



*Facultad
de
Ciencias*

Geometría a la Klein

Trabajo de fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Alejandro Quirce Teja

Director: Fernando Etayo Gordejuela

Índice

1. Resumen	3
2. Abstract	3
3. Introducción	4
3.1. Desarrollo de la memoria	4
3.2. Contexto Histórico	8
4. Movimientos	10
4.1. Isometrías	10
4.2. Homotecias	12
4.3. Inversiones	12
4.4. Afinidades	13
5. Grupos de Lie y geometrías	14
6. Geometrías del plano real	17
6.1. Geometría Afín	18
6.2. Geometría Afín Conforme	20
6.3. Geometría Afín Equiárea	22
6.4. Geometría Afín Euclídea	23
6.5. Geometría Conforme	25
6.6. Geometría Equiárea	29
6.7. Geometría Euclídea	35
7. Propiedades y clasificación de las cónicas no degeneradas	37
7.1. Jerarquía entre las geometrías	38
7.2. Clasificación afín de las cónicas	39
7.3. Clasificación afín conforme de las cónicas	39
7.4. Clasificación afín equiárea de las cónicas	40
7.5. Clasificación afín euclídea de las cónicas	42

1. Resumen

Dicho de modo intuitivo, una geometría para Klein es un conjunto dotado de un grupo que actúa sobre él. Las propiedades geométricas son las invariantes por esa acción. La formalización requiere el manejo de grupos de Lie y espacios cociente de variedades diferenciables por la acción de un grupo de Lie. Nos centraremos en el caso del plano real con las geometrías conforme, equiárea y euclídea; las compararemos con las correspondientes afines y estudiaremos la clasificación de las cónicas en esas tres geometrías.

Palabras claves: Grupo de Lie, geometría de Klein, geometría conforme, geometría equiárea, geometría euclídea, clasificación de cónica.

2. Abstract

Roughly speaking, a Klein geometry is a set with a group acting on it. The geometric properties are the invariants by that action. The formalization requires the management of Lie groups and spaces defined as the quotient of a manifold by the action of a Lie group. We will focus on the case of the real plane with the conformal, special affine and Euclidean geometries; we will compare them with the corresponding affine geometries and study the classification of the conics in these three geometries.

Keywords: Lie group, Klein geometry, conformal geometry, special affine geometry, Euclidean geometry, classification of conics.

3. Introducción

El presente Trabajo Fin de Grado tiene como objetivo la comprensión de diferentes geometrías vistas de una forma más abstracta a la vista durante el grado. En este capítulo introductorio explicaremos la motivación del trabajo, describiremos cómo están organizadas las secciones que conforman el documento y realizaremos un repaso a la historia de la geometría.

Comenzaremos explicando la motivación del trabajo. Durante el grado hemos tenido que estudiar geometrías como la euclídea, la afín, ... tanto en el plano como en el espacio, sus propiedades y diferentes objetos que nos podíamos encontrar en ellas como por ejemplo curvas o superficies. Para su realización hemos tenido que manejar diferentes ramas de las matemáticas, pues hemos manejado nociones de geometría, de teoría de grupos, variable compleja entre otras. En esta memoria presentamos desde un punto de vista unificado, el de Klein, esos conocimientos, al mismo tiempo, hemos manejado nociones de geometría, como los grupos de Lie, la geometría equiárea, los invariantes para la clasificación de las cónicas... También hemos añadido diversas figuras explicativas que hacen más visual y comprensible las explicaciones. En el trabajo hemos dado una construcción original de un ejemplo de aplicación equiárea no afín y hemos recopilado ciertos resultados de interés en un mismo trabajo lo que entendemos también como aportación original.

3.1. Desarrollo de la memoria

El documento consta de 7 secciones cada una de ellas centrada en un tema en concreto. En la presente sección 3 es la parte introductoria: explicamos la motivación del trabajo, proporcionamos una descripción de cada una de las secciones y vemos el contexto histórico de la geometría hasta llegar al matemático Felix Klein quien introdujo durante la conferencia de Erlangen una nueva visión de las geometrías.

En la sección 4 recordamos los movimientos que podemos encontrar en el plano real de una manera informal y visual. Las simetrías, homotecias e inversiones son algunos de los ejemplos que veremos.

La sección 5 introduce los conceptos nuevos para entender la visión que Klein introdujo de las geometrías con ejemplos sencillos que ayudan a su comprensión. Algunos de estos conceptos son:

Definición 5.6

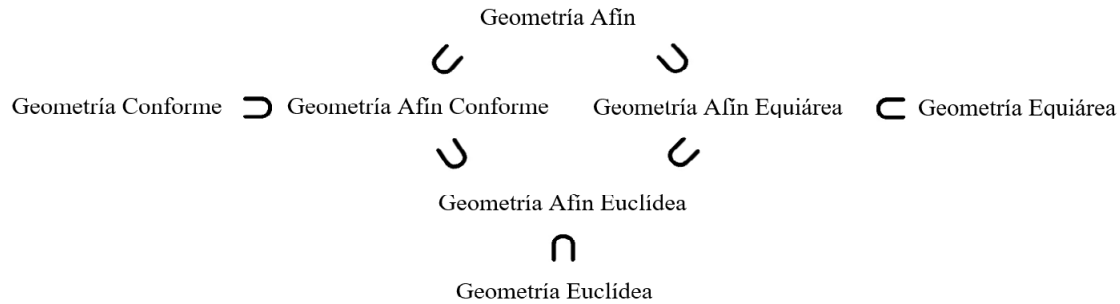
Un grupo de Lie es una variedad diferenciable dotada de una estructura de grupo, de tal manera que la aplicación $p : G \times G \longrightarrow G$ definida por $(\sigma, \tau) \rightarrow \sigma\tau^{-1}$ es C^∞ .

Definición 5.9

Una variedad diferenciable X dotada de una acción transitiva por un grupo de Lie, se llama un G -espacio homogéneo o solo espacio homogéneo.

Klein ve cada geometría como un conjunto sobre el que actúa un grupo. Las propiedades

geométricas son las invariantes por dicha acción. Este punto de vista contrasta con el axiomático y tiene la ventaja sobre él de que no necesita demostrar la compatibilidad de los axiomas. En la sección 6 veremos entre diferentes tipos de geometrías que existen las que se muestran en el siguiente esquema:



Cada una de esas geometrías queda definida por un conjunto, que será el plano real para todas ellas, y un grupo de transformaciones. Las transformaciones preservarán la alineación de puntos, el paralelismo, la razón simple; las conformes los ángulos, las equiáreas las áreas y las euclídeas las distancias. Lo que conserva cada grupo de transformaciones se denomina propiedades de la geometría.

De modo obvio, las geometrías afín conforme, afín equiárea y afín euclídea están contenidas en las correspondientes geometrías conforme, equiárea y euclídea. Los contenidos son estrictos en los dos primeros casos. En el caso de la geometría conforme las inversiones constituyen un ejemplo típico de transformaciones conformes que no son afines. En el de la equiárea construimos un ejemplo original por medio de proyecciones cartográficas. En el tercer caso, en el euclídeo, se da la igualdad: si una aplicación biyectiva conserva las distancias necesariamente es afín.

En la sección 7 vemos las propiedades invariantes de las geometrías presentadas en la sección anterior

Geometría	Propiedades
Afin	• Alineaciones • Paralelismo • Razón simple • Combinaciones baricéntricas • Cocientes de áreas
Afin Conforme	• Alineaciones • Paralelismo • Razón simple • Combinaciones baricéntricas • Cocientes de áreas • Ángulos
Afin Equiárea	• Alineaciones • Paralelismo • Razón simple • Combinaciones baricéntricas • Cocientes de áreas • Áreas
Afin Euclídea	• Alineaciones • Paralelismo • Razón simple • Combinaciones baricéntricas • Cocientes de áreas • Ángulos • Áreas • Distancias

y realizamos una clasificación de las cónicas no degeneradas en las diferentes geometrías afines vistas en el trabajo. Para su clasificación en la afin conforme repasamos la excentricidad y en la afin equiárea vemos el siguiente concepto, nuevo para nosotros:

Definición 7.6:

Para una curva plana con parametrización arbitraria $t \rightarrow (x(t), y(t))$, la curvatura afin especial es:

$$k(t) = \frac{x'' y''' - x''' y''}{(x' y'' - x'' y')^{\frac{5}{3}}} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(x' y'' - x'' y')^{\frac{2}{3}}} \right]'' =$$

$$= \frac{4(x'' y''' - x''' y'') + (x' y''' - x''' y')}{3(x' y'' - x'' y')^{\frac{5}{3}}} - \frac{5(x' y''' - x''' y')^2}{9(x' y'' - x'' y')^{\frac{8}{3}}}$$

Las cónicas son las curvas de curvatura equiafín constante. Trabajaremos con detalle esta noción ilustrándola con ejmplos propios y obtendremos la siguiente tabla:

Geometría	Invariantes	
Afin	• Tipo de cónica	- Elipse - Parábola - Hipérbola
Afin Conforme	• Tipo de cónica	- Elipse - Parábola - Hipérbola
	• Excentricidad	- Elipse: $0 \leq \varepsilon < 1$ - Parábola: $\varepsilon = 1$ - Hipérbola: $\varepsilon > 1$
Afin Equiárea	• Tipo de cónica	- Elipse - Parábola - Hipérbola
	• Curvatura equiafin	- Hipérbola: $k < 0$ - Parábola: $k = 0$ - Elipse: $k > 0$
Afin Euclídea	• Tipo de cónica	- Elipse - Parábola - Hipérbola
	• Excentricidad	- Elipse: $0 \leq \varepsilon < 1$ - Parábola: $\varepsilon = 1$ - Hipérbola: $\varepsilon > 1$
	• Curvatura equiafin	- Hipérbola: $k < 0$ - Parábola: $k = 0$ - Elipse: $k > 0$
	• Semiejes	

Figura 1: Invariantes de las cónicas

Como se ve, el enfoque del trabajo concuerda con el título del libro de Klein *Matemáticas elementales desde un punto de vista superior*. Buena parte del trabajo consiste en redescubrir conceptos y técnicas empleadas en diversas asignaturas del Grado.

3.2. Contexto Histórico

Empezaremos diciendo que la geometría es la rama de las matemáticas, que estudia las propiedades que tienen los objetos en el plano o el espacio y que tiene aplicaciones en diferentes campos como la geografía, la cartografía, astronomía etc. A continuación, haremos un pequeño repaso a la historia de la geometría, empezando por Euclides y terminando en Felix Klein, quien introdujo una visión nueva de la geometría y, por tanto, le dedicaremos unas líneas extras en esta sección.

