonamiento lógico, representación gráfica, encontrar pautas/patrones, simplificar la situación, construcción de maquetas, el registro de todas las posibilidades, el uso de expresiones y ecuaciones.

Los métodos que vayan surgiendo en la solución de problemas pueden ser recordados en las paredes de la clase y ser convenientemente señalados cuando alguno de ellos haya sido utilizado para resolver un problema difícil.

#### ➤ Investigaciones

Son “*problemas abiertos*” aquellos en los que la situación de partida o la meta o ambas no están determinadas sino que existen diferentes alternativas.

Las *Investigaciones* pertenecen al campo de los “*problemas abiertos*”; en ellas, normalmente se da un punto de partida y directrices para la solución, pero no un objetivo/meta claro.

Las *Investigaciones* pueden dividirse en dos grupos: Investigaciones con estructura preparada (un “campo de problemas” se desarrolla desde la Investigación de manera que la solución de un problema provee las bases del siguiente) e Investigaciones de libre-forma (la fase de estructuración del problema se deja al alumno).

Conviene recordar, en este punto, los “principios” de la enseñanza que explican Espo y Rossi (1996) en su libro de texto *Matka matematiikkaan (Un viaje a las matemáticas)*:

- Es importante aclarar, al inicio de la clase, el conocimiento previo que los alumnos tienen de la materia a tratar.
- Cuando la situación de partida para la enseñanza está clara, el profesor explicará la teoría del concepto en cuestión, se resolverán tareas básicas

relacionadas con él y, finalmente, se comprobará si se ha entendido mediante tareas que requieran la aplicación del concepto.

- Desde esta situación, es posible iniciar el trabajo en *Investigaciones y Trabajos de Proyecto*. (Pehkonen y Rossi, 2007)

#### ➤ Trabajo de Proyecto

Un trabajo de Proyecto es una tarea mas amplia que una *Investigación*, que normalmente requiere ser realizado en varias clases, para la que los alumnos se organizan en grupos y que cruza los límites de las diferentes materias para desarrollarse de manera transversal (implicando otras asignaturas).

Los alumnos deben decidir por sí mismos, entre otras cosas, la organización de su tiempo, la división de tareas dentro del grupo y cómo priorizar los distintos elementos del problema.

Un ejemplo de *Trabajo de Proyecto* llevado a cabo en la escuela de secundaria de Kirkkonummi (grados 7-9) ha consistido en resolver la situación de los campos de refugiados en Malawi, basándose en datos reales y conociendo los medios (distancias, transportes, útiles de ayuda humanitaria, porciones de alimento, etc) y las necesidades (número de refugiados y de campos, situación, etc).

El trabajo con *Proyectos e Investigaciones* incrementa el interés de los alumnos en las matemáticas y, sobre todo, permite adquirir habilidades para el trabajo como: perseverancia, iniciativa, originalidad, planificación, eficacia y resolución de problemas. (Pehkonen y Rossi, 2007)

### **5.3. Estructura de una clase de matemáticas en Finlandia**

Analizaremos a continuación la estructura de una típica clase de matemáticas en Finlandia (dominante en los 80 y 90 y probablemente aún hoy en día) en busca de métodos de probada eficacia. En base a datos obtenidos principalmente en debates realizados en cursos de formación de profesores en

servicio, Pehkonen y Rossi concluyen que parece haber un consenso sobre su estructura que podría describirse así:

Preliminar: 5 minutos de **cálculo mental**.

- 1º. Corregir la tarea de casa
- 2º. El profesor explica el nuevo tema/materia
- 3º. Realización juntos de ejemplos de la nueva materia
- 4º. El profesor plantea algunos ejercicios para que los alumnos los resuelvan (generalmente del libro de texto)
- 5º. El profesor manda nuevas tareas para casa (generalmente del libro de texto). (Pehkonen y Rossi, 2007)

Es de todos conocida la dificultad para modificar hábitos y costumbres largamente aplicados. Sin embargo, según Leila Pehkonen y Heidi Krizywacki-Vainio (2007), tras el esfuerzo realizado con el *Proyecto LUMA*, 1996 en el desarrollo del Curriculum (NBE, 1994), se producen grandes cambios:

- La clase se centra en el profesor pero la participación de los alumnos es alta. Combinan la enseñanza tradicional y los nuevos métodos.
- Es habitual una clase especial por semana para: **Resolución de Problemas, Trabajo de Proyectos, etc.**
- El 60% de los profesores usa **métodos cooperativos** de enseñanza.
- Algunas rutinas han demostrado ser muy útiles. Ha sido una tradición durante décadas destinar 5 minutos de cada clase a **Cálculo Mental**. Todo el material de apoyo para los profesores en Finlandia proporciona una colección de ejercicios mentales para cada clase.
- También es costumbre dedicar mucho tiempo al trabajo individual en clase, lo que es muy coherente con las ideas del constructivismo, aunque no sea una manera moderna o nueva de trabajar.
- Las tareas para casa tienen mucha importancia en Finlandia pero requieren menos tiempo que en el resto de países de la OECD. Al principio de cada clase se comprueba que todos los alumnos han hecho la tarea de casa y se

corrige. Los alumnos explican en la pizarra los ejercicios mas complicados y el profesor o los propios alumnos corrigen la tarea; los alumnos que no han sido capaces de resolver su tarea no reciben críticas por ello. Sólo si el alumno desatiende su tarea, sus padres son informados. El Curriculum (NBE, 1994) enfatizó que el objetivo de la evaluación es mejorar el aprendizaje de los alumnos.

- Se introducen nuevos métodos para evaluar los procesos matemáticos y sus resultados, dando especial relevancia a la **auto-evaluación del alumno**, hoy en día presente en todos los colegios, incluso guarderías. (Pehkonen y Krizywacki-Vainio, 2007)

## **6. Las “herramientas” del éxito**

Del análisis realizado se deduce que, partiendo de la base del **aprendizaje constructivista** que subyace en el subsistema escolar finlandés, existen **tres “herramientas”** cuya incidencia en los altos niveles de capacitación matemática de los alumnos finlandeses resulta probada y son directamente aplicables en las aulas españolas, sin necesidad de realizar previamente cambios estructurales: el ***Cálculo Mental***, la ***Resolución de Problemas*** y la ***Autoevaluación***.

A continuación profundizaremos en estos conceptos y en su aplicación práctica en las aulas.

### **6.1. Cálculo Mental**

Tanto Finlandia como Japón y Corea del Sur (que han liderado los resultados en Competencia Matemática de las evaluaciones del último Informe PISA 2015) incorporan en su sistema educativo métodos que agilizan el cálculo mental y desarrollan los dos lados del cerebro.

La Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), en su material didáctico sobre “*Cálculo mental (CM)*” (Ortega del Rincón y Ortiz Vallejo, 2005), detalla numerosas aportaciones que esta herramienta

proporciona al aprendizaje de las matemáticas y al desarrollo de determinadas capacidades y concluye que:

(...) no son pocos los autores que denuncian el abandono del CM en las aulas de Educación Primaria y Secundaria, el escasísimo tratamiento que se hace del mismo en los libros de texto, y la más que deficiente instrucción que, en general, tiene lugar en la Formación del Profesorado. (Ortega del Rincón y Ortiz Vallejo, 2005, p.5)

Y continúa:

Por todo lo anterior, nos parece muy importante que el profesor posea una herramienta de trabajo que no tenga que construir, por ejemplo, una guía de actividades con una metodología estudiada que le permita, día a día de la semana, trabajar una serie de actividades previamente seleccionadas y analizadas, con el fin de favorecer la enseñanza-aprendizaje del C.M. Con este objetivo, un grupo de profesores de la Universidad de Valladolid, que trabajamos en un proyecto de investigación pedagógica, subvencionado por la Junta de Castilla y León, hemos preparado unas guías de actividades para 1º, 2º y 3º Ciclo de E. Primaria. Estas guías se pueden adquirir, sin ningún costo, solicitándolas a través de los correos (mortiz@am.uva.es, ortega@am.uva.es). (Ortega del Rincón y Ortiz Vallejo, 2005, p.5)

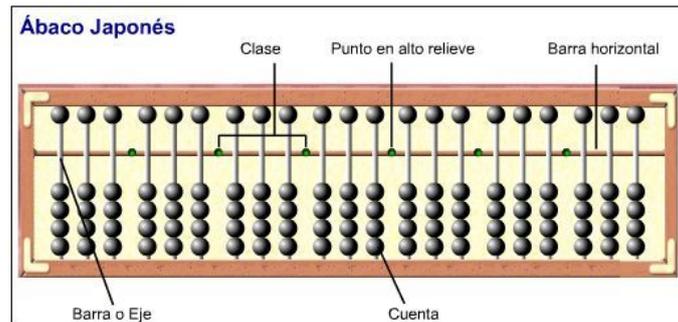
Esto resulta especialmente relevante, puesto que, a la imposibilidad de conseguir algún ejemplo de las colecciones de ejercicios mentales con las que cuentan los docentes finlandeses, se suma que la mayoría de los métodos de Cálculo Mental se han convertido en “franquicias” que, debido a su ánimo de lucro, llevan aparejado un “secretismo” que impide tanto el libre acceso a los contenidos como la realización de un estudio comparativo. Entre estos métodos se encuentran:

- ABN (Algoritmo Basado en Números). Es el único método al que se accede libre y gratuitamente. En los primeros niveles (primer ciclo), fomenta el cálculo mental a través de la utilización de materiales y objetos cotidianos como botones, pinzas de la ropa, palillos, suelos de goma numerados del 0 al 9...; mientras que en el segundo ciclo se trabaja la comprensión de las

operaciones y de todos sus procesos internos. En el tercer ciclo se constata el alto nivel que ha adquirido el alumno en la resolución de problemas. El autor de este método es Jaime Martínez Montero, maestro y doctor en Filosofía y Ciencias de la Educación, y destaca, entre los logros del método ABN, conseguir de los alumnos: “una actitud muy positiva ante el aprendizaje de las matemáticas y una mejora notable del rendimiento académico”. En Internet existen diversidad de webs, tutoriales y vídeos que explican de manera práctica y visual como sumar, restar, multiplicar o dividir aplicando el método ABN y proporcionan materiales de apoyo. (Método Algoritmo Basado en Números ABN)

- El método Kumon, hoy con mas de 20.000 alumnos en España y 4 millones en todo el mundo, nació en 1954 en Japón de la mano de Toru Kumon, cualificado profesor que creó el sistema para que su hijo fuese capaz de dominar conceptos del temario de cursos superiores. El programa está dividido en 21 niveles para matemáticas que, partiendo de aprender a contar y a escribir números, llega incluso más allá del cálculo integral y diferencial. Todo ello, sin calculadora. En su país, el material didáctico se lanzó en 1981. El estudiante de Kumon realiza de tres a cinco hojas de cálculo diarias, lo que implica unos 10 minutos por sesión. (Método Kumon)
- El programa de Aloha Mental Arithmetic, nació en Malasia en 1993, cuando el Sr. Loh Mun Sung decidió crear un sistema de aprendizaje que, basándose en el uso del ábaco, fuera más allá y potenciara la coordinación y desarrollo de ambos hemisferios cerebrales: izquierdo y derecho. Al finalizar, pueden realizar cálculos de hasta diecisiete dígitos sin un lápiz porque han interiorizado el cálculo con el ábaco japonés con el que al principio trastean físicamente. Según un estudio realizado en 2005, como resultado del Aprendizaje Mental con Ábaco se obtienen mejoras significativas en memoria operativa, resolución de problemas, memoria asociativa y concentración de los alumnos, mejor rendimiento matemático, mejora de la orientación espacial e incremento de la capacidad de

concentración. En España, ALOHA Mental Arithmetic colabora con más de 500 Centros Escolares, llegando a 15.000 alumnos de todo el país. Los alumnos de ALOHA asisten a clase dos horas a la semana, que pueden repartirse en una única sesión o en dos sesiones de una hora. (Método Aloha Mental Arithmetic)



- El programa UCMAS es el único método de manipulación de un ábaco en el que se utilizan simultáneamente las dos manos, lo cual proporciona un trabajo adicional de coordinación con beneficios evidentes sobre la estimulación integral de la actividad cerebral.

En el aula, las 34 fórmulas UCMAS se aprenden, inicialmente, sobre el ábaco físico y con números de 1 dígito. Posteriormente, se va incrementando la complejidad de las operaciones de manera que los alumnos son capaces de sumar y restar 20 números de 1 y 2 dígitos, así como 5 números de 4 o 5 dígitos. La metodología UCMAS se estructura de manera que, cada una de las fórmulas que se aprende, se interioriza y se practica con juegos y actividades en los que interviene la memoria a corto plazo, la imaginación, la atención, la concentración o la agudeza visual, entre otros. (Programa UCMAS)

- El programa online español Smartick adapta su dificultad al rendimiento del alumno ese día y se puede practicar a título individual o como extraescolar. El programa corrige los ejercicios, pero el profesor o el padre recibe cada día un informe del avance del niño. Actualmente, Smartick se está aplicando dentro del currículo de tres colegios públicos. Según sus datos, el 94% de los alumnos —ya lo han probado más de 7.000— mejoró su capacidad de

cálculo y el 83% incrementó su nota de matemáticas. Este programa requiere 15 minutos al día con máxima concentración y se realiza en un PC o Tablet. (Programa Smartick)

## 6.2. Resolución de Problemas

### 6.2.1. QUÉ ES UN “PROBLEMA”

Mucho se ha escrito sobre “Resolución de Problemas”. Ya en los años 80, matemáticos como Polya, G. (1981), Schoenfeld, A. (1985) y Mason, J., Burton, L., y Stacey, K. (1992; original en inglés de 1982) profundizaron en el pensamiento matemático, en el proceso mental de enfrentarse a un problema.

Mas tarde, ya en los 90, expertos en la docencia de matemáticas publicaron trabajos destinados a favorecer la enseñanza de estrategias para la Resolución de Problemas a los alumnos de Secundaria y proporcionar material de apoyo a los profesores para lograr dicho objetivo. Este es el caso de Stacey, K., y Groves, S. (1999), en cuya edición española participaron los doctores M<sup>a</sup> Luz Callejo y José Carrillo.

En esta ocasión nos centraremos en el enfoque que se da a este método de enseñanza desde el sistema educativo finlandés y la aplicación en sus aulas. Para ello seguiremos el guión que nos ofrecen Erkki Pehkonen, Markku S. Hannula y Ole Björkqvist en el Capítulo 7 (*Problem Solving as a teaching method in mathematics education*) del libro *How Finns Learn Mathematics and Science* (2007).

Según los autores referidos, los conceptos básicos “problema” y “Resolución de Problemas” difieren de un país a otro e, incluso, en un mismo país.

Kantowski (1980) considera que una tarea es un “problema” si su solución requiere que el individuo combine los datos o conocimientos previamente adquiridos, de una manera que es nueva para él.

Desde esta perspectiva, el carácter de una tarea puede variar dependiendo de la persona (para uno puede ser un problema lo que para otro es una tarea

rutinaria) y del tiempo (el problema de hoy puede convertirse en una tarea rutinaria mas tarde).

