Sobre la finitud de los Equilibros de Nash en juegos genéricos

(On the finiteness of the Nash equilibria for generic games)

Sara García Hevia

Trabajo de Fin de Grado

para acceder al

Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias

Universidad de Cantabria

Director: Luis Miguel Pardo Vasallo

Resumen

En esta memoria, realizamos un estudio sobre la estructura y la cuantificación de los equilibrios de Nash en juegos finitos no cooperativos. Un juego finito es una interacción entre distintos agentes en la cuál cada uno posee un número finito de estrategias y obtiene una recompensa en función de su elección y la del resto de los jugadores. El término "no cooperativo" hace referencia a que los participantes eligen su estrategia de forma independiente y buscando el mayor beneficio personal.
Un equilibrio de Nash es una estrategia grupal en las que cada agente, habiendose fijando la elección del resto, consigue la máxima recompensa posible, o lo que es lo mismo, en los equilibrios de Nash todos los jugadores se quedan "contentos" con su elección, ya que no podían haber elegido otra mejor.

En el Capítulo 1, reproduciremos la famosa Tesis de John F. Nash de 1950 en la que demostró la existencia de estos equilibrios en todo juego no cooperativo, y por la cuál, dada su relevancia y utilidad, obtuvo el premio Nobel en ciencias Económicas en 1994.
En el Capítulo 2, estudiaremos primero la relación entre el conjunto de equilibrios y la Geometría Algebraica, viendo que es un conjunto semi-algebraico y que, por lo tanto, puede estudiarse como las soluciones de un sistema de ecuaciones e inecuaciones. También introduciremos las funciones multi-homogéneas, ya que veremos que el sistema que caracteriza los equilibrios es multi-homogéneo.
Después analizaremos el conjunto de subjuegos de un juego dado y un tipo concreto de equilibrios: los totalmente mezclados. Por último, daremos una demostración *"from scratch"* sobre la finitud de los equilibrios de Nash en juegos elegidos genéricamente.
Hemos añadido también dos Apéndices en los que se recopilan notaciones básicas y resultados que utilizaremos a lo largo del trabajo. El Apéndice A trata los conjuntos y funciones convexas, y el Apéndice B describe términos de geometría algebraica, polinomios multihomogéneos y la relación entre los politopos y la cota BKK.

Abstract

In this work we will study the structure and quantification of Nash equilibria in non-cooperative finite games. A finite game consist in an interaction between a group of agents in which each of them has a finite number of strategies and a payoff function that sets a profit depending of the choices of all the players. The term "Non-cooperative" means that players can not form alliances so each one of them seeks its greatest benefit.
A Nash equilibria is a commun strategie in which each player, having fixed the strategies of the rest of them, get the maximun benefit, and therefore, in a Nash equilibria all the players are "satisfied" with their choice because for that situation, they could not choose a better strategy.

In Chapter 1, we exhibit John F. Nash tesis (1950) in which he prooved that for any finite non-cooperative game exits at least one equilibria point. Because of the influence of his work in the field of Economics, he recived the Nobel Prize in Economic Science in 1994.
In Chapter 2, we will first study the set of Nash equlibria as a semi-algebraic set, so Algebraic Geometry will be introduced to describe it as the solutions of a system of equations and inequations. Moreover, we will introduce the multi-homogeneous functions because the system we will use to describe the equilibria points is multi-homogeneous.
Then, we will analize the set of sub-games of a game, and a particular type of equilibria: the totally mixed equilibria. Ultimately, we will proof by scratch the finitude of Nash equilibria in generic games.
The manuscript is completed with 2 Appendices which recall some basic notations and facts used along the work. Appendix A describes propieties of convex sets and functions and Appendix B shows diferent terms and notations about Algebraic Geometry, multihomogeneous polynomial and the relation between Newton Polytopes and the BKK theorem.

Índice

Capítulo 0. Introducción y Resumen de Resultados vii

Part 1. Memoria xi

Capítulo 1. Equilibrios de Nash: Existencia 1
1.1. Juegos de n personas: El modelo 1
1.1.1. Juegos de n personas 1
1.1.2. La hipótesis de Nash: multi-linearidad de las recompensas 2
1.1.3. Juegos de Nash Multi-homogéneos y Convexos 3
1.1.4. Juegos de Nash Generalizados: quasi-convexos y quasi-cóncavos 4
1.2. Equilibrios de Nash 5
1.2.1. Equilibrios de Nash: caso multi-homogéneo y convexo 6
1.2.2. Equilibrios de Nash: Juegos de n personas generalizado 7
1.3. Teoremas de existencia de Equilibrios de Nash 8
1.3.1. Teorema de Existencia de Equilibrios de Nash en el caso clásico 8
1.3.2. Teorema de Existencia de equilibrios de Nash en el caso generalizado 10

Capítulo 2. Equilibrios de Nash: finitud en el caso genérico 13
2.1. Introducción y presentación de resultados 13
2.2. Sobre el número de componentes conexas de los Equilibrios de Nash 15
2.3. Primeras Ecuaciones Polinomiales Multi-homogéneas que satisfacen los Equilibrios de un Juego de Nash 16
2.4. Sub-juegos de un juego de n personas 19
2.5. Ecuaciones tóricas de Equilibrios totalmente mezclados 21
2.5.1. Ecuaciones multi-homogéneas para los equilibrios totalmente mezclados 23
2.6. Ceros Tóricos de Sistemas "Sparse" (ralos) 26
2.6.1. Notaciones Básicas sobre "sparsity" y tóricos. 27
2.6.2. La Variedad Solución (o de incidencia) Tórica. 28
2.6.3. Invarianza unitaria de sistemas sparse y conectividad de la Variedad Solución. 31
2.7. Finitud genérica de los equilibrios totalmente mezclados 34
2.8. Los resultados de una extraña búsqueda bibliográfica 40

Part 2. Apéndices 45

Apéndice A. Conjuntos y Funciones Convexas: Recordatorio 47
A.0.1. Conjuntos y Funciones convexos: las nociones 47
A.0.2. Algunas caracterizaciones de convexidad 47
A.0.3. Otras propiedades de la convexidad 48

Apéndice B. Algunos Términos Básicos de Geometría Algebraica Real y Compleja 49
B.1. Polinomios Homogéneos y Multi-homogéneos 49
B.1.1. Variables agrupadas: Polinomios Multi-homogéneos. 50
B.1.2. Representación de los polinomios multi-homogéneos 51
B.2. Conjuntos Algebraicos, Constructibles y Semi-algebraicos 52
B.2.1. El Caso Real 54
B.3. Irreducibles y dimensión de Krull 57
B.4. Propiedades Genéricas 58
B.5. El Teorema de la Dimensión en la Fibra 60

B.6. Recordando el Teorema de Sard 60
B.7. Politopos de Newton y Volumen Mixto 61
B.8. La cota BKK 63

Apéndice. Bibliografía 65

CAPÍTULO 0

Introducción y Resumen de Resultados

En esta memoria escribimos una demostración propia de la finitud de los equilibrios en juegos de Nash no cooperativos genéricos.

En 1950 John F. Nash, Jr. publicó su tesis sobre la existencia de puntos de equilibrio en juegos no cooperativos ([**N,50a**]). Este resultado fué muy celebrado por contraponerse a la concepción que se tenía hasta el momento sobre la Teoría de Juegos dada por J. Von Neumann y O. Morgenstern. Además, sus múltiples interpretaciones económicas llevaron a su autor a recibir años después el Premio Nobel de Economía. A pesar de la notoriedad alcanzada, el propio Nash siempre consideró "menor" este resultado en comparación con sus otros trabajos sobre variedades diferenciables. Así, veremos cómo la parte intrínsicamente matemática de la prueba es sencilla y la hemos reproducido en el Capítulo 1 de esta memoria.

El éxito de Nash al demostrar su resultado consiste en establecer las hipótesis adecuadas para alcanzar la existencia de equilibrios:

i) Disponemos de n jugadores que no cooperan entre ellos y disponen de un número finito $k_i + 1$ de estrategias.
ii) Inmediatemente, olvidamos cuáles son estas estrategias y nos centramos solamente en su número, de forma que cada jugador puede elegir una u otra con distintas probabilidades, por lo que el espacio de estrategias de cada jugador se puede identificar con simplex de dimensión k_i.
iii) Junto a las estrategias, cada jugador dispone de una función de recompensa f_i que depende, no solo de sus elecciones, sino también de las de sus compañeros de juego. Las propiedades de estas funciones son las que determinarán la existencia de equilibrios.
iv) Nash supone que las funciones f_i son **multi-lineales**, y por ser estas funciones un caso ideal de funciones *quasi-lineales*, veremos en la memoria cómo esta propiedad garantiza la existencia de equilibrios.
v) A partir de aquí, independientemente de las condiciones que les otorguemos a las funciones o a las estrategias, la noción de equilibrio es adaptable a cualquier otro modelo de juego. Un equilibrio de Nash es un punto $\underline{s} = (\underline{s}_1, ..., \underline{s}_n) \in \Delta_{(k)}$ que contiene las estrategias mixtas $\underline{s}_i \in \Delta_{k_i}$ de cada jugador i, que maximiza la recompensa de cada jugador cuándo las de los demás se mantienen en su elección de estrategia.

El Teorema Fundamental de la Tesis de Nash demuestra la existencia de equilibrios para cualquier juego no cooperativo que satisfaga sus hipótesis (funciones de recompensa multi-lineales), como reproducimos en el Teorema 1.3.1.
En el Capítulo 1 de esta memoria se detalla la demostración de este Teorema, donde Nash identifica los equilibrios con los puntos fijos de una cierta aplicación entre los espacios de estrategias y aplica después un Teorema del Punto Fijo, como el clásico Teorema de Brower (Teorema A.0.10 del Apéndice A de esta memoria). Asimismo, analizaremos algunas extensiones del modelo de Nash, considerando otros tipos de funciones recompensa: las funciones multi-homogéneas y convexas (Subsección 1.1.3) y las funciones quasi-lineales para juegos generalizados (Subsección 1.1.4). Veremos como el Teorema de Existencia de Nash del caso clásico (multi-lineal) se satisface también en el caso quasi-lineal, pero no garantiza la existencia en el caso multi-homogéneo.

El Capítulo 2 está dedicado a probar el resultado principal de la memoria. En origen, el propósito inicial de este trabajo era analizar el número de equilibrios de un juego clásico en promedio, desarrollando los estudios de McLennan en [**Mc,02**]. Para ello se requería una afirmación asentada en la literatura matemática: *la finitud genérica de los equilibrios de Nash* en un juego clásico. Necesitábamos una referencia precisa y concreta de este enunciado sobre la finitud de equilibrios de Nash de un juego genérico.

Para nuestra sorpresa, nos hemos encontrado con unas dificultades inesperadas a la hora de asegurar una afirmación comunmente aceptada. Dos eran las principales corrientes de referencias: la de "Teoría de Juegos y Economía" y la corriente basada en la "cota BKK" (de Bernshtein, Koushnirenko y Khovanskii). En la vertiente de Teoría de Juegos y Economía, los trabajos de Debreu y Harshani son criticados por autores posteriores como incompletos. En la que se hace uso de la cota BKK, todas las referencias reposan en una interpretación "genérica" del *Theorem B* de Bernshtein (cf. [**Be,76**]) que no aparece demostrada en la referencia original. De hecho, necesitaríamos una prueba de la genericidad de la "Hipótesis de Bershtein" para que su famoso *Theorem B* se pueda aplicar a nuestro estudio.
Ante semejante situación, decidimos cambiar el propósito original de este Trabajo de Fin de Grado. Mejor que seguir navegando entre referencias cruzadas y discutibles era **desarrollar nuestra propia demostración original de la finitud del número de equilibrios de Nash en un juego genérico**. Con ello no hemos pretendido quitar a nadie ninguna prioridad ni re-demostrar la existencia de las "sparse mixed resultants". Simplemente hemos buscado nuestro camino para resolver la cuestión a la que atañe el trabajo.
Por eso, dedicamos nuestro Capítulo 2 al *estudio de las propiedades algebro-geométricas del conjunto de los equilibrios de un juego de Nash.*

La primera observación es que, tanto en el caso de juegos de Nash clásicos como en el de funciones multi-homogéneneas, **el conjunto de los equilibrios de Nash es un conjunto semi-algebraico**, lo que hace intervenir a la Geometría Algebraica Real. Nuestro primer objetivo es encontrar información cuantitativa sobre el conjunto de equilibrios de un juego de Nash $Eq((k), f)$. Para ello, empezamos buscando un número finito de ecuaciones e inecuaciones cuyas soluciones comunes coincidan con $Eq((k), f)$. Así, en las Secciones 2.2 y 2.3 mostramos ecuaciones que describen los equilibrios de Nash de juegos dados por funciones de recompensa multihomogéneas, y con ellas, acotamos el **número de componentes conexas** del conjunto $Eq((k), f)$ (ya que es conocido que los conjuntos semi-algebraicos tienen un número finito de ellas).
En la Proposición 2.3.1, mostramos una variedad algebraica real V tal que el conjunto ade equilibrios de Nash satisface $Eq((k), f) \subseteq \Delta_{(k)} \cap V$, y con ella obtenemos la cota de componentes conexas:

$$\beta(\Delta_{(k)} \cap V) \leq D(2D-1)^{2N-1},$$

donde las funciones de recompensa $f = (f_1, ..., f_n)$ son multi-homogéneas de grado acotado por D y $N = \sum_{i=1}^{n}(k_i + 1)$ es el número total de estrategias puras de todos los jugadores. Esta acotación, a pesar de no ser muy precisa, es necesaria porque el conjunto de los equilibrios de Nash **no es siempre un conjunto finito**.
Para buscar una acotación mejor, en la Sección 2.4 analizamos los **subjuegos de un juego**, que son las restricciones a las distintas caras del producto de símplices $\Delta_{(k)}$, y estudiamos el conjunto de **equilibrios totalmente mezclados** $Eq^*((k), f)$ en cada uno de ellos. Estos son los equilibrios que encontramos estrictamente en el interior del convexo $\Delta_{(k)}$, lo que nos conduce al estudio de los ceros tóricos ($\mathbb{T}^n = (\mathbb{R}^*)^n$) de un conjunto semi-algebraico. De esta forma, en la Sección 2.5 (Corolario 2.5.5) obtenemos la acotación

$$\beta_0(Eq^*((k), f)) \leq d(2d-1)^{2N-1},$$

donde $d = max\{n-1, 3\}$.
La razón por la cuál nos interesamos en la acotación del número de componentes conexas es por que si se tiene la "finitud genérica" buscada, acotar las componentes conexas equivaldría en general a acotar el número de equilibrios.

En las Secciones 2.6 y 2.7 pasamos a una demostración autocontenida (*"from scratch"*) de la finitud de los equilibrios de Nash en juegos genéricos. Al contrario que ocurre con los autores que investigamos en la Sección 2.8, en nuestra demostración no utilizaremos la clásica cota BKK ni el Theorem B de Bernshtein. Comenzaremos introduciendo una *variedad solución* para el caso tórico y la estudiamos en la Proposición 2.6.3 como subvariedad diferenciable, lisa y cuyo espacio tangente calculamos explícitamente. Nos interesa fundamentalmente su condición de variedad irreducible para la aplicación del Teorema de Dimensión en la Fibra (ver Teorema B.5.1 del Apéndice B). Así, observamos que bajo nuestras condiciones, la variedad de incidencia es conexa si y solamente si es irreducible (Corolario 2.6.5). Seguidamente introducimos la invarianza con respecto al producto $\mathscr{U}_{(k)}(\mathbb{C})$ de grupos de matrices unitarias $\mathcal{U}_{k_i+1}(\mathbb{C})$. Probamos que, dada una lista de politopos $Q = (Q_1, ..., Q_r)$ tales que la clase de funciones multi-homogéneas que

determinan $mH^{(k)}(Q)$ (las que tienen su soporte en los distintos politopos Q_i) es invariante por la acción de $\mathscr{U}_{(k)}(\mathbb{C})$, entonces la variedad de incidencia será conexa e irreducible (Teorema 2.6.6 del Capítulo 2).

Debe observarse aquí que nosotros utilizamos invarianza unitaria, y que ésta no se satisface siempre por familias de polinommios "sparse". Así que nuestro argumento no es una alternativa para probar la existencia de las "sparse mixed resultants", las cuales, como veremos en la Sección 2.8, consisten una parte importante en las otras referencias sobre la finitud genérica que encontramos basadas en la cota BKK. En cambio sí es un argumento válido para el estudio de los equilibrios de Nash, ya que los politopos que obtendremos dan lugar a clases de funciones invariantes por la acción del producto de grupos unitarios, de forma que nos basta para el objetivo de esta memoria.

Esto viene reflejado en la Proposición 2.7.3, donde podemos establecer la dimensión de la variedad tórica $V_{\mathbb{T}}(f)$ cuando $f = (f_1, ..., f_{N-n})$ es una lista de ecuaciones genéricamente elegida en $mH^{(k)}(Q)$ y los politopos son invariantes por $\mathscr{U}_{(k)}(\mathbb{C})$. Una vez establecida esta dimensión, la intersección de $V_{\mathbb{T}}(f)$ con las ecuaciones de las clausuras Zariski de los símplices, tendrá genericamente dimensión cero o será vacío. Esto es lo que se usa finalmente para probar el Teorema 2.7.4 sobre la **finitud de los equilibrios totalmente mezclados de un juego genérico** que reproducimos a continuación:

Teorema Principal (2.7.4). *El conjunto de los equilibrios totalmente mezclados $Eq^*((k), f)$ de un juego de Nash (i.e. las funciones de recompensa son multi-lineales) es genéricamente un conjunto finito.*
Es decir, sea (k) un multi-índice y denotemos por $m\mathscr{L}^{\mathbb{R}}_{(k)}$ el espacio vectorial real de dimensión finita dado como las listas $f = (f_1, \ldots, f_n)$ de funciones de recompensa del juego de n jugadores indicado por (k), donde cada f_i es multi-lineal (juego de Nash). Entonces, existe un abierto Zariski real no vacío $U \subseteq m\mathscr{L}^{\mathbb{R}}_{(k)}$ tal que para cada $f \in U$ el conjunto de equilibrios totalmente mezclados $Eq^*((k), f)$ del juego de Nash $((k), f)$ es un conjunto finito (aunque puede ser eventualemente vacío).

Una vez probada la finitud genérica de los equilibrios totalmente mezclados, y utilizando que todo equilibrio de un juego es equilibrio totalmente mezclado de uno de sus subjuegos (Proposición 2.5.3), es sencillo demostrar el Teorema Final de esta memoria: El Terema 2.7.5.

Teorema Principal (2.7.5). *[**Finitud de los equilibrios de Nash en juegos genéricos**]*
Sea $(k) = (k_1, ..., k_n)$ un multi-índice que representa la lista de cardinales de estrategias puras de un juego de n jugadores. Sea $m\mathscr{L}^{\mathbb{R}}_{(k)}$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita formado por las listas $f = (f_1, ..., f_n)$ de funciones multi-lineales que se adaptan al modelo de juego descrito por el multi-índice (k). Entonces, existe un abierto Zariski no vacío $U \subseteq m\mathscr{L}^{\mathbb{R}}_{(k)}$ tal que para cada $f \in U$ el número de equilibrios de Nash del juego $((k), f)$ es finito, es decir,

$$\forall f \in U, \quad \sharp\left(Eq((k), f)\right) < +\infty.$$

Más aún, genéricamente en U, se satisface

$$\sharp\left(Eq((k), f)\right) = \beta_0\left(Eq((k), f)\right) \leq D(2D-1)^{3N-1},$$

donde $N = \sum_{i=1}^{n}(k_i + 1)$ es el total de estrategias puras de los jugadores y $D = max\{n, 2\}$.

Part 1

Memoria

CAPÍTULO 1

Equilibrios de Nash: Existencia

Índice

1.1.	**Juegos de n personas: El modelo**	**1**
1.1.1.	Juegos de n personas	1
1.1.2.	La hipótesis de Nash: multi-linearidad de las recompensas	2
1.1.3.	Juegos de Nash Multi-homogéneos y Convexos	3
1.1.4.	Juegos de Nash Generalizados: quasi-convexos y quasi-cóncavos	4
1.2.	**Equilibrios de Nash**	**5**
1.2.1.	Equilibrios de Nash: caso multi-homogéneo y convexo	6
1.2.2.	Equilibrios de Nash: Juegos de n personas generalizado	7
1.3.	**Teoremas de existencia de Equilibrios de Nash**	**8**
1.3.1.	Teorema de Existencia de Equilibrios de Nash en el caso clásico	8
1.3.2.	Teorema de Existencia de equilibrios de Nash en el caso generalizado	10

En este capítulo describiremos los resultados originales de la famosa Tesis Doctoral de John F. Nash, de 1950 ([**N,50a**], [**N,50b**] y [**N,51**]). Este trabajo supuso un cambio a la tradición de Teoría de Juegos, sustentada por la cooperación entre John V. Neumann y O Morgenstern ([**NM,44**]) y las implicaciones de sus resultados en teoría económica le valieron a Nash el Premio Nobel de Economía en 1994.
Nuestro propósito será presentar el modelo de Nash y demostrar el resultado principal de su tesis: la existencia de equilibrios (de Nash) en juegos de n personas no cooperativos cuyas funciones de recompensa o "payoff functions" sean funciones multi-lineales (cf. Teorema 1.3.1).

No daremos literalmente la prueba de Nash sino que discutiremos diversas generalizaciones del modelo de Nash con tipos de funciones de recompensa más amplias (como pueden ser funciones multi-homogéneas, funciones convexas o funciones quasi-cóncavas). El elemento técnico fundamental, además de las propiedades de convexidad, es un Teorema del Punto Fijo. Hemos seguido la propuesta original de Nash usando Browner, otras versiones como Kakutani, Borsuk-Ulam, etc. serían también adaptables. En el capítulo hemos incluido un resultado que muestra cómo la existencia de equilibrios de Nash es cierta también para juegos generalizados (donde las funciones de recompensa son a la vez quasi-convexas y quasi-cóncavas): el Teorema 1.3.3.

1.1. Juegos de n personas: El modelo

1.1.1. Juegos de n personas. El modelo de John F. Nash parte de un ejemplo discreto y sencillo de juego no cooperativo con un número finito de jugadores (agentes), cada uno de los cuales dispone de un número finito de estrategias a aplicar en el juego. Observaremos después que el modelo de Nash "olvida" cuáles son estas estrategias, pero respeta el funcionamiento del juego y las intenciones de los jugadores: bastará con entender cómo se distribuyen las probabilidades de que cada jugador aplique una u otra estrategia.

DEFINICIÓN 1 (**Juego de n Personas**). *Un Juego de n personas se define mediante los siguientes elementos:*

i) Un número finito de JUGADORES *o* AGENTES*, cada uno de ellos etiquetado por un número natural. Supondremos que los jugadores son los elementos del conjunto $\{1, ..., n\}$ y diremos que es un juego de n personas.*
ii) Cada jugador $i \in \{1, ..., n\}$ posee un número finito de estrategias que puede utilizar en el juego. El conjunto de estas estrategias del jugador $i-$ésimo se denotará por Π_i y el número de tales

estrategias lo denotaremos por $k_i + 1$*, es decir,*

$$k_i + 1 := \sharp(\Pi_i)\ ,\ i \in \{1, ..., n\}.$$

A las estrategias del conjunto Π_i *las denominaremos* ESTRATEGIAS PURAS *del jugador i-ésimo.*

iii) *Cada jugador tendrá asociada una* FUNCIÓN DE RECOMPENSA *(payoff function) que dependerá no solo de las estrategias que el jugador elija, si no también de las estrategias elegidas por el resto de jugadores. Es decir, para cada jugador* $i \in \{1, .., n\}$ *existe una función*

$$p_i : \prod_{r=1}^{n} \Pi_r \longrightarrow \mathbb{R}$$

que denominaremos función de recompensa del jugador i-ésimo.

iv) *Junto a las estrategas puras, cada jugador puede considerar las probabilidades de elegir una u otra de sus estrategias puras. A estas secuenicas de probabilidades se las denomina* ESTRATEGIAS MIXTAS*. Así, el jugador* $i-$*ésimo puede asignar a cada una de sus* $k_i + 1$ *estrategias puras un vector de probablidades*

$$\underline{s}_i := (s_{i,0}, s_{i,1}, \ldots, s_{i,k_i}) \in [0,1]^{k_i+1},\ \sum_{j=0}^{k_i} s_{i,j} = 1,$$

donde $s_{i,j}$ *es la probabilidad de que el jugador* i *use la* $j-$*ésima estrategia pura entre las disponibles en* Π_i*. Con las notaciones del Apéndice A, Definición 16, las estrategias mixtas* $\underline{s}_i$ *del jugador* $i-$*ésimo, están identificadas con los puntos en el símplex* $\Delta_{k_i} \subseteq \mathbb{R}^{k_i+1}$ *de dimensión* k_i*.*

v) *Una* ESTRATEGIA COMBINADA *de todos los jugadores es una lista* $\underline{s} = (\underline{s}_1, \underline{s}_2, \ldots, \underline{s}_n) \in \prod_{i=1}^{n} \Delta_{k_i}$*, donde cada* $\underline{s}_i \in \Delta_{k_i}$ *es una estrategia mixta del jugador* i*.*

Para simplificar la notación, usaremos un multi-índice $(k) := (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ para denotar los cardinales de las estrategias puras de cada jugador. Nótese que en (k) la coordenada k_i indica que el jugador i tiene $k_i + 1$ estrategias puras. Usaremos la notación siguiente para denotar las listas de estrategias mixtas combinadas asociadas al multi-índice (k):

$$\Delta_{(k)} := \prod_{i=1}^{n} \Delta_{k_i}.$$

1.1.2. La hipótesis de Nash: multi-linearidad de las recompensas. En su Tesis y en sus trabajos [N,50b], [N,51], J. Nash introduce una hipótesis fundamental relativa a las funciones de correspondencia de las estrategias mixtas y combinadas de los jugadores: *asume su multi-linearidad*. De hecho, Nash usa la expresión *"linealmente"*, para expresar la extensión de las funciones de recompensa $p_i : \prod_{i=1}^{n} \Pi_i \longrightarrow \mathbb{R}$ al conjunto de todas las estrategias mixtas en $\Delta_{(k)}$.

DEFINICIÓN 2 (**Función Multi-lineal**). *Dado un cuerpo* K *y dada una lista* $V_1, \ldots, V_n$ *de* n *espacios vectoriales sobre* K *una* función $n-$multi-lineal *sobre* $V_1 \times \cdots \times V_n$ *es una función*

$$f := V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \longrightarrow K, \tag{1.1.1}$$

tal que f *es lineal sobre cada espacio vectorial* V_i *separadamente. Es decir,* f *satisface la siguiente propiedad:*
Para cada i*,* $1 \leq i \leq n$*, para cada lista de vectores* $v_j \in V_j$*, con* $j \neq i$*, la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} f(v_1, \ldots, v_{i-1}, -, v_{i+1}, \ldots, v_n) : & V_i & \longrightarrow & K \\ & v & \longmapsto & f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_n), \end{array}$$

es una aplicación lineal, es decir, para cada $\lambda, \mu \in K$ *y cada* $u, w \in V_i$*, se satisface:*

$$f(v_1, \ldots, v_{i-1}, \lambda u + \mu w, v_{i+1}, \ldots, v_n) = \lambda f(v_1, \ldots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \ldots, v_n) + \mu f(v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_n).$$

DEFINICIÓN 3 (**Juego de Nash**). *Un juego de Nash de* n *jugadores es un par* $((k), f)$ *donde:*

i) *La lista* $(k) = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ *es una lista de enteros positivos de tal modo que para cada* i*, el número de estrategias puras del jugador* i *es* $k_i + 1$*,*

ii) *La lista* $f := (f_1, \ldots, f_n)$ *es una lista de funciones* $n-$*multi-lineales*

$$f_i : \prod_{i=1}^{n} \mathbb{R}^{k_i+1} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

A las restricciones de las funciones $(f_1, \ldots, f_n)$ a las estrategias mixtas:

$$p_i := f_i \mid_{\Delta_{(k)}} : \Delta_{(k)} \subseteq \prod_{i=1}^{n} \mathbb{R}^{k_i+1} \longrightarrow \mathbb{R},$$

se las denomina funciones de recompensa (payoff functions).

NOTACIÓN 1.1.1. Para evitar la duplicidad de notaciones usaremos la misma notación f_i para las aplicaciones multi-lineales y para sus restricciones a $\Delta_{(k)}$.

OBSERVACIÓN 1.1.2. Cabe destacar que se podrían haber elegido otros tipos de extensiones de las funciones de recompensa p_i distintas (no lineales) que, a su vez, generarían otros modelos de juego, pero en este trabajo nos centraremos en el modelo más simple de J. Nash.

1.1.3. Juegos de Nash Multi-homogéneos y Convexos. Podemos suavizar las condiciones del modelo de J. Nash, suponiendo que las funciones de recompensa pertenecen a una clase de funciones más amplia que las multi-lineales. Por ejemplo, las funciones multi-homogéneas introducidas como en la Sección B.1 del Apéndice B. Seguiremos las notaciones introducidas en esa sección.

DEFINICIÓN 4 (**Juego de n personas multi-homogéneo y convexo**). *Sea $n \in \mathbb{N}$ un entero positivo, un juego de n personas multi-homogéneo y convexo es un par $((k), f)$, donde:*

i) $(k) = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ es un multi-índice dado por números naturales que representan conjuntos de estrategias puras

$$\Pi_i := \{0, 1, \ldots, k_i\},$$

para cada jugador i.

ii) Adicionalmente,el multi-índice (k) representa grupos de variables sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales $\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n$ dadas mediante:

$$\underline{X}_i := \{X_{i,0}, \ldots, X_{i,k_i}\}.$$

Asimismo, (k) determina el conjunto convexo y compacto de estrategias mixtas:

$$\Delta_{(k)} := \prod_{i=1}^{n} \Delta_{k_i} \subseteq \mathbb{R}^N,$$

donde $N := \sum_{i=1}^{n}(k_i + 1)$.

iii) $f := (f_1, \ldots, f_n)$ es una lista de polinomios multi-homogéneos con coeficientes reales en los grupos de variables $\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n$. Si fijamos el multi-grado del polinomio f_i como (d_i), definiendo $((d)) := ((d_1), \ldots, (d_n))$, podemos reescribir la lista f como [1]

$$f := (f_1, \ldots, f_n) \in m\mathscr{H}^{\mathbb{R}}_{((d))}(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n).$$

iv) Para cada $\underline{s} := (\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_n) \in \Delta_{(k)}$, los polinomios homogéneos siguientes son convexos, es decir, los polinomios

$$f^{(i)}_{\underline{s}} := f_i(\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_{i-1}, X_{i,0}, \ldots, X_{i,k_i}, \underline{s}_{i+1}, \underline{s}_n) \in \mathbb{R}[X_{i,0}, \ldots, X_{i,k_i}], \tag{1.1.2}$$

definen funciones convexas sobre los respectivos simplex, es decir, la función siguiente es convexa:

$$f^{(i)}_{\underline{s}} : \Delta_{k_i} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Las funciones definidas por los polinomios multi-homogéneos, restringidas a los conjuntos de estrategias mixtas:

$$f_i : \Delta_{(k)} = \prod_{i=1}^{n} \Delta_{k_i} \longrightarrow \mathbb{R},$$

se denominarán las funciones de recompensa del jugador $i-$ésimo.

Nótese que un Juego de Nash usual es simplemente un caso particular cuando la lista de multi-grados $((d))$ satisface:

$$((d)) = ((1), \ldots, (1)),$$

o, equivalentemente, cuando las funciones de recompensa f_i son todas multi-lineales.

[1] La notación $m\mathscr{H}^{\mathbb{R}}_{((d))}(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n)$ y la terminología utilizada al respecto de los polinomios homogéneos y multi-homogéneos se detalla en la Sección B.1 del Apéndice B

OBSERVACIÓN 1.1.3. El Teorema A.0.3 del Apéndice A, muestra condiciones necesarias y suficientes para que un Juego de Nash $((k), f)$ sea convexo y multi-lineal. Concretamente, supongamos que $f = (f_1, \ldots, f_n)$ es la lista de polinomios multi-homogéneos y que $(k) = (k_1, \ldots, k_n)$ es el multi-índice que determina los grupos de variables $\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n$, donde

$$\underline{X}_i := \{X_{i,j} \ : \ 0 \leq j \leq k_i\}.$$

Tenemos $f_i \in \mathbb{R}[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n]$ es un polinomio homogéneo. Para cada $\underline{s} \in \Delta_{(k)}$, consideremos los polinomios $f_{\underline{s}}^{(i)} \in \mathbb{R}[X_{i,0}, \ldots, X_{i,k_i}]$. Entonces, el juego de n personas es un juego multi-lineal convexo si y solamente si se verifica cualquiera de las propiedades equivalentes siguientes:

i) Para cada i,$1 \leq i \leq n$ y para cada $\underline{s} \in \Delta_{(k)}$ los polinomios $f_{\underline{s}}^{(i)}$ verifican:

$$\forall x, y \in \Delta_{k_i}, \ \ f_{\underline{s}}^{(i)}(y) \geq f_{\underline{s}}^{(i)}(x) + \langle \nabla_x f_{\underline{s}}^{(i)}, (y - x) \rangle,$$

donde $\nabla_x f_{\underline{s}}^{(i)}$ es el gradiente de $f_{\underline{s}}^{(i)}$ con respecto al grupo de variables $\{X_{i,0}, \ldots, X_{i,k_i}\}$.

ii) Para cada i,$1 \leq i \leq n$ y para cada $\underline{s} \in \Delta_{(k)}$ denotemos por $H(f_{\underline{s}}^{(i)})(x)$ la matrix Hessiana de $f_{\underline{s}}^{(i)}$ con respecto a las variables en $\underline{X}_i$ en un punto x:

$$H(f_{\underline{s}}^{(i)})(x) := \left(\frac{\partial^2 f_{\underline{s}}^{(i)}}{\partial X_i \partial X_j}(x) \right)_{0 \leq i,j \leq k_i}.$$

Para cada $x \in \Delta_{k_i}$ La forma cuadrática definida por el Hessiano:

$$\begin{array}{rccc} q_{\underline{s}}^{(i)}(x): & \Delta_{k_i} \subseteq \mathbb{R}^{k_i+1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & y \cdot H(f_{\underline{s}}^{(i)})(x) \cdot y^t, \end{array}$$

es semi-definida positiva ($q_{\underline{s}}^{(i)}(x)(y) \geq 0$, $\forall y \in \Delta_{k_i}$)

De todos modos, la verificación de estas propiedades no es una tarea sencilla. En el reciente trabajo de A.A. Ahmadi, A. Olshevsky, P. A. Parrilo y J.N. Tsitsiklis[2] se prueba que decidir si un polinomio de grado cuatro o mayor es convexo es un problema **NP**-hard.

1.1.4. Juegos de Nash Generalizados: quasi-convexos y quasi-cóncavos.

DEFINICIÓN 5 (**Funciones quasi-convexas y quasi-cóncavas**). *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo.*

i) Una función $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice quasi-convexa si dados cualesquiera $v_0, \ldots, v_m \in K$ y dados $t_0, \ldots, t_m \in [0, 1]$ tales que $\sum_{j=0}^m t_j = 1$, se tiene

$$f(\sum_{j=0}^m t_j v_j) \leq \max\{f(v_0), \ldots, f(v_m)\}.$$

ii) Una función $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice quasi-cóncava si dados cualesquiera $v_0, \ldots, v_m \in K$ y dados $t_0, \ldots, t_m \in [0, 1]$ tales que $\sum_{j=0}^m t_j = 1$, se tiene

$$f(\sum_{j=0}^m t_j v_j) \geq \min\{f(v_0), \ldots, f(v_m)\}.$$

iii) Una función $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice quasi-lineal si es quasi-cóncava y cuasi-convexa a la vez.

OBSERVACIÓN 1.1.4. Si $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ es quasi-lineal, y si $v_0, \ldots, v_m \in K$ y $t_0, \ldots, t_m \in [0, 1]$ satisfacen las hipótesis de la definición precedente, entonces $f(\sum_{j=0}^m t_j v_j)$ están en la envolvente convexa determinada for los valores de $f(v_0), \ldots, f(v_m)$, es decir,

$$f(\sum_{j=0}^m t_j v_j) \in CH(\{f(v_0), \ldots, f(v_n)\}) = [a, b],$$

donde

$$a := \min\{f(v_0), \ldots, f(v_m)\}, \ \ b := \max\{f(v_0), \ldots, f(v_m)\}.$$

DEFINICIÓN 6 (**Juego de n personas generalizado**). *Sea $n \in \mathbb{N}$ un entero positivo, un juego de n personas generalizado es un par $((k), f)$, donde:*

[2] A.A. Ahmadi, A. Olshevsky, P. A. Parrilo, J.N. Tsitsiklis, *NP-hardness of Deciding Convexity of Quartic Polynomials and Related Problems.* Math. Program. **137** (2013), 453–476.

i) $(k) = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ *es un multi-índice dado por números naturales que representan conjuntos de estrategias puras*

$$\Pi_i := \{0, 1, \ldots, k_i\},$$

para cada jugador i.

ii) Adicionalmente, el multi-índice (k) *representa grupos de variables sobre el cuerpo* $\mathbb{R}$ *de los números reales* $\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n$ *dadas mediante:*

$$\underline{X}_i := \{X_{i,0}, \ldots, X_{i,k_i}\}.$$

Asimismo, (k) *determina el conjunto convexo y compacto de estrategias mixtas:*

$$\Delta_{(k)} := \prod_{i=1}^{n} \Delta_{k_i} \subseteq \mathbb{R}^N,$$

donde $N := \sum_{i=1}^{n}(k_i + 1)$.

iii) $f := (f_1, \ldots, f_n)$ *es una lista de funciones continuas* $f_i : \Delta_{(k)} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tales que para cada para cada* $\underline{s} := (\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_n) \in \Delta_{(k)}$, *las funciones siguientes son quasi-convexas:*

$$\begin{array}{rccc} f_{\underline{s}}^{(i)} : & \Delta_{k_i} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & f_{\underline{s}}^{(i)}(u) := f_i(\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_{i-1}, u, \underline{s}_{i+1}, \underline{s}_n), \end{array} \tag{1.1.3}$$

Las funciones definidas por los polinomios multi-homogéneos, restringidas a los conjuntos de estrategias mixtas:

$$f_i : \Delta_{(k)} = \prod_{i=1}^{n} \Delta_{k_i} \longrightarrow \mathbb{R},$$

se denominarán las funciones de recompensa del jugador $i-$*ésimo.*

Definición 7 (**Juego de Nash generalizado**). *Sea* $n \in \mathbb{N}$ *un entero positivo, un juego de Nash generalizado es un juego de n personas generalizado* $((k), f)$, *donde la lista* $f = (f_1, \ldots, f_n)$ *de funciones de recompensa son quasi-lineales, es decir, quasi-convexas y quasi-cóncavas.*

1.2. Equilibrios de Nash

En su tesis, Nash define el concepto de equilibrio como una jugada (estrategia combinada), en la que cada agente ha realizado su mejor estrategia, habiendo el resto de ellos fijado ya una de las suyas.

Definición 8 (**Equilibrio de Nash**). *Sea* $((k), f)$ *un juego de n personas generalizado con* $(k) = (k_1, \ldots, k_n)$ *y funciones de recompensa* $f = (f_1, ..., f_n)$. *Un punto* $\underline{s} = (\underline{s}_1, ..., \underline{s}_n) \in \Delta_{(k)}$ *se denominará Equilibrio de Nash del juego* $((k), f)$ *si satisface la siguiente propiedad:*
Para cada $i \in \{1, .., n\}$ *se tiene:*

$$f_i(\underline{s}) = \max\{f_i(\underline{s}_1, ..., \underline{s}_{i-1}, r, \underline{s}_{i+1}, ..., \underline{s}_n) \ : \ r \in \Delta_{k_i}\}. \tag{1.2.1}$$

Al conjunto de los Equilibrios de Nash del juego $((k), f)$ *lo denotaremos mediante:* $Eq((k), f)$.