El matemático y geómetra Euclides (325 a.C - 265 a.C), se le conoce como el *Padre de la Geometría*. Los *Elementos* es su obra más famosa, la cual consta de trece libros y contiene los cinco postulados o axiomas, en las que se basa la *geometría plana* o *clásica*, aunque también se la conoce como *geometría euclídea*.

Apolonio de Pérgamo (262 a.C - 190 a.C) fue un geómetra griego famoso por su obra *Las Cónicas*, la cual está formada por ocho libros. Es el resultado de estudiar las secciones de un cono a las que denomino cónicas. Apolonio, se dio cuenta que, al cortar un cono mediante una superficie plana, se obtenían las diferentes curvas, a las que el mismo dio nombre: circunferencia, elipse, parábola e hipérbola.

Menelao de Alejandría (70 d.C - 140 d.C) fue un matemático y astrónomo griego. *Sphaerica* es su única obra. Está compuesta por tres libros y trata sobre la geometría de la esfera y sus aplicaciones. Concibió y definió, un concepto nuevo, el triángulo esférico y demostró el teorema de Menelao.

Durante la edad media, los avances en el campo de la geometría fueron escasos. Ya por el Renacimiento aparecen dos ideas nuevas en trabajos de Durero (1471-1528), la primera de ellas fue considerar curvas en el espacio y la segunda es la proyección ortogonal de curvas y de figuras en dos y tres planos perpendiculares entre sí. Actividades como la elaboración de mapas, sirvieron para estimular y aumentar las investigaciones geométricas, ya que, por ejemplo, una esfera no puede extenderse sobre un plano. El método más importante fue el propuesto por Gerard Kremer (1512-1594), conocido también por Mercator que en 1569 publicó un mapa, con la proyección de Mercator.

Girard Desargues (1591-1661) y Blaise Pascal (1623-1662) hicieron aportaciones importantes a la geometría proyectiva, mientras que Pierre de Fermat (1601-1665) y René Descartes (1596-1650) se centraron en la aplicación del álgebra en el estudio de la geometría, lo que hoy conocemos como geometría analítica y su idea principal, fue asociar ecuaciones algebraicas a las curvas y superficies.

Giovanni Gerolamo Saccheri (1667-1733), matemático italiano, se le reconoce por haber explorado la idea de sustituir el quinto postulado de Euclides, manteniendo los otros cuatro, lo que generaría geometrías alternativas. Johann Heinrich (1728-1777) fue el primero en introducir las funciones hiperbólicas, formuló teoremas sobre las secciones cónicas e hizo conjeturas sobre los espacios no euclídeos. Nikolái Lobachevski (1792-1856) se dedicó a desarrollar una

geometría en la cual el quinto postulado de Euclides no fuese cierto. Propuso un sistema geométrico, basado en la hipótesis del ángulo agudo, según la cual, en un plano, por un punto fijo, pasan al menos dos paralelas a una recta. Lo que más adelante denominaremos geometría hiperbólica.

Sophus Lie (1842-1899) fue un matemático noruego que creó en gran parte la teoría de la simetría continua, y la aplicó al estudio de la geometría y las ecuaciones diferenciales. Uno de sus mayores logros, fue el descubrimiento de que los grupos de transformación continua ahora llamados grupos de Lie podrían entenderse mejor linealizándolos y estudiando los correspondientes campos vectoriales generadores.

Felix Klein nació el 25 de abril de 1849 en Düsseldorf, Prusia. Ingresó en la universidad de Bonn en 1865 para estudiar ciencias naturales. En 1868 aprobó su examen de doctorado y en 1870 comenzó una amistad con el matemático Sophus Lie. Ambos, entendieron la importancia del concepto de grupo en las matemáticas.

En julio de 1870 estalló la guerra Franco-Prusiana, lo que obligó a Felix Klein a volver a Alemania y durante un breve tiempo, fue empleado en el servicio militar. En 1872, con 23 años, fue nombrado profesor de la universidad de Erlangen. Fue en esta universidad y a la edad de 23 años cuando Klein dio una conferencia que más tarde se haría famosa y a la cual se la conoce como *Erlangen Programm*. En esta ponencia se dejó claro la importancia del concepto grupo para clasificar geometrías. Hasta ese momento, la geometría hiperbólica, esférica etc., fueron estudiadas por separado, ya que no son geometrías euclídeas. Klein estableció una concepción de la geometría unificada, amplia y más abstracta.



Figura 2: Felix Klein (1849-1925)

4. Movimientos

En esta sección, explicaremos de manera informal las diferentes transformaciones que se pueden dar en el plano real $\mathbb{R}^2$

4.1. Isometrías

Definición 4.1 Las isometrías o movimientos en el plano son transformaciones biyectivas del plano en sí mismo que conservan las distancias. Verifican las siguientes propiedades:

- Una isometría que cambie el sentido del plano se dice que es indirecta, en cambio, si el sentido se mantiene, se dice directa.
- Las isometrías, como mantienen las distancias, entonces conservan los ángulos.
- La composición de isometrías es una isometría.
- Si una isometría hace corresponder un punto P consigo mismo se dice que dicho punto es fijo. La Identidad es la isometría que deja fijos todos los puntos del plano.
- Dos isometrías son inversas, si y sólo si, la composición entre ellas da la Identidad.

Ejemplo 4.2 Simetría Axial: Se trata de una isometría indirecta, con una recta r fija, tal que para todo punto P que pertenece al semiplano plano π_1 de borde r , le hace corresponder el punto P' , pertenecientes al semiplano de borde r , opuesto a π_1 .

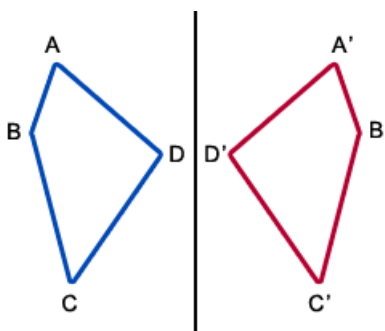


Figura 3: Simetría axial

Ejemplo 4.3 Simetría central: En este caso, nos encontramos con una isometría directa, la cual tiene un solo punto fijo, que es el centro de simetría. Para todo punto P del plano, que pertenece a la semirrecta de origen O , que pasa por P , le hace corresponder el punto P' , perteneciente a la semirrecta opuesta a la anterior.

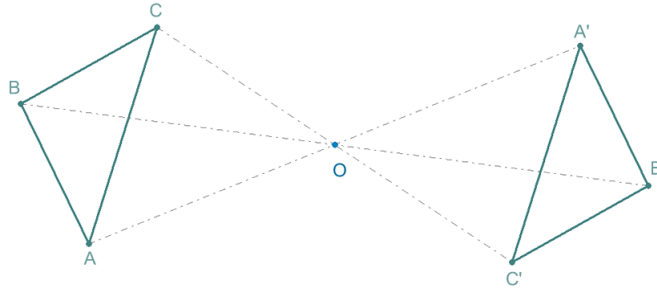


Figura 4: Simetría central

Ejemplo 4.4 Rotación: La rotación es una isometría directa, que al igual que la simetría central, consta de un solo punto fijo, llamado centro de giro. A cada punto P del plano le hace corresponder un punto P' , de modo que $\angle POP' = \alpha$ donde α representa el ángulo de giro.

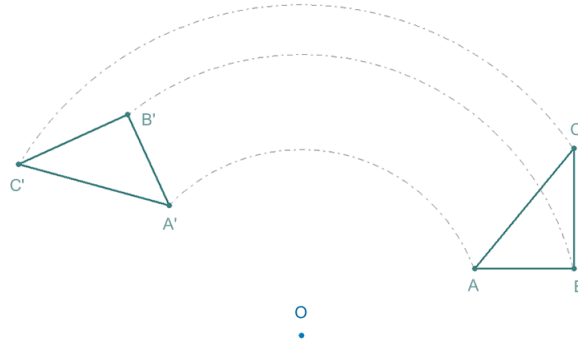


Figura 5: Rotación

Ejemplo 4.5 Traslación: Se trata de una isometría directa, sin puntos fijos, tal que a todo punto P del plano, le hace corresponder un punto P' .

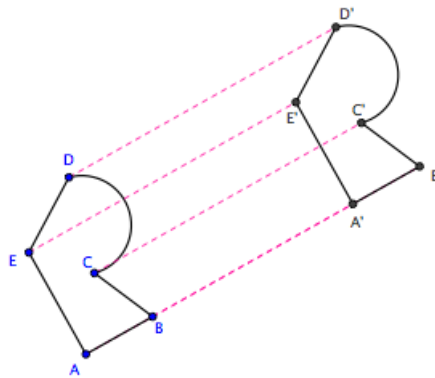


Figura 6: Traslación

4.2. Homotecias

Definición 4.6 Se llama homotecia de centro O y razón k a una transformación en el plano, por la que cada punto P le hace corresponder otro punto P' , tal que O , P y P' están alineados y cumplen: $d(O, P') = k * d(O, P)$. Además, podemos distinguir dos tipos de homotecias.

- Homotecia directa, cuando la razón es positiva. Las figuras quedan a un mismo lado del centro de la homotecia.
- Homotecia inversa, cuando la razón es negativa. Las figuras se encuentran en lados opuestos respecto al centro de la homotecia.

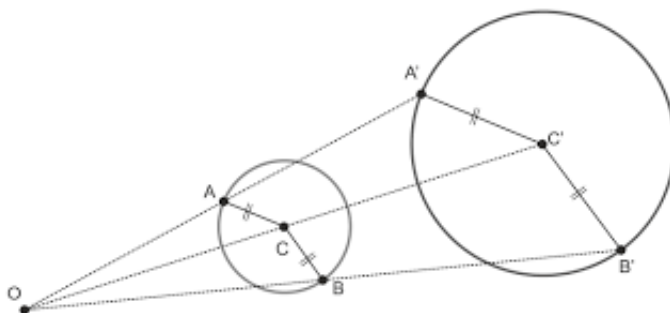


Figura 7: Homotecia directa

4.3. Inversiones

Definición 4.7 Se llama inversión de centro O y radio r a una transformación en el plano, por la que cada punto P le hace corresponder otro punto P' , tal que O , P y P' están alineados y cumplen: $d(O, P) * d(O, P') = k$.

k se denomina potencia de la inversión y a los puntos relacionados o transformados se denominan inversos.

Si la potencia de inversión es positiva, un punto y su transformado se encuentran al mismo lado respecto del centro de inversión. Si la potencia es negativa el centro de inversión se encuentra entre cada punto y su transformado. La transformación es equivalente a una inversión de centro O y potencia $|k|$ seguida de un giro de 180° con centro O .

Cuando $k > 0$ los puntos de la circunferencia de centro O y radio $\sqrt{k}$ son los únicos puntos fijos de la inversión, y ésta se denomina inversión o reflexión respecto a la circunferencia de centro O y radio $\sqrt{k}$ o también circunferencia de autoinversión.