### 6.2.2. TIPOS DE PROBLEMAS

Existen diferentes clasificaciones de problemas en función de los criterios utilizados. Nos ceñiremos ahora a la clasificación que realiza Raffaella Borasi (1986) en base a cuatro elementos estructurales:

- (a) La formulación del problema, por ej., la definición de la tarea a realizar,
- (b) el contexto en el que se integra el problema, (c) el conjunto de soluciones posibles y (d) los métodos de enfoque que podrían emplearse para resolver el problema. (Borasi, 1986, p.125)

Estos cuatro elementos constituyen la herramienta para la evaluación y clasificación de los problemas que, desde un punto de vista educacional, realiza Borasi (1986, p.134) y que se detallan en la siguiente tabla:

Label	Context	Formulation	Solutions	Methods of approach	Examples
EXERCISE	Inexistent	Unique and explicit	Mostly unique and exact	Combination of known algorithms	(x)
WORD-PROBLEM	All explicit in the text	Unique and explicit	Mostly unique and exact	Combination of known algorithms	(i)
PUZZLE-PROBLEM	All explicit in the text	Unique and explicit	Mostly unique and exact	Elaboration of a new algorithm – act of insight-reformulations	(iii) (v)
PROOF OF A CONJECTURE	Only partially in the text – known theories are assumed	Unique and explicit	Generally but not necessarily unique	Exploration of the context – reformulations – elaboration of new algorithms	(vii) (xi)
REAL-LIFE PROBLEM	Only partially in the text	Partially given – many alternatives possible	Many possible – only approximate solutions	Exploration of the context – reformulations – creation of a model	(viii) (xii) (iv)
PROBLEMATIC SITUATION	Only partially in the text – problematic	Many implicitly suggested – explicit one may be given	Many possible	Exploration of the context – reformulations – problem posing	(ii) (ix)
SITUATION	Only partially in the text – not problematic	Inexistent-not even implicitly	The creation of a problem	Problem posing	(vi)

Definiremos a continuación cada tipo de problema, utilizando para ello la información obtenida tanto del análisis de Borasi (1986) como del estudio elaborado por López, Guerrero, Carrillo y Contreras (2015) con similares denominaciones.

➤ *Ejercicios*

Aunque realmente no cumplen la definición de problema, los consideramos como problemas en los que basta reconocer o recordar un concepto/fórmula para resolverlo; suelen denominarse *ejercicios rutinarios* y no requieren originalidad (por ejemplo, un sistema de ecuaciones que sólo requiere aplicar un método aprendido previamente).

Ejemplo:  $2x + 3y = 8$   
 $5x + 4y = 13$

➤ *Problemas de palabras*

Enunciados en un contexto concreto que necesita ser traducido al lenguaje matemático para su resolución. El enunciado aporta toda la información necesaria para resolverlos y, a menudo, indica la estrategia a seguir.

Ejemplo:

*Por dos bolígrafos y tres cuadernos he pagado 8€; por cinco bolígrafos y cuatro cuadernos, un compañero pagó 13€. ¿cuál es el precio de un bolígrafo? ¿y de un cuaderno?*

(El mismo sistema de ecuaciones del problema anterior aparece “camuflado” tras un enunciado contextualizado de manera más o menos cercana al alumno y cuya traducción es necesaria)

➤ *Problemas – Puzle (Rompecabezas)*

Pese a que tanto el contexto como la formulación se ofrecen de una forma explícita, la manera en que se expresan puede ser engañosa y, para alcanzar la solución (generalmente única y exacta), se requiere tener una “idea”. A menudo, la cuestión fundamental es considerar el problema planteado de un modo nuevo o diferente.

Ejemplo (Borasi, 1986, p.136):

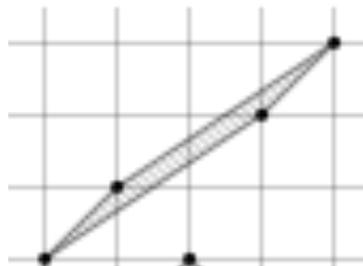
*Seis cerillas deben ser colocadas para formar cuatro triángulos equiláteros congruentes, cada lado de los cuales es igual a la longitud de las cerillas.*

➤ *Prueba de una conjetura*

En los que se solicita justificar la validez de la proposición dada y para cuya resolución se necesita recurrir a teoremas o propiedades relacionadas con la demostración solicitada; se precisa del razonamiento deductivo, característica principal de esta subcategoría.

Ejemplo:

*Se eligen 4 vértices de un paralelogramo entre los nodos de una cuadrícula. Si ningún nodo de la cuadrícula queda encerrado en el interior del paralelogramo, probar que el área del paralelogramo es igual a la de cada uno de los cuadros de la cuadrícula.*



Problema 40 de *Problemas para jóvenes de 5 a 15 años* (Arnold, 2013)

➤ *Problemas de la vida real*

Situaciones que pueden darse en la vida real, que pueden abordarse de distintas maneras y que, a veces, no tienen solución exacta ni única.

Ejemplo:

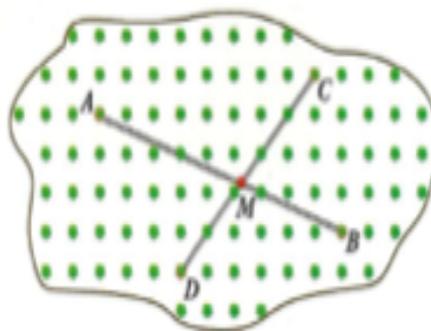
*Un fabricante de pinturas necesita adquirir recipientes para almacenar exactamente 1000 L de un nuevo producto. La empresa suministradora dispone de recipientes con capacidades de 400L, 390L, 240L, 230 L 170L y 160L. ¿Cuántos recipientes de cada tipo deberá encargarse el fabricante? (Vicens Vives, p.94; visto en López, Guerrero, Carrillo y Contreras, 2015)*

➤ *Situación problemática*

Su abordaje permite desarrollar procesos de exploración, formulación de hipótesis y su posterior validación, en los que se realizan conjeturas, verificaciones y argumentaciones. Este tipo de problema comparte varias características estructurales con la *Prueba de una conjetura* y los *Problemas de la vida real*.

Ejemplo:

*El dueño de un vivero tiene una plantación de arbolitos, colocados cada uno a un metro de distancia de los mas próximos. En el punto M hay una arqueta de riego en la que se conectan dos tuberías enterradas y rectas, AB y CD. Averigua la longitud del tramo de tubería AM.*



(Anaya, p.187; visto en López, Guerrero, Carrillo y Contreras, 2015)

➤ *Situación*

Una “situación” es mostrada careciendo por completo de *formulación* del problema. Podría decirse que el principal objetivo es que el propio alumno convierta la “situación” dada en un problema (planteándose tantas cuestiones y conjeturas como sea posible, explorando el contexto dado, estudiando las consecuencias del cambio en alguno de los atributos de la “situación” dada, etc.)

Ejemplo (Borasi, 1986, p.139):

*Considera los siguientes tríos Pitagóricos:*

3	4	5
5	12	13
8	15	17
7	24	25

Analizaremos a continuación el enfoque que se da a la *Resolución de Problemas* desde el subsistema escolar finlandés. En los análisis realizados por Erkki Pehkonen (2007), la categorización de problemas se realiza desde una perspectiva diferente, priorizando el carácter metodológico del aprendizaje basado en problemas. Se analiza la utilidad de los diferentes tipos de problemas para enseñar matemáticas y promover el desarrollo de las habilidades y competencias que el alumno necesita utilizar durante el proceso de resolución.