Observación 1.2.1. La interpretación del equilibrio de Nash $\underline{s} \in \Delta_{(k)}$ con respecto a la lista f de funciones de recompensa sería la siguiente: El jugador i se preocupa solamente de su función de recompensa f_i. Por lo tanto, todos los jugadores buscan independientemente y sin tener en cuenta la función de recompensa de los otros, una propia estrategia mixta $\underline{s}_i \in \Delta_{k_i}$, de tal modo que una vez juntadas todas las elecciones en una única estrategia combinada $\underline{s} = (\underline{s}_1, ..., \underline{s}_n)$, la elección $\underline{s}_i$, del jugador i, optimice su recompensa f_i bajo la hipótesis de que los demás jugadores han fijado sus propias estrategias mixtas

$$\underline{s}_1, ..., \underline{s}_{i-1}, \underline{s}_{i+1}, ..., \underline{s}_n.$$

Finalmente, obtenemos la identidad (1.2.1) usada en la Definición precedente.

1.2.1. Equilibrios de Nash: caso multi-homogéneo y convexo. La hipótesis de multi-linealidad de J. Nash simplificaría los argumentos, como veremos, a la hora de determinar los equilibrios de Nash.

OBSERVACIÓN 1.2.2. Con las notaciones de la Definición 4 sean (k) un multi-índice y sean $\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n$ los grupos de variables asociados a este multi-índice. Sea (d) un multi-grado y $f \in mH^{\mathbb{R}}_{(d)}(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n)$ un polinomio multi-homogéneo de multi-grado (d) con coeficientes en $\mathbb{R}$. Sea $\underline{s}$ una estrategia combinada. Observemos que $f^{(i)}_{\underline{s}}$ (según la identidad (1.1.2)) es o bien el polinomio nulo o bien un polinomio homogéneo de grado d_i (es decir, $f^{(i)}_{\underline{s}} \in H_{d_i}(X_{i,0}, ..., X_{i,k_i})$). En particular, si f es multi-homogéneo de multigrado (1), es decir, multi-lineal, cada polinomio $f^{(i)}_{\underline{s}}$ es una aplicación lineal.
Esto es consecuencia directa de la definición de polinomio multi-homogéneo .

PROPOSICIÓN 1.2.3. *Con las notaciones de la observación precedente se tiene la siguiente identidad:*

$$f^{(i)}_{\underline{s}} = \frac{1}{d_i} \sum_{j=0}^{k_i} X_{i,j} \cdot \frac{\partial f}{\partial X_{i,j}}(\underline{s}_1, ..., \underline{s}_{i-1}, X_{i,0}, ..., X_{i,k_i}, \underline{s}_{i+1}, ..., \underline{s}_n). \tag{1.2.2}$$

En el caso particular de $(d) = (1, ..., 1)$ se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial X_{i,j}} = f(X_{1,0}, ..., X_{1,k_1}, ..., X_{i-1,0}, ..., X_{i-1,k_{i-1}}, e_{i,j}, X_{i+1,0}, ..., X_{i+1,k_{i+1}}, ..., (X_{n,0}, ..., X_{n,k_n}),$$

donde $e_{i,j} = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ es el j-ésimo vector de la base ortonormal canónica de $\mathbb{R}^{k_i+1}$. Entonces, si f es multi-lineal, para cada $\underline{s} \in \Delta_{(k)}$ se tiene:

$$f^{(i)}_{\underline{s}} = \sum_{j=0}^{k_i} X_{i,j} f(\underline{s}_1, ..., \underline{s}_{i-1}, e_{i,j}, \underline{s}_{i+1}, ..., \underline{s}_n), \tag{1.2.3}$$

donde $f(\underline{s}_1, ..., \underline{s}_{i-1}, e_{i,j}, \underline{s}_{i+1}, ..., \underline{s}_n) \in \mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN. Es evidente utilizando la Identidad de Euler (ii) y las otras propiedades de los polinomios homogéneos y multi-homogéneos descritas en la Sección B.1 del Apéndice B. □

PROPOSICIÓN 1.2.4. *Con las notaciones de las proposiciones precedentes, denotemos también por $f^{(i)}_{\underline{s}}$ las funciones polinomiales*

$$\begin{array}{rccc} f^{(i)}_{\underline{s}} : & \Delta_{k_i} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & r & \longmapsto & f_i(\underline{s}_1, ..., \underline{s}_{i-1}, r, \underline{s}_{i+1}, ..., \underline{s}_n). \end{array} \tag{1.2.4}$$

Entonces, para cada $r \in \Delta_{k_i}$, $d_i \cdot f^{(i)}_{\underline{s}}(r)$ se encuentra en el intervalo $I_{\underline{s},r} \subseteq \mathbb{R}$ dado como la envolvente convexa de las coordenadas del gradiente. Es decir

$$d_i f^{(i)}_{\underline{s}}(r) \in I_{\underline{s},r} = CH\left(\left\{\frac{\partial f}{\partial X_{i,j}}(\underline{s}_1, .., \underline{s}_{i-1}, r, \underline{s}_{i+1}, ..., \underline{s}_n) : 0 \leq j \leq k_i\right\}\right). \tag{1.2.5}$$

En particular, si f es multi-lineal el intervalo $I_{\underline{s},r}$ no depende de r, sino solamente de $\underline{s}$:

$$I_{\underline{s},r} = I_{\underline{s}} = CH\left(\left\{f(\underline{s}_1, .., \underline{s}_{i-1}, e_{i,j}, \underline{s}_{i+1}, ..., \underline{s}_n) : 0 \leq j \leq k_i\right\}\right). \tag{1.2.6}$$

DEMOSTRACIÓN. Utilizando la identidad de Euler (ii) tenemos que

$$d_i \cdot f^{(i)}_{\underline{s}}(r) = \sum_{j=1}^{k_i} X_{i,j} \cdot \frac{\partial f}{\partial X_{i,j}}(\underline{s}_1, .., \underline{s}_{i-1}, r, \underline{s}_{i+1}, ..., \underline{s}_n).$$

y con la definición de envolvente convexa (cf. Proposición A.0.1 del Apéndice A) vemos que se cumple la proposición. El caso multi-lineal es obvio por lo visto anteriormente. □

La Proposición 1.2.4 muestra claramente la posición ventajosa que consigue Nash con su hipótesis de multi-linealidad.

PROPOSICIÓN 1.2.5. *Sea $((k), f)$ un Juego de n personas multi-homogéneo y convexo. Entonces, son equivalentes:*

i) El punto $\underline{s}$ es un equilibrio de Nash del juego $((k), f)$.

ii) Para cada $i \in \{1, ..., n\}$

$$f_i(\underline{s}) = f_{\underline{s}}^{(i)}(\underline{s}_i) = \max\{f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,0}), ..., f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,k_i})\}$$
$$= \max\{f_i(\underline{s}_1, ..., \underline{s}_{i-1}, e_{i,j}, \underline{s}_{i+1}, ..., \underline{s}_n) : 0 \leq j \leq k_i\}.$$

En particular, el resultado es cierto si $((k), f)$ *es un juego de Nash clásico conforme a la Definición 3.*

Demostración. Para probar esta equivalencia, basta con demostrar que con la hipótesis de convexidad de los polinomios multi-homogéneos $f_1, \ldots, f_n$, se tiene:

$$\max\{f_{\underline{s}}^{(i)}(r) \ : \ r \in \Delta_{k_i}\} = \max\{f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,0}), ..., f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,k_i})\}.$$

El resultado se sigue de una prueba que no es otra cosa que una variante de la prueba clásica del principio del máximo de las funciones convexas (ver Corolario A.0.8 del Apéndice A). La desigualdad siguiente es obvia:

$$\max\{f_{\underline{s}}^{(i)}(r) \ : \ r \in \Delta_{k_i}\} \geq \max\{f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,0}), ..., f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,k_i})\}.$$

Por otro lado, como Δ_{k_i} es la envolvente convexa de $\{e_{i,0}, \ldots, e_{i,k_i}\}$, entonces, el conjunto de nivel siguiente también es convexo para cualquier $a \in \mathbb{R}$ (y por tanto, un intervalo en la recta real):

$$I_a := \{f_{\underline{s}}^{(i)}(x) \in \mathbb{R} : \ x \in \Delta_{k_i} \ , \ f_{\underline{s}}^{(i)}(x) \leq a\} \subseteq (-\infty, a] \subseteq \mathbb{R}.$$

Si elegimos $a := \max\{f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,0}), ..., f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,k_i})\}$, observamos que para cada $r \in \Delta_{k_i}$, existen $t_0, \ldots, t_n \in [0, 1]$ tales que

$$\sum_{j=0}^{k_i} t_j = 1, \ \ r = \sum_{j=0}^{k_i} t_j e_{i,j}.$$

Por tanto, como $f_{\underline{s}}^{(i)}$ es convexa por hipótesis, se tiene:

$$f_{\underline{s}}^{(i)}(r) \leq \sum_{j=0}^{k_i} t_j f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,j}).$$

Como $f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,j}) \in (-\infty, a]$ para cada j y $(-\infty, a]$ es convexo, entonces,

$$\forall r \in \Delta_{k_i}, \ \ f_{\underline{s}}^{(i)}(r) \in (-\infty, a].$$

En otros términos: $f_{\underline{s}}^{(i)}(\Delta_{k_i}) \subseteq (-\infty, a]$, para $a := \max\{f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,0}), ..., f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,k_i})\}$.
Con lo que hemos probado la otra desigualdad:

$$\max\{f_{\underline{s}}^{(i)}(r) \ : \ r \in \Delta_{k_i}\} \leq \max\{f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,0}), ..., f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,k_i})\},$$

y la Proposición queda demostrada. □

1.2.2. Equilibrios de Nash: Juegos de n personas generalizado. De modo análogo a lo descrito en la subsección precedente, podemos demostrar la siguiente proposición en el caso de juegos de n personas generalizados con funciones de recompensa que definen funciones quasi-convexas.

Proposición 1.2.6. *Sea* $((k), f)$ *un Juego de n personas generalizado (conforme a la Definición 6). Entonces, son equivalentes:*

i) El punto $\underline{s}$ *es un equilibrio de Nash del juego* $((k), f)$.
ii) Para cada $i \in \{1, ..., n\}$

$$f_i(\underline{s}) = f_{\underline{s}}^{(i)}(\underline{s}_i) = \max\{f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,0}), ..., f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,k_i})\}$$
$$= \max\{f_i(\underline{s}_1, ..., \underline{s}_{i-1}, e_{i,j}, \underline{s}_{i+1}, ..., \underline{s}_n) : 0 \leq j \leq k_i\}.$$

Demostración. La prueba sigue exactamente los mismos pasos que la Proposición 1.2.5 precedente. Es claro que si $\underline{s} = (\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_n) \in \Delta_{(k)}$, entonces

$$\max\{f_{\underline{s}}^{(i)}(r) \ : \ r \in \Delta_{k_i}\} \geq \max\{f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,0}), ..., f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,k_i})\}.$$

Pero la hipótesis de quasi-convexidad sobre las funciones de recompensa también nos da que:

$$\max\{f_{\underline{s}}^{(i)}(r) \ : \ r \in \Delta_{k_i}\} \leq \max\{f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,0}), ..., f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,k_i})\}.$$

Por tanto, $\underline{s}$ es un equlibrio de Nash de $((k), f)$ si y solamente si:

$$f_i(\underline{s}) = f_{\underline{s}}^{(i)}(\underline{s}_i) = \max\{f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,0}), ..., f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,k_i})\},$$

y el enunciado se sigue. □

1.3. Teoremas de existencia de Equilibrios de Nash

En esta sección demostraremos el resultado fundamental que sustenta la Teoría de Nash: la existencia de equilibrios. Seguiremos el esquema de prueba original de Nash a través del Teorema del Punto Fijo de Brouwer (ver Teorema A.0.10 del Apéndice A).
Comencemos por definir la FUNCIÓN DE NASH válida tanto para el caso multi-homogéneo y convexo como para el caso de juegos generalizados. Se define en los términos siguientes:
Continuamos con las notaciones usadas o introducidas a los largo del Capítulo. Sea $((k), f)$ un juego de n personas generalizado (como en la Definición 6). Sea $Eq((k), f) \subseteq \Delta_{(k)}$ el conjunto de los equilibrios de Nash de $((k), f)$. Supongamos $(k) = (k_1, \ldots, k_n)$ y $f = (f_1, ..., f_n)$. Consideremos los grupos de variables determinados por (k) $\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n$ dadas mediante:

$$\underline{X}_i := \{X_{i,j} \ : \ 0 \leq j \leq k_i\}.$$

Dado $\underline{s} = (\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_n) \in \Delta_{(k)}$ denotemos por $f^{(i)}_{\underline{s}} : \Delta_{k_i} \longrightarrow \mathbb{R}$ las funciones quasi-convexas definidas en la Identidad 1.1.3 de la Definición 6. Definamos las funciones siguientes:

$$\begin{array}{rccc} \psi_{i,j}: & \Delta_{(k)} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \underline{s} & \longmapsto & \max\{0, f^{(i)}_{\underline{s}}(e_{i,j}) - f_i(\underline{s})\}. \end{array} \tag{1.3.1}$$

Podemos definir la FUNCIÓN DE NASH:

$$\begin{array}{rccc} T: & \Delta_{(k)} & \longrightarrow & \Delta_{(k)} \\ & \underline{s} = (\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_n) & \longmapsto & (\varphi_1(\underline{s}), \ldots, \varphi_n(\underline{s})), \end{array} \tag{1.3.2}$$

donde, para cada i, $1 \leq i \leq n$, se tiene:

$$\varphi_i(\underline{s}) := \frac{1}{1 + \sum_{j=0}^{k_i} \psi_{i,j}(\underline{s})} \left(\underline{s}_i + \sum_{j=0}^{k_i} \psi_{i,j}(\underline{s}) e_{i,j} \right). \tag{1.3.3}$$

1.3.1. Teorema de Existencia de Equilibrios de Nash en el caso clásico.

TEOREMA 1.3.1 (**Teorema de existencia de equilibros para Juegos de Nash**). *Con las notaciones predentes, sea $((k), f)$ un juego de n personas multi-homogéneo y convexo (como en la Definición 4). Se verifica:*

i) La correspondencia T de Nash definida en (1.3.2) es una aplicación continua de $\Delta_{(k)}$ en sí mismo.
ii) El conjunto de los equilibrios de Nash $Eq((k), f) \subseteq \mathbb{R}^N$, con $N = \sum_{i=1}^{n}(k_i + 1)$ es un conjunto semi-algebraico compacto (ver Definición 24 del Apéndice B).
iii) El conjunto de los equilibrios de Nash $Eq((k), f)$ está contenido dentro del conjunto de los puntos fijos de la función T de Nash (i.e. el conjunto de los $\underline{s} \in \Delta_{(k)}$ tales que $T(\underline{s}) = \underline{s}$).

Si, además, las funciones $f_1, \ldots, f_n$ son multi-lineales (i.e. si el juego es un juego de Nash conforme a la Definición 3), entonces $Eq((k), f) \subseteq \Delta_{(k)}$ coincide con el conjunto de puntos fijos de T y, adicionalmente,

$$Eq((k), f) \neq \emptyset.$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos, en primer lugar, que T está bien definida. Por la definición de las funciones $\psi_{i,j}$ hecha en la Ecuación (1.3.1), podemos concluir que

$$1 + \sum_{j=0}^{k_i} \psi_{i,j}(\underline{s}) \neq 0,$$

lo que garantiza que podamos elegir su inverso en la identidad descrita en la Ecuación (1.3.3) y que $T(\underline{s}) \in \mathbb{R}^N$ esté definido para cada $\underline{s}$. Veamos ahora que para cada $\underline{s} = (\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_n) \in \Delta_{(k)}$, y para cada i, $1 \leq i \leq n$, se tiene que $\varphi_i(\underline{s}) \in \Delta_{k_i}$. Para ello, observemos que existen $t_{i,0}, \ldots, t_{i,k_i} \in [0, 1]$ tales que:

$$\sum_{j=0}^{k_i} t_{i,j} = 1, \ \ \underline{s}_i := \sum_{j=0}^{k_i} t_{i,j} e_{i,j}. \tag{1.3.4}$$

Por tanto, tenemos que

$$\underline{s}_i + \sum_{j=0}^{k_i} \psi_{i,j}(\underline{s}) e_{i,j} = \sum_{j=0}^{k_i} (t_{i,j} + \psi_{i,j}(\underline{s})) e_{i,j},$$

lo que nos muestra las coordenadas de $\underline{s}_i + \sum_{j=0}^{k_i} \psi_{i,j}(\underline{s}) e_{i,j}$ con respecto a la base canónica $\{e_{i,0}, \ldots, e_{i,k_i}\}$ de $\mathbb{R}^{k_i+1}$. En particular, dichas coordenadas satisfacen:

$$\sum_{j=0}^{k_i} (t_{i,j} + \psi_{i,j}(\underline{s}))) = \sum_{j=0}^{k_i} t_{i,j} + \sum_{j=0}^{k_i} \psi_{i,j}(\underline{s}) = 1 + \sum_{j=0}^{k_i} \psi_{i,j}(\underline{s}).$$

Por tanto,

$$\varphi_i(\underline{s}) = \frac{1}{1 + \sum_{j=0}^{k_i} \psi_{i,j}(\underline{s})} \left(\underline{s}_i + \sum_{j=0}^{k_i} \psi_{i,j}(\underline{s}) e_{i,j} \right) \in \Delta_{k_i},$$

lo que demuestra que la aplicación $T : \Delta_{(k)} \longrightarrow \Delta_{(k)}$ definida en la Ecuación (1.3.2) está bien definida. Es obvio, además, que se trata de una función continua. Lo que nos permite concluir la veracidad de $i)$. Para la propiedad $ii)$ nos basta con acudir a la Proposición 1.2.5 anterior. Así tenemos una descripción de $Eq((k), f)$ como semi-algebraico mediante la identidad siguiente:

$$Eq((k), f) := \{\underline{s} = (\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_n) \in \mathbb{R}^N \ : \ \underline{s} \in \Delta_{(k)}, f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,j}) \leq f_i(\underline{s}), 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq k_i\},$$

Lo que, obviamente implica que $Eq((k), f)$ es dado por un número finito de igualdades y desigualdades polinomiales (semi-algebraico). Todas las desigualdades exhibidas usan el orden $\leq$, por lo que es un conjunto cerrado. La compacidad se sigue por ser también un conjunto acotado.
Para la propiedad $iii)$, observemos que si $\underline{s} \in Eq((k), f)$ es un equilibrio de Nash, de nuevo la Proposición 1.2.5 implica que

$$\psi_{i,j}(\underline{s}) = 0, \ \ \forall i, j, \ 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq k_i.$$

Por tanto, $\varphi(\underline{s}) = \underline{s}_i$ para cada i y por tanto, $T(\underline{s}) = \underline{s}$ para cada $\underline{s} \in Eq((k), f)$.
Veamos ahora que si las funciones $f_1, \ldots, f_n$ son multi-lineales, cada punto fijo $\underline{s} = (\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_n) \in \Delta_{(k)}$ ha de ser necesariamente un equilibrio de Nash. Nótese que, conforme a la Proposición 1.2.5, $\underline{s}$ es un equilibrio de Nash si y solamente si

$$\forall i, 1 \leq i \leq n, \ \forall j, 0 \leq j \leq k_i, \ \ f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,j}) \leq f_{\underline{s}}^{(i)}(\underline{s}_i).$$

Esta condición es, por la Definición de las funciones $\psi_{i,j}$ equivalente a la siguiente:

$$\forall i, 1 \leq i \leq n, \ \forall j, 0 \leq j \leq k_i, \ \ \psi_{i,j}(\underline{s}) = 0.$$

Veamos, por tanto que las funciones $\psi_{i,j}$ se anulan en todo punto fijo de T.
Para ello la multi-linearidad es un argumento esencial. Consideremos las coordenadas de cada $\underline{s}_i$ como en la identidad (1.3.4), esto es:

$$\sum_{j=0}^{k_i} t_{i,j} = 1, \ \ \underline{s}_i := \sum_{j=0}^{k_i} t_{i,j} e_{i,j}, \tag{1.3.5}$$

con $t_{i,j} \in [0, 1]$. Al precio de renombrar las coordenadas, supongamos $k_i' \leq k_i$ tal que los coeficientes $t_{i,j}$ son nulos (i.e. $t_{i,j} = 0$) si y solamente si $j > k_i'$. Entonces, como $f_{\underline{s}}^{(i)}$ es una aplicación lineal (por ser f_i multi-lineal), se tiene:

$$\underline{s}_i := \sum_{j=0}^{k_i'} t_{i,j} e_{i,j}, \ \ f_{\underline{s}}^{(i)}(\underline{s}_i) = \sum_{j=0}^{k_i'} t_{i,j} f_{\underline{s}}(e_{i,j}). \tag{1.3.6}$$

En particular $f_{\underline{s}}^{(i)}(\underline{s}_i)$ es un elemento de la envolvente convexa de los siguientes puntos de $\mathbb{R}$:

$$f_{\underline{s}}^{(i)}(\underline{s}_i) \in CH(\{f_{\underline{s}}(e_{i,j}), \ 0 \leq j \leq k_i'\}) = [a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}, \tag{1.3.7}$$

donde

$$a_i := \min\{f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,j}), \ 0 \leq j \leq k_i'\}, \ \ b_i := \max\{f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,j}), \ 0 \leq j \leq k_i'\}.$$

Por tanto, o bien $a_i = b_i = f_{\underline{s}}^{(i)}(\underline{s}_i)$, con lo que tendríamos que $\underline{s}$ es equilibrio de Nash, o bien existe algún i tal que $a_i \neq b_i$. En ese caso, existe j_0, $0 \leq j_0 \leq k_i'$ tal que

$$a_i = f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,j_0}) \leq f_{\underline{s}}^{(i)}(\underline{s}_i) \leq b_i.$$

En particular, tendríamos que $\psi_{i,j_0}(\underline{s}) = 0$.

Dado que $\underline{s}$ es un punto fijo de T tendremos que:

$$\underline{s}_i = \varphi_i(\underline{s}) = \frac{1}{1+\sum_{j=0}^{k_i}\psi_{i,j}(\underline{s})}\left(\underline{s}_i + \sum_{j=0}^{k_i}\psi_{i,j}(\underline{s})e_{i,j}\right).$$

Retomando las coordenadas de $\underline{s}_i$ usadas en la Identidad (1.3.6), tendremos:

$$\sum_{r=0}^{k_i'} t_{i,r}e_{i,r} = \frac{1}{1+\sum_{j=0}^{k_i}\psi_{i,j}(\underline{s})}\left(\sum_{r=0}^{k_i'}\left(t_{i,r}+\psi_{i,r}(\underline{s})\right)e_{i,r} + \sum_{u=k_i'+1}^{k_i}\psi_{i,u}(\underline{s})e_{i,u}\right).$$

Como $\{e_{i,0},\ldots,e_{i,k_i}\}$ es base de $\mathbb{R}^{k_i+1}$, igualando coordenada a coordenada, esto significa que para cada r, $0 \le r \le k_i'$ se tiene:

$$t_{i,r} := \frac{(t_{i,r}+\psi_{i,r}(\underline{s}))}{1+\sum_{j=0}^{k_i}\psi_{i,j}(\underline{s})}.$$

Mientras que para cada u, $k_i'+1 \le u \le k_i$ se tiene:

$$0 = t_{i,u} = \frac{t_{i,u}+\psi_{i,u}(\underline{s})}{1+\sum_{j=0}^{k_i}\psi_{i,j}(\underline{s})} = \frac{\psi_{i,u}(\underline{s})}{1+\sum_{j=0}^{k_i}\psi_{i,j}(\underline{s})}.$$

En particular, de las segundas identidades concluimos que $\psi_{i,u}(\underline{s}) = 0$ se verifica para todo u tal que $k_i'+1 \le u \le k_i$. De las primeras identidades, tomando el caso particular $r = j_0$ concluiremos que

$$t_{i,j_0} := \frac{t_{i,j_0}}{1+\sum_{j=0}^{k_i}\psi_{i,j}(\underline{s})}.$$

Como $t_{i,j_0} \neq 0$, esta última identidad se satisface si y solamente si $\sum_{j=0}^{k_i}\psi_{i,j}(\underline{s}) = 0$ o, equivalentemente, si y solamente si $\psi_{i,j}(\underline{s}) = 0$, para cada j, $0 \le j \le k_i'$.
Por tanto, hemos concluido que si $\underline{s}$ es un punto fijo de la aplicación T de Nash, entonces $\psi_{i,j}(\underline{s}) = 0$ para cada i y cada j con $1 \le i \le n$ y $0 \le j \le k_i$. Y esto significa, como ya habíamos indicado, que $\underline{s} \in Eq((k), f)$.
Tenemos así probado que, en el caso multi-lineal, $Eq((k), f)$ coincide con el conjunto de puntos fijos de T. Para concluir, aplicando el Teorema de Brouwer (Teorema A.0.10) sabemos que T ha de tener al menos un punto fijo y, por tanto, si f es una lista de funciones multi-lineales, se tiene

$$Eq((k), f) = \{x \in \Delta_{(k)} \ : \ T(x) = x\} \neq \emptyset.$$

□

Observación 1.3.2. Obsérvese la "buena fortuna" de la propuesta de J. Nash a partir de la Identidad (1.3.6). Sin la hipótesis de la multi-linearidad de cada f_i esta identidad no es expresable, con lo que no podemos garantizar que $f_{\underline{s}}^{(i)}$ esté en la envolvente convexa de los valores de $f_{\underline{s}}^{(i)}$ sobre las estrategias puras (ver Identidad (1.3.7)). Y esa es la clave de todo el argumento que sigue. No exploraremos el caso multi-homogéneo más allá en este Trabajo Fin de Grado, y dejaremos como tema de investigación futuro si se pueden encontrar argumentos que indiquen si $Eq((k), f)$ es o no vacío cuando $((k), f)$ sea un juego de n personas multi-homogéeo y convexo.

1.3.2. Teorema de Existencia de equilibrios de Nash en el caso generalizado. Se trata del enunciado siguiente:

Teorema 1.3.3 (**Existencia de equilibros para Juegos de Nash Generalizados**). *Con las notaciones precedentes, sea $((k), f)$ un juego de n personas generalizado (como en la Definición 6). Se verifica:*

i) La correspondencia T de Nash definida en (1.3.2) es una aplicación continua de $\Delta_{(k)}$ en sí mismo.
ii) El conjunto de los equilibrios de Nash $Eq((k), f)$ está contenido dentro del conjunto de los puntos fijos de la función T de Nash.

Si, además, el juego $((k), f)$ es un juego de Nash generalizado (Definición 7) entonces, $Eq((k), f) \subseteq \Delta_{(k)}$ coincide con el conjunto de puntos fijos de T y, adicionalmente,

$$Eq((k), f) \neq \emptyset.$$

DEMOSTRACIÓN. Las afirmaciones $i)$ y $ii)$ se prueban con idénticos argumentos de los usados en el Teorema 1.3.3 precedente. Por tanto, sólo queda probar que los puntos fijos de T son equilibrios de Nash de $((k), f)$ en el caso de juegos de Nash generalizados. Es decir, sólo hay que probar si para cada $\underline{s} \in \Delta_{(k)}$ las funciones:

$$f_{\underline{s}}^{(i)} : \Delta_{k_i} \longrightarrow \mathbb{R},$$

son quasi-cóncavas y quasi-convexas (i.e. quasi-lineales), y si $\underline{s}$ es un punto fijo de T, entonces $\psi_{i,j}(\underline{s}) = 0$ para cada i, j, $1 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq k_i$. Ahora bien, el argumento clave en el trabajo original de Nash es la propiedad descrita en la Identidad (1.3.7), es decir, que si $\underline{s} := (\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_n) \in \Delta_{(k)}$ y si las coordenadas $t_{i,0}, \ldots, t_{i,k_i} \in [0, 1]$ satisfacen que

$$\sum_{j=0}^{k_i} t_{i,j} = 1, \;\; \underline{s}_i := \sum_{j=0}^{k_i} t_{i,j} e_{i,j},$$

y que existe $k_i' \leq k_i$ tal que $t_{i,j} = 0$ si y solamente si $j > k_i'$, entonces

$$f_{\underline{s}}^{(i)}(\underline{s}_i) \in CH(\{f_{\underline{s}}(e_{i,j}),\ 0 \leq j \leq k_i'\}) = [a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R},$$

donde

$$a_i := \min\{f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,j}),\ 0 \leq j \leq k_i'\}, \;\; b_i := \max\{f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,j}),\ 0 \leq j \leq k_i'\}.$$

Pero esta propiedad se satisface claramente en el caso de juegos de Nash generalizados porque las funciones $f_{\underline{s}}^{(i)}$ son quasi-lineales (ver Definición 5). A partir de ese punto, siguiendo exactamente los mismos pasos del Teorema 1.3.1 precedente, probaremos que los puntos fijos de T en $\Delta_{(k)}$ están en $Eq((k), f)$. Con ello concluimos también, gracias al Teorema de Brouwer, que los juegos de Nash generalizados poseen Equilibrios de Nash y el enunciado quedará probado. □

CAPÍTULO 2

Equilibrios de Nash: finitud en el caso genérico

Índice

2.1. Introducción y presentación de resultados 13
2.2. Sobre el número de componentes conexas de los Equilibrios de Nash 15
2.3. Primeras Ecuaciones Polinomiales Multi-homogéneas que satisfacen los Equilibrios de un Juego de Nash 16
2.4. Sub-juegos de un juego de n personas 19
2.5. Ecuaciones tóricas de Equilibrios totalmente mezclados 21
2.5.1. Ecuaciones multi-homogéneas para los equilibrios totalmente mezclados 23
2.6. Ceros Tóricos de Sistemas "Sparse" (ralos) 26
2.6.1. Notaciones Básicas sobre "sparsity" y tóricos. 27
2.6.2. La Variedad Solución (o de incidencia) Tórica. 28
2.6.3. Invarianza unitaria de sistemas sparse y conectividad de la Variedad Solución. 31
2.7. Finitud genérica de los equilibrios totalmente mezclados 34
2.8. Los resultados de una extraña búsqueda bibliográfica 40

2.1. Introducción y presentación de resultados

Este capítulo contiene las partes originales de la memoria. En él se escribe una prueba completa de la finitud del número de equilibrios de Nash en un juego genérico multi-lineal. El propósito del capítulo es doble. En primer lugar, observamos como el modelo original de Nash (juego con funciones de recompensa multi-lineales) permite un traslado de su modelo y sus resultados al contexto de la Geometría Algebraica Real: el conjunto de los equilibrios de Nash es un semi-algebraico (Sección B.2 del Apéndice B para más terminología sobre conjuntos semi-algebraicos). Se trata de aplicar resultados clásicos de Geometría Algebraica Real al conocimiento y cuantificación de $Eq((k), f)$ como, por ejemplo, la acotación del número (finito) de componentes conexas. En segundo lugar, enfrentamos el objetivo inicialmete planteado: dar una demostración completa de la finitud del conjunto de equilibrios $Eq((k), f)$ de un juego de Nash genérico "from scratch", es decir, comenzando desde lo más elemental de los equilibrios hasta llegar a concluir la demostración. Debemos, además, citar el clásico Teorema BKK (de Bernshtein, Koushnirenko y Khovanskii) como elemento inspirador, aunque no lleguemos a utilizarlo en nuestra demostración. Especial atención es dedicada al uso del Teorema B de D.N Bernshtein, que es el único que se puede aplicar a nuestro caso para acotar las componentes conexas. La primera parte alcanza hasta la Sección 2.5, mientras que la segunda se concentra en las Secciones 2.6 y 2.7.

Muchas de las propiedades cuantitativas de un semi-algebraico dependen fuertemente de las ecuaciones e inecuaciones con las que son representados. Por ello, comenzamos con la Proposición 2.2.2 en la que mostramos una representación de los equilibrios de Nash mediante desigualdades polinomiales. Usando las técnicas clásicas que muestran los cerrados semi-algebraicos como proyección de variedades algebraicas, podemos escribir una primera cota para el número de componentes conexas de $Eq((k), f)$, donde $((k), f)$ es un juego de n personas con funciones de recompensa multi-homogéneas y convexas.
La presencia de desigualdades (del tipo $\geq$), por ejemplo, puede ocultar gran parte de la naturaleza métrica, geométrica o topológica de $Eq((k), f)$, por ello, en la Proposición 2.3.1 mostramos ecuaciones polinomiales que definen una variedad algebraica real $V \subseteq \mathbb{R}^N$ tal que los equilibrios de Nash referidos se encuentran en la intersección $\Delta_{(k)} \cap V$. Esto permite concluir que $Eq((k), f) \subseteq \Delta_{(k)} \cap V$ es semi-algebraico compacto y, genéricamente en los coeficientes de f, es de interior vacío en $\Delta_{(k)}$ y no es denso Zariski en el conjunto de estrategias mezcladas. Además, podremos rebajar las estimaciones de las componentes conexas de $\Delta_{(k)} \cap V$ hasta

$$\beta_0 \left(\Delta_{(k)} \cap V \right) \leq D \left(2D - 1 \right)^{2N-1},$$

donde N es el número total de estrategias puras de todos los jugadores y D es el máximo entre 2 y el máximo de los grados de los polinomios multi-homogéneos que forman la lista f. El estudio de componentes conexas, en lugar de contar el número de puntos es significativo dado que el conjunto de equilibrios de un juego de Nash no es finito (como se prueba en la Observación 2.3.2).

La situación se refina notablemente con dos observaciones. La primera pasa por considerar solamente juegos de Nash en su forma original (con funciones multi-lineales). La segunda es considerar un tipo especial de equilibrio de Nash: *equilibrios de Nash totalmente mezclados*. Para ello, introducimos la noción de subjuego de un juego de Nash como los juegos definidos a partir de las caras del producto de símplices $\Delta_{(k)}$. Así, un equilibrio de Nash totalmente mezclado es un equilibrio en el interior de $\Delta_{(k)}$ por lo que no pertenece a ninguno de sus subjuegos. Denotamos por $Eq^*((k), f)$ al conjunto de los equilibrios totalmente mezclados y en el Teorema 2.5.4 analizamos variedades algebraicas que describen este conjunto, lo cual nos permite aportar una cota más fina para el número de componentes conexas de estos equilibrios totalmente mezclados (en el caso de funciones de recompensa multi-lineales)

$$\beta_0\left(Eq^*((k), f)\right) \leq d\,(2d-1)^{2N-1},$$

donde $d = max\{3, n-1\}$, n es el número de jugadores y N el número total de estrategias puras.
Los resultados anteriores son acotaciones del número de componentes conexas en el caso peor, pero el objetivo fundamental del capítulo es otro. Aunque en ciertos sistemas singulares el número de equilibrios de Nash puede ser infinito, está asentada la afirmación de que *el número de equilibrios de Nash es finito para juegos de Nash genéricamente elegidos*. Esto se da a entender, por ejemplo, en [**PSt,93**] y ha sido seguido por múltiples autores. Esta afirmación se basa en una serie de trabajos simultáneos de los autores D.N. Bernshtein ([**Be,76**]), A. Koushnirenko ([**Ku,76**]) y Khovanskii ([**Kho,78**]), los cuales culminan en el llamado Teorema BKK que analiza y acota el número de ceros aislados en el toro n-dimensional complejo $\left(\mathbb{T}^n = (\mathbb{C}^*)^n,\ \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}\right)$ de un sistema de ecuaciones polinomiales "ralo" (sparse).

Mientras que Khovanskii se centra en el estudio de los "fewnomials" (polinomios con pocos coeficientes no nulos), los trabajos de Bernshtein y Koushnirenko tratan de los ceros aislados tóricos de sistemas de ecuaciones polinomiales cuyo soporte (el conjunto de los exponentes de los términos no nulos) está contenido en politopos compactos (de la forma $\mathbb{Z}^n \cap Q$, $Q \subseteq \mathbb{R}^n$). Si bien el resultado de Koushnirenko es más impactante, es Bernshtein quien hace el estudio del caso más dificil, el caso mixto. Koushnirenko estudia el número de ceros aislados tóricos (en $\mathbb{T}^n$) de ecuaciones $f_1 = ... = f_n = 0$, donde el soporte de todos las $f_i \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ está contenido en $\mathbb{Z}^n \cap Q$ con Q un politopo común para todos ellas. Bernshtein en cambio se ocupa del caso mixto en su famoso Theorem B, estudiando el número de ceros aislados de un sistema de ecuaciones $f_1 = 0, ..., f_n = 0$ tal que existen $Q_1, ..., Q_n \subseteq \mathbb{R}^n$ de tal modo que el soporte de cada f_i está contenido en $\mathbb{Z}^n \cap Q_i$ con distintos politopos Q_i para cada función. Esta variante de Bernshtein es especialmente relevante porque el conjunto de polinomios determinados por sus politopos $Q_1, ..., Q_n$ es un conjunto de medida nula en el considerado por Koushnirenko (el del politopo Q que es la envolvente convexa de $Q_1, ..., Q_n$), lo que implica que los resultados tipo "la propiedad genérica en los coeficientes" probados por Koushnirenko no son traspasables a la situación de Bernshtein.
En el Theorem B de Bernshtein se introduce además una hipótesis (que llamaremos Hipótesis Bernshtein a partir de la cual el número de ceros en $\mathbb{T}^n$ de un sistema sparse $f_1 = 0, ..., f_n = 0$, con soporte $supp(f_i) \subseteq \mathbb{Z}^n \cap Q_i$, $1 \leq i \leq n$, es finito. Pero Bernshtein nunca aporta una prueba de que su hipótesis se satisfaga genéricamente. Algunos autores citan un trabajo de Gelfand Kapranov Zelevinsky [**GKZ,91**], en el que se introducen las "sparse mixed resultants" publicado 20 años después del trabajo de Bernshtein. Con la existencia de estas "sparse mixed resultants" posiblemente podría estudiarse si la hipótesis de Berhnshtein es genérica o no, pero nosotros no hemos encontrado esta referencia en versión inglesa.