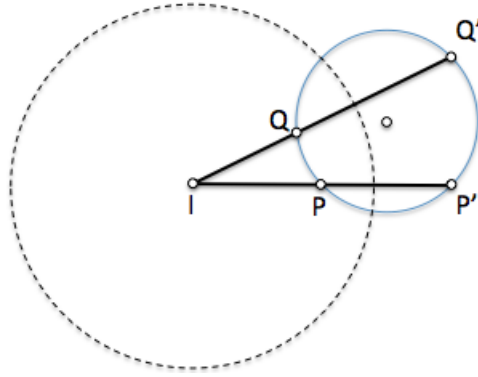


Figura 8: Inversión

4.4. Afinidades

Lema 4.8 Sea A y A' dos espacios afines de direcciones V y V' . Sea $f : A \rightarrow A'$ una aplicación con la propiedad de que existe $P \in V$ tal que la aplicación $f_P : V \rightarrow V'$ definida por $f_P(v) = \overrightarrow{f(P)f(P+v)}$ es lineal. Entonces $f_P = f_Q \forall P, Q \in V$ y $f(x) = f(P) + f_P(\vec{P}x)$.

Definición 4.9 Una aplicación $f : V \rightarrow V'$ se llama afín si la aplicación f_P es lineal. A la aplicación f_P se le llama aplicación lineal asociada a f . Además, verifican las siguientes propiedades:

- La composición de aplicaciones afines es una aplicación afín.
- La suma de aplicaciones lineales y el producto por escalares son aplicaciones afines.

Algunos ejemplos de afinidades son:

- Las isometrías.
- Las transformaciones lineales que son afinidades que dejan fijo el origen de coordenadas.
- Las transformaciones conformes que mantienen los ángulos denominadas también semejanzas, como las homotecias.

5. Grupos de Lie y geometrías

Klein describe cada geometría como el estudio de ciertas propiedades que no cambian cuando se le aplican un tipo de transformaciones y esas propiedades han de tener estructura de grupo, bajo una operación. Esta forma de describir la geometría es muy importante y nos permite clasificarlas. En matemáticas, una geometría de Klein es un espacio X homogéneo junto con una acción transitiva sobre X por el grupo de Lie G , en el que actúa el grupo simétrico de la geometría. A continuación, explicaremos algunos conceptos que nos servirán para entender mejor el tema del que estamos hablando.

Para referirnos sólo a la estructura algebraica hablaremos de subgrupos, homomorfismos, etc., algebraicos o abstractos.

Definición 5.1 Sea G un grupo y $X \neq \emptyset$ un conjunto. Una acción (a izquierda) de G en X es una función

$$\begin{aligned}\mu: \quad G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto \mu(g, x) = gx\end{aligned}$$

con las siguientes propiedades:

- $1x = x \quad \forall x \in X$.
- $g(hx) = (gh)x \quad \forall x, h \in G$.

Ejemplo 5.2 El grupo de traslaciones $G = \{T_z, z \in \mathbb{Z}\}$

$$\begin{aligned}T_z: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x + z, y)\end{aligned}$$

El cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ es el cilindro.

Definición 5.3 Una acción se dice transitiva si produce una sola órbita, o dicho de otra manera, $\forall x, y \in X, \exists g \in G$ tal que $y = gx$

Ejemplo 5.4 El grupo de traslaciones $G = \{T_a, a = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2\}$ de $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}T_a: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x + r_1, y + r_2)\end{aligned}$$

actúa transitivamente, mientras que en el ejemplo anterior la acción no es transitiva, puesto que si tomamos $(x, y), (x, y + \alpha)$ no existe T_z tal que $T_z(x, y) = (x, y + \alpha)$.

Ejemplo 5.5 El grupo de los movimientos afines del plano $E(2) = \mathbb{R}^2 \times GL(2, \mathbb{R})$ ya que todo isomorfismo afín se puede poner como composición de una traslación y un isomorfismo lineal.

Definición 5.6 *Un grupo de Lie es una variedad diferenciable dotada de una estructura de grupo, de tal manera que la aplicación $p : G \times G \longrightarrow G$ definida por $(\sigma, \tau) \rightarrow \sigma\tau^{-1}$ es C^∞ .*

Algunos ejemplos:

- El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ es un grupo de Lie con la suma de vectores y la estructura diferenciable canónica.
- $\mathbb{C}^*$ es un grupo de Lie bajo la multiplicación. La circunferencia $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^*$ también lo es.
- La variedad $GL(n, \mathbb{R})$ de todas las matrices no singulares reales es un grupo de Lie.
- Cualquier espacio vectorial real V de dimensión finita es un grupo de Lie.

Definición 5.7 *(H, φ) es un subgrupo de Lie de un grupo de Lie G donde $\varphi : H \rightarrow G$ es un homomorfismo de grupos si cumple:*

- H es un grupo de Lie.
- (H, φ) es una subvariedad de G .

Teorema 5.8 *Sea G un grupo de Lie, sea A un subgrupo cerrado abstracto de G . Entonces A tiene una única estructura de variedad diferenciable que hace que A sea un subgrupo de Lie de G . Ver [8, pag 110].*

Definición 5.9 *Una variedad diferenciable X dotada de una acción transitiva por un grupo de Lie, se llama un G -espacio homogéneo o solo espacio homogéneo.*

Un ejemplo sencillo de espacio homogéneo sería:

- $\mathbb{R}^n$ bajo la acción de $E(n)$. Como cualquier punto en $\mathbb{R}^n$ puede ser llevado a cualquier otro por una traslación, $E(n)$ actúa de forma transitiva en $\mathbb{R}^n$. Entonces $\mathbb{R}^n$ es un espacio homogéneo bajo la acción de $E(n)$.

Definición 5.10 *Sea G un grupo, X un conjunto y φ una acción de G sobre X . Sea $x \in X$ un elemento. Definimos el estabilizador de x con respecto a la acción de μ como el subgrupo de G dado mediante:*

$$Stab_G(x) = \{g \in G : \mu(g, x) = x\}$$

El siguiente resultado difícil de demostrar será importante en nuestra construcción.

Teorema 5.11 *Sea M una variedad con una acción de un grupo de Lie G . Para cualquier $x \in M$ el estabilizador $Stab_G(x)$ es un subgrupo cerrado de Lie en G . Ver [1, pag 19]*

Ahora si podemos dar una definición más formal de lo que es una geometría de Klein.

Definición 5.12 *Una geometría de Klein, es un par (G, H) , donde G es un grupo de Lie, y H es un subgrupo de Lie de G cerrado tal que la clase lateral G/H es un espacio topológico conexo. Al grupo G se le llama grupo principal de la geometría y a G/H se le llama espacio de la geometría.*

El espacio $X = G/H$ es una variedad diferenciable de dimensión $\dim X = \dim G - \dim H$. Hay una acción de G sobre X dada por: $g(aH) = (ga)H$. Dicha acción es transitiva, por lo que X es un espacio homogéneo para la acción de G .

La técnica que vamos a seguir para estudiar las diferentes geometrías del plano real es ver que podemos expresar $\mathbb{R}^2$ como cociente G/H donde G es el grupo de transformaciones de la geometría y H es el estabilizador de un elemento.

6. Geometrías del plano real

Como hemos mencionado ya, la geometría estudia las propiedades de las figuras en el plano y en el espacio. Cada geometría tiene sus objetos, movimientos y propiedades. Las propiedades que permanecen invariantes, por los movimientos, se llaman propiedades o invariantes de la geometría. Entre muchos tipos de geometrías que existen, en esta sección del trabajo estudiaremos las geometrías que muestra el siguiente esquema:

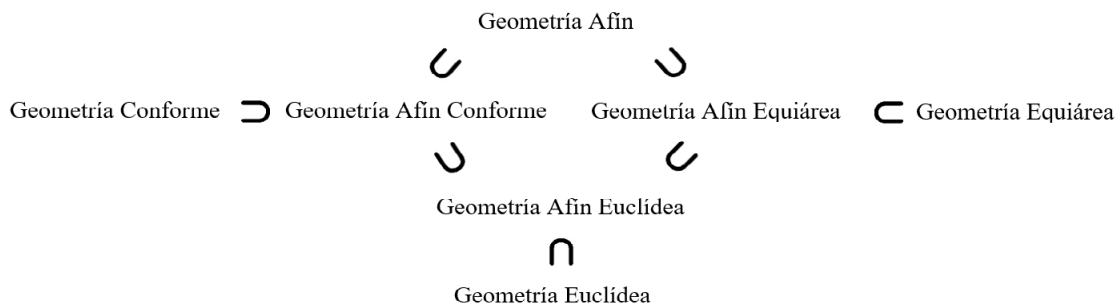


Figura 9: Esquema

Cuando no exista diferencia entre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^2$, explicaremos $\mathbb{R}^n$, de lo contrario explicaremos solo la geometría del plano, es decir, de $\mathbb{R}^2$ y es que en esta sección del trabajo veremos cómo $\mathbb{R}^n$ se puede expresar como cocientes de grupos de Lie y para ello obtendremos para cada geometría afín su correspondiente grupo de Lie G y su correspondiente subgrupo de Lie H . Para su estudio, utilizaremos el álgebra y el análisis matemático ya que nos permiten utilizar las herramientas de álgebra y cálculo para explicar las cuestiones geométricas de forma más sencilla, que si usáramos las definiciones axiomáticas de las diferentes geometrías.

Además, probaremos también en esta sección del trabajo que la geometría afín conforme y la afín equiárea están contenidas respectivamente, en la conforme y la equiárea pero no coinciden con ella, mientras que la afín euclídea sí coincide con la euclídea, esto es, si una aplicación biyectiva del plano en sí mismo conserva las distancias, entonces es una aplicación afín y por tanto, afín euclídea. Cabe destacar que las geometrías mencionadas anteriormente se caracterizan por conservar ciertas propiedades, la afín conserva el paralelismo, la razón simple entre otras, la conforme conserva ángulos, la equiárea áreas, volúmenes... dependiendo en que espacio estemos y la euclídea conserva las distancias. Todas estas propiedades las explicaremos en otra sección del trabajo.

A continuación, estudiaremos cada geometría como geometría de Klein, para lo cual, hallaremos el grupo de Lie y el estabilizador de cada geometría y realizaremos el cociente.

6.1. Geometría Afín

En la geometría afín no se usan las nociones métricas de distancia y ángulo. La noción de líneas paralelas es una de las principales propiedades. Las comparaciones de figuras en geometría afín se realizan con transformaciones afines, que preservan la colinealidad, por lo que transforman líneas paralelas en líneas paralelas y mantienen las distancias a lo largo de líneas paralelas.