Por este motivo, Pehkonen, Hannula y Björkqvist (2007, p.122) excluyen de la categoría de problemas las denominadas “tareas rutinarias” ya que no requieren combinar los datos o conocimientos previamente adquiridos, de una manera nueva. Pueden considerarse “**tareas rutinarias**” los *Ejercicios* y los *Problemas de Palabras*.

Estos expertos se refieren, así mismo, a los **Problemas - Puzzle** (también denominados *One-step problems* o *problemas matemáticamente simples*). Podrían incluirse también en esta categoría los denominados por Borasi (1986) *Prueba de una conjetura*, en la medida en que coinciden en ambos tipos de problemas los *métodos de enfoque*, requiriendo la exploración del contexto y la reformulación-elaboración de nuevos algoritmos.

“Enfrentándose con algunos *Problemas – Puzzle*, los estudiantes pueden adquirir una experiencia valiosa en resolución de problemas, ya que estos problemas pueden requerir extraer información desde un contexto completo, reformular el problema original y aplicar diferentes estrategias de resolución” (Borasi, 1986, p.136). Además, estos problemas pueden constituir un excelente punto de partida para los *Problemas de final abierto*.

Se denominan **Problemas de final abierto (Open-ended problems)** aquellos en los que la situación de partida o el objetivo no están definidos exactamente. Se da libertad al alumno, en ocasiones para su planteamiento pero, en todos los casos, para la resolución de la tarea. De esta manera existen diferentes soluciones correctas en función de las decisiones/elecciones que se hayan tomado durante el proceso.

Tomando como referencia los cuatro elementos estructurales de Borasi, podríamos decir que en los *Problemas abiertos* adquieren especial relevancia el *método de aproximación* y la existencia de muchas *soluciones* posibles, en la medida en que el contexto se ofrece sólo parcialmente y la formulación admite muchas alternativas posibles. Desde esta perspectiva, pueden considerarse *Problemas abiertos* los denominados por Borasi *Problemas de la vida real*, *Situación problemática* y *Situación*.

Pehkonen, Hannula y Björkqvist (2007) incluyen en la categoría de *Problemas abiertos* los siguientes (p.121-129):

- *Investigaciones*: En los años 70 se empezó a utilizar en Inglaterra el término *Investigación* para referirse a un problema que se “extiende”: se plantea una situación o problema inicial y se pide al estudiante que plantee nuevos problemas partiendo de él y los resuelva. Las investigaciones pueden dividirse en dos grupos: Investigaciones con estructura preparada (*Campo de problemas “Problem field”*) e *Investigaciones de forma-libre no estructurada* (en las que se deja al alumno que estructure la investigación). (Pehkonen y Rossi, 2007)
- *Campo de problemas “Problem field”*: colecciones de problemas conectados en un mismo contexto. En Europa se desarrolló la *Investigación estructurada*, también denominada *Campo de problemas (Problem field)*, en la que el profesor cuenta con una colección de problemas diferentes conectados desde un problema/situación de partida y con su elección decide cómo continuar la *Investigación*, dirigiendo la misma en función del objetivo buscado y de las respuestas obtenidas de los alumnos.
- *Planteamiento del problema*: formulación o encuentro del problema.
- *Situaciones de la vida real*
- *Proyectos* (con mayor entidad y que requieren trabajo independiente)
- *Problemas sin una pregunta*
- *Variaciones de un problema* (método “Y si...?”)

“Varios ejemplos de diferentes tipos de *Problemas abiertos* pueden ser encontrados, por ejemplo, en las publicaciones de Nohda (1991), Stacey (1995), Silver (1995), Schupp (2002) and Pehkonen (1997)” . (Pehkonen, Hannula y Björkqvist, 2007, p.126)

Resultan de especial relevancia para la enseñanza basada en problemas los denominados *Campos de Problemas* y, en concreto, los que, a nuestro modo de ver, constituyen una modalidad de estos: las *Variaciones de un problema (método “Y si...?”)*. Es el “¿Qué ocurriría si...?” que proponen Stacey y Groves (1999) para animar a los alumnos a generalizar sus resultados; las cuestiones más naturales “surgen de comprender cómo funciona la primera solución o de la curiosidad y la creatividad individuales de cada alumno” (p.21). Consideramos que, en esta categoría, cabe la concatenación de todo tipo de *problemas matemáticamente simples*, puesto que lo relevante es el proceso, en la medida que obliga al alumno al análisis, a la elaboración de conjeturas y a su comprobación, que le conducirán al “descubrimiento”.

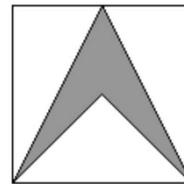
Las positivas experiencias del uso de *Campos de Problemas* son similares a las descritas por Liljedahl (2005). Como parte de un curso obligatorio de formación de matemáticas para profesores de primaria, presentó una serie de problemas de matemáticas para resolver. Algunas de las tareas permitían una forma de descubrimiento matemático que él llamó *cadena de descubrimientos*. Estos problemas facilitaron un estado de participación sostenida e incluso ayudaron a cambiar las actitudes y creencias negativas de los estudiantes para profesor. Los *Campos de Problemas*, como aquí se han descrito, también permiten ese tipo de *cadena de descubrimientos* y la participación sostenida. (Pehkonen, Hannula y Björkqvist, 2007, p.129)

Ambas circunstancias (la “cadena de descubrimientos” y la participación sostenida) permiten tanto la adquisición de conocimientos (desde una perspectiva mas amplia y profunda) como de habilidades y competencias.

Es “La pregunta como actitud”. La pregunta que, instigada por una auténtica curiosidad, se convierte en el auténtico motor del conocimiento (De Guzmán, 2006)

Ejemplos:

- Una flecha se construye en un cuadrado de  $2 \times 2$  uniendo los vértices inferiores con el punto medio del lado superior y con el centro de el cuadrado. Halla el área de la flecha.



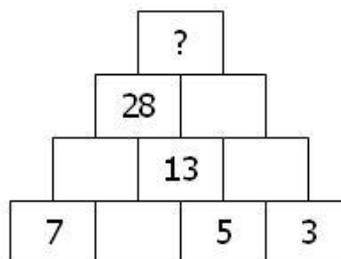
¿Cuál sería el área de una flecha similar dibujada en un cuadrado de  $10 \times 10$ ?

¿Puedes generalizar la solución para un cuadrado  $n \times n$ ?

¿Y para estas flechas en general?

[\[https://mathschallenge.net/problems/pdfs/mathschallenge\\_1\\_star.pdf\]](https://mathschallenge.net/problems/pdfs/mathschallenge_1_star.pdf)

- En la construcción de la imagen se sitúa en cada celda la suma de las cifras de las dos celdas inferiores colindantes con ella ¿cuál será la cifra de la casilla situada en lo alto?



¿Y si cambiamos los números de la base? ¿Puedes predecir el resultado?