Tras una larga búsqueda bibliográfica a través de referencias cruzadas y cíclicas que describimos detenidamente en la Sección 2.8, y al no encontrar una demostración completa, hemos decidido crear nuestra propia demostración completa y auto-contenida ("from scratch") sin utilizar ningún resultado del Teorema BKK. Las Secciones 2.6 y 2.7 de este capítulo están dedicadas a mostrar la prueba completa del resultado principal de este Trabajo de Fin de Grado:

Teorema Principal (2.7.5). *[**Finitud de los equilibrios de Nash en juegos genéricos**]*
Sea $(k) = (k_1, ..., k_n)$ un multi-índice que representa la lista de cardinales de estrategias puras de un juego de n jugadores. Sea $m\mathscr{L}^{\mathbb{R}}_{(k)}$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita formado por las listas $f = (f_1, ..., f_n)$

de funciones multi-lineales que se adaptan al modelo de juego descrito por el multi-índice (k)*. Entonces, existe un abierto Zariski no vacío* $U \subseteq m\mathscr{L}^{\mathbb{R}}_{(k)}$ *tal que para cada* $f \in U$ *el número de equilibrios de Nash del juego* $((k), f)$ *es finito.*

2.2. Sobre el número de componentes conexas de los Equilibrios de Nash

Ya hemos indicado que los equilibrios de Nash forman un conjunto semi-algebraico. Observaremos más adelante que es fácil construir juegos de Nash para los que el conjunto de equilibrios no es finito (Observación 2.3.2). Por tanto, a priori, no podemos contar el número de equilibrios de un juego de Nash. Sin embargo, los conjuntos semi-algebraicos se caracterizan por tener un número finito de componentes conexas que son, además, semi-algebraicos (cf. [BCR,98], por ejemplo). Más aún, las componentes conexas de los conjuntos semi-algebraicos son conexas por caminos (véase [BCR,98]). Por tanto, aunque no estemos en condiciones de asegurar que el número de equilibrios de Nash es un conjunto finito, al menos sí podemos estimar el número de sus componentes conexas. Para ello, comenzaremos con un resultado que es consecuencia de una visión conjunta de varios matemáticos, dos de los cuales son conocidos medallas Fields.
En los años 60 del siglo pasado, J. Milnor, R. Thom, O. Oleinik, A. Petrovski probaron no solamente que el número de componentes conexas de un conjunto algebraico es finito, sino que su número está acotado por una cantidad dependiente solamente del máximo de los grados de los polinomios involcrados. El resultado esencial se puede resumir en el siguiente enunciado cuya prueba puede seguirse en [BCR,98]

TEOREMA 2.2.1 (**Teorema de Milnor-Thom-Oleinik-Petrovski**). *Sea* $V \subseteq \mathbb{R}^n$ *un conjunto algebraico real afín dado por una familia de ecuaciones polinomiales de grado a lo sumo* d*. Entonces el número de componentes conexas de* V*,* $\beta_0(V)$*, está acotado por:*

$$\beta_0(V) \leq d(2d-1)^{n-1}$$

PROPOSICIÓN 2.2.2. *Sea* $((k), f)$ *un juego de* n *personas multi-homogéneo y convexo. Supongamos* $(k) = (k_1, \ldots, k_n)$ *con* $k_i \geq 1$ *y sea* $N := \sum_{i=1}^{n}(k_i + 1)$ *es el número total de variables involucradas. Supongamos que* $f := (f_1, \ldots, f_n)$*, donde cada* f_i *es un polinomio multi-homogéneo de multi-grado* $(d_i) := (d_{i,1}, \ldots, d_{i,n})$*. Definamos*

$$D := \max\left(\left\{\sum_{j=1}^{n} d_{i,j} \ : \ 1 \leq i \leq n\right\} \cup \{2\}\right).$$

Entonces el número de componentes conexas del conjunto de equilibrios de Nash satisface:

$$\beta_0\left(Eq((k), f)\right) \leq D\left(2D-1\right)^{3N-1}$$

DEMOSTRACIÓN. Seguiremos un argumento clásico mostrando un semi-algebraico cerrado (básico en este caso) como proyección de un algebraico real en un espacio afín real de mayor dimensión. Con las notaciones del enunciado, observamos, que el conjunto $Eq((k), f)$ es el dado por las siguientes ecuaciones e inecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{ll} \sum_{j=0}^{k_i} X_{i,j} - 1 = 0, & 1 \leq i \leq n, \\ X_{i,j} \geq 0, & 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq k_i, \\ f_i(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n) - f_i(\underline{X}_1, \ldots, e_{i,j}, \ldots, \underline{X}_n) \geq 0, & 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq k_i, \end{array}\right. \tag{2.2.1}$$

Añadamos un nuevo juego de variables $\{Z_{i,j} \ : \ 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq k_i\}$ y describamos una nueva familia de ecuaciones e inecuaciones polinomiales que describe un semialgebraico $S_1 \subseteq \mathbb{R}^{2N}$:

$$\left\{\begin{array}{ll} \sum_{j=0}^{k_i} X_{i,j} - 1 = 0, & 1 \leq i \leq n, \\ X_{i,j} - Z_{i,j}^2 = 0, & 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq k_i, \\ f_i(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n) - f_i(\underline{X}_1, \ldots, e_{i,j}, \ldots, \underline{X}_n) \geq 0, & 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq k_i, \end{array}\right. \tag{2.2.2}$$

Añadamos otro juego de variables $\{T_{i,j} \ : \ 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq k_i\}$ y escribamos un nuevo juego de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{ll} \sum_{j=0}^{k_i} X_{i,j} - 1 = 0, & 1 \leq i \leq n, \\ X_{i,j} - Z_{i,j}^2 = 0, & 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq k_i, \\ f_i(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n) - f_i(\underline{X}_1, \ldots, e_{i,j}, \ldots, \underline{X}_n) - T_{i,j}^2 = 0, & 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq k_i, \end{array}\right. \tag{2.2.3}$$

Este último grupo de condiciones son todas ecuaciones polinomiales. Por tanto tenemos un conjunto algebraico real $W \subseteq \mathbb{R}^{3N}$ dado por los puntos que satisfacen este grupo de ecuaciones:

$$W := \{(\underline{x}, \underline{z}, \underline{t}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \ : \ (\underline{x}, \underline{z}, \underline{t}) \text{ satisfacen (2.2.3)}\}.$$

Obsérvese que W es un conjunto algebraico definido por polinomios de grado total acotado por D, involucrando $3N$ variables y el número de ecuaciones involucradas en la lista (2.2.3) es $n+2N$. Entonces, el Teorema de Milnor-Thom-Oleinik-Petrovski implica que

$$\beta_0(W) \leq D\,(2D-1)^{3N-1}.$$

Consideremos ahora la proyección natural

$$\begin{array}{rccc} \pi_1 : & \mathbb{R}^{3N} & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ & (\underline{x}, \underline{z}, \underline{t}) & \longmapsto & \underline{x}. \end{array}$$

Comparando las ecuaciones descritas en (2.2.3) con las ecuaciones en (2.2.1), es fácil concluir que para cada $\underline{x} \in \mathbb{R}^N$, $\underline{x}$ satisface las ecuaciones descritas en (2.2.3) si y solamente si existen $\underline{z}, \underline{t} \in \mathbb{R}^N$ tales que $(\underline{x}, \underline{z}, \underline{t})$ satisface las ecuaciones descritas en (2.2.1). En otras palabras, se tiene que:

$$\pi_1(W) = Eq((k), f).$$

Finalmente, recuérdese que las aplicaciones continuas transforman conjuntos conexos en conjuntos conexos. Por tanto, π_1 preserva componentes conexas y, por tanto, concluimos que

$$\beta_0\left(Eq((k), f)\right)) \leq \beta_0(W) \leq D\,(2D-1)^{3N-1},$$

como se indica en el enunciado. □

2.3. Primeras Ecuaciones Polinomiales Multi-homogéneas que satisfacen los Equilibrios de un Juego de Nash

Para mejorar las cotas del número de componentes conexas, profundizamos en las propiedades de los equlibrios de Nash. Para ello veamos diversos tipos de ecuaciones polinomiales que los definen. En primer lugar, veamos que los equilibrios de Nash de un juego multi-homogéneo se encuentran en la intersección de $\Delta_{(k)}$ con una variedad algebraica afín.

Proposición 2.3.1 (**Primeras Ecuaciones Polinomiales para los equilibrios de Nash**). *Sea $((k), f)$ un juego de n personas multi-homogéneo y convexo. Supongamos $N = \sum_{i=1}^n (k_i + 1)$. Entonces, existe una variedad algebraica real V tal que*

$$Eq((k), f) \subseteq \Delta_{(k)} \cap V.$$

Más aún, si $f = (f_1, \ldots, f_n)$, definamos los polinomios multi-homogéneos

$$h_{i,j_1,j_2} := X_{i,j_1} \cdot X_{i,j_2} \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_{i,j_1}}(X_{1,1}, ..., X_{n,k_n}) - \frac{\partial f_i}{\partial X_{i,j_2}}(X_{1,1}, ..., X_{n,k_n}) \right) \in \mathbb{R}[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n].$$

Entonces, la variedad algebraica real

$$V := V(\{h_{i,j_1,j_2} \ : \ 1 \leq i \leq n, 0 \leq j_1, j_2 \leq k_i, \ j_1 \neq j_2\}),$$

verifica $Eq((k), f) \subseteq \Delta_{(k)} \cap V$.
Esa intersección es genéricamente propia y, en particular, $Eq((k), f)$ es genéricamente un conjunto semi-algebraico compacto y de interior vacío con respecto a la topología de $\Delta_{(k)}$, inducida por la de $\mathbb{R}^N$ y por lo tanto, genéricamente $Eq((k), f)$ no es denso Zariski en $\Delta_{(k)}$. Más aún, esta nueva variedad aporta menos componentes conexas a $\Delta_{(k)}$ porque se satisface

$$\beta_0\left(\Delta_{(k)} \cap V\right) \leq D\,(2D-1)^{2N-1},$$

donde D y N son como en la Proposición 2.2.2.

Demostración. El resultado puede obtenerse mediante las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) o proyectando desde las esferas S^k hacia el símplex Δ_k con respecto a la métrica euclídea. Lo haremos con esta segunda estrategia usando multiplicadores de Lagrange.
Probemos que para cada i, $1 \leq i \leq n$, los polinomios h_{i,j_1,j_2} inducidos por el polinomio multi-homogéneo f_i se anulan sobre $Eq((k), f)$. Para simplificar las notaciones de la prueba, fijemos i, escribamos $h = f_i$ y supongamos que h es multihomogéneo de multi-grado $(d) = (d_1, ..., d_n)$ en los grupos de variables $\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n$ dados mediante:

$$\underline{X}_i := \{X_{i,j} \ : \ 0 \leq i \leq k_i\}.$$

Y probemos que los polinomios

$$h_{j_1,j_2} := X_{i,j_1} \cdot X_{i,j_2} \left(\frac{\partial h}{\partial X_{i,j_1}}(X_{1,1}, ..., X_{n,k_n}) - \frac{\partial h}{\partial X_{i,j_2}}(X_{1,1}, ..., X_{n,k_n}) \right),$$

se anulan sobre $Eq((k), f)$. Comencemos considerando las aplicaciones polinomiales dominantes siguientes:

$$\zeta_k : S^k \longrightarrow \Delta_k$$
$$(x_0, ..., x_k) \longmapsto (x_0^2, ..., x_k^2),$$

Esta aplicación es claramente sobreyectiva y para cada $\underline{z} \in \Delta_k$ la imagen inversa $\zeta_k^{-1}(\{\underline{z}\})$ es un conjunto finito formado por 2^{k+1} puntos. Es decir, si $\underline{z} = (z_0, ..., z_k) \in \Delta_k$, su anti-imagen es

$$\zeta_k^{-1}(\{\underline{z}\}) = \{(\pm|z_0|^{1/2}, ..., \pm|z_k|^{1/2})\},$$

donde $\pm$ significa que podemos elegir signo positivo o negativo de modo independiente en cada coordenada. Dado el multi-índice $\underline{k} = (k_1, ..., k_n)$, definamos:

$$\phi_{(k)} : \prod_{i=1}^{n} S^{k_i} \longrightarrow \Delta_{(k)}, \tag{2.3.1}$$

dada mediante $\phi_{(k)} := (\zeta_{k_1}, ..., \zeta_{k_n})$. Por otro lado, dado $h \in \mathbb{R}[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n]$, definamos el polinomio H mediante

$$H(Y_{i,j} : 1 \leq i \leq n\ ,\ 1 \leq j \leq k_i) = h \circ \phi_{(k)} = h(Y_{1,0}^2, ..., Y_{1,k_1}^2, ..., Y_{n,0}^2, ..., Y_{n,k_n}^2).$$

Nótese que H es un polinomio multi-homogéneo de multi-grado $(2d) = (2d_1, ..., 2d_n)$. Además, se verifica que $H = h \circ \phi_{(k)}$ y se tiene:

$$\frac{\partial H}{\partial Y_{i,j}} = 2Y_{i,j} \cdot \frac{\partial h}{\partial X_{i,j}}(Y_{1,1}^2, ..., Y_{1,k_1}^2, ..., Y_{n,1}^2, ..., Y_{n,k_n}^2). \tag{2.3.2}$$

Dado $\underline{s} \in \Delta_{(k)}$, sea $\underline{y} = (\underline{y}_1, ..., \underline{y}_n) \in \phi_{(k)}^{-1}(\{\underline{s}\})$ una cualquiera de sus anti-imágenes por $\phi_{(k)}$ y denotemos por $H_{\underline{y}}^{(i)} : S^{k_i} \longrightarrow \mathbb{R}$ al polinomio homogéneo de grado d_i dado mediante:

$$H_{\underline{y}}^{(i)}(Y_{i,0}, ..., Y_{i,k_i}) = H(\underline{y}_1, ..., \underline{y}_{i-1}, Y_{i,0}, ..., Y_{i,k_i}, \underline{y}_{i+1}, ..., \underline{y}_n) \in \mathbb{R}[Y_{i,0}, \ldots, Y_{i,k_i}].$$

Denotemos también por $H_{\underline{y}}^{(i)}$ a la función que este polinomio define sobre S^{k_i}.

Si $\underline{s} = (\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_n) \in \Delta_{(k)}$ es un equilibrio de Nash, entonces $\underline{y_i} \in S^{k_i}$ es un máximo de la función $H_{\underline{y}}^{(i)}$ porque

$$\max\{H_{\underline{y}}^{(i)}(z)\ :\ z \in S^{k_i}\} = \max\{h_{\underline{s}}^{(i)}(u)\ :\ u \in \Delta_{k_i}\} = h_{\underline{s}}^{(i)}(\underline{s}_i),$$

y

$$H_{\underline{y}}^{(i)}(\underline{y}_i) = h_{\underline{s}}^{(i)}(\underline{s}_i).$$

Recordemos, además, que el espacio tangente $T_z S^k$ a una esfera S^k en un punto $z \in S^k$ es el complemento ortogonal de z con respecto al producto euclídeo canónico de $\mathbb{R}^{k+1}$. Es decir,

$$T_{\underline{y}_i} S^{k_i} = \{w \in \mathbb{R}^{k_i+1} : \langle w, \underline{y}_i \rangle = 0\},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto euclídeo usual en $\mathbb{R}^{k_i+1}$. Por el Teorema de los Multiplicadores de Lagrange, si $\underline{y}_i \in S^{k_i}$ es un máximo de $H_{\underline{y}}^{(i)}$, entonces, es ortogonal a $T_{\underline{y}_i} S^{k_i}$ y, por tanto, el rango de la siguiente matriz ha de ser 1:

$$M_i = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H_{\underline{y}}^{(i)}}{\partial Y_{i,0}}(\underline{y}_i) & \cdots & \dfrac{\partial H_{\underline{y}}^{(i)}}{\partial Y_{i,k_i}}(\underline{y}_i) \\ y_{i,0} & \cdots & y_{i,k_i}. \end{pmatrix}$$

Por tanto, todos los menores 2×2 de esta matriz han de ser nulos. Es decir, para cada $j_1, j_2 \in \{0, ..., k_i\}$ con $j_1 \neq j_2$ se cumple

$$y_{i,j_2} \frac{\partial H_{\underline{y}}^{(i)}}{\partial Y_{i,j_1}}(\underline{y}_i) - y_{i,j_1} \frac{\partial H_{\underline{y}}^{(i)}}{\partial Y_{i,j_2}}(\underline{y}_i) = 0.$$

Ahora nótese que $\dfrac{\partial H_{\underline{y}}^{(i)}}{\partial Y_{i,0}}(\underline{y}_i) = 2y_{i,j} \dfrac{\partial h}{\partial X_{i,j}}(\underline{s})$, por lo que para cada j_1, j_2 tendremos

$$2y_{i,j_1}y_{i,j_2}\left(\frac{\partial h}{\partial X_{i,j_1}}(\underline{s})-\frac{\partial h}{\partial X_{i,j_2}}(\underline{s})\right)=0.$$

Por lo tanto, o bien $y_{i,j}=0\Rightarrow y_{i,j}^2=s_{i,j}=0$ ó $\left(\frac{\partial h}{\partial X_{i,j_1}}(\underline{s})-\frac{\partial h}{\partial X_{i,j_2}}(\underline{s})\right)=0$ y recordando que $h=f_i$, obtenemos la expresión equivalente

$$h_{i,j_1,j_2}(\underline{s})=s_{i,j_1}s_{i,j_2}\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_{i,j_1}}(\underline{s})-\frac{\partial f_i}{\partial X_{i,j_2}}(\underline{s})\right)=0,$$

con lo que hemos demostrado la primera de las afirmaciones del enunciado.
En cuanto a la propiedad genérica, obsérvese que la condición siguiente es una condición abierta Zariski en el conjunto de los polinomios multi-homogéneos de multi-grado fijado (d):

$$\{f\in mH^{\mathbb{R}}_{(d)}\ :\ \exists i,j_1,j_2,1\leq i\leq n,0\leq j_1,j_2\leq k_i,\ \ \frac{\partial f}{\partial X_{i,j_1}}-\frac{\partial f}{\partial X_{i,j_2}}\in\mathbb{R}[\underline{X}_1,\ldots,\underline{X}_n]\setminus\{0\}\ \}.$$

También será una condición abierta Zariski para una lista de multi-grados $((d))=((d_1),\ldots,(d_n))$ la propiedad:

$$\{f\in m\mathscr{H}^{\mathbb{R}}_{(d)}(\underline{X}_1,\ldots,\underline{X}_k)\ :\ \exists i,j_1,j_2,1\leq i\leq n,0\leq j_1,j_2\leq k_i,\ \ h_{i,j_1,j_2}\in\mathbb{R}[\underline{X}_1,\ldots,\underline{X}_n]\setminus\{0\}\ \},$$

donde h_{i,j_1,j_2} son los polinomios definidos en el enunciado de la Proposición.
Para concluir, obsérvese que los polinomios h_{i,j_1,j_2} son polinomios multi-homogéneos. Veamos que si $h\in R[\underline{X}_1,\ldots,\underline{X}_n]$ es un polinomio multi-homogéneo de multi-grado $(d)=(d_1,\ldots,d_n)$ que se anula sobre $\Delta_{(k)}$ entonces h debería ser el polinomio idénticamente cero.
Para probarlo, consideremos inicialmente $\mathbb{R}^*:=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ el conjunto de los número reales no nulos. Consideremos también Δ_k^* como el interior del $k-$símplex, esto es

$$\Delta_k^*:=\{x\in(0,1)^{k+1}\ :\ x\in\Delta_k\}=\Delta_k\cap(\mathbb{R}^*)^{k+1}.$$

Supongamos $(k)=(k_1,\ldots,k_n)$ dado $N:=\sum_{i=1}^n(k_i+1)$. Consideremos para cada i, la variedad afín lineal $\mathfrak{S}_{k_i}$ (hipersuperficie en $\mathbb{R}^{k_i+1}$) dada mediante:

$$\mathfrak{S}_{k_i}:=\{x=(x_{i,0},\ldots,x_{i,k_i})\in\mathbb{R}^{k_i+1}\ :\ \sum_{j=0}^{k_i}x_{i,j}=1\}.$$

Como $\Delta_{k_i}^*\subseteq\mathfrak{S}_{k_i}$ es un abierto euclídeo de la hipersuperficie $\mathfrak{S}_{k_i}$, entonces $\Delta_{k_i}^*$ es denso Zariski en $\mathfrak{S}_{k_i}$. Por la misma razón,

$$\Delta_{(k)}^*:=\prod_{i=1}^n\Delta_{k_i}^*\ \text{ es denso Zariski en }\ \mathfrak{S}_{(k)}:=\prod_{i=1}^n\mathfrak{S}_{k_i}.$$

Por tanto, si un polinomio $h\in\mathbb{R}[\underline{X}_1,\ldots,\underline{X}_n]$ se anula idénticamente en $\Delta_{(k)}^*$, entonces se anulará idénticamente en $\mathfrak{S}_{(k)}$.
Definamos el ortante estrictamente positivo en $(\mathbb{R}^*)^N$:

$$\mathscr{O}_N^*:=\{\zeta\in(\mathbb{R}^*)^N\ :\ \zeta_{i,j}>0,\ 1\leq i\leq n,0\leq j\leq k_j\}. \tag{2.3.3}$$

Probemos que si $h\in\mathbb{R}[\underline{X}_1,\ldots,\underline{X}_n]$ es un polinomio multi-homogéneo de multi-grado $(d)=(d_1,\ldots,d_n)$ que se anula en $\mathfrak{S}_{(k)}$, entonces, necesariamente se anula en el ortante positivo $\mathscr{O}_N^*$. Para ello, supongamos

$$\underline{\zeta}:=(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)\in\mathscr{O}_N^*,$$

un punto cualquiera. Como $\underline{\zeta}\in(\mathbb{R}^*)^N$, se tiene que $\zeta_i\neq0$ para cada i, $1\leq i\leq n$. Por tanto, su norma $\lambda_i:=||\zeta_i||_1=\sum_{j=0}^{k_i}|\zeta_{i,j}|\neq0$. Entonces, por la Proposición B.1.3 del Apéndice B tendremos que

$$h(\underline{\zeta})=h(\lambda_1(\lambda_1^{-1}\zeta_1),\ldots,\lambda_n(\lambda_n^{-1}\zeta_n))=\left(\prod_{i=1}^n\lambda_i^{d_i}\right)h(\lambda_1^{-1}\zeta_1,\ldots,\lambda_n^{-1}\zeta_n).$$

Ahora observemos que si $\underline{\zeta}\in\mathscr{O}_N^*$, entonces.

$$(\lambda_1^{-1}\zeta_1,\ldots,\lambda_n^{-1}\zeta_n)\in\mathfrak{S}_{(k)},$$

porque para cada i, $1 \leq i \leq n$, se tiene:

$$\sum_{j=0}^{k_i} \lambda_i^{-1} \zeta_{i,j} = \frac{\sum_{j=0}^{k_i} \zeta_{i,j}}{\sum_{j=0}^{k_i} |\zeta_{i,j}|} = 1,$$

porque si $\underline{\zeta} \in \mathscr{O}_N^*$, entonces $\zeta_{i,j} = |\zeta_{i,j}|$ para cada i, j. Por tanto, si h es un polinomio multi-homogéneo que se anula en $\mathfrak{S}_{(k)}$, entonces,

$$\forall \underline{\zeta} \in \mathscr{O}_N^*, \;\; h(\underline{\zeta}) = 0.$$

Como el abierto $\mathscr{O}_N^*$ es denso Zariski en $\mathbb{R}^N$, si h se anula en $\mathscr{O}_N^*$, entonces h ha de anularse en todo $\mathbb{R}^N$ y eso sólo es posible si h es el polinomio idénticamente cero. Con lo que habremos probado nuestra última afirmación: Si $h \in \mathbb{R}[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n]$ es un polinomio multi-homogéneo que se anula idénticamente en $\Delta_{(k)}^*$, entonces h ha de ser el polinomio idénticamente nulo. Repitiendo un argumento análogo al usado en la Proposición 2.2.2, construyendo una variedad algebraica W en un espacio real afín de mayor dimensión, $W \subseteq \mathbb{R}^{2N}$ (añadimos N variables para las desigualdades $X_{i,j} \geq 0$ dadas por $\Delta_{(k)}$), y probando que W se proyecta sobre $\Delta_{(k)} \cap V$, es fácil concluir que

$$\beta_0 \left(\Delta_{(k)} \cap V \right) \leq D \left(2D - 1 \right)^{2N-1},$$

lo que termina las pruebas del enunciado. □

Observación 2.3.2 (**Hay juegos de Nash con infinitos equilibrios)**. Aunque el interior del conjunto de equilibrios de un juego multi-homogéneo sea vacío, eso no significa que el número de equilibrios de Nash sea finito. Un ejemplo sencillo y evidente es el siguiente: Definimos el juego $((k), f)$, con funciones de recompensa $f = (f_1, \ldots, f_n)$ dadas mediante:

$$f_i = \prod_{i=1}^{n} X_{i,0} + \left(\prod_{i=2}^{n} X_{i,0} \right) \cdot X_{1,1}$$

Obviamente, tenemos que

$$f_i = (X_{1,0} + X_{1,1}) \cdot \prod_{i=2}^{n} X_{i,0}$$

y el conjunto de los equilibrios de Nash coincide con

$$Eq((k), f) = \Delta_1 \times \{(e_{2,0}, ..., e_{n,0})\} = V_{\mathbb{R}^+}(X_{1,0} + X_{1,1} - 1) \times \{(e_{2,0}, ..., e_{n,0})\},$$

que es la intersección con $\Delta_{(k)}$ de una variedad algebraica real (una recta) en $\prod_{i=1}^{n} \mathbb{R}^{k_i+1}$.

Observación 2.3.3. Obsérvese que el anterior resultado difiere del Theorem 6.4 de [**St,02**] por dos razones:

- Se demuestra que los equilibrios de Nash son solución de un sistema de ecuaciones polinomiales multi-homogéneas que se describen explícitamente.
- No se incluyen desigualdades ($\{\neq 0, > 0, \geq 0\}$) en nuestra descripción de V.

La observación precedente nos muestra que no se puede suponer que V sea una variedad algebraica de dimensión 0, es decir, no se puede suponer que V sea finito ni que sólo haya un número finito de equilibrios.

2.4. Sub-juegos de un juego de n personas

Analicemos la noción de subjuego de un juego de n personas. Para ello introduzcamos la siguiente notación: Dado un multi-índice $(k) = (k_1, ..., k_n)$, denotemos por $\mathscr{P}_{(k)}$ la siguiente familia

$$\mathscr{P}_{(k)} := \prod_{i=1}^{n} (\mathscr{P}(\{0, ..., k_i\}) \setminus \{\emptyset\})$$

Dado $\mathcal{P} = (P_1, ..., P_n) \in \mathscr{P}_{(k)}$ tendremos un nuevo multi-índice

$$(k)_{\mathcal{P}} = (\sharp(P_1) - 1, ..., \sharp(P_n) - 1) \in \mathbb{N}^n,$$

y tendremos una nueva familia de símplices:

$$\Delta_{(k)}^{\mathcal{P}} = \prod_{i=1}^{n} \Delta_{k_i}^{P_i} = \prod_{i=1}^{n} CH(\{e_{ij} : j \in P_i\}) \cong \prod_{i=1}^{n} \left(\Delta_{\sharp(P_i)-1} \right) = \Delta_{(k)_{\mathcal{P}}}.$$

Para cada i, el símplex $\Delta_{k_i}^{P_i}$ puede identificarse con una de las caras de dimensión $\sharp(P_i)-1$ de Δ_{k_i}: es la cara de Δ_{k_i} dada mediante:

$$\Delta_{k_i}^{P_i} = \{x = (x_{i,0}, \ldots, x_{i,k_i}) \in \Delta_{k_i} \ : \ \forall j \notin P_i, \ x_{i,j} = 0\}.$$

En particular, podemos identificar $\Delta_{(k)}^{\mathcal{P}}$ con el subconjunto de $\Delta_{(k)}$ dado por el productos cartesiano de esas caras, es decir,

$$\Delta_{(k)}^{\mathcal{P}} \cong \prod_{i=1}^{n} \{x = (x_{i,0}, \ldots, x_{i,k_i}) \in \Delta_{k_i} \ : \ \forall j \notin P_i, \ x_{i,j} = 0\} \subseteq \Delta_{(k)}. \tag{2.4.1}$$

A partir de este punto, mantendremos estas identificaciones. Finalmente, dada la función $f : \Delta_{(k)} \longrightarrow \mathbb{R}$ y dado $\mathcal{P} \in \mathscr{P}_{(k)}$ podemos considerar la función:

$$f^{\mathcal{P}} : \Delta_{(k)}^{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathbb{R},$$

definida como la restricción de f a $\Delta_{(k)}^{\mathcal{P}}$, es decir:

$$f^{\mathcal{P}} := f \mid_{\Delta_{(k)}^{\mathcal{P}}} .$$

Nótese que se trata simplemente de sustituir por 0 aquellas variables de f que no estén en la lista determinada por $\mathcal{P}$.

Definición 9 (**Subjuego de un juego de n personas**). *Con las notaciones precedentes, sea $((k), f)$ un juego de n personas con $f = (f_1, \ldots, f_n)$. y dado $\mathcal{P} = (P_1, ..., P_n) \in \mathscr{P}_{(k)}$, llamaremos subjuego del juego $((k), f)$ determinado por $\mathcal{P}$ al juego de n personas dado por*

$$((k)_{\mathcal{P}}, f^{\mathcal{P}}) = ((k)_{\mathcal{P}}, (f_1^{\mathcal{P}}, \ldots, f_n^{\mathcal{P}})).$$

Los subjuegos de un juego de n personas generalizados (resp. de Nash, multi-homogénegos) son, obviamente, juegos de n personas generalizados (resp. de Nash, multi-homogéneos).

Observación 2.4.1. Nótese que si el juego $((k), f)$ es multi-homogéneo, y si $\mathcal{P} = (P_1, \ldots, P_n)$, definamos el ideal de $\mathbb{R}[\underline{X}_1, ..., \underline{X}_n]$ mediante:

$$\mathfrak{P} = (\{X_{i,j} : 1 \leq i \leq n, j \in \{0, ..., k_i\} \setminus P_i\}).$$

Entonces, para cada $f \in \mathbb{R}[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n]$, se tiene que $f^{\mathcal{P}}$ es la clase de restos módulo $\mathfrak{P}$ definida por f, esto es:

$$f^{\mathcal{P}} := f + \mathfrak{P} \in \mathbb{R}[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n]/\mathfrak{P}.$$

Definamos en $\mathcal{P}_{(k)}$ la relación de orden parcial siguiente:
Dados $\mathcal{P} = (P_1, \ldots, P_n), \mathcal{Q} = (Q_1, \ldots, Q_n) \in \mathcal{P}_{(k)}$, diremos que $\mathcal{P} \leq \mathcal{Q}$ si y solamente si

$$\forall i, 1 \leq i \leq n, \ P_i \subseteq Q_i.$$

Obsérvese que si estamos en el caso multi-homogéneo y si $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ son los ideales obtenidos respectivamente de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ con el método precedente, se tiene que:

$$\mathfrak{Q} \supseteq \mathfrak{P} \Longleftrightarrow \mathcal{P} \leq \mathcal{Q}.$$

Proposición 2.4.2 (**Ser equilibrio es hereditario**). *Con las notaciones precedentes, dado un juego de Nash $((k), f)$ y dados $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathcal{P}_{(k)}$. Si $\mathcal{P} \leq \mathcal{Q}$, y si $\underline{s} = (s_1, ..., s_n) \in \Delta_{(k)}^{\mathcal{P}}$ es un equilibrio de Nash para $\mathcal{Q}$, entonces también es un equilibrio de Nash del sub-juego determinado por $\mathcal{P}$.*
El resultado en sentido ascendente no es cierto en general. Es decir, hay juegos de n personas $((k), f)$ tales que poseen equilibrios de Nash de subjuegos determinado por $\mathcal{P}$ que no han de ser equilibrios de Nash de $\mathcal{Q}$.

Demostración. La primera afirmación es obvia. Para la segunda, un ejemplo sencillo sería el siguiente: Consideramos cualquier multi-índice $(k) = (k_1, ..., k_n)$ con $k_i \geq 1$ para todo i y las funciones de recompensa todas iguales

$$f_i = (X_{1,0} + 2X_{1,1}) \cdot \prod_{t=2}^{n} X_{t,0}.$$

Definimos la cara del simplex mediante

$$\mathcal{P} = (\{0\}, \{0\}, ..., \{0\}) \in \mathscr{P}_{(k)}.$$

Observamos que el punto $\underline{s} = (e_{1,0}, ..., e_{n,0})$ es un equilibrio de Nash del sub-juego determinado por $\mathcal{P}$. Sin embargo este mismo punto no es un equilibrio de Nash del subjuego determinado por

$$\mathcal{Q} = (\{0,1\}, \{0\}, ..., \{0\}) \in \mathscr{P}_{(k)}.$$

dado que el único equilibrio de Nash de este segundo sub-juego es el punto $(e_{1,1}, e_{2,0}, ..., e_{n,0})$. □

Corolario 2.4.3. *Con las notaciones precedentes:*

i) El conjunto de los equilibrios de un subjuego de un juego multi-homogéneo y convexo es semi-algebraico y compacto.

ii) Todo subjuego de un juego de Nash posee equilibrios.

iii) Todo subjuego de un juego de n personas generalizado dado por funciones quasi-lineales posee equilibrios de Nash.

iv) Para cada juego $((k), f)$ multi-homogéneo y convexo, existe una variedad algebraica real V tal que el conjunto de todos los equilibrios de Nash de todos sus subjuegos están contenido en

$$\Delta_{(k)} \cap V.$$

Más aún, $\Delta_{(k)} \cap V$ no es denso Zariski en $\Delta_{(k)}$ y tiene interior vacío con respecto a la topología de $\Delta_{(k)}$.

Demostración. Evidentemente las tres primeras propiedades apelan a propiedades hereditarias sobre las funciones $f = (f_1, \ldots, f_n)$ involucradas. Por tanto, sus propiedades se mantienen para subjuegos y las propiedades alegadas siguen siendo ciertas. La cuarta propiedad enunciada se sigue obviamente de la Proposición 2.3.1 anterior. □

2.5. Ecuaciones tóricas de Equilibrios totalmente mezclados

La dificultad esencial para determinar ecuaciones polinomiales que describan los equilibrios de un juego de Nash estriba en que estas ecuaciones tienden a mezclar los equilibrios del juego con los equilibrios de todos sus subjuegos. Una manera de separar estos dos conjuntos pasa por tratar con los equilibrios totalmente mezclados de un juego.

Definición 10 (**Equilibrios totalmente mezclados**). *Sea $((k), f)$ un juego de n personas multi-homogéneo donde $(k) = (k_1, \ldots, k_n)$. Sea $N := \sum_{i=1}^{n}(k_i + 1)$ el número total de variables involucradas. Denotemos por $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ el grupo multiplicativo de los números reales no nulos. Un equilibrio de Nash totalmente mezclado de $((k), f)$ es un equilibrio de Nash $\underline{s}$ de $((k), f)$ que pertenece a $(\mathbb{R}^*)^N$, es decir, que no tiene coordenadas nulas. Denotaremos por*

$$Eq^*((k), f) := Eq((k), f) \cap (\mathbb{R}^*)^N,$$

al conjunto de los equilibrios de Nash totalmente mezclados de $((k), f)$.

Proposición 2.5.1. *Si $((k), f)$ es un juego de n personas multi-homogéneo y convexo, los equilibrios de Nash totalmente mezclados de $((k), f)$ no son equilibrios de ninguno de sus subjuegos propios. Sin embargo, hay juegos de n personas multi-homogéneos y convexos que poseen equilibrios de Nash, pero no poseen equilibrios de Nash totamente mezclados. Es decir, existen juegos $((k), f)$ multi-homogéneos tales que*

$$Eq((k), f) \neq \emptyset \wedge Eq^*((k), f) = \emptyset.$$

Demostración. La primera afirmación es obvia dado que si $\underline{s}$ es un equilibro de Nash cuyas coordenadas son todas no nulas, obviamente no están en $\Delta^{\mathcal{P}}_{(k)}$, para ningún $\mathcal{P} \in \mathcal{P}_{(k)}$ que no sea el total.
Para la segunda afirmación basta con considerar el ejemplo siguiente: Dado cualquier $(k) := (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ tal que $k_i \geq 1$ para cada i y suponemos que todas las funciones de recompensa son iguales y satisfacen

$$f_i = \prod_{i=1}^{n} X_{i,0}$$

Obviamente, este juego de Nash posee un único equilibrio de Nash que no es totalmente mezclado $(e_{1,0}, ..., e_{n,0}) \in \Delta_{(k)}$. Para cualquier otro punto $\underline{s} \in \Delta_{(k)}$ se tiene que

$$f_i(\underline{s}) = \prod_{i=1}^{n} s_{i,0}.$$

Esta cantidad es estrictamente menor que 1 siempre que algún $s_{i,0} < 1$. □

NOTACIÓN 2.5.2 (**Equilibrios totalmente mezclados de subjuegos**). Sea $((k), f)$ un juego de n personas multi-homogéneo y convexo. Para cada $\mathcal{P} \in \mathcal{P}_{(k)}$ denotaremos por $Eq^*_{\mathcal{P}}((k), f)$ al conjunto de todos los equilibrios de Nash totalmente mezclados del subjuego determinado por $\mathcal{P}$. Es decir, con las notaciones de la Sección precedente:

$$Eq^*_{\mathcal{P}}((k), f) := Eq^*((k)_{\mathcal{P}}, f^{\mathcal{P}}).$$

Con la identificación de $\Delta^{\mathcal{P}}_{(k)}$ con un producto de caras de $\Delta_{(k)}$ como en la Identidad (2.4.1), podemos suponer $Eq^*_{\mathcal{P}}((k), f) \subseteq \Delta_{(k)}$ que tiene ceros en todas las coordenadas no determinadas por $\mathcal{P}$ y que las coordenadas determinadas por $\mathcal{P}$ son todas no nulas.

PROPOSICIÓN 2.5.3. *Con las notaciones precedentes y las identificaciones señaladas en la Identidad (2.4.1), dado un juego de n personas $((k), f)$ y dados $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathcal{P}_{(k)}$ con $\mathcal{P} \neq \mathcal{Q}$, entonces*

$$Eq^*_{\mathcal{P}}((k), f) \cap Eq^*_{\mathcal{Q}}((k), f) = \emptyset.$$

Más aún, el conjunto de todos los equilibrios de Nash de todos los subjuegos del juego $((k), f)$ se descompone mediante la partición siguiente:

$$Eq((k), f) \subseteq \bigcup_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}_{(k)}} Eq((k)_{\mathcal{P}}, f^{\mathcal{P}}) = \bigcup_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}_{(k)}} Eq^*_{\mathcal{P}}((k), f).$$

En particular, los equilibrios del juego $((k), f)$ verifican:

$$Eq((k), f) = \bigcup_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}_{(k)}} \left(Eq((k), f) \cap Eq^*_{\mathcal{P}}((k), f) \right),$$

donde $Eq((k), f) \cap Eq^*_{\mathcal{P}}((k), f)$ es un semi-algebraico localmente cerrado en $Eq((k), f)$. Además, si $\beta_0(S)$ denota el número de componentes conexas de un semi-algebraico, concluiremos que

$$\beta_0 \left(Eq((k), f) \right) \leq \sum_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}_{(k)}} \beta_0 \left(Eq((k), f) \cap Eq^*_{\mathcal{P}}((k), f) \right).$$

DEMOSTRACIÓN. A lo largo de esta demostración, por simplificar la notación, escribiremos simplemente $Eq^*_{\mathcal{P}}$ en lugar de $Eq^*_{\mathcal{P}}((k), f)$ para el juego $((k), f)$ fijado en el enunciado y para $\mathcal{P} \in \mathcal{P}_{(k)}$.
Para la primera de las afirmaciones, obsérvese que si $\mathcal{P} = (P_1, \ldots, P_n) \neq \mathcal{Q} = (Q_1, \ldots, Q_n)$ es porque existe i tal que $P_i \neq Q_i$. Por tanto, existe j, $0 \leq j \leq k_i$ tal que $j \in P_i$ y $j \notin Q_i$. En particular, con la identificación de la Identidad (2.4.1), si alguno de los conjuntos $Eq^*_{\mathcal{P}}$o $Eq^*_{\mathcal{Q}}$ fuera no vacía, entonces

- Los puntos $\underline{s} = (\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_n) \in Eq^*_{\mathcal{P}}$ satisfacen que la coordenada $(i, j)-$ésima verifica $s_{i,j} \neq 0$,
- mientras que los puntos $\underline{s} = (\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_n) \in Eq^*_{\mathcal{Q}}$ satisfacen que la coordenada $(i, j)-$ésima verifica $s_{i,j} = 0$.