$\mathbb{R}^n$ tiene una estructura de espacio afín de dimensión n sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. En $\mathbb{R}^n$ toda aplicación afín $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se puede expresar respecto de una referencia cartesiana $R = \{P, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ mediante una matriz:

$$M(f, R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}$$

esto es:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + \alpha_{1,1}x_1 + \dots + \alpha_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_n + \alpha_{n,1}x_1 + \dots + \alpha_{n,n}x_n \end{pmatrix}$$

con lo que:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Así f se puede descomponer como una traslación de vector:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

y una aplicación lineal de matriz:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}$$

respecto de la base $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$. El conjunto de traslaciones de $\mathbb{R}^n$ se puede identificar con $\mathbb{R}^n$, con lo que $E(n) \cong \mathbb{R}^n \times GL(n, \mathbb{R})$ donde $E(n)$ denota el grupo de transformaciones

afines de $\mathbb{R}^n$.

Vemos ahora $\mathbb{R}^n$ como una geometría de Klein. Para ello debemos expresar $\mathbb{R}^n$ como $E(n)/H$ donde H es el estabilizador de un elemento cualquiera. Buscamos el estabilizador H de un elemento cualquiera $p \in \mathbb{R}^n$.

$H = \text{Stab}_E(p) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \in E(n) \text{ tales que } f(p) = p \}$ esto es:

Si $f \in H$, $f(p) = p$ y $f(q) = f(p) + f_p(\vec{pq}) = p + f_p(\vec{pq})$ donde $f_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es lineal.

Entonces podemos identificar

$$H \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

$$f \longrightarrow f_p$$

$$g \longleftarrow g_p$$

donde g está definida como $g(q) = p + g_p(\vec{pq})$ entonces $g(p) = p + g_p(\vec{pp}) = p + g_p(\vec{0}) = p$ con lo que $g \in H$. Así que $H \cong GL(n, \mathbb{R})$.

Por tanto, el espacio cociente $E(n)/H \cong \mathbb{R}^n \times GL(n, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$. Obtenemos así $\mathbb{R}^n$ como espacio homogéneo de cocientes de grupos de Lie.

6.2. Geometría Afín Conforme

Como hemos mencionado al principio de esta sección, nos centraremos únicamente en $\mathbb{R}^2$. En esta geometría nos encontramos las transformaciones conformes, que son las que conservan los ángulos. Las isometrías, son transformaciones que conservan la métrica y, por tanto, son transformaciones conformes.

Proposición 6.1 *Si T es un espacio vectorial métrico, una aplicación $\varphi : T \longrightarrow T$ lineal, conforme, es de la forma $\varphi = h \cdot \phi$, donde ϕ es una isometría.*

Demostración:

$\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial métrico. Tomamos la aplicación $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ lineal, conforme, es de la forma $\varphi = h \cdot \phi$, donde ϕ es una isometría.

Ahora $\mathbb{R}^2$ tiene dimensión 2. Como φ es conforme y $\varphi(\vec{v}) = \vec{w}$ para un vector cualquiera $\vec{v}$ existe una isometría ψ que será un giro si φ conserva la orientación, o una simetría si ϕ la cambia, tal que:

$$\psi_{\varphi(\vec{v})} = h \cdot \vec{v} \quad h > 0$$

entonces como ψ es también conforme por ser una isometría:

$$\forall \vec{w}, \quad \widehat{\vec{v}\vec{w}} = \widehat{\psi_{\varphi(\vec{v})}\psi_{\varphi(\vec{w})}} = \widehat{\vec{v}\psi_{\varphi(\vec{w})}}$$

(donde $\widehat{ab}$ significa el ángulo entre a y b) por tanto, existe $h_{\vec{w}} > 0$ con

$$\psi_{\varphi(\vec{w})} = h_{\vec{w}} \cdot \vec{w}$$

y como ψ_{φ} es lineal, si tomamos $\vec{w}_1$ y $\vec{w}_2$ independientes tenemos que:

$$\psi_{\varphi(\vec{w}_1)} = h_{\vec{w}_1} \cdot \vec{w}_1$$

$$\psi_{\varphi(\vec{w}_2)} = h_{\vec{w}_2} \cdot \vec{w}_2$$

$$\psi_{\varphi(\vec{w}_1 + \vec{w}_2)} = h_{\vec{w}_1 + \vec{w}_2} \cdot (\vec{w}_1 + \vec{w}_2) = h_{\vec{w}_1} \cdot \vec{w}_1 + h_{\vec{w}_2} \cdot \vec{w}_2$$

Ahora tenemos $\psi = \varphi \cdot h$, donde φ es una isometría y h una homotecia y sabemos que:

$$\text{dist}(\psi(a), \psi(b)) = \text{dist}(\varphi \cdot h(a), \varphi \cdot h(b)) = \text{dist}(h(a), h(b)) = k \cdot \text{dist}(a, b)$$

siendo k la razón de la homotecia h y es por esta razón que ψ conserva la forma.

□

Esta propiedad de las distancias la podemos ver también utilizando matrices.

$$\begin{pmatrix} k \cos \theta & -k \operatorname{sen} \theta \\ k \operatorname{sen} \theta & k \cos \theta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}}_{\text{Homotecia}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}}_{\text{Giro}}$$

por lo que se deduce que se conserva la forma.

Tomamos $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ podemos expresarla respecto de una base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ mediante una matriz

$$M(f, R) = \begin{pmatrix} k \cos \theta & -k \operatorname{sen} \theta \\ k \operatorname{sen} \theta & k \cos \theta \end{pmatrix}$$

La aplicación afín, por tanto, se expresa respecto de una referencia $R = \{O, \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & k \cos \theta & -k \operatorname{sen} \theta \\ a_2 & k \operatorname{sen} \theta & k \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Así f la podemos descomponer en una traslación de vector

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

y una matriz

$$\begin{pmatrix} k \cos \theta & -k \operatorname{sen} \theta \\ k \operatorname{sen} \theta & k \cos \theta \end{pmatrix}$$

El conjunto de traslaciones de $\mathbb{R}^2$ se puede identificar con $\mathbb{R}^2$, con lo que:

$\operatorname{Conf}(2) \cong \mathbb{R}^2 \times S(2, \mathbb{R})$ donde $\operatorname{Conf}(2)$ denota el grupo de aplicaciones afines conformes de $\mathbb{R}^2$ y $S(2, \mathbb{R})$ el grupo de las semejanzas lineales.

Observación 6.2 *Como las isometrías conservan los ángulos, resulta que son semejanzas y por lo tanto $\operatorname{Euc}(2)$ es un subgrupo de $\operatorname{Conf}(2)$.*

Ahora buscamos el estabilizador H de un elemento $p \in \mathbb{R}^2$.

$$H = \operatorname{Stab}_{\operatorname{Conf}}(p) = \{f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \in \operatorname{Conf}(2) \text{ tales que } f(p) = p\} \cong S(2, \mathbb{R}).$$

Por tanto, el espacio cociente $\operatorname{Conf}(2)/H \cong \mathbb{R}^2 \times S(2, \mathbb{R})/S(2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2$. Obtenemos $\mathbb{R}^2$ como espacio homogéneo de cocientes de grupos de Lie.

6.3. Geometría Afín Equiárea

Al igual que con la geometría afín conforme, nos centraremos únicamente en $\mathbb{R}^2$. También en la introducción de la sección comentamos que la geometría afín equiárea conserva el área y esto es debido a que las transformaciones equiáreas conservan las áreas.

Tomamos $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y la expresamos respecto de la base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ mediante una matriz

$$M(f, R) = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix}$$

Al igual que la conforme, también podemos expresarla respecto de un sistema de referencias $R = \{O, \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ a_2 & \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Con lo cual podemos descomponer f en una traslación de vector:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

y una matriz:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix}$$

De nuevo el conjunto de traslaciones de $\mathbb{R}^2$ se puede identificar con $\mathbb{R}^2$, por tanto:

$Equi(2) = ASL(2) \cong \mathbb{R}^2 \times SL(2, \mathbb{R})$ donde $Equi(2)$ denota el grupo de aplicaciones afines equiáreas de $\mathbb{R}^2$ y $ASL(2, \mathbb{R})$ el grupo afín lineal especial formado por las transformaciones afines que preservan el área, que son matrices 2×2 con $\det = 1$. Este es $SL(2, \mathbb{R})$

Observación 6.3 *El grupo de transformaciones afines del plano que preservan el área se denota $ASL(2, \mathbb{R}) = SL(2) \times \mathbb{R}^2$. Es el análogo afín del grupo lineal especial. Es un subgrupo del grupo afín. Se denomina grupo afín especial.*

Ahora buscamos el estabilizador H de un elemento $p \in \mathbb{R}^2$.

$$H = Stab_{Equi}(p) = \{f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \in ASL(2) \text{ tales que } f(p) = p\} \cong SL(2, \mathbb{R}).$$

Por tanto, el espacio cociente $Equi(2)/H \cong \mathbb{R}^2 \times SL(2, \mathbb{R})/SL(2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2$. Obtenemos pues $\mathbb{R}^2$ como un espacio homogéneo cociente de grupos de Lie.

6.4. Geometría Afín Euclídea

Recibe su nombre del matemático Euclides aunque también se la conoce simplemente como geometría plana o clásica. $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial euclídeo tiene un producto escalar euclídeo, con lo que podemos determinar la longitud o norma de un vector y distancias entre vectores.

Toda isometría lineal $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se puede expresar respecto de una base ortonormal $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ mediante una matriz:

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \in O(n)$$

Ahora $\mathbb{R}^n$ tiene una estructura de espacio afín euclídeo de dimensión n . Así toda isometría afín la podemos expresar como:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \in O(n)$$

Como f es una isometría si $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ es una base ortonormal resulta que $\{f(\vec{v}_1), \dots, f(\vec{v}_n)\}$ es también una base ortonormal con lo que si denotamos $w_1 = f(\vec{v}_1), \dots, w_n = f(\vec{v}_n)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} 1 &= w_1 \cdot w_1 = (\alpha_{1,1})^2 + \dots + (\alpha_{n,1})^2 \\ 0 &= w_1 \cdot w_2 = \alpha_{1,1}\alpha_{1,2} + \dots + \alpha_{n,1}\alpha_{n,2} \\ &\vdots \\ 1 &= w_n \cdot w_n = (\alpha_{1,n})^2 + \dots + (\alpha_{n,n})^2 \end{aligned}$$

o dicho de otra forma:

$$\begin{aligned} ||w_i|| &= 1 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ \langle w_i \cdot w_j \rangle &= 0 \quad \forall i \neq j \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta estas relaciones:

$$M(f, B)M(f, B)^t = I \Rightarrow M(f, B)^t = M(f, B)^{-1}$$

de lo que se deduce que $M(f, B)$ es una matriz ortogonal.
 Así f la podemos descomponer en una traslación de vector:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

y una transformación ortogonal de matriz:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}$$

Podemos identificar con $\mathbb{R}^n$ el conjunto de traslaciones de $\mathbb{R}^n$, con lo que:

$Euc(n) \cong \mathbb{R}^n \times O(n, \mathbb{R})$ donde $Euc(n)$ denota el grupo de isometrías afines de $\mathbb{R}^n$.