¿Puedes completar una construcción en la que la cifra de la casilla situada en lo alto sea 100? (Pehkonen, 2009)

En cada *Campo de Problemas* la dificultad de los problemas debe partir de los mas simples (que pueden ser resueltos por toda la clase) hasta los mas difíciles (que sólo los alumnos más aventajados serán capaces de resolver). Debe tenerse en cuenta que el objetivo de los problemas mas fáciles es reforzar la persistencia, la participación sostenida, de los alumnos en la resolución de problemas. El proceso mental involucrado en la solución del problema es de suma importancia, mientras que el papel de la respuesta o resultado debe ser minimizado (Pehkonen, Hannula y Björkqvist, 2007)

Finalmente, consideramos conveniente mencionar el concepto de *buenas preguntas* de Sullivan y Clarke (1991) por su utilidad para conocer el punto de partida del alumno, su grado de comprensión de la materia de que se trate. En palabras de Ana Remesal Ortiz en su Tesis Doctoral (2006, p.50):

Sullivan y Clarke (1991), por su parte, proponen el uso de “buenas preguntas”: preguntas directas de carácter problemático sin respuesta unívoca que permiten evaluar el conocimiento del alumno, el tipo de errores que comete y los significados que ha elaborado sobre la temática objeto de evaluación, y ayudan, consecuentemente, a adaptar la enseñanza y atender a los alumnos según su nivel individual. Ejemplos de estas “*buenas preguntas*” serían los siguientes:

*“La media de una serie de 5 números es 17. ¿Cuáles pueden ser estos números?”*

*“Si tu calculadora tiene las teclas 5 y 7 estropeadas, ¿cómo harías para sumar  $732 + 577$ ?”*

(Mediante la primera de estas preguntas se pretende evaluar el grado de comprensión de la noción de media aritmética y su relación con la desviación típica. En la segunda pregunta el foco está sobre las leyes conmutativa, asociativa y distributiva de la suma, así como con un uso estratégico de la calculadora.)

Estos autores proponen tres criterios básicos para la formulación de “*buenas preguntas*”:

- La pregunta exige del alumno un nivel de reflexión superior – por tanto, va más allá del simple recuerdo de información factual o aplicación directa de algoritmo.
- La pregunta tiene un componente educativo, de tal modo que tanto el profesor como el alumno puedan aprender algo del proceso de resolución seguido por el propio alumno.
- La pregunta debe tener un cierto margen de apertura y admitir diferentes respuestas.

(Remesal, 2006, p.50)

Es interesante observar la similitud de estos criterios y los que rigen la formulación de “*Problemas abiertos*”.

### 6.2.3. LA “RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS” EN LOS LIBROS DE TEXTO Y EN LA ENSEÑANZA EN LAS AULAS

Según datos aportados por Pehkonen, Hannula y Björkqvist (2007), la incorporación de la *Resolución de Problemas* al subsistema escolar finlandés ha seguido las siguientes pautas:

A finales de los 80, el Consejo de Educación General finlandés empezó a publicar libros-guía para docentes sobre “Resolución de Problemas”: Haapasalo, 1985; Pehkonen, Pekama y Seppälä, 1991; Berry y Sahlberg, 1995; Rossi y Pehkonen, 1995, etc. (Pehkonen, Hannula y Björkqvist, 2007)

En 1986, el Consejo Nacional de Educación (NBE, National Board of Education) organizó un seminario para profesores en ejercicio con el fin de promover la *Resolución de Problemas* en las clases de matemáticas; en una primera parte se realizaron conferencias y demostraciones del uso de diferentes tipos de problemas en la enseñanza y se instó a los profesores participantes a aplicar estos problemas en su labor diaria para, en una segunda parte del seminario (un año más tarde), exponer los resultados y reflexionar sobre ello.

De este estudio se extrajeron importantes conclusiones; los profesores vieron la importancia de la “Resolución de Problemas” para fomentar las habilidades cognitivas de los alumnos y su capacidad para aplicar lo aprendido.

Hasta ese momento era difícil encontrar este tipo de problemas en los libros de texto finlandeses; pero después de este seminario, casi todas las editoriales publicaron una serie de problemas en folletos que, con el tiempo, fueron incorporándose a los libros de texto (aunque durante la década de los 90 la proporción de este tipo de problemas en la mayoría de los libros de texto finlandeses seguía siendo únicamente un 11% de las tareas incorporadas y no parece haberse incrementado en las últimas décadas). (Pehkonen, Hannula y Björkqvist, 2007)

Sin embargo, a finales de los 90, al menos algunos libros de texto incorporan fuertemente la “Resolución de Problemas” para el aprendizaje de matemáticas. Un buen ejemplo es la serie de libros de matemáticas para todos los grados denominada “Mieti ja laske” [“Piensa y Calcula”] donde el uso de problemas constituye la principal base pedagógica; por ejemplo, el libro para el grado 3 de esta serie (Vähäpassi, Hartikainen, Vaahtokari, y Hänninen, 1997) incluye unidades para los alumnos (y sus profesores) con una página de *ejercicios*, una página de *problemas de palabras*, una página de problemas y una página de investigaciones de los que escoger para cada tema. (Pehkonen, Hannula y Björkqvist, 2007, p. 124)

También los libros de texto para grados superiores titulados “Matka matematiikkaan” [“Un viaje a las matemáticas”] (Espo y Rossi, 1996) se centran en la enseñanza de matemáticas vía *resolución de problemas* y casi todos los contenidos son introducidos mediante los problemas apropiados. Si bien es cierto que el uso de este libro requiere un trabajo previo, no cabe duda de que hace la enseñanza de matemáticas más interesante y para los alumnos convierte el aprendizaje en una aventura. (Pehkonen y Rossi, 2007)

La realidad en las aulas finlandesas parece indicar que los libros de primaria “Mieti ja laske” son usados prescindiendo de la *Resolución de Problemas* y limitándose a los ejercicios de cálculo. Y los libros de Espo y Rossi han sido

elegidos por menos del 10% de los profesores. Sin embargo, la influencia de estos libros puede verse en la siguiente generación de libros de matemáticas de otras editoriales. (Pehkonen, 2008)

En definitiva, el desarrollo de la enseñanza de matemáticas en Finlandia no ha sido tan rápido como se esperaba, pero se han observado algunos cambios y el uso de la *Resolución de Problemas* es bastante popular hoy en las clases de matemáticas. Sin embargo, aun en la actualidad, se puede decir, usando el lenguaje de Schroeder y Lester (1989), que sólo algunos profesores enseñan *vía* problemas, es decir, utilizan los problemas como método de enseñanza, mientras que la mayoría de ellos enseña a resolver problemas. Esto significa que los profesores usan algún puzzle matemático en su enseñanza y tienen una caja de problemas en su clase o algo similar; pero el uso de la *Resolución de Problemas* como método de enseñanza es muy poco frecuente. (Pehkonen, Hannula y Björkqvist, 2007)

En España, del análisis de los libros de texto de las editoriales “Vicens Vives” y “Anaya” realizado por López, Guerrero, Carrillo y Contreras (2015), se deduce que los *Ejercicios* y los *Problemas de Palabras* suponen el grueso de las actividades propuestas (y recordemos que se excluyen de la categoría de problemas las denominadas “tareas rutinarias” a la que estos pertenecen), siendo el resto de categorías menos comunes e incluso inexistentes en algunas unidades de dichos libros. En palabras de dichos autores:

En cuanto al análisis específico de los textos Vicens Vives y Anaya, podemos concluir que no se promueve la RP como eje central del aprendizaje, puesto que la mayoría de los problemas propuestos son ejercicios, seguidos por problemas de palabras, siendo ambas las subcategorías de complejidad más baja. Llama la atención que el currículo de matemáticas de Educación Secundaria apueste por una enseñanza basada en la RP, que la investigación se contemple como parte integral de las matemáticas, pero que, sin embargo, la principal herramienta de trabajo en el aula no sea coherente con estas ideas, y que sólo aparezcan problemas en los que se pone en marcha la lógica, el

ingenio o problemas cercanos a la vida real en lugares puntuales de la unidad. Así, parece que se transmite una idea de las matemáticas como herramienta de cálculo, basadas en el aprendizaje de fórmulas (que pueden olvidarse fácilmente) y que sólo ayudan a resolver ejercicios. (López, Guerrero, Carrillo y Contreras, 2015, p.89)

Tampoco ha sido posible, tras una intensa búsqueda (que ha incluido un intento de contactar con la Embajada de Finlandia en Madrid) encontrar traducciones al español o al inglés de los libros de texto finlandeses mas emblemáticos centrados en la *Resolución de Problemas* anteriormente mencionados:

- “Mieti ja laske” [“Piensa y Calcula”] (Vähäpassi, Hartikainen, Vahtokari, y Hänninen, 1997)
- “Matka matematiikkaan” [“Un viaje a las matemáticas”] (Espo y Rossi, 1996)

Partiendo de esta base, el profesor que quiera introducir la *Resolución de problemas* en su práctica docente en las aulas españolas, deberá empezar por obtener, para cada unidad didáctica, el material necesario de “colecciones de problemas” en publicaciones especializadas en el tema para, posteriormente, elaborar su propio “Campo de Problemas” en función de la “cadena de descubrimientos” que pretenda para sus alumnos. Y, desde luego, no resulta fácil.