Por tanto, la intersección $Eq^*_{\mathcal{P}} \cap Eq^*_{\mathcal{Q}} = \emptyset$. Para la segunda propiedad, supongamos que $\mathcal{P} = (P_1, \ldots, P_n) \in \mathcal{P}_{(k)}$ es un subjuego de $((k), f)$. Y sea $\underline{s} = (\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_n)$ un equilibrio de Nash del juego determinado por $\mathcal{P}$. Para cada i, $0 \leq i \leq n$, definamos:

$$Q_i := \{j \in P_i \ : \ s_{i,j} \neq 0\}.$$

Y consideremos el juego determinado por la lista $\mathcal{Q} := (Q_1, \ldots, Q_n)$. Obviamente, tenemos que $\mathcal{Q} \leq \mathcal{P}$ y, como la condición de ser equilibrio de Nash es hereditaria, entonces $\underline{s}$ es también un equilibrio de Nash del juego determinado por $\mathcal{Q}$. Pero, por la definición de $\mathcal{Q}$, $\underline{s}$ es un equilibrio de Nash totalmente mezclado para el subjuego determinado por $\mathcal{Q}$. En conclusión,

$$\underline{s} \in Eq^*_{\mathcal{Q}},$$

y habremos probado la segunda afirmación. Para la tercera afirmación, obsérvese que si $\mathcal{P} = (P_1, \ldots, P_n) \in \mathcal{P}_{(k)}$, entonces:

$$Eq((k), f) \cap Eq^*_{\mathcal{P}} = \left\{ \underline{s} = (\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_n) \in Eq((k), f) \ : \ \begin{bmatrix} \forall i, 1 \leq i \leq n, \forall j \in P_i, \ \ s_{i,j} \neq 0 \\ \text{y} \\ \forall i, 1 \leq i \leq n, \forall j \notin P_i, \ \ s_{i,j} = 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

En particular, $Eq((k), f) \cap Eq^*_{\mathcal{P}}$ es localmente cerrado en $Eq((k), f)$. En cuanto a la última afirmación, la primera desigualdad se sigue del hecho de que β_0 es subaditiva en este caso. Así, si C es una componente conexa de $Eq((k), f)$, existirá $\mathcal{P}$ tal que $C \cap (Eq((k), f) \cap Eq^*_{\mathcal{P}}) \neq \emptyset$. Entonces, en el caso peor, $C \cap (Eq((k), f) \cap Eq^*_{\mathcal{P}})$ es conexa por arcos y, por tanto,

$$\beta_0 \left(C \cap (Eq((k), f) \cap Eq^*_{\mathcal{P}}) \right) \geq 1.$$

Recíprocamente, si dos componentes conexas C_1, C_2 de $Eq((k), f)$ se unieran para formar una misma componente conexa de $Eq((k), f) \cap Eq^*_{\mathcal{P}}$, como, en el caso semi-algebraico, conectividad es conectividad por caminos, entonces, esto significaría que C_1 y C_2 se conectan por algún camino en $Eq((k), f) \cap Eq^*_{\mathcal{P}}$. Pero, entonces se conectarán también por algún camino en $Eq((k), f)$. □

2.5.1. Ecuaciones multi-homogéneas para los equilibrios totalmente mezclados. Con las notaciones precedentes, fijemos un juego de Nash $((k), f)$. Sea $\mathcal{P} = (P_1, \ldots, P_n) \in \mathcal{P}_{(k)}$ una lista de familias no vacías de estrategias puras para los n jugadores. Definamos $\nu_{\mathcal{P}}(i) := min(\mathcal{P}_i)$, $1 \leq i \leq n$. A partir de la lista $\mathcal{P}$, definamos la familia siguiente de polinomios multi-lineales siguiente

$$\omega_{\mathcal{P}} := \{h^{\mathcal{P}}_{i,j} : \ 1 \leq i \leq n, \ j \in \mathcal{P}_i \setminus \{\nu_{\mathcal{P}}(i)\}\},$$

dada mediante

$$h^{\mathcal{P}}_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial X_{i,\nu(i)}}(\underline{X_1}, ..., \underline{X_n}) - \frac{\partial f_i}{\partial X_{i,j}}(\underline{X_1}, ..., \underline{X_n}) \in \mathbb{R}[\underline{X_1}, ..., \underline{X_n}],$$

donde $\nu(i) := \nu_{\mathcal{P}}(i) = min(\mathcal{P}_i)$ y $f = (f_1, ., , , f_n)$.

Obsérvese que la familia $\omega_{\mathcal{P}}$ está formada por $M_{\mathcal{P}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \sharp(\mathcal{P}_i)\right) - n$ polinomios multi-lineales.

Definamos la variedad algebraica real afín multi-homogénea siguiente

$$V(\mathcal{P}) := \{\underline{x} = (\underline{x_1}, ..., \underline{x_n}) \in \mathbb{R}^N : \ [x_{i,j} = 0, 1 \leq i \leq n, \ j \notin \mathcal{P}_i], \quad [h(\underline{x}) = 0, \ \forall h \in \omega_{\mathcal{P}}]\}.$$

Se trata de una variedad dada por $N - n$ ecuaciones polinomiales.

Consideremos también los ortantes no negativo ($\mathscr{O}_N$) y positivo ($\mathscr{O}^*_N$) de $\mathbb{R}^N$, definidos de la forma siguiente

$$\mathscr{O}_N := \{\underline{x} = (\underline{x_1}, ..., \underline{x_n}) \in \mathbb{R}^N : \ x_{i,j} \geq 0, \ 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq k_i\},$$

$$\mathscr{O}^*_N := \{\underline{x} = (\underline{x_1}, ..., \underline{x_n}) \in \mathbb{R}^N : \ x_{i,j} > 0, \ 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq k_i\},$$

y el toro N- dimensional

$$\mathbb{T}^N := \{\underline{x} = (\underline{x_1}, ..., \underline{x_n}) \in \mathbb{R}^N : \ x_{i,j} \neq 0, \ 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq k_i\}.$$

Dado $\mathcal{P} = (P_1, \ldots, P_n) \in \mathcal{P}_{(k)}$ podemos también considerar los ortantes y toros asociados a las caras determinadas por $\mathcal{P}$:

$$\mathscr{O}_N(\mathcal{P}) := \{\underline{x} = (\underline{x_1}, ..., \underline{x_n}) \in \mathbb{R}^N : \ [x_{i,j} = 0, 1 \leq i \leq n, \ j \notin \mathcal{P}_i], \ \wedge \ [x_{i,t} \geq 0, \ 1 \leq i \leq n, t \in \mathcal{P}_i]\},$$

$$\mathscr{O}^*_N(\mathcal{P}) := \{\underline{x} = (\underline{x_1}, ..., \underline{x_n}) \in \mathbb{R}^N : \ [x_{i,j} = 0, 1 \leq i \leq n, \ j \notin \mathcal{P}_i], \ \wedge \ [x_{i,t} > 0, \ 1 \leq i \leq n, t \in \mathcal{P}_i]\},$$

$$\mathbb{T}^{\mathcal{P}} := \{\underline{x} = (\underline{x_1}, ..., \underline{x_n}) \in \mathbb{R}^N : \ [x_{i,j} = 0, 1 \leq i \leq n, \ j \notin \mathcal{P}_i], \ \wedge \ [x_{i,t} \neq 0, \ 1 \leq i \leq n, t \in \mathcal{P}_i]\}.$$

Si $N_{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^{n} \sharp(\mathcal{P}_i)$, tendremos los isomorfismos obvios

$$\mathscr{O}_N(\mathcal{P}) \cong \mathscr{O}_{N_{\mathcal{P}}}, \qquad \mathscr{O}^*_N(\mathcal{P}) \cong \mathscr{O}^*_{N_{\mathcal{P}}}, \qquad \mathbb{T}^{\mathcal{P}} \cong \mathbb{T}^{N_{\mathcal{P}}}.$$

Seguidamente, consideramos los ceros *tóricos* en la cara determinada por la lista $\mathcal{P}$

$$V_{\mathbb{T}}(\mathcal{P}) = V(\mathcal{P}) \cap \mathbb{T}^{\mathcal{P}}.$$

Tenemos el siguiente resultado que caracteriza los equilibrios totalmente mezclados de los subjuegos de un juego de Nash.

Teorema 2.5.4 (**Ecuaciones Multi-homogéneas de equilibrios totalmente mezclados de un Juego de Nash**). *Con las notaciones precedentes, sea $((k), f)$ un juego de Nash, donde $f = (f_1, \ldots, f_n)$ y las f_i's son funciones multi-lineales. Supongamos $(k) = (k_1, \ldots, k_n)$ y sea $N := \sum_{i=1}^{n}(k_i+1)$ el número total de variables involucradas. Sea $\mathcal{P} = (P_1, \ldots, P_n) \in \mathcal{P}_{(k)}$ una lista de estrategias puras no vacía para los n jugadores del juego dado. Entonces, los equilibrios totalmente mezclados del subjuego dado por $\mathcal{P}$ satisfacen*

$$Eq^*_{\mathcal{P}}((k), f) = V(\mathcal{P}) \cap \mathscr{O}^*_N(\mathcal{P}) \cap \Delta_{(k)} = V_{\mathbb{T}}(\mathcal{P}) \cap \mathscr{O}_N(\mathcal{P}) \cap \Delta_{(k)}.$$

En particular, los equilibrios del juego de Nash satisfacen:

$$Eq((k), f) \subseteq \bigcup_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}_{(k)}} Eq^*_{\mathcal{P}}((k), f) = \bigcup_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}_{(k)}} \left(V(\mathcal{P}) \cap \mathscr{O}^*_N(\mathcal{P}) \cap \Delta_{(k)}\right). \tag{2.5.1}$$

Más aún, definiendo el conjunto de todas las estrategias puras originales como $\mathcal{U} := \prod_{i=1}^{n}\{0,1,\ldots,k_i\} \in \mathcal{P}_{(k)}$, *entonces el conjunto de los equilibrios de Nash totalmete mezclados del juego* $((k),f)$ *original viene dado por la identidad siguiente:*

$$Eq^*((k),f) = V(\mathcal{U}) \cap \mathscr{O}_N^*(\mathcal{U}) \cap \Delta_{(k)} = V_{\mathbb{T}}(\mathcal{U}) \cap \mathscr{O}_N(\mathcal{U}) \cap \Delta_{(k)}. \tag{2.5.2}$$

Demostración. Sea $\underline{s} = (\underline{s_1},...,\underline{s_n}) \in Eq_{\mathcal{P}}^* \subseteq \Delta_{(k)}$ un equilibrio de Nash totalmente mezclado del subjuego determinado por $\mathcal{P} = (P_1,\ldots,P_n)$.
Utilizando la fórmula de Euler tenemos que, como cada f_i es multi-lineal, se cumple para cada i

$$f_i = \sum_{j=0}^{k_i} X_{i,j} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial X_{i,j}} \qquad 1 \le i \le n.$$

Observemos además que para cada j, $0 \le j \le k_i$, se tiene:

$$\frac{\partial f_i}{\partial X_{i,j}} = f_i(\underline{X}_1,...,\underline{X}_{i-1},e_{i,j},\underline{X}_{i+1},...,\underline{X}_n) \qquad 1 \le i \le n.$$

Por lo tanto, por la definición de $\underline{s}$ de ser equilibrio totalmente mezclado de un subjuego determinado por $\mathcal{P}$ se verificarán directamente las identidades:

$$\begin{cases} \sum\limits_{t\in P_i} s_{i,j} - 1 = 0, & 1 \le i \le n \\ s_{i,j} = 0, & 1 \le i \le n,\ \ j \notin P_i \\ f_i(\underline{s}) - f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,j}) \ge 0, & 1 \le i \le n,\ \ j \in P_i. \end{cases} , \tag{2.5.3}$$

recordando la notación de $f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,j}) = f_i(\underline{s_1},...,\underline{s_{i-1}},e_{i,j},\underline{s_{i+1}},...,\underline{s_n})$. Ahora, por $\underline{s} \in \Delta_{(k)}$ tenemos que $\sum\limits_{j=0}^{k_i} s_{i,j} - 1 = 0$, y sabiendo que $s_{i,j} = 0$ para todo $j \notin P_i$, esta expresión equivale a $\sum\limits_{t\in P_i} s_{i,t} - 1 = 0$.
Aplicando estas ecuaciones y la identidad de Euler de nuevo, obtenemos que para cada $i \in \{1,...,n\}$ y $j \in P_i$ tenemos

$$f_i(\underline{s}) - f_{\underline{s}}^{(i)}(e_{i,j}) = f_i(\underline{s}) - \frac{\partial f_i}{\partial X_{i,j}}(\underline{s}) = \sum_{t\in P_i} s_{i,t}\frac{\partial f_i}{\partial X_{i,t}}(\underline{s}) - \left(\sum_{t\in P_i} s_{i,t}\right)\frac{\partial f_i}{\partial X_{i,j}}(\underline{s})$$

Con lo que deducimos que $\underline{s}$ satisface el grupo de ecuaciones e inecuaciones siguiente

$$\begin{cases} \sum\limits_{t\in P_i} s_{i,t} - 1 = 0, & 1 \le i \le n \\ s_{i,j} = 0, & 1 \le i \le n,\ \ j \notin P_i \\ \sum\limits_{t\in P_i} s_{i,t}\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_{i,t}}(\underline{s}) - \frac{\partial f_i}{\partial X_{i,j}}(\underline{s})\right) \ge 0, & 1 \le i \le n,\ \ j \in P_i. \end{cases} . \tag{2.5.4}$$

Por otro lado, si $\underline{s} \in Eq_{\mathcal{P}}^* \subseteq \mathscr{O}_N^*(\mathcal{P})$ es un equilibrio totalmente mezclado del subjuego, entonces sus coordenadas no nulas son estrictamente positivas, por lo tanto,

$$f_i(\underline{s}) - \frac{\partial f_i}{\partial X_{i,j}}(\underline{s}) \ge 0 \quad \Longrightarrow \quad s_{i,t}\left(f_i(\underline{s}) - \frac{\partial f_i}{\partial X_{i,j}}(\underline{s})\right) \ge 0, \quad 1 \le i \le n,\ \ t,j \in P_i \tag{2.5.5}$$

Ahora, como $\sum\limits_{t\in P_i} s_{i,t} - 1 = 0$ para cada i, tendremos que

$$f_i(\underline{s}) = \left(\sum_{t\in P_i} s_{i,t}\right) f_i(\underline{s}) = \sum_{j\in P_i} s_{i,j}\frac{\partial f_i}{\partial X_{i,j}}(\underline{s})$$

y de esta identidad, concluimos que para cada $j \in P_i$, separándola a la izquierda obtenemos

$$s_{i,j}\left(f_i(\underline{s}) - \frac{\partial f_i}{\partial X_{i,j}}(\underline{s})\right) = \sum_{t\neq j,\ t\in P_i} s_{i,t}\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_{i,t}}(\underline{s}) - f_i(\underline{s})\right).$$

De la parte derecha de la ecuación vemos que

$$s_{i,t}\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_{i,t}}(\underline{s}) - f_i(\underline{s})\right) \le 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{t\neq j,\ t\in P_i} s_{i,t}\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_{i,t}}(\underline{s}) - f_i(\underline{s})\right) \le 0,$$

por lo que si unimos esto con la ecuación anterior 2.5.5 concluimos que

$$s_{i,j}\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_{i,t}}(\underline{s}) - f_i(\underline{s})\right) = 0 \quad \forall j \in P_i,$$

y como además, $s_{i,j} \neq 0$, $\forall j \in P_i$, el equilibrio $\underline{s}$ satisface las ecuaciones

$$\frac{\partial f_i}{\partial X_{i,t}}(\underline{s}) - f_i(\underline{s}) = 0 \quad \forall j \in P_i.$$

Esto significa, que $\underline{s}$ es equilibrio de Nash totalmente mezclado de un subjuego determinado por $\mathcal{P}$ si y solamente si f_i alcanza su máximo simultáneamente en $\underline{s}$ y en todos los vértices $\{e_{i,j} : j \in P_i\}$ de la cara determinada por P_i. Por lo tanto esta propiedad también significa que

$$\frac{\partial f_i}{\partial X_{i,t}}(\underline{s}) - \frac{\partial f_i}{\partial X_{i,j}}(\underline{s}) = 0 \quad \forall t, j \in P_i.$$

Por último, para cada i, $1 \leq i \leq n$, elijamos $\nu(i) = min(P_i)$ y observamos que son equivalentes

$$\frac{\partial f_i}{\partial X_{i,j}}(\underline{s}) - \frac{\partial f_i}{\partial X_{i,t}}(\underline{s}) = 0 \quad \forall t, j \in P_i. \iff \frac{\partial f_i}{\partial X_{i,j}}(\underline{s}) - \frac{\partial f_i}{\partial X_{i,\nu(i)}}(\underline{s}) = 0 \quad \forall j \in P_i.$$

Por lo tanto, sea $\underline{s} \in Eq^*_{\mathcal{P}}$ un equilibrio totalmente mezclado del subjuego determinado por $\mathcal{P}$ se ha de tener

- $\underline{s} \in \mathscr{O}^*_N(\mathcal{P})$ por ser totalmente mezclado
- $\underline{s} \in \Delta_{(k)}$ por definición de equilibrio, se cumplen las ecuaciones $\sum_{t \in P_i} s_{i,t} - 1 = 0,\ 1 \leq i \leq n$
- $\underline{s} \in V(\mathcal{P})$ por cumplir las ecuaciones

$$\begin{cases} s_{i,j} = 0, & 1 \leq i \leq n,\ \ j \notin P_i \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial X_{i,\nu(i)}}(\underline{s}) - \dfrac{\partial f_i}{\partial X_{i,j}}(\underline{s}) = 0, & 1 \leq i \leq n,\ \ j \in P_i,\ j > \nu(i). \end{cases}$$

Por lo que queda demostrado

$$Eq^*_{\mathcal{P}} \subseteq V(\mathcal{P}) \cap \mathscr{O}^*_N(\mathcal{P}) \cap \Delta_{(k)}.$$

La demostración del otro contenido se da de forma inversa a la demostración anterior.
Teniendo en cuenta que $\sum_{t \in P_i} s_{i,t} - 1 = 0$ para cada $\underline{s} \in \Delta_{(k)}$, y que $\underline{s} \in \mathscr{O}^*_N(\mathcal{P})$, entonces si $\underline{s} \in V(\mathcal{P})$ para todo i se cumple que

$$\frac{\partial f_i}{\partial X_{i,\nu(i)}}(\underline{s}) - \frac{\partial f_i}{\partial X_{i,j}}(\underline{s}) = 0,\ \ j \in P_i,\ j > \nu(i) \Longrightarrow \frac{\partial f_i}{\partial X_{i,t}}(\underline{s}) - \frac{\partial f_i}{\partial X_{i,j}}(\underline{s}) = 0 \quad \forall t, j \in P_i. \Longrightarrow$$

$$\sum_{t \in P_i} s_{i,t}\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_{i,t}}(\underline{s}) - \frac{\partial f_i}{\partial X_{i,j}}(\underline{s})\right) = 0,\ \ j \in P_i \Longrightarrow \sum_{j \in P_i} s_{i,j}\frac{\partial f_i}{\partial X_{i,j}}(\underline{s}) - \left(\sum_{t \in P_i} s_{i,t}\right) f_i(\underline{s}) = 0,\ \ j \in P_i$$

$$\Longrightarrow f_i(\underline{s}) - \frac{\partial f_i}{\partial X_{i,j}}(\underline{s}) = 0 \text{ para cada i, } 1 \leq i \leq n,\ j \in P_i,$$

lo cual verifica la condición de que $\underline{s}$ es equilibrio ya que

$$f_i(\underline{s}) - f^{(i)}_{\underline{s}}(e_{i,j}) \geq 0,\ \ 1 \leq i \leq n,\ \ j \in P_i$$

Por lo que queda probado el segundo contenido, y con él la igualdad.
Para la afimación 2.5.1 tomamos $\underline{s} \in Eq((k), f)$ un equilibrio de un juego de Nash y definimos el subjuego $\mathcal{P} = (P_1, ..., P_n)$, tal que para cada i, $1 \leq i \leq n$ tenemos

$$j \in P_i \Longleftrightarrow s_{i,j} \neq 0$$

por ser los equilibrios hereditarios, $\underline{s} \in Eq^*_{\mathcal{P}} = V(\mathcal{P}) \cap \mathscr{O}^*_N(\mathcal{P}) \cap \Delta_{(k)}$ por lo que queda probada la afirmación. El caso del conjunto total $\mathcal{U} = \{\{0, ..., k_1\}, ..., \{0, ..., k_n\}\}$ es un caso particular de lo anterior ya que

$$Eq^*((k), f) = Eq^*((k)_{\mathcal{U}}, f^{\mathcal{U}}) = Eq^*_{\mathcal{U}}.$$

□

COROLARIO 2.5.5 (**Número de componentes conexas del conjunto de equilibros de Nash totalmente mezclados**). *Sea $((k), f)$ un juego de Nash con funciones de recompensa multi-lineales. Supongamos $(k) = (k_1, \ldots, k_n)$ y sea $N := \sum_{i=1}^{n}(k_i + 1)$ el número total de variables involucradas. Entonces, el número de componentes conexas del conjunto de equilibrios totalmente mezclados está acotado por:*

$$\beta_0(Eq^*((k), f)) \leq d(2d-1)^{2N-1},$$

donde $d := \max\{n-1, 3\}$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el conjunto $\mathcal{U} := \prod_{i=1}^{n}\{0, \ldots, k_i\}$ descrito en el Teorema precedente y la familia de ecuaciones asociadas:

$$Ec(\mathcal{U}) := \begin{cases} \sum_{j=0}^{k_i} X_{i,j} - 1 = 0, & 1 \leq i \leq n \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial X_{i,t}}(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n) - \dfrac{\partial f_i}{\partial X_{i,j}}(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n) = 0, & 1 \leq i \leq n, 0 \leq j, t \leq k_i. \end{cases}$$

No hay ecuaciones $X_{i,j} = 0$ porque fuera de $\mathcal{U}$ no quedan variables. Añadamos las ecuaciones del ortante $\mathcal{O}_N^\star$ y tenemos la siguiente familia de ecuaciones en inecuaciones polinomiales que definen $Eq^*((k), f)$:

$$\begin{cases} X_{i,j} > 0, & 1 \leq i \leq n,\ 0 \leq j \leq k_i, \\ \sum_{j=0}^{k_i} X_{i,j} - 1 = 0, & 1 \leq i \leq n \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial X_{i,t}}(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n) - \dfrac{\partial f_i}{\partial X_{i,j}}(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n) = 0, & 1 \leq i \leq n, 0 \leq j, t \leq k_i. \end{cases}$$

Como en la demostración de la Proposición 2.2.2, añadamos un nuevo grupo de variables $\{Z_{i,j} : 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq k_i\}$ y construyamos un nuevo sistema de ecuaciones polinoniales en $2N$ variables:

$$\begin{cases} X_{i,j}Z_{i,j}^2 - 1 = 0, & 1 \leq i \leq n,\ 0 \leq j \leq k_i, \\ \sum_{j=0}^{k_i} X_{i,j} - 1 = 0, & 1 \leq i \leq n \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial X_{i,t}}(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n) - \dfrac{\partial f_i}{\partial X_{i,j}}(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n) = 0, & 1 \leq i \leq n, 0 \leq j, t \leq k_i. \end{cases} \tag{2.5.6}$$

Definamos $W \subseteq \mathbb{R}^{2N}$ como el conjunto algebraico real de los puntos $(\underline{x}, \underline{z}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ que satisfacen las ecuaciones del sistema (2.5.6). Aplicando el Teorema de Milnor-Thom-Oleinik y Petrovski (Teorema 2.2.1 anterior), concluimos que

$$\beta_0(W) \leq d(2d-1)^{2N-1},$$

donde $d = \max\{n-1, 3\}$, porque esa es una cota superior de los grados de todas las ecuaciones que aparecen en la lista (2.5.6). Para concluir, y como en la Demostración de la Proposición 2.2.2, consideremos la proyección $\pi : \mathbb{R}^{2N} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ que "olvida" las componentes en $\underline{z}$ (i.e. $\pi(\underline{x}, \underline{z}) = \underline{x}$). Claramente se observa que

$$\pi(W) = Eq^*((k), f).$$

Por tanto, como π preserva componentes conexas, concluimos:

$$\beta_0(Eq^*((k), f)) \leq \beta_0(W) \leq d(2d-1)^{2N-1}.$$

□

2.6. Ceros Tóricos de Sistemas "Sparse" (ralos)

Una de las dificultades que hemos tenido en este trabajo es la utilización de la cota BKK y del Teorema B de D.N. Bernstein en [**Be,76**] para analizar el comportamiento y número de los Equilibrios de Nash totalmente mezclados (ver Apéndice B). La dificultad mayor ha sido el verificar que, cuando se trata de juegos de Nash, la **Hypothesis-Bernstein** (cf. Teorema B.8.1) es cierta. Muchos autores la dan por cierta (y discutimos algunos casos en la Sección 2.8 siguiente). Al no poder verificarla, hemos debido analizar la finitud genérica de los equilibrios de Nash totalmente mezclados haciendo una demostración completa de este hecho. Es lo que se describe en esta Sección.

2.6.1. Notaciones Básicas sobre "sparsity" y tóricos. Seguiremos las Notaciones introducidas en las secciones B.7 y B.8 del Apéndice B. Comencemos retomando las notaciones usuales. Así, sea $(k) := (k_1, \ldots, k_n)$ un multi-índice que representa una lista de grupos de variables $\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n$ con las notaciones habituales:

$$\underline{X}_i := \{X_{i,j} \ : \ 0 \leq j \leq k_i\}.$$

Denotemos por $\mathbb{C}[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n]$ el anillo de los polinomios complejos en esos grupos de variables y sean

- $N := N_{(k)} := \sum_{i=1}^{n} (k_i + 1)$ el número total de variables involucradas.
- $mL^{\mathbb{C}}_{(k)} \subseteq \mathbb{C}[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n]$ denotará a los polinomios que son multi-lineales en esos grupos de variables.
- $m\mathscr{L}^r_{(k)} = \left(mL^{\mathbb{C}}_{(k)}\right)^r$ denotará las listas $f = (f_1, \ldots, f_r)$ de r polinomios que son multi-lineales.
- Para un multi-grado $(d) := (d_1, \ldots, d_n)$, denotaremos por $mH^{(k)}_{(d)} := mH_{(d)}(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n) \subseteq \mathbb{C}[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n]$ los polinomios multi-homogéneos con coeficientes complejos en estos grupos de variables de multi-grado (d).
- Para una lista de multi-grados $((d)) := ((d_1), \ldots, (d_r))$ denotaremos por

$$m\mathscr{H}^{(k)}_{((d))} := \left(\prod_{i=1}^{r} mH^{(k)}_{(d_i)}\right),$$

las listas $f = (f_1, \ldots, f_r)$ de r polinomios multi-homogéneos con coeficientes complejos de multi-grados respectivos (d_i), para $1 \leq i \leq r$.

En los casos en que se consideren subanillos del cuerpo $\mathbb{C}$ de los complejos como anillo de coeficientes de los polinomios involucrados, se especificará conveniente. Consideremos $Q \subseteq \mathbb{R}^N_+$ un politopo de Newton contenido en el ortante no negativo. En este caso, tendremos que $Q \cap \mathbb{Z}^N = Q \cap \mathbb{N}^N$ y denotaremos por A_Q esta intersección, es decir,

$$A_Q := Q \cap \mathbb{Z}^N.$$

Como Q es un politopo de Newton, tendremos que $Q = CH(A_Q)$ es la envolvente convexa de A_Q. Para adaptar los índices en $\mathbb{R}^N_+$ a los índices usados para indicar a los grupos de variables $\underline{X_1}, ..., \underline{X_n}$ antes indicados, denotaremos los elementos de $A_Q \subseteq Q \cap \mathbb{N}^N$ mediante $\underline{\mu} = (\underline{\mu_1}, ..., \underline{\mu_n})$ donde

$$\underline{\mu_i} = (\mu_{i,0}, ..., \mu_{i,k_j}) \in \mathbb{N}^{k_i+1}.$$

Dado un multigrado $(d) := (d_1, \ldots, d_n)$, denotemos por $mH^{(k)}_{(d)}(Q)$ el espacio vectorial complejo de los polinomios en $mH^{(k)}_{(d)}$ cuyo soporte (cf. Definición 34) está contenido en Q, es decir:

$$mH^{(k)}_{(d)}(Q) := \{f \in mH^{(k)}_{(d)} \ : \ supp(f) \subseteq Q\}.$$

Nótese que si Q es fijado, la lista de multi-grados (d) se sigue de los puntos en A_Q, por lo que podemos omitir el sub-índice (d) de nuestra notación escribiendo simplemente $mH^{(k)}(Q)$. Al mismo tiempo, la condición de multi-homogéneo obliga a que el politopo Q sea, en realidad, un producto de politopos $Q := Q_1 \times \cdots \times Q_n$ donde cada Q_i involucra solamente exponentes monomiales en $\mathbb{N}^{k_i+1}$ todos del mismo grado. La notación $mH^{(k)}(Q)$ enfatiza, precisamente, la condición de multi-homogéneo que debe estar presente en el politopo Q.

Definición 11 (**Polinomios mutli-homogéneos sparse ("ralos")**). *Los polinomio multi-homogéneos $f \in \mathbb{C}[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n]$ tales que $f \in mH^{(k)}(Q)$ se denominan polinomios multi-homogéneos sparse (ralos) con soporte en el politopo Q. En el caso de que el politopo Q defina polinomios multi-lineales, escribiremos $mL^{(k)}(Q)$.*

Observación 2.6.1 (**Sparse vs. Fewnomials**). No debe confundirse la condición "sparse" con la condición usualmente denominada "fewnomials" (literalmente pocos monomios). Es decir, un polinomio sparse no tiene por qué tener pocos coeficientes no nulos sino simplemente su soporte está confinado en un politopo compacto cuyo cardinal puede ser potencialmente grande en relación con el número de variables.

Definición 12 (**Listas de polinomios multi-homogéneos sparse**). *Del mismo modo que en la definición precedente, dada una lista $\mathcal{Q} := (Q_1, \ldots, Q_r)$, donde cada $Q_i \subseteq \mathbb{R}^N_+$ y los exponentes monomiales de cada elemento en $Q \cap \mathbb{Z}^N$ son muti-homogéneos de multi-grado (d_i), considereramos el espacio*

vectorial complejo $m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q})$ dado como las listas $f = (f_1, \ldots, f_r)$ de polinomios multi-homogéneos tales que cada f tiene soporte contenido en Q_i. Es decir,

$$m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) := \prod_{i=1}^{r} mH^{(k)}(Q_i).$$

Lo denominaremos el espacio complejo de listas de r polinomios sparse con soporte mixto determinado por la lista de politopos $\mathcal{Q}$. En el caso de que todos los politopos Q_i definan polinomios multi-lineales, escribiremos: $m\mathscr{L}^{(k)}(\mathcal{Q})$.

Observación 2.6.2. Las respectivas dimensiones como espacios vectoriales complejos de cada uno de estos conjuntos es fácilmente calculable a partir del cardinal de $A_Q := Q \cap \mathbb{Z}^N$. Es decir, con las notaciones de las definiciones precedentes se tiene si $Q \subseteq \mathbb{R}^N_+$:

$$\dim_{\mathbb{C}} \left(mH^{(k)}(Q) \right) = \sharp \left(Q \cap \mathbb{Z}^N \right) = \sharp \left(A_Q \right).$$

Y si $\mathcal{Q} = (Q_1, \ldots, Q_r)$ con $Q_i \subseteq \mathbb{R}^N_+$:

$$\dim_{\mathbb{C}} \left(m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) \right) = \sum_{i=1}^{r} \sharp \left(Q_i \cap \mathbb{Z}^N \right) = \sum_{i=1}^{r} \sharp \left(A_{Q_i} \right).$$

Definición 13 (**Variedad de ceros tóricos**). *Dada una lista de politopos $\mathcal{Q} := (Q_1, \ldots, Q_r)$ y una lista de ecuaciones $f = (f_1, \ldots, f_r) \in m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q})$, llamaremos variedad de ceros tóricos asociados a f a la variedad de ceros comunes en $\mathbb{T}^N$ determinados por f, es decir,*

$$V_{\mathbb{T}}(f) := V_{\mathbb{T}}(f_1, \ldots, f_r) = \{\underline{x} \in \mathbb{T}^N \ : \ f_i(\underline{x}) = 0, \ 1 \leq i \leq r\} = V(f_1, \ldots, f_r) \cap \mathbb{T}^N.$$

2.6.2. La Variedad Solución (o de incidencia) Tórica. Con las notaciones precedentes, comencemos introduciendo la función evaluación asociada a polinomios sparse y puntos en el toro $\mathbb{T}^N$:
Dado un multi-índice (k), la lista de grupos de variables que genera $\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n$, el número total de variables $N := \sum_{i=1}^{n}(k_i + 1)$ y una lista de r politopos de Newton $\mathcal{Q} := (Q_1, \ldots, Q_r)$ de tal modo que los exponentes determinados por cada Q_i definen un espacio de polinomios multihomogéneos en $\mathbb{C}[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n]$. Definimos la función de evaluación:

$$ev := ev^{(k)}_{\mathcal{Q}} : \begin{array}{ccc} m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) \times \mathbb{T}^N & \longrightarrow & \mathbb{C}^r \\ ((f_1, \ldots, f_r), \underline{x}) & \longmapsto & (f_1(\underline{x}), \ldots, f_r(\underline{x})). \end{array} \tag{2.6.1}$$

Proposición 2.6.3 (**Variedad Solución (o de incidencia) Tórica**). *Con las notaciones precedentes, sea $M := \dim_{\mathbb{C}}(m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}))$ la dimensión como espacio vectorial complejo. Nótese que podemos identificar $\mathbb{C}^M$ con $m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q})$. Supongamos que Si $Q_i \cap \mathbb{Z}^N_i \neq \emptyset$ para cada i, $1 \leq i \leq r$. Entonces, se tiene:*

i) La aplicación ev es suprayectiva.
ii) Además, la aplicación ev es una submersión en todo punto (i.e. carece de valores singulares, ver Definición 32).
iii) La fibra en $0 \in \mathbb{C}^r$ de ev, $V = ev^{-1}(\{0\})$ es una variedad lisa (es decir, una subvariedad diferenciable de $m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) \times \mathbb{T}^N$), dada por ecuaciones polinomiales multi-homogéneas, de dimensión

$$dim V = (M + N) - r$$

iv) El espacio tangente de $m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) \times \mathbb{T}^N$ en un punto (f, ζ) puede identificarse con

$$T_{(f,\zeta)} m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) \times \mathbb{T}^N = T_f \mathbb{C}^M \times T_\zeta C^N.$$

Entonces, el espacio tangente a cada punto $(f, \zeta) \in V$ viene dado por

$$T_{(f,\zeta)} V = \{(\dot{f}, \dot{\zeta}) \in T_f \mathbb{C}^M \times T_\zeta \mathbb{C}^N : \dot{f}(\zeta) + Df(\zeta)\dot{\zeta} = 0\}.$$

A la variedad V se la denomina Variedad Solución (o variedad de incidencia) tórica asociada al multi-índice (k) y a la lista de politopos $\mathcal{Q}$.

Demostración. Veamos, en primer lugar, que ev es una aplicación polinomial suprayectiva. Para ello, si $A_{Q_t} \neq \emptyset$ para cada t, existirá un exponente monomial

$$\underline{\mu}^{(t)} := \left(\underline{\mu_1}^{(t)}, ..., \underline{\mu_n}^{(t)} \right) \in A_{Q_t} = Q_t \cap \mathbb{N}^N \subseteq \mathbb{N}^N,$$

con

$$\underline{\mu_i}^{(t)} := \left(\mu_{i,0}^{(t)}, ..., \mu_{i,k_i}^{(t)}\right) \in \mathbb{N}^{k_i+1}$$

Consideremos ahora $\zeta = (\underline{z_1}, ..., \underline{z_n}) \in \mathbb{T}^N$ un punto tórico cualquiera, donde

$$\underline{z_i} = (z_{i,0}, ..., z_{i,k_i}) \in \mathbb{T}^{k_i+1}.$$

Es decir, $z_{i,j} \neq 0$ para todo i, $1 \leq i \leq n$, y $0 \leq j \leq k_i$. Considermos finalmente un punto cualquiera $\underline{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_r) \in \mathbb{C}^r$. Definamos para cada t, $1 \leq t \leq r$, el polinomio multihomogéneo

$$h_t := \alpha_t \cdot \left(\prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=0}^{k_i} z_{i,j}^{-\mu_{i,j}^{(t)}}\right)\right) \cdot \prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=0}^{k_i} X_{i,j}^{\mu_{i,j}}\right) \in mH^{(k)}(Q_t).$$

Observamos que $h_t(\zeta) = \alpha_t$, para cada t, $1 \leq t \leq r$. Definamos, finalmente, la lista de polinomios multi-homogéneos

$$h := (h_1, \ldots, h_r),$$

y tendremos que $ev(h, \zeta) = (h_1(\zeta), \ldots, h_r(\zeta)) = \underline{\alpha}$, lo que nos permite concluir que ev es suprayectiva, lo que demuestra la propiedad i).
Más aún, lo que hemos probado es que la restricción

$$ev\Big|_{\mathbb{C}^M \times \{\zeta\}} : \mathbb{C}^M \times \{\zeta\} \longrightarrow \mathbb{C}^r$$

es una aplicación polinomial suprayectiva para cada $\zeta \in \mathbb{T}^N$.
Simplemente derivando la expresión de la función ev concluimos que la diferencial de ev en un punto (f, ζ) viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{array}{rccc} T_{(f,\zeta)}ev: & T_f\mathbb{C}^M \times T_\zeta\mathbb{T}^N & \longrightarrow & T_{f(\zeta)}\mathbb{C}^r \\ & (\dot{f}, \dot{\zeta}) & \longrightarrow & \dot{f}(\zeta) + Df(\zeta)\dot{\zeta} \end{array}$$

Veamos ahora que, dados cualesquiera $(f, \zeta) \in m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) \times \mathbb{T}^N$, la tangente $T_{(f,\zeta)}(ev)$ es suprayectiva. Sea $\underline{\alpha} \in \mathbb{C}^r = T_{f(\zeta)}\mathbb{C}^r$ un punto cualquiera. Comencemos observando que $T_f m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) = m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q})$. Entonces, dado cualquier $\underline{\alpha} \in \mathbb{C}^r$, sea

$$(h, 0) \in T_f m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) \times T_\zeta\mathbb{T}^N,$$

donde $h = (h_1, \ldots, h_r)$ es la lista de polinomios construida anteriormente para probar que ev es suprayectiva y $0 := (0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^N = T_\zeta\mathbb{T}^N$. Entonces,

$$T_{(f,\zeta)}ev(h, 0) = h(\zeta) + Df(\zeta)0 = h(\zeta) = \underline{\alpha}.$$

Esto demuestra que ev es una submersión en todos sus puntos y que carece de valores críticos, lo que prueba ii).
Como ev es suprayectiva y $0 \in \mathbb{C}^r$ es un valor regular, por la Proposición B.6.1 del Apéndice B, la fibra

$$V = ev^{-1}(\{0\}) = \{(f, \underline{x}) \in m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) \times \mathbb{T}^N : f(\underline{x}) = 0\} \tag{2.6.2}$$

es una subvariedad diferenciable de dimensión

$$dim V = dim\left(m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) \times \mathbb{T}^N\right) - dim(\mathbb{C}^r) = (M + N) - r.$$

Lo que demuestra la propiedad iii) del enunciado.
Finalmente, la misma Proposición B.6.1 caracteriza el espacio tangente a la fibra V como el núcleo de $T_{(f,\zeta)}$, es decir,

$$T_{(f,\zeta)}V = ker\left(T_{(f,\zeta)}ev\right) = \{(\dot{f}, \dot{\zeta}) \in T_f m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) \times T_\zeta\mathbb{T}^N \ : \ \dot{f}(z) + Df(\zeta)\dot{\zeta} = 0\},$$

lo que demuestra la propiedad iv) y concluye la prueba de la Proposición. □

Recordemos que un cerrado F de la topología de Zariski de un constructible C se dice irreducible si no se puede escribir como unión de cerrados F_1, F_2 de C tales que $F_i \subsetneq F$ (cf. Definición 25).