Buscamos ahora el estabilizador H de un elemento cualquiera $p \in \mathbb{R}^n$.

$H = Stab_{Euc}(p) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \in Euc(n) \text{ tales que } f(p) = p \} \cong O(n, \mathbb{R})$ esto es el grupo $n \times n$ de matrices ortogonales.

Por tanto, el espacio cociente $Euc(n)/H \cong \mathbb{R}^n \times O(n, \mathbb{R})/O(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$. Obtenemos nuevamente $\mathbb{R}^n$ como espacio homogéneo cociente de grupos de Lie.

6.5. Geometría Conforme

Una transformación conforme en el plano será un difeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que conserve los ángulos y la inversa con la misma propiedad. Dotando a $\mathbb{R}^2$ de su estructura compleja, esto es, siendo $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{C}$, resulta que f es conforme si y solo si es holomorfa o antiholomorfa, lo que permite utilizar todas las herramientas de la teoría de Variable Compleja.

La condición de que $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sea conforme significa que f conserva los ángulos:

si α y β son dos curvas en $\mathbb{R}^2$ que pasan por $p \in \mathbb{R}^2$ entonces el ángulo que forman en p debe ser el mismo que el que forman $f(\alpha)$ y $f(\beta)$ en $f(p)$. Los ángulos están dados por los vectores tangentes a las curvas, así que la aplicación tangente de la f debe conservar los ángulos de los vectores. Dicha aplicación es la dada por la matriz jacobiana de la f , que es la aproximación lineal de la propia f . La matriz jacobina mide que f sea conforme.

Para explicar algunos de los conceptos que se explican en esta sección se han utilizado las siguientes referencias: [7, pag 10], [2, pag 1, 4, 5].

Empezaremos recordando las condiciones de Cauchy-Riemann para mostrar como las funciones holomorfas son conformes.

Teorema 6.4 *Condiciones de Cauchy-Riemann*

Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(x + iy) = f_1(x, y) + if_2(x, y)$ holomorfa y derivable en $z_0 = x_0 + iy_0$, entonces:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} &= -\frac{\partial f_2}{\partial x}\end{aligned}$$

para (x_0, y_0) . Además, la derivada de f en z_0 está dada por

$$f'(z_0) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Teorema 6.5 Si $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa entonces $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es conforme.

Demostración:

Tenemos $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(x + iy) = f_1(x + iy) + if_2(x + iy)$ cuya matriz Jacobiana es:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Ahora por comodidad denotamos $\frac{\partial f_1}{\partial x} = a$ y $\frac{\partial f_2}{\partial x} = b$.

Entonces f es holomorfa $\Leftrightarrow$ cumple las condiciones de Cauchy-Riemann $\Leftrightarrow J = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} =$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{(a^2 + b^2)} \frac{1}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{(a^2 + b^2)} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} & \frac{-b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} \\ \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} & \frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} \end{pmatrix} = \\
&= \sqrt{(a^2 + b^2)} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{(a^2 + b^2)} & 0 \\ 0 & \sqrt{(a^2 + b^2)} \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de una homotecia}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} & \frac{-b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} \\ \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} & \frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de un giro}}
\end{aligned}$$

De lo que podemos deducir que f es conforme por ser J_f composición de dos aplicaciones conformes.

□

Observación 6.6 Podemos denotar $\frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} = \cos\theta$ y $\frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} = \operatorname{sen}\theta$ ya que:

$$-1 \leq \frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} \leq 1 \quad -1 \leq \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} \leq 1$$

y

$$\left(\frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{(\sqrt{a^2 + b^2})^2} = 1$$

Observación 6.7 ¿Qué significa que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es diferenciable en $p \in \mathbb{R}$, con $f'(p) = 7$? Significa que la función f tiene en ese punto una pendiente igual a 7, es decir, la aproximación lineal de f en p es la función $x \rightarrow 7x$.

Ahora, ¿qué significa que $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en $p \in \mathbb{C}$, con $f'(p) = 3 + 2i$?

De nuevo que la función f tiene en p una pendiente de $(3 + 2i)$ y la aproximación lineal de f en p es la función $x \rightarrow (3 + 2i)x$. Al multiplicar x por $(3 + 2i)$ el valor de x se transforma en $\underbrace{\|3 + 2i\|}_{\text{Homotecia}} \underbrace{\arg(3 + 2i)}_{\text{Giro}}$ que resulta que es una semejanza por lo que queda visto que las aplicaciones holomorfas son conformes.

Las inversiones son ejemplos básicos de aplicaciones conformes que no son afines. Esto es obvio porque no llevan puntos alineados en alineados. Un ejemplo de ello es que la inversa de una recta, si el centro de inversión O no está en ella, es una circunferencia que pasa por el centro de la inversión

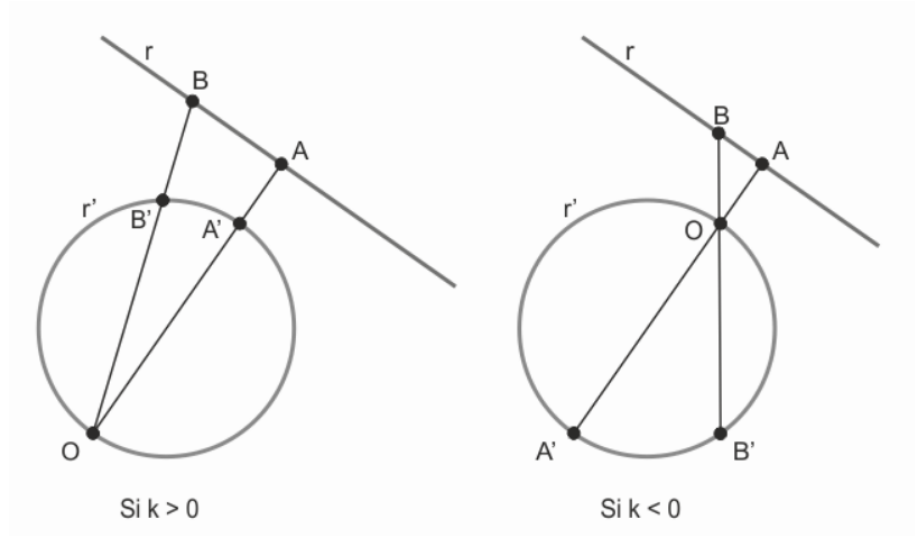


Figura 10: Inversa de una recta con potencia de inversión positiva y negativa

Proposición 6.8 (Ver [7, pag 10]). *Las inversiones conservan los ángulos.*

Definición 6.9 *Las transformaciones de Möbius son las funciones complejas de variable compleja de la forma $\varphi : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ donde los parámetros complejos a, b, c, d son constantes sometidas a la restricción*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

Algunos ejemplos:

- Una traslación: $x \mapsto x + \frac{d}{c}$.
- Una inversión: $x \mapsto \frac{1}{x}$.
- Una homotecia y un giro: $x \mapsto \frac{cb-ad}{c^2}x$ seguida de otra traslación: $x \mapsto x + \frac{a}{c}$.

Proposición 6.10 *Toda transformación de Möbius se puede expresar como composición de traslaciones, homotecias, giros e inversiones.*

Demostración:

Sea $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Para $c = 0$, $\varphi(z) = \alpha z + \beta$, así:

$$z \xrightarrow{\text{giro}} e^{i \cdot \arg(\alpha)} z \xrightarrow{\text{homotecia}} |\alpha| e^{i \cdot \arg(\alpha)} z \xrightarrow{\text{traslación}} |\alpha| e^{i \cdot \arg(\alpha)} z + \beta$$

Y si $c \neq 0$, podemos descomponer $\varphi(z) = \varphi(z) - \frac{a}{c} + \frac{a}{c} = \frac{bc-ad}{c(cz-d)} + \frac{a}{c}$ y así:

$$z \xrightarrow{\text{traslación}} z + \frac{d}{c} \xrightarrow{\text{inversión}} \frac{1}{z + \frac{d}{c}} \xrightarrow{\text{giro}} e^{i \cdot \arg(\frac{bc-ad}{c^2})} \frac{1}{z + \frac{d}{c}} \xrightarrow{\text{homotecia}}$$

$$\xrightarrow{\text{homotecia}} \left| \frac{bc - ad}{c^2} \right| e^{i \cdot \arg\left(\frac{bc - ad}{c^2}\right) \frac{1}{z + \frac{d}{c}}} \xrightarrow{\text{traslación}} \left| \frac{bc - ad}{c^2} \right| e^{i \cdot \arg\left(\frac{bc - ad}{c^2}\right) \frac{1}{z + \frac{d}{c}}} + \frac{a}{c}$$

que ya nos da lo deseado.

□

Proposición 6.11 *Las transformaciones de Möbius son aplicaciones conformes.*

Demostración:

Es consecuencia de la proposición anterior pues en los cuatro casos se trata de funciones conformes y derivables.

6.6. Geometría Equiárea

Las aplicaciones equiáreas del plano son los difeomorfismos que conservan las áreas. Nos han resultado difícil encontrar resultados generales. De hecho, daremos una construcción original de un ejemplo de aplicación equiárea no afín para ello vamos a utilizar las proyecciones cartográficas por lo que, empezaremos explicando que es una proyección cartográfica.

La proyección cartográfica o proyección geográfica es un sistema de representación gráfica que establece una relación entre los puntos de la superficie curva de la Tierra y los de la superficie plana. Esta proyección sufre diferentes tipos de distorsiones, dependiendo de si conservan los ángulos, las áreas o las distancias.

En función de su propiedad, se pueden clasificar en:

- Proyecciones equidistantes, si conservan las distancias desde un punto. La proyección Cassini es un ejemplo de proyección que conserva las distancias.
- Proyecciones equiáreas, si conservan las áreas. La proyección de Albers conserva las áreas y será una de las proyecciones que usaremos más adelante.
- Proyecciones conformes, si conservan ángulos. Un ejemplo sería la proyección conforme de Lambert.

No obstante, también se pueden clasificar dependiendo del tipo de superficie donde se realiza la proyección: cenital, cilíndrica o cónica; como la disposición entre la superficie terrestre y la superficie de proyección pudiendo ser tangente, secante u oblicua.

Finalmente las representaciones de la Tierra en planos las denominamos mapas.