### **6.3. Métodos alternativos de evaluación. La autoevaluación**

En palabras de Carrillo Yáñez, “debemos evaluar para mejorar el aprendizaje del alumno y para mejorar la calidad de la enseñanza (...)” (Carrillo Yáñez, 1995, p.80)

Por tanto, debemos tener claro que tipo de aprendizaje queremos promover en nuestros alumnos (mecánico; significativo; conceptual; procedimental;

actitudinal; etc) y no perder de vista dicho objetivo a la hora de evaluar.  
(Carrillo Yáñez, 1995, p.80)

En las últimas décadas se han introducido en Finlandia muchas propuestas para el desarrollo de nuevas formas de evaluación que, conforme al análisis realizado por Pehkonen y Rossi (2007), implican lo siguiente:

Se han incorporado nuevas “tareas” en las pruebas tradicionales (problemas abiertos, investigaciones y modelos o construcciones); y también pruebas diferentes que incluyen mapas conceptuales, “tareas” diseñadas por los propios alumnos y la “carpeta de trabajos”.

El profesor no es el único en evaluar siempre. El alumno puede evaluarse a sí mismo: Hay cuestionarios preparados para evaluar distintas tareas o el aprendizaje de conceptos, y otros para evaluar cambios en los propios métodos de trabajo o actitud. Algunos libros de texto, como los de Espo y Rossi (1996), ofrecen diferentes cuestionarios de evaluación. De esta manera, el alumno también mejorará en sus criterios de evaluación y, por tanto, será capaz de aprender más y mejor de sus propios errores.

También un trabajo de grupo puede ser evaluado por el propio grupo o por otro grupo. En vez de, o además de, un Informe escrito, el grupo puede mostrar al resto de la clase los resultados de su trabajo de la manera que ellos elijan y los demás alumnos lo deberán evaluar según criterios previamente establecidos.

El cuestionario de evaluación puede ser diseñado de manera que el evaluador también aprenda de él.

### **Evaluación de la carpeta de trabajos**

Según datos obtenidos del estudio de Pehkonen y Rossi (2007), la *carpeta de trabajos* es un método excelente para evaluar el trabajo de investigación del alumno. Hay distintas variantes de la *carpeta de trabajos* pero el principio fundamental es el siguiente: El alumno elige sus mejores trabajos para mostrar lo que es capaz de hacer y escribe una carta explicando por qué ha seleccionado esos trabajos y cómo estos representan mejor sus capacidades y habilidades.

Los alumnos con dificultades pueden trabajar en grupo e incluirlo en su carpeta (esto requiere una profunda reflexión del profesor, que deberá evaluar desde el objetivo de obtener de cada alumno el rendimiento esperado y conseguir que alumnos diferentes colaboren en un mismo grupo).

En la carpeta, junto a los trabajos/tareas se encuentran sus evaluaciones.

La carpeta hecha durante los tres años de nivel superior constituye un apoyo positivo para su propio aprendizaje. El profesor indicará al alumno formas de mejorar su *carpeta de trabajos*; por ejemplo, pidiéndole que elija sus trabajos conforme a diferentes criterios: el más difícil, el más desafiante, el de tema más sorprendente,... (Pehkonen y Rossi, 2007)

### **Evaluación de la *Resolución de problemas***

Mención aparte merece la evaluación de la *Resolución de problemas* entendida como “proceso”, tanto de aprendizaje como de aplicación de los conocimientos adquiridos. Se trata, por tanto, de entender la *Resolución de Problemas* como una tarea compleja que constituye “el impulso, el motor de la clase, lo que pone al estudiante ante el reto de hacer matemáticas”. (Carrillo Yáñez, 1995, p.82)

Desde esta perspectiva, y tal y como indica Carrillo Yáñez, no basta con sustituir ejercicios por problemas. Hay que tratar los problemas como se merecen, teniendo paciencia para permitir que los alumnos formulen sus propuestas de abordaje y realizando “parones” para socializar los aprendizajes al mismo tiempo que se ponen en claro, para reflexionar sobre lo que se hace. Y todo lo dicho resulta más eficaz si el profesor y el propio alumno poseen algún instrumento que les permita identificar aspectos relevantes del proceso de resolución de problemas. Para ello, deben determinarse los aspectos a evaluar y, de forma simultánea, la definición o descripción de metas. (Carrillo Yáñez, 1995)

Según Carrillo Yáñez (1995) un modelo de *Formato de evaluación de Resolución de Problemas*, podría incluir las siguientes categorías (con sus correspondientes indicadores):

- I. *“Características personales” (Organización temporal y Confianza en sí mismo)*
- II. *“Habilidades matemáticas” (Razonamiento con símbolos matemáticos y relaciones espaciales y Flexibilidad de los procesos mentales)*
- III. *“Heurística” (Uso de la revisión y Obtención de una representación significativa)*
- IV. *“Aspectos metacognitivos (Papel de la memoria e Importancia otorgada al control del proceso)*
- V. *“Tipo de control” (Tipo de decisiones de control)*  
(Carrillo Yáñez, 1995)

## **Conclusiones**

Son muchas, a mi modo de ver, las lecciones que podemos aprender del sistema educativo finlandés: el proceso de selección y formación del profesorado, la estructura básica del currículum que permite a esos docentes tan bien preparados decidir la planificación y la estructura de la enseñanza, la colaboración desde otros ámbitos socio-culturales en la educación, etc; y considero que deberíamos avanzar en esa dirección, incorporando paulatinamente medidas tendentes a un cambio estructural de nuestro sistema educativo.

Pero, sin necesidad de esperar a que dichos cambios se produzcan, nuestro subsistema escolar permite incorporar, desde la base de un aprendizaje constructivista, las tres “herramientas” cuya incidencia en los altos niveles de capacitación matemática de los alumnos finlandeses resulta probada: el ***Cálculo Mental***, la ***Resolución de Problemas*** y la ***Autoevaluación***.

Es obvio que las tres herramientas se ven favorecidas por la continuidad a lo largo de la formación del alumno y que su inclusión en la Planificación y Programación del centro mediante la concreción de estas metodologías en el Proyecto Curricular (PCC), supondría mejoras de aprendizaje de mayor calado.

Sin embargo, siendo consciente de la dificultad que conlleva consensuar cambios en el Claustro de cualquier centro de enseñanza, considero posible su incorporación de manera personal por cualquier docente.

Mostraremos a continuación una propuesta para la implantación de estos métodos en el día a día del aula:

- Se destinarán de 10 a 15 minutos de cada clase a realizar ejercicios de cálculo mental. Podrá optarse por cualquier método de los indicados anteriormente pero deberá tenerse en cuenta que algunos de ellos requieren hasta dos sesiones de una hora semanales que no tendrían encaje en el horario establecido para la asignatura.