LEMA 2.6.4. *Con las notaciones precedentes, sea $U \subseteq \mathbb{C}^N$ un abierto Zariski y sea $V \subseteq m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) \times U$ un cerrado Zariski en $m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) \times U$ liso (i.e. la intersección con $m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) \times U$ de una variedad algebraica de $\mathbb{C}^M \times \mathbb{C}^N$ que es, además, subvariedad analítica). Entonces, V es irreducible si y solamente si es conexo.*

Demostración. Comencemos con la implicación $\Longleftarrow$, que es la que usaremos preferentemente en las páginas que siguen. Básicamente probaremos que la lisitud local, combinada la conectitud implica irreducibilidad global.
Razonando por reducción al absurdo, supongamos que V es conexo y supongamos que no es irreducible como cerrado $m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) \times U$. Entonces, por la Proposición B.3.1, V admite una descomposición como unión finita de sus componentes irreducibles en $m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) \times U$, es decir:

$$V = W_1 \cup \cdots \cup W_s, \tag{2.6.3}$$

con $s \geq 2$ y $W_1, \ldots, W_s$ son las componentes irreducibles en $m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) \times U$ de V.
Como cada W_i es algebraico en $\mathbb{C}^M \times U$, es cerrado tanto para la topología Zariski como la eucídea. Así, si $W_i \cap W_j = \emptyset \ \forall i \neq j$, entonces (2.6.3) sería una descomposición de V como unión finita de cerrados dos a dos disjuntos, lo que contradice que V sea conexo.
Por tanto, existen $i, j \in \{1, ..., s\}$, $i \neq j$ tales que $W_i \cap W_j \neq \emptyset$. Reordenando los subíndices podemos suponer un punto $(f, z) \in V$ tal que

- $(f, z) \in W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$.
- Existe r con $2 \leq r \leq s$ tal que
  - $(f, z) \in W_i$, $1 \leq i \leq r$
  - $(f, z) \notin W_j$, $r + 1 \leq j \leq s$

Como $W_{r+1}, \ldots, W_s$ son cerrados Zariski, existirá un abierto Zariski $U_0 \subseteq \mathbb{C}^M \times U$, entorno de (f, z) (i.e. $(f, z) \in U_0$) tal que $U_0 \cap W_j = \emptyset$ para cada j con $r+1 \leq j \leq s$. Por tanto, tenemos la identidad siguiente:

$$V \cap U_0 = (W_1 \cap U_0) \cup \cdots \cup (W_r \cap U_0), \tag{2.6.4}$$

con $r \geq 2$. Como V es una variedad lisa es, en particular, una variedad analítica compleja alrededor de (f, z). Por tanto, existirá un entorno abierto $U_1 \subseteq U_0 \subseteq \mathbb{C}^M \times U$ de (f, z) en la topología euclídea, un entorno abierto $A \subseteq \mathbb{C}^k$ conexo (una bola, por ejemplo), con $k = (M+N) - r$, de $0 \in \mathbb{C}^k$ y una aplicación analítica:

$$\varphi : A \subseteq \mathbb{C}^k \longrightarrow U_1 \subseteq \mathbb{C}^M \times \mathbb{T}^N,$$

tal que $\varphi(A) = V \cap U_1$, $\varphi(0) = (f, z)$ y φ define un difeomorfismo analítico entre A y $V \cap U_1$. En otras palabras, φ es una biyección entre A y $V \cap U_1$ y si $\varphi^{-1} : V \cap U_1 \longrightarrow A$ es su inversa, existe una función analítica $\phi : U_1 \longrightarrow \mathbb{C}^k$ tal que

$$\phi \mid_{V \cap U_1} = \varphi^{-1}.$$

En particular, los conjuntos $\varphi^{-1}(W_i \cap U_1) \subseteq A$ son conjuntos dados como los ceros comunes a un número finito de funciones analíticas complejas. Así, si W_i es el conjunto de soluciones comunes a los polinomios $h_1, ..., h_r$ en las variables $Y_1, ..., Y_{M+N}$ de $\mathbb{C}^M \times \mathbb{T}^N$, es decir

$$W_i = \{(y_1, ..., y_{M+N}) \in \mathbb{C}^M \times \mathbb{T}^N : h_i(y_1, ..., y_{M+N}) = 0,\ 1 \leq i \leq r\}$$

y si $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_{M+N})$ es la descripción de φ por las funciones analíticas $\varphi_1, ..., \varphi_{M+N} : A \longrightarrow \mathbb{C}$, entonces

$$\varphi^{-1}(W_i \cap U_1) = \{z \in A : h_i(\varphi_1(z), ..., \varphi_{M+N}(z)) = 0,\ 1 \leq i \leq r\}.$$

Ahora recordemos que el conjunto de ceros de una función analítica compleja en un abierto conexo A es o bien todo A, o bien un conjunto de medida nula en A[1]. Pero hemos visto que A es un abierto conexo y viene dado como una unión finita de cerrados, cada uno de los cuales es el conjunto de ceros de una familia finita de funciones analíticas:

$$A = \varphi^{-1}(V \cap U_1) = \varphi^{-1}(W_1 \cap U_1) \cup \cdots \cup \varphi^{-1}(W_r \cap U_1).$$

No es posible, por tanto, que, siendo A conexo, que todos ellos sean de medida nula. Ahora bien, si uno de ellos $\varphi^{-1}(W_i \cap U_1)$ no es de medida nula, siendo A conexo, tendremos que $A = \varphi^{-1}(W_i \cap U_1)$.
Entonces, por ser $\varphi : A \longrightarrow V \cap U_1$ una biyección tendremos que si $A = \varphi^{-1}(W_i \cap U_1)$,

$$\varphi(A) = \varphi(\varphi^{-1}(V \cap U_1)) = V \cap U_1 = \varphi(\varphi^{-1}(W_i \cap U_1)) = W_i \cap U_1.$$

En conclusión, hemos demostrado que existe un entorno abierto U_1 de (f, z) en la topología euclídea de $\mathbb{C}^M \times U$ tal que

$$V \cap U_1 = W_i \cap U_1.$$

De otro lado, tenemos que de la identidad (2.6.5) y del hecho $U_1 \subseteq U_0$ concluimos que:

$$V \cap U_1 = (W_1 \cap U_1) \cup \cdots \cup (W_r \cap U_1) = W_i \cap U_1. \tag{2.6.5}$$

[1]En ocasiones conocido como el Principio de Identidad de las funciones holomorfas multivariadas.

Por tanto, para cada $j \neq i$, tendremos que $W_j \cap U_1 \subseteq W_i \cap U_1$ y, además, $(f, z) \in W_j \cap U_1 \neq \emptyset$. Por el apartado i) del Teorema B.3.9, concluiremos que la clausura Zariski de $W_j \cap U_1$ es W_j para cada j, $1 \leq j \leq r$ y, además

$$W_j = \overline{W_j \cap U_1}^Z \subseteq \overline{W_i \cap U_1}^Z = W_i,$$

donde $\overline{\cdot}^Z$ significa clausura Zariski. Esto contradice el hecho de que $r \geq 2$ y que la identidad (2.6.3) sea la descomposición de V en componentes irreducibles. Por tanto, no puede darse que $W_i \cap W_j \neq \emptyset$ entre las componentes irreducibles de V descritas en (2.6.3). Así que la descomposición en (2.6.3) sería una descomposición de V como unión finita de cerrados disjuntos lo que habíamos visto que era imposible si V es conexo, salvo que $s = 1$ y V posea solamente una componente irreducible. Esto demuestra $\Longleftarrow$.

Para el recíproco ($\Longrightarrow$), simplemente usaremos el Teorema de Conectitud (i.e. Teorema B.3.9, del Apéndice B). Observamos que si V es irreducible en $m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) \times U$ es porque existe un irreducible $W \subseteq \mathbb{C}^M \times \mathbb{C}^N$ tal que

$$V = W \cap \left(m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) \times U \right).$$

Como $m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) \times U$ es un abierto Zariski en $\mathbb{C}^M \times \mathbb{C}^N$, entonces el apartado ii) del Teorema B.3.9 nos garantiza que V es conexo. □

El siguiente resultado se sigue porque $\mathbb{T}^N$ es un abierto Zariski en $\mathbb{C}^N$.

COROLARIO 2.6.5. *Con las notaciones e hipótesis de la Proposición 2.6.3 precedente, la variedad solución $V \subseteq \mathbb{C}^M \times \mathbb{T}^N$ es una variedad irreducible en $m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) \times \mathbb{T}^N$ si y solamente si es conexa para la topología euclídea en $m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) \times \mathbb{T}^N \subseteq \mathbb{C}^{M+N}$.*

2.6.3. Invarianza unitaria de sistemas sparse y conectividad de la Variedad Solución. vamos a ver ahora que una cierta invarianza ante una acción de grupos unitarios de matrices, permiten concluir que la variedad solución sparse es irreducible. Comencemos recordando el grupo de las matrices unitarias $\mathcal{U}_{n+1}(\mathbb{C}) \subseteq \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ son las matrices complejas tales que

$$\mathcal{U}_{n+1}(\mathbb{C}) := \left\{ U \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{C}) : UU^\star = Id_{n+1} \right\},$$

donde U^* es la matriz traspuesta de la matriz cuyas coordenadas son los conjugados complejos de las coordenadas de U. Si $S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ es la esfera unidad compleja (i.e. $S^{2n+1} := \{\zeta \in \mathbb{C}^{n+1} \ : \ ||\zeta||^2 = 1\}$), la siguiente acción de $\mathcal{U}_{n+1}(\mathbb{C})$ sobre S^{2n+1} es transitiva y fiel:

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathcal{U}_{n+1}(\mathbb{C}) \times S^{2n+1} & \longrightarrow & S^{2n+1} \\ & (U, \zeta) & \longmapsto & U\zeta. \end{array}$$

En particular, dados cualesquiera $u, v \in S^{2n+1}$ existe $U \in \mathcal{U}_{n+1}(\mathbb{C})$ tales que $Uu = v$ (o, equivalentemente, la órbita de todo punto $u \in S^{2n+1}$ por la acción de $\mathcal{U}_{n+1}(\mathbb{C})$ es todo S^{2n+1}). Consideremos ahora, $(k) = (k_1, \ldots, k_n)$ un multi-índice que determina grupos de variables $\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n$ de la forma:

$$\underline{X}_i := \{X_{i,j}, \ : \ 0 \leq j \leq k_i\}.$$

Supongamos $N := \sum_{i=1}^n (k_i + 1)$ y el producto de esferas

$$S^{(k)} := \prod_{i=1}^n S^{2k_i+1} \subseteq \mathbb{C}^N.$$

Definamos el grupo producto de grupos de matrices unitarias

$$\mathscr{U}_{(k)}(\mathbb{C}) := \prod_{i=1}^n \mathcal{U}_{k_i+1}(\mathbb{C}),$$

con la operación de grupo semi-directo (i.e. operación coordenada a coordenada). Podemos extender la acción de grupo anterior del modo obvio siguiente:

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathscr{U}_{(k)}(\mathbb{C}) \times S^{(k)} & \longrightarrow & S^{(k)} \\ & ((U_1, \ldots, U_n), (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)) & \longmapsto & (U_1\zeta_1, \ldots, U_n\zeta_n). \end{array} \tag{2.6.6}$$

De nuevo la acción es transitiva sobre $S^{(k)}$. Finalmente, podemos considerar el anillo de polinomios complejos en todas las variables involucradas $\mathbb{C}[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n]$ y una acción de $\mathscr{U}_{(k)}(\mathbb{C})$ sobre este anillo,

definida del modo siguiente:

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathscr{U}_{(k)}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n] & \longrightarrow & \mathbb{C}[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n] \\ & ((U_1, \ldots, U_n), f) & \longmapsto & f \circ U^*, \end{array} \tag{2.6.7}$$

donde el polinomio $f \circ U^*$, cuando $U := (U_1, \ldots, U_n)$ es el polinomio dado por la composición:

$$f \circ U^*(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n) := f(U_1^* \underline{X}_1, \ldots, U_n^* \underline{X}_n) \in \mathbb{C}[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n].$$

Es claro que si f es un polinomio multi-homogéneo, $f \circ U^*$ es también multi-homogéneo del mismo multi-grado. Y que si $\zeta \in \mathbb{C}^N$ es tal que $f(\zeta) = 0$, entonces $f \circ U^*(U\zeta) = 0$.

Definición 14 (**Invarianza unitaria de polinomios ralos**). *Con las notaciones precedentes, dado $Q \subseteq \mathbb{R}_+^N$ un politopo de Newton, diremos que los polinomios sparse en $mH^{(k)}(Q)$ son invariantes por la acción de $\mathscr{U}_{(k)}(\mathbb{C})$ si para todo $f \in mH^{(k)}(Q)$, $f \circ U^* \in mH^{(k)}(Q)$.*
Del mismo modo, dada $\mathcal{Q} := (Q_1, \ldots, Q_r)$ una lista de politopos de Newton, diremos que las listas de polinomios en $m\mathscr{H}^{(k)}(Q)$ son invariantes por la acción de $\mathscr{U}_{(k)}(\mathbb{C})$ si cada Q_i satisface que $mH^{(k)}(Q_i)$ es invariante por la acción de $\mathscr{U}_{(k)}(\mathbb{C})$.

Teorema 2.6.6. *Con las notaciones precedentes, supongamos que $\mathcal{Q} = (Q_1, \ldots, Q_r)$ es una lista de politopos de Newton con intersección no vacía con $\mathbb{N}^n$ tales que $m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q})$ sea invariante por la acción del grupo $\mathscr{U}_{(k)}(\mathbb{C})$. Entonces, la variedad solución de ceros tóricos $V \subseteq m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) \times \mathbb{T}^N$ es irreducible y conexa.*

Demostración. En primer lugar, consideremos la siguiente extensión de los argumentos usados en la Proposición 2.6.3. Consideremos el abierto Zariski $B \subseteq \mathbb{C}^N$ siguiente:

$$B := \prod_{i=1}^{n} \left(\mathbb{C}^{k_i+1} \setminus \{\underline{0}\}\right) \subseteq \mathbb{C}^N.$$

Son los punto $\zeta := (\underline{z}_1, \ldots, \underline{z}_n) \in \mathbb{C}^N$ tales que $\underline{z}_i \neq \underline{0}$ en $\mathbb{C}^{k_i+1}$. Claramente además $\mathbb{T}^N \subseteq B$. Definamos, como en la Proposición 2.6.3, una función de evaluación:

$$\widetilde{ev} : m\mathscr{H}^{(k)}(Q) \times B \longrightarrow \mathbb{C}^r,$$

análoga a la definida en (2.6.1). Dado que $\mathbb{T}^N \subseteq B$, los mismos argumentos que en la Demostración de la Proposición 2.6.3 nos permiten concluir que $\widetilde{ev}$ es suprayectiva. Más aún, la diferencial

$$T_{(f,\zeta)}\widetilde{ev} : T_f m\mathscr{H}^{(k)}(Q) \times T_\zeta B \longrightarrow T_{f(\zeta)}\mathbb{C}^r,$$

viene dada por análoga descripción que en el caso de $T_{(f,\zeta)}ev$ en la prueba de la Proposición 2.6.3. En particular, para cada $\alpha \in \mathbb{C}^r$, si $\xi \in \mathbb{T}^N \subseteq B$, existe un cierto $h \in T_f m\mathscr{H}^{(k)}(Q) = m\mathscr{H}^{(k)}(Q)$ tal que $T_{(f,\xi)}ev((h,0)) = h(\xi) = \alpha$. Si $\zeta := (\underline{z}_1, \ldots, \underline{z}_n) \in B$ es un punto cualquiera, existe una lista de matrices unitarias $U = (U_1, \ldots, U_n)$ tales que $\underline{x}_i = U_i \underline{z}_i \in (\mathbb{C}^*)^{k_i+1}$. Para lograrlo basta con elegir $\underline{x}_i \in (\mathbb{C}^*)^{k_i+1}$ cualesquiera tales que $||\underline{x}_i|| = ||\underline{z}_i||$. Sea $\xi := U\zeta = (\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n) \in \mathbb{T}^N$. Consideremos $f \in m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q})$. Por invarianza unitaria de $m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q})$, entonces $f \circ U^* \in m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q})$. Así, dado $\alpha \in \mathbb{C}^r$, existe $h \in m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q})$ tal que:

$$T_{(f\circ U^*,\xi)}ev(h,0) = h(\xi) = \alpha.$$

Por tanto,

$$T_{(f,\zeta)}\widetilde{ev}(h \circ U, 0) = (h \circ U)(\zeta) = h(U\zeta) = h(\xi) = \alpha,$$

y, como $h \circ U \in m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) = T_f m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q})$, de nuevo por invarianza unitaria, concluiremos que $T_{(f,\zeta)}\widetilde{ev}$ es suprayectiva para cada $(f,\zeta) \in m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) \times B$.
En particular, por los mismos argumentos usados en la Proposición 2.6.3, concluiremos que el cerrado Zariski en $m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) \times B$ siguiente es una variedad lisa de dimensión $(M+N) - r$:

$$\widetilde{V} := \widetilde{ev}^{-1}(\{0\}) := \{(f,\zeta) \in m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) \times B \ : \ f(\zeta) = 0\}.$$

Por el Lema 2.6.4, $\widetilde{V}$ será un cerrado irreducible si y solamente si es conexo. Veamos, entonces, que $\widetilde{V}$ es conexa.
Para comenzar, observemos que si $\zeta \in B$ es un punto cualquiera y $f_1, f_2 \in m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q})$ son tales que $f_1(\zeta) = f_2(\zeta) = 0$, entonces (f_1, ζ) y (f_2, ζ) están en la misma componente de $\widetilde{V}$. Para ello, recordemos que $m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q})$ es el espacio vectorial generado por los monomios cuyos exponentes están en la lista

determinada por $\mathcal{Q}$. Entonces, para cada $t \in [0,1]$, el polinomio $f_t := tf_1 + (1-t)f_2 \in m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q})$. Además $f_t(\zeta) = tf_1(\zeta) + (1-t)f_2(\zeta) = 0$, con lo que el segmento

$$\{(f_t, \zeta) \ : \ t \in [0,1]\},$$

es un conexo que une (f_1, ζ) y (f_2, ζ), lo que permite concluir que ambos puntos están en la misma componente conexa de $\widetilde{V}$. Denotemos por

$$V_\zeta := \{(f, \zeta) \in m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) \times \{\zeta\} \ : \ f(\zeta) = 0\} \subseteq \widetilde{V}.$$

Dado $\zeta := (\underline{z}_1, \ldots, \underline{z}_n) \in B$, sean $\lambda_i := ||\underline{z}_i|| \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ las respectivas normas de sus grupos de coordenadas (que son no nulas porque $\zeta \in B$). Definamos $\xi := (\lambda_1^{-1}\underline{z}_1, \ldots, \lambda_n^{-1}\underline{z}_n) \in S^{(k)}$ el correspondiente punto en el producto de esferas unidad $S^{(k)}$. Dado que las listas $f = (f_1, \ldots, f_r) \in m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q})$ es dado por polinomios multi-homogéneos con multi-grados fijados, es sencillo observar que V_ζ y V_ξ se encuentran en la misma componente conexa de $\widetilde{V}$. Para ello, supongamos $(d_s) = (d_{s,1}, \ldots, d_{s,n})$ el multi-grado de cada polinomio f_s, $1 \leq s \leq r$ de una lista $f = (f_1, \ldots, f_r) \in m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q})$. Supongamos que $\xi := (\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n) \in S^{(k)}$ y que $f(\xi) = 0$.

Definamos la lista de polinomios $f_t := (f_1^{(t)}, \ldots, f_r^{(t)}) \in m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q})$ dada por las siguientes indentidades:

$$f_s^{(t)} := \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i^{d_{s,i}}\right)^{-t} f_s(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n).$$

Y definamos los puntos

$$\xi^{(t)} := (\lambda_1^t \underline{x}_1, \ldots, \lambda_n^t \underline{x}_n) \in B.$$

Entonces, tenemos que $\xi^{(0)} = \xi$, $\xi^{(1)} = \zeta$ y se tiene que, por ser multi-homogéneos,

$$f_s^{(t)}(\xi^{(t)}) = \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i^{d_{s,i}}\right)^{-t} f_s(\lambda_1^t \underline{x}_1, \ldots, \lambda_n^t \underline{x}_n) = f_s(\xi) = 0.$$

En particular, $f_t(\xi^{(t)}) = 0$ para cada $t \in [0,1]$. Entonces, el siguiente camino está contenido en $\widetilde{V}$ y une puntos $(f, \xi) \in V_\xi$ con puntos $(f_1, \zeta) \in V_\zeta$:

$$\{(f_t, \xi^{(t)}) \in \widetilde{V} \ : \ t \in [0,1]\}.$$

En particular, V_ζ y V_ξ, donde ξ ha sido definido del modo anterior, están en la misma componente conexa de $\widetilde{V}$.

Veamos, finalmente, que si $\zeta \in B$ y $\xi \in B$ son dos puntos tales que $\zeta, \xi \in S^{(k)}$ están en el producto de esferas unidad, entonces V_ζ y V_ξ están en la misma componente conexa de $\widetilde{V}$. Para ello, por la transitividad de $\mathscr{U}_{(k)}(\mathbb{C})$, existirá ($U = (U_1, \ldots, U_n)$ tales que si $\zeta = (\underline{z}_1, \ldots, \underline{z}_n)$, entonces

$$\xi = (\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n) = (U_1\underline{z}_1, \ldots, U_n\underline{z}_n).$$

Ahora recordemos que en el álgebra de Lie las matrices unitarias son las matrices anti-hermíticas. Es decir, definamos esta clase de matrices complejas como

$$ant - H_{n+1}(\mathbb{C}) = \{A \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{C}) : A^\star = -A\}.$$

Y tenemos que

$$\mathcal{U}_{n+1}(\mathbb{C}) := \{e^A \ : \ A \in ant - H_{n+1}(\mathbb{C})\},$$

donde e^A es la exponencial de matriz de la matriz A. En particular, existirán matrices anti-hermíticas $A_1, \ldots, A_n$ tales que

$$U = (U_1, \ldots, U_n) = (e^{A_1}, \ldots, e^{A_n}).$$

Pero, además, las matrices anti-hermíticas forman un espacio vectorial con lo que, para cada $t \in [0,1]$ la lista $(tA_1, \ldots, tA_n)$ forma una lista de matrices anti-hermíticas. En particular, la siguiente es una lista de matrices unitarias:

$$U_t := (U_{1,t}, \ldots, U_{n,t}) = (e^{tA_1}, \ldots, e^{tA_n}) \in \mathscr{U}_{(k)}(\mathbb{C}).$$

Sea ahora $f := (f_1, \ldots, f_r) \in m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q})$ una lista de polinomios multi-homogéneos de tal modo que $f(\zeta) = 0$. Definamos una lista de polinomios $f_t := (f_1^{(t)}, \ldots, f_r^{(t)})$ dada mediante la acción de $\mathscr{U}_{(k)}(\mathbb{C})$ sobre $m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q})$, a través de las matrices U_t anteriores:

$$f_t := f \circ U_t^*.$$

Definamos

$$\xi^{(t)} := (U_{1,t}\underline{z}_1, \ldots, U_{n,t}\underline{z}_n) \in B.$$

Tenemos que $\xi^{(0)} = \zeta$, $\xi^{(1)} = \xi$ y el siguiente camino une puntos de V_ζ y puntos de V_ξ:

$$\{(f_t, \xi^{(t)}) \ : \ t \in [0,1]\} \subseteq \widetilde{V}.$$

Habremos probado así que si nos dan dos puntos cualesquiera (f,ζ), (g,ξ) en $\widetilde{V}$, podemos unir (f,ζ) con pares $(f',\zeta') \in \widetilde{V}$, mediante un camino continuo $\widetilde{V}$, donde $\zeta' \in S^{(k)}$ es un representante en el producto de esferas unidad de ζ. Después, podemos unir mediante un camino coontinuo en $\widetilde{V}$, (f',ζ') con $(g',\xi') \in \widetilde{V}$, donde ξ' es un representante de ξ en el producto de esferas $S^{(k)}$. Finalmente, podemos unir mediante un camino en $\widetilde{V}$ (g',ξ') y (g,ξ). Por tanto, (f,ζ) y (g,ξ) están en la misma componentes conexa de $\widetilde{V}$,
Por tanto $\widetilde{V}$ es conexo y, por el Lema 2.6.4, $\widetilde{V}$ es irreducible. Ahora observamos que la variedad solución tórica $V \subseteq m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) \times \mathbb{T}^N$ es simplemente un abierto Zariski en $\widetilde{V}$:

$$V := \widetilde{V} \cap \left(m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) \times \mathbb{T}^N \right).$$

Por tanto, V es irreducible y, por el Corolario 2.6.5 es conexa, con lo que habremos probrado el enunciado. □

2.7. Finitud genérica de los equilibrios totalmente mezclados

Con lo demostrado anteriomente estamos en condiciones de probar la finitud genérica de los equilibrios totalmente mezclados de juegos de Nash. Comencemos con la siguiente observación:

LEMA 2.7.1. *Sea $(k) := (k_1, \ldots, k_n)$ un multi-índice que determina una lista de grupos de variables $\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n$ de la forma siguiente:*

$$\underline{X}_i := \{X_{i,j} \ : \ 0 \leq j \leq k_i\}.$$

Sea $N := \sum_{i=1}^n (k_i+1)$ el número total de variables y consideremos las hiper-superficies lineales siguientes:

$$H_i(t) := \{(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n) \in \mathbb{C}^N \ : \ \sum_{j=0}^{k_i} x_{i,j} - t = 0\}.$$

Sea $V \subseteq \mathbb{C}^N$ una variedad tórica multi-proyectiva, es decir, una variedad algebraica de ceros en el toro $\mathbb{T}^N$ tal que existen polinomios multi-homogéneos $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{C}[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n]$ que la definen mediante:

$$V := V_{\mathbb{T}}(f_1, \ldots, f_r) := \{x \in \mathbb{T}^N \ : \ f_s(x) = 0, 1 \leq s \leq r\}.$$

Supongamos que V es irreducible y su dimensión de Krull satisface $\dim(V) \geq n$. *Supongamos además que V no está contenida en la intersección $H_1(0) \cap \cdots \cap H_n(0)$. Entonces se tiene*

$$\dim\left(V \cap (H_1(1) \cap \cdots \cap H_n(1))\right) = \dim(V) - n.$$

DEMOSTRACIÓN. Es una consecuencia natural de la multi-homogeneidad y es válida tanto para variedades de ceros tóricos como para variedades de ceros afines. Haremos el caso tórico porque es el único que necesitamos. Denotemos por $V_{m\mathbb{T}}$ a la variedad algebraica dada por:

$$V_{m\mathbb{T}} := \left(V \cap (H_1(1) \cap \cdots \cap H_n(1))\right).$$

Como V no está complemente contenido en la intersección $H_1(0) \cap \cdots \cap H_n(0)$ y V es irreducible, entonces $W := V \setminus (H_1(0) \cap \cdots \cap H_n(0))$ es un abierto Zariski no vacío en V.
Definamos la siguiente aplicación polinomial:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & V_{m\mathbb{T}} \times \mathbb{T}^n & \longrightarrow & V \\ & ((\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n), (t_1, \ldots, t_n)) & \longmapsto & (t_1\underline{x}_1, \ldots, t_n\underline{x}_n). \end{array}$$

En primer lugar observamos que $\varphi(V_{m\mathbb{T}} \times \mathbb{T}^n) \subseteq V$. Aquí juega su papel el hecho de ser V definida como los ceros tóricos de una familia finita de polinomios multi-homogéneos. Así si $f \in \mathbb{C}[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n]$ es un polinomio multi-homogéneo que se anula en V, tendremos que:

$$f\left(\varphi\left((\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n), (t_1, \ldots, t_n)\right)\right) = \prod_{i=1}^n t_i^{d_i} f(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n),$$

donde $(d) = (d_1, \ldots, d_n)$ es el multi-grado de f con respecto a los grupos de variables señalados. En particular, si $(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n) \in V_{m\mathbb{T}} \subseteq V$, tendremos que $f(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n) = 0$ y, por tanto,

$$f\left(\varphi\left((\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n), (t_1, \ldots, t_n)\right)\right) = 0.$$

Tomando $f = f_1, \ldots, f_s$, donde $V = V_{\mathbb{T}}(f_1, \ldots, f_s)$, habremos conluido que

$$\varphi\left((\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n), (t_1, \ldots, t_n)\right) \in V,$$

y φ una aplicación polinomial bien definida y además puede verse facilmente que $\varphi(V_{m\mathbb{T}} \times \mathbb{T}^n) \subseteq W$.

Pero, además, dado cualquier punto $y = (\underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_n) \in W$, tenremos que para cada i, $1 \leq i \leq n$ se ha de tener

$$\sum_{j=0}^{k_i} y_{i,j} = z_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Definamos

$$(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n) = \left(z_1^{-1}\underline{y}_1, \ldots, z_n^{-1}\underline{y}_n\right) \in \mathbb{T}^N.$$

Reproduciendo el argumento precedente sobre la multi-homogeneidad de los polinomios que definen V, concluiremos que $(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n) \in V$. Más aún, por la definición de los z_i's, concluiremos que $(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n) \in V_{m\mathbb{T}}$. Para concluir, observemos que

$$\varphi((\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n), (z_1, \ldots, z_n)) = (\underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_n) \in W.$$

Por tanto, $\varphi(V_{m\mathbb{T}} \times \mathbb{T}^n) = W$ que es un abierto Zariski en V variedad irreducible. Es decir φ es una aplicación dominante (cf. Definición 31) porque W es denso Zariski en V (ver Proposición B.3.9). Más aún, hemos probado que φ es inyectiva puesto que el único punto en $V_{m^{\circ}T} \times \mathbb{T}^n$ que va a parar a $y = (\underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_n) \in W$ es el punto $((\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n), (z_1, \ldots, z_n))$ que acabamos de definir.
Aplicando el Teorema de la Dimensión de la Fibra, existirá $U \subseteq W$ un abierto Zariski tal que para cada $y \in U$, la dimensión de la fibra satisface:

$$\dim \varphi^{-1}(y) = \dim(V_{m\mathbb{T}} \times \mathbb{T}^n) - \dim(V). \tag{2.7.1}$$

Ahora bien, la fibra $\varphi^{-1}(y)$ es un sólo punto, por lo que $\dim \varphi^{-1}(\{y\}) = 0$. De otro lado, como $V_{m\mathbb{T}} \times \mathbb{T}^n$ es un producto, tendremos que

$$\dim\left(V_{m\mathbb{T}} \times \mathbb{T}^n\right) = \dim V_{m\mathbb{T}} + \dim(\mathbb{T}^n) = \dim V_{m\mathbb{T}} + n.$$

Sustituyendo estas igualdades en la Identidad (2.7.1) concluimos:

$$0 = \dim V_{m\mathbb{T}} + n - \dim V,$$

o, equivalentemente, la igualdad descrita en el enunciado de este Lema. □

Observación 2.7.2. El resultado anterior es igualmente cierto si en lugar de "V irreducible" escribimos "V es de dimensión pura" (ver Proposición B.3.2, porque las componentes irreducibles de un conjunto dado por un número finito de ecuaciones multi-homogéneas son también conjuntos algebraicos dados por un número finito de ecuaciones homogéneas. No nos extenderemos en este punto por no alargar en exceso la Memoria.

Proposición 2.7.3. *Sea $(k) := (k_1, \ldots, k_n)$ un multi-índice que determina una lista de grupos de variables $\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n$ de la forma siguiente:*

$$\underline{X}_i := \{X_{i,j} \ : \ 0 \leq j \leq k_i\}.$$

Sea $N := \sum_{i=1}^n (k_i + 1)$ el número total de variables involucradas. Sea $\mathcal{Q} = (Q_1, \ldots, Q_{N-n})$ una lista de politopos de Newton con $Q_i \subseteq \mathbb{R}_+^N$, de tal modo que $Q_i \cap \mathbb{Z}^N \neq \emptyset$ y que la clase de polinomios sparse $m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q})$ sea invariante por la acción del grupo producto de unitarios $\mathscr{U}_{(k)}(\mathbb{C})$. Sea M la dimensión compleja de $m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q})$, $V \subseteq m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) \times \mathbb{T}^N$ la variedad solución asociada y consideremos la proyección natural:

$$\pi_1 : V \longrightarrow m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}).$$

Entonces, se dan los casos exluyentes siguientes:

i) Si π_1 es dominante, entonces existe un abierto Zariski no vacío $U \subseteq m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q})$ de listas de $N-n$ ecuaciones multi-homogéneas tales que para cada $f \in U$, $\pi_1^{-1}(f) \cong V_{\mathbb{T}}(f)$ es una variedad de ceros tóricos de dimensión pura (i.e. todas sus componentes irreducibles tienen la misma dimensión) y se satisface genéricamente la propiedad:

$$\dim(V_{\mathbb{T}}(f)) = n.$$

ii) Si, excluyentemente, π_1 no es dominante, existe un abierto Zariski no vacío $U' \subseteq m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q})$ tal que para cada $f \in U'$, se tiene

$$V_{\mathbb{T}}(f) = \emptyset.$$

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, es claro que $\pi_1^{-1}(\{f\}) = \{f\} \times V_{\mathbb{T}}(f)$, por lo que podemos identificar $\pi_1^{-1}(\{f\})$ y $V_{\mathbb{T}}(f)$. En segundo lugar, como V es un cerrado Zariski irreducible en $\mathbb{T}^N$ (Teorema 2.6.6 anterior) estamos en condiciones de aplicar el Teorema de la Dimensión de la Fibra (Teorema B.5.1) y, por tanto, existe un abierto Zariski no vacío $U \subseteq m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q})$ tal que para cada $f \in U$ se tenga:

$$\dim V_{\mathbb{T}}(f) = \dim \pi_1^{-1}(\{f\}) = \dim V - \dim m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}).$$

por la Proposición 2.6.3 sabemos que

$$\dim(V) = (M+N) - r,$$

donde $r = N - n$ es la longitud de la lista de politopos de Newton involucrados. Luego

$$\dim V_{\mathbb{T}}(f) = \dim \pi_1^{-1}(\{f\}) = (M+N) - r - \dim m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) = (M+N) - (N-n) - M = n.$$

Usando incluso el Teorema de Sard (Teorema B.6.3), podríamos suponer que U está formado por valores regulares de π_1, con lo que podríamos suponer que las fibras $\pi_1^{-1}(\{f\}) \cong V_{\mathbb{T}}(f)$ son variedades lisas de dimensión apropiada. Esto implicaría que todas las componentes irreducibles (que serían las componentes conexas de $V_{\mathbb{T}}(f)$) tienen la misma dimensión y que son de dimensión pura (ver definición en la Proposición B.3.2).
En el caso *ii*) es obvio que si π_1 no es dominante, las fibras $\pi_1^{-1}(\{f\}) \cong V_{\mathbb{T}}(f)$ son genéricamente vacías. □

Estamos ya en condiciones de enunciar el teorema esencial de esta Sección

TEOREMA 2.7.4. *El conjunto de los equilibrios totalmente mezclados $Eq^*((k), f)$ de un juego de Nash (i.e. las funciones de recompensa son multi-lineales) es genéricamente un conjunto finito.*
Es decir, sea (k) un multi-índice y denotemos por $m\mathscr{L}^{\mathbb{R}}_{(k)}$ el espacio vectorial real de dimensión finita dado como las listas $f = (f_1, \ldots, f_n)$ de funciones de recompensa del juego de n jugadores indicado por (k), donde cada f_i es multi-lineal (juego de Nash). Entonces, existe un abierto Zariski real no vacío $U \subseteq m\mathscr{L}^{\mathbb{R}}_{(k)}$ tal que para cada $f \in U$ el conjunto de equilibrios totalmente mezclados $Eq^*((k), f)$ del juego de Nash $((k), f)$ es un conjunto finito (aunque puede ser eventualemente vacío).

DEMOSTRACIÓN. Sea compondremos la de mostración en tres partes.