A continuación, buscaremos una aplicación $t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ equiárea que no sea afín. Para ello vamos a construir dos proyecciones cartográficas equiáreas de $\mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

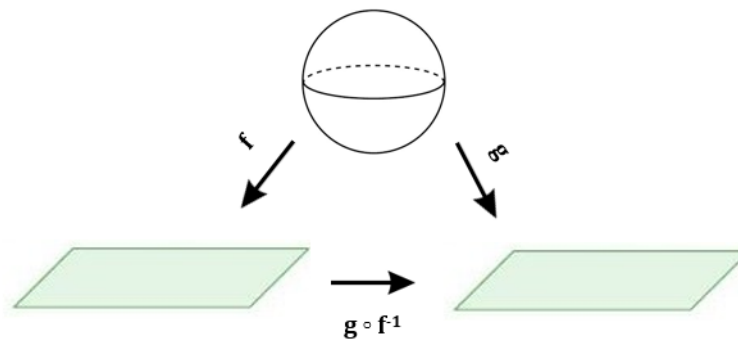


Figura 11: Composición de las proyecciones

De las diferentes proyecciones cartográficas que conservan áreas, ver [12], nos hemos decantado por la proyección de Albers y la proyección de Bonne.

La proyección de Albers o proyección cónica de Albers es una proyección cartográfica cónica equiárea que usa dos paralelos estándar y no conserva las distancias ni los ángulos.

Tenemos:

$$f : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(\varphi, \lambda) \longrightarrow (p \sin \theta, p_o - p \cos \theta) = (x, y)$$

donde:

$$n = \frac{1}{2}(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) \quad \theta = n(\lambda - \lambda_o) \quad C = \cos^2 \varphi_1 + 2n \sin \varphi_2$$

$$p = \frac{1}{n} \sqrt{C - 2n \sin \varphi} \quad p_o = \frac{1}{n} \sqrt{C - 2n \sin \varphi_o}$$

λ es la longitud, λ_o es la longitud de referencia, φ latitud, φ_o latitud de referencias, φ_1 y φ_2 los paralelos estándar.

Y:

$$f^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$$

$$(x, y) \longrightarrow (\sin^{-1}(\frac{C - p^2 n^2}{2n}), \lambda_o + \frac{\theta}{n}) = (\varphi, \lambda)$$

donde:

$$p = \sqrt{x^2 + (p_o - y)^2} \quad \theta = \tan^{-1}(\frac{x}{p_o - y})$$

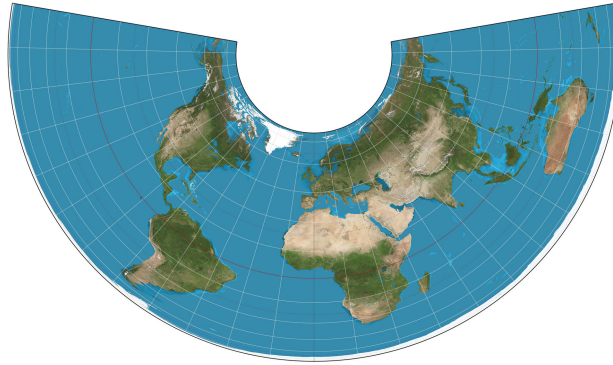


Figura 12: Proyección de Albers

La proyección de Bonne nombrada así en honor al cartógrafo francés Rigobert Bonne pero la proyección ya había sido usada antes de su nacimiento. Al igual que la proyección de Albers, la proyección de Bonne conserva las áreas y no conserva las distancias ni los ángulos.

Ahora tenemos:

$$g : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(\varphi, \lambda) \longrightarrow (p \sin E, \cot \varphi_1 - p \cos E)$$

donde:

$$p = \cot\varphi_1 + \varphi_1 - \varphi \quad E = \frac{(\lambda - \lambda_o)\cos\varphi}{p}$$

Siendo φ la latitud, λ la longitud a partir del meridiano central, λ_o la longitud del meridiano central y φ_1 los paralelos estándar de la proyección.



Figura 13: Proyección de Bonne

A continuación, realizaremos una demostración visual para probar que la aplicación resultante de realizar la composición $(g \circ f^{-1})$ no es afín.

Demostración:

Las aplicaciones lineales llevan puntos alineados a puntos alineados por lo tanto, vamos a ver que no lleva puntos alineados a puntos alineados. Para ello hemos seleccionado tres puntos:

- C , con $\varphi = 30$ y $\lambda = -90$. Corresponde a Nueva Orleans, Estados Unidos.
- D , con $\varphi = 30$ y $\lambda = 90$. Sheng Dao, Dangxiong Xian, Lasa Shi, Xizang Zizhiqu, China
- E , con $\varphi = 60$ y $\lambda = 0$. Agua. Cerca de Reino Unido y Noruega.

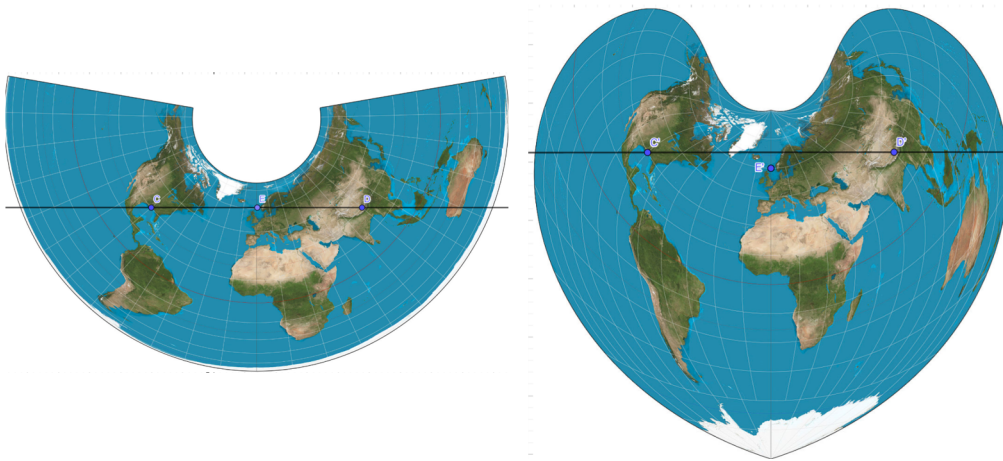


Figura 14: Demostración visual

De la composición obtendríamos los puntos C' , D' y E' y como se puede ver en la figura estos puntos no están alineados por lo tanto queda probado que la composición $t = (g \circ f^{-1})$ no es afín.

□

Este mismo razonamiento con proyecciones cartográficas lo podíamos haber aplicado en la geometría conforme para probar que existen aplicaciones conformes no afines.

Lema 6.12 Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una aplicación afín, sabemos que

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & \alpha & \beta \\ b & \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

La parte vectorial de $M(f)$ es igual a la matriz Jacobiana de f .

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = J_f = \begin{pmatrix} \frac{f_1}{\partial x} & \frac{f_1}{\partial y} \\ \frac{f_2}{\partial x} & \frac{f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Demostración:

Tenemos $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ afín. f queda determinada por dos funciones $f_1 = a + \alpha x + \beta y$ y $f_2 = b + \gamma x + \delta y$. Como toda aplicación afín es diferenciable, f es diferenciable. Ahora podemos organizar en una matriz 2×2 las derivadas parciales de f_1 y f_2 con la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \frac{f_1}{\partial x} & \frac{f_1}{\partial y} \\ \frac{f_2}{\partial x} & \frac{f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

que no es otra que la matriz Jacobiana. Al obtener las derivadas parciales obtenemos la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

y como:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & \alpha & \beta \\ b & \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

y su parte vectorial es:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

obtenemos el resultado deseado.

□

Teorema 6.13 Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación diferenciable, de inversa diferenciable definida en un abierto del plano, entonces:

$$f \text{ conserva las áreas} \Leftrightarrow |J_f| = 1$$

Demostración:

Tenemos una región del plano que denotamos por R y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que lleva R a $f(R)$. Sabemos que el área de R es:

$$A_R = \int \int_R dx dy$$

y el de $f(R)$ es:

$$A_{f(R)} = \int \int_{f(R)} dx dy$$

Ahora podemos ver f como un cambio de variable, de manera que obtenemos:

$$\int \int_R g \, dx dy = \int \int_{f(R)} (g \circ f^{-1}) |J_{f^{-1}}| \, dx dy$$

si $g(r) = 1 \, \forall r \in R$

$$A_R = \int \int_R dx dy = \int \int_{f(R)} |J_{f^{-1}}| \, dx dy = A_{f(R)} \Leftrightarrow |J_{f^{-1}}| = 1$$

La implicación hacia la izquierda es trivial puesto que si $|J_{f^{-1}}| = 1$ tenemos que $A_R = A_{f(R)}$ por lo que pasaremos a la otra implicación.

Si $|J_{f^{-1}}| \neq 1$ tenemos dos posibles casos:

Existe algún punto p tal que $|J_{f^{-1}}| > 1$ o bien $|J_{f^{-1}}| < 1$

Si $|J_{f^{-1}}| > 1 \Rightarrow \exists U \subset f(R)$ entorno de p , tal que $|J_{f^{-1}}| > 1$ en U entonces:

$$\underbrace{\int \int_{f^{-1}(U)} dx dy}_{A_{f^{-1}(U)}} = \underbrace{\int \int_U |J_{f^{-1}}| dx dy}_{A_U \cdot |J_{f^{-1}}|}$$

Como $|J_{f^{-1}}| > 1$, $A_{f^{-1}(U)} < A_U \cdot |J_{f^{-1}}|$ por lo que no se conservan las áreas. Aplicando el mismo razonamiento para $|J_{f^{-1}}| < 1$ llegaríamos a la conclusión de que $A_{f^{-1}(U)} > A_U \cdot |J_{f^{-1}}|$ por lo que tampoco se conservan las áreas.

□

6.7. Geometría Euclídea

Aunque en el trabajo nos hemos centrado en la visión que Klein aportó y no en el axiomático, nos parece interesante recordar dichos axiomas.

- Es posible trazar una línea recta desde cualquier punto a cualquier otro.
- Es posible prolongar continuamente en línea recta una recta dada.
- Es posible trazar un círculo con cualquier centro y radio.
- Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
- Si una recta incide sobre otras dos formando del mismo lado ángulos internos menores que dos rectos, al prolongarlas indefinidamente se encontrarán por el lado en que los ángulos sean menores que dos rectos.

Al quinto postulado se le conoce como el postulado de las paralelas y fue reformulado como:

- Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela a la recta dada.

La eliminación del quinto postulado dio lugar a nuevas geometrías como la elíptica conocida también como geometría de Riemann y la hiperbólica o de Lobachevsky. Estas geometrías en las que el quinto postulado no es válido se las conoce como geometrías no euclídeas.

