



Facultad
de
Ciencias

Índices de campos de vectores y Teorema de Poincaré-Hopf

(Index of vector fields and Poincaré-Hopf Theorem)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al
GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Fernando Gómez Ortiz

Directora: Nuria Corral Pérez

Junio - 2018

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría agradecer que Nuria haya sido mi directora, comencé esta aventura con una clase de topología suya y no se me ocurre mejor manera de acabarla. Gracias por tu esfuerzo y trabajo, sin ti no estaría ahora presentando los dos trabajos.