- PARTE I: Supongamos, como en todo el capítulo, que $(k) := (k_1, \ldots, k_n)$ sea un multi-índice que determina una lista de grupos de variables $\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n$ de la forma siguiente:

  $$\underline{X}_i := \{X_{i,j} \ : \ 0 \leq j \leq k_i\}.$$

  Sea $N := \sum_{i=1}^n (k_i + 1)$ el número total de variables involucradas. Para cada i, $\leq i \leq n$ y para cada par j_1, j_2, con $0 \leq j_1, j_2 \leq k_i$, definamos el politopo de Newton

  $$Q^{(i)}_{j_1,j_2} := \Delta_{k_1} \times \cdots \times \Delta_{k_{i-1}} \times \{0\} \times \Delta_{k_{i+1}} \times \cdots \times \Delta_{k_n},$$

  donde $\Delta_k \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ es el $k-$simplex. Obsérvese que el politopo $Q^{(i)}_{j_1,j_2}$ depende solamente de i y no de j_1, j_2.
  Para cada i, j_1, j_2, observamos que los polinomios en $mH^{(k)}(Q^{(i)}_{j_1,j_2})$ son simplemente las funciones multilineales en la lista de grupos de variables $\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n$ cuyos monomios no contienen ninguna variable del grupo $\underline{X}_i$. Es decir, son de la forma

  $$\sum_{\underline{\mu} \in Q^{(i)}_{j_1,j_2} \cap \mathbb{N}^N} a_{\underline{\mu}} \left(\prod_{r \neq i} \left(\prod_{j=0}^{k_r} X_{r,j}^{\mu_{r,j}} \right) \right),$$

  donde $\mu_{r,j} \in \{0, 1\}$ para $r \neq i$ y $\sum_{j=0}^{k_r} \mu_{r,j} = 1$. En particular, si tomamos $U = (U_1, \ldots, U_n) \in \mathscr{U}_{(k)}(\mathbb{C})$ y $f \in mH^{(k)}(Q^{(i)}_{j_1,j_2})$ y componemos $f \circ U^*$, observamos que $f \circ U^*$ sigue siendo multilineal y que la coordenada U_i no interviene en esa composición o, equivalentemente, que $f \circ U^*$ es también un polinomio multi-lineal en los grupos de variables $\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n$ en los que no aparece ninguna variable del grupo $\underline{X}_i$. Por tanto,

  $$\forall f \in mH^{(k)}(Q^{(i)}_{j_1,j_2}), \forall U \in \mathscr{U}_{(k)}(\mathbb{C}), \ \ f \circ U^* \in mH^{(k)}(Q^{(i)}_{j_1,j_2}).$$

O lo que es lo mismo, $mH^{(k)}(Q^{(i)}_{j_1,j_2})$ es invariante por la acción del grupo $\mathscr{U}_{(k)}(\mathbb{C})$.
Definamos finalmente la lista de politopos de Newton $\mathcal{Q}$ dada por la siguiente identidad:

$$\mathcal{Q} := (Q^{(1)}_{0,1}, \dots, Q^{(1)}_{0,k_1}, Q^{(2)}_{0,1}, \dots, Q^{(2)}_{0,k_2}, \dots, Q^{(n)}_{0,1}, \dots, Q^{(n)}_{0,k_n}).$$

Consideremos $m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q})$ que son listas de polinomios multi-lineales $h_{i,j} \in mH^{(k)}(Q^{(i)}_{0,j})$. Observamos que estas listas tienen un número de polinomios igual a $\sum_{i=1}^{n} k_i = N - n$. Sea $V \subseteq m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}) \times \mathbb{T}^N$ la variedad solución asociada a estos parámetros (k) y $\mathcal{Q}$ como en la Proposición 2.6.3. Observamos que V satisface las hipótesis del Teorema 2.6.6 y, por tanto, estamos en condiciones de poder aplicar el Lema 2.7.3 anterior. De esta forma, si la proyección

$$\pi_1 : V \longrightarrow m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}),$$

es dominante, entonces existe un abierto Zariski no vacío $U \subseteq m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q})$ tal que para cada $f \in U$, la variedad $V_{\mathbb{T}}(f) \cong \pi_1^{-1}(f)$ es de dimensión n. Utilizando ahora el Lema 2.7.3, intersecamos esta variedad $V_{\mathbb{T}}$ con el simplex $\Delta_{(k)}$ para obtener $V_{m\mathbb{T}}$, y dado que $V_{\mathbb{T}}$ cumple todas las condiciones de este lema obtenemos que

$$dim(V_{m\mathbb{T}}) = dim(V_{\mathbb{T}} \cap (H_1(1) \cap ... \cap H_n(1))) = dim(V_{\mathbb{T}}) - n = n - n = 0,$$

y por lo tanto $V_{m\mathbb{T}}(f)$ es un conjunto finito de puntos. Si, por el contrario, π_1 no es dominante, existe un abierto $U' \subseteq m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q})$ tal que para cada $f \in U'$ la variedad $V_{\mathbb{T}}(f)$ es vacía y por lo tanto también lo es $V_{m\mathbb{T}}(f) \subseteq V_{\mathbb{T}}(f)$. En cualquier caso hemos probado que:
Conclusión Parte I: *Existe un abierto Zariski no vacío $U \subseteq m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q})$ tal que se satisface una de las dos propiedades excluyentes siguientes:*
- *para cada $f \in U$, $V_{m\mathbb{T}}(f) = \emptyset$*
- *para cada $f \in U$, $V_{m\mathbb{T}}(f) \neq \emptyset$, pero $V_{m\mathbb{T}}(f)$ es un conjunto finito de puntos (i.e.* $\dim(V_{m\mathbb{T}}(f)) = 0$*).*

- Parte II: Consideremos ahora $mL^{\mathbb{C}}_{(k)} \subseteq \mathbb{C}[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_n]$ el espacio vectorial de dimensión finita formado por todos los polinomios que son formas multi-lineales en los grupos de variables $\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_n$ definidos como en la Parte I. Y consideremos

$$m\mathscr{L}^{\mathbb{C}}_{(k)} := \left(mL^{\mathbb{C}}_{(k)}\right)^n.$$

El $\mathbb{C}-$espacio vectorial $m\mathscr{L}^{(k)}$ es el formado por las listas $f := (f_1, \dots, f_n)$ de n polinomios multi-lineales. Con las notaciones de la Parte I, definamos el siguiente morfismo de espacios vectoriales:

$$\nabla : m\mathscr{L}^{(k)} \longrightarrow m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}),$$

donde

$$\nabla(f) := \nabla(f_1, \dots, f_n) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_{i,0}} - \frac{\partial f_i}{\partial X_{i,j}}\right)_{\substack{1 \le i \le n, \\ 1 \le j \le k_i}}.$$

obviamente está bien definida porque

$$\frac{\partial f_i}{\partial X_{i,0}} - \frac{\partial f_i}{\partial X_{i,j}} \in mH^{(k)}(Q^{(i)}_{0,j}).$$

Además, ∇ es una aplicación lineal compleja suprayectiva: Consideremos una lista

$$H := (h_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n, \\ 1 \le j \le k_i}} \in m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}),$$

donde $h_{i,j} \in mH^{(k)}(Q^{(i)}_{0,j})$. Definamos para cada i, $1 \le i \le n$:

$$F_i := \sum_{j=1}^{k_i} X_{i,j} h_{i,j}.$$

Obviamente F_i es multi-lineal, dado que ninguna variables del grupo $\underline{X}_i$ aparece en ninguno de los $h_{i,j}$ que, a su vez, son multi-lineales en el resto. Además, es sencillo verificar que

$$\frac{\partial F_i}{\partial X_{i,0}} - \frac{\partial F_i}{\partial X_{i,j}} = h_{i,j}.$$

Por tanto, $\nabla(F_1, \dots, F_n) = H$, y ∇ es una aplicación lineal suprayectiva. Sea $U_1 := \nabla^{-1}(U)$, donde $U \subseteq m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q})$ es el abierto Zariski del que se habla en la Parte I de esta Demostración.

Entonces, U_1 es un abierto Zariski no vacía en $m\mathscr{L}^{\mathbb{C}}_{(k)}$ y hemos probado lo siguiente:
Conclusión de la Parte II: *Existe un abierto Zariski no vacío $U_1 \subseteq m\mathscr{L}^{\mathbb{C}}_{(k)}$ tal que se satisface sólo una de las dos propiedades excluyentes siguientes:*
- *para cada $f \in U_1$, $V_{m\mathbb{T}}(\nabla(f)) = \emptyset$*
- *para cada $f \in U_1$, $V_{m\mathbb{T}}(\nabla(f)) \neq \emptyset$, pero $V_{m\mathbb{T}}(\nabla(f))$ es un conjunto finito de puntos (i.e. $\dim(V_{m\mathbb{T}}(f) = 0$).*

- Parte III: En concordancia con las notaciones usadas anteriormente, denotemos por $m\mathscr{L}^{\mathbb{R}}_{(k)}$ el $\mathbb{R}-$espacio vectorial de las lista $f = (f_1, \ldots, f_n)$ donde cada $f_i \in \mathbb{R}[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n]$ es un polinomio multi-lineal con coeficientes reales en los grupos de variables $\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n$. De hecho, si M es la dimensión de $m\mathscr{L}^{\mathbb{C}}_{(k)}$ como $\mathbb{C}-$espacio vectorial entonces M es también la dimensión de $m\mathscr{L}^{\mathbb{R}}_{(k)}$ como $\mathbb{R}-$espacio vectorial. Y tendremos la identificación:

$$\mathbb{R}^M \cong m\mathscr{L}^{\mathbb{R}}_{(k)} \subseteq m\mathscr{L}^{\mathbb{C}}_{(k)} \cong \mathbb{C}^M.$$

Ahora observemos lo siguiente: si $f \in \mathbb{C}[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n]$ es un polinomio con coeficientes complejos que se anula en todo $\mathbb{R}^N$, como $\mathbb{R}$ es un cuerpo infinito, un mero ejercicio de interpolación nos garantizaría que f ha de ser el polinomio indénticamente cero (i.e. $f\mid_{\mathbb{R}^n} \equiv 0 \Longrightarrow f \equiv 0$). Esto implica que si $f \in \mathbb{C}[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n]$ es un polinomio no idénticamente cero, el abierto Zariski complejo

$$D(f) := \{z \in \mathbb{C}^N \ : \ f(z) \neq 0\} \subseteq \mathbb{C}^N,$$

satisface que $D(f) \cap \mathbb{R}^N \neq 0$ y $D(f) \cap \mathbb{R}^N$ es un abierto Zariski no vacío en los reales. En particular, si $U_1 \subseteq m\mathscr{L}^{\mathbb{C}}_{(k)}$ es el abierto Zariski no vacío de la conclusión de la Parte II, entonces $U_2 := U_1 \cap m\mathscr{L}^{\mathbb{R}}_{(k)} \subseteq m\mathscr{L}^{\mathbb{R}}_{(k)}$ es un abierto Zariski real no vacío. Ahora, si $f \in U_2 \subseteq m\mathscr{L}^{\mathbb{R}}_{(k)}$ es una lista de funciones multi-lineales con coeficientes reales y $((k), f)$ define un juego de Nash, entonces se tiene que $V_{m\mathbb{T}}(\nabla(f))$ es un conjunto finito.

Para concluir observemos que el Teorema 2.5.4 dice que si $f \in m\mathscr{L}^{\mathbb{R}}_{(k)}$, entonces los equilibrios de Nash totalmente mezclados de $((k), f)$ son el conjunto:

$$Eq^*((k), f) = V(\mathcal{U}) \cap \mathscr{O}^*_N(\mathcal{U}) \cap \Delta_{(k)}$$

o lo que es lo mismo, satisfacen el conjunto de ecuaciones

$$Ec(\mathcal{U}) := \begin{cases} X_{i,j} > 0, & 1 \leq i \leq n, \ 0 \leq j \leq k_i, \\ \sum\limits_{t \in P_i} X_{i,t} = 1, & 1 \leq i \leq n \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial X_{i,0}}(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n) - \dfrac{\partial f_i}{\partial X_{i,j}}(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n) = 0, & 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq k_i, \end{cases}$$

recordando que en la lista $\mathcal{U}$ tenemos $\nu(i) = 0$ para todo i, $1 \leq i \leq n$.
En nuestras notaciones actuales, podemos reescribir el conjunto de equilibrios totalmente mezclados (reales) como

$$Eq^*((k), f) = V_{m\mathbb{T}}(\nabla(f)) \cap \{(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n) \in \mathbb{R}^N \ : \ x_{i,j} > 0\} \subseteq V_{m\mathbb{T}}(\nabla(f)).$$

Por tanto, hemos concluido:
Conclusión Parte III: *Existe un abierto Zariksi no vacío $U_2 \subseteq m\mathscr{L}^{\mathbb{R}}_{(k)}$ tal que para cada $f \in U_2$ el conjunto de los equlibrios de Nash totalmente no mezclados $Eq^*((k), f)$ es un conjunto finito (eventualemente vacío).*
Y esto conluye la prueba de nuestro enunciado principal.

□

Combinando el Teorema 2.7.4 (finitud genérica de los equilibrios totalmente mezclados) con el Teorema 2.5.4 (los equilibrios son un subconjunto de la unión de todos los equilibrios totalmente mezclados de todos los posibles subjuegos), concluimos la demostración del Teorema fundamental demostrado en esta memoria:

Teorema 2.7.5 (**Finitud de los equilibrios de Nash en juegos genéricos**). *Sea $(k) = (k_1, ..., k_n)$ un multi-índice que representa la lista de cardinales de estrategias puras de un juego de n jugadores. Sea $m\mathscr{L}^{\mathbb{R}}_{(k)}$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita formado por las listas $f = (f_1, ..., f_n)$ de funciones multi-lineales que se adaptan al modelo de juego descrito por el multi-índice (k). Entonces, existe un*

abierto Zariski no vacío $U \subseteq m\mathscr{L}^{\mathbb{R}}_{(k)}$ *tal que para cada* $f \in U$ *el número de equilibrios de Nash del juego* $((k), f)$ *es finito, es decir,*

$$\forall f \in U, \quad \sharp\left(Eq((k), f)\right) < +\infty.$$

Más aún, genéricamente en U, se satisface

$$\sharp\left(Eq((k), f)\right) = \beta_0\left(Eq((k), f)\right) \leq D(2D-1)^{3N-1},$$

donde $N = \sum_{i=1}^{n}(k_i + 1)$ *es el total de estrategias puras de los jugadores y* $D = max\{n, 2\}$.

Demostración. La finitud genérica de los equilibrios de Nash viene como consecuencia directa de la condición (2.5.1) del Teorema 2.5.4, por el cual

$$Eq((k), f) \subseteq \bigcup_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}_{(k)}} Eq^*_{\mathcal{P}}((k), f).$$

Consideramos por separado cada uno de los subjuegos $\mathcal{P} \in \mathcal{P}_{(k)}$ del juego $((k), f)$ original. Dada la Propiedad (hereditaria) 2.4.2, cada uno de los subjuegos de Nash son también juegos de Nash y por lo tanto, se les puede aplicar el Teorema 2.7.4.
Vemos que, dado un juego de Nash $((k)_{\mathcal{P}}, f^{\mathcal{P}})$ en el cuál $(k)_{\mathcal{P}}$ un multi-índice y donde $f^{\mathcal{P}} \in m\mathscr{L}^{\mathbb{R}}_{(k)_{\mathcal{P}}}$ son las funciones de recompensa del juego de n jugadores indicado por $(k)_{\mathcal{P}}$. Entonces, existe un abierto Zariski real no vacío $U_{\mathcal{P}} \subseteq m\mathscr{L}^{\mathbb{R}}_{(k)_{\mathcal{P}}}$ tal que para cada $f \in U_{\mathcal{P}}$ el conjunto de equilibrios totalmente mezclados $Eq^*_{\mathcal{P}}((k), f)$ del juego de Nash $((k)_{\mathcal{P}}, f^{\mathcal{P}})$ es un conjunto finito.
De esta forma, consideramos el abierto $U \subseteq m\mathscr{L}^{\mathbb{R}}_{(k)}$ cuyos elementos son los sistemas de funciones f cuya restricción a alguno de los subjuegos de $((k), f)$ pertenece al abierto $U_{\mathcal{P}}$, es decir:

$$U := \{f \in m\mathscr{L}^{\mathbb{R}}_{(k)} \ : \ \exists \mathcal{P} \in \mathcal{P}_{(k)} \text{ con } f^{\mathcal{P}} = f\mid_{\Delta^{\mathcal{P}}_{(k)}} \in U_{\mathcal{P}}\}$$

En este abierto, se cumple que para todo $f \in U$, el conjunto de equilibrios totalmente mixtos de cada subjuego de $((k), f)$ tiene cardinal finito, es decir, $\sharp(Eq^*_{\mathcal{P}}((k), f)) < +\infty$, : $\forall f \in U$, $\forall \mathcal{P} \in \mathcal{P}_{(k)}$, y por lo tanto,

$$\sharp(Eq((k), f)) \leq \sharp\left(\bigcup Eq^*_{\mathcal{P}}((k), f)\right) < +\infty.$$

Además, dado que en el abierto U el número de equilibrios de Nash es finito, este es igual al número componentes conexas del conjunto y por lo tanto podemos acotarlo mediante los resultados de la Proposición 2.2.2, y por ser un juego clásico de funciones multi-lineales, tendremos que todos los multigrados son $(d_i) = (1)$, $\forall i = 1, ..., n$ y que por lo tanto, $D = max\{n \cup \{2\}\}$, de forma que obtenemos la cota:

$$\sharp(Eq((k), f)) = \beta_0(Eq((k), f) \leq D(2D-1)^{3N-1}.$$

□

Observación 2.7.6. Podemos ver que, habiendo probado que los equilibrios son genéricamente finitos, podríamos utilizar la cota del Theorem B de Bernshtein relacionada con el volumen Mixto de los politopos que conforman el sistema. Pero dado que este trabajo estudia solo el número los ceros tóricos, tendremos que aplicarla a cada uno de los subjuegos y acotar su número de equilibrios totalmente mixtos. Después, dado que cualquier equilibrio es siempre equilibrio totalmente mixto de alguno de sus subjuegos, y contando que el número de subjuegos es menor que 2^N, podemos dar una cota relacionada con los volúmenes mixtos de los politopos.
Recordamos que los politopos asociados a las ecuaciones de $Eq((k), f)$ son, por un lado,los $N-n$ politopos

$$Q^{(1)}_{0,1}, \ldots, Q^{(1)}_{0,k_1}, Q^{(2)}_{0,1}, \ldots, Q^{(2)}_{0,k_2}, \ldots, Q^{(n)}_{0,1}, \ldots, Q^{(n)}_{0,k_n},$$

correspondientes a las ecuaciones $h_{i,j} = 0$, y por otro lado, n politopos más que contienen el soporte de las ecuaciones del simplex $\Delta_{(k)}$ y son del tipo:

$$Q_i := \{\overline{0}\} \times \cdots \times \{\overline{0}\} \times CH(\{\overline{0}, e_{i,0}, ..., e_{i,k_i}\}) \times \{\overline{0}\} \times \cdots \{\overline{0}\}.$$

Si calculamos el volumen mixto de estos politopos, obtenemos una cota para los equlibrios totalmente mezclados del juego original (o el subjuego total $\mathcal{U}$). Calculando el volumen mixto de cada uno de los subjuegos (sea $V_{\mathcal{P}}$ este volumen) mediante sus respectivos politopos, podríamos calcular $M = max\{V_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \in \mathcal{P}_{(k)}\}$. De esta forma, tendríamos que

$$\sharp(Eq((k), f)) \leq 2^N \cdot M.$$

Dada la dificultad de calcular el volumen mixto de varios politopos, otra alternativa sería utilizar el trabajo de Kushnirenko para calcular los ceros tóricos de cada uno de los subjuegos mediante el volumen mixto de un solo politopo $Q_{\mathcal{P}}$ definido como la envolvente convexa de los politopos asociados a las ecuaciones del subjuego $\mathcal{P}$, y de la misma forma sea $M' = max\{MV(Q_{\mathcal{P}}) \ : \ \mathcal{P} \in \mathcal{P}_{(k)}\}$, podríamos establecer otra cota

$$\sharp(Eq((k), f)) \leq 2^N \cdot M'.$$

2.8. Los resultados de una extraña búsqueda bibliográfica

El objetivo inicial de este Trabajo de Fin de grado no era tanto demostrar la finitud del conjunto de equilibrios de un juego de Nash genérico sino un estudio de su cuantificación en promedio al estilo de J. McLennan y otros. Los trabajos de MacLennan dan estimaciones del número promedio de equilibrios de Nash, mediante el uso de la variedad de incidencia y de un uso doble de la fórmula de la Co-área. Por ello, y antes de profundizar en las técnicas de McLennan, nos esforzamos en buscar las citas académicas y fuentes bibliográficas que demuestran la finitud del número de equilibrios de un juego de Nash genérico, resultado clave para abordar los estudios en promedio de McLennan.
La búsqueda que seguimos a través de la bibliografía nos llevó a una situación de perplejidad: citas cruzadas entre diversos autores, atribuyéndose unos a otros resultados no claramente demostrados y alguna referencia que no hemos logrado obtener. Todo ello nos condujo a elaborar nuestra propia demostración auto-contenida y completa de la finitud del número de equilibrios en un juego de Nash genérico. A continuación resumiremos nuestra búsqueda, como explicación de nuestras motivaciones para presentar dicha prueba.

La finitud genérica de los equilibrios de Nash es una idea ampliamente aceptada entre la comunidad matemática, y diversos autores, a la hora de citar estos resultados utilizan dos tipos de referencias y fuentes bibliográficas: las citas en *revistas de perfil económico* y las citas en *revistas y libros de perfil matemático*.
En las *publicaciones de contexto económico* se suele citar a los trabajos de [**De,70**] y [**H,73**] como los primeros que probaron la afirmación buscada. Sin embargo, al poco de la publicación, varios autores discuten la incompletitud de esta prueba, entre ellos podemos citar a [**KW,82**] o [**GM,01**]. Debido a esta desconfianza manifestada, decidimos centrar nuestra búsqueda en la línea más matemática basada en la Geometría Algebraica.

Las fuentes bibliográficas de la Geometría Algebraica parten de resultados basados en el famoso **Theorem BKK**. El origen del Theorem BKK se basa en la acotación del número de **ceros aislados tóricos** de un sistema de ecuaciones ralo ("sparse") en términos del volumen mixto de los politopos que contienen al soporte de los polinomios involucrados. Debe señalarse que la cota refiere a los ceros **aislados** tóricos, pero no garantiza "a priori" que todos los ceros sean aislados, lo cual es el origen de nuestra desafortunada búsqueda bibliográfica.

La cota BKK es el resultado de los trabajos de tres autores soviéticos a mediados de los años setenta del pasado siglo: D.N. Bernshtein ([**Be,76**]), A. Koushnirenko ([**Ku,76**]) y Khovanskii ([**BKK,76**]). Mientras que Khovanskii se centra en el estudio de los "fewnomials" (polinomios con pocos coeficientes no nulos), los trabajos de Bernshtein y Koushnirenko son los que nos resultan más adecuados para el propósito de nuestro problema.
Hay una diferencia relevante, de matiz técnico entre la obra de Bernshtein y Koushnirenko:

- Koushnirenko, en [**Ku,76**], considera un politopo de Newton $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ y las listas de polinomios $f_1, ..., f_n \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ tales que $supp(f_i) \subseteq \mathbb{Z}^n \cap Q$. A partir de aquí estudia los ceros tóricos en $V(f_1, ..., f_n) = \{z \in \mathbb{C}^n : f_1(z) = 0, ..., f_n(z) = 0\}$.
- Bernshtein, en [**Be,76**], considera una lista de politopos de Newton $Q_1, ..., Q_n \subseteq \mathbb{R}^n$ y las listas de polinomios $f_1, ..., f_n \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ tales que $supp(f_i) \subseteq \mathbb{Z}^n \cap Q_i$. A partir de aquí estudia los ceros tóricos de la variedad $V(f_1, ..., f_n)$.

Esta diferencia entre la existencia de un único politopo Q o de varios politopos $Q_1, ..., Q_n$, cada uno para cada polinomio involucrado, generó el uso del término **"mixed"** y **"mixed sparse"** para referirse al caso más general de Bernshtein, mientras el término **"sparse"** (ralo) suele referirse al caso de Koushnirenko. Como se observa en la demostración de los Teoremas 2.5.4 y 2.7.4 de esta memoria, **el estudio de los equilibrios de Nash totalmente mezclados descarta el modelo de Koushnirenko y obliga a**

usar el resultado de Bernshtein: cada ecuación $h_{i,j}$ tiene su propio politopo $Q_{i,j}$ que no es el mismo para todos ellas. De ahí que nos centremos en la obra de Bernshtein y su celebrado Theorem B, el cual hemos reproducido en la Sección B.8 del Apéndice B como Teorema B.8.1.

La confusión con la que nos encontramos viene originada por la existencia en el trabajo de Bernshtein de una hipótesis (que hemos llamado HIPÓTESIS BERNSHTEIN) suficiente para la finitud del conjunto de ceros tóricos de un sistema de ecuaciones ralo.
Esta hipótesis es una condición suficiente que puede resumirse del modo siguiente: Dadas $f_1, ..., f_n \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ y los politopos $Q_1, ..., Q_n \subseteq \mathbb{R}^n$ (posiblemente distintos), la HIPÓTESIS BERNSHTEIN construye para cada $\alpha \in \mathbb{R}^n$ unos nuevos politopos $Q_{1\alpha}, ..., Q_{n\alpha}$ y, tras un cambio de coordenadas, considera las restricciones $f_{1\alpha}, ..., f_{n\alpha}$ a esos politopos obteniendo menos variables. El enunciado y la demostración del Teorema B de Bernshtein nos parecen del todo correctos. Pero Bernshtein añade unos comentarios **sin demostración** que son la fuente de de algunas confusiones: Literalmente, Bernshtein comenta en [Be,76]: **"Therefore,** $(f_{1\alpha}, ..., f_{n\alpha})$ **is a system of** n **equations in** $n-1$ **unknowns and does not have any roots in the general case..."**. Este comentario no es claro. Expliquemos las dificultades de verificación. Para interpretarlo, tratemos de entender qué significa para Bernshtein la expresión "in the general case". Sospechamos que Bernshtein tiene en mente el uso de la **resultante multivariada**. La resultante multivariada para polinomios en codificación densa se remonta al siglo XIX y principios del siglo XX, su traza puede encontrarse en Hilbert, Kronecker, Macaulay y muchos otros, y su presentación y existencia se basa en introducir una variedad de incidencia y estudiar la proyección sobre el espacio de coeficientes. La prueba clásica pasa por demostrar que esta proyección es dominante y que a variedad discriminante (de valores críticos) tiene una hipersuperficie como clausura Zariski.
Desde los años 80 hasta la actualidad, varios son los autores que han estudiado la resultante multivariada desde diversas técnicas. Citemos a J. P. Jouanolou, P. Philippon, J. Heintz, E. Cattani, W. D. Brownawell, J. Canny, I. Emiris y al director de este TFG entre otros muchos.
Lo que supone el comentario de Bernshtein es la existencia de una serie de resultantes $R_\alpha \neq 0$ en los coeficientes de los polinomios $f_1, ..., f_n$ de tal modo que se tenga

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^n, \quad R_\alpha(f_1, ..., f_n) \neq 0 \implies \textbf{Hipótesis - Bernshtein}.$$

Y su propia afirmación "system of n equations in $n-1$ unknowns ..." parece inducir que todas esas resultantes R_α son necesariamente las especializaciones en los politopos $Q_{1\alpha}, ..., Q_{n\alpha}$ de la resultante general $Res_{(d)}$ para la codificación densa. La resultante genérica $Res_{(d)} \neq 0$ es un polinomio no nulo asociado a una lista de grados $(d) = (d_1, ..., d_{n+1})$ tal que dada una familia de $f_1, ..., f_{n+1} \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ de grados respectivos $deg(f_i) \leq d_i$, satisface que

$$Res_{(d)}(f_1, ..., f_{n+1}) \neq 0 \Longrightarrow V(f_1, ..., f_{n+1}) = \emptyset.$$

Un ejemplo puede verse en el Ejemplo B.1.6 del Apéndice B para el caso $n = 1$ y usando la presentación clásica de Sylvester. Lo que parece inferirse de las palabras de Bernshtein es que las supuestas resultantes $\{R_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}^n\}$ se obtienen por especialización de $Res_{(d)}$ a los politopos $Q_{1\alpha}, ..., Q_{n\alpha}$. Creemos que Bernshtein no cae en la cuentade que **la resultante no es estable por sustitución de sus variables**. Esto se observa fácilmente en el Ejemplo B.1.6. Si $Res_d(f, g)$ es el polinomio no nulo de Sylvester asociado a polinomios f y g de grado a lo sumo d, se observa que $Res_d(f', g') \equiv 0$ es el polinomio idénticamente nulo para polinomios f' y g' de grado a lo sumo $d-1$. Por supuesto que existe $Res_{d-1} \neq 0$ para esos polinomios, pero no se obtiene por especialización de Res_d.

En conclusión y a falta de prueba explícita, las palabras de Bernshtein parecen suponer una especialización de la resultante que no siempre es garantizable. Para poder desarrollar con detalle una prueba de que la Hipótesis Bernshtein es una propiedad genérica, se necesita previamente desarrollar una Teoría de resultantes multivariadas adaptada a la existencia de politopos $Q_1, ..., Q_n$ distintos para cada polinomio involucrado. Es decir, hay que probar que las "sparse mixed resultants" existen y funcionan bien para garantizar que la Hipótesis-Bernshtein es una propiedad genérica.
El problema es que las **"sparse mixed resultants"** no se desarrollarán hasta pasados 20 años de la publicación del trabajo de Bernshtein. Aceptando que Bernshtein se adelantó con una *conjetura sobre la Hipótesis-Bernshtein*, nos dedicamos a buscar en la bibliografía dónde y cómo se establecía la existencia de estas resultantes y aquí comenzó nuestra odisea.

Algunos autores, como B. Sturmfels, atribuyen la introducción de una cierta clase de "sparse mixed resultants" a un trabajo de Gelfand Kapranov Zelevinsky [**GKZ,91**]. Aunque la existencia de estas resultantes no probaría directamente el comentario de Bernshtein, intentamos localizar esta fuente para entender su desarrollo, pero solo conseguimos acceder a la versión original en ruso, ya que la traducción al inglés se encuentra en una revista (*"Leningrad Mathematical Journal"*) de la cual solo se publicaron dos volúmenes (1990 y 1991) y que no hemos localizado a tiempo como para verificar su contenido [2]
Por lo tanto, decidimos buscar otros autores que introdujeran a su vez estas "sparse mixed resultants", lo que nos llevó a los trabajos de J. Canny y I. Emiris en [**CE,93**] y [**CE,00**] así como el trabajo de I. Emiris y co-autores en [**EKP,10**]. El problema que encontramos es que estos trabajos reposan absolutamente en la Proposition 2.3 del trabajo de P. Pedersen y B. Sturmfels [**PSt,93**]. A su vez, esta Proposition 2.3 utiliza para su prueba el Theorem 2.1 del mismo trabajo. Por último, vemos que este Theorem 2.1 no se demuestra en [**PSt,93**] sino que se le atribuye a Bernshtein directamente. Resumimos ese Theorem 2.1 a continuación:

"Let $f_1, ...f_k$ be Laurent polynomials as in the introduction [3]*. After an affine transformation we may assume that their supports $\mathscr{A}_1, ..., \mathscr{A}_k$ affinely span a k-dimensional lattice $\mathbb{Z}^k$* [4]*. We recall the following fundamental result of Bernstein [2].*

Theorem 2.1(Bernstein) *The set of roots of $V(f_1, ..., f_k)$ is finite, and its cardinality equals the mixed volume $\mathscr{M}(P_1, ..., P_k)$ of the given Newton polytopes $P_i = conv(\mathscr{A}_i)$."*

Este resultado se le atribuyen tal cual a Bernshtein. Pero, tal y como está enunciado, encontramos ciertas inconsistencias en este teorema las cuáles exponemos a continuación:

i) En primer lugar, aportamos los siguientes contraejemplos a la finitud de ceros tóricos de $V(f_1, ..., f_n)$:

   Ejemplo 2.8.1. *Supongamos $A_i = \{e_1, ..., e_n\}$ para cada i, $1 \leq i \leq n$, siendo $\{e_1, ..., e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Obviamente, $Z\langle A_1 \cup \cdots \cup A_n\rangle = \mathbb{Z}^n$ y consideremos $f = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$ una forma lineal cualquiera con coeficientes no nulos.*
   Definimos $(f_1, ..., f_n) \in \mathbb{C}[(A)]$ tal que $f_i = f$, $1 \leq i \leq n$. Se satisfacen las hipótesis del Theorem 2.1 de [**PSt,93**] *y sin embargo, $V(f_1, ..., f_n)$ y $V(f_1, ..., f_n) \cap \mathbb{T}^n$ son conjuntos de cardinal infinito.*

   Ejemplo 2.8.2. *Si, como parece inferiese el enunciado, nos conformásemos con $supp(f_i) = A_i$, tampoco es cierto el enunciado tal y como está descrito. Tomemos*

$$A_i = \{e_i, e_2, e_3\},\ 1 \leq i \leq n,$$

   donde $\{e_1, ..., e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Definimos $(f_1, ..., f_n) \in \mathbb{C}[(A)]$ mediante

$$f_i = a_iX_i + a_2X_2 + a_3X_3 \text{ para } i \neq 2, 3$$

$$f_2 = a_2X_2 + a_3X_3$$

$$f_3 = a_2X_2 + a_3X_3$$

   Claramente, $V(f_1, ..., f_n)$ es una recta compleja de cardinal infinito.

ii) El enunciado del Theorem 2.1 podría arreglarse de manera plausible si se añadiese una forma de genericidad del tipo siguiente:
   Theorem 2.1(Bernstein) *For a generic choice of the coefficients of a list $f_1, ..., f_k$ with support in $\mathscr{A}_1, ..., \mathscr{A}_k$, the set of roots of $V(f_1, ..., f_k)$ is finite, and ...*

   Pero incluso formulándolo correctamente, ese no es el resultado probado por Bernshtein en [**Be,76**] como se ha indicado, ya que en el Theorem B la cuestión de generalidad de la Hipótesis-Bernshtein es un comentario sin prueba.

En conclusión, nuestra búsqueda de fuentes bibliográficas nos condujo al siguiente ciclo:

---

[2] De hecho, aún no lo tenemos.
[3] Quiere decir polinomios de Laurent en k variables con coeficientes complejos
[4] Es decir, los soportes de $f_1, ..., f_n$ generan politopos $P_1, ..., P_k \subseteq \mathbb{R}^k$ y, además, generan $\mathbb{Z}^k$ como $\mathbb{Z}-$módulo

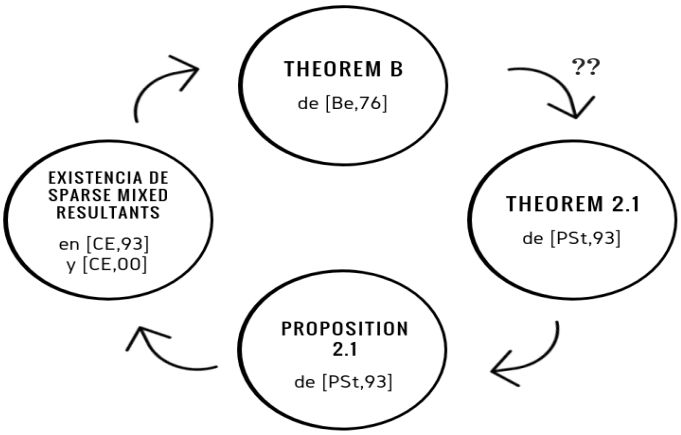

FIGURE 1. Fuentes occidentales sobre el Theorem B de Bernshtein

Ante semejante situación, decidimos abandonar la búsqueda de fuentes fiables y obtener nuestra propia demostración, que no necesita del Theorem B de Bernshtein y que es concebida para responder al caso que nos interesa. No hemos pretendido con ello quitar a nadie ninguna prioridad ni re-demostrar la existencia de las "sparse mixed resultants". Simplemente hemos buscado nuestro camino para resolver la cuestión a la que atañe el trabajo.

Part 2

Apéndices

APÉNDICE A

Conjuntos y Funciones Convexas: Recordatorio

A.0.1. Conjuntos y Funciones convexos: las nociones.

DEFINICIÓN 15 (**Subconjunto convexo**). *Un subconjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ se denomina convexo si satisface la siguiente propiedad :*

$$\forall x, y \in K \ , \ [x, y] := \{tx + (1-t)y \ : t \in [0,1]\} \subseteq K,$$

donde el conjunto $[x, y]$ define el segmento que une los puntos x e y de $\mathbb{R}^n$.

El ejemplo más natural de un conjunto convexo es el símplex[1], definido como la envolvente convexa de los puntos que representan la base canónica usual de $\mathbb{R}^{n+1}$. Otra Definición del mismo conjunto es la siguiente:

DEFINICIÓN 16 (**n-Simplex**). *El conjunto $\Delta_n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ dado por la siguiente identidad*

$$\Delta_n := \{(t_0, ..., t_n) \in [0,1]^{n+1} \ : \ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

se denomna símplex $n-$dimensional o $n-$símplex.

Se trata, obviamente, de un conjunto convexo.

PROPOSICIÓN A.0.1 (**Existencia de Envolvente Convexa**). *Una familia $\{K_i : i \in I\}$ de subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$, su intersección $\cap_{i\in I} K_i \subseteq \mathbb{R}^n$ es también un conjunto convexo. En particular, definimos la noción de envolvente convexa $CH(S)$ de un subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$, como el menor conjunto convexo que contiene a S, esto es:*

$$CH(S) := \cap\{K \subseteq \mathbb{R}^n : S \subseteq \ K y \, K \ es \ convexo\}$$

Obsérvese que el n-Simplex $\Delta_n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ es la envolvente convexa de los elementos de la base ortonormal canónica usual $\{e_0, ..., e_n\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Es decir, $\Delta_n := CH(\{e_0, ..., e_n\})$.

DEFINICIÓN 17 (**Función convexa**). *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, una función $f : K \to \mathbb{R}$ se denomina convexa si verifica:*

$$\forall x, y \in K, \ \forall t \in [0,1], \ f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

A.0.2. Algunas caracterizaciones de convexidad.

TEOREMA A.0.2 ([**Ru,87**], pág.71). *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, f es convexa en $\mathbb{R}^n$ si y solamente si $\forall x, y \in R^n$*

$$f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$$

El siguiente resultado puede encontrarse en [**BV,04**], pág.70. Por el interés de este trabajo, lo limitaremos al caso de polinomios pero es igualmente cierto para funciones dos o más veces diferenciables.

TEOREMA A.0.3 ([**BV,04**], pág.70). *Sea $p \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ un polinomio. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, sean $\nabla_x p$ el gradiente de p en x y $\nabla_x^2 p$ el Hessiano de p en x. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y consideramos $p : K \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Son equivalentes los siguientes:*

i) $p : K \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función convexa.*
ii) $p(y) \geq p(x) + \langle \nabla_x p, (y - x) \rangle$, $\forall x, y \in K$.

[1]El Diccionario de la Real Academia de España no parece contemplar ninguno de los términos "simplex", "símplex" o "símplice". En este trabajo utilizaremos el término "símplex" para la palabra latina SIMPLEX y en concordancia natural usaremos para el plural el término "símplices".

iii) La forma cuadrática definida por el Hessiano

$$q\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \longrightarrow y \cdot \nabla_x^2 p \cdot y^t$$

es semidefinida positiva ($q(y) \geq 0$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$)

EJEMPLO A.0.4 (**Algunos ejemplos clásicos de funciones convexas**). *Los siguientes son ejemplos clásicos de funciones convexas:*

i) Las funciones lineales afines $\ell : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (i.e. polinomios multi-variados de grado a lo sumo 1) son convexas.

ii) Si $f, g : K \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones convexas, también lo son

$$m(x) = max\{f(x), g(x)\},$$
$$h(x) = f(x) + g(x).$$

iii) Si f, g son convexas y g es no decreciente en un dominio $C \subseteq \mathbb{R}$ univariado, también es convexa la composición $h = g \circ f(x)$. Por ejemplo, si $f(x)$ es convexa, también lo es $e^{f(x)}$, porque e^x es convexa y monótamente creciente.

iv) La convexidad es invariante bajo transformaciones afines lineales.

A.0.3. Otras propiedades de la convexidad.

TEOREMA A.0.5. *Sea K un conjunto convexo y compacto, $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces, todo mínimo local de f es un mínimo global.*

DEFINICIÓN 18 (**Punto extremo**). *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y compacto. Un punto $x \in K$ se denomina punto extremo de K si no es un punto interior de algún segmento $[a, b]$ cuyos extremos $a, b \in K$.*

TEOREMA A.0.6 (**Teorema de Minkowski**, [Si,11],Cap.8). *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y compacto de dimensión N. Entonces, todo punto $p \in K$ es una combinación lineal convexa de N+1 puntos extremos de K. Es decir, para cada $p \in K$ existen $x_1, ..., x_{N+1} \in K$ puntos extremos tales que existen $t_1, ..., t_{N+1} \in [0, 1]$ verificándose*

- $\sum_{i=1}^{N+1} t_i = 1$
- $p = \sum_{i=1}^{N+1} t_i x_i$

Es importante señalar que los puntos extremos $x_1, ..., x_{N+1}$ dependen no solo de K sino también del punto p.

COROLARIO A.0.7. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $ext(K)$ el conjunto de sus puntos extremos. Entonces*

$$K = CH(ext(K)).$$

COROLARIO A.0.8 (**Principio del máximo de funciones convexas**). *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un conjunto convexo y compacto de dimensión finita. Sea $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Si $x_0 \in K$ es un máximo de f, ($f(x_0) = max\{f(x) : x \in K\}$), entonces existe un punto extremo $e \in K$ tal que $f(e) = max\{f(x) : x \in K\}$.*

COROLARIO A.0.9 (**Principio de máximo en un Simplex**). *Sea $f : \Delta_n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa en el $n-$Simplex $\Delta_n = CH(\{e_0, ..., e_n\})$ siendo $\{e_0, ..., e_n\}$ la base ortonormal de R^{n+1}. Entonces, existe $i \in \{0, ..., n\}$ tal que*

$$f(e_i) = max\{f(x) : x \in \Delta_n\}.$$

Uno de los resultados clásicos más celebrados ue expresa que expresa la relevancia de la convexidad es el celebrado *Teoema del Punto Fijo de Brouwer*:

TEOREMA A.0.10 (**Teorema del punto fijo de Brouwer**). *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y convexo. Sea $f : K \longrightarrow K$ una función continua. Entonces, f posee un punto fijo, es decir, existe un punto $x_0 \in K$ tal que $f(x_0) = x_0$.*

APÉNDICE B

Algunos Términos Básicos de Geometría Algebraica Real y Compleja

Índice

B.1.	**Polinomios Homogéneos y Multi-homogéneos**	**49**
B.1.1.	Variables agrupadas: Polinomios Multi-homogéneos.	50
B.1.2.	Representación de los polinomios multi-homogéneos	51
B.2.	**Conjuntos Algebraicos, Constructibles y Semi-algebraicos**	**52**
B.2.1.	El Caso Real	54
B.3.	**Irreducibles y dimensión de Krull**	**57**
B.4.	**Propiedades Genéricas**	**58**
B.5.	**El Teorema de la Dimensión en la Fibra**	**60**
B.6.	**Recordando el Teorema de Sard**	**60**
B.7.	**Politopos de Newton y Volumen Mixto**	**61**
B.8.	**La cota BKK**	**63**

Recordaremos En este Apéndice algunas notaciones clásicas del Álgebra Comutativa y la Geometría Algebraica.