A continuación, vamos a definir qué se entiende por movimiento.

Definición 6.14 *Un movimiento es una transformación que conserva las distancias, es decir, para cualquier par de punto $a, b \in \mathbb{A}$ se verifica:*

$$d(a, b) = d(f(a), f(b))$$

Teorema 6.15 *(Ver [3, pag 295]). Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín euclídeo y $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ un movimiento. Se cumple que:*

1. *f es una aplicación afín y $\vec{f}$ es una isometría lineal. En particular, f es biyectiva y $f^{-1} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ es un movimiento.*
2. *Si $h : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ es otro movimiento, también $h \circ f$ es un movimiento.*

Demostración:

1. Fijamos un punto $O \in \mathbb{A}$ y observamos que la aplicación $g : \vec{\mathbb{A}} \rightarrow \vec{\mathbb{A}}, \vec{OP} \rightarrow f(O)\vec{f}(P)$ cumple que $g(0) = g(\vec{OO}) = f(O)\vec{f}(O) = 0$.
Además, dados los vectores $u = \vec{OP}$ y $v = \vec{OQ} \in \mathbb{A}$ se tiene:

$$\begin{aligned} d(g(u), g(v)) &= \|g(v) - g(u)\| = \|f(O)\vec{f}(Q) - f(O)\vec{f}(P)\| = \|f(P)\vec{f}(Q)\| = d(f(P), f(Q)) \\ &= d(P, Q) = \|\vec{PQ}\| = \|\vec{PO} + \vec{OQ}\| = \|\vec{OQ} - \vec{OP}\| = \|v - u\| = d(u, v). \end{aligned}$$

En particular, para todo vector $u \in \vec{\mathbb{A}}$ se tiene:

$$\|g(u)\| = \|g(u) - g(0)\| = d(g(u), g(0)) = d(u, 0) = \|u\|$$

Además g es inyectiva, pues dados $u, v \in \vec{\mathbb{A}}$ tales que $u \neq v$ se tiene:

$d(g(u), g(v)) = d(u, v) \neq 0 \rightsquigarrow g(u) \neq g(v)$. Ahora comprobamos que la aplicación $g : \vec{\mathbb{A}} \rightarrow \vec{\mathbb{A}}$ es lineal. Empezamos comprobando que conserva el producto escalar.

Dados $u, v \in \mathbb{A}$ se tiene:

$$\begin{aligned} \|g(u)\|^2 + \|g(v)\|^2 - \|g(u) - g(v)\|^2 &= \langle g(u), g(u) \rangle + \langle g(v), g(v) \rangle - \langle g(u) - g(v), g(u) - g(v) \rangle \\ &= 2\langle g(u), g(v) \rangle \text{ y por tanto:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\langle g(u), g(v) \rangle &= \|g(u)\|^2 + \|g(v)\|^2 - \|g(u) - g(v)\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - d(g(u), g(v))^2 \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - d(u, v)^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2 = \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle - \langle u - v, u - v \rangle = 2\langle u, v \rangle. \end{aligned}$$

En cuanto a la linealidad de g , sean $v_1, v_2 \in \vec{\mathbb{A}}$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, hay que probar que el vector $g(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) - \lambda_1 g(v_1) - \lambda_2 g(v_2)$ es nulo, para lo que es suficiente ver que el cuadrado de su módulo es 0. Denotamos $u_i = g(v_i)$ para $i = 1, 2$ y entonces obtenemos:

$$\begin{aligned} &\|g(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) - \lambda_1 u_1 - \lambda_2 u_2\|^2 = \\ &= \langle g(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) - \lambda_1 u_1 - \lambda_2 u_2, g(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) - \lambda_1 u_1 - \lambda_2 u_2 \rangle = \\ &= \langle g(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2), g(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \rangle + \lambda_1^2 \langle u_1, u_1 \rangle + \lambda_2^2 \langle u_2, u_2 \rangle - 2\lambda_1 \langle g(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2), u_1 \rangle - \\ &\quad - 2\lambda_2 \langle g(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2), u_2 \rangle + 2\lambda_1 \lambda_2 \langle u_1, u_2 \rangle = \\ &= \langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \rangle + \lambda_1^2 \langle v_1, v_1 \rangle + \lambda_2^2 \langle v_2, v_2 \rangle - 2\lambda_1 \langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, v_1 \rangle - \\ &\quad - 2\lambda_2 \langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, v_2 \rangle + 2\lambda_1 \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle = \\ &= \langle (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2, (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 \rangle = \|0\|^2 = 0 \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

Así la aplicación $g : \vec{\mathbb{A}} \rightarrow \vec{\mathbb{A}}$ es una isometría lineal y para cada $P \in \mathbb{A}$ se cumple que $f(P) = f(O) + g(\vec{OP})$, luego f es una aplicación afín y $\vec{f} = g$ es una isometría lineal de $\vec{\mathbb{A}}$. En concreto la aplicación $\vec{f} : \vec{\mathbb{A}} \rightarrow \vec{\mathbb{A}}$ es biyectiva lo que implica que también f es biyectiva. Además, si $P, Q \in \mathbb{A}$,

$$d(f^{-1}(P), f^{-1}(Q)) = d(f(f^{-1}(P)), f(f^{-1}(Q))) = d(P, Q),$$

con lo que f^{-1} es también un movimiento.

□

2. Si $P, Q \in \mathbb{A}$, entonces $d((h \circ f)(P), (h \circ f)(Q)) = d(h(f(P)), h(f(Q))) = d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$ y por tanto $h \circ f$ es un movimiento.

□

7. Propiedades y clasificación de las cónicas no degeneradas

Como hemos mencionado las propiedades que permanecen invariantes por los movimientos, se llaman propiedades o invariantes como explicamos al principio de la sección 6. Cada geometría se caracteriza por conservar unas propiedades. Varias geometrías conservan la misma propiedad cuando una geometría está contenida en otra. A continuación, mostraremos un esquema con los invariantes de cada geometría y explicaremos algunos de los conceptos.

Geometría	Propiedades
Afin	• Alineaciones • Paralelismo • Razón simple • Combinaciones baricéntricas • Cocientes de áreas
Afin Conforme	• Alineaciones • Paralelismo • Razón simple • Combinaciones baricéntricas • Cocientes de áreas • Ángulos
Afin Equiárea	• Alineaciones • Paralelismo • Razón simple • Combinaciones baricéntricas • Cocientes de áreas • Áreas
Afin Euclídea	• Alineaciones • Paralelismo • Razón simple • Combinaciones baricéntricas • Cocientes de áreas • Ángulos • Áreas • Distancias

Figura 15: Invariantes de las geometrías

Detallemos ahora algunos de los conceptos de la tabla precedente.

Definición 7.1 *Expresando una variedad lineal de la siguiente forma $V = p + E$, con p un*

punto y E un espacio vectorial, se dice que $A = a + F$ es paralela a $B = b + G$ si y solo si F está contenido en G o G está contenido en F , donde A y B son subvariedades de V y F y G son subespacios vectoriales de E

Definición 7.2 La razón simple de tres números a , b y c , se define como el cociente de las diferencias entre el primero y cada uno de los otros dos.

$$(abc) = \frac{b-a}{c-a}$$

Conservar las razones simples significa conservar las proporciones entre longitudes. La razón simple es el cociente entre longitudes.

$$(a, b, c) = (f(a), f(b), f(c))$$

Del mismo modo se conservan las proporciones entre áreas, pues:

$$\frac{\text{área } A}{\text{área } B} = \frac{\text{área } f(A)}{\text{área } f(B)}$$

puesto que:

$$\text{área } f(A) = \det f \cdot \text{área } A$$

Definición 7.3 Un ángulo θ entre dos vectores u y v viene dado por:

$$\theta = \arccos\left(\frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}\right)$$

Como mencionamos al principio del trabajo, las isometrías al conservar las distancias conservan los ángulos y a continuación pasaremos a probarlo.

Demostración:

$$\|\phi(u+v)\|^2 = \|\phi(u)\|^2 + \|\phi(v)\|^2 + 2\|\phi(u)\|\|\phi(v)\|\cos(\phi(u), \phi(v))$$

y

$$\|u+v\|^2 = (u+v) \cdot (u+v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2uv = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\|\cos(u, v)$$

como $\|\phi(u+v)\|^2 = \|u+v\|^2$ queda demostrado.

□

7.1. Jerarquía entre las geometrías

La relación de contenidos entre las geometrías no sólo determina propiedades comunes a ellas sino la vigencia de teoremas en las distintas geometrías. Por ejemplo, la noción de punto

medio es afín (se define por una razón simple) y el teorema de que las tres medianas de un triángulo se cortan es propio de la geometría afín y, por tanto, de las geometrías contenidas en ella. La noción de altura requiere perpendicularidad y, por tanto, es propia de la geometría conforme (y de la euclídea) pero no de las otras dos.

Ahora pasamos a clasificar las cónicas en cada geometría. Dos cónicas son equivalentes en una geometría si existe un movimiento de la geometría que lleva una en otra.

7.2. Clasificación afín de las cónicas

En la geometría afín los movimientos son los isomorfismos afines. Dadas dos cónicas no degeneradas existe una transformación afín que lleva una en otra $\Leftrightarrow$ las cónicas son del mismo tipo. Existen tres clases de cónicas afines no degeneradas: la elipse, la parábola y la hipérbola.

7.3. Clasificación afín conforme de las cónicas

En la geometría afín conforme los movimientos son las semejanzas. La excentricidad ε , es un parámetro que determina el grado de desviación de una sección cónica con respecto a una circunferencia. Vamos a ver que determina las clases de cónicas no degeneradas en la geometría afín conforme.

Definición 7.4 *Para cualquier punto perteneciente a una sección cónica, la razón de su distancia a un punto fijo F (foco) y a una recta fija l (directriz) es siempre igual a una constante positiva llamada excentricidad ε .*

La excentricidad se conserva y por tanto, es un invariante de la geometría conforme. La geometría afín conforme conserva las razones simples y hemos mencionado anteriormente que significa que conserva las proporciones entre longitudes y como la excentricidad es un cociente entre longitudes ya que es el cociente entre la distancias focal y directriz se conserva.

Dos cónicas no degeneradas son conformemente equivalentes $\Leftrightarrow$ tienen la misma excentricidad. Por lo tanto hay tantas clases de cónicas como valores de la excentricidad.

- Circunferencia

$$\varepsilon = 0$$

- Elipse

$$\varepsilon : 0 < \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1$$

donde a, b son los semiejes de la elipse.

- Parábola

$$\varepsilon = 1$$

- Hipérbola

$$\varepsilon : 1 < \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

donde a, b son los semiejes de la hipérbola.