Personalmente, considero que los métodos relacionados con el ábaco presentan ventajas y beneficios adicionales en el desarrollo del cerebro y, por tanto, constituyen sin duda la mejor opción. Otra buena opción para los ciclos de Primaria es el material didáctico sobre "*Cálculo mental (CM)*" de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) (Ortega del Rincón y Ortiz Vallejo, 2005). También podría considerarse el programa Smartick puesto que reúne interesantes características: está indicado para niños de 4 a 14 años, se adapta al ritmo y capacidad de cada alumno, se realiza en un PC o Tablet (TIC) y no necesita la realización de sesiones semanales de larga duración. Este programa requiere 15 minutos diarios, por lo que quizás exceda de lo posible en el restringido horario escolar y sea necesario reducirlo a 10 minutos, en caso de que el método lo admita. Aunque conviene tener en cuenta lo indicado por Ortega del Rincón y Ortiz Vallejo (2005, p.5) en su documento sobre Cálculo Mental:

- (...) El tiempo "perdido" se gana a la hora de resolver operaciones.
- El tiempo no debe sobrepasar de 10 a 15 minutos; algunos consideran que es mejor hacerlo en los minutos finales antes de acabar la clase, puesto que parece que les despista menos. (...)

- Tomando como referencia los “principios” de la enseñanza de Espo y Rossi (1996) a los que ya nos hemos referido anteriormente, organizaremos la “unidad didáctica” conforme al siguiente esquema:

1º. Aclarar el conocimiento previo que los alumnos tienen de la materia a tratar.

La primera sesión de la unidad didáctica se destinará a recordar y dominar aquellos conceptos que son las bases y herramientas en que se sustenta el nuevo contenido. Tras una breve exposición de dichos conceptos, se recurrirá a *buenas preguntas* (Sullivan y Clarke, 1991) por su utilidad para conocer el punto de partida de los alumnos, su grado de comprensión.

Estas *buenas preguntas* se utilizarán también al inicio de cada sesión para confirmar la adecuada asimilación por todos los alumnos de la materia abordada en las sesiones anteriores.

2º. Explicación de la teoría desde la situación de partida previamente determinada. Resolución de tareas básicas relacionadas con la nueva materia, evolucionando hacia otras de mayor complejidad que requieran la aplicación del concepto y, por tanto, permitan comprobar si se ha entendido.

Se utilizará el *método expositivo* para la introducción y explicación de nuevos conceptos por entender que favorece la comprensión por los alumnos. Pero, como ya hemos dicho antes, esta exposición no consistirá en un “monólogo”; se plantearán preguntas que requieran el esfuerzo intelectual del alumno para que, en su búsqueda de respuestas requieran del profesor la información de la que carecen.

Tras la realización de algunos ejercicios de manera individual que permitan la correcta asimilación de nuevos contenidos por todos los alumnos, utilizaremos los denominados *Campos de Problemas* y, en concreto, los que a nuestro modo de ver constituyen una modalidad de estos, las Variaciones de un problema (método “Y si...?”) que permitirán

la “cadena de descubrimientos” de Liljedahl (2005) y mantener el interés y la participación de los alumnos.

En este desarrollo de una unidad didáctica no cabe la distinción entre “sesiones explicativas” y “sesiones de ejercicios y problemas”, puesto que se opta por la enseñanza a través de la “resolución de problemas” frente a la enseñanza para la “resolución de problemas”.

- Cada alumno elaborará una “carpeta de trabajos” en la que incluirá únicamente aquellos problemas cuya resolución le aportó un aprendizaje significativo, acompañando cada uno de ellos de una breve explicación de esa aportación (indicando dificultades, descubrimientos, etc.) y una autoevaluación, no de su acierto o desacierto en la resolución del problema sino de su propio proceso (un análisis motivado de sus logros y de sus dificultades).

Finalmente, se realizará un examen y la última sesión de la unidad didáctica se destinará a la corrección en común del mismo. Cada alumno dispondrá de su examen ya corregido por el profesor para que pueda analizar en qué ha fallado, cuales han sido sus errores y, sobre todo, a qué se deben. Escribirá brevemente estas conclusiones y las entregará al profesor para que este pueda determinar si el análisis del alumno es acertado; en caso contrario, el profesor le ayudará en su análisis. Entendemos que esta labor es fundamental en el aprendizaje, porque sólo cuando se es consciente de la dificultad concreta, se es capaz de superarla.

## **Bibliografía**

- Arnold, V.I. (2013). *Problemas para jóvenes de 5 a 15 años*. Valladolid: RSME-UVA.
- Barnés, Héctor G. (4 de abril de 2018). El hombre que ha desmontado la educación finlandesa: “Es un peligro imitarla”. *El Confidencial*. Recuperado de [https://www.elconfidencial.com/alma-corazon-vida/2018-04-04/educacion-finlandia-mito-gabriel-heller-sahlgren\\_1544856/](https://www.elconfidencial.com/alma-corazon-vida/2018-04-04/educacion-finlandia-mito-gabriel-heller-sahlgren_1544856/)
- Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational studies in mathematics*, 17(2), 125-141.
- Carrillo Yañez, J. (1995). La resolución de problemas en matemáticas: ¿cómo abordar su evaluación?. *Revista Investigación en la Escuela*, (25), 79-86.
- Calzadilla, M.E. (2002) Aprendizaje colaborativo y tecnologías de la información y la comunicación. *Revista Iberoamericana de Educación*, 29(1), 1-10. Recuperado de <https://rieoei.org/RIE/article/view/2868/3812>
- De Guzmán, M. (2006). *Para pensar mejor: desarrollo de la creatividad en Matemáticas*. Madrid: Pirámide.
- De Miguel Díaz, M. (2005). *Modalidades de enseñanza centradas en el desarrollo de competencias: orientaciones para promover el cambio metodológico en el espacio europeo de educación superior*. Oviedo: Servicio de Publicaciones. Universidad de Oviedo. Recuperado de [https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/31077250/LIBRO\\_MARIO\\_DE\\_MIGUEL.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A&Expires=1536504120&Signature=bBc2mbJ0FZAvzI7iikGfyVDURSo%3D&response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DModalidades\\_de\\_ensenanza\\_centradas\\_en\\_el.pdf](https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/31077250/LIBRO_MARIO_DE_MIGUEL.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A&Expires=1536504120&Signature=bBc2mbJ0FZAvzI7iikGfyVDURSo%3D&response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DModalidades_de_ensenanza_centradas_en_el.pdf)
- Ortega del Rincón, T y Ortiz Vallejo, M. (Coords.). (2005). *Cálculo Mental*. [Material docente del Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática, Universidad de Valladolid]. Recuperado del sitio web de la Sociedad Española de Investigación en Educación matemática: <http://www.seiem.es/docs/educacion/CM3ciclocompleto.pdf>

- Embajada de Finlandia, Madrid (2017). *Educación en Finlandia*. [Página web]. Recuperado el 12-01-2018 de <http://www.finlandia.es/public/default.aspx?nodeid=36870&contentlan=9&culture=es-ES>
- Espo, K., y Rossi, M. (1996). *Matka matematiikkaan (Un viaje a las Matemáticas - una serie de libros de texto)*. Helsinki: Edita.
- Halinen, I., Hänninen, L., Joki, J., Leino, J., Näätänen, M., Pehkonen, E., Pehkonen, L., Sahlberg, P., Sainio, E., Seppälä, R. Y Strang, T. (1991). *Peruskoulun Matematiikan Opetuksen Kehittämissuunnasta 1990 - luvulla (About the Developing Trends in Mathematics Education in the Comprehensive School in 1990's)*. Helsinki: VAPK-kustannus.
- IEA Instituto Nacional de Evaluación Educativa (2012). *PIRLS-TIMSS 2011 Estudio Internacional de progreso en comprensión lectora, matemáticas y ciencias (Volumen I: Informe Español)*. [Página web]. Recuperado de <http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pirlstimss2011vol1.pdf?documentId=0901e72b8146f0ca>
- Instituto de Evaluación, Dirección General de Evaluación y Ordenación del Sistema Educativo (2008). *Pisa 2003 MATEMÁTICAS – Informe Español*. [Página web]. Recuperado de <https://www.mecd.gob.es/dctm/ievaluacion/internacional/pisa2003mat.pdf?documentId=0901e72b80110553>
- Jonassen, D. (2000). El Diseño de entornos constructivistas de aprendizaje. En: Reigeluth, Ch. (Eds), *Diseño de la instrucción Teorías y modelos. Un paradigma de la teoría de la instrucción (Parte I)*. (pp. 225-249) Madrid: Aula XXI Santillana.
- Kantowski, M.G. (1980). *Some Thoughts on Teaching for Problem-Solving*. In: *NCTM Yearbook 1980, 195–203*. Reston (VA): Council.
- Kupari, P., Reinikainen, P. y Törnoos, J. (2007). Finnish students' mathematics and science results in recent international assessment studies: PISA and TIMSS. En Pehkonen, E., Ahtee, M., y Lavonen, J. (Eds.), *How Finns Learn Mathematics and Science* (pp.11-34). Rotterdam: Sense Publishers.

- Liljedahl, P. (2005, February). Sustained engagement: Preservice teachers' experience with a chain of discovery. En *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Sant Feliu de Guíxols, Spain (pp. 225-234). Recuperado de <https://core.ac.uk/download/pdf/19724788.pdf#page=63>
- López, E. M., Guerrero, A. C., Carrillo, J. & Contreras, L. C. (2015). La resolución de problemas en los libros de texto: un instrumento para su análisis. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (8).
- Martins, A. (7 de mayo de 2015). ¿Dejó Finlandia de ser el mejor sistema de educación del mundo?. *BBC Mundo*. Recuperado de [http://www.bbc.com/mundo/noticias/2015/05/150504\\_finlandia\\_educacion\\_a\\_m](http://www.bbc.com/mundo/noticias/2015/05/150504_finlandia_educacion_a_m)
- Mason, J., Burton, L., y Stacey, K. (1992). *Pensar matemáticamente*. Madrid: Centro de publicaciones del MEC y Editorial Labor.
- Melgarejo, X. (2013). *Gracias, Finlandia*. Barcelona: Plataforma Editorial.
- Método Algoritmo Basado en Números ABN. [Página web]. Recuperado el 16-05-2018 de <https://www.actiludis.com/>
- Método Kumon. [Página web]. Recuperado el 16-05-2018 de <http://www.kumon.es/>
- Método Aloha Mental Arithmetic. [Página web]. Recuperado el 16-05-2018 de <https://www.alohaspain.com/es/>
- Oates, T. (2015). *Finnish fairy stories*. Recuperado de <http://www.cambridgeassessment.org.uk/Images/207376-finnish-fairy-stories-tim-oates.pdf>
- Pehkonen, E. (2008). *Problem solving in mathematics education in Finland*. Finlandia: Universitas of Helsinki.
- Pehkonen, E. (2009). Problem Solving in Second Level Mathematics —The Finnish Experience. *IMTA Newsletter*, (109), 3-13.
- Pehkonen, E. y Pehkonen, L. (1993). *Nyt on mun vuoro! Oppimislejät peruskoulun matematiikan opetukseen*. (Now it's my turn! Learning games for mathematics instruction of the comprehensive school). Helsinki: Lahden tutkimus- ja koulutuskeskus.

- Pehkonen E. y Rossi, M. (2007). Some alternative teaching methods in mathematics. En Pehkonen, E., Ahtee, M., y Lavonen, J. (Eds.), *How Finns Learn Mathematics and Science* (pp.141-152). Rotterdam: Sense Publishers.
- Pehkonen E., Hannula M. S. y Björkqvist O. (2007) Problem Solving as a teaching method in mathematics education. En Pehkonen, E., Ahtee, M., y Lavonen, J. (Eds.), *How Finns Learn Mathematics and Science* (pp.153-162). Rotterdam: Sense Publishers.
- Pehkonen, E., Seppälä, R., y Pekama, E. (1991). *Matemaattinen ongelmanratkaisu: tehtäviä peruskoulun ja lukion matematiikan opetukseen. (Mathematical problem solving. Tasks for the teaching of mathematics in the comprehensive school and upper secondary school)*. MAOL ry:n julkaisusarja n:o 26/1991. Forssa: MFKA-kustannus.
- Pehkonen, L. y Krzywacki-Vainio, H. (2007). Mathematics teaching in primary schools. En Pehkonen, E., Ahtee, M., y Lavonen, J. (Eds.), *How Finns Learn Mathematics and Science* (pp.153-162). Rotterdam: Sense Publishers.
- Polya, G. (ed). (1981). *Mathematical discovery: on understanding, learning and teaching problem solving*. New York: John Wiley & Sons.
- Programa UCMAS [*Página web*]. Recuperado el 18-05-2018 de <http://www.ucmas.es/>
- Programa Smartick [*Página web*]. Recuperado el 18-05-2018 de <https://www.smartick.es/>
- Remesal Ortiz, A. (2006). *Los problemas en la evaluación del aprendizaje matemático en la educación obligatoria: perspectiva de profesores y alumnos*. (Tesis doctoral). Recuperado de [https://scholar.google.es/scholar?hl=es&as\\_sdt=0%2C5&q=Remesal+Ortiz%2C+A.+%282006%29.+Los+problemas+en+la+evaluaci%C3%B3n+del+aprendizaje+matem%C3%A1tico+en+la+educaci%C3%B3n+obligatoria%3A+perspectiva+de+profesores+y+alumnos.+&btnG=](https://scholar.google.es/scholar?hl=es&as_sdt=0%2C5&q=Remesal+Ortiz%2C+A.+%282006%29.+Los+problemas+en+la+evaluaci%C3%B3n+del+aprendizaje+matem%C3%A1tico+en+la+educaci%C3%B3n+obligatoria%3A+perspectiva+de+profesores+y+alumnos.+&btnG=)
- Rossi, M. y Pehkonen, E. (1995). *Investigations and their assessment in mathematics instruction of the comprehensive school*. Helsinki: Opetus hallitus.

- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. San Diego (CA): Academic Press.
- Sevillano, J. (2017). *La educación actual (informes OCDE y PISA) y la de nuestros padres y abuelos*. [Página web]. Recuperado el 30-12-2017 de <https://javiersevillano.es/Laeducacion.htm#tim>
- Stacey, K., y Groves, S. (1999). *Resolver problemas: estrategias: unidades para desarrollar el razonamiento matemático* (Vol. 145). Madrid: Narcea, S.A. de Ediciones.
- Sullivan, P., y Clarke, D. J. (1991). Catering to all abilities through "good" questions. *Arithmetic Teacher*, 39(2), p.14-18.
- Sahlgren, G. H. (2015). Real Finnish Lessons. *The True Story of an Education Superpower*. London: Centre for Policy Studies.
- Vähäpassi, A., Hartikainen, S., Vaahtokari, A y Hänninen, L. (1997). *Mieti Ja Laske*. [Piensa y calcula.] Helsinki: Kirjayhtymä.
- Wilson, J.D. (1992). *Cómo valorar la calidad de la enseñanza*. Madrid: Paidós Ibérica.