B.1. Polinomios Homogéneos y Multi-homogéneos

Sea $(R, +, \cdot)$ un anillo conmutativo con unidad. Denotaremos por $R[X_1, ..., X_m]$ el anillo de polinomios en m variables con coeficientes en R. Para cada multi-índice $\underline{\mu} = (\mu_1, ..., \mu_m) \in \mathbb{N}^m$, denotaremos por $|\underline{\mu}| = \mu_1 + ... + \mu_m$ y lo llamaremos el *grado del multi-índice* $\underline{\mu}$. El monomio asociado a un multi-índice $\underline{\mu} = (\mu_1, ..., \mu_m)$ es el elemento

$$\underline{X}^{\underline{\mu}} :== X_1^{\mu_1} \cdot ... \cdot X_m^{\mu_m} \ \in \ R[X_1, ..., X_m],$$

y diremos que $\underline{X}^{\underline{\mu}}$ es un monomio de grado d si $d = |\underline{\mu}|$. Llamaremos *$R-$módulo de los polinomios homogéneos de grado d en $R[X_1, ..., X_m]$* al $R-$módulo libre generado por los monomios de grado d. Denotaremos por $H_d(X_1, ..., X_m)$ a ese $R-$módulo, que es un $R-$módulo libre de rango igual a

$$\binom{d+m-1}{m-1}.$$

A cada uno de sus elementos no nulos lo denominaremos *polinomio homogéneo de grado d.*

Ejemplo B.1.1. *Por ejemplo, consideramos en el anillo de polinomios en 4 variables $\mathbb{R}[X, Y, Z, V]$ y en él, los siguientes polinomios:*

$$f_1(\underline{X}) = 5XYZ^3 + X^2V^2Z + 3Y^2V^3 \ , \ f_2(\underline{X}) = 5XYZ + V^3 + Y^2Z \ \in \ \mathbb{R}[Z, Y, Z, V]$$

Ambos polinomios son homogéneos porque todos sus monomios tienen igual grado d (5 y 3 respectivamente).

Nótese algunas de las propiedades básicas de los polinomios homogéneos,

Proposición B.1.2. *Con las notaciones precedentes:*

i) Dado cualquier punto $\underline{x} = (x_1, ..., x_m) \in R^n$ y dado $\lambda \in R$, entonces, para cada $f \in H_d(X_1, ..., X_m)$ se tiene:

$$f(\lambda \cdot \underline{x}) = \lambda^d f(\underline{x}).$$

ii) Identidad de Euler: Si $f \in H_d(X_1, ..., X_m)$ entonces, la siguiente igualdad se da en $R[X_1, \ldots, X_n]$:

$$d \cdot f = \sum_{i=1}^{m} X_i \cdot \frac{\partial f}{\partial X_i}.$$

B.1.1. Variables agrupadas: Polinomios Multi-homogéneos. En ocasiones, y más en nuestro contexto, el conjunto de variables $\aleph := \{X_1, \ldots, X_m\}$ puede venir descompuesto en varios grupos de variables fijados a priori. Supongamos los subconjuntos disjuntos de variables del tipo $\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n$ dados mediante:

$$\underline{X}_i := \{X_{i,j} \ : \ 0 \leq j \leq k_i\},$$

con $\underline{X}_i \cap \underline{X}_j = \emptyset$ para cada $i \neq j$. En ese caso usaremos la notación $R[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n]$ para denotar el anillo de polinomios en $M = \sum_{i=1}^{n}(k_i + 1)$ variables

$$R[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n] := R[\cup_{i=1}^{n} \underline{X}_i] = R[X_{i,j} \ : \ 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq k_i].$$

Más aún, como Notación local, dados grupos de variables $\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n$ como los anteriores, podemos considerar los subanillos de $R[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n]$ que no contienen variables en el grupo $\underline{X}_i$ y que denotaremos mediante:

$$(R[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n])^{(\neq i)} := R[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_{i-1}, \underline{X}_{i+1}, \ldots, \underline{X}_n].$$

Obivamente, se tiene:

$$R[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n] = (R[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n])^{(\neq i)}[\underline{X}_i].$$

Definición 19 (**Polinomios multi-homogéneos**). *Con las notaciones precedentes, sea dada una lista disjunta de grupos de variables $\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n$ sobre el anillo R. Denotemos por R_i al anillo $R[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n])^{(\neq i)}]$ (que no contiene el grupo de variables $\underline{X}_i$). Un polinomio $f \in R[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n]$ se dice multi-homogéneo con respecto a la partición $\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n$ si para cada i, $1 \leq i \leq n$ f es un polinomio homogéneo como elemento del anillo:*

$$f \in R_i[\underline{X}_i] = R_i[X_{i,0}, \ldots, X_{i,k_i}].$$

Se llama multi-grado del polinomio multi-homogéneo $f \in R[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n]$ a la lista $(d) = (d_1, \ldots, d_n)$, donde d_i es el grado de f con respecto al grupo de variables $\underline{X}_i$:

$$d_i = \deg_{\underline{X}_i}(f).$$

Denotaremos por $mH^R_{(d)}(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n)$ el $R-$módulo libre formado por todos los polinomios multi-homogéneos en los grupos de variables $\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n$ de multi-grado (d).

Proposición B.1.3. *Con las notaciones de la definición precedente, sea $(k) = (k_1, \ldots, k_n)$ u multiídice que determina grupos de variables $\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n$ como en esa definición. Sea $N := \sum_{i=1}^{n}(k_i + 1)$ el número total de variables involucradas. Sea $h \in K[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n]$ un polinomio multihomogéneo de multigrado $(d) = (d_1, \ldots, d_n)$. Sea $\underline{\zeta} := (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in K^N$ un punto con $\zeta_i \in K^{k_i+1}$, Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Entonces,*

$$h(\lambda_1\zeta_1, \ldots, \lambda_n\zeta_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{d_i}\right) h(\underline{\zeta}).$$

Demostración. Es consecuencia inmediata de la defínción de multi-homogéneo. □

Ejemplo B.1.4 (**Funciones Multi-lineales**). *La funciones multi-lineales (ya definidas en la Subsección 1.1.2 son polinomios multi-homogéneos de multi-grado $(1) = (1, \ldots, 1)$. En este caso, usaremos la notación mL^R en lugar de $mH^R_{(1)}$ para denotar funciones multi-lineales.*

Ejemplo B.1.5 (**Determinantes y Permanentes**). *Los determinantes y permanentes de matrices son, obviamente, funciones mutli-lineales y, por tanto, polinomios multi-homogéneos.*

Ejemplo B.1.6 (**La Resultante**). *Es un ejemplo clásico de polinomio multi-homogéneo. Para cada entero positivo $d \geq 2$, denotemos por $\mathbb{C}[X]_d$ el espacio vectorial complejo de todos los polinomios univariados de grado acotado por d. Se trata de un espacio vectorial de dimensión $d + 1$ sobre $\mathbb{C}$ con base monomial*

$$\beta = \{1, X, ..., X^d\}.$$

Los elementos de $\mathbb{C}[X]_d$ pueden verse como combinaciones lineales de los elementos en esta base β. Por eso, podemos introducir un nuevo conjunto de variables $\{A_0, ..., A_d\}$ y los polinomios en $\mathbb{C}[X]_d$ advierten una representación en la forma de combinación lineal:

$$f = A_0 + A_1 X + \cdots + A_d X^d.$$

Los casos concretos de polinomios en $\mathbb{C}[X]_d$ se obtienen por especialización de las variables $A_0, ..., A_d$ en valores "concretos", es decir, reemplazando A_i (variable) por una constante $a_i \in \mathbb{C}$. Pero las variables $\{A_0, ..., A_d\}$ también nos permiten considerar polinomios en $\mathbb{C}[A_0, ..., A_d]$.
Tenemos ahora $m, n \in \mathbb{N}$ dos números naturales positivos. Consideremos los espacios vectoriales de dimensión finita compleja $\mathbb{C}[X]_m$ y $\mathbb{C}[X]_n$ y consideramos su producto cartesiano $\mathbb{C}[X]_m \times \mathbb{C}[X]_n$ que se identifica con

$$\mathbb{C}[X]_m \times \mathbb{C}[X]_n \cong \mathbb{C}^{m+n+2}$$

También podemos considerar los grupos de variables asociados a los coeficientes de los polinomios en $\mathbb{C}[X]_m$ y $\mathbb{C}[X]_n$ respectivamente. Es decir,

$$\underline{A} := \{A_0, ..., A_m\}, \;\; \underline{B} := \{B_0, ..., B_n\}.$$

donde los $A_i's$ representan a los coeficientes de $f \in \mathbb{C}[X]_m$ y las $B_j's$ representan coeficientes de $g \in \mathbb{C}[X]_n$. Y podemos considerar la matrix de Sylvester genérica en los coeficientes:

$$Sylv_{m,n}(\underline{A}, \underline{B}) := \left(\begin{array}{cccc|ccc} A_m & & 0 & & B_n & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots & \ddots & \\ A_0 & & A_m & & \vdots & \ddots & \\ & \ddots & \vdots & & B_0 & & B_n \\ 0 & & A_0 & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & & B_0 \end{array}\right).$$

Así definimos el polinomio multi-homogéneo conocido como resultante genérica*:*

$$Res_{m,n}(\underline{A}, \underline{B}) := \det\left(Sylv_{m,n}(\underline{A}, \underline{B})\right) \in \mathbb{Q}[\underline{A}, \underline{B}]. \tag{B.1.1}$$

DEFINICIÓN 20 (**Listas de Polinomios Multi-Homogéneos**). *Sea $(k) = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-índice y sea $\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n$ una lista de variables sobre un anillo R, de tal modo que cada $\underline{X}_i$ tiene $k_i + 1$ variables. Sea $((d)) := ((d_1), \ldots, (d_m))$ una lista de multi-grados. Llamaremos listas de m polinomios multi-homogéneos sobre el anillo R en los grupos de variables $\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n$ de multi-grado $((d))$ a toda lista de polinomios $f := (f_1, \ldots, f_m)$ de tal modo que cada f_i es un polinomio multi-homogéneo en $mH^R_{(d_i)}(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n)$. Dentaremos por $m\mathscr{H}^R_{((d)))}(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n)$ a ese conjunto. Es decir*

$$m\mathscr{H}^R_{((d))}(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n) := \prod_{i=1}^{m} m\mathscr{H}^R_{(d_i)}(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n).$$

Para simplificar las notaciones, cuándo no haya posibilidad de confusión con los grupos de variables, escribiremos simplemente $m\mathscr{H}^R_{((d))}$.

B.1.2. Representación de los polinomios multi-homogéneos.

Supongamos $\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n$ una lista de grupos disjuntos de variables, de la forma:

$$\underline{X}_i := \{X_{i,j} \;:\; 0 \leq j \leq k_i\}.$$

Sea $f \in mH^R_{(d)}(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n)$ un polinomio multi-homogéneo de multi-grado $(d) = (d_1, \ldots, d_n)$. Entonces, f admite una representación única de la forma siguiente:

$$f = \sum_{|\mu_1|=d_1} \sum_{|\mu_2|=d_2} \ldots \sum_{|\mu_n|=d_n} a_{(\mu_1,\ldots,\mu_n)} \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=0}^{k_i} X_{i,j}^{\mu_{i,j}} \right), \tag{B.1.2}$$

donde $\mu_i = (\mu_{i,0}, \ldots, \mu_{i,k_i}) \in \mathbb{N}^{k_i+1}$ y los coeficientes $a_{(\mu_1,\ldots,\mu_n)} \in R$.

EJEMPLO B.1.7. *Retomamos el Ejemplo B.1.1 y observamos el polinomio* $f_1(\underline{X}) = 5XYZ^3 + X^2V^2Z + 3Y^2V^3$ *de multi-grado* $(d) = (2,3)$ *y la misma partición* $\{X,Y\}\dot{\cup}\{Z,V\}$. *Llamaremos* $\mu_1 = (\alpha,\beta)$ *y* $\mu_2 = (\sigma,\phi)$ *para simplificar notación y obtenemos 12 coeficientes* $a_{((\alpha,\beta),(\sigma,\phi))} \in \mathbb{R}$*:*

$a_{((1,1),(3,0))} = 5$ *(Correspondiente al monomio* $5XYZ^3$*),*
$a_{((2,0),(2,1))} = 1$ *(*X^2V^2Z*),*
$a_{((0,2),(0,3))} = 3$ *(*$3Y^2V^3$*),*
siendo el resto de los coeficientes igual a 0 en este caso.

De esta forma, podemos escribir f_1 *siguiendo la forma B.1.2 como:*

$$f = \sum_{\alpha+\beta=2} \sum_{\sigma+\phi=3} a_{((\alpha,\beta),(\sigma,\phi))} \cdot X^\alpha Y^\beta Z^\sigma V^\phi \quad con\ (\alpha,\beta),(\sigma,\phi) \in \mathbb{N}^2$$

En el caso de las *funciones multi-lineales* comentadas en el Ejemplo B.1.4 , dado que el multigrado es $(1) = (1,..,1)$ podemos redenotar un multíndice $\mu_i = (0,...,0,1,0,...,0)$ mediante el natural j_i con$1 \leq j_i \leq k_i$ que designa el lugar ocupado por el 1 en el multi-índice μ_i. Por lo tanto, en el caso multi-lineal, la representación del polinomio B.1.2 se transforma en:

$$f = \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} ... \sum_{j_n=1}^{k_n} a_{j_1,...,j_n} \cdot \prod_{r=1}^{n} X_{r,j_r}. \tag{B.1.3}$$

Nótese que se trata de la representaciíon en forma de polinomio de la forma combinación de formas multi-lineales:

$$f = \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} ... \sum_{j_n=1}^{k_n} a_{j_1,...,j_n} \cdot X_{1,j_1} \otimes_K \cdots \otimes_K X_{n,j_n}.$$

B.2. Conjuntos Algebraicos, Constructibles y Semi-algebraicos

Dado un cuerpo K seguiremos las mismas notaciones anteriores para los anillos $K[X_1,\ldots,X_n]$ y, en el caso de disponer de grupos de variables $\underline{X}_1,\ldots,\underline{X}_n$, los anillos $K[\underline{X}_1,\ldots,\underline{X}_n]$.

DEFINICIÓN 21 (**Variedad algebraica afín**). *Si K es un cuerpo algebraicmente cerrado, un subconjunto* $V \subseteq K^n$ *se denomina conjunto (o variedad) algebraica afín sobre K si existe un conjunto finito de polinomios* $\{f_1,...,f_m\} \subseteq K[X_1,...,X_n]$ *tal que*

$$V = V_{\mathbb{A}}(f_1,...,f_m) = \{x \in K^n \,:\, f_1(x) = \cdots = f_m(x) = 0\}.$$

Cuando se sobre-entienda por el contexto que estamos hablando del caso afín escribiremos simplemente $V(f_1,\ldots,f_m)$.

El teorema de la Base de Hilbert (el hecho de que $K[X_1,...,X_n]$ sea un anillo noetheriano) nos garantiza el siguiente enunciado:

PROPOSICIÓN B.2.1 (**Topología de Zariski**). *Si K es un cuerpo algebraicamente cerrado, existe una única topología sobre* K^n *en la que el conjunto de sus cerrados es la familia siguiente:*

$$\{V \subseteq K^n \,:\, V \text{ es una variedad algebraica sobre } K\}$$

Dicha topología se denomina topología de Zariski en K^n *y sus abiertos son uniones finitas de subconjuntos* $D(g) \subseteq K^n$ *donde:*

$$D(g) = \{x \in K^n \,:\, g(x) \neq 0\},$$

para algún polinomio $g \in [X_1,...,X_n]$. *Los abiertos de la forma* $D(g)$ *anterior son llamados abiertos principales. Nótese que cualquier intersección finita de abiertos principales es un abierto principal. Es decir, dadas* $g_1,...,g_s \in K[X_1,...,X_n]$ *es sencillo observar que*

$$\{x \in K^n \,:\, g_1(x) \neq 0,...,g_s(x) \neq 0\} = \left\{x \in K^n \,:\, \left(\prod_{i=1}^{s} g_i(x)\right) \neq 0\right\}$$

OBSERVACIÓN B.2.2 (**Sobre Notación**).

i) A los conjuntos algebraicos afines se les denomina, en ocasiones, cerrados Zariski en K^n, mientras que a los abiertos en esta topología se les denomina simplemente abiertos Zariski.
ii) Si $\Delta \subseteq K^n$ es un subconjunto, llamaremos topología de Zariski sobre Δ a la inducida sobre Δ por la topología de Zariski sobre K^n.
iii) La parte de la matemática que estudia los conjuntos algebraicos afines, la topología de Zariski y diversas extensiones se denomina *Geometría Algebraica*. El tratamiento algorítmico de la Geometría Algebraica, cuando sea posible, se llama *Teoría de la Eliminación*.

Con las notaciones precedentes, definimos lo siguiente

DEFINICIÓN 22 (**Subconjunto Constructible**). *Un subconjunto $C \subseteq K^n$ se denomina constructible si existen familias finitas de polinomios*

- $\{f_{ij} \,:\, 1 \leq i \leq m,\, 1 \leq j \leq k_i\} \subseteq K[X_1, ..., X_n]$
- $\{g_i \,:\, 1 \leq i \leq m\} \subseteq K[X_1, ..., X_n]$

tales que

$$C = \bigcup_{i=1}^{m} \{x \in K^n \,:\, f_{i1}(x) = 0, ..., f_{ik_i}(x) = 0, g_i(x) \neq 0\}$$

Llamaremos localmente cerrado a todo constructible dado como la intersección de un cerrado Zariski con un abierto Zariski, es decir, los subconjuntos $L \subseteq K^n$ tales que existen polinomios $\{f_1, ..., f_m, g\}$ en $K[X_1, ..., X_n]$ tales que:

$$L = \{x \in K^n : f_1(x) = 0, ..., f_m(x) = 0, g \neq 0\}.$$

También diremos que L es un abierto Zariski (posiblemente vacío) en el algebraico $V(f_1, ..., f_m) \subseteq K^n$.

Podemos concluir que *un constructible es simplemente una unión finita de localmente cerrados para la topología de Zariski.*

DEFINICIÓN 23 (**Funciones y Aplicaciones Polinomiales**). *Sea K un cuerpo y $V \subseteq K^n$ un subconjunto cualquiera. Una función polinomial es una función $\phi : V \longrightarrow K$ tal que existe un polinomio $p \in K[X_1, \ldots X_n]$ tal que:*

$$\forall x \in V,\ \ \phi(x) = p(x).$$

Las funciones polinomiales sobre V forman un anillo conmutativo con unidad que se denota usualmente por $K[V]$. Dados $V \subseteq K^n$, $W \subseteq K^m$ dos subconjuntos respectivamente de K^n y K^m. Una aplicación $\phi : V \longrightarrow W$ se dice aplicación polinomial si existen $p_1, \ldots p_m \in K[X_1, \ldots, X_n]$ tales que

$$\forall x \in V,\ \ \phi(x) = (p_1(x), \ldots, p_m(x)).$$

PROPOSICIÓN B.2.3 (**Las aplicacones polinomiales son continuas para las respectivas topologías de Zariski**). *Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y sean $V \subseteq K^n$, $W \subseteq K^m$ dos conjuntos constructibles. Sea $\phi : V \longrightarrow W$ un aplicación polinomial. Entonces, ϕ es continua para las respectivas toplogías de Zarsiki. Es decir, si $C \subseteq W$ es un cerrado Zariski en W, entonces $\phi^{-1}(C)$ es cerrado para la topología de Zariski de V.*

Si bien las imágenes inversas conjuntos algebraicos por aplicaciones polinomiales son conjuntos algebraicos, en el sentido inverso, la propiedad no se verifica y ésa es la causa de la introducción de los conjuntos constructibles.

TEOREMA B.2.4 (**Teorema Fundamental de la Teoría de Eliminación**). *Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado, sea $\phi : K^n \longrightarrow K^m$ una aplicación polinomial. Entonces, para todo $V \subseteq K^n$ cerrado Zariski, el conjunto $\phi(V) \subseteq K^m$ es un conjunto constructible.*

COROLARIO B.2.5. *Con las notaciones del Teorema precedente, si $C \subseteq K^n$ es constructible, $\phi(C) \subseteq K^m$ es constructible.*

EJEMPLO B.2.6 (**Ejemplos y comentarios**).

i) Es obvio que todo constructible puede escribirse como imagen de un algebraico por una aplicación polinomial. Así por ejemplo, si tomamos el constructible de la forma

$$C = \{x \in K^n \,:\, f_1(x) = 0, ..., f_k(x) = 0, g_1(x) \neq 0, ..., g_q(x) \neq 0\},$$

consideramos el siguiente conjunto algebraico afín $V \subseteq K^{n+1}$

$$V = \left\{ (x_1, ..., x_n, y_1) \in K^{n+1} \,:\, f_1(x_1, ..., x_n) = 0, ..., f_k(x_1, ..., x_n) = 0, y_1 \left(\prod_{j=1}^{q} g_j(x) \right) - 1 = 0 \right\}.$$

Ahora consideremos la proyección $\Pi : K^{n+1} \longrightarrow K^n$ *que "olvida" la coordenada* y_1. *Es claro que* Π *es una aplicación polinomial tal que* $\Pi := (X_1, ..., X_n)$. *Además es claro que* $\Pi(V) = C$.

ii) La razón para introducir los conjuntos constructibles se basa, precisamente en la inestabilidad de los cerrados Zariski por transformaciones dadas por aplicaciones polinomiales. El ejemplo más simple pasa por considerar la hipérbola

$$V = \{(x_1, x_2) \in K^2 : x_1 x_2 - 1 = 0\},$$

y considerar la proyección $\pi : K^2 \longrightarrow K$ *que "olvida" la segunda coordenada. Claramente,* $\pi(V) = \{x_1 \in K : x_1 \neq 0\} \subseteq K$ *es un abierto Zariski que no es cerrado Zariski en* K.

iii) La Teoría de la Eliminación es el conjunto de procesos algorítmicos que permiten realizar la tarea siguiente:
Dados como input:

- *Una familia de polinomios* $\{f_1, ..., f_s\} \subseteq K[X_1, ..., X_n]$
- *Una aplicación polinomial dada por la familia de sus coordenadas que son polinomios* $\{h_1, ..., h_m\} \subseteq K[X_1, ..., X_n]$*:*

$$H := (h_1, ..., h_m) : K^n \longrightarrow K^m$$

Hallar alguna familia de polinomios en $K[Y_1, ..., Y_m]$ *que definen el conjunto constructible*

$$C = H(V(f_1, ..., f_s)) \subseteq K^m.$$

Los algoritmos involucrados suelen tener una gran complejidad en tiempo y espacio, sin embargo, podemos interpretar el problema del modo siguiente: En primer lugar, observamos que el grafo de H *restringido a* $V(f_1, ..., f_s)$ *es también un conjunto algebraico* $Gr\left(H|_{V(f_1,...,f_s)}\right) \subseteq K^{n+m}$

$$W = Gr\left(H|_{V(f_1,...,f_s)}\right) = \left\{(\underline{x}, \underline{y}) \in K^{n+m} : f_1(x) = 0, ..., f_s(x) = 0,\ y_1 - h_1(x) = 0, ..., y_m - h_m(x) = 0\right\},$$

En otras palabras $W \subseteq K^{n+m}$ *es el conjunto algebraico definido por la familia de polinomios*

$$\{f_1, ..., f_s, y_1 - h_1, ..., y_m - h_m\} \subseteq K[X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_m].$$

En particular, si $\pi : K^{n+m} \longrightarrow K^m$ *es la proyección de "olvida" las* n *primeras coordenadas, observamos que el constructible que buscamos* $C \subseteq K^n$ *es la proyección algebraica* W

$$C = \pi(W) = \pi\left(Gr\left(H|_{V(f_1,...,f_s)}\right)\right)$$

Dado que las ecuaciones de W *son fáciles de calcular a partir del input, se puede escribir* C *mediante una fórmula con cuantificadores existenciales*

$$(y_1, ..., y_m) \in C \Leftrightarrow \exists x_1 \in K, ..., \exists x_n \in K, [f_i(x_1, ..., x_n) = 0, 1 \leq i \leq s] \wedge [y_j - h_j(x_1, ..., x_n) = 0, 1 \leq j \leq s].$$

Por tanto, los algoritmos de Eliminación persiguen "Eliminar el bloque de cuatificadores existenciales $\exists x_1 \in K, ..., \exists x_n \in K$*" de la ecuación anterior. Esto supondrá modificar las ecuaciones involucradas de modo apropiado. El caso de un solo bloque de cuantificadores existenciales relaciona el problema con versiones algorítmicas de Nullstellensatz de Hilbert. Por extensión, la eliminación tambien se extiende a los bloques de cuantificadores universales* $\forall$ *y en general,* La Teoría de la Eliminación trata de eliminar mediante algoritmos los cuantificadores $\{\forall, \exists\}$ involucrados en las fórmulas de ecuaciones e inecuaciones polinomiales en número finito. A modo de ejemplo podemos citar [**He,83**].

B.2.1. El Caso Real. La misma terminología que se usa en el caso algebraicamente cerrado puede usarse en el cuerpo de los números reales de $\mathbb{R}$. Las especiales características de $\mathbb{R}$ hacen que la terminología y los resultados anteriores no se transfieran de manera imediata. Veremos a continuación algunas diferencias destacables:

i) Los conjuntos algebraicos reales son los conjuntos $V \subseteq \mathbb{R}^n$ de soluciones de un número finito de ecuaciones polinomiales, es decir, existen $\{f_1, ..., f_s\} \subseteq \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ tales que

$$V = V_{\mathbb{R}}(f_1, ..., f_s) = \{x \in \mathbb{R}^n \ :\ f_i(x) = 0,\ 1 \leq i \leq s\}.$$

ii) Los conjuntos algebraicos reales pueden darse siempre con una sola ecuación polinomial. Por ejemplo

$$V = V_{\mathbb{R}}(f_1, ..., f_s) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \ :\ \sum_{i=1}^{s} f_i(x)^2 = 0\right\} = V_{\mathbb{R}}\left(\sum_{i=1}^{s} f_i^2\right).$$

Esto no sería posible en el caso complejo, tomando por ejemplo el punto $\{(0,0)\} \subseteq \mathbb{C}^2$ vemos que no puede expresarse mediante una sola ecuación polinomial, es decir

$$\{(0,0)\} = V_{\mathbb{C}}(X_1, X_2) \neq V_{\mathbb{C}}(f),\ \forall f \in \mathbb{C}[X_1, X_2].$$

De hecho, los conjuntos de la forma $V_{\mathbb{C}}(f) \subseteq K^n$, con $f \in K[X_1, ..., X_n] \setminus \mathbb{C}$ cuando K es un cuerpo algebraicamente cerrado, se llaman *hiper-superficies*, tienene dimensión $n-1$ y son conjuntos de cardinal infinito para $n \geq 2$. En el caso de $n = 2$ suelen denominarse *curvas algebraicas*. En cambio en $\mathbb{R}^n$ no hay ningún problema para representar un punto como los ceros de una sola ecuación

$$\{(a_1, ..., a_n)\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 = 0 \right\} = V_{\mathbb{R}} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 \right).$$

iii) Los conjuntos constructibles reales serán los conjuntos $C \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que emiten ecuaciones $\{f_{ij} : 1 \leq i \leq s,\ 0 \leq j \leq k_i\}$, $\{g_1 \ : \ 1 \leq i \leq s\}$ tales que

$$C = \bigcup_{i=1}^{s} V_{\mathbb{R}}(f_{i1}, ..., f_{ik_i}) \cap \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \neq 0\}.$$

Sin embargo, los constructibles no bastan para describir las imágenes de los conjuntos algebraicos reales mediante aplicaciones polinomiales. Un ejemplo sencillo sería la parábola en $\mathbb{R}^2$

$$V = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1.x_2^2 = 0\}$$

que es claramente un conjunto algebraico real. Si consideramos la proyección $\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ que "olvida" la segunda coordenada y que es un aplicación polinomial, entonces,

$$C = \pi(V) = \{x_1 \in \mathbb{R} \ : \ x_1 \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Se observa fácilmente que C no es algebraico en $\mathbb{R}$ (los algebraicos en $\mathbb{R}$ son $\emptyset$, $\mathbb{R}$ y los conjuntos finitos). Tampoco es un constructible (los constructibles en $\mathbb{R}$ son $\emptyset$, $\mathbb{R}$, los conjuntos finitos y los co-finitos). Se trata de un tipo distinto de objeto geométrico al que S. Lojasiewicz llamó *conjuntos semi-algebraicos*. Su terminología sigue utilizandose en la actualidad.

Definición 24 (**Conjuntos Semi-algebraicos**). *Un subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ se llama semi-algebraico si existen dos familias de polinomios*

- $\{f_{ij} \ : \ 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq k_i\}$
- $\{g_{ij} \ : \ 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq p_i\}$

de tal modo que

$$S = \bigcup_{i=1}^{s} \{x \in \mathbb{R}^n : \ f_{i1}(x) = 0, ..., f_{ik_i}(x) = 0, g_{i1}(x) > 0, ..., g_{ip_i}(x) > 0\} \tag{B.2.1}$$

Los conjuntos algebraicos y constructibles reales son semi-algebraicos pero hay muchos semi-algebraicos no son constructibles ni algebraicos reales. Es fácil observar que todo semi-algebraico $S \subseteq \mathbb{R}^n$ se puede obtener como una proyección de un algebraico real $V \subseteq R^{n+m}$, contenido en un espacio afín real de dimensión superior. A modo de ejemplo consideremos los llamados básicos semi-algebraicos.

- Un conjunto semi-algebraico $S \subseteq \mathbb{R}^n$ se denomina básico cerrado si existen polinomios $f_1, ..., f_s \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ tales que

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : f_1(x) \geq 0, ..., f_s(x) \geq 0\}. \tag{B.2.2}$$

Por ejemplo, los algebraicos reales son básicos cerrados semi-algebraicos porque

$$V = V_{\mathbb{R}}(h_1, ..., h_m) = \{x \in \mathbb{R}^n : -h_1^2(x) \geq 0, ..., -h_m^2(x) \geq 0\}$$

Todo básico cerrado es la proyección de un algebraico real de un espacio de dimensión superior. Así, dado $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f_1, ..., f_s \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ satisfaciendo la identidad B.2.2 , consideramos $W \subseteq \mathbb{R}^{n+s}$ dado mediante

$$W = \{(\underline{x}, \underline{y}) \in \mathbb{R}^{n+s} : \ f_1(\underline{x}) - y_1^2 = 0, ..., f_s(\underline{x}) - y_s^2 = 0\}$$

Si $\pi : \mathbb{R}^{n+s} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la proyección que "olvida" las variables $y_1, ..., y_s$, entonces

$$S = \pi(W) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \exists y_1 \in \mathbb{R}, ..., \exists y_s \in \mathbb{R},\ f_i(\underline{x}) - y_i^2 = 0,\ 1 \leq i \leq s\}$$

Los cerrados básicos semi-algebraicos no suelen ser cerrados Zariski reales.

- Un conjunto semi-algebraico $S \subseteq \mathbb{R}^n$ se denomina básico abierto si existen $g_1, ..., g_t \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ tales que

$$S' = \{x \in \mathbb{R}^n : g_1(x) > 0, ..., g_t(x) > 0\}. \tag{B.2.3}$$

Esta vez, las intersecciones finitas de abiertos Zariski reales de la forma $D(h)$ son abiertos básicos semi-algebraicos . Es decir, dadas $h_1, ..., h_m \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ se tiene

$$\{x \in \mathbb{R}^n : h_1(x) \neq 0, ..., h_m(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : h_1^2(x) > 0, ..., h_m^2(x) > 0\}.$$

Los abiertos básicos semi-algebraicos también son proyecciones de un algebraico real en una variedad de dimensión superior. Así, dado $S' \subseteq \mathbb{R}^n$ y $g_1, ..., g_t \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ que justifiquen la identidad B.2.3 definimos $W' \subseteq \mathbb{R}^{n+t}$ como el conjunto algebraico real

$$W' = \{(\underline{x}, \underline{y}) \in \mathbb{R}^{n+t} : \ y_i^2 g_i(\underline{x}) - 1 = 0, \ 1 \leq i \leq t\}$$

Igualmente, si $\pi : \mathbb{R}^{n+t} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la proyección que "olvida" las coordenadas $\underline{y} = y_1, ..., y_t$, observamos que

$$S' = \pi(W')$$

De nuevo, es obvio que hay más conjuntos abiertos básicos semi-algebraicos que abiertos Zariski reales.

- Llamaremos semi-algebraico localmente cerrado a la intersección de un básico abierto con un básico cerrado. Y todo semi-algebraico es una unión finita de semi-algebraicos localmente cerrados.

Teorema B.2.7 (**Principio de Tarski**). *Sea $H = (h_1, ..., h_m) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación polinomial donde $\{h_1, ..., h_m\} \subseteq \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ es una familia finita de polinomios. Sea $V = V_{\mathbb{R}}(f_1, ..., f_s) \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto algebraico real dado por las ecuaciones $\{f_1, ..., f_s\} \subseteq \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$. Entonces, la imagen $H(V) \subseteq \mathbb{R}^m$ es un conjunto semi-algebraico.*
Mas aún, existe un procedimiento algorítmico tal que dadas

- *Las ecuaciones $\{h_1, ..., h_m\}$ que definen H,*
- *Las ecuaciones $\{f_1, ..., f_s\}$ que definen V,*

calcula ecuaciones e inecuaciones que describen $H(V)$ como en la identidad B.2.1.

Corolario B.2.8 (**Principio de Tarski**). *El mismo resultado se satisface en el caso semi-algebraico. Es decir, si $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es semi-algebraico y $H = (h_1, ..., h_m) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es polinomial, entonces $H(S) \subseteq \mathbb{R}^m$ es semi-algebraico. Además, existe un algoritmo que transforma la descripción de S en una descripción de $H(S)$ sin la presencia de cuantificadores.*

Observación B.2.9. Igual que en el caso algebraicamente cerrado, en el caso real los algoritmos subyacentes al Principio de Tarski son algoritmos que eliminan un bloque de cuantificadores existenciales. A las fórmulas que involucran cuantificadores $\{\forall, \exists\}$, polinomios y desigualdades del tipo $\{> 0, \geq 0, = 0\}$ se las denomina **fórmulas de** 1^{er} **orden** sobre los reales. Si dichas fórmulas no poseen $\{\forall, \exists\}$, se las denomina libres de cuantificadores. El conjunto $H(S)$ del Corolario B.2.8 es expresable mediante una fórmula con un bloque de cuantificadores existenciales

$$(y_1, ..., y_m) \in H(S) \Leftrightarrow \exists x_1 \in \mathbb{R}, ..., \exists x_n \in \mathbb{R}, [y_j - h_j(x_1, ..., x_n) = 0, 1 \leq j \leq s] \wedge [x \in S].$$

donde con $[x \in S]$ hemos abreviado cualquier fórmula libre de cuantificadores que define S. El principio de Tarski significa que se puede calcular algorítmicamente una fórmula libre de cuantificadores $\Phi(y_1, ..., y_r)$ tal que

$$(y_1, ..., y_s) \in H(S) \Leftrightarrow \Phi(y_1, ..., y_r) \text{ se satisface.}$$

El principio de Tarski no solo supone la eliminación de un bloque de cuantificadores existenciales sino, como en el caso algebraicamente cerrado, la existencia de un algoritmo que elimina toda presencia de cuantificadores (existenciales o universales) en fórmulas de 1^{er} orden sobre los reales, para hallar fórmulas equivalentes libres de cuantificadores. El estudio de estos algoritmos corresponde a la *Teoría de la Eliminación real.*

B.3. Irreducibles y dimensión de Krull

DEFINICIÓN 25 (**Variedad Irreducible**). *Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico. Un cerrado $F \subseteq X$ se dice reducible si existen $F_1, F_2 \subseteq F$ cerrados tales que*

$$F = F_1 \cup F_2,$$

y $F_i \neq F$, para cada i, $1 \leq i \leq 2$. Los cerrados que no son reducibles se llaman irreducibles.
En particular, si $\mathbb{K}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado o si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, una variedad algebraica $V \subseteq \mathbb{K}^n$ se dice reducible o irreducible si lo es como cerrado de la topología de Zariski de $\mathbb{K}^n$.
Con las mismas hipótesis, si $C \subseteq \mathbb{K}^n$ es un constructile, un cerrado F en C se dice reducible o irreucible si lo es como cerrado de la tpología de Zariski de C.

La noción de irreducible juega en la topología de Zariski una función similar a la noción de convexo en topología. De hecho, en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, un conjunto algebraico irreducible es convexo. La condición noetheriana de la topología Zariski aporta varias características interesantes de las cuales podemos extraer algunas, sin demostración, como las siguientes:

PROPOSICIÓN B.3.1 (**Componentes Irreducibles**). *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo algebraicamente cerrado o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Entonces, todo conjunto algebraico afín $V \subseteq \mathbb{K}^n$ admite una descomposición única y minimal como composición finita de irreducibles. Es decir, existen $V_1, ..., V_s \subseteq V$ irreducibles tales que*

$$V = V_1 \cup ... \cup V_s \ y \ \forall i \neq j, \ V_i \not\subseteq V_j.$$

A los cerrados irreducibles $V_1, \ldots, V_s$ se les denomina componentes irreducibles de V. El mismo resultado es cierto para cerrados V en conjuntos constructibles $C \subseteq \mathbb{K}^n$. En este caso, hablaremos de componentes irreducibles en C de V.

DEFINICIÓN 26 (**Dimensión de Krull**). *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo algebraico cerrado. Llamaremos dimensión de Krull de una variedad afín $V \subseteq \mathbb{K}^n$ al máximo de las longitudes de cadenas de irreducibles contenidas en V. Es decir, al máximo de las $r \in \mathbb{N}$ tales que existen $W_0, ..., W_r$ irreducibles no vacíos satisfaciendo*

$$\emptyset \neq W_0 \subset W_1 \subset ... \subset W_r \subseteq V.$$

Denotaremos por $\dim(V)$ a la dimensión de Krull de V.

A continuación resumiremos unas pocas propiedades de la dimensión de Krull.

PROPOSICIÓN B.3.2. *Sea $V \subseteq \mathbb{K}^n$ algebraico y sea $V = V_1 \cup ... \cup V_s$ su descomposición como unión finita de irreducibles. Entonces*

$$dim(V) = max\{dim(V_1), ..., dim(V_s)\}.$$

Una variedad algebraica V se dice de dimensión pura si todas sus componentes tienen la misma dimensión.