7.4. Casificación afín equiárea de las cónicas

La curvatura afín especial o curvatura equiafín (ver [4], [14]) es un tipo de curvatura que se define en una curva plana que permanece invariante por las transformaciones afines equiáreas. Las curvas de curvatura equiafín constante son todas las cónicas del plano. Para definir la curvatura afín especial, primero definiremos la longitud de arco afín especial.

Definición 7.5 *Se denomina longitud de arco afín especial a la integral*

$$s(t) = \int_a^t \sqrt[3]{\det \left| \frac{d\beta}{dt} \quad \frac{d^2\beta}{dt^2} \right|} dt$$

Definición 7.6 *Para una curva plana con parametrización arbitraria $t \rightarrow (x(t), y(t))$, la curvatura afín especial es:*

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{x'' y''' - x''' y''}{(x' y'' - x'' y')^{\frac{5}{3}}} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(x' y'' - x'' y')^{\frac{2}{3}}} \right]'' = \\ &= \frac{4(x'' y''' - x''' y'') + (x' y''' - x''' y')}{3(x' y'' - x'' y')^{\frac{5}{3}}} - \frac{5(x' y''' - x''' y')^2}{9(x' y'' - x'' y')^{\frac{8}{3}}} \end{aligned}$$

Proposición 7.7 *Dada una curva plana parametrizada por $(x(t), y(t))$ su curvatura afín especial es:*

- Circunferencia

$$k(t) = r^{-\frac{4}{3}}$$

donde r es el radio de la circunferencia.

- Elipse

$$k(t) = (ab)^{-\frac{2}{3}}$$

donde a, b son los semiejes de la elipse.

- Parábola

$$k(t) = 0$$

- Hipérbola

$$k(t) = -(ab)^{-\frac{2}{3}}$$

donde a, b son los semiejes de la hipérbola.

Dadas dos cónicas no degeneradas existe una transformación equiárea que lleva una en otra $\Leftrightarrow$ tienen la misma curvatura afín especial.

Por tanto tenemos tantas clases como valores de curvatura afín especial.

Teorema 7.8 (Ver [4][pág: 151])

Las curvas con curvatura afín constante son las cónicas.

La curvatura afín se conserva por aplicaciones afines equiáreas cuyo determinante vectorial es 1. En el ejemplo siguiente demostraremos las fórmulas para la circunferencia y la elipse.

Ejemplo 7.9 Tenemos una elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y una circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ ambas centradas en el origen por comodidad y una aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ afín equiárea que lleva la elipse a la circunferencia como muestra la imagen.

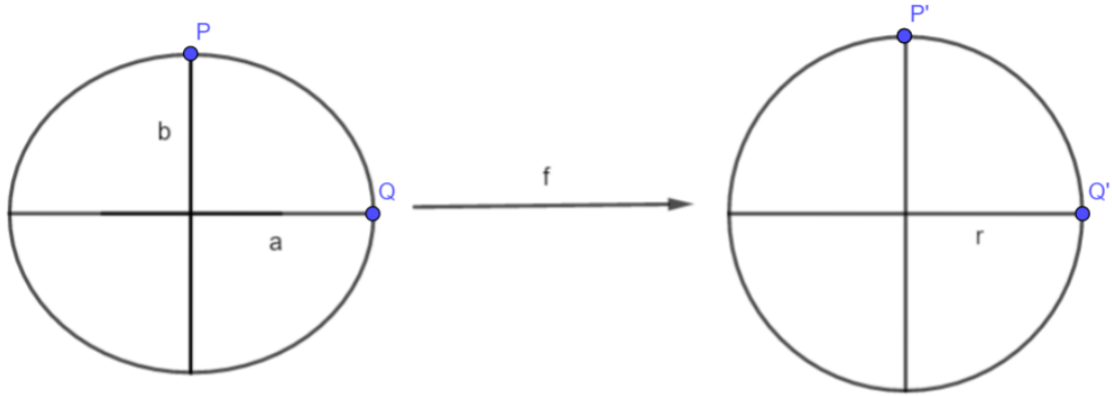


Figura 16: Ejemplo aplicación Equiárea

Demostración:

Sabemos que el $A_e = \pi ab$ y que el $A_c = \pi r^2$ por lo que para que $A_e = A_c$, $r^2 = ab \Rightarrow r = \sqrt{ab}$

Al estar centradas en el origen tenemos que f debería llevar:

$$P = (0, b) \rightarrow (\sqrt{ab}, 0) = P', \quad Q = (a, 0) \rightarrow (0, \sqrt{ab}) = Q', \quad (0, 0) \rightarrow (0, 0)$$

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{ab}}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{ab}}{b} \end{pmatrix}$$

Ahora si calculamos el determinante obtenemos:

$$\det(M(f)) = |J_f| = \frac{\sqrt{ab}}{a} \frac{\sqrt{ab}}{b} = 1$$

Ahora pasaremos a ver que tienen la misma curvatura afín especial. Para una curva plana parametrizada por $(x(t), y(t))$, la curvatura afín especial está dada por $k(t)$. La parametrización de la circunferencia es $(r \cos t, r \sin t)$ mientras la parametrización de la elipse es $(a \cos t, b \sin t)$.

Realizando las operaciones pertinentes para la circunferencia obtenemos:

$$k(t) = \frac{4(-r^2 \cos^2 t - r^2 \sin^2 t) + (r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t)^2}{3(-r^2 \sin^2 t - r^2 \cos^2 t)^{\frac{5}{3}}} - \frac{5(r^2 \sin t \cos t - r^2 \sin t \cos t)^2}{9(-r^2 \sin^2 t - r^2 \cos^2 t)^{\frac{8}{3}}} = r^{-\frac{4}{3}}$$

En el caso de la elipse tras sustituir y operar obtenemos:

$$k(t) = (ab)^{-\frac{2}{3}}$$

Finalmente, como $r = \sqrt{ab}$:

$$r^{-\frac{4}{3}} = (\sqrt{ab})^{-\frac{4}{3}} = (ab)^{-\frac{2}{3}}$$

por lo que tienen la misma curvatura afín especial.

□

7.5. Clasificación afín euclídea de las cónicas

Finalmente, en la geometría euclídea tenemos que los movimientos son los movimientos euclídeos y las cónicas son las siguientes:

- Elipses de semiejes a, b con $a, b \in \mathbb{R}^+$
- Hipérbolas de semiejes a, b con $a, b \in \mathbb{R}^+$
- Parábolas $d > 0$ donde d es la distancia del foco a la directriz.

En este caso tenemos infinitas clases, y un ejemplo de esto es:

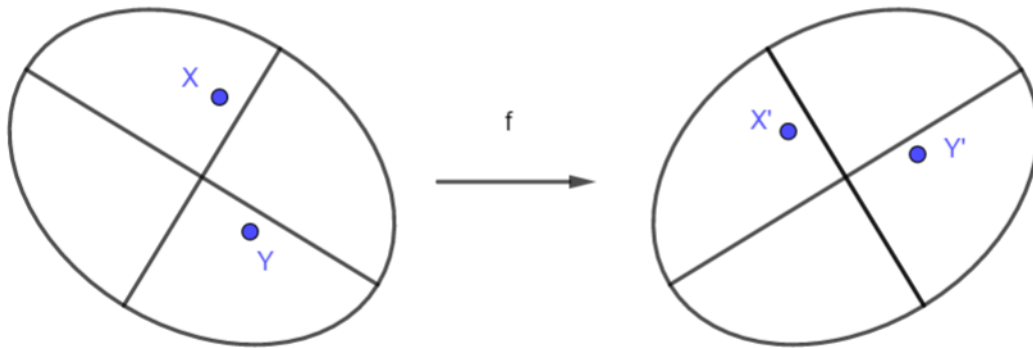


Figura 17: Isometría entre elipses

Para finalizar, mostramos en una tabla a modo de resumen los invariantes de cada según la geometría en que nos encontremos.

Geometría	Invariantes	
Afin	• Tipo de cónica	- Elipse - Parábola - Hipérbola
Afin Conforme	• Tipo de cónica	- Elipse - Parábola - Hipérbola
	• Excentricidad	- Elipse: $0 \leq \varepsilon < 1$ - Parábola: $\varepsilon = 1$ - Hipérbola: $\varepsilon > 1$
Afin Equiárea	• Tipo de cónica	- Elipse - Parábola - Hipérbola
	• Curvatura equiafin	- Hipérbola: $k < 0$ - Parábola: $k = 0$ - Elipse: $k > 0$
Afin Euclídea	• Tipo de cónica	- Elipse - Parábola - Hipérbola
	• Excentricidad	- Elipse: $0 \leq \varepsilon < 1$ - Parábola: $\varepsilon = 1$ - Hipérbola: $\varepsilon > 1$
	• Curvatura equiafin	- Hipérbola: $k < 0$ - Parábola: $k = 0$ - Elipse: $k > 0$
	• Semiejes	

Figura 18: Invariantes de las cónicas

Referencias

- [1] Alexander Kirillov, Jr.: *Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*.
<https://www.math.stonybrook.edu/~kirillov/liegroups/liegroups.pdf>.
- [2] De Amo, E.: *Tema3.2: Transformaciones de Möbius*.
https://w3.ual.es/~edeamo/capitulo3_ac/vc0302.pdf.
- [3] Fernando, J.F; Gamboa, J.M.: *Geometría Lineal: Espacios Afines y Proyectivos*. Sanz y Torres. (2017)
- [4] Guggenheimer, H: *Differential Geometry*. (1977)
- [5] Kline, M.: *El pensamiento matemático de la antigüedad hasta nuestros días*. Alianza Editorial. (1992)
- [6] López Camino, R.: *Tema 8: Aplicaciones afines*
<http://www.ugr.es/~rcamino/docencia/geo1-03/g1tema8.pdf>
- [7] Reventós, A.: *Geometría Inversiva*.
<http://mat.uab.es/~agusti/geoinvcas.pdf>.
- [8] Warner, F.: *Foundations of Differentiable manifolds and Lie groups*. (1971)
- [9] https://es.wikipedia.org/wiki/Apolonio_de_Pergete, Wikipedia, página web pública.
(16-11-2017)
- [10] https://es.wikipedia.org/wiki/Menelao_de_Aleandría, Wikipedia, página web pública.
(16-11-2017)
- [11] https://en.wikipedia.org/wiki/Affine_curvature, Wikipedia, página web pública.
(10-03-2018)
- [12] https://en.wikipedia.org/wiki/Map_projection, Wikipedia, página web pública.
(15-04-2018)
- [13] https://en.wikipedia.org/wiki/Klein_geometry, Wikipedia, página web pública.
(21-06-2018)
- [14] <http://mathworld.wolfram.com/SpecialAffineCurvature.html>