



*Facultad
de
Ciencias*

**HOMOLOGÍA SINGULAR Y CW-
COMPLEJOS**
(Singular Homology and CW-complexes)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Luis González de la Fuente

Directora: Nuria Corral Pérez

Junio-2018

Resumen

En este trabajo vamos a introducir la teoría de la homología singular y demostrar sus principales resultados, con el fin de calcular los grupos de homología de las esferas \mathbb{S}^n y deducir importantes resultados como el teorema del punto de Brouwer o demostrar que, si $m \neq n$, \mathbb{R}^m no es homeomorfo a \mathbb{R}^n . En la segunda parte del trabajo definiremos unos espacios llamados CW-complejos e introduciremos el concepto de homología celular para poder calcular la homología de dichos espacios. Por último, estudiaremos una serie de espacios ya conocidos (como la esfera, el toro, la botella de Klein y el espacio proyectivo), los veremos como CW-complejos y calcularemos sus grupos de homología singular mediante la homología celular.

Palabras clave: *homología singular, espacio topológico, grupo abeliano, CW-complejo.*

Abstract

In this work we introduce the singular homology theory and prove its main results, in order to calculate the homology groups of the spheres \mathbb{S}^n and also with the purpose of deducing important results such as the Brouwer fixed-point theorem or prove that, if $n \neq m$, then \mathbb{R}^m is not homeomorphic to \mathbb{R}^n . The second part of this work will be the definition of certain kind of topological spaces, called CW-complex. We introduce the concept of cellular homology in order to calculate the homology groups of this kind of spaces. Finally, we will see familiar spaces (such as the sphere, the torus, the Klein bottle or the projective space) as CW-complexes and we calculate its homology groups.

Key words: *singular homology, topological space, abelian group, CW-complex.*

ÍNDICE

1. Introducción	1
2. HOMOLOGÍA SINGULAR.	2
2.1. Algunas propiedades sobre los grupos de homología singular.	5
2.2. Invarianza homotópica de los grupos de homología singular.	7
3. HOMOLOGÍA RELATIVA.	14
3.1. Algunas propiedades de la homología relativa	15
3.2. Homomorfismo inducido por una aplicación continua en los grupos de homología relativa.	20
3.3. Equivalencia homotópica de los grupos de homología relativa.	21
4. TEOREMA DE ESCISIÓN.	23
4.1. Grupos de homología de las esferas.	31
5. HOMOLOGÍA CELULAR. CW-COMPLEJOS.	35
5.1. Espacios obtenidos adjuntando celdas.	36
5.2. CW-Complejos	38
Referencias	50

1. INTRODUCCIÓN

La topología algebraica es una de las ramas de la matemática que intenta resolver problemas de ámbito topológico mediante el uso del álgebra, relacionando de cierta forma los espacios topológicos con elementos algebraicos.

En el presente trabajo se analizará una de estas relaciones entre los espacios topológicos y el álgebra, conocida por *homología singular*. Esta teoría no es más que un *functor* entre la categoría de espacios topológicos y la de grupos abelianos (se puede generalizar a *R-módulos*). La *homología singular* es una construcción tal que dado un espacio topológico le asocia una sucesión de grupos abelianos de manera que aplicaciones continuas entre espacios topológicos inducen homomorfismos entre los grupos de homología de los espacios y los homeomorfismos inducen isomorfismos entre sus grupos de homología singular. Esto nos ofrece una manera de comprobar que dos espacios topológicos no son homeomorfos (problema topológico), ya que si sus grupos de homología no son isomorfos (problema algebraico), dichos espacios no pueden ser homeomorfos (incluso ni tener el mismo tipo de homotopía como veremos más adelante).

El anterior hecho justifica su interés, pero esto va más allá, pues los grupos de homología son una herramienta muy potente a la hora de estudiar un espacio topológico, pues sus conceptos son globales, es decir, dependen del espacio total a diferencia de los conceptos que se emplean en *cálculo diferencial* que la mayoría de ellos son locales.

A parte de estos hechos, podemos usar la homología para probar fuertes resultados que a primera vista no tienen aparente relación con lo que estamos trabajando, como puede ser el *teorema del punto fijo de Brouwer*, o probar que \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m no son homeomorfos si $n \neq m$.

El concepto de homología surge a finales del siglo *XIX* y se debe a los trabajos de reconocidos matemáticos como E. Betti (1823-1892), H. Poincaré (1854-1912). Éste último presenta en su libro "*Analysis Situs*" algún resultado que involucra el concepto de homología (como el *teorema de dualidad o de Poincaré*).

Más adelante, en el siglo *XX*, comienza el proceso de algebrización de la teoría de la mano de E. Noether (1882-1935) quien sugiere definir el *n*-ésimo grupo de Betti como el grupo cociente de los *n*-ciclos sobre el subgrupo de los *n*-ciclos homólogos a cero (es decir los *n*-bordes). Veremos que es una definición muy similar a la que se dará en el presente trabajo de los grupos de homología. De esta manera, Noether crea un nuevo campo a descubrir al definir la *homología* en conceptos puramente algebraicos.

Existen diferentes tipos de homología, pero la que se estudiará aquí será la *homología singular*. Esta teoría fue introducida en 1944 por el matemático polaco S. Eilenberg (1913-1998), quien definió los grupos de homología singular de forma muy parecida a como los conocemos en la actualidad. Además junto al matemático N. Steenrod (1910-1971) llevaron a cabo una axiomatización de la teoría y probaron que muchos de los resultados que se habían probado anteriormente para los diferentes tipos de homología son consecuencia directa de los axiomas que establecen.

La segunda parte del trabajo se centra en el estudio de unos espacios topológicos muy concretos denominados *CW-complejos* y el estudio del cálculo de sus grupos de homología. Introduciremos el concepto de *homología celular* para este tipo de espacios y veremos que es equivalente a calcular los grupos de homología singular de los *CW-complejos*. Su principal ventaja es que, en ocasiones, resulta más sencillo calcular los grupos de homología celular que los grupos de homología singular. Estos espacios fueron definidos por primera vez por el matemático inglés J.H.C.Whitehead (1904-1960). Su principal ventaja es que se construyen de manera muy sencilla, pues son el resultado de espacios cociente consistentes en discos y esferas de diferente dimensión. Se puede pensar en algo parecido a las variedades topológicas, ya que en cada punto se puede pensar en un entorno homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n , como puede ser un disco abierto. Otra ventaja es que muchos espacios topológicos que conocemos se pueden ver como *CW-complejos*. Veremos que la esfera, el toro, la botella de Klein o el plano proyectivo se los puede dotar de una estructura de *CW-complejo*.

2. HOMOLOGÍA SINGULAR.

Definiremos en primer lugar lo que es un n -símplice, que es la estructura fundamental a partir de la cual vamos a construir la teoría. En esta vamos a seguir principalmente. En esta sección seguiremos principalmente [5].

Definición 2.1. (n -símplice estándar) El n -símplice estándar, Δ_n , es el subespacio de \mathbb{R}^{n+1} definido como sigue:

$$\Delta_n := \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, n\}$$

Δ_n es el n -símplice geométrico generado por los puntos $v_0 = (1, 0, \dots, 0), \dots, v_n = (0, \dots, 0, 1)$. Es decir, es la envolvente convexa de dichos puntos, dicho de otra forma, el menor subconjunto convexo de \mathbb{R}^{n+1} que contiene a los puntos v_0, v_1, \dots, v_n .

En general, si P_0, P_1, \dots, P_{r+1} son $r+1$ puntos afinmente independientes de \mathbb{R}^{n+1} , el r -símplice geométrico generado por P_0, P_1, \dots, P_r es el conjunto,

$$[P_0, P_1, \dots, P_r] = \left\{ \sum_{i=0}^r x_i P_i : \sum_{i=0}^r x_i = 1, x_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, r \right\}$$

En particular tenemos que $\Delta_n = [v_0, v_1, \dots, v_n]$.

Tenemos entonces que Δ_0 es un punto, Δ_1 es un intervalo, Δ_2 es un triángulo, Δ_3 es un tetraedro sólido, etc... Vamos a introducir nuestros elementos más básicos de estudio, los n -símplices singulares, para poder definir, a partir de ellos, los grupos de homología de un espacio topológico dado.

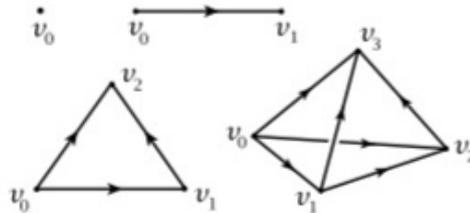


FIGURA 1. Símplexes de dimensión 0, 1, 2 y 3 (ver [3]).

Definición 2.2. (n -símplice singular) Sea X un espacio topológico. Un n -símplice singular de X es una aplicación continua:

$$\varphi : \Delta_n \rightarrow X.$$

Si consideramos como n -símplice singular la imagen en X de Δ_n , tenemos básicamente que, un 0 -símplice singular de X es un punto, un 1 -símplice singular es un camino, etc...

Definición 2.3. (Cadena singular) Sea X un espacio topológico. Una n -cadena singular de X es una expresión de la forma:

$$\sum_{j \in J} n_j \varphi_j,$$

donde $\{\varphi_j : j \in J\}$ es la familia de todos los n -símplices singulares de X y los $n_j \in R$ son elementos de un anillo conmutativo con unidad R . Los elementos n_j son todos cero salvo un número finito de ellos.

Observación 2.1. No debemos considerar la definición anterior como una suma formal, ya que no tendría sentido sumar n -símplices como están definidos, luego consideramos a las cadenas singulares como una manera de seleccionar un número finito de n -símplices singulares de X y además añadirles un coeficiente, que es un elemento de un anillo.

De esta manera, definimos $S_n(X; R)$ (para hacer referencia al anillo sobre el que estamos trabajando), como el R -módulo libre generado por todos los n -símplices singulares, respecto de la operación:

$$\sum_{j \in J} n_j \varphi_j + \sum_{j \in J} m_j \varphi_j := \sum_{j \in J} (n_j + m_j) \varphi_j,$$

donde los elementos de $S_n(X; R)$ son combinaciones lineales formales de n -símplices singulares, es decir, los elementos de dicho R -módulo libre son las n -cadenas singulares. Como podemos imaginarnos, $S_n(X; R)$ es extremadamente grande, por lo que no es viable intentar estudiar las propiedades como tal, aunque son igualmente interesantes. Para ello, vamos a definir una relación de equivalencia (como se hace en la construcción del grupo fundamental), a modo de hacerlo más manejable.

Observación 2.2. En nuestro caso, vamos a tomar como anillo R al anillo de los enteros, \mathbb{Z} , con lo que dicho R -módulo, $S_n(X; \mathbb{Z})$, (que lo denotaremos a partir de ahora por $S_n(X)$) con la operación suma antes definida tendrá estructura de grupo. De ahora en adelante, si no se dice lo contrario, consideramos a $S_n(X)$ como un grupo y trabajaremos con algunos subgrupos representativos suyos. Asimismo, podríamos trabajar con un anillo conmutativo con unidad cualquiera, R , y desarrollar la teoría de una manera más general, pero debido a que la mayor parte de los cálculos de grupos de homología de espacios topológicos están hechos en \mathbb{Z} consideraremos el caso de los enteros como principal.

En primer lugar, vamos a definir una aplicación:

$$\delta_i : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X), \text{ para } 0 \leq i \leq n,$$

definida de la manera siguiente:

$$\delta_i \left(\sum_{j \in J} n_j \varphi_j \right) = \sum_{j \in J} n_j \delta_i(\varphi_j),$$

donde,

$$\delta_i(\varphi_j(x_0, \dots, x_{n-1})) = \varphi_j(x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1}), \text{ para todo } j \in J.$$

Es claro que la aplicación δ_i es un homomorfismo de grupos. De esta manera, vamos a definir el operador borde, ∂ , sobre el conjunto de n -cadenas, $S_n(X)$, con el fin de definir sobre él una relación de equivalencia.

Definición 2.4. (*Operador Borde*) El operador borde, $\partial_n : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$, está definido como sigue:

$$\partial_n := \sum_{i=0}^n (-1)^i \delta_i.$$

Aplicando dicho operador sobre $S_n(X)$, podemos definir dos subgrupos importantes de este grupo.

Definición 2.5. (*n -cíclos y n -bordes*)

1. Un n -ciclo es una n -cadena singular $c \in S_n(X)$, de tal modo que $\partial_n(c) = 0$.
2. Un n -borde es una n -cadena singular $d \in S_n(X)$, de tal modo que existe $e \in S_{n+1}(X)$ tal que $d = \partial_{n+1}(e)$.

Denotaremos por $Z_n(X)$ al conjunto de n -cíclos de X , mientras que el conjunto de n -bordes lo denotaremos por $B_n(X)$.

Con estas definiciones tenemos que:

$$Z_n(X) = \text{Ker}(\partial_n), \text{ donde } \partial_n : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X), \text{ para } n > 0.$$

$$B_n(X) = \text{Im}(\partial_{n+1}), \text{ donde } \partial_{n+1} : S_{n+1}(X) \rightarrow S_n(X), \text{ para } n \geq 0.$$

Con lo que, tanto $Z_n(X)$ como $B_n(X)$ son subgrupos, por ser núcleo e imagen, respectivamente, de un homomorfismo de grupos. Además, si definimos $Z_0(X) := S_0(X)$, tenemos que toda 0-cadena singular es un 0-ciclo, con lo que $Z_0(X) = S_0(X)$.

A continuación, probaremos un resultado que relaciona a dichos subgrupos.

Teorema 2.6. *Para cada $n \geq 0$, se verifica que:*

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$$

Demostración. Sea φ un n -símplice singular. Vamos a probar que, dado un $n \geq 0$, tenemos que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, con lo que concluiremos el resultado. Por cómo hemos definido el operador borde en la definición 2.4, y por cómo están definidos los δ_i , tenemos que:

$$\partial_{n-1}\partial_n(\varphi) = \partial_{n-1}\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \delta_i \varphi\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^n (-1)^{i+j} \delta_j(\delta_i(\varphi))$$

Si $i \leq j$, tenemos que:

$$\begin{aligned} (\delta_j(\delta_i \varphi))(x_0, \dots, x_{n-2}) &= \delta_i(\varphi)(x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{n-2}) = \\ \varphi(x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{n-2}) &= (\delta_i(\delta_{j+1} \varphi))(x_0, \dots, x_{n-2}). \end{aligned}$$

Luego, tenemos que $\delta_j \delta_i \varphi = \delta_i \delta_{j+1} \varphi$, si $i \leq j$.

Procedemos entonces a calcular $\partial_{n-1}\partial_n \varphi$:

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}\partial_n \varphi &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^j (-1)^{i+j} \delta_j \delta_i \varphi + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n (-1)^{i+j} \delta_j \delta_i \varphi \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^j (-1)^{i+j} \delta_i \delta_{j+1} \varphi + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n (-1)^{i+j} \delta_j \delta_i \varphi \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i}^{n-1} (-1)^{i+j} \delta_i \delta_{j+1} \varphi + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n (-1)^{i+j} \delta_j \delta_i \varphi \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j}^{n-1} (-1)^{i+j} \delta_j \delta_{i+1} \varphi + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n (-1)^{i+j} \delta_j \delta_i \varphi \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n (-1)^{i+j-1} \delta_j \delta_i \varphi + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n (-1)^{i+j} \delta_j \delta_i \varphi = 0 \end{aligned}$$

□

Es evidente que $B_n(X)$ es un subgrupo de $Z_n(X)$, ya que, dado un n -borde $c \in B_n(X)$, por definición existe un $(n+1)$ -símplice, $c' \in S_{n+1}(X)$, de modo que $\partial_{n+1}(c') = c$. Usando el resultado anterior, tenemos que:

$$0 = \partial_n \partial_{n+1}(c') = \partial_n(c),$$

con lo que $c \in Z_n(X)$, luego $B_n(X) \subseteq Z_n(X)$.

Como $Z_n(X)$ es un subgrupo abeliano, el cociente $Z_n(X)/B_n(X)$ está bien definido y:

Definición 2.7. (*n -ésimo grupo de Homología*) El n -ésimo grupo de homología de un espacio topológico X se define como el cociente $Z_n(X)/B_n(X)$, y se denota por $H_n(X)$.

Debido a la definición, los elementos de $H_n(X)$ son las clases de equivalencia de n -ciclos tal que difieren en un n -borde, es decir, con la relación de equivalencia:

$$c \sim c' \Leftrightarrow c - c' \in B_n(X)$$

Así, decimos que los n -ciclos c y c' son *homólogos*.

2.1. Algunas propiedades sobre los grupos de homología singular. En primer lugar vamos a calcular los grupos de homología de un espacio lo más sencillo posible, que es el formado por un solo punto.

Lema 2.8. Sea $X = \{x_0\}$ el espacio topológico formado por un único punto, entonces $H_0(X) = \mathbb{Z}$ y $H_n(X) = 0$, para todo $n > 0$.

Demostración. Es claro que dado un $n \geq 0$, existe un único n -símplice singular, $\varphi_n : \Delta_n \rightarrow X$, de modo que $\varphi_n(t) = x_0$, para todo $t \in \Delta_n$. Así, tenemos que el grupo de n -cadenas singulares es:

$$S_n(X) = \{k\varphi_n : k \in \mathbb{Z}\}$$

Luego es evidente que $S_n(X)$ es un grupo isomorfo a \mathbb{Z} , $S_n(X) \cong \mathbb{Z}$.

Es también claro que, dado $n > 0$ y dado $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\delta_i\varphi_n = \varphi_{n-1}$. Luego:

$$\begin{aligned} \partial_n\varphi_n &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \delta_i\varphi_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \varphi_{n-1} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es impar} \\ \varphi_{n-1}, & \text{si } n \text{ es par y } n > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

En el caso de que $n = 0$, tenemos claramente que $\partial_0\varphi_0 = 0$.

Tenemos de lo anterior que:

$$Z_n(X) = \begin{cases} S_n(X), & \text{si } n \text{ es impar ó } n = 0 \\ 0, & \text{si } n \text{ es par y } n > 0 \end{cases}$$

$$B_n(X) = \begin{cases} S_n(X), & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0, & \text{si } n \text{ es par ó } n = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, si consideramos el cociente para hallar los grupos de homología tenemos que:

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } n = 0 \\ 0, & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

□

A continuación probaremos dos resultados que utilizaremos en el futuro.

Proposición 2.9. Sea X un espacio topológico conexo por caminos. Entonces, tenemos que $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Demostración. Sea $c = \sum_i n_i \sigma_i$ un 0-ciclo. Definimos la aplicación $\psi : H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$, de modo que,

$$\psi\left(\sum_i n_i \sigma_i\right) = \sum_i n_i.$$

Veamos que está bien definida. Sea $c' = \sum_j m_j \sigma_j$ otro 0-ciclo homólogo a c , es decir $c \sim c'$, con lo que existe $d = \sum_k p_k \varphi_k$ una 1-cadena, de modo que,

$$c = c' + \partial_1(d).$$

Por otra parte, tenemos que $\partial_1(d) = \sum_k p_k \partial_1(\varphi_k) = \sum_k p_k (\delta_0(\varphi_k) - \delta_1(\varphi_k))$. De esta manera,

$$\begin{aligned} \psi\left(\sum_i n_i \sigma_i\right) &= \psi\left(\sum_j m_j \sigma_j + \sum_k p_k (\delta_0(\varphi_k) - \delta_1(\varphi_k))\right) \\ &= \sum_i m_j + \sum_k p_k - \sum_k p_k = \sum_j m_j \\ &= \psi\left(\sum_j m_j \sigma_j\right) \end{aligned}$$

Luego, ψ está bien definida. Es claro que ψ es un homomorfismo de grupos y que ψ es sobreyectiva. Probemos que ψ es inyectiva. Si tomamos un 0-ciclo, $c = \sum_i n_i \sigma_i$, un punto cualquiera $x_0 \in X$ y un 0-símplice σ_{x_0} , de modo que $\sigma_{x_0}(\Delta_0) = x_0$, tenemos que,

$$c = \left(\sum_i n_i\right)\sigma_{x_0} + \sum_i (n_i \sigma_i - n_i \sigma_{x_0}) = \left(\sum_i n_i\right)\sigma_{x_0} + \partial_1\left(\sum_i n_i \varphi_{i,x_0}\right),$$

donde φ_{i,x_0} es una 1-cadena (un camino) con extremos $\sigma_i(\Delta_0) = x_i$ y x_0 . Esto implica que c y $(\sum_i n_i)\sigma_{x_0}$ son homólogos. Entonces, si $\psi(c) = 0$, implica que, como ψ está bien definida, $\psi((\sum_i n_i)\sigma_{x_0}) = 0$, con lo que $\sum_i n_i = 0$, con lo que,

$$\sum_i n_i \sigma_i \sim \left(\sum_i n_i\right)\sigma_{x_0} \sim 0,$$

luego $c \sim 0$ y ψ es inyectiva. Luego ψ es un isomorfismo de grupos y $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$. \square

Proposición 2.10. Sea X un espacio topológico y sean $(X_k)_{k \in K}$ sus componentes conexas por caminos. Entonces existe un isomorfismo canónico,

$$H_n(X) \cong \bigoplus_{k \in K} H_n(X_k), \text{ para todo } n \geq 0,$$

(donde \bigoplus denota la suma directa de grupos, que se define como el grupo producto cartesiano de los X_k consistente en la familia de elementos (x_k) de modo que solo una cantidad finita de ellos es distinta de 0).

Demostración. Tenemos el hecho de que hay un isomorfismo de grupos,

$$S_n(X) \cong \bigoplus_{k \in K} S_n(X_k), \text{ para todo } n \geq 0,$$

donde el operador borde, ∂_n opera componente a componente. Esto es claro, ya que la imagen de Δ_n por cada n -símplice singular σ de $S_n(X)$ está contenida en alguna de las componentes conexas por caminos X_k , debido a que Δ_n es conexo por caminos y $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ es una aplicación continua. Con este hecho, tenemos que cada n -cadena c de $S_n(X)$ se puede expresar, de manera única, como,

$$c = \sum_{k \in K} c_k,$$

donde cada c_k es un n -símplice singular de modo que $c_k(\Delta_n)$ está contenida en una componente conexas por caminos X_k . Así, obtenemos el resultado que queríamos, pues existe un isomorfismo canónico:

$$H_n(X) \cong \bigoplus_{k \in K} H_n(X_k), \text{ para todo } n \geq 0.$$

\square

A continuación vamos a introducir una pequeña variación a la hora de definir los grupos de homología que nos resultará útil para resultados posteriores. A dichos grupos se los conoce como *grupos de homología reducida*.

Definición 2.11. (*Grupos de homología reducida*) Sea X un espacio topológico y $\psi : S_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ la aplicación definida en la prueba de la proposición 2.9, es decir, dado $c = \sum_i n_i \sigma_i$ una 0-cadena de $S_0(X)$, definimos $\psi(\sum_i n_i \sigma_i) = \sum_i n_i$. Tenemos así el complejo de cadenas aumentado,

$$\cdots \longrightarrow S_2(X) \xrightarrow{\partial_2} S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}$$

En la prueba de la proposición 2.9 probamos que $\psi \circ \partial_1 = 0$, con lo que podemos definir $\tilde{Z}_0(X) := \text{Ker}(\psi)$, con lo que, definimos el 0-ésimo grupo de homología reducida como,

$$\tilde{H}_0(X) = \tilde{Z}_0(X)/B_0(X).$$

Claramente para dimensiones superiores es como definimos los grupos de homología singular anteriormente, es decir,

$$\tilde{H}_n(X) = H_n(X), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Como hemos visto, los grupos de homología reducida únicamente se diferencian con los grupos de homología singular en el 0-ésimo grupo.

Por último veremos que $H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$. Por lo anterior, tenemos que $\psi : S_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ induce un homomorfismo,

$$(\psi)_* : H_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

De esta manera, las clases de equivalencia de $\tilde{H}_0(X)$ están representadas por los elementos que se anulan por ψ , luego, tenemos que,

$$\text{Ker}((\psi)_*) = \tilde{H}_0(X),$$

con lo que $\tilde{H}_0(X)$ es un subgrupo de $H_0(X)$. Más aún, por los teoremas de isomorfía, empleándolos en el homomorfismo $(\psi)_* : H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$, teniendo en cuenta que es sobreyectivo, concluimos que,

$$H_0(X)/\text{Ker}((\psi)_*) \cong \mathbb{Z} \Rightarrow H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}.$$

Se deduce rápidamente que si $X = \{x_0\}$ es un espacio unipuntual, tenemos que $\tilde{H}_n(X) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.2. Invarianza homotópica de los grupos de homología singular. A continuación vamos a introducir el homomorfismo de grupos de homología que induce una aplicación continua entre espacios topológicos, con el fin de calcular fácilmente grupos de homología de algunos espacios.

En primer lugar, sean X e Y dos espacios topológicos y sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua. Para cada $n \geq 0$, dicha aplicación induce un homomorfismo entre los grupos de n-cadenas singulares de X e Y :

$$(f_{\#})_n : S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$$

definida por:

$$(f_{\#})_n \left(\sum_{j \in J} n_j \varphi_j \right) = \sum_{j \in J} n_j (f \circ \varphi_j),$$

donde $f \circ \varphi_j : \Delta_n \rightarrow Y$ es un n-símplice singular de Y , para todo $j \in J$.

Veremos un resultado que nos permita probar que $(f_{\#})_n$ aplica n-ciclos en n-ciclos y n-bordes en n-bordes.

Lema 2.12. *Con las notaciones precedentes se tiene que,*

$$\partial_n \circ (f_{\#})_n = (f_{\#})_{n-1} \circ \partial_n$$

Demostración. Incluimos el siguiente diagrama para visualizar mejor lo que queremos probar,

$$\begin{array}{ccc} S_n(X) & \xrightarrow{(f\#)_n} & S_n(Y) \\ \partial_n \downarrow & & \downarrow \partial_n \\ S_{n-1}(X) & \xrightarrow{(f\#)_{n-1}} & S_{n-1}(Y) \end{array}$$

Debido a la definición de operador borde, probaremos el resultado para cada δ_i y a partir de ahí se concluye fácilmente el resultado. Así, dado un n -símplice singular φ de X , tenemos que:

$$\begin{aligned} ((\delta_i \circ (f\#)_n)(\varphi))(x_0, \dots, x_{n-1}) &= \delta_i(f \circ \varphi)(x_0, \dots, x_{n-1}) \\ &= (f \circ \varphi)(x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1}) \\ &= f(\varphi(x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1})) \\ &= f((\delta_i(\varphi))(x_0, \dots, x_{n-1})) \\ &= (f\delta_i\varphi)(x_0, \dots, x_{n-1}) \\ &= (((f\#)_{n-1} \circ \delta_i)(\varphi))(x_0, \dots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

Con lo que tenemos el resultado que queríamos. \square

Así pues, con dicho resultado concluimos fácilmente que la aplicación inducida por f aplica ciclos en ciclos y bordes en bordes, como muestra el siguiente resultado:

Corolario 2.13. Con las notaciones precedentes, tenemos que:

$$\begin{aligned} (f\#)_n(Z_n(X)) &\subseteq Z_n(Y) \\ (f\#)_n(B_n(X)) &\subseteq B_n(Y) \end{aligned}$$

Demostración. En primer lugar, probemos la primera contención. Sea c un n -ciclo de X , queremos probar que $(f\#)_n(c)$ es un n -ciclo de Y , esto es, $\partial_n((f\#)_n(c)) = 0$. Por definición de n -ciclo, $\partial_n(c) = 0$, con lo que, por el lema anterior tenemos que:

$$\partial_n((f\#)_n(c)) = (f\#)_{n-1}(\partial_n(c)) = (f\#)_{n-1}(0) = 0,$$

con lo que $(f\#)_n(c)$ es un n -ciclo de Y y tenemos probada la primera contención.

Para la segunda, sea d un n -borde de X , debemos probar que $(f\#)_n(d)$ es un n -borde de Y . Por definición de n -borde, existe un $(n+1)$ -símplice singular, e , de X , de modo que $\partial_{n+1}(e) = d$. De esta manera,

$$(f\#)_n(d) = (f\#)_n(\partial_{n+1}(e)) = \partial_{n+1}((f\#)_{n+1}(e)),$$

luego $(f\#)_n(d)$ es un n -borde de Y , con lo que tenemos probada la segunda inclusión y hemos concluido la prueba. \square

De esta manera, el resultado anterior implica la existencia de un homomorfismo entre los grupos de homología de los espacios X e Y , el cual denotamos por:

$$(f_*)_n : H_n(X) \rightarrow H_n(Y),$$

definido como hemos hecho anteriormente:

$$(f_*)_n\left(\sum_{j \in J} n_j \varphi_j\right) = \sum_{j \in J} n_j (f \circ \varphi_j),$$

donde $\sum_{j \in J} n_j \varphi_j$ es un n -ciclo de X . Dicho homomorfismo se denomina *homomorfismo inducido por la aplicación f* .

Los dos siguientes resultados que enunciaremos sirven para probar que la homología, al igual que el grupo fundamental, es un funtor de la categoría de espacios topológicos en la categoría de grupos abelianos.

Teorema 2.14. Dados tres espacios topológicos X , Y y Z se tiene que,

1. Si $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ son dos aplicaciones continuas, entonces, $((g \circ f)_*)_n = (g_*)_n \circ (f_*)_n : H_n(X) \rightarrow H_n(Z)$, para todo $n \geq 0$.
2. Si $Id : X \rightarrow X$ es la aplicación identidad, $(Id_*)_n : H_n(X) \rightarrow H_n(X)$ es el homomorfismo identidad, para todo $n \geq 0$.

Demostración. Comenzaremos probando el primer punto. Vamos a escribir las expresiones de $((g \circ f)_*)_n$ y de $(g_*)_n \circ (f_*)_n$ y veremos que coinciden. Así pues, sea $\sum_{j \in J} n_j \varphi_j$ un n -ciclo de X , entonces:

$$((g \circ f)_*)_n \left(\sum_{j \in J} n_j \varphi_j \right) = \sum_{j \in J} n_j (g \circ f \circ \varphi_j).$$

Por otra parte:

$$(g_*)_n \circ (f_*)_n \left(\sum_{j \in J} n_j \varphi_j \right) = (g_*)_n \left(\sum_{j \in J} n_j (f \circ \varphi_j) \right) = \sum_{j \in J} n_j (g \circ f \circ \varphi_j).$$

Luego tenemos el resultado que queríamos probar:

$$((g \circ f)_*)_n = (g_*)_n \circ (f_*)_n$$

Probemos ahora la segunda propiedad, que es trivial, ya que, dado un n -símple singular, φ , es claro que $Id \circ \varphi = \varphi$. Así pues, sea $\sum_{j \in J} n_j \varphi_j$ un n -ciclo de X , entonces:

$$(Id_*)_n \left(\sum_{j \in J} n_j \varphi_j \right) = \sum_{j \in J} n_j (Id \circ \varphi_j) = \sum_{j \in J} n_j \varphi_j.$$

Luego tenemos probado el segundo resultado y, por tanto, el teorema. \square

Con dicho teorema se concluye de manera sencilla:

Corolario 2.15. Sean X e Y dos espacios topológicos y sea $f : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo, entonces $(f_*)_n : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ es un isomorfismo de grupos, para todo $n \geq 0$.

Observación 2.3. Con los resultados anteriores, podemos concluir que la homología es un funtor de la topología al álgebra (en particular a los grupos abelianos). De hecho, si dos espacios topológicos son homotópicamente equivalentes, entonces sus grupos de homología son isomorfos, lo cual se deduce del resultado que enunciaremos a continuación.

A continuación vamos a probar que dos aplicaciones homótopas inducen el mismo homomorfismo entre los grupos de homología.

Definición 2.16. (*Aplicaciones homótopas*) Sean X e Y dos espacios topológicos y sean $f, g : X \rightarrow Y$ dos aplicaciones continuas. Se dice que f y g son aplicaciones homótopas si existe una aplicación continua $F : X \times I \rightarrow Y$ que cumple:

$$F(x, 0) = f(x), \text{ para todo } x \in X.$$

$$F(x, 1) = g(x), \text{ para todo } x \in X.$$

Cuando dos aplicaciones sean homótopas lo denotaremos por $f \cong g$.

Teorema 2.17. Sean X e Y dos espacios topológicos y sean $f, g : X \rightarrow Y$ dos aplicaciones continuas. Si f y g son aplicaciones homótopas, entonces $(f_*)_n = (g_*)_n$, para todo $n \geq 0$.

Demostración. Como las aplicaciones f y g son homótopas, entonces existirá una aplicación continua $F : X \times I \rightarrow Y$, de modo que:

$$F(x, 0) = f(x), \text{ para todo } x \in X.$$

$$F(x, 1) = g(x), \text{ para todo } x \in X.$$

Sean además $i : X \rightarrow X \times I$ y $j : X \rightarrow X \times I$ las aplicaciones dadas por $i(x) = (x, 0)$ y $j(x) = (x, 1)$, para todo $x \in X$. En términos de i y j , las condiciones de la homotopía se pueden expresar como:

$$F \circ i = f$$

$$F \circ j = g$$

Supongamos que $(i_*)_n = (j_*)_n$, entonces tendríamos que:

$$(f_*)_n = ((F \circ i)_*)_n = (F_*)_n \circ (i_*)_n = (F_*)_n \circ (j_*)_n = ((F \circ j)_*)_n = (g_*)_n$$

Con lo que para demostrar este resultado necesitamos probar únicamente que $(i_*)_n = (j_*)_n : H_n(X) \rightarrow H_n(X \times I)$. En particular, vamos a probar que para los homomorfismos:

$$(i_\#)_n, (j_\#)_n : S_n(X) \rightarrow S_n(X \times I),$$

existe un homomorfismo (el llamado operador prisma, P):

$$P : S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X \times I),$$

de modo que:

$$\partial_{n+1} \circ P + P \circ \partial_n = (j_\#)_n - (i_\#)_n.$$

Cuando existe tal P cumpliendo la anterior condición se dice que los homomorfismos $(i_*)_n$ y $(j_*)_n$ son *cadena homótopos*. A P se le llama *homotopía de cadenas*.

Veámoslo más claro con este diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & S_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & S_n(X) & \xrightarrow{\partial_n} & S_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \cdots \\ & & \downarrow & \nearrow P & \downarrow (i_\#)_n & \downarrow (j_\#)_n & \downarrow P \\ \cdots & \longrightarrow & S_{n+1}(X \times I) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & S_n(X \times I) & \xrightarrow{\partial_n} & S_{n-1}(X \times I) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Si $(i_*)_n$ y $(j_*)_n$ son cadena homótopos y c es un n -ciclo de X , entonces tenemos que:

$$(j_\#)_n(c) - (i_\#)_n(c) = ((j_\#)_n - (i_\#)_n)(c) = (\partial_{n+1}P + P\partial_n)(c) = \partial_{n+1}(P(c))$$

con lo que $(j_\#)_n(c) - (i_\#)_n(c)$ es un n -borde, luego $(j_\#)_n(c)$ y $(i_\#)_n(c)$ son homólogos y entonces:

$$(j_*)_n = (i_*)_n$$

Así, para la demostración de dicho teorema basta demostrar que $(j_*)_n$ y $(i_*)_n$ son cadena homótopos, con lo que necesitamos definir P .

Sea $\varphi : \Delta_n \rightarrow X$ un n -símplice singular de X . Para $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, definimos $P_i(\varphi)$ como el elemento de $S_{n+1}(X \times I)$ dado por:

$$P_i(\varphi)(x_0, \dots, x_{n+1}) = (\varphi(x_0, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+1}), 1 - \sum_{k=0}^i x_k).$$

De esta manera, definimos $P(\varphi) \in S_{n+1}(X \times I)$ como:

$$P(\varphi) = \sum_{i=0}^n (-1)^i P_i(\varphi).$$

Luego P definido de esta forma es un homomorfismo de grupos.

Ahora escribimos $\partial_{n+1}P(\varphi)$ como:

$$(2.1) \quad \partial_{n+1}P(\varphi) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \delta_j P(\varphi) = \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{i=0}^n (-1)^{i+j} \delta_j P_i(\varphi)$$

Trabajamos ahora con la expresión de $\delta_j P_i(\varphi)$.

Si $i < j - 1$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\delta_j P_i(\varphi)(x_0, \dots, x_n) &= P_i(\varphi)(x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_n) \\
&= (\varphi(x_0, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_n), 1 - \sum_{k=0}^i x_k) \\
&= (\delta_{j-1} \varphi(x_0, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n), 1 - \sum_{k=0}^i x_k) \\
&= P_i \delta_{j-1}(\varphi)(x_0, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

Si $i > j$, entonces:

$$\begin{aligned}
\delta_j P_i(\varphi)(x_0, \dots, x_n) &= P_i(\varphi)(x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_n) \\
&= (\varphi(x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{i-2}, x_{i-1} + x_i, x_{i+1}, \dots, x_n), 1 - \sum_{k=0}^{i-1} x_k) \\
&= (\delta_j \varphi(x_0, \dots, x_{i-2}, x_{i-1} + x_i, x_{i+1}, \dots, x_n), 1 - \sum_{k=0}^{i-1} x_k) \\
&= P_{i-1} \delta_j(\varphi)(x_0, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

Para finalizar la distinción de casos, si $i = j$, entonces:

$$\begin{aligned}
\delta_j P_j(\varphi)(x_0, \dots, x_n) &= P_j(\varphi)(x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_n) \\
&= (\varphi(x_0, \dots, x_n), 1 - \sum_{k=0}^{j-1} x_k) \\
&= P_{j-1}(\varphi)(x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_n) \\
&= \delta_j \circ P_{j-1}(\varphi)(x_0, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

Así pues, tenemos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_j P_j = \delta_j P_{j-1} \\ \delta_j P_i = P_{i-1} \delta_j, \quad \text{si } i > j, \\ \delta_j P_i = P_i \delta_{j-1}, \quad \text{si } i < j - 1 \end{array} \right.$$

Utilizando lo anterior y usando la expresión de $\partial_{n+1}P$, dada en la ecuación (2.1) tenemos que:

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1} \circ P &= \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{i=0}^n (-1)^{i+j} \delta_j P_i \\
&= \delta_0 P_0 + \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n (-1)^{i+j} \delta_j P_i + \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{j < i \leq n} (-1)^{i+j} \delta_j P_i + \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{0 \leq i < j} (-1)^{i+j} \delta_j P_i \\
&= \delta_0 P_0 + \sum_{j=1}^n \delta_j P_j + \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{j < i \leq n} (-1)^{i+j} \delta_j P_i + \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=j-1} (-1)^{i+j} \delta_j P_i \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{0 \leq i < j-1} (-1)^{i+j} \delta_j P_i \\
&= \delta_0 P_0 + \sum_{j=1}^n \delta_j P_j - \sum_{j=1}^n \delta_j P_{j-1} - \delta_{n+1} P_n + \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{j < i \leq n} (-1)^{i+j} \delta_j P_i \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{0 \leq i < j-1} (-1)^{i+j} \delta_j P_i \\
&= \delta_0 P_0 - \delta_{n+1} P_n + \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{j < i \leq n} (-1)^{i+j} P_{i-1} \delta_j + \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{0 \leq i < j-1} (-1)^{i+j} P_i \delta_{j-1} \\
&= \delta_0 P_0 - \delta_{n+1} P_n + \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{i=j}^{n-1} (-1)^{i+j+1} P_i \delta_j + \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{i+j+1} P_i \delta_j \\
&= \delta_0 P_0 - \delta_{n+1} P_n + \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+j+1} P_i \delta_j \\
&= \delta_0 P_0 - \delta_{n+1} P_n - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j} P_i \delta_j \\
&= \delta_0 P_0 - \delta_{n+1} P_n - P \circ \partial_n
\end{aligned}$$

Pero resulta:

$$\begin{aligned}
\delta_0 P_0(\varphi)(x_0, \dots, x_n) &= P_0(\varphi)(0, x_0, \dots, x_n) \\
&= (\varphi(x_0, \dots, x_n), 1) \\
&= (j\#)_n \varphi(x_0, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{n+1} P_n(\varphi)(x_0, \dots, x_n) &= P_n(\varphi)(x_0, \dots, x_n, 0) \\
&= (\varphi(x_0, \dots, x_n), 0) \\
&= (i\#)_n \varphi(x_0, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

Luego tenemos finalmente que la aplicación P así definida verifica:

$$\partial_{n+1}P + P\partial_n = (j\#)_n - (i\#)_n$$

Lo que demuestra, como ya hemos dicho, que $(j\#)_n$ e $(i\#)_n$ son cadena homótopos, luego $(j\#)_n = (i\#)_n$, con lo que $(f\#)_n = (g\#)_n : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$. \square

A continuación, usando el teorema anterior, calcularemos los grupos de homología de algunos espacios muy característicos, como son los espacios contráctiles.

En primer lugar, vamos a dar la definición de equivalencia homotópica.

Definición 2.18. (*Equivalencia homotópica*) Sean X e Y dos espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua. Se dice que f es una *equivalencia homotópica* si existe una aplicación continua $g : Y \rightarrow X$, de modo que:

$$\begin{aligned} g \circ f &\cong Id_X \\ f \circ g &\cong Id_Y \end{aligned}$$

Los espacios X e Y se dice que son *homotópicamente equivalentes* o que tienen el *mismo tipo de homotopía*.

Con esta definición y usando el teorema anterior es fácil concluir el siguiente resultado:

Corolario 2.19. Sean X e Y dos espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una equivalencia homotópica. Entonces $(f_*)_n : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ es un isomorfismo de grupos para todo $n \geq 0$.

Demostración. Como f es una equivalencia homotópica, existe una aplicación continua $g : Y \rightarrow X$ de modo que $g \circ f \cong Id_X$ y $f \circ g \cong Id_Y$. De este modo, haciendo uso de los resultados anteriores, tenemos que:

$$\begin{aligned} (g_*)_n \circ (f_*)_n &= ((g \circ f)_*)_n = ((Id_X)_*)_n = Id_{H_n(X)} \\ (f_*)_n \circ (g_*)_n &= ((f \circ g)_*)_n = ((Id_Y)_*)_n = Id_{H_n(Y)} \end{aligned}$$

Luego, tenemos que $(f_*)_n$ es un homomorfismo inyectivo (de la primera expresión) y sobreyectivo (de la segunda expresión), con lo que $(f_*)_n : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ es un isomorfismo, para todo $n \geq 0$, como queríamos probar. \square

A continuación daremos la definición de *espacio contráctil* y calcularemos sus grupos de homología.

Definición 2.20. (*Espacio Contráctil*) Sea X un espacio topológico. Se dice que X es un *espacio contráctil* si existe $x_0 \in X$ de modo que $Id_X \cong e_{x_0}$, donde Id_X es la aplicación identidad sobre X y $e_{x_0} : X \rightarrow X$ es la aplicación constante a x_0 .

Probemos antes un resultado que nos facilitará los cálculos y poder aplicar nuestros resultados.

Proposición 2.21. Sea X un espacio topológico. El espacio X es contráctil si, y sólo si, X es homotópicamente equivalente a un conjunto unipuntual, $\{x_0\}$, con $x_0 \in X$.

Demostración. Supongamos que X es un espacio contráctil, entonces $Id_X \cong e_{x_0}$, para un $x_0 \in X$. Definimos las aplicaciones $f : X \rightarrow \{x_0\}$ y $g : \{x_0\} \rightarrow X$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= x_0, \text{ para todo } x \in X, \\ g(x_0) &= x_0. \end{aligned}$$

De esta forma, $f \circ g = Id_{\{x_0\}}$ y $g \circ f = e_{x_0} \cong Id_X$, esto último era nuestra hipótesis.

De igual forma, supongamos que X tiene el mismo tipo de homotopía que un conjunto unipuntual $\{x_0\}$ con lo que existirán aplicaciones continuas $f : X \rightarrow \{x_0\}$ y $g : \{x_0\} \rightarrow X$, de modo que:

$$\begin{aligned} g \circ f &\cong Id_X \\ f \circ g &\cong Id_{\{x_0\}} \end{aligned}$$

Pero resulta que $g \circ f = e_{g(x_0)}$ con $g(x_0) \in X$. Por lo tanto, X es un espacio contráctil y hemos probado la equivalencia. \square

Con todo esto, podemos calcular los grupos de homología de un espacio contráctil.

Corolario 2.22. (*Grupos de Homología de un Espacio Contráctil*) Sea X un espacio topológico contráctil. Entonces tenemos que $H_n(X) = 0$ para todo $n > 0$, y $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Demostración. Claramente, como X es un espacio contráctil, por el último resultado, X es homotópicamente equivalente a un conjunto unipuntual $\{x_0\}$, con $x_0 \in X$, un elemento de X . Por lo tanto, si $f : X \rightarrow \{x_0\}$ es la única aplicación posible entre dichos conjuntos, tenemos que $(f_*)_n : H_n(X) \rightarrow H_n(\{x_0\})$ es un isomorfismo, para todo $n \geq 0$. Como ya vimos, $H_n(\{x_0\}) = 0$, para todo $n > 0$, y $H_0(\{x_0\}) \cong \mathbb{Z}$, con lo que se tiene el resultado que se quería probar. \square

Definición 2.23. (*Retracto*) Sean X un espacio topológico y $A \subset X$ un subespacio. Se dice que A es un *retracto* de X si existe una aplicación continua $r : X \rightarrow A$, de modo que $r \circ i = Id_A$, donde $i : A \hookrightarrow X$ es la inclusión. A la aplicación r se la llama *retracción*.

Definición 2.24. (*Retracto de Deformación*) Sea X un espacio topológico y $A \subset X$ un subespacio. Se dice que A es un *retracto de deformación* de X si existe una retracción $r : X \rightarrow A$ de modo que $i \circ r \cong Id_X$, donde $Id_X : X \rightarrow X$ es la identidad e $i : A \hookrightarrow X$ es la inclusión.

Corolario 2.25. (*Grupos de Homología de un Retracto de Deformación*) Sean X un espacio topológico y $A \subset X$ un retracto de deformación de X . Entonces, tenemos que $H_n(X)$ es un grupo isomorfo a $H_n(A)$, para todo $n \geq 0$.

Demostración. El resultado se obtiene directamente del corolario 2.19, ya que si A es un retracto de deformación de X , entonces A tiene el mismo tipo de homotopía que X , es decir, A y X son espacios homotópicamente equivalentes, luego,

$$H_n(A) \cong H_n(X) , \text{ para todo } n \geq 0.$$

\square

3. HOMOLOGÍA RELATIVA.

En esta sección vamos a definir los grupos de homología relativa, que vienen a generalizar los grupos de homología definidos en las anteriores secciones. Definiremos los grupos de homología relativa para un par (X, A) , donde X es un espacio topológico y $A \subset X$ es un subespacio, y los denotaremos por $H_n(X, A)$. Como veremos, dichos grupos guardan una estrecha relación con el homomorfismo de grupos $(i_*)_n : H_n(A) \rightarrow H_n(X)$.

Además estos grupos generalizan a los grupos de homología, ya que si A es el conjunto vacío, entonces resultará que $H_n(X, A) = H_n(X)$. Aunque el objetivo primordial de la topología algebraica es calcular los grupos de homología, $H_n(X)$, los grupos de homología relativa que introduciremos nos servirán para poder computar o calcular los grupos de homología, aunque tienen en sí mismo interés estudiarlos. Para esta sección se ha seguido [8].

Sean X un espacio topológico y A un subespacio del mismo. Consideramos la aplicación inclusión, $i : A \hookrightarrow X$ y el homomorfismo que induce en los grupos de cadenas singulares:

$$(i_{\#})_n : S_n(A) \rightarrow S_n(X)$$

Como dicho homomorfismo es inyectivo, pues la inclusión i lo es, tenemos que $S_n(A)$ es un subgrupo del grupo de cadenas singulares $S_n(X)$. Así, consideramos el grupo cociente $S_n(X)/S_n(A)$. Este grupo se llama *grupo de n -cadenas singulares del par (X, A)* y lo denotamos por $S_n(X, A)$. Por otra parte, si consideramos el operador borde $\partial_n : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$, como lo hemos definido, verifica que:

$$\partial_n(S_n(A)) \subset S_{n-1}(A),$$

ya que, si $\varphi : \Delta_n \rightarrow X$ es un n -símplice de $S_n(A)$, tenemos que cada $\delta_i(\varphi)$ es un $(n-1)$ -símplice de A . De esta manera, tenemos que ∂_n induce un homomorfismo en los respectivos grupos cociente, esto es:

$$\partial'_n : S_n(X, A) \rightarrow S_{n-1}(X, A)$$

De la misma forma que hicimos anteriormente, vamos a definir el subgrupo de $S_n(X, A)$ de n -ciclos, para $n > 0$ como:

$$Z_n(X, A) := \text{Ker}(\partial'_n) = \{c \in S_n(X, A) : \partial'_n(c) = 0\}$$

Y para $n \geq 0$, definimos el subgrupo de $S_n(X, A)$ de n -bordes como:

$$B_n(X, A) := \text{Im}(\partial'_n) = \partial'_n(S_{n+1}(X, A))$$

De la manera que hemos definido ∂'_n como el homomorfismo borde inducido por ∂_n , tenemos que se cumple también la propiedad $\partial'_n \circ \partial'_{n+1}$, de esta manera:

$$B_n(X, A) \subset Z_n(X, A)$$

Con lo que definimos los *grupos de homología relativa del par* (X, A) como:

Definición 3.1. (*Grupos de Homología Relativa*) Con las notaciones precedentes, definimos los *grupos de homología relativa respecto del par* (X, A) como el grupo cociente:

$$H_n(X, A) := Z_n(X, A)/B_n(X, A), \text{ para } n > 0$$

En el caso de $n = 0$, definimos $Z_0(X, A) := S_0(X, A)$ y entonces $H_0(X, A) := S_0(X, A)/B_0(X, A)$.

De esta manera, hemos definido los grupos de homología relativa respecto al par (X, A) de manera análoga a los grupos de homología, con la diferencia de que ‘colapsamos’ todo lo que se encuentre en el subespacio A , esto es, dado un n -símplice $c \in S_n(X, A)$, diremos que c es un n -ciclo módulo A si, y sólo si, $\partial_n(c) \in S_{n-1}(A)$.

3.1. Algunas propiedades de la homología relativa. Muchos de los resultados que expondremos a continuación son análogos a los ya vistos para grupos de homología, con lo que no haremos las demostraciones con todo detalle para no repetirnos en los mismos argumentos. A modo de explicar claramente lo que haremos a continuación, presentemos el siguiente diagrama sobre los grupos de cadenas singulares, donde $(i_\#)_n : S_n(A) \hookrightarrow S_n(X)$ es el homomorfismo de grupos inducido por la inclusión y $(\pi_\#)_n : S_n(X) \rightarrow S_n(X, A)$ es la proyección canónica. Con ello, tenemos que:

$$(3.1) \quad \begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & S_{n+1}(A) & \xrightarrow{(i_\#)_{n+1}} & S_{n+1}(X) & \xrightarrow{(\pi_\#)_{n+1}} & S_{n+1}(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial_{n+1} & & \downarrow \partial_{n+1} & & \downarrow \partial'_{n+1} \\ 0 & \longrightarrow & S_n(A) & \xrightarrow{(i_\#)_n} & S_n(X) & \xrightarrow{(\pi_\#)_n} & S_n(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial'_n \\ 0 & \longrightarrow & S_{n-1}(A) & \xrightarrow{(i_\#)_{n-1}} & S_{n-1}(X) & \xrightarrow{(\pi_\#)_{n-1}} & S_{n-1}(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Para no considerar el caso $n = 0$ como excepcional, definimos para todo entero $n < 0$:

$$S_n(A) = S_n(X) = S_n(X, A) = \{0\}$$

Como vimos anteriormente, el homomorfismo $(i_{\#})_n$ induce un homomorfismo en los grupos de homología:

$$(i_{\#})_n : H_n(A) \rightarrow H_n(X), \text{ para todo } n = 0, 1, 2, \dots$$

De igual manera, la proyección canónica $(\pi_{\#})_n$ también induce un homomorfismo:

$$(\pi_{\#})_n : H_n(X) \rightarrow H_n(X, A), \text{ para todo } n = 0, 1, 2, \dots$$

Por último, nos gustaría definir un homomorfismo entre $H_n(X, A)$ y $H_{n-1}(A)$, para poder obtener una sucesión infinita de homomorfismos entre grupos. Definimos así:

$$(\partial_{\#})_n : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$$

de la manera siguiente. Sea $\bar{c} \in H_n(X, A)$. Queremos definir un n -ciclo $(\partial_{\#})_n(\bar{c}) \in H_{n-1}(A)$. Tomamos un n -ciclo $c' \in Z_n(X, A)$ representante de la clase de homología \bar{c} . Debido a que $(\pi_{\#})_n$ es un epimorfismo (ver diagrama (3.1)), tenemos que existe $c'' \in S_n(X)$, de modo que $(\pi_{\#})_n(c'') = c'$. Consideramos ahora la cadena $\partial_n(c'') \in S_{n-1}(X)$. Por la conmutatividad del diagrama y teniendo en cuenta que c' es un n -ciclo, tenemos que:

$$(\pi_{\#})_{n-1} \circ \partial_n(c'') = \partial'_n \circ (\pi_{\#})_n(c'') = \partial'_n(c') = 0,$$

con lo que $\partial_n(c'') \in S_{n-1}(A)$. Definimos, por tanto:

$$(\partial_{\#})_n(\bar{c}) = \partial_n(c'').$$

Comprobemos que dicha aplicación está bien definida, es decir, que no depende del representante escogido. Sea $\bar{c} \in H_n(X, A)$. Tomamos $c', a' \in Z_n(X, A)$ dos n -ciclos representativos de la clase de homología relativa \bar{c} . Entonces, por definición tenemos:

$$c' - a' \in B_n(X, A)$$

Tomamos $c'', a'' \in S_n(X)$, de manera que $(\pi_{\#})_n(c'') = c'$ y $(\pi_{\#})_n(a'') = a'$. Como hemos visto antes, tenemos que:

$$\partial_n(c'') \in S_{n-1}(A)$$

$$\partial_n(a'') \in S_{n-1}(A)$$

Queremos probar que la clase de homología de $\partial_n(c'')$ coincide con la clase $\partial_n(a'')$ en $H_{n-1}(A)$. Para ello, probemos que $\partial_n(c'') - \partial_n(a'') \in B_{n-1}(A)$.

Tenemos que existe $d \in S_{n+1}(X, A)$ de modo que $\partial'_{n+1}(d) = c' - a' \in S_n(X, A)$, ya que $c' - a' \in B_n(X, A)$. Además existirá $d' \in S_{n+1}(X)$, de modo que $(\pi_{\#})_{n+1}(d') = d$. Por lo tanto, se tiene que,

$$(\pi_{\#})_n \circ \partial_{n+1}(d') = \partial'_{n+1} \circ (\pi_{\#})_{n+1}(d') = \partial'_{n+1}(d) = c' - a'$$

Luego las cadenas $\partial_{n+1}(d')$ y $c' - a'$ tienen la misma imagen por $(\pi_{\#})_n$, luego serán cadenas equivalentes en el grupo cociente $S_n(X, A)$, con lo que $(c' - a'') - \partial_{n+1}(d') \in S_n(A)$. Además, tenemos que:

$$\partial_n((c' - a'') - \partial_{n+1}(d')) = \partial_n((c' - a'')) - \partial_n \circ \partial_{n+1}(d') = \partial_n((c' - a'')) = \partial_n(c'') - \partial_n(a'')$$

Por lo tanto $\partial_n(c'') - \partial_n(a'') \in B_{n-1}(A)$.

Ahora, probemos que dicha definición no depende del representante escogido $c'' \in S_n(X)$. Es decir, con las notaciones anteriores, tomemos dos n -ciclos $c''_1, c''_2 \in S_n(X)$ de modo que $(\pi_{\#})_n(c''_1) = (\pi_{\#})_n(c''_2) = c' \in S_n(X, A)$. Debido a esto, tenemos que:

$$(\pi_{\#})_n(c''_1 - c''_2) = 0,$$

con lo que, tenemos que $c_1'' - c_2'' = a \in S_n(A)$, donde a es una n -cadena de $S_n(A)$. Para ver que nuestra aplicación $(\partial_*)_n$ está bien definida basta probar que $\partial_n(c_1'') = \partial_n(c_2'')$. Tenemos, por tanto, que $c_1'' = c_2'' + a$, entonces:

$$\partial_n(c_1'') = \partial_n(c_2'' + a) = \partial_n(c_2'') + \partial_n(a).$$

Como vimos antes, $\partial_n(c_1''), \partial_n(c_2'') \in S_{n-1}(A)$. Para ver que que está bien definida la aplicación, basta ver que los dos elementos generan la misma clase de equivalencia en el grupo $H_{n-1}(A)$, esto es, que la diferencia, $\partial_n(c_1'') - \partial_n(c_2'')$, sea un $(n-1)$ -borde de $S_{n-1}(A)$, pero $\partial_n(c_1'') - \partial_n(c_2'') = \partial_n(a)$ y $\partial_n(a)$, que es un $(n-1)$ -borde, luego tenemos que la aplicación $(\partial_*)_n$ está bien definida.

Se concluye de manera muy sencilla (es una mera comprobación) que es un homomorfismo de grupos, con lo que ya tendríamos definida la que llamaremos *sucesión larga de homología del par* (X, A) .

A continuación enunciaremos un resultado sobre dicha sucesión que nos ayudará a calcular grupos de homología de ciertos espacios posteriormente. Primero daremos unas definiciones previas.

Definición 3.2. (*Complejo de Cadenas*) Un *complejo de cadenas*, C , consiste en un conjunto de grupos abelianos C_n con $n \in \mathbb{Z}$, junto con un conjunto de morfismos, $d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$, de modo que $d_n \circ d_{n+1} = 0$.

Observación 3.1. Con dicha definición, vemos que el conjunto de cadenas singulares $S_n(X)$ de un espacio topológico, X , junto con los operadores borde, ∂_n , forman un complejo de cadenas.

Definición 3.3. (*Sucesión Exacta*) Un complejo de cadenas C se dice que forma un *sucesión exacta* si $Im(d_{n+1}) = Ker(d_n)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots$$

En particular, tenemos que:

1. $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$ es exacta si, y sólo si, $Ker\alpha = 0$, es decir, si, y sólo si, α es inyectivo.
2. $A \xrightarrow{\alpha} B \longrightarrow 0$ es exacta si, y sólo si, $Im\alpha = B$, es decir, si, y sólo si, α es sobreyectivo.
3. $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \longrightarrow 0$ es exacta si, y sólo si, α es un isomorfismo.
4. $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta si, y sólo si, α es inyectivo, β es sobreyectivo y $Ker\beta = Im\alpha$. Por lo tanto, β induce un isomorfismo $C \cong B/Im\alpha$ (este último resultado se debe a los teoremas de isomorfía de grupos).

Una sucesión como la del último apartado se denomina *sucesión exacta corta*.

Teorema 3.4. *La sucesión larga de homología relativa:*

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{(i_*)_n} H_n(X) \xrightarrow{(\pi_*)_n} H_n(X, A) \xrightarrow{(\partial_*)_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{(i_*)_{n-1}} \cdots$$

es una sucesión exacta.

Demostración. Debemos probar entonces que $Im((i_*)_n) = Ker((\pi_*)_n)$, $Im((\pi_*)_n) = Ker((\partial_*)_n)$ y $Im((\partial_*)_n) = Ker((i_*)_{n-1})$.

Así pues, únicamente probaremos que $Im(\pi_*) = Ker(\partial_*)$, debido a que las otras dos igualdades son similares. Dicha demostración la haremos por doble contenido.

$$\underline{Im(\pi_*)_n \subseteq Ker(\partial_*)_n} :$$

Tomamos $\bar{z} \in Im(\pi_*)_n \subset H_n(X, A)$. Por definición de imagen, existe $z \in H_n(X)$, de modo que $(\pi_*)_n(z) = \bar{z}$. Como z es un n -ciclo, tenemos que $\partial_n(z) = 0$, con lo que, por cómo hemos definido $(\partial_*)_n$, tenemos que $(\partial_*)_n(\bar{z}) = \partial_n(z) = 0$, luego $\bar{z} \in Ker(\partial_*)_n$.

$$\underline{Ker((\partial_*)_n) \subseteq Im((\pi_*)_n)} :$$

Tomamos $\bar{z} \in H_n(X, A)$, de modo que $(\partial_*)_n(\bar{z}) = 0$. Esto implica que, dado z' un representante de la clase de equivalencia z y z'' un elemento de $S_n(X)$ de modo que $(\pi_{\#})_n(z'') = z'$, $\partial_n(z'') = 0$, luego z'' es un n -ciclo de $S_n(X)$. Además sabemos que $(\pi_{\#})_n(z'') = z'$, luego tenemos que, si consideramos a $\bar{z}'' \in H_n(X)$ como la clase de equivalencia cuyo representante es z'' y $\bar{z}' = \bar{z}$,

$$(\pi_*)_n(\bar{z}'') = \bar{z}' = \bar{z},$$

luego tenemos que $\bar{z} \in \text{Im}((\pi_*)_n)$, con lo que termina la prueba. \square

Observación 3.2. Esta construcción que hemos hecho de la sucesión exacta larga de homología se puede hacer de un modo más general como explicaremos a continuación. Supongamos que tenemos los complejos de cadenas siguientes, (\mathcal{A}, ∂') , $(\mathcal{B}, \partial'')$ y $(\mathcal{C}, \partial''')$, y además homomorfismos,

$$\alpha_n : A_n \longrightarrow B_n$$

$$\beta_n : B_n \longrightarrow C_n,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, de manera que,

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{\alpha_n} B_n \xrightarrow{\beta_n} C_n \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta para todo $n \in \mathbb{Z}$. Si consideramos el siguiente diagrama, que es conmutativo,

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{\alpha_{n+1}} & B_{n+1} & \xrightarrow{\beta_{n+1}} & C_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \partial'_{n+1} & & \downarrow \partial''_{n+1} & & \downarrow \partial'''_{n+1} & & \\ 0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{\alpha_n} & B_n & \xrightarrow{\beta_n} & C_n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \partial'_n & & \downarrow \partial''_n & & \downarrow \partial'''_n & & \\ 0 & \longrightarrow & A_{n-1} & \xrightarrow{\alpha_{n-1}} & B_{n-1} & \xrightarrow{\beta_{n-1}} & C_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

Entonces, el llamamos *ZigZag Lemma* (se puede encontrar una demostración en [9], págs:136-138), afirma que existen un conjunto de aplicaciones,

$$\psi_n : H_n(\mathcal{C}) \longrightarrow H_{n-1}(\mathcal{A}),$$

de manera que la sucesión,

$$\cdots \longrightarrow H_n(\mathcal{A}) \xrightarrow{(\alpha_n)_*} H_n(\mathcal{B}) \xrightarrow{(\beta_n)_*} H_n(\mathcal{C}) \xrightarrow{(\psi_n)_*} H_{n-1}(\mathcal{A}) \longrightarrow \cdots$$

es exacta.

En esta observación estamos trabajando con los grupos de homología de complejos de cadenas, que se definen de manera análoga a la construcción que hemos hecho a partir de espacios topológicos, ya que, dado un espacio X , trabajábamos con los grupos $S_n(X)$ y el operador borde que definíamos, con lo que estamos en la misma situación que la anterior. Dado un complejo de cadenas (\mathcal{A}, ∂) , entonces se definen los grupos de homología del complejo de cadenas como,

$$H_n(\mathcal{A}) = \text{Ker}(\partial_n) / \text{Im}(\partial_{n+1}),$$

donde,

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} A_n \xrightarrow{\partial_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

Antes de utilizar el anterior resultado para calcular algunos grupos de homología, daremos un resultado que nos será de gran utilidad para saber cómo es el grupo de homología relativa $H_0(X, A)$.

Proposición 3.5. Sea X un espacio topológico conexo por caminos y sea $A \subset X$ un conjunto no vacío. Entonces,

$$H_0(X, A) = 0.$$

Demostración. Sea $y_0 \in A$. Consideremos una 0-cadena $c = \sum_i n_i \sigma_i$ en X , donde $\sigma_i : \Delta_0 \rightarrow X$ es el 0-símplice dado por $\sigma_i(\Delta_0) = x_i$. Como X es conexo por caminos, podemos considerar un camino $\alpha_i : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\alpha_i(0) = y_0$ y $\alpha_i(1) = x_i$. A partir de α_i podemos definir el 1-símplice singular $\tilde{\alpha}_i : \Delta_1 \rightarrow X$ dado por $\tilde{\alpha}_i(x_0, x_1) = \alpha_i(x_0)$ que verifica $\tilde{\alpha}_i(0, 1) = y_0$ y $\tilde{\alpha}_i(1, 0) = x_i$, es decir, $\delta_0(\tilde{\alpha}_i) = \sigma_{y_0}$, $\delta_1(\tilde{\alpha}_i) = \sigma_i$, donde $\sigma_{y_0} : \Delta_0 \rightarrow X$ es el 0-símplice definido por $\sigma_{y_0}(\Delta_0) = y_0$. Luego,

$$\partial_1\left(\sum_i n_i \tilde{\alpha}_i\right) = \sum_i n_i (\delta_0(\tilde{\alpha}_i)) - \sum_i n_i (\delta_1(\tilde{\alpha}_i)) = \left(\sum_i n_i\right) \sigma_{y_0} - c.$$

Esto implica que cualquier 0-cadena en X es homóloga a una 0-cadena en A y por lo tanto $H_0(X, A) = 0$. \square

A continuación calcularemos, utilizando la sucesión exacta larga de homología, la homología de algunos espacios.

Ejemplo 3.1. Veamos algunos ejemplos que pueden ser interesantes en el futuro, para el cálculo de la homología de las esferas.

Definimos primeramente,

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^n &= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\} \\ \mathbb{S}^{n-1} &= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}, \end{aligned}$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma euclídea, es decir, dado $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

1. Para todo $q > 1$, tenemos que $H_q(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ y $H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ son isomorfos.

Esto es claro, teniendo en cuenta de que \mathbb{D}^n es un espacio contráctil, con lo que $H_q(\mathbb{D}^n) = 0$, para todo $q \geq 1$. Con lo que, si $q > 1$, tenemos la sucesión:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow H_q(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\alpha} H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Tenemos pues que la aplicación α , debido a que la sucesión es exacta, es un isomorfismo, con lo que obtenemos el resultado.

2. Para $n > 1$, tenemos que $H_1(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) = 0$.

Antes que nada, observamos que $H_1(\mathbb{D}^n) = 0$, ya que \mathbb{D}^n es contráctil. Además, como hemos probado anteriormente, tenemos que $H_0(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) = 0$, pues \mathbb{D}^n es conexo por caminos y \mathbb{S}^{n-1} es un conjunto no vacío. Con esto, escribimos la sucesión:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow H_1(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\alpha} H_0(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\beta} H_0(\mathbb{D}^n) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Debido a que, como ya hemos dicho, la sucesión es exacta, α es monomorfismo y β es epimorfismo. Por los teoremas de isomorfía de grupos y teniendo en cuenta que $\text{Ker}(\alpha) = 0$ y $\text{Im}(\beta) = H_0(\mathbb{D}^n)$, tenemos que:

$$H_1(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) / \text{Ker}(\alpha) \cong H_1(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \cong \text{Im}(\alpha) \cong \text{Ker}(\beta)$$

Así, tenemos que:

$$H_0(\mathbb{S}^{n-1}) / H_1(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \cong \text{Im}(\beta) \cong H_0(\mathbb{D}^n)$$

Luego, como $H_0(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{Z} \cong H_0(\mathbb{D}^n)$, tenemos que:

$$H_1(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) = 0,$$

como queríamos probar.

3. $H_1(\mathbb{D}^1, \mathbb{S}^0) \cong \mathbb{Z}$.

En primer lugar, tenemos que $H_0(\mathbb{S}^0) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ y $H_0(\mathbb{D}^1) \cong \mathbb{Z}$. Si escribimos la sucesión, obtenemos que:

$$0 \longrightarrow H_1(\mathbb{D}^1, \mathbb{S}^0) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Es claro, como dijimos antes, que $\text{Ker}(\alpha) = 0$ y que $\text{Im}(\beta) = H_0(\mathbb{D}^1) \cong \mathbb{Z}$. Con lo que:

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \text{Ker}(\beta) \cong \mathbb{Z} \Rightarrow \text{Ker}(\beta) \cong \mathbb{Z}.$$

Tenemos pues, que:

$$H_1(\mathbb{D}^1, \mathbb{S}^0) / \text{Ker}(\alpha) \cong \text{Im}(\alpha) \cong \text{Ker}(\beta) \cong \mathbb{Z} \Rightarrow H_1(\mathbb{D}^1, \mathbb{S}^0) \cong \mathbb{Z}.$$

Ejemplo 3.2. Ahora consideraremos los grupos de homología relativa cuando el subespacio A es sólo un punto. Sea X un espacio topológico y sea $x_0 \in X$ un punto. Utilizando la sucesión larga de homología vamos a probar que $\tilde{H}_n(X) \cong H_n(X, x_0)$, para todo n . Si utilizamos la sucesión exacta larga sobre los grupos de homología reducida, tenemos que,

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_n(\{x_0\}) \longrightarrow \tilde{H}_n(X) \longrightarrow H_n(X, x_0) \longrightarrow \tilde{H}_{n-1}(\{x_0\}) \longrightarrow \cdots$$

Teniendo en cuenta que $\tilde{H}_n(\{x_0\}) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que la sucesión nos queda,

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \tilde{H}_n(X) \longrightarrow H_n(X, x_0) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Con lo que, tenemos que $\tilde{H}_n(X) \cong H_n(X, x_0)$, lo que queríamos probar.

Ejemplo 3.3. Si A es un retracto por deformación de X , entonces $H_n(X, A) = 0$, para todo $n \geq 0$.

Esto es claro, ya que existirá una aplicación $r : X \rightarrow A$, de modo que si $i : A \rightarrow X$ es la inclusión, tenemos que $r \circ i \cong \text{Id}_A$ e $i \circ r \cong \text{Id}_X$, con lo que,

$$(i_*)_n : H_n(A) \longrightarrow H_n(X),$$

es un isomorfismo para todo $n \geq 0$. Utilizando la sucesión exacta larga de homología, tenemos que,

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{(i_*)_n} H_n(X) \xrightarrow{(\pi_*)_n} H_n(X, A) \xrightarrow{(\partial_*)_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{(i_*)_{n-1}} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

Así pues, tenemos que $\text{Ker}(\pi_*)_n = \text{Im}(i_*)_n = H_n(X)$, con lo que $(\pi_*)_n$ es el homomorfismo nulo. Además, $\text{Im}(\partial_*)_n = \text{Ker}(i_*)_{n-1} = 0$ e $\text{Im}(\pi_*)_n = \text{Ker}(\partial_*)_n = 0$, con lo que $(\partial_*)_n$ es un homomorfismo inyectivo y cuya imagen es el 0 en $H_{n-1}(A)$, con lo que tenemos que $H_n(X, A) = 0$, para todo $n \geq 0$.

3.2. Homomorfismo inducido por una aplicación continua en los grupos de homología relativa. Ahora, de la misma manera que hicimos con los grupos de homología, veremos cuando una aplicación continua entre dos espacios topológicos induce homomorfismos entre los grupos de homología relativa.

Consideremos dos pares (X, A) e (Y, B) , donde X y Y son espacios topológicos y A y B subespacios de ellos. Si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua de modo que $f(A) \subset B$ diremos que f es una *aplicación entre pares* y la representaremos por $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$. Como vimos anteriormente, f induce un homomorfismo, $(f_\#)_n : S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$, en los grupos de cadenas de

X e Y . Debido a que $f(A) \subset B$, tenemos que el subgrupo $S_n(A)$ de $S_n(X)$ lo lleva al subgrupo $S_n(B)$ de $S_n(Y)$, con lo que f induce un homomorfismo:

$$(f_{\#})_n : S_n(X, A) \longrightarrow S_n(Y, B), \text{ para todo } n \geq 0,$$

que también denotaremos por $(f_{\#})_n$.

Este homomorfismo inducido resulta que también conmuta con el operador borde, ∂'_n , definido anteriormente. Si consideramos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S_n(X, A) & \xrightarrow{(f_{\#})_n} & S_n(Y, B) \\ \downarrow \partial'_n & & \downarrow \partial'_n \\ S_{n-1}(X, A) & \xrightarrow{(f_{\#})_{n-1}} & S_{n-1}(Y, B) \end{array}$$

Tenemos que ver que es conmutativo. Procedemos de la misma manera que hicimos con los grupos de homología.

Tomamos un n -símple singular, $\bar{\varphi} \in S_n(X, A)$. Debido a cómo hemos definido ∂'_n , y a los cálculos que hicimos para definir el homomorfismo inducido por una aplicación entre grupos de homología (ver lema 2.12) tenemos que:

$$\begin{aligned} (\partial'_n \circ (f_{\#})_n)(\bar{\varphi}) &= \partial'_n((f_{\#})_n(\bar{\varphi})) = \partial'_n(\overline{f \circ \varphi}) \\ &= \overline{\sum_{i=0}^n (-1)^i \delta_i(f \circ \varphi)} = \overline{\sum_{i=0}^n (-1)^i f(\delta_i \circ \varphi)} \\ &= \overline{(f_{\#})_{n-1}(\partial_n(\varphi))} = (f_{\#})_{n-1} \circ \partial'_n(\bar{\varphi}) \end{aligned}$$

De esta manera, al igual que con los grupos de homología, tenemos que $(f_{\#})_n(Z_n(X, A)) \subseteq Z_n(Y, B)$ y $(f_{\#})_n(B_n(X, A)) \subseteq B_n(Y, B)$, con lo que, existe un homomorfismo:

$$(f_*)_n : H_n(X, A) \longrightarrow H_n(Y, B),$$

al que llamaremos homomorfismo inducido por la aplicación continua de pares f .

3.3. Equivalencia homotópica de los grupos de homología relativa. Usaremos gran parte de la demostración hecha para grupos de homología. Comenzaremos por enunciar el teorema, pero primero daremos dos definiciones que utilizaremos.

Definición 3.6. (*Aplicaciones homótopas entre pares*) Sean dos espacios topológicos X e Y y dos subespacios $A \subset X$ y $B \subset Y$. Dadas dos aplicaciones entre pares $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, decimos que f y g son *aplicaciones homótopas entre pares* si f y g son homótopas a través de una homotopía,

$$F : (X \times I, A \times I) \longrightarrow (Y, B),$$

de modo que, $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$.

Definición 3.7. (*Equivalencia homotópica de aplicaciones entre pares*) Sean X e Y dos espacios topológicos y $A \subset X$ y $B \subset Y$ dos subespacios. Dada un aplicación continua entre pares $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ diremos que f es una *equivalencia homotópica entre pares* si existe otra aplicación continua entre pares $g : (Y, B) \rightarrow (X, A)$ de manera que $f \circ g$ es una aplicación entre pares homotopa a $Id_{(Y, B)}$ y $g \circ f$ es una aplicación entre pares homotopa a $Id_{(X, A)}$.

Teorema 3.8. *Sean X e Y dos espacios topológicos y $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ dos subespacios. Sean $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ aplicaciones continuas y homótopas. Entonces $(f_*)_n = (g_*)_n : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$.*

Demostración. Como ya probamos en el teorema 2.17, existe un homomorfismo de grupos:

$$P_X : S_n(X) \longrightarrow S_{n+1}(X \times I).$$

Por cómo lo hemos definido, tenemos que, dada una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$, el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S_n(X) & \xrightarrow{P_X} & S_{n+1}(X \times I) \\ (f\#)_n \downarrow & & \downarrow ((f \times Id_I)\#)_n \\ S_n(Y) & \xrightarrow{P_Y} & S_{n+1}(Y \times I) \end{array}$$

es conmutativo. Si escribimos $P_X = \sum_{i=0}^n (-1)^i P_i^X$ y $P_Y = \sum_{i=0}^n (-1)^i P_i^Y$, tenemos que,

$$\begin{aligned} & ((f \times Id_I)\#)_n \circ P_i^X(\varphi)(x_0, \dots, x_{n+1}) \\ &= (f \circ \varphi(x_0, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+1}), 1 - \sum_{k=0}^i x_k) \\ &= P_i^Y(f \circ \varphi)(x_0, \dots, x_{n+1}) = P_i^Y \circ (f\#)_n(\varphi)(x_0, \dots, x_{n+1}). \end{aligned}$$

De esta manera, tenemos que la restricción de P_X a $S_n(A)$ es, concretamente, P_A . Veámoslo, teniendo en cuenta que el anterior diagrama es conmutativo, donde la aplicación $i : A \hookrightarrow X$ denota la inclusión.

$$\begin{array}{ccc} S_n(A) & \xrightarrow{P_A} & S_{n+1}(A \times I) \\ (i\#)_n \downarrow & & \downarrow ((i \times Id_I)\#)_n \\ S_n(X) & \xrightarrow{P_X} & S_{n+1}(X \times I) \end{array}$$

Así, como $P_X \circ (i\#)_n = ((i \times Id_I)\#)_n \circ P_A$, tenemos que $P_X|_{S_n(A)} = P_A$, como queríamos ver. Entonces, P_X lleva $S_n(A)$ en $S_{n+1}(A \times I)$, con lo que induce una homotopía de cadenas:

$$P_{X,A} : S_n(X, A) \longrightarrow S_{n+1}(X \times I, A \times I)$$

Como dicha aplicación la induce P_X , tenemos que verifica:

$$\partial'_{n+1} \circ P_{X,A} + P_{X,A} \circ \partial'_n = (j\#)_n - (i\#)_n,$$

donde $i : X \rightarrow X \times I$ está definida por $i(x) = (x, 0)$ y $j : X \rightarrow X \times I$ está definida por $j(x) = (x, 1)$.

Definimos la aplicación $P' : S_n(X, A) \rightarrow S_{n+1}(Y, B)$ como la composición de $P_{X,A}$ y el homomorfismo inducido por la homotopía:

$$(F\#)_{n+1} : S_{n+1}(X \times I, A \times I) \longrightarrow S_{n+1}(Y, B).$$

Veamos que con el siguiente diagrama queda más claro lo que vamos a hacer.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & S_{n+1}(X, A) & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & S_n(X, A) & \xrightarrow{\partial'_n} & S_{n-1}(X, A) & \xrightarrow{\partial'_{n-1}} & \cdots \\ & & & & \downarrow (i\#)_n & & \downarrow (j\#)_n & & \\ \cdots & \longrightarrow & S_{n+1}(X \times I, A \times I) & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & S_n(X \times I, A \times I) & \xrightarrow{\partial'_n} & S_{n-1}(X \times I, A \times I) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow (F\#)_{n+1} & & \downarrow (F\#)_n & & \downarrow (F\#)_n & & \\ \cdots & \longrightarrow & S_{n+1}(Y, B) & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & S_n(Y, B) & \xrightarrow{\partial'_n} & S_{n-1}(Y, B) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Veamos que P' es una homotopía de cadenas entre $\{S_n(X, A)\}_n$ y $\{S_n(Y, B)\}_n$.

$$\begin{aligned} \partial'_{n+1}(P') &= \partial_{n+1}((F\#)_{n+1} \circ P_{X,A}) = (F\#)_n \circ \partial'_{n+1}(P_{X,A}) \\ &= (F\#)_n((j\#)_n - (i\#)_n - P_{X,A} \circ \partial'_n) \\ &= ((F \circ j)\#)_n - ((F \circ i)\#)_n - (F\#)_n \circ P_{X,A} \circ \partial'_n \\ &= (f\#)_n - (g\#)_n - P' \circ \partial'_n \end{aligned}$$

De esta manera, como hemos razonado en el teorema análogo para grupos de homología, las aplicaciones f y g son cadena homótopas, luego, los homomorfismos entre los grupos de homología relativa de ambas coinciden:

$$(f_*)_n = (g_*)_n : H_n(X, A) \longrightarrow H_n(Y, B), \text{ para todo } n \geq 0.$$

□

Como hicimos anteriormente, enunciaremos un corolario, cuya demostración es análoga al caso de grupos de homología, y que posteriormente nos servirá para demostrar algunos resultados para CW-complejos.

Corolario 3.9. *Sea $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ una aplicación continua. Entonces, si f es una equivalencia homotópica, entonces dicha aplicación induce isomorfismos en los grupos de homología relativa, $H_n(X, A)$ y $H_n(Y, B)$ para todo $n \geq 0$.*

4. TEOREMA DE ESCISIÓN.

En esta sección vamos a enunciar y demostrar un teorema muy importante sobre la homología relativa, que nos permitirá demostrar resultados posteriores, como por ejemplo calcular los grupos de homología de las esferas, o de algunos CW-complejos. Para esta sección seguiremos [2] y [4].

En primer lugar, vamos a introducir la notación que usaremos y a enunciar el teorema. Sean X un espacio topológico, $A \subset X$ un subespacio topológico y $U \subset A$ otro subespacio. Así, podemos considerar la aplicación inclusión:

$$i : (X - U, A - U) \longrightarrow (X, A)$$

Entonces, diremos que i es una *escisión* si el homomorfismo inducido en los grupos de homología relativa,

$$(i_*)_n : H_n(X - U, A - U) \longrightarrow H_n(X, A),$$

es un isomorfismo. Diremos entonces que U se puede *escindir*. Así pues, enunciamos el teorema de escisión.

Teorema 4.1. *(de Escisión)* Con las notaciones precedentes, si la clausura de U está contenida en el interior de A , entonces U se puede escindir, es decir, la aplicación inclusión, i , induce un isomorfismo entre los grupos de homología relativa:

$$(i_*)_n : H_n(X - U, A - U) \longrightarrow H_n(X, A), \text{ para todo } n.$$

Para realizar la prueba de este teorema introduciremos conceptos nuevos y probaremos varios resultados que nos ayudarán a demostrar este teorema.

En primer lugar, sea $\mathbb{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ una familia de abiertos que cubren a X , es decir, $X = \bigcup_{i \in I} V_i$. Entonces, diremos que un n -símplice, σ , es un *n -símplice singular de orden \mathbb{V}* , si $\sigma(\Delta_n) \subset V_i$, para algún $i \in I$. Para conseguir esto utilizaremos la subdivisión baricéntrica que nos permitirá hacer las imágenes de los símplices tan pequeñas como queramos. Además, en la prueba del teorema utilizaremos el recubrimiento de X , dado por $\{X - \bar{U}, \text{Int}(A)\}$.

El siguiente resultado será clave en la demostración de la escisión.

Teorema 4.2. Con las notaciones precedentes, tenemos que en cada clase de homología del grupo $H_n(X, A)$ puede elegirse como representante un n -ciclo relativo, que es la combinación lineal de símplexes de orden \mathbb{V} .

Para realizar dicha demostración y obtener dichos símplexes de orden \mathbb{V} utilizaremos la *subdivisión baricéntrica*.

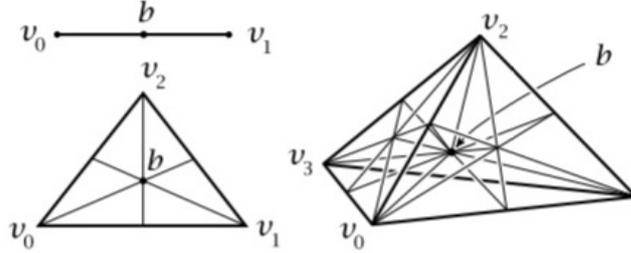


FIGURA 2. Subdivisiones baricéntricas

Para esto construiremos dos operadores de subdivisión que nos servirán para este propósito. El primero:

$$Sd : S_n(X) \longrightarrow S_n(X),$$

que lo definiremos para que conmute con el operador borde. Además, para poder comparar las cadenas singulares c y $Sd(c)$ construiremos también el operador:

$$T : S_n(X) \longrightarrow S_{n+1}(X).$$

Para llevar a cabo esto, trabajaremos primeramente en un espacio afín cualquiera, X , típicamente \mathbb{R}^p , para algún $p \in \mathbb{N}$. En general, dados $n + 1$ puntos $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{R}^p$, definiremos por $[P_0, \dots, P_n] \subset \mathbb{R}^p$ como su envolvente convexa (es decir, el menor subconjunto convexo de \mathbb{R}^p que contiene a los puntos P_0, \dots, P_n), donde $v_0 = (1, 0, \dots, 0), v_1 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots$ (ver sección 2). Representaremos por,

$$(P_0, \dots, P_n) : \Delta_n \longrightarrow [P_0, \dots, P_n],$$

a la restricción de la aplicación afín que verifica que $v_i \mapsto P_i$. A los símplexes de esta forma los llamaremos *símplexes singulares afines*.

Observación 4.1. Si $\sigma = (P_0, \dots, P_n)$, entonces,

$$(4.1) \quad \partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (P_0, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_n),$$

donde $(P_0, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_n)$ es el $(n-1)$ -símplex singular σ' que verifica,

$$\sigma'(v_0) = P_0, \dots, \sigma'(v_{i-1}) = P_{i-1}, \sigma'(v_i) = P_{i+1}, \dots, \sigma'(v_{n-1}) = P_n.$$

Observemos que si $\sigma = (P_0, \dots, P_n)$ entonces $\sigma(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n x_i P_i$.

Como,

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \delta_i(\sigma),$$

donde,

$$\begin{aligned} \delta_i(\sigma)(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) &= \sigma(x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1}) \\ &= \sum_{j=0}^{i-1} x_j P_j + \sum_{j=1}^{n-1} x_j P_{i+1} = (P_0, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_n)(x_0, \dots, x_{n-1}), \end{aligned}$$

obtenemos la expresión de $\partial_n(\sigma)$ dada en la ecuación (4.1).

Sea $\sigma = (P_0, \dots, P_n)$ un n -símplice singular afín. Sea también B un punto afín. Definimos así $B\sigma$ el $(n+1)$ -símplice singular afín:

$$B\sigma = (B, P_0, \dots, P_n),$$

donde $B\sigma : \Delta_{n+1} \rightarrow X$ es un símplice tal que:

$$\sigma(v_0) = B, \sigma(v_1) = P_0, \dots, \sigma(v_{n+1}) = P_n.$$

Vamos a ampliar esta definición, linealmente, para una n -cadena singular afín cualquiera. Sea $c = \sum_i n_i \sigma_i$ una combinación lineal de n -símplices singulares afines, entonces, definimos:

$$Bc = \sum_i n_i (B\sigma_i)$$

Entonces, tenemos:

Lema 4.3. *Con las notaciones anteriores,*

$$\partial_{n+1}(Bc) = c - B\partial_n(c), \text{ si } n > 0$$

$$\partial_1(Bc) = c - \left(\sum_i n_i\right)B, \text{ si } n = 0.$$

Demostración. La demostración únicamente consiste en escribir las definiciones de cada término y ver que efectivamente son iguales. Comencemos con el primer caso, sea $n > 0$. Basta hacerlo para un n -símplice singular afín, σ , ya que la operación de adjuntar un punto afín lo hemos construido linealmente y el operador borde también. Además, tenemos que $(P_0, \dots, \widehat{P}_i, \dots, P_n) = (P_0, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_n)$. Con esta notación,

$$\begin{aligned} \partial_{n+1}(B\sigma) &= (P_0, \dots, P_n) + \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} (B, P_0, \dots, \widehat{P}_i, \dots, P_n) \\ &= (P_0, \dots, P_n) - B\partial_n(\sigma) \end{aligned}$$

Veremos ahora el caso $n = 0$. Entonces, sea $c = \sum_i n_i \sigma_i$ una 0-cadena singular. Entonces:

$$\begin{aligned} \partial_1(Bc) &= \partial_1\left(\sum_i n_i (B\sigma_i)\right) = \sum_i n_i \sigma_i - \sum_i n_i (B) \\ &= c - \left(\sum_i n_i\right)B. \end{aligned}$$

□

Ahora, construiremos los operadores $Sd : S_n(X) \rightarrow S_n(X)$ y $T : S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X)$. El propósito de esto es que mediante el operador Sd , dado un n -ciclo, c , podemos subdividirle en n -símplices tan pequeños como queramos. Además, con el operador T veremos que Sd es cadena homótopo con la identidad, con lo que los n -ciclos c y $Sd(c)$ estarán en la misma clase de equivalencia en los grupos de homología. Así, como c lo podemos hacer tan pequeño como queramos, utilizando un recubrimiento apropiado, estaremos en condiciones de probar el teorema de escisión.

Dichos operadores los construiremos de manera que, dada una aplicación continua, $f : X \rightarrow Y$, los siguientes diagramas sean conmutativos:

$$(4.2) \quad \begin{array}{ccc} S_n(X) & \xrightarrow{Sd} & S_n(X) \\ (f\#)_n \downarrow & & \downarrow (f\#)_n \\ S_n(Y) & \xrightarrow{Sd} & S_n(Y) \end{array}$$

$$(4.3) \quad \begin{array}{ccc} S_n(X) & \xrightarrow{T} & S_{n+1}(X) \\ (f\#)_n \downarrow & & \downarrow (f\#)_n \\ S_n(Y) & \xrightarrow{T} & S_{n+1}(Y) \end{array}$$

Observación 4.2. Dado un espacio topológico X y un n -símplice singular $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$, podemos considerar el homomorfismo inducido por la aplicación σ :

$$(\sigma\#)_n : S_n(\Delta_n) \rightarrow S_n(X),$$

definida como $(\sigma\#)_n(\varphi) = \sigma \circ \varphi$. Si consideramos a $\xi_n : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$ la identidad, tenemos que:

$$\sigma = (\sigma\#)_n(\xi_n)$$

Como vamos a construir Sd y T para que los diagramas (4.2) y (4.3) sean conmutativos para cualquier función continua f , en particular, para $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ tenemos que,

$$\begin{array}{ccc} S_n(\Delta_n) & \xrightarrow{Sd} & S_n(\Delta_n) \\ (\sigma\#)_n \downarrow & & \downarrow (\sigma\#)_n \\ S_n(X) & \xrightarrow{Sd} & S_n(X) \end{array}$$

es conmutativo. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} Sd(\sigma) &= Sd((\sigma\#)_n(\xi_n)) = (Sd \circ (\sigma\#)_n)(\xi_n) = \\ &= ((\sigma\#)_n \circ Sd)(\xi_n) \end{aligned}$$

Entonces, dado cualquier n -símplice singular, $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$, si determino $Sd(\xi_n)$, entonces $Sd(\sigma)$ queda unívocamente determinado. Además, es suficiente considerar el caso de que $X = \Delta_n$, pues $\xi_n : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$.

Si consideramos una n -cadena singular, $c = \sum_i n_i \sigma_i$, la operación Sd la extenderemos por linealidad.

Dicha observación nos simplifica bastante la tarea de definir los operadores Sd y T , como veremos a continuación.

Definiremos dichos operadores por inducción. Para $n = 0$, definimos $Sd(\xi_0) := \xi_0$ y $T(\xi_0) := 0$. Supuesto definido para dimensión menor que n , definimos:

$$\begin{aligned} Sd(\xi_n) &:= B_n Sd(\partial_n(\xi_n)) \\ T(\xi_n) &:= B_n(\xi_n - Sd(\xi_n) - T(\partial_n(\xi_n))) \end{aligned}$$

donde consideramos a B_n el baricentro de Δ_n , es decir:

$$B_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} v_i$$

Probaremos a continuación un lema que dice que Sd es cadena homótopo a la identidad, $Id_n : S_n(X) \rightarrow S_n(X)$.

Lema 4.4. Tenemos las siguientes ecuaciones entre operadores para cada $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} \partial_n \circ Sd &= Sd \circ \partial_n \\ \partial_{n+1} \circ T &= Id_n - Sd - T \circ \partial_n \end{aligned}$$

Demostración. Procederemos por inducción. Si $n = 0$, es claro para Sd , pues $\partial_0(\xi_0) = 0$. Para la segunda ecuación, tenemos que:

$$\partial_1(T(\xi_0)) = \partial_1(0) = 0 = Id_0(\xi_0) - Sd(\xi_0).$$

De esta manera, supuesto cierto para dimensión menor que n , probémoslo para n . Así, la primera ecuación, aplicando el lema 4.3:

$$\begin{aligned}\partial_n \circ Sd(\xi_n) &= \partial_n(B_n Sd(\partial_n(\xi_n))) \\ &= Sd(\partial_n(\xi_n)) - B_n \partial_{n-1}(Sd(\partial_n(\xi_n))) \\ &= Sd(\partial_n(\xi_n)) - B_n Sd(\partial_{n-1} \circ \partial_n(\xi_n)) \\ &= Sd(\partial_n(\xi_n))\end{aligned}$$

Similarmente para T , usando el lema 4.3, tenemos que:

$$\begin{aligned}\partial_{n+1}(T_n(\xi_n)) &= \partial_{n+1}(B_n(\xi_n - Sd(\xi_n) - T_{n-1}(\partial_n(\xi_n)))) \\ &= \partial_{n+1}(B_n \xi_n) - \partial_{n+1}(B_n Sd(\xi_n)) - \partial_{n+1}(B_n T_{n-1}(\partial_n \xi_n)) \\ &= \xi_n - B_n \partial_n \xi_n - Sd(\xi_n) + B_n Sd(\partial_n \xi_n) - T_{n-1}(\partial_n \xi_n) + B_n \partial_n(T_{n-1}(\partial_n \xi_n)) \\ &= \xi_n - B_n \partial_n \xi_n - Sd(\xi_n) + B_n Sd(\partial_n \xi_n) - T_{n-1}(\partial_n \xi_n) + B_n(\partial_n \xi_n - Sd(\partial_n \xi_n)) \\ &\quad - T_{n-2}(\partial_{n-1} \circ \partial_n \xi_n) \\ &= \xi_n - B_n \partial_n \xi_n - Sd(\xi_n) + B_n Sd(\partial_n \xi_n) - T_{n-1}(\partial_n \xi_n) + B_n \partial_n \xi_n - B_n Sd(\partial_n \xi_n) \\ &= \xi_n - Sd(\xi_n) - T_{n-1}(\partial_n \xi_n)\end{aligned}$$

□

Hemos probado, por lo tanto, que el operador $Sd : S_n(X) \rightarrow S_n(X)$ es cadena homótopo a la identidad, $Id_n : S_n(X) \rightarrow S_n(X)$.

Típicamente tomaremos $X = \mathbb{R}^p$, para un p adecuado, con lo que consideramos la distancia euclídea. Así pues, dado un n -símplice singular afín, $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$, con $\sigma = (P_0, \dots, P_n)$, entonces $\sigma(\Delta_n)$ es compacto, con lo que podemos considerar el diámetro de dicho conjunto en X (consideramos $X = \mathbb{R}^p$ ya que queremos trabajar con los diámetros de los símlices, con lo que necesitamos una distancia). Entonces, dados dos puntos, u, v , de $\sigma(\Delta_n) = [P_0, \dots, P_n]$, tenemos que:

$$\begin{aligned}u &= \sum_{i=0}^n a_i P_i, \text{ con } \sum_{i=0}^n a_i = 1, \text{ y } a_i \geq 0, \text{ para todo } i. \\ v &= \sum_{i=0}^n b_i P_i, \text{ con } \sum_{i=0}^n b_i = 1, \text{ y } b_i \geq 0, \text{ para todo } i.\end{aligned}$$

Si consideramos la distancia entre ambos, tenemos que:

$$\begin{aligned}\|u - v\| &= \left\| \sum_{i=0}^n a_i P_i - v \right\| = \left\| \sum_{i=0}^n a_i P_i - \left(\sum_{i=0}^n a_i \right) v \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=0}^n a_i (P_i - v) \right\| \leq \sum_{i=0}^n a_i \|P_i - v\| \\ &\leq \sum_{i=0}^n a_i \max_{0 \leq i \leq n} \|P_i - v\| = \max_{0 \leq i \leq n} \|P_i - v\|\end{aligned}$$

Repitiendo el proceso llegamos a que:

$$\|u - v\| \leq \max_{0 \leq i, j \leq n} \|P_i - P_j\|$$

Luego, tenemos que:

$$d(\sigma) = \max_{0 \leq i, j \leq n} \|P_i - P_j\|,$$

donde $d(\sigma)$ es el diámetro del conjunto $\sigma(\Delta_n)$.

Antes de probar un lema que es crucial para la demostración del teorema 4.2, hagamos una observación sobre el baricentro de un n -símplice.

Observación 4.3. Si $B_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} P_i$ es el baricentro de $\sigma(\Delta_n)$, entonces:

$$\begin{aligned} \|P_j - B_n\| &= \left\| \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} (P_j - P_i) \right\| \\ &\leq \sum_{i=0, i \neq j}^n \frac{1}{n+1} \|P_j - P_i\| \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \max_{0 \leq i, j \leq n, i \neq j} \|P_j - P_i\| \\ &= \frac{n}{n+1} \max_{0 \leq i, j \leq n, i \neq j} \|P_j - P_i\| \end{aligned}$$

Así, fijado un vértice, P_j , de $\sigma(\Delta_n)$, tenemos que:

$$\|P_j - B_n\| \leq \frac{n}{n+1} d(\sigma),$$

con lo que, dado un punto u de $\sigma(\Delta_n)$ cualesquiera, tenemos que:

$$(4.4) \quad \|u - B_n\| \leq \frac{n}{n+1} d(\sigma)$$

Con esta observación, estamos en condiciones de probar el siguiente lema.

Lema 4.5. Cada n -símplice singular afín que aparece en la n -cadena $Sd(\sigma)$ tiene diámetro acotado superiormente por,

$$\frac{n}{n+1} d(\sigma) = \frac{n}{n+1} \max_{0 \leq i, j \leq n} \|P_i - P_j\|$$

Demostración. Procedamos por inducción.

Si $n = 0$, es evidente que se cumple, pues todas las distancias son 0.

Supuesto cierto para $n-1$, probémoslo para n . Sea un n -símplice singular afín σ . Entonces, como ya vimos, $Sd_n(\sigma) = B_n Sd_{n-1}(\partial_n \sigma)$, donde B_n es el baricentro de $\sigma(\Delta_n)$. Así, cada símplice de $Sd_n(\sigma)$ será de la forma $\tau = B_n \tau'$, con τ' un n -símplice de $Sd(\partial_n \sigma)$. Más aún, τ' es un de los símplices de $Sd_{n-1}(\rho)$, donde ρ es uno de los símplices de $\partial_n(\sigma)$.

Es evidente que la imagen de ρ está contenida en la imagen de σ , luego $d(\rho) \leq d(\sigma)$. Por la hipótesis de inducción:

$$d(\tau') \leq \frac{n-1}{n} d(\rho) \leq \frac{n-1}{n} d(\sigma) \leq \frac{n}{n+1} d(\sigma)$$

Así pues, como $\tau = B_n \tau'$ y $d(\tau') \leq \frac{n}{n+1} d(\sigma)$, tomemos dos vértices de τ (ya vimos que el diámetro de un símplice es el máximo de las distancias entre sus vértices), puede ocurrir:

1. Los vértices están en τ' y, como ya hemos visto, está demostrada la desigualdad.
2. Un vértice P de τ' y otro es B_n , pero ya vimos que (4.4),

$$\|P - B_n\| \leq \frac{n}{n+1} d(\sigma),$$

luego también tenemos la desigualdad para este caso

Con esto, $d(\tau) \leq \frac{n}{n+1} d(\sigma)$, con τ un n -símplice singular afín cualquiera de $Sd_n(\sigma)$. \square

A continuación, vamos a enunciar un resultado clásico de topología general que utilizaremos para probar el teorema 4.2. La demostración se puede encontrar en [10].

Teorema 4.6. (*Teorema del Número de Lebesgue*) Dado un recubrimiento abierto de un espacio métrico compacto M , existe $\epsilon > 0$ tal que todo subconjunto de M de diámetro menor que ϵ está contenido en uno de los abiertos del recubrimiento abierto de M .

Con todo lo dicho probemos el siguiente resultado.

Proposición 4.7. Dados σ un n -símplice singular y un espacio topológico X y dado $\mathbb{V} = \{V_i\}_i$ un recubrimiento abierto de X . Existe un $r > 0$ de modo que $Sd^r(\sigma) = Sd(\sigma) \circ \dots \circ Sd(\sigma)$ es una combinación lineal de n -símplices singulares de orden \mathbb{V} .

Demostración. La idea es subdividirlo en \mathbb{R}^p y después, mediante σ , pasar los resultados al espacio topológico X .

Tenemos que $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ es una aplicación continua y $X = \bigcup_i V_i$. De esta manera, tenemos que:

$$\{\sigma^{-1}(V_i)\}$$

es un recubrimiento abierto de Δ_n . Como dicho conjunto es compacto, por el teorema del número de Lebesgue existe un $\epsilon > 0$ de modo que todo subconjunto de Δ_n de diámetro menor que ϵ está contenido en un abierto de la forma $\sigma^{-1}(V_i)$, para algún i .

Tenemos que:

$$d(\tau) \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^k d(\sigma), \text{ con } \tau \text{ un } n\text{-símplice de } Sd^k(\xi_n),$$

y como:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^k = 0,$$

entonces existe un $r \in \mathbb{N}$ de modo que $Sd^r(\xi_n)$ es combinación lineal de n -símplices afines singulares de diámetro menor que ϵ . Además:

$$Sd^r(\sigma) = (\sigma_{\#})_n(Sd^r(\xi_n))$$

Así, la imagen de cada n -símplice singular de $Sd^r(\sigma)$ está contenida en V_i , para algún i , con lo que, $Sd^r(\sigma)$ será una n -cadena singular de orden \mathbb{V} . \square

Observación 4.4. En la proposición anterior podemos sustituir el n -símplice σ por una n -cadena singular cualquiera, c , ya que el operador Sd lo hemos definido para cadenas de un modo lineal a partir de la definición del operador para n -símplices, con lo que dicha proposición también es cierta para un n -cadena cualquiera.

Con los resultados probados estamos en condiciones de probar el teorema 4.2:

Demostración del Teorema 4.2. Sea z un n -ciclo relativo de $H_n(X, A)$ (es decir, un n -ciclo de manera que $\partial_n(z) \in S_{n-1}(A)$). Entonces, como el operador Sd es cadena homótopo a la identidad, por el lema 4.4 tenemos que,

$$z - Sd(z) = \partial_{n+1}(T(z)) + T(\partial_n(z))$$

Como z es un n -ciclo relativo módulo A , tenemos que $\partial_n(z) \in S_{n-1}(A)$, luego también $T_n(\partial_n(z)) \in S_n(A)$, y:

$$z \sim Sd(z), \text{ mód } A,$$

ya que $\partial_{n+1}(T(z))$ es un n -borde relativo y $T(\partial_n(z)) \in S_n(A)$ como ya vimos (es decir, z y $Sd(z)$ son representantes de la misma clase de equivalencia en el grupo $H_n(X, A)$). De esta manera, repitiendo el proceso, tenemos que:

$$z \sim Sd^r(z), \text{ mód } A, \text{ para todo } r.$$

Por la proposición anterior, tenemos probado el resultado, pues, para un cierto $r \in \mathbb{N}$, tendremos que $Sd^r(z)$ es de orden $\mathbb{V} = \{V_i\}_i$, donde \mathbb{V} es un recubrimiento abierto de X . \square

Con todo esto, somos capaces de demostrar el teorema de escisión.

Demostración del Teorema 4.1. Hemos de probar que el homomorfismo inducido por la inclusión $i : (X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$,

$$(i_*)_n : H_n(X - U, A - U) \longrightarrow H_n(X, A),$$

es un isomorfismo.

Probemos primero que es un homomorfismo sobreyectivo. Sea z un elemento de $H_n(X, A)$, cuyo representante sea un n -ciclo relativo:

$$z = \sum_i n_i \sigma_i$$

Consideremos el recubrimiento de X dado por $\{X - \bar{U}, \text{Int}(A)\}$. Sabemos, por el teorema anterior, que podemos suponer que cada σ_i es de orden $\{X - \bar{U}, \text{Int}(A)\}$. Cada σ_i que no esté completamente contenido en $X - U$ ($X - \bar{U} \subset X - U$), debe estar contenido en $\text{Int}(A) \subset A$. Con lo que podemos eliminar, módulo A , todos los n -símplices de z que estén contenidos en $\text{Int}(A) \subset A$.

De esta manera, z lo podemos ver como un n -ciclo relativo en $X - U$, mód $A - U$, luego el homomorfismo $(i_*)_n$ es sobreyectivo.

Veamos ahora la inyectividad de dicho homomorfismo. Sea ahora z un n -ciclo relativo en $X - U$, módulo $A - U$, de modo que:

$$z \sim 0, \text{ en } H_n(X, A)$$

De esta manera, podemos considerar que z se puede expresar como:

$$z = z' + \partial'_{n+1}(w),$$

donde z' es una n -cadena en A y w una $(n+1)$ -cadena en X . Como vimos antes, si subdividimos r veces el n -ciclo z esto no modifica en qué clase de equivalencia está $Sd^r(z)$ en $H_n(X, A)$:

$$Sd^r(z) = Sd^r(z') + Sd^r(\partial'_{n+1}(w)) = Sd^r(z') + \partial_{n+1}(Sd^r(w)),$$

donde r es un número natural de modo que $Sd^r(z)$ es una combinación lineal de n -símplices de orden $\{X - \bar{U}, \text{Int}(A)\}$.

Así, podemos escribir entonces:

$$Sd^r(w) = w_1 + w_2,$$

donde todos los símplices de w_1 están en $X - U$ y todos los símplices de w_2 están contenidos en A . De esta manera:

$$Sd^r(z) - \partial_{n+1}(w_1) = Sd^r(z') + \partial_{n+1}(w_2),$$

donde el término de la izquierda es una cadena en $X - U$ y el término de la derecha es una cadena en $A - U$. Entonces:

$$Sd^r(z) - \partial_{n+1}(w_1) \sim 0 \text{ mód } A - U.$$

Entonces, $Sd^r(z) \sim 0$ en $H_n(X - U, A - U)$. Luego el homomorfismo $(i_*)_n$ es inyectivo y, por lo tanto,

$$(i_*)_n : H_n(X - U, A - U) \longrightarrow H_n(X, A)$$

es un isomorfismo, como queríamos ver. □

Con este resultado, veremos algunos ejemplos, como el cálculo de los grupos de homología de las esferas.

4.1. Grupos de homología de las esferas. Comencemos por calcular los grupos de homología de las esferas, $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$. Definamos además:

$$\begin{aligned} E_n^+ &= \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^n : x_n \geq 0\} \\ E_n^- &= \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^n : x_n \leq 0\} \\ \mathbb{S}^{n-1} &= \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^n : x_n = 0\} \end{aligned}$$

Es claro que $\mathbb{S}^{n-1} = E_n^+ \cap E_n^-$, y representa el ecuador de la esfera \mathbb{S}^n .

Probemos primero que $H_q(\mathbb{S}^n, E_n^-)$ es isomorfo a $H_q(E_n^+, \mathbb{S}^{n-1})$. Esto es debido al teorema de escisión visto en la anterior sección. Consideramos el conjunto

$$W = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^n : x_n < -\frac{1}{2}\}.$$

Consideremos la aplicaciones de inclusión,

$$\begin{aligned} i &: (\mathbb{S}^n - W, E_n^- - W) \longrightarrow (\mathbb{S}^n, E_n^-) \\ j &: (E_n^+, \mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow (\mathbb{S}^n - W, E_n^- - W) \end{aligned}$$

Como $\overline{W} \subset \text{Int}(E_n^-)$, por el teorema de escisión tenemos que:

$$(i_*)_q : H_q(\mathbb{S}^n - W, E_n^- - W) \longrightarrow H_q(\mathbb{S}^n, E_n^-),$$

es un isomorfismo, para todo $q \geq 0$ y para todo $n \geq 1$.

Por otro lado, $(E_n^+, \mathbb{S}^{n-1})$ es un retracto de deformación de $(\mathbb{S}^n - W, E_n^- - W)$, con lo que por el corolario 3.9 también:

$$(j_*)_q : H_q(E_n^+, \mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow H_q(\mathbb{S}^n - W, E_n^- - W)$$

es un isomorfismo, para todo $q \geq 0$ y para todo $n \geq 1$.

De esta manera, tenemos que:

$$H_q(E_n^+, \mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{(j_*)_q} H_q(\mathbb{S}^n - W, E_n^- - W) \xrightarrow{(i_*)_q} H_q(\mathbb{S}^n, E_n^-)$$

Con lo que, el homomorfismo dado por la composición,

$$(k_*)_q : H_q(E_n^+, \mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow H_q(\mathbb{S}^n, E_n^-)$$

es un isomorfismo, para todo $q \geq 0$ y para todo $n \geq 1$.

Por otra parte, veamos que $H_q(E_n^+, \mathbb{S}^{n-1})$ es isomorfo a $H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1})$, para todo $q \geq 2$ y para todo $n \geq 1$. Para ello utilizaremos la sucesión exacta larga para $(E_n^+, \mathbb{S}^{n-1})$. Así, pues, tenemos que:

$$\dots \longrightarrow H_q(E_n^+) \longrightarrow H_q(E_n^+, \mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow H_{q-1}(E_n^+) \longrightarrow \dots$$

Sabemos que, como E_n^+ es contráctil, luego $H_q(E_n^+) = 0$, para todo $q \geq 1$. Consideremos $q > 1$ en lo anterior. Entonces se tiene que:

$$0 \longrightarrow H_q(E_n^+, \mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\alpha} H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow 0,$$

con lo que el homomorfismo α es isomorfismo, luego:

$$(4.5) \quad H_q(E_n^+, \mathbb{S}^{n-1}) \cong H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1}), \text{ con } q \geq 2 \text{ y con } n \geq 1.$$

Veamos ahora que $H_q(\mathbb{S}^n)$ es un grupo isomorfo a $H_q(\mathbb{S}^n, E_n^-)$, para todo $q \geq 1$ y para todo $n \geq 1$. Por la sucesión exacta larga, si $q > 1$:

$$\dots \longrightarrow H_q(E_n^-) \longrightarrow H_q(\mathbb{S}^n) \longrightarrow H_q(\mathbb{S}^n, E_n^-) \longrightarrow H_{q-1}(E_n^-) \longrightarrow \dots$$

Como E_n^- es un espacio contráctil, tenemos que:

$$0 \longrightarrow H_q(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\beta} H_q(\mathbb{S}^n, E_n^-) \longrightarrow 0$$

Con lo que β es un isomorfismo, con lo que:

$$(4.6) \quad H_q(\mathbb{S}^n, E_n^-) \cong H_q(\mathbb{S}^n), \text{ con } q > 1 \text{ y } n \geq 1.$$

Para el caso $q = 1$, tenemos que:

$$0 \longrightarrow H_1(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\alpha} H_1(\mathbb{S}^n, E_n^-) \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Así pues, tenemos que:

$$\text{Ker}(\alpha) = 0 \Rightarrow H_1(\mathbb{S}^n) \cong \text{Im}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$$

$$H_1(\mathbb{S}^n, E_n^-) / \text{Ker}(\beta) \cong \text{Im}(\beta) = \text{Ker}(\gamma)$$

$$\mathbb{Z} / \text{Ker}(\gamma) = \text{Im}(\gamma) = \mathbb{Z} \Rightarrow \text{Ker}(\gamma) = 0$$

Como $\text{Ker}(\gamma) = 0$, tenemos que:

$$H_1(\mathbb{S}^n, E_n^-) \cong \text{Ker}(\beta) \cong H_1(\mathbb{S}^n),$$

con lo que,

$$H_1(\mathbb{S}^n, E_n^-) \cong H_1(\mathbb{S}^n) \cong H_1(E_n^+, \mathbb{S}^{n-1})$$

Así, llegamos a que,

$$H_q(\mathbb{S}^n) \cong H_q(\mathbb{S}^n, E_n^-), \text{ para todo } q \geq 1 \text{ y para todo } n \geq 1.$$

De esta manera, tenemos que, para $q \geq 2$ y $n \geq 2$:

$$H_q(\mathbb{S}^n) \cong H_q(\mathbb{S}^n, E_n^-) \cong H_q(E_n^+, \mathbb{S}^{n-1}) \cong H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1})$$

Entonces, tenemos que, si $q \geq 2$ y $n \geq 2$:

$$H_q(\mathbb{S}^n) \cong H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1})$$

Además, sabemos que $H_1(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) = 0$ cuando $n > 1$ y $H_1(\mathbb{D}^1, \mathbb{S}^0) = \mathbb{Z}$ (ver ejemplo 3.1).

Como E_n^+ es homeomorfo a \mathbb{D}^n tenemos el mismo resultado para el grupo $H_1(E_n^+, \mathbb{S}^{n-1})$.

Por el lema 2.8 y la proposición 2.10, tenemos que,

$$H_q(\mathbb{S}^0) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{si } q = 0. \\ 0, & \text{si } q > 0 \end{cases}$$

Veamos que,

$$H_q(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } q = 0, 1. \\ 0, & \text{si } q > 1 \end{cases}$$

El hecho de que $H_q(\mathbb{S}^1) = 0$ si $q \geq 2$ se deduce de que, si $q \geq 2$ tenemos que,

$$H_q(\mathbb{S}^1) \cong H_q(\mathbb{S}^1, E_1^-) \cong H_q(E_1^+, \mathbb{S}^0) \cong H_q(\mathbb{D}^1, \mathbb{S}^0) = 0.$$

La última igualdad ($H_q(\mathbb{D}^1, \mathbb{S}^0) = 0$) se deduce aplicando la sucesión exacta larga de homología al par $(\mathbb{D}^1, \mathbb{S}^0)$, ya que tenemos que $H_q(\mathbb{D}^1) = 0$, para todo $q \geq 1$ y $H_q(\mathbb{S}^0) = 0$, para todo $q \geq 1$. Entonces $H_q(\mathbb{S}^1) = 0$ para $q \geq 2$. El caso $H_1(\mathbb{S}^1)$ se hace de manera similar. Por lo dicho anteriormente, tenemos que,

$$H_1(\mathbb{S}^1) \cong H_1(\mathbb{S}^1, E_1^-) \cong H_1(E_1^+, \mathbb{S}^0) \cong H_1(\mathbb{D}^1, \mathbb{S}^0) \cong \mathbb{Z},$$

luego, $H_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ y hemos terminado el caso de las esferas de dimensión cero y uno.

Para calcular los grupos de homología de orden superior procedemos por inducción en n . Supongamos que que $n \geq 3$ y que,

$$H_q(\mathbb{S}^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } q = 0, n-1. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Vamos a calcular $H_q(\mathbb{S}^n)$ sabiendo que $H_q(\mathbb{S}^n) \cong H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1})$, para todo $q \geq 2$ y para todo $n \geq 2$. Tenemos que,

$$H_q(\mathbb{S}^n) \cong H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } q = n. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Nos queda ver el caso $q = 1$, ya que $H_0(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$, pues \mathbb{S}^n es conexo por caminos, al ser $n \geq 2$. Veamos también que $H_1(\mathbb{S}^n) = 0$. Pero esto es claro, ya que,

$$H_1(\mathbb{S}^n) \cong H_1(\mathbb{S}^n, E_n^-) \cong H_1(E_n^+, \mathbb{S}^{n-1}) \cong H_1(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$$

Entonces, si $n \geq 2$,

$$H_1(\mathbb{S}^n) \cong H_1(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) = 0,$$

(ver ejemplo 3.1). Luego concluimos que, los grupos de homología de las esferas serán,

$$H_q(\mathbb{S}^0) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{si } q = 0. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$H_q(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } q = n, 0. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

A continuación, daremos unos cuantos resultados que se deducen inmediatamente de este hecho.

Corolario 4.8. Para $n > 1$, la esfera \mathbb{S}^{n-1} no es retracto por deformación de \mathbb{D}^n . De hecho tampoco es retracto.

Demostración. Procedemos por reducción al absurdo. Si \mathbb{S}^{n-1} fuera retracto de deformación de \mathbb{D}^n tendríamos que $H_q(\mathbb{S}^{n-1}) \cong H_q(\mathbb{D}^n)$, para todo $q > 0$. Pero, con lo que acabamos de probar,

$$H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$$

y

$$H_{n-1}(\mathbb{D}^n) \cong 0$$

Veamos que \mathbb{S}^{n-1} tampoco puede ser retracto de \mathbb{D}^n , para todo $n > 1$. Razonamos de la misma manera que anteriormente. Si fuera retracto, existiría una retracción,

$$r : \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1},$$

de manera, que el homomorfismo entre los grupos de homología que induciría sería sobreyectivo, es decir,

$$(r_*)_q : H_q(\mathbb{D}^n) \longrightarrow H_q(\mathbb{S}^{n-1})$$

sería sobreyectivo, para todo $q \geq 0$. Pero, como $n > 1$, si $q = n-1$, tendríamos que $H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ y $H_{n-1}(\mathbb{D}^n) = 0$, y,

$$(r_*)_{n-1} : 0 \longrightarrow \mathbb{Z}$$

sería sobreyectivo, lo cual es imposible. Luego concluimos que si $n > 1$, \mathbb{S}^{n-1} tampoco puede ser retracto de \mathbb{D}^n . \square

Teorema 4.9. (del Punto Fijo de Brouwer) Toda aplicación continua $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ posee un punto fijo, para todo $n > 0$.

Demostración. No daremos una prueba precisa, pero sí una idea que se puede utilizar. Si suponemos que dada una aplicación continua $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ no tiene puntos fijos, al igual que se puede hacer para el caso \mathbb{D}^2 , podremos construir una aplicación entre \mathbb{D}^n y \mathbb{S}^{n-1} que, además, será una retracción, lo que es imposible, por el resultado anterior. \square

Corolario 4.10. Si $m \neq n$, entonces \mathbb{S}^m y \mathbb{S}^n no son homeomorfas. Ni siquiera tienen el mismo tipo de homotopía (es decir, no son homotópicamente equivalentes).

Demostración. Si \mathbb{S}^m y \mathbb{S}^n fueran homeomorfas o tuvieran el mismo tipo de homotopía, tendríamos que los grupos de homología serían isomorfos, es decir,

$$H_q(\mathbb{S}^m) \cong H_q(\mathbb{S}^n), \text{ para todo } q > 0.$$

Pero, como ya hemos visto, $H_m(\mathbb{S}^m) \cong \mathbb{Z}$, pero $H_m(\mathbb{S}^n) \cong 0$. \square

Corolario 4.11. Sea $n \geq 0$. Entonces, \mathbb{S}^n no es contráctil.

Demostración. Diferenciaremos dos casos, $n = 0$ y $n > 0$.

Si $n = 0$, es claro, ya que \mathbb{S}^0 es un espacio formado por dos puntos, que no es contráctil.

Si $n > 0$, supongamos, por reducción al absurdo, que \mathbb{S}^n es contráctil. Entonces, por la proposición 2.21 tendríamos que,

$$H_0(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z},$$

$$H_q(\mathbb{S}^n) \cong 0, \text{ para todo } q > 0.$$

Por otro lado sabemos que $H_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$, con lo que $0 \cong H_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$, luego \mathbb{S}^n no es contráctil. \square

Corolario 4.12. Si $m \neq n$, entonces \mathbb{R}^m y \mathbb{R}^n no son homeomorfos.

Demostración. Supongamos que existe un homeomorfismo $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces $f|_{\mathbb{R}^m - \{0\}} : \mathbb{R}^m - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{f(0)\}$ es un homeomorfismo.

Si $n = 1$ y $m \geq 2$, tenemos que $\mathbb{R} - \{f(0)\}$ no es conexo y $\mathbb{R}^m - \{0\}$ sí lo es, por lo tanto no pueden ser homeomorfos.

Supongamos que $m, n \geq 2$. Podemos considerar la retracción,

$$r_m : \mathbb{R}^m - \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^m \\ x \longmapsto \frac{x}{\|x\|}$$

De hecho, se tiene que \mathbb{S}^m es un retracto por deformación de $\mathbb{R}^m - \{0\}$. De forma similar podemos probar que $\mathbb{R}^n - \{f(0)\}$ tiene el mismo tipo de homotopía que \mathbb{S}^n . Por lo tanto,

$$H_q(\mathbb{R}^m - \{0\}) \cong H_q(\mathbb{S}^m) \text{ para todo } q \geq 0,$$

$$H_q(\mathbb{R}^n - \{f(0)\}) \cong H_q(\mathbb{S}^n) \text{ para todo } q \geq 0.$$

Luego, $H_m(\mathbb{R}^m - \{0\}) \cong \mathbb{Z}$, mientras que $H_m(\mathbb{R}^n - \{f(0)\}) = 0$, lo que implica que \mathbb{R}^m y \mathbb{R}^n no pueden ser homeomorfos. \square

Por último calcularemos los grupos de homología $H_q(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$, para todo $q \geq 0$ y para todo $n \geq 1$. Como \mathbb{D}^n es conexo por caminos y \mathbb{S}^{n-1} es no vacío para todo $n \geq 1$, entonces por la proposición 3.5 tenemos que,

$$H_0(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) = 0.$$

Luego podemos suponer $q > 0$. Haremos el caso $n = 1$ por separado, porque \mathbb{S}^0 tiene dos componentes conexas. Así,

1. Supongamos que $n = 1$. Entonces si $q = 1$, tenemos la sucesión exacta larga,

$$\cdots \longrightarrow H_1(\mathbb{D}^1) \longrightarrow H_1(\mathbb{D}^1, \mathbb{S}^0) \xrightarrow{\alpha} H_0(\mathbb{S}^0) \xrightarrow{\beta} H_0(\mathbb{D}^1) \longrightarrow 0$$

Con lo que,

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow H_1(\mathbb{D}^1, \mathbb{S}^0) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Por razonamientos similares a los dados anteriormente en esta sección, tenemos que $H_1(\mathbb{D}^1, \mathbb{S}^0) \cong \mathbb{Z}$.

Si ahora suponemos $q > 1$, tenemos que $H_q(\mathbb{D}^1) \cong 0 \cong H_{q-1}(\mathbb{S}^0)$, con lo que tenemos que la sucesión exacta larga,

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\alpha} H_q(\mathbb{D}^1, \mathbb{S}^0) \xrightarrow{\beta} 0 \longrightarrow \cdots,$$

con lo que tenemos que $Im(\alpha) = Ker(\beta) = 0$. Por los teoremas de isomorfía tenemos que,

$$H_q(\mathbb{D}^1, \mathbb{S}^0)/Ker(\beta) \cong Im(\beta) = 0,$$

- con lo que tenemos que $H_q(\mathbb{D}^1, \mathbb{S}^0) \cong 0$, para todo $q > 1$.
2. Supongamos que $n > 1$. Supongamos que $q = 1$, entonces tenemos la sucesión exacta larga,

$$\cdots \longrightarrow H_1(\mathbb{D}^n) \longrightarrow H_1(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\alpha} H_0(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\beta} H_0(\mathbb{D}^n) \longrightarrow 0$$

Con lo que,

$$0 \longrightarrow H_1(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Por un argumento análogo a los anteriores, deducimos que $H_1(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) = 0$.

Ahora supongamos que $q > 1$. Entonces, si escribimos la sucesión exacta larga, teniendo en cuenta que $H_q(\mathbb{D}^n) = H_{q-1}(\mathbb{D}^n) = 0$,

$$0 \longrightarrow H_q(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow 0,$$

con lo que tenemos que,

$$H_q(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \cong H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } q = n \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Con lo que tenemos que, para todo $n \geq 1$ y para todo $q \geq 0$, tenemos que,

$$H_q(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } q = n \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

5. HOMOLOGÍA CELULAR. CW-COMPLEJOS.

En primer lugar, antes de definir formalmente los espacios *CW-complejos*, vamos a definir las nociones de adjunción de espacios y adjunción de celdas con las que trabajaremos a partir de ahora. En esta sección se seguirá [8] y [3].

Definición 5.1. (*Adjunción de un espacio*) Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ dos espacios topológicos, $A \subset X$ un subespacio cerrado y $f : A \rightarrow Y$ una aplicación continua. Consideramos el espacio topológico $X \cup Y$, junto con la topología suma,

$$\tau_\Sigma = \{U \subset X \cup Y : U \cap X \in \tau_X, U \cap Y \in \tau_Y\}.$$

En $X \cup Y$ definimos la relación de equivalencia siguiente,

$$a \sim_f y \text{ y sólo si, } y = f(a), \text{ para todo } a \in A.$$

Entonces, si cocientamos el espacio $X \cup Y$ con la relación definida, tenemos el espacio cociente $(X \cup_f Y, \tau_f)$, que se llama *espacio de adjunción de (X, τ_X) y de (Y, τ_Y) por f* , la *aplicación de adjunción*.

Observación 5.1. A partir de ahora, usaremos las notaciones siguientes para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^n &= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\} \\ U^n &= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\} \\ \mathbb{S}^{n-1} &= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}, \end{aligned}$$

donde $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, para $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

5.1. Espacios obtenidos adjuntando celdas.

Definición 5.2. (*n-celda*) Sea $n \in \mathbb{N}$. Llamamos *n-celda* o *n-celda abierta* a cualquier espacio topológico homeomorfo a U^n .

Si tenemos un espacio Y y una aplicación $g : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow Y$ continua, podemos considerar el espacio $X = Y \cup_f \mathbb{D}^n$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{g} & Y \\ \downarrow i & & \downarrow \\ \mathbb{D}^n & \xrightarrow{f} & X = Y \cup_f \mathbb{D}^n \end{array}$$

donde $i : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{D}^n$ es la inclusión del borde del disco. Es decir, X se construye tomando la unión disjunta de Y y \mathbb{D}^n e identificando los puntos del borde del disco con su imagen en Y . Decimos que el espacio X se obtiene del espacio Y adjuntando una *n-celda*.

La aplicación g se denomina *aplicación de adjunción* de la celda. La celda es la imagen del disco en X y la denotamos $\bar{e}^n = f(\mathbb{D}^n)$ y la aplicación f se llama *aplicación característica* de la celda. Observemos que la restricción de la aplicación característica al interior de \mathbb{D}^n es un homeomorfismo en su imagen que denotaremos e^n . Observemos que $f(\mathbb{S}^{n-1}) = \bar{e}^n - e^n$, ya que $f(\mathbb{S}^{n-1})$ es disjunta de e^n , pero tiene que estar contenida en \bar{e}^n .

A partir de ahora, dado un $n \in \mathbb{N}$, supondremos que X^* es un espacio topológico Hausdorff, y que X es un subconjunto cerrado de X^* , de modo que $X^* - X$ es una unión disjunta de n -celdas abiertas, e_λ^n , con $\lambda \in \Lambda$. Por último, supondremos que cada e_λ^n está adjuntado a X mediante una *aplicación característica*, esto es, para cada $\lambda \in \Lambda$, existe una aplicación continua,

$$f_\lambda : \mathbb{D}^n \longrightarrow \bar{e}_\lambda^n,$$

tal que f_λ manda a U^n de manera homeomorfa a e_λ^n y $f_\lambda(\mathbb{S}^{n-1}) \subset X$.

De esta manera, podemos ver a X^* como el espacio cociente del espacio de adjunción de X y $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bar{e}_\lambda^n$ por f_λ , respecto de la relación de equivalencia antes descrita.

Con esto, procedemos a estudiar los grupos de homología relativa del par (X^*, X) , pero antes de nada, enunciaremos un resultado que tendremos que utilizar en demostraciones posteriores. No demostraremos dicho resultado, pero una prueba se puede encontrar en [3].

Lema 5.3. (*Lema de los Cinco*) Sea el siguiente diagrama conmutativo en la categoría de grupos abelianos,

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{j} & E \\ \downarrow l & & \downarrow m & & \downarrow n & & \downarrow p & & \downarrow q \\ A' & \xrightarrow{r} & B' & \xrightarrow{s} & C' & \xrightarrow{t} & D' & \xrightarrow{u} & E' \end{array}$$

Entonces, si las filas son sucesiones exactas, los homomorfismos m y p son isomorfismos, l es un epimorfismo y q un monomorfismo, entonces n es un isomorfismo.

Teorema 5.4. Sea X^* un espacio obtenido adjuntando una colección de n -celdas ($n > 0$) $\{e_\lambda^n : \lambda \in \Lambda\}$ a X como hemos descrito anteriormente. Entonces,

$$H_q(X^*, X) = 0, \text{ para todo } q \neq n.$$

y $H_n(X^*, X)$ es un grupo abeliano libre con base en correspondencia biyectiva con el conjunto de n -celdas $\{e_\lambda^n : \lambda \in \Lambda\}$.

Demostración. Consideramos la bola cerrada de centro 0 y radio $\frac{1}{2}$,

$$Q_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \frac{1}{2}\}$$

Para cada $\lambda \in \Lambda$ definimos:

$$\begin{aligned} Q_\lambda &= f_\lambda(Q_n) \\ a_\lambda &= f_\lambda(0) \\ \mathcal{Q} &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda \\ A &= \{a_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \\ X' &= X^* - A \end{aligned}$$

Como $f_\lambda|_{U_n} : U_n \rightarrow e_\lambda^n$ es un homeomorfismo y $f_\lambda(Q_n) \subset e_\lambda^n$, la aplicación f_λ lleva de manera homeomorfa $(Q_n, Q_n - \{0\})$ a $(Q_\lambda, Q_\lambda - a_\lambda)$. Además, recordemos que los Q_λ son disjuntos dos a dos, ya que las n-celdas $\{e_\lambda^n : \lambda \in \Lambda\}$ lo son.

Tenemos el siguiente diagrama,

$$H_q(\mathcal{Q}, \mathcal{Q} - A) \xrightarrow{\alpha} H_q(X^*, X') \xleftarrow{\beta} H_q(X^*, X)$$

Tanto α como β son homomorfismos de grupos inducidos por las inclusiones. Vamos a probar que ambos homomorfismos son, de hecho, isomorfismos para todo q . Probemos primero que β es un isomorfismo.

Tenemos que X es un retracto de deformación de X' . Sabemos que \mathbb{S}^{n-1} es retracto de deformación de $\mathbb{D}^n - \{0\}$. Como X^* se obtiene adjuntando n-celdas a X y $X' = X - A$, además $f_\lambda(\mathbb{S}^{n-1}) \subset X$, se deduce que X es un retracto de deformación de X' . Si denotamos por $j : (X^*, X) \rightarrow (X^*, X')$ la inclusión de los pares tenemos el siguiente diagrama, donde la fila superior es la sucesión exacta larga de homología del par (X^*, X) y la fila inferior es la sucesión exacta larga de homología del par (X^*, X') , así,

$$\begin{array}{ccccccccc} H_q(X) & \longrightarrow & H_q(X^*) & \longrightarrow & H_q(X^*, X) & \longrightarrow & H_{q-1}(X) & \longrightarrow & H_{q-1}(X^*) \\ (i_*)_q \downarrow & & Id_{H_q(X^*)} \downarrow & & \beta \downarrow & & (i_*)_{q-1} \downarrow & & Id_{H_{q-1}(X^*)} \downarrow \\ H_q(X') & \longrightarrow & H_q(X^*) & \longrightarrow & H_q(X^*, X') & \longrightarrow & H_{q-1}(X') & \longrightarrow & H_{q-1}(X^*) \end{array}$$

Como ya hemos dicho, X es un retracto de deformación de X' , con lo que $(i_*)_q$ es un isomorfismo, para todo q . Además, como ya probamos en el teorema 2.14, la homología es un funtor, con lo que el homomorfismo inducido por la identidad, $Id : X^* \rightarrow X^*$, es la identidad de los grupos de homología, $(Id_*)_q = Id_{H_q(X^*)} : H_q(X^*) \rightarrow H_q(X^*)$, luego es un isomorfismo. De esta manera, por el lema 5.3 tenemos que el homomorfismo,

$$\beta : H_q(X^*, X) \longrightarrow H_q(X^*, X')$$

es un isomorfismo, para todo q , como queríamos probar.

Probemos ahora que el homomorfismo α es un isomorfismo. Definamos, en primer lugar, para todo $\lambda \in \Lambda$,

$$\begin{aligned} V_n &= \{x \in \mathbb{D}^n : \|x\| > \frac{1}{2}\} \\ V_\lambda &= f_\lambda(V_n) \\ \mathbb{V} &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(V_n) \\ U &= X \cup \mathbb{V} \end{aligned}$$

Tenemos que $\bar{U} \subset Int(X')$, pues $X' = X^* - A$. De esta manera, si aplicamos el teorema de escisión tendremos que, para todo q , existe un isomorfismo,

$$(i_*)_q : H_q(X^* - U, X' - U) \longrightarrow H_q(X^*, X'),$$

pero es claro ver que $H_q(X^* - U, X' - U) = H_q(\mathcal{Q}, \mathcal{Q} - A)$, luego tenemos que α es un isomorfismo, para todo q .

Por otra parte, es claro que Q_n es homeomorfo al n-disco \mathbb{D}^n . Como $f_\lambda : \mathbb{D}^n \rightarrow X^*$ restringida

a $Int(\mathbb{D}^n)$ es un homeomorfismo y $Q_n \subset Int(\mathbb{D}^n)$, tenemos que Q_λ es un espacio homeomorfo a \mathbb{D}^n . Como \mathbb{S}^{n-1} es un retracto por deformación de $\mathbb{D}^n - \{0\}$, tendremos también que $f_\lambda(\mathbb{S}_{\frac{1}{2}}^{n-1})$ será un retracto por deformación de $Q_\lambda - \{a_\lambda\}$, donde $\mathbb{S}_{\frac{1}{2}}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : \|x\| = \frac{1}{2}\}$ así pues, por el corolario 3.9 tenemos que para todo q ,

$$H_q(Q_\lambda, Q_\lambda - \{a_\lambda\}) \cong H_q(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}),$$

con lo que, por la sección anterior,

$$H_q(Q_\lambda, Q_\lambda - \{a_\lambda\}) = \begin{cases} 0, & \text{si } q \neq n. \\ \mathbb{Z}, & \text{si } q = n. \end{cases}$$

Entonces, como hemos probado que α y β son isomorfismo, entonces,

$$H_q(Q, Q - A) \cong H_q(X^*, X), \text{ para todo } q,$$

luego, $H_q(X^*, X) = 0$, para todo $q \neq n$ y $H_n(X^*, X)$ será un grupo abeliano libre con base en correspondencia biyectiva con el conjunto de n -celdas $\{e_\lambda^n : \lambda \in \Lambda\}$, por la proposición 2.10. \square

Corolario 5.5. Con las notaciones anteriores, tenemos que $H_q(X)$ y $H_q(X^*)$ son isomorfos excepto posiblemente para $q = n$ y $q = n - 1$.

Tenemos pues que si, por ejemplo, X^* se obtiene de X adjuntando k n -celdas (con k finito), entonces $H_n(X^*, X)$ es isomorfo a \mathbb{Z}^k .

5.2. CW-Complejos. A continuación vamos a definir unos espacios introducidos por J.H.C. Whitehead en 1949 que son los llamados *CW-complejos*. Dichos espacios se definen como una sucesión de subespacios, los cuales se obtienen como adjunciones de celdas de los anteriores. Nuestro propósito es definirles y poder calcular, en algunos casos, los grupos de homología. Además, como veremos, podemos dotar de estructura de CW-complejo a espacios como las esferas, la botella de Klein, el toro ó los espacios proyectivos. El nombre proviene de lo siguiente: C se refiere a la clausura finita (*Clousure-Finite*), mientras que W se refiere a la topología débil (*Weak Topology*).

Definición 5.6. (*CW-complejo*) Una estructura de *CW-Complejo* en un espacio topológico Hausdorff X es una sucesión ascendente de subespacios cerrados,

$$X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \dots$$

que satisface las siguientes condiciones:

1. X^0 tiene la topología discreta.
2. Para cada $n > 0$, X^n se obtiene a partir de X^{n-1} adjuntando una colección de n -celdas, $\{e_\lambda^n\}_\lambda$ (de la manera que hemos visto anteriormente).
3. $X = \bigcup_i X^i$.
4. $A \subset X$ es un subespacio cerrado si, y sólo si, $A \cap \bar{e}_\lambda^n$ es cerrado en \bar{e}_λ^n , para todas las n -celdas, con $n = 0, 1, 2, \dots$

Observación 5.2. *Explicaremos un poco más de dónde provienen las letras CW del nombre de CW-complejo.*

- *Clausura finita.* La clausura de cada n -celda interseca a un número finito de celdas del espacio. Esto se deduce de una proposición que se puede ver en [3] (página 520).
- *Topología débil.* Esto se explica por la propiedad 4 de la definición de CW-complejo. Se tiene que un conjunto es cerrado si, y sólo si, la intersección de dicho conjunto con la clausura de cada celda es un conjunto cerrado.

- Ejemplo 5.1.** 1. La circunferencia \mathbb{S}^1 tiene una estructura de CW-complejo con una 0-celda y una 1-celda. Además, también podemos dotarla de otra estructura de CW-complejo con dos 0-celdas y dos 1-celdas.
2. Más en general, si identificamos el borde ∂e^n de la n-celda con un punto, tenemos que espacio cociente será homeomorfo a la n-esfera. Luego, a \mathbb{S}^n podemos dotarla de una estructura de CW-complejo consistente en una 0-celda y una n-celda. Además de esta descomposición, podemos dar otra. Comenzamos con dos 0-celdas, luego dos 1-celdas que forman \mathbb{S}^1 , seguidamente dos 2-celdas y forman \mathbb{S}^2 , y así hasta construir \mathbb{S}^n .

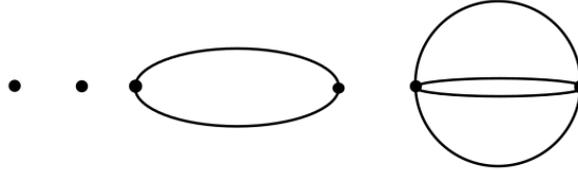


FIGURA 3. Esferas como CW complejos.

3. El espacio proyectivo real de dimensión n, $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ también posee una estructura de CW-complejo de la manera siguiente. El espacio proyectivo (conjunto de todas la rectas vectoriales que pasan por el origen de \mathbb{R}^{n+1}) puede construirse como el cociente $\mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$, donde $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ actúa sobre \mathbb{S}^n mediante la aplicación antipodal, así, cada punto de la esfera lo identificamos con su antípoda, es decir, identificamos x con $-x$, para todo $x \in \mathbb{S}^n$. De esta manera, si definimos,

$$e_+^i = \{(x_0, \dots, x_i, 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}^n : x_i \geq 0\}$$

$$e_-^i = \{(x_0, \dots, x_i, 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}^n : x_i \leq 0\},$$

entonces identificamos e_+^i con e_-^i , para todo $i = 0, \dots, n$. Luego la estructura de CW-complejo de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ consta de exactamente una i-celda, para todo $i = 0, \dots, n$.

Definición 5.7. (*Esqueleto de un CW-complejo*) Dado un CW-complejo X , definimos a X^n como el *n-esqueleto* de X .

Si utilizamos el teorema 5.4, obtenemos que si X es un espacio topológico en el que se ha definido una estructura de CW-complejo y tiene k n-celdas (con k finito), entonces $H_n(X^n, X^{n-1}) \cong \mathbb{Z}^k$. De esta manera, llegamos al siguiente corolario de este teorema.

Corolario 5.8. Sea X es un CW-complejo. Entonces $H_k(X^n, X^{n-1}) = 0$, para todo $k \neq n$ y $H_m(X^n) = 0$, para todo $m > n$.

Demostración. La primera afirmación es consecuencia directa del teorema 5.4, ya que, por definición, si X es un CW-complejo, entonces X^n se obtiene de X^{n-1} adjuntando n-celdas, con lo que $H_k(X^n, X^{n-1}) = 0$, para todo $k \neq n$.

Para probar la segunda afirmación procedemos por inducción en n . Para $n = 0$ es claro, ya que X^0 es un conjunto discreto, luego $H_m(X^0) = 0$, para todo $m > 0$, por el lema 2.8 y la proposición 2.10

Suponemos cierto para $n - 1$, es decir, $H_m(X^{n-1}) = 0$, para todo $m > n - 1$. Así pues, vamos a probarlo para X^n utilizando la sucesión exacta larga de homología del par (X^n, X^{n-1}) . Sea $m > n$, entonces:

$$\dots \longrightarrow H_m(X^{n-1}) \longrightarrow H_m(X^n) \longrightarrow H_m(X^n, X^{n-1}) \longrightarrow H_{m-1}(X^{n-1}) \longrightarrow \dots$$

Como $m > n$ entonces $m - 1 > n - 1$, luego por hipótesis de inducción $H_{m-1}(X^{n-1}) = 0 = H_m(X^{n-1})$. Así,

$$0 \longrightarrow H_m(X^n) \longrightarrow H_m(X^n, X^{n-1}) \longrightarrow 0$$

Luego, $H_m(X^n) \cong H_m(X^n, X^{n-1})$, para todo $m > n$. Por el teorema 5.4, $H_m(X^n, X^{n-1}) = 0$, para todo $m > n$, con lo que $H_m(X^n) = 0$, para todo $m > n$. \square

A continuación, con el fin de calcular los grupos de homología de un CW-complejo, definiremos un complejo de cadenas, $C_n(X)$, para $n = 0, 1, \dots$ y comprobaremos que cada $C_n(X)$ es isomorfo a $H_n(X)$. Definimos los esqueletos de orden negativo como $K^n = \emptyset$ para todo $n < 0$. Así pues, determinamos,

$$C_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1}),$$

y la aplicación,

$$d_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X),$$

es la composición de los homomorfismos,

$$H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{(\partial_*)_n} H_{n-1}(X^{n-1}) \xrightarrow{(\pi_*)_{n-1}} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}),$$

donde $(\partial_*)_n$ es el operador borde definido anteriormente del par (X^n, X^{n-1}) y $(\pi_*)_{n-1}$ es el homomorfismo inducido por la aplicación, $(\pi_\#)_n : S_n(X^{n-1}) \rightarrow S_n(X^{n-1}, X^{n-2})$, para todo n (ver diagrama 3.1).

A continuación veremos que $d_{n-1} \circ d_n = 0$, para todo n . Tenemos que, dado un n ,

$$d_{n-1} \circ d_n = (\pi_*)_{n-2} \circ (\partial_*)_{n-1} \circ (\pi_*)_{n-1} \circ (\partial_*)_n,$$

entonces, como tenemos la sucesión exacta larga,

$$\dots \longrightarrow H_{n-1}(X^n) \xrightarrow{(\pi_*)_{n-1}} H_{n-1}(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{(\partial_*)_{n-1}} H_{n-2}(X^{n-1}) \longrightarrow \dots,$$

tenemos que $(\partial_*)_{n-1} \circ (\pi_*)_{n-1} = 0$, con lo que tenemos que $d_{n-1} \circ d_n = 0$, como queríamos probar, luego los grupos $C_n(X)$ con las aplicaciones d_n forma un complejo de cadenas. Decimos que esta sucesión,

$$\dots \xrightarrow{d_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{d_{n-1}} \dots$$

es la *cadena de complejos celulares* de X . Antes que nada veremos un lema que nos servirá para calcular los grupos de homología de los CW-complejos.

Lema 5.9. El homomorfismo $H_k(X^n) \rightarrow H_k(X)$ inducido por la inclusión, $i : X^n \rightarrow X$ es un isomorfismo para $k < n$ y sobreyectivo para $k = n$.

Una demostración de dicho lema se puede ver en [3](páginas 137-139).

5.2.1. Equivalencia entre homología celular y homología singular. Ahora, estamos en condiciones de probar un resultado clave a la hora de calcular grupos de homología de CW-complejos.

Proposición 5.10. Con las notaciones anteriores tenemos,

$$\text{Ker}(d_n)/\text{Im}(d_{n+1}) \cong H_n(X), \text{ para todo } n.$$

Corolario 5.12. Sea X un CW-complejo. Entonces,

1. Si X es n -dimensional, $H_k(X) = 0$, para todo $k > n$.
2. Si X tiene un número finito de n -celdas, $H_n(X)$ es un grupo abeliano finitamente generado (suma directa de grupos cíclicos).
3. Si X no tiene n -celdas, $H_n(X) = 0$.

Demostración. 1. Supongamos que X es un CW-complejo n -dimensional, es decir, $X^n = X$, con lo que $X^k = X^n$, para todo $k > n$. Esto quiere decir que, si $k > n$, entonces a X^k no se le adjunta ninguna k -celda a partir de X^{k-1} . Por el teorema 5.4,

$$H_k(X^k, X^{k-1}) = 0, \text{ para todo } k > n.$$

Tenemos entonces que, si consideramos los homomorfismos,

$$\begin{aligned} d_k &: H_k(X^k, X^{k-1}) \longrightarrow H_{k-1}(X^{k-1}, X^{k-2}) \\ d_{k+1} &: H_{k+1}(X^{k+1}, X^k) \longrightarrow H_k(X^k, X^{k-1}), \end{aligned}$$

como $\text{Ker}(d_k), \text{Im}(d_{k+1}) \subseteq H_k(X^k, X^{k-1}) = 0$, tenemos que,

$$\text{Ker}(d_k)/\text{Im}(d_{k+1}) = 0 \cong H_k(X), \text{ para todo } k > n.$$

2. Razonamos de la misma manera. Que X tiene un número finito de n -celdas quiere decir que X^n se obtiene a partir de X^{n-1} adjuntando un número finito de n -celdas. Por el teorema 5.4, tenemos que $H_n(X^n, X^{n-1})$ es un grupo libre abeliano con base en correspondencia biyectiva con el conjunto de n -celdas, que como es un conjunto finito, el grupo $H_n(X^n, X^{n-1})$ es finitamente generado. Además, como tanto $\text{Ker}(d_n)$ como $\text{Im}(d_{n+1})$ son subgrupos de $H_n(X^n, X^{n-1})$, tenemos que $\text{Ker}(d_n)/\text{Im}(d_{n+1}) \cong H_n(X)$ también es un grupo abeliano libre y finitamente generado.
3. Es una demostración análoga a la primera. Como X no tiene n -celdas, tenemos que $X^n = X^{n-1}$, con lo que,

$$H_n(X^n, X^{n-1}) = 0.$$

Como $\text{Ker}(d_n), \text{Im}(d_{n+1}) \subseteq H_n(X^n, X^{n-1}) = 0$, tenemos que,

$$H_n(X) \cong \text{Ker}(d_n)/\text{Im}(d_{n+1}) = 0.$$

□

A continuación, como objetivo tenemos estudiar cómo se comportan los homomorfismos d_n que hemos definido, para poder calcular los grupos de homología de algunos CW-complejos. Motivados por esto, introducimos la siguiente definición.

Definición 5.13. (*Buen par*) Un par (X, A) se dice que es un *par bueno* si X es Hausdorff, $A \subset X$ es cerrado y existe un abierto U tal que $A \subset U$ y A es un retracto por deformación de U .

Por ejemplo, el par $(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ es un par bueno tomando $U = \mathbb{D}^n - \{0\}$.

Ahora, si consideramos un espacio topológico X y subespacios A, B , de modo que $A \subset B \subset X$, al igual que definimos la sucesión exacta larga de un par, podemos considerar, como generalización, la sucesión exacta larga de la tripleta (X, B, A) , como,

$$\cdots \longrightarrow H_n(B, A) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow H_n(X, B) \longrightarrow H_{n-1}(B, A) \longrightarrow \cdots$$

Esta es la sucesión exacta de grupos de homología asociada a la sucesión exacta corta de complejos de cadenas formada por las sucesiones exactas cortas:

$$0 \longrightarrow S_n(B, A) \longrightarrow S_n(X, A) \longrightarrow S_n(X, B) \longrightarrow 0$$

Esto es una generalización de la sucesión exacta larga de pares que definimos anteriormente (ver la observación 3.2), ya que si tomamos el conjunto A como el conjunto vacío, tenemos que la sucesión anterior es exactamente la sucesión exacta larga de homología del par (X, B) .

A continuación, probaremos un lema sobre buenos pares que utilizaremos para describir el comportamiento del homomorfismo d_n en CW-complejos.

Lema 5.14. Sea (X, A) un buen par, entonces la aplicación cociente $\pi : (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$ induce isomorfismos en los grupos de homología, $(\pi_*)_n : H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$, para todo n .

Demostración. En primer lugar, $H_n(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$ para todo n ya lo demostramos en el ejemplo 3.2, ya que A/A es un punto.

Como (X, A) es un buen par, existe un $V \subset X$ abierto, con $A \subset V$, para el cual A es retracto de deformación. Si consideramos el siguiente diagrama conmutativo,

$$(5.1) \quad \begin{array}{ccccc} H_n(X, A) & \xrightarrow{(i_*)_{n,1}} & H_n(X, V) & \xleftarrow{(i_*)_{n,2}} & H_n(X - A, V - A) \\ (\pi_*)_{n,1} \downarrow & & (\pi_*)_{n,2} \downarrow & & (\pi_*)_{n,3} \downarrow \\ H_n(X/A, A/A) & \xrightarrow{(i_*)_{n,3}} & H_n(X/A, V/A) & \xleftarrow{(i_*)_{n,4}} & H_n((X - A)/A, (V - A)/A) \end{array}$$

Tanto $(i_*)_{n,2}$ como $(i_*)_{n,4}$ son isomorfismos, por el teorema de escisión (teorema 4.1). Además $(i_*)_{n,1}$ también es un isomorfismo debido a que si consideramos la sucesión exacta larga de (X, V, A) , tenemos que, como A es un retracto de deformación de V , $H_n(V, A) = 0$, para todo n (ver ejemplo 3.3), con lo que,

$$\dots \longrightarrow H_n(V, A) = 0 \longrightarrow H_n(X, A) \xrightarrow{(i_*)_{n,1}} H_n(X, V) \longrightarrow H_{n-1}(V, A) = 0 \longrightarrow \dots$$

Con lo que $(i_*)_{n,1} : H_n(X, A) \rightarrow H_n(X, V)$ es un isomorfismo, para todo n . Por un argumento similar, también es isomorfismo $(i_*)_{n,3} : H_n(X/A, A/A) \rightarrow H_{n-1}(X/A, V/A)$, con lo que tenemos que todos los homomorfismos horizontales son isomorfismos, para todo n .

El homomorfismo $(\pi_*)_{n,3}$ es un isomorfismo, ya que si consideramos la aplicación cociente,

$$\pi_3 : X \longrightarrow X/A,$$

tenemos que, si $x, y \in X$, las clases de equivalencia $[x] = [y]$ si, y sólo si, $x - y \in A$. Con lo que, la restricción de π a $X - A$ es un homeomorfismo, es decir,

$$\pi_3|_{X-A} : X - A \longrightarrow (X - A)/A,$$

con lo que $(\pi_*)_{n,3} : H_n(X - A, V - A) \longrightarrow H_n((X - A)/A, (V - A)/A)$ es un isomorfismo para todo n . De esta manera, por la conmutatividad del diagrama (5.2.1), tenemos que $(\pi_*)_{n,1} : H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$ es un isomorfismo para todo n . \square

A continuación probaremos un último resultado acerca de los CW-complejos, que nos dará una idea de cómo se comporta el operador d_n que hemos definido para los grupos de homología celular.

Primeramente, como ya hemos calculado los grupos de homología de las esferas en la sección 4.1, vamos a introducir la noción de grado de una aplicación entre esferas.

Sea $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ una aplicación continua, para $n \in \mathbb{N}$. Si consideramos el homomorfismo inducido por f entre los grupos de homología,

$$(f_*)_n : H_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow H_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z},$$

tenemos que, $(f_*)_n(m) = d \cdot m$, para un cierto $d \in \mathbb{Z}$ y para todo $m \in \mathbb{Z}$. A dicho d le llamamos grado de la aplicación f y lo denotamos por $\deg(f) := d$.

Por otra parte, tenemos en cuenta que por el teorema 5.4, dado un CW-complejo X , tenemos que $H_n(X^n, X^{n-1})$ es un grupo abeliano libre con base en correspondencia biyectiva con el conjunto de n -celdas de X , $\{e_\alpha^n\}_{\alpha \in A}$. Como $C_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1})$ y $d_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$, para trabajar con este operador denotaremos por $\{e_\alpha^n\}_{\alpha \in A}$ los generadores del grupo $C_n(X)$ y por $\{e_\beta^{n-1}\}_{\beta \in B}$ los generadores del grupo $C_{n-1}(X)$, donde $\{e_\beta^{n-1}\}_{\beta \in B}$ son las $(n - 1)$ -celdas de X . De esta manera, estamos en condiciones de enunciar y probar el siguiente teorema.

Por cada n -celda e_α^n denotaremos por \mathbb{D}_α^n al disco de dimensión n de manera que, si f_α es la aplicación característica de la n -celda e_α^n , entonces $f_\alpha(\mathbb{D}_\alpha^n) = \bar{e}_\alpha^n$. Así, el borde de \mathbb{D}_α^n lo denotamos por \mathbb{S}_α^{n-1} y tenemos que $f_\alpha(\mathbb{S}_\alpha^{n-1}) = \bar{e}_\alpha^n - e_\alpha^n$. Consideramos la aplicación entre esferas,

$$\pi_\beta \circ q \circ f_\alpha |_{\mathbb{S}_\alpha^{n-1}}: \mathbb{S}_\alpha^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}_\beta^{n-1},$$

donde, fijada una n -celda e_α^n de X , $f_\alpha |_{\mathbb{S}_\alpha^{n-1}}$ es la aplicación característica restringida al borde de \mathbb{D}_α^n . La aplicación $q : X^{n-1} \rightarrow X^{n-1}/X^{n-2}$ es la aplicación cociente. Y la aplicación $\pi_\beta : X^{n-1}/X^{n-2} \rightarrow \mathbb{S}_\beta^{n-1}$ es la aplicación que colapsa el complementario de e_β^{n-1} a un punto. De esta manera, identificamos \mathbb{S}_β^{n-1} con $\mathbb{D}_\beta^{n-1}/\mathbb{S}_\beta^{n-2}$ (podemos pensarlo en dimensión 2, ya que si cocientamos el disco \mathbb{D}^2 con \mathbb{S}^1 , obtenemos una esfera de dimensión una mayor, es decir, $\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{D}^2/\mathbb{S}^1$).

Teorema 5.15. *Con las notaciones precedentes, entonces,*

$$d_n(e_\alpha^n) = \sum_{\beta \in B} d_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1},$$

donde $d_{\alpha\beta}$ es el grado de la aplicación anteriormente descrita,

$$\pi_\beta \circ q \circ f_\alpha |_{\mathbb{S}_\alpha^{n-1}}: \mathbb{S}_\alpha^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}_\beta^{n-1}.$$

Demostración. Vamos a considerar el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccccc} H_n(\mathbb{D}_\alpha^n, \mathbb{S}_\alpha^{n-1}) & \xrightarrow[\cong]{(\partial_*)_n} & \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}_\alpha^{n-1}) & \xrightarrow{(\Delta_{\alpha\beta*})_{n-1}} & \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}_\beta^{n-1}) \\ (f_{\alpha*})_n \downarrow & & (\varphi_{\alpha*})_n \downarrow & & \uparrow (q_{\beta*})_{n-1} \\ H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{(\partial_*)_n} & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}) & \xrightarrow{(q_*)_{n-1}} & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \\ & \searrow d_n & \downarrow (\pi_*)_{n-1} & \cong \nearrow & \\ & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & & \end{array}$$

Para cada n -celda e_α^n de X , f_α es la aplicación característica de dicha n -celda y denotamos φ_α la restricción de f_α al borde del disco \mathbb{D}_α^n , es decir, $\varphi_\alpha = f_\alpha |_{\mathbb{S}_\alpha^{n-1}}$.

En primer lugar, el triángulo inferior izquierdo es conmutativo, por cómo hemos definido la aplicación d_n . El diagrama superior izquierdo también es conmutativo, pues la aplicación característica f_α es igual, sobre \mathbb{S}_α^{n-1} , a la aplicación φ_α . Por último vamos a explicar las aplicaciones que salen en el diagrama superior derecho.

1. El homomorfismo $(q_*)_{n-1}$ es el que induce la aplicación cociente $q : X^{n-1} \rightarrow X^{n-1}/X^{n-2}$.
2. El homomorfismo $(q_{\beta*})_{n-1}$ es el que induce la aplicación $q_\beta : X^{n-1}/X^{n-2} \rightarrow \mathbb{S}_\beta^{n-1}$, donde \mathbb{S}_β^{n-1} lo identificamos con $\mathbb{D}_\beta^{n-1}/\mathbb{S}_\beta^{n-2}$. Dicha aplicación colapsa el complementario de e_β^{n-1} , es decir, $X^{n-1} - e_\beta^{n-1}$ a un solo punto, con lo que el resultado será \bar{e}_β^{n-1} a la que se ha identificado el borde en un punto, con lo que el resultado será lo que hemos identificado por \mathbb{S}_β^{n-1} .
3. El homomorfismo $(\Delta_{\alpha\beta*})_{n-1}$ es el que induce la aplicación $\Delta_{\alpha\beta} : \mathbb{S}_\alpha^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}_\beta^{n-1}$, que es la composición de aplicaciones, $q_\beta \circ q \circ \varphi_\alpha$, es decir, $(\Delta_{\alpha\beta*})_{n-1}$ es el homomorfismo que hace conmutativo al diagrama superior derecho.
4. El isomorfismo $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2})$ es el que nos da el lema 5.14, ya que como X es un CW-complejo, (X^n, X^{n-1}) forman un buen par, para todo n .

Así pues, fijamos un generador e_α^n del grupo $H_n(X^n, X^{n-1})$. Veamos cuánto vale $d_n(e_\alpha^n)$. Aplicando la definición de d_n , tenemos que,

$$d_n(e_\alpha^n) = (\pi_*)_{n-1} \circ (\partial_*)_n(e_\alpha^n).$$

Ahora, teniendo en cuenta que la aplicación $(f_{\alpha*})_n$ lleva un generador $[\mathbb{D}_\alpha^n] \in H_n(\mathbb{D}_\alpha^n, \mathbb{S}_\alpha^{n-1})$ en el generador $e_\alpha^n \in H_n(X^n, X^{n-1})$, con lo que,

$$d_n(e_\alpha^n) = (\pi_*)_{n-1} \circ (\partial_*)_n \circ (f_{\alpha*})_n([\mathbb{D}_\alpha^n]),$$

y usando la conmutatividad del diagrama superior izquierdo, tenemos,

$$d_n(e_\alpha^n) = (\pi_*)_{n-1} \circ (\varphi_{\alpha*})_n \circ (\partial_*)_n([\mathbb{D}_\alpha^n]).$$

Si consideramos el grupo $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$, su base la forman las $(n-1)$ -celdas $\{e_\beta^{n-1}\}_{\beta \in B}$ de X . Así pues, por cómo hemos definido q_β , tenemos que $(q_{\beta*})_{n-1}$ es la proyección de $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$ en el sumando de \mathbb{Z} correspondiente al generador e_β^{n-1} , dicho en otras palabras, cada elemento de $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$ es una combinación lineal de las $(n-1)$ -celdas, $\sum_\beta c_\beta e_\beta^{n-1}$, con $c_\beta \in \mathbb{Z}$. Entonces dicha aplicación lo que hace es proyectar $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$ sobre el sumando correspondiente a e_β^{n-1} , es decir, al coeficiente de e_β^{n-1} , es decir, $(q_{\beta*})_{n-1}(\sum_\beta c_\beta e_\beta^{n-1}) = c_\beta$. De esta forma, el valor de $d_n(e_\alpha^n)$ será la suma de las proyecciones de $(q_{\beta*})_{n-1}$ en las $(n-1)$ -celdas e_β^{n-1} .

Así, teniendo en cuenta lo anterior, y el isomorfismo $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \longrightarrow \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2})$, tenemos,

$$d_n(e_\alpha^n) = \sum_{\beta \in B} (q_{\beta*})_{n-1} \circ (q_*)_{n-1} \circ (\varphi_{\alpha*})_n((\partial_n)_n([\mathbb{D}_\alpha^n])).$$

Si definimos a $d_{\alpha\beta}$ como el grado de la aplicación $\Delta_{\alpha\beta} : \mathbb{S}_\alpha^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}_\beta^{n-1}$, tenemos que, como,

$$\Delta_{\alpha\beta} = q_\beta \circ q \circ \varphi_\alpha,$$

entonces,

$$d_n(e_\alpha^n) = \sum_{\beta \in B} d_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1},$$

donde hemos hecho la identificación del generador e_β^{n-1} de $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$ con $(\partial_*)_n([\mathbb{D}_\alpha^n])$, esto se explica mediante el homomorfismo $(\Delta_{\alpha\beta*})_{n-1}$, que lleva generadores de $\tilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}_\alpha^{n-1})$ a las proyecciones de $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$ sobre cada sumando \mathbb{Z} correspondiente a cada generador e_β^{n-1} . \square

5.2.2. Homología Celular de algunos CW-complejos. Ahora vamos a utilizar la fórmula de d_n para calcular los grupos de homología de algunos CW-complejos. En estos ejemplos tomaremos como referencia [1] y [8].

Ejemplo 5.2. 1. La n -esfera $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ se la puede dotar de una estructura de CW-complejo, utilizando únicamente una 0-celda y una n -celda.

Como \mathbb{S}^n es un CW-complejo n -dimensional, sabemos que $H_m(\mathbb{S}^n) = 0$, para todo $m > n$. Además, como \mathbb{S}^n únicamente tiene celdas de dimensión 0 y n , entonces $H_m((\mathbb{S}^n)^m, (\mathbb{S}^n)^{m-1}) = 0$, para todo $m \neq 0, n$. Además, $H_n((\mathbb{S}^n)^n, (\mathbb{S}^n)^{n-1}) = \mathbb{Z} = H_0((\mathbb{S}^n)^0)$. Así pues, tenemos la siguiente sucesión,

$$\dots \longrightarrow 0 \xrightarrow{d_{n+1}} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_n} 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow 0 \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Así pues, por el corolario 5.12, tenemos que $H_m(\mathbb{S}^n) = 0$, para todo $m \neq 0, n$ y, por la proposición 5.10, tenemos, que,

$$\begin{aligned} H_n(\mathbb{S}^n) &\cong \text{Ker}(d_n)/\text{Im}(d_{n+1}) = \mathbb{Z}/0 = \mathbb{Z} \\ H_0(\mathbb{S}^n) &\cong \text{Ker}(d_0)/\text{Im}(d_1) = \mathbb{Z}/0 = \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Luego si definimos en la esfera una estructura de CW-complejo, tenemos una manera diferente de calcular sus grupos de homología singular.

2. Consideramos ahora el 2-toro, es decir, $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Podemos dotarle de una estructura de CW-complejo con una 0-celda, v_0 , dos 1-celdas, A , B y una 2-celda, e_α^2 . Por lo tanto tenemos que, $H_0(\mathbb{T}^0) \cong \mathbb{Z}$, ya que sólo hay una 0-celda. Como hay dos 1-celdas, $H_1(\mathbb{T}^1, \mathbb{T}^0) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Por último, como \mathbb{T} tiene una 2-celda y ninguna celda de dimensión superior, tenemos que, $H_2(\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^1) \cong \mathbb{Z}$ y $H_n(\mathbb{T}) = 0$, para todo $n > 2$, por el corolario 5.12.

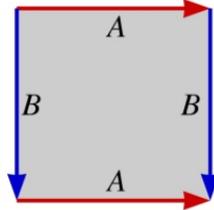


FIGURA 4. Diagrama del 2-toro (ver [1]).

Como podemos observar en la anterior imagen, los vértices del cuadrado son todos el mismo punto, v_0 , ya que se identifican, mientras que la parte interior es la 2-celda, e_α^2 , cuyo borde lo identificamos sobre el borde del cuadrado del diagrama. De esta manera, tenemos la siguiente cadena,

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Vamos a estudiar cómo se comportan los homomorfismos d_1 y d_2 mediante la fórmula probada en el teorema 5.15. Primeramente, para estudiar d_2 hace falta ver únicamente cuál es la imagen de e_α^2 , es decir, calcular $d_2(e_\alpha^2)$, que será por lo anterior,

$$d_2(e_\alpha^2) = d_{e_\alpha^2, A}A + d_{e_\alpha^2, B}B,$$

con lo que tenemos que calcular únicamente los grados $d_{e_\alpha^2, A}$ y $d_{e_\alpha^2, B}$.

El grado $d_{e_\alpha^2, A}$ es el de la aplicación que se obtiene componiendo la aplicación adjunción de e_α^2 ,

$$\varphi_\alpha = f_\alpha|_{\mathbb{S}_\alpha^1} : \mathbb{S}_\alpha^1 \longrightarrow \mathbb{T}^1,$$

y la aplicación cociente,

$$q_A : \mathbb{T}^1 \longrightarrow \mathbb{S}_A^1 \cong (A/\partial A).$$

Nos damos cuenta que en la figura 4 los lados correspondientes a A tienen direcciones opuestas, con lo que, φ_α manda \mathbb{S}_α^1 en $A + B - A - B$. Con lo que, por la aplicación q_A (que colapsa todo a A), tendremos que $d_{e_\alpha^2, A}$ será el grado de la aplicación que manda \mathbb{S}_α^{n-1} a $A - A = 0$, con lo que $d_{e_\alpha^2, A} = 0$. Análogamente, se puede hacer con la 1-celda B , con lo que $d_2(e_\alpha^2) = 0 \cdot A + 0 \cdot B = 0$. De esta manera, tendremos que,

$$\begin{aligned} \text{Ker}(d_2) &= \mathbb{Z} \\ \text{Im}(d_2) &= \{0\} \end{aligned}$$

En segundo lugar, veamos cómo se comporta d_1 . Entonces, tendremos que ver cuánto vale $d_1(A)$ y $d_1(B)$. Por el teorema 5.15, sabemos que $d_1(A) = d_{A, v_0}v_0$ y $d_1(B) = d_{B, v_0}v_0$, pero como $\mathbb{T}^0 = \{v_0\}$ es un punto, tenemos que los grados d_{A, v_0} y d_{B, v_0} serán 0, con lo que $d_1(A) = 0 = d_1(B)$, con lo que tendremos que,

$$\begin{aligned} \text{Ker}(d_1) &= \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ \text{Im}(d_1) &= \{0\} \end{aligned}$$

Finalmente, como d_0 es la única aplicación que se puede definir entre \mathbb{Z} y $\{0\}$, tenemos que $\text{Ker}(d_0) = \mathbb{Z}$, con lo que, los grupos de homología del 2-toro, $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, serán,

$$\begin{aligned} H_2(\mathbb{T}) &\cong \text{Ker}(d_2)/\text{Im}(d_3) = \mathbb{Z}/\{0\} \cong \mathbb{Z} \\ H_1(\mathbb{T}) &\cong \text{Ker}(d_1)/\text{Im}(d_2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\{0\} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ H_0(\mathbb{T}) &\cong \text{Ker}(d_0)/\text{Im}(d_1) = \mathbb{Z}/\{0\} \cong \mathbb{Z} \\ H_n(\mathbb{T}) &= 0, \text{ para todo } n > 2. \end{aligned}$$

Luego, tenemos que,

$$\begin{aligned} H_0(\mathbb{T}) &\cong \mathbb{Z}, \\ H_1(\mathbb{T}) &\cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \\ H_2(\mathbb{T}) &\cong \mathbb{Z}, \\ H_n(\mathbb{T}) &= 0, \text{ para todo } n > 2. \end{aligned}$$

3. Procedemos a calcular ahora los grupos de homología de la *botella de Klein*, \mathbb{K} , que tiene el siguiente diagrama,

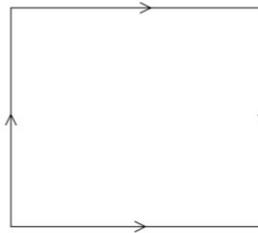


FIGURA 5. Diagrama de la botella de Klein (ver [1]).

Como en el ejemplo anterior, consideramos los lados verticales como el 1-símplice B y los horizontales como el 1-símplice A . De esta manera, al igual que el 2-toro, tenemos que podemos dotar a \mathbb{K} de una estructura de CW-complejo con una 0-celda, v_0 , dos 1-celdas, A y B y una 2-celda, e_α^2 , como se ve en el la figura 5.

Con lo dicho anteriormente, tenemos la siguiente sucesión,

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Como hemos razonado anteriormente, tenemos que el homomorfismo d_1 es el homomorfismo 0, luego tenemos que $\text{Ker}(d_1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e $\text{Im}(d_1) = 0$. Ahora vamos a estudiar cómo se comporta el homomorfismo d_2 , es decir, vamos a calcular $d_2(e_\alpha^2)$. Por el teorema 5.15, tenemos que,

$$d_2(e_\alpha^2) = d_{e_\alpha^2, A}A + d_{e_\alpha^2, B}B.$$

Luego sólo tenemos que calcular los grados $d_{e_\alpha^2, A}$ y $d_{e_\alpha^2, B}$.

En primer lugar calcularemos $d_{e_\alpha^2, A}$. Como los lados de A en la figura 5 tienen las mismas direcciones que en el caso del 2-toro, tenemos que, análogamente al caso anterior, $d_{e_\alpha^2, A} = 0$. Ahora vamos a calcular $d_{e_\alpha^2, B}$, que en este caso es diferente a lo anterior. Tenemos que $d_{e_\alpha^2, B}$ es el grado de la composición de la aplicación de adjunción,

$$\varphi_\alpha = f_\alpha|_{\mathbb{S}_\alpha^1} : \mathbb{S}_\alpha^1 \longrightarrow \mathbb{K}^1,$$

y la aplicación cociente,

$$q_B : \mathbb{K}^1 \longrightarrow \mathbb{S}_B^1 (\cong B/\partial B).$$

La primera aplicación manda $\partial(e_\alpha^2)$ a $B + A + B - A$, con lo que, por la segunda aplicación, tendremos que $d_{e_\alpha^2, B}$ es el grado de la aplicación que manda \mathbb{S}_α^1 a $B + B = 2B$, con lo que, $d_{e_\alpha^2, B} = 2$. De esta manera, tenemos que,

$$d_2(e_\alpha^2) = 0 \cdot A + 2 \cdot B = 2 \cdot B.$$

Así, tenemos que $\text{Ker}(d_2) = 0$ e $\text{Im}(d_2) \cong \{(0, 2z) : z \in \mathbb{Z}\} = \{0\} \times 2\mathbb{Z}$. Con lo que,

$$H_0(\mathbb{K}) \cong \mathbb{Z}$$

$$H_1(\mathbb{K}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(\{0\} \times \mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/\{0\}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

$$H_2(\mathbb{K}) \cong \{0\}/\{0\} = \{0\}$$

$$H_n(\mathbb{K}) = \{0\}, \text{ para todo } n \geq 3.$$

4. Vamos a calcular ahora los grupos de homología de los espacios proyectivos reales, $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, para los cuales, primeramente, daremos una definición formal y tendremos en cuenta algunas consideraciones.

Definición 5.16. (*Espacio Proyectivo Real*) Consideremos la relación de equivalencia sobre la esfera \mathbb{S}^n , $x \sim -x$, para todo $x \in \mathbb{S}^n$, es decir, identificamos cada punto con su antípoda. Definimos al *n-espacio proyectivo real* como el cociente,

$$\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) := \mathbb{S}^n / \sim.$$

Si consideramos en \mathbb{S}^n una estructura de CW-complejo como la de la figura 3, tenemos que \mathbb{S}^n tiene 2 k-celdas, para cada $k \leq n$, con lo que si consideramos el n-espacio proyectivo como la n-esfera cocientada con dicha relación, tenemos que $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ tiene una k-celda, para todo $k \leq n$. Es decir, podemos expresar a $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ como,

$$\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = e^0 \cup \dots \cup e^n,$$

donde cada e^k es una k-celda (como vimos en el ejemplo 5.1).

Otra consideración a tener en cuenta de lo anterior es que el *k-esqueleto* de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ es el k-espacio proyectivo real, es decir,

$$(\mathbb{P}_n(\mathbb{R}))^k = \mathbb{P}_k(\mathbb{R}) = e^0 \cup \dots \cup e^k.$$

Con todo lo dicho, dado el n-espacio proyectivo real $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, tenemos la siguiente sucesión,

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_n} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_{n-1}} \mathbb{Z} \longrightarrow \dots \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_0} 0$$

La aplicación de adjunción de e^k es el recubrimiento de dos hojas $\varphi_k : \mathbb{S}^{k-1} \rightarrow \mathbb{P}_{k-1}(\mathbb{R})$. Para calcular $d_k(e^k)$ tenemos que calcular el grado de la composición $q \circ \varphi_k$, donde $q : \mathbb{P}_{k-1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_{k-1}(\mathbb{R})/\mathbb{P}_{k-2}(\mathbb{R})$.

La contraimagen de $\mathbb{P}_{k-2}(\mathbb{R})$ por φ_k es $\mathbb{S}^{k-2} \subset \mathbb{S}^{k-1}$. Además tenemos que $\mathbb{S}^{k-1} - \mathbb{S}^{k-2} = \mathbb{D}_1^{k-1} \cup \mathbb{D}_2^{k-1}$ (considérese, por ejemplo, $\mathbb{S}^2 - \mathbb{S}^1$, es decir, si a \mathbb{S}^2 le quitamos el ecuador, el espacio resultante será la unión de dos discos de dimensión dos, los dos hemisferios). Tenemos además que φ_k restringido a cada una de las componentes de $\mathbb{S}^{k-1} - \mathbb{S}^{k-2}$ es un homeomorfismo.

Uno de los homeomorfismos se obtiene del otro haciendo actuar en primer lugar la aplicación antipodal de \mathbb{S}^{k-1} , que tiene grado $(-1)^k$.

Utilizando las propiedades del grado de una aplicación (ver [3], página 136), tenemos que el grado de $q \circ \varphi_k$ es $1 + (-1)^k$.

De esta manera, tenemos que $d_k(e^k) = 2e^{k-1}$ si k es par y $d_k(e^k) = 0$ si k es impar. Luego

$Ker(d_k) = 0$ e $Im(d_k) = 2\mathbb{Z}$ si k es par y $Ker(d_k) = \mathbb{Z}$ e $Im(d_k) = 0$ si k es impar. Así, con todo lo anterior, tenemos que,

$$H_k(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{si } k \text{ es impar y } 0 < k < n. \\ \{0\}, & \text{si } k \text{ es par.} \\ \mathbb{Z}, & \text{si } k=0. \end{cases}$$

El otro caso es que n sea impar, con lo que $Ker(d_n) = \mathbb{Z}$ e $Im(d_{n+1}) = 0$, con lo que $H_n(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}$, con lo que, por todo lo anterior tenemos que,

$$H_k(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{si } k \text{ es impar y } 0 < k < n. \\ \{0\}, & \text{si } k \text{ es par.} \\ \mathbb{Z}, & \text{si } k=0, n. \end{cases}$$

REFERENCIAS

- [1] DEGIORGI, P., *Cellular Homology and the Cellular Boundary Formula*, disponible en <http://math.uchicago.edu/may/REU2016/REUPapers/Degiorgi.pdf>.
- [2] HARPER, J.R., GREENBERG, M.J., *Algebraic Topology. A first course*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. 1981.
- [3] HATCHER, A., *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge 2002.
- [4] IVORRA CASTILLO, C., *Topología Algebraica, con Aplicaciones a la Geometría Diferencial*, disponible en <http://www.uv.es>.
- [5] KOSNIOWSKI, C., *Topología Algebraica*. Editorial Reverte, S.A., 1992.
- [6] MACHO-STADLER, M., *Topología General*, 2002, disponible en <http://www.ehu.es/mtw-mastm/Topologia1415.pdf>.
- [7] MACHO-STADLER, M., *Topología*, Apuntes curso 2014-2015 disponibles en <http://www.ehu.es/mtw-mastm/TopoGralMana.pdf>.
- [8] MASSEY, W.S., *A Basic Course in Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1991.
- [9] MUNKRES, J.R., *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley Publishing Company, 1984.
- [10] MUNKRES, J.R., *Topology, a first course*. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice-Hall, 1975.