OBSERVACIÓN B.3.3.
i) Un conjunto algebraico $V \subseteq \mathbb{K}^n$ tiene dimensión 0 y si solamente si es un conjunto finito de puntos, es decir $dim(V) = 0 \iff \sharp(V) < +\infty$.
ii) La dimensión de Krull de una variedad afín lineal $L \subseteq \mathbb{K}^n$ es su dimensión como variedad lineal. En particular, $dim(\mathbb{K}^n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

TEOREMA B.3.4. *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo algebraicamente cerrado. Sean $f_1, ..., f_r \in \mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$ una familia de polinomios con $r \leq n$. Entonces, toda componente irreducible W de la variedad $V(f_1, ..., f_n) \subseteq \mathbb{K}^n$ dada mediante*

$$V(f_1, ..., f_r) = \{x \in \mathbb{K}^n : f_1(x) = 0, ..., f_r(x) = 0\}, \ si \ V(f_1, ..., f_r) \neq \emptyset,$$

satisface $\dim(W) \geq n - r$. Más aún, si $V(f_1, ..., f_r) \neq \emptyset$ y si, para cada i, f_i no es divisor de 0 en el anillo cociente con respecto al ideal generado por los anteriores (i.e. $\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]/(f_1, ..., f_{i-1})$), entonces $\dim V(f_1, ..., f_r) = n - r$ y todas las componentes irreducibles tienen dimensión $n - r$.

DEFINICIÓN 27. *Sea $\mathbb{K}$ algebraicamente cerrado, $C \subseteq \mathbb{K}^n$ un conjunto constructible. Llamaremos dimensión de Krull de C a la dimensión de Krull de su clausura Zariski*

$$dim(C) = dim(\overline{C}^Z)$$

Así, si $V \subseteq \mathbb{K}^n$ es un conjunto algebraico irreducible, y si $U \subseteq V$ es un abierto Zariski no vacío en V, entonces U es denso Zariski en V y $\dim(U) = \dim(V)$.

PROPOSICIÓN B.3.5 (**Dimensión y aplicaciones Polinomiales**). *Sea $\mathbb{K}$ algebraicamente cerrado, y sea $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ una aplicación polinomial.*

i) Para todo $V \subseteq \mathbb{K}^n$ algebraico, $f(V) \subseteq \mathbb{K}^m$ es constructible y $dim(f(V)) \leq dim(V)$.
ii) Si $V \subseteq \mathbb{K}^n$ es algebraico irreducible, la clausura Zariski de $f(V)$ también es irreducible.

Veremos adelante otras relaciones entre dimensión y aplicaciones polinomiales más finas.
Las aplicaciones polinomiales entre conjuntos algebraicos suelen denominarse *Morfismos regulares*. De hecho los morfismos regulares son continuos para las respectivas topologías de Zariski.

DEFINICIÓN 28. *Dos variedades algebraicas $V \subseteq \mathbb{K}^n$ y $W \subseteq \mathbb{K}^m$ se dicen birregularmente isomorfas si existe una aplicación polinomial biyectiva $\phi : V \longrightarrow W$ tal que $\phi^{-1} : W \longrightarrow V$ es también polinomial.*

PROPOSICIÓN B.3.6. *Dos variedades birregularmente isomorfas tienen la misma dimensión de Krull.*

DEFINICIÓN 29 (**Variedad lisa**). *Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Una variedad $V \subseteq \mathbb{K}^n$ algebraica se dice lisa (o regular) si es subvariedad diferenciable de $\mathbb{K}^n$ de clase $\mathcal{C}^\infty$.*

PROPOSICIÓN B.3.7 (**Criterio de Jacobiano**). *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y $V \subseteq \mathbb{K}^n$ es una variedad algebraica lisa, se tiene*

i) La dimensión de Krull de V coincide con su dimensión como subvariedad diferenciable de $\mathbb{K}^n$.
ii) Para cada $x \in V$, si T_xV representa el espacio tangente a V en x, la dimensión de Krull satisface

$$dim(V) = dim(T_xV),$$

donde $dim(T_xV)$ es su dimensión como $\mathbb{K}-$ espacio vectorial.

PROPOSICIÓN B.3.8. *Si $V \subseteq \mathbb{K}^n$ y $W \subseteq \mathbb{K}^m$ son dos conjuntos algebraicos, con $\mathbb{K}$ algebraicamente cerrado. Entonces,*

i) Si V y W son irreducibles, $V \times W$ también es irreducible.
ii) La dimensión de Krull satisface $\dim(V \times W) = \dim(V) + \dim(W)$.

Una propiedad que usamos en la memoria es el resultado siguiente sobre conectitud e irreducibilidad en el caso de variedades algebraicas complejas irreducibles. Por ejemplo, en [**Mu,76**] el resultado se presenta como un resultado tipo GAGA ("Géometrie Algébrique- Géometrie Analytique"), consecuencia de un resultado más sofisticado de Chow. En la Sección 2 del Capítulo VII del Volumen 2 de [**Sh,88**], se presenta sólo para el caso de cerrados irreducibles. Aquí nos limitaremos a enunciarlo del modo siguiente:

TEOREMA B.3.9 (**Connectedness Theorem**). *Sea $V \subseteq \mathbb{C}^n$ una variedad algebraica afín compleja. Supongamos que V es irreducible. Entonces,*

i) DENSIDAD DE LOS ABIERTOS EUCLÍDEOS: *Sea $A \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto en la topología euclídea (o usual) de $\mathbb{C}^n$. Supongamos que la intersección $A \cap V$ contiene un punto regular de dimensión máxima de V (o, equivalentemente, que $A \cap V$ es una subvariedad diferenciable de $\mathbb{C}^n$ de dimensión igual a la dimensión de Krull de V). Entonces, $A \cap V$ es denso Zariski en V, i.e. $\overline{A \cap V}^Z = V$ y V es el menor algebraico cerrado que contiene a $A \cap V$.*
ii) TEOREMA DE CONECTITUD: *Si $U \subseteq \mathbb{C}^n$ es un abierto Zariski, $U \cap V$ es conexo para la topología usual de $\mathbb{C}^n$.*

DEMOSTRACIÓN. Simplemente citar a [**Mu,76**], Corolario (4.16). □

Debe señalarse que este Teorema sólo es cierto para el caso complejo. En el caso real fácilmente se encuentran conjuntos algebraicos irreducibles (cúbica con punto aislado, por ejemplo) que no son conexos. También pueden encontrarse algebraicos irreducibles reales en los que los puntos regulares de dimensión máxima no son densos para la topología usual (mismo ejemplo).

B.4. Propiedades Genéricas

Supondremos para esta sección que nuestro cuerpo de referencia es $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o un cuerpo algebraicamente cerrado.

DEFINICIÓN 30 (**Propiedad Genérica**). *Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o un cuerpo algebraicamente cerrado. Sea $P = P(x)$ una propiedad que afecta a puntos $x \in \mathbb{K}^n$, en un espacio afín de dimension finita sobre $\mathbb{K}$. Diremos que P se satisface genéricamente sobre $\mathbb{K}^n$ si existe un abierto Zariski no vacío $U \subseteq \mathbb{K}^n$ tal que*

$$\forall x \in U, \quad P(x) \text{ es cierta.} \tag{B.4.1}$$

Si $V \subseteq \mathbb{K}^n$ es un conjunto algebraico y $P = P(x)$ es una propiedad que afecta a puntos $u \in V$, diremos que P se satisface genéricamente en V si existe un abierto Zariski $U \subseteq V$ tal que

$$\forall x \in U, \quad P(x) \text{ es cierta.} \tag{B.4.2}$$

Observación B.4.1. En el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, las variedades algebraicas tienen medida nula, si una propiedad se satisface genéricamente en $\mathbb{K}^n$ entonces se satisface salvo un conjunto de medida nula (a.e.="almost everywhere" en el lenguaje de Teoría de la Medida).

Si $V \subseteq \mathbb{K}^n$ es un conjunto algebraico reducible y $P(x)$ es una propiedad que se satisface genéricamente en V, bien puede ocurrir que $P(x)$ se satisfaga salvo en un conjunto con dimensión igual a la de V o que los puntos donde P se satisface no sean Zariski densos en V. Por eso, las propiedades genéricas sobre variedades algebraicas tienen significado solamente en el caso en que V sea irreducible.

Observación B.4.2. Si $V \subseteq \mathbb{K}^n$ es una variedad algebraica irreducible una propiedad P que se satisface genéricamente en V es una propiedad tal que existe un subconjunto algebraico $W \subset V$ tal que

- P se satisface en todos los puntos $x \in V \setminus W$
- $dim(W) < dim(V)$, donde dim hace referencia a la dimensión de Krull.

Ejemplo B.4.3. *Un ejemplo más sencillo pasa por considerar las matrices de rango máximo. Supongamos $n \geq m$ y sea $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ el espacio vectorial complejo de las matrices con m filas y n columnas. Obviamente, tenemos la identificación*

$$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{m\cdot n}$$

Consideremos la propiedad P siguiente:

$$P(M) := rank(M) = m.$$

Afirmación: La propiedad P es genéricamente cierta en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$. Para probarlo, consideramos un grupo de variables $\{X_{i,j} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ que representan las coordenadas de las matrices en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$. Consideramos el anillo de polinomios $\mathbb{C}[X_{i,j} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n]$ en esas $m \cdot n$ variables.
Para cada subconjunto $S \subseteq \{1, ..., n\}$ con $\sharp(S) = m$, definamos la submatriz en variables

$$M_S = (X_{i,j})_{1\leq i\leq m, j\in S}$$

y definimos el polinomio $P_S \in \mathbb{C}[X_{i,j} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n]$

$$P_S(X_{1,1}, ..., X_{m,n}) := det(M_S).$$

Sabemos que una matriz $M = (a_{i,j})$ tiene rango menor que m si y solamente si $P_S(a_{1,1}, ..., a_{m,n}) = 0 \quad \forall S \subseteq \{1, ..., n\}$ con $\sharp(S) = m$.
Pero también, podemos definir el abierto Zariski

$$U \subseteq \mathbb{C}^{m\cdot n} \cong \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$$

dado mediante

$$U_S := \{(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{mn} : P_S(a_{ij}) \neq 0\} \subseteq \mathbb{C}^{mn} \text{ abierto,}$$

$$U = \bigcup_{S\subseteq\{1,...,n\}, \sharp(S)=m} U_S.$$

Entonces, es claro que $\forall M \in U_S$, $rank(M) = m$, luego P se satisface en U y, por tanto, P es genéricamente cierta en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$.

Ejemplo B.4.4. *Dados $(f, g) \in \mathbb{C}[X]_m \times \mathbb{C}[X]_n \cong \mathbb{C}^{m+n+2}$ consideramos la propiedad siguiente :*

$$\text{“}P(f, g) := \neg\exists x \in \mathbb{C},\ f(x) = 0 \wedge g(x) = 0\text{”}$$

Es decir, $P(f, s)$ se satisface si f y g no tienen ceros complejos en común. Entonces, la propiedad P anterior es genéricamente cierta en $\mathbb{C}^{m+n+2} \cong \mathbb{C}[X]_m \times \mathbb{C}[X]_n$. Para probar esta afirmación retomemos la resultante discutida anteriormente. Si $Res_{m,n}$ es el polinomio multi-homogéneo introducido en el Ejemplo B.1.6, Sea $Res_{m,n}(f, g)$ el valor de la resultante en los coeficentes de dos polinomios f y g de grados respectivos m y n. Sean a_m y b_n respectivamente los coeficientes directores de f y g. Entonces, la propiedad $P(f, g)$ es equivalente a la siguiente fórmula:

$$a_m \neq 0, b_n \neq 0, Res_{m,n}(a_0, \ldots, a_m; b_0, \ldots, b_n) \neq 0.$$

Como esta última es una familia de tres inecuaciones que define un abierto Zariski, entonces P se satisface genéricamente (en ese abierto).

B.5. El Teorema de la Dimensión en la Fibra

En esta sección recordaremos el enunciado del Teorema de la Dimensión en la Fibra. Hay varias pruebas teóricas posibles, bien usando técnicas avanzadas de Álgebra Local y teoría de la dimensión o técnicas más geométricas como se hace en el clásico texto de Shafarerich [**Sh,77**]. Retomaremos la noción de aplicación polinomial entre dos variedades algebraicas de la Definición 23, como funciones continuas entre las topologías de Zariski respectivas (cf. Proposición B.2.3).
Recordemos también la dimensión de Krull de un conjunto algebraico cerrado (Definición 26) de la Sección B.3 del Apéndice.

Definición 31 (**Morfismo dominante**). *Sea $\mathbb{K}$ algebraicamente cerrado, $\phi : V \longrightarrow W$ una aplicación polinomial entre dos conjuntos constructibles $V \subseteq \mathbb{K}^n$ y $W \subseteq \mathbb{K}^m$. Decimos que ϕ es dominante si $\phi(V)$ es denso en W para la topología Zariski inducida en W por ella en $\mathbb{K}^m$.*

Nótese que las aplicaciones polinomiales $\phi : V \longrightarrow W$ suprayectivas son, en particular, dominantes pero el recíproco no es, en general, cierto

$$\phi : V\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : xy - 1 = 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

dada por $\phi(x, y) = x$ es dominante pero no es suprayectiva porque su imagen es el abierto Zariski $U = \{x \in \mathbb{C} : x \neq 0\}$. Con estos conceptos, enunciamos el resultado al que hace referencia esta sección.

Teorema B.5.1 (**Teorema de la Dimensión de la Fibra**). *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo algebraicamente cerrado, $V \subseteq \mathbb{K}^n$ un abierto Zariski en una variedad irreducible y $W \subseteq \mathbb{K}^m$ un conjunto algebraico irreducible. Sea $\phi : V \longrightarrow W$ una aplicación polinomial dominante. Entonces, para cada $y \in \phi(V)$ se tiene que la fibra en y satisface:*

$$dim\ \phi^{-1}(\{y\}) \geq dim(V) - dim(W).$$

Más aún, existe un abierto Zariski no vacío $U \subseteq W$ tal que para cada $y \in W$

$$dim\ \phi^{-1}(\{y\}) = dim(V) - dim(W).$$

Lo que sigue es una pequeña generalización del Teorema de la Dimensión de la Fibra que usaremos con la misma forma

Corolario B.5.2. *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo algebraicamente cerrado, $V \subseteq \mathbb{K}^n$ un conjunto algebraico puramente dimensional, $W \subseteq \mathbb{K}^m$ un conjunto algebraico irreducible y $\phi : V \longrightarrow W$ una aplicación polinomial dominante. Entonces,*

i) Para cada $y \in \phi(V)$ se tiene que la fibra satisface

$$dim\ \phi^{-1}(\{y\}) \geq dim(V) - dim(W).$$

ii) Existe un abierto Zariski no vacío $U \subseteq W$ tal que para cada $y \in U$ la fibra verifica

$$dim\ \phi^{-1}(\{y\}) = dim(V) - dim(W).$$

B.6. Recordando el Teorema de Sard

Recordaremos el Teorema de Sard tal y como es presentado en [**Dm,89**], por ejemplo. Lo haremos indistintamente para variedades diferenciables, reales o complejas por lo que denotaremos por $\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$.

Definición 32 (**Submersión, valores regulares, valores críticos**). *Sean $M \subseteq \mathbb{K}^n$ y $N \subseteq \mathbb{K}^m$ dos subvariedades diferenciables de clase $\mathcal{C}^\infty$. Sea $\varphi : M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable y*

$$T_u\varphi :\ T_uM \longrightarrow T_uN,$$

la diferencial de φ entre los respectivos espacios tangentes.

i) Diremos que φ es una submersión en $a \in M$ si $T_a\varphi$ es un epimorfismo lineal (es decir, si $T_a\varphi$ es suprayectiva). Diremos que $a \in M$ es regular si φ es submersión en $a \in M$.

ii) Diremos que un punto $b \in \varphi(M) \subseteq N$ es un valor crítico si existe un punto en la fibra $a \in \varphi^{-1}(\{b\})$ tal que $T_a\varphi$ no sea suprayectiva.

iii) Diremos que un punto $b \in N$ es un valor regular si o bien la fibra $\varphi^{-1}(\{b\})$ es vacía ($b \notin \varphi(M)$), o bien todos los puntos de la fibra son regulares.

iv) Diremos que φ es una submersión si lo es en todo punto (o, equivalentemente, si carece de valores singulares).

PROPOSICIÓN B.6.1. *Sean $M \subseteq \mathbb{K}^n$ y $N \subseteq \mathbb{K}^m$ dos subvariedades diferenciables, sea $\varphi : M \longrightarrow N$ una aplicación $\mathcal{C}^\infty$ y $b \in N$ un valor regular. Entonces, se tiene que*

i) O bien $\varphi^{-1}(\{b\}) = \emptyset$ o la fibra $\varphi^{-1}(\{b\})$ es una subvariedad diferenciable de $\mathbb{K}^n$.

ii) Para cada $a \in \varphi^{-1}(\{b\})$, en el caso de que $b \in \varphi(M)$, el espacio tangente a $\varphi^{-1}(\{b\})$ en a viene dado por

$$T_a\varphi^{-1}(\{b\}) = ker(T_a\varphi),$$

donde $T_a\varphi : T_aM \longrightarrow T_bN$ la diferencial de φ.

Nótese que si $b \in \varphi(M) \subseteq N$ es regular, la dimensión de la fibra (y la de su espacio tangente) satisface:

$$dim\varphi^{-1}(\{b\}) = dimT_a\varphi^{-1}(\{b\}) = dim(M) - dim(N).$$

OBSERVACIÓN B.6.2. Esta proposición nos hace recordar el Teorema de la Dimensión en la Fibra y no es casualidad. Así, si $V \subseteq \mathbb{C}^n$ es una variedad algebraica que también es una subvariedad diferenciable, entonces V es irreducible y la dimensión de Krull de V coincide con su dimensión como variedad diferenciable compleja con la dimensión de su espacio tangente en cada punto como espacio vectorial. Es decir, para cada $a \in V$,

$$dim_{Krull}(V) = dim_{\mathcal{C}^\infty Sub}(V) = dim(T_aV).$$

Véase el Criterio del Jacobiano (Propiedad B.3.7 anterior).

TEOREMA B.6.3 (**Teorema de Sard (o de Morse-Sard)**). *Sea $M \subseteq \mathbb{K}^n$ una subvariedad diferenciable, $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{C}^m$ una función $\mathcal{C}^\infty$. Entonces, el conjunto de los valores críticos de φ es un conjunto de medida de Lebesque nula en $\mathbb{C}^m$.*

B.7. Politopos de Newton y Volumen Mixto

Esta subsección trata las propiedades esenciales de los politopos de Newton y su relación con los polinomios multivariados.

DEFINICIÓN 33 (**Politopo de Newton**). *Llamaremos Politopo de Newton a todo conjunto $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ que es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos de $\mathbb{Z}^n$.*

En este trabajo concretamente, utilizaremos solamente politopos de Newton generados por subconjuntos $S \subseteq \mathbb{N}^n$.

EJEMPLO B.7.1. *Un claro politopo de Newton es un símplex $\Delta_n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, ya que, como ya hemos dicho, es la envolvente convexa de la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

DEFINICIÓN 34 (**Soporte de un polinomio**). *Dado un polinomio $f \in \mathbb{C}[X_0, ..., X_n]$, definimos su soporte como el conjunto de los exponentes $\underline{\mu} = (\mu_0, ..., \mu_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tales que el término de monomio $X_0^{\mu_0} \cdots X_n^{\mu_n}$ tiene coeficiente no nulo en f. Es decir, si*

$$f = \sum_{\underline{\mu} \in \mathbb{N}^{n+1}} a_{\underline{\mu}} X_0^{\mu_0} \cdots X_n^{\mu_n},$$

donde algunos (salvo un conjunto finito) de los coeficientes $a_{\underline{\mu}}$ son nulos, podemos definir el conjunto finito

$$supp(f) = \{\underline{\mu} \in \mathbb{N}^{n+1} : a_{\underline{\mu}} \neq 0\}.$$

Nótese que, con las notaciones de esta definición, tendremos que

$$f = \sum_{\underline{\mu} \in supp(f)} a_{\underline{\mu}} X_0^{\mu_0} \cdots X_n^{\mu_n}.$$

Si definimos $Q := CH(supp(f)) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ tendremos un politopo y se tiene que

$$f = \sum_{\underline{\mu} \in Q \cap \mathbb{N}^{n+1}} a_{\underline{\mu}} X_0^{\mu_0} \cdots X_n^{\mu_n},$$

EJEMPLO B.7.2. *Consideramos una lista $(k) = (k_1, ..., k_n)$ con $n \geq 1$ y los grupos de variables determinados por esa lista $\underline{X_1}, ..., \underline{X_n}$ donde*

$$\underline{X_i} = \{X_{i,0}, ..., X_{i,k_i}\}.$$

Denotaremos por $\mathbb{C}[\underline{X_1}, ..., \underline{X_n}]$ *el anillo de polinomios con coeficientes complejos en ese conjunto de variables, es decir,*

$$\mathbb{C}[\underline{X_1}, ..., \underline{X_n}] = \mathbb{C}[\{X_{i,j} : 1 \leq i \leq n,\ 0 \leq j \leq k_i\}].$$

Sea $mL^{\mathbb{C}}(\underline{X_1}, ..., \underline{X_n})$ *la familia de funciones que son multi-lineales introducidas en la Definición 2, o mediante el Ejemplo B.1.4. Consideremos el conjunto* $\Delta_{(k)}$ *introducido en la Definición 4 y observamos que es un politopo de Newton ya que es la envolvente convexa de los puntos de la forma*

$$\{(e_{1,j_1}, ..., e_{n,j_n}) : j_i \in \{0, ..., k_i\},\ 1 \leq i \leq n\},$$

donde $\{e_{i,0}, ..., e_{i,k_i}\} \subseteq \mathbb{Z}^{k_i+1}$ *es la base canónica de* $\mathbb{R}^{k_i+1}$*. De hecho, un polinomio* $f \in \mathbb{C}[\underline{X_1}, ..., \underline{X_n}]$ *satisface*

$$f \in mL^{\mathbb{C}}(\underline{X_1}, ..., \underline{X_n}) \Leftrightarrow\ supp(f) \subseteq \Delta_{(k)}.$$

Ejemplo B.7.3. *Otro ejemplo serían los polinomios homogéneos de grado dado. Así, consideramos* $\mathbb{C}[X_0, ..., X_n]$ *los polinomios en las variables* $\{X_0, ..., X_n\}$ *y* $H_d(X_0, ..., X_n) \subseteq \mathbb{C}[X_0, ..., X_n]$ *el* $\mathbb{C}-$ *espacio vectorial de todos los polinomios homogéneos de grado d junto con el polinomio nulo. Definamos el politopo*

$$Q_d := \{\underline{\mu} = (\mu_0, ..., \mu_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^{n} \mu_i = d\}.$$

Claramente, Q_d *es un politopo de Newton, de hecho,* $Q_d = d\Delta_n$*, donde* Δ_d *es el símplex de dimensión n en* $\mathbb{R}^{n+1}$*. Se tiene para cada* $f \in \mathbb{C}[X_0, ..., X_n]$ *que si* $f \neq 0$

$$f \in H_d(x_0, ..., x_n) \Longleftrightarrow supp(f) \subseteq Q_d.$$

Observación B.7.4. Como nuestros politopos son envolventes convexas de un número finito de puntos, es convexo, cerrado y acotado, luego también es compacto.

Definición 35 (**Dimensión y Volumen de un politopo**). *Sea* $Q \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ *un politopo.*

i) Llamaremos dimensión de Q a la dimensión de la menor variedad afín lineal $L \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ *que contiene.*

ii) Llamaremos $(n+1)-$*volumen de un politopo Q a su medida de Lebesque. Lo denotaremos simplemente por* $vol(Q)$*.*

Observación B.7.5. Claramente, un politopo $Q \in \mathbb{R}^{n+1}$ tiene siempre volumen finito porque es compacto y convexo y además, $vol(Q) > 0$ si y solamente si $dim(Q) = dim(\mathbb{R}^{n+1}) = n + 1$.

Definición 36 (**Suma de Minkowski**). *Dados* $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ *dos conjuntos cualesquiera, se llama suma de Minkowski al conjunto*

$$A + B = \{u + v : u \in A, v \in B\}.$$

Igualemente se puede definir la suma finita de Minkowski $A_1 + ... + A_s$, y un resultado del papel de esta suma es el siguiente:

Teorema B.7.6 (**Minkowski**). *Sean* $A_1, ..., A_s \subseteq \mathbb{R}^n$ *conjuntos cualesquiera, entonces,*

$$CH(A_1 + \cdots + A_n) = CH(A_1) + \cdots + CH(A_s).$$

En particular, la suma de politopos de Newton es un politopo de Newton y si todos los politopos de Newton $Q_1, ..., Q_s$ *son de volumen finito también es de volumen finito su suma* $Q_1 + \cdots + Q_s$*.*

Notación B.7.7. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$ un real positivo y $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ un politopo, entonces denotemos por λQ al politopo:

$$\lambda Q = \{\lambda \cdot u :\ u \in Q\}.$$

Además, si $\lambda \neq 0$ y Q es de dimensión n entonces λQ es un politopo de la misma dimensión.

Un resultado fundamental sobre la suma de convexos es el siguiente resultado de H. Minkowski:

Teorema B.7.8. *Sean* $Q_1, ..., Q_s \subseteq \mathbb{R}$ *politopos de Newton* $\mathbb{R}_{\geq 0}$ *los números reales no negativos. Entonces, dado* $\lambda_1, ..., \lambda_s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *el siguiente conjunto*

$$\lambda_1 Q_1 + ... + \lambda_s Q_s$$

es un convexo de volumen finito. Podemos definir así la función

$$f : (\mathbb{R}_{\geq 0})^s \longrightarrow \mathbb{R}$$

dado mediante

$$f(\lambda_1, ..., \lambda_s) := vol(\delta_1 Q_1 + \cdots + \delta_s Q_s).$$

Entonces, f es un polinomio homogéneo de grado n. Es decir, f toma la forma

$$f(\lambda_1, ..., \lambda_s) = \sum_{j_1,...,j_n \in \{1,...,s\}} V(Q_{j_1}, ..., Q_{j_n})\lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_n}, \tag{B.7.1}$$

donde las funciones $V(Q_{j_1}, ..., Q_{j_n})$ son simétricas, es decir, para toda permutación $\sigma \in \Sigma_n$,

$$V(Q_{j_1}, ..., Q_{j_n}) = V(Q_{\sigma(j_1)}, ..., Q_{\sigma(j_n)}).$$

DEFINICIÓN 37 (**Volumen Mixto**). *Con las notaciones precedentes, si $n = s$, se denomina volumen mixto de la familia de politopos $(Q_1, ..., Q_n)$ al coeficiente de $\lambda_1, ..., \lambda_n$ en la expansión (B.7.1) del polinomio f. Lo denotaremos mediante*

$$MV(Q_1, ..., Q_n) = V(Q_1, ..., Q_n).$$

Obsérvese que, en las notaciones del Teorema precedente, se tiene que

$$MV(Q_1, ..., Q_n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial\lambda_1 \cdots \partial\lambda_n}\Big|_{\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0} f(\lambda_1, \cdots, \lambda_n).$$

Algunas propiedades del volumen mixto son las siguientes:

- Si $Q_1 = \cdots = Q_n = Q$
$$MV(Q_1, \cdots, Q_n) = vol(Q)$$
- El volumen mixto es una función simétrica
- El volumen mixto MV es multilineal en el sentido siguiente
$$MV(\lambda Q_1 + \mu Q_1', Q_2, ..., Q_n) = MV(\lambda Q_1, Q_2, ..., Q_n) + MV(\mu Q_1', Q_2, ..., Q_n),$$
para $\mu, \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda, \mu \geq 0$.
- El volumen mixto es no negativo y es monótono en cada coordenada.

Esto y otras propiedades y sus referencias pueden encontrarse en [**Bu,01**].

B.8. La cota BKK

En esta sección, enunciaremos el resultado conocido como la "BKK bound". Retomemos las notaciones introducidas en la Sección 2.6 Así, $\mathbb{T}^N = (\mathbb{C}^*)^N$ es el toro $N-$dimensional, sea $(k) = (k_1, \ldots, k_n)$ un multi-índice que representa una lista de grupos de variables $\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_n$, $N := \sum_{i=1}^n (k_i + 1)$ el número total de variables involucradas y dada una lista de politopos $\mathcal{Q} := (Q_1, \ldots, Q_r)$, de tal modo que $Q_i \subseteq \mathbb{R}_+^N$, denotaremos por

$$m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q}),$$

el espacio vectorial complejo formado por listas de polinomios $f = (f_1, \ldots, f_r)$ tales que para cada i, $1 \leq i \leq r$, $supp(f_i) \subseteq Q_i$. Recordemos de la Definición 12 que a este conjunto se le denomina el espacio complejo de listas de r polinomios sparse con soporte mixto determinado por la lista de politopos $\mathcal{Q}$.
Fijada un a lista de politopos $\mathcal{Q}$ y una lista de ecuaciones $f = (f_1, \ldots, f_r) \in m\mathscr{H}^{(k)}(\mathcal{Q})$, recordemos que hemos llamado variedad de ceros tóricos asociados a la lista f a la variedad de ceros comunes en $\mathbb{T}^N$ determinados por f, es decir,

$$V_{\mathbb{T}}(f) := V_{\mathbb{T}}(f_1, \ldots, f_r) = \{\underline{x} \in \mathbb{T}^N \ :\ f_i(\underline{x}) = 0,\ 1 \leq i \leq r\} = V(f_1, \ldots, f_r) \cap \mathbb{T}^N.$$

Recordemos la Definición 30 de propiedad genérica.

DEFINICIÓN 38 (**Punto Aislado**). *Sea $V \subseteq \mathbb{C}^n$ un conjunto algebraico. Un punto $x \in V$ se dice aislado si $\{x\}$ es una componente irreducible de V. Del mismo modo, si $V \subseteq \mathbb{T}^n$ es una variedad de ceros tóricos, un punto $\{x\} \in V$ se denomina aislado si $\{x\}$ es componente irreducible de V para la topología de inducida en V por la topología de Zariski en $\mathbb{T}^n$.*

Tanto en $\mathbb{C}$ como en $\mathbb{T}^n$ se puede probar que un punto $x \in V$ es aislado si y solamente si existe un abierto $U \subseteq \mathbb{C}^n$ en la topología euclídea de $\mathbb{C}^n$ tal que

$$V \cap U = \{x\}.$$

El estudio de los ceros tóricos de ecuaciones polinomiales (y la acotación del número de puntos aislados) se expandió de forma tremenda a partir de los trabajos de D.N Berstein ([**Be,76**]), A.N. Kouchnirenko ([**Ku,76**]) y A. Khovanskii ([**Kho,78**]) (cf. también [**BKK,76**], [**Fu,93**]). De estos resultados, nosotros

nos centraremos en el de Bernshtein que es el que atañe más a este estudio, y el cuál resumiremos a continuación. Usaremos la siguiente notación:
Sea $\alpha \in \mathbb{R}^N \setminus \{\underline{0}\}$ un vector real no nulo en $\mathbb{R}^N$. Sea $S \subseteq \mathbb{Z}^N$ un conjunto finito de puntos con coordenadas enteras. Consideremos la aplicación lineal

$$\ell_\alpha : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t_1, ..., t_N) \longrightarrow \alpha_1 t_1 + \cdots + \alpha_N t_N$$

Sea $q \in S$ un mínimo de ℓ_α sobre S, es decir, sea $q \in S$ tal que

$$\ell_\alpha(q) = min\{\ell_\alpha(p) : \ p \in S\}.$$

Considerremos $\pi_\alpha \subseteq \mathbb{R}^N$ la hipersuperficie lineal dada por la condición

$$\pi_\alpha = \{(t_1, ..., t_N) \in \mathbb{R}^N : \ \ell_\alpha(t_1, ..., t_N) = \ell_\alpha(q)\},$$

donde $q \in S$ es el mínimo antes referenciado. Denotemos por $S_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ al conjunto finito dado por la intersección:

$$S_\alpha = \pi_\alpha \cap S \neq \emptyset.$$

Sea $Q \subseteq \mathbb{R}^N_+$ es un politopo de Newton y $A_Q := Q \cap \mathbb{Z}^N$ el conjunto finito de sus puntos con coordenadas enteras. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}^N$ y para cada $f \in mH^{(k)}(Q)$, dado mediante

$$f = \sum_{\underline{\mu} \in Q \cap \mathbb{Z}^n} a_\mu \prod_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=0}^{k_i} X_{i,j}^{\mu_{i.j}} \right),$$

denotemos mediante f_α al polinomio cuyo soporte satisface $supp(f_\alpha) \subseteq (A_Q)_\alpha$ y viene dado mediante

$$f_\alpha = \sum_{\mu \in S_\alpha \cap \mathbb{N}^n} a_\mu X_1^{\mu_1} \cdots X_n^{\mu_n}.$$

TEOREMA B.8.1 (**Theorem B de [Be,76]**). *Siguiendo con las notaciones anteriores, sea $\mathcal{Q} = (Q_1, \ldots, Q_n)$ una lista de politopos de Newton, con $Q_i \subseteq \mathbb{R}^n_+$. Consideramos el sistema de ecuaciones $F : f_i(\underline{x}) = 0$ $(i = 1, ..., n)$ en el cuál cada función $f_i(x_1, ..., x_n)$ viene dada por un polinomio de Laurent de tal modo que $supp(f_i) \subseteq Q_i \cap \mathbb{Z}^n$. Definamos la Hipótesis-Bernshtein del modo siguiente:*
HIPÓTESIS-BERNSHTEIN*: Para cada vector no nulo $\alpha \in \mathbb{R}^n$ el sistema $F_\alpha = \{(f_1)_\alpha, ..., (f_n)_\alpha\}$ carece de soluciones comunes tóricas (i.e. $V_{\mathbb{T}}((f_1)_\alpha, \ldots, (f_n)_\alpha) = \emptyset$).*
Entonces, con estas notaciones, se tiene:

i) Si se satisface la HIPÓTESIS-BERNSHTEIN*, todos los ceros tóricos de $f_1, ..., f_n$, es decir $V_{\mathbb{T}}(f_1, ..., f_n)$ son aislados y su cardinal es igual al volumen mixto de los politopos que lo caracterizan, es decir*

$$\sharp(V_{\mathbb{T}}(f_1, ..., f_n)) = MV(Q_1, \ldots, Q_n) < +\infty.$$

*ii) En cualquier caso, el número de **ceros aislados tóricos** en $V_{\mathbb{T}}(f_1, ..., f_n)$ está acotado por el volumen mixto de los politopos que lo caracterizan*

$$MV(Q_1, ..., Q_n).$$

OBSERVACIÓN B.8.2. Nótese que la propiedad *ii*) no acota ni el número de componentes irreducibles ni el grado, sino solamente el número de puntos aislados. En particular, ni siquiera garantiza que el conjunto de soluciones tóricas sea finito. Para disponer de una garantía de la finitud génerica del número de ceros tóricos se necesita, demostrar que la (Hypothesis-Bernstein) es una propiedad genérica.

Bibliografía

[BCR,98] J. Bochnak, M. Coste, M. Roy, *"Real algebraic geometry"*. Springer,1998.

[Be,76] D.N. Bernshtein, *The number of roots of a system of equations*. Funct. Anal. Appl, **9** (1976), 183-185.

[BKK,76] D. Bernstein, A. Kushnirenko, A. Khovanskii, *Mixed volumes of Newton Polyhedra, Milnor's Numbers and number of solution of algebraic equations*. Uspehi. Mathem. Nauk. **31**, N3, (1976), 196 (Russian Math. Surveys).

[BV,04] S. Boyd, L. Vandenberghe, *"Convex Optimization"*. Cambridge University Press, 2004.

[Bu,01] D. Burago, *"Mixed Volume Theory"*, Encyclopedia of Mathematics, Springer Science, 2001.

[CE,93] J. Canny, I. Emiris, *An efficient algorithm for the sparse mixed resultant*, In Proc.AAECC-10, Lecture Notes in Computation Science **263**; G. Cohen, T. Mora, O. Moreno (eds.), Springer, 1993, 89-104.

[CE,00] J. Canny, I. Emiris, *A Subdivision- Based Algorithm for the sparse resultant*. Journal of the ACM **47** (2000), 417-451.

[Da,02] R.S. Datta, *Universality of Nash Equilibria*. Math. of Oper. Research **28** (2003), 424-32..

[De,70] G. Debreu, *Economies with a finite set of equilibria*. Econometrica **38** (1970), 387-392.

[Dm,89] M. Demazure, *"Catastrophies et Bifurcations"*.Ellipses X-Polythecnique, 1989.

[EKP,10] I. Emiris, C. Konaxis, L. Palios, *"Computing the Newton Polytope of Specialized Resultants"*, Math. in Comput. Sc. **4** (2010), 25-44.

[Fu,93] W. Fulton, *"Intoduction to toric varieties"* Annals of math. Studies **131**, Princeton Univ. Press, 1993.

[GM,01] S. Govindan, A. McLennan, *On the Generic Finiteness of Equilibrium Outcome Distributions in Game Forms*. Econometrica **69**s (2001), 455-471.

[GKZ,91] I.M. Gelfand, M.M. Kapranov, A.V. Zelevinsky,*Discriminants of polynomials in several variables and triangulations of Newton polytopes*, Leningrad Math. J., 2 (1991), 449-505.

[H,73] J.C. Harsanyi *Oddness of the number of equilibrium points: a new Proof*. Int J. of Game Theory **2** (1973), 235-250.

[He,83] J.Heintz, *Definability and fast quantifier elimination in algebraically closed fields*. Theoret. Comput. Sci. **24** (1983), 239-277.

[Ku,76] A.G. Koushnirenko, *Polyèdres de Newton et nombres de Milnor*. Inventiones Math. **32** (1976), 1-31.

[Kho,78] A. G. Khovanskii, *Newton Polyhedra and the genus of complete intersections*. Funktsional. Anal. i Prilozhen **33** (1978), 237-238 (en ruso, con traducción al ingles en Russian Math. Surveys **33** (1978), 237-238).

[KW,82] P. Kreps, R. Wilson, *Sequential Equilibria*. Econometria **50** (1982), 863-894.

[Mu,76] D. Mumford, *"Algebraic Geometry I: Complex Projective Varieties"*. GMW **221**, Springer, 1976.

[Mc,02] A. McLennan, *"The Expected Number of Real Roots of a Multihomogeneous System of Polynomial Equations"* The Johns Hopkins University Press, 2002.

[N,50a] J. Nash, *"Non-Cooperative Games"*. Ph.D. Thesis, presented to the Faculty of Princeton University, Princeton, 1950.

[N,50b] J. Nash, *Equilibrium points in n-person games*. Proceedings of the National Academy of Sciences **36** (1950), 48-49.

[N,51] J. Nash, *Non-Cooperative Games*. The Annals of Mathematics **54** (1951), 286-295.

[NM,44] J. V. Neumann, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press (1944).

[PSt,93] P. Pedersen, B. Sturmfels, *Product formulas for resultants and Chow forms*. Math. Zeitsc. **214** (1993), 377-396.

[Ru,87] W. Rudin, *"Real and Complex Analysis, 3rd edition"*. McGraw Hill series in Higher Mathematics, 1987.

[Sh,77] I.R. Shafarerich *"Basic algebraic Geometry (Vols. I, II)"*, Springer, 1977.

[Sh,88] I.R. Shafarevich, *"Basic Algebraic Geometry, 2nd. ed"(vol.2)* , Springer Verlag, 1988.

[Si,11] B. Simon, *"Convexity: An analytic viewpoint"*, Cambridge University Press, 2011.

[St,93] B. Sturmfels, *"Sparse elimination Theory"*, Cambridge University Press, 1993, 264-298.

[St,94] B. Sturmfels, *On the Newton Polytope of the resultant*, J. Algebraic Combinatorics **3** (1994), 207-236.

[St,02] B. Sturmfels, *"Solving systems of polynomial equations "*, CBMS Regional Conf. Series vol. **97**, Amer. Math. Soc., 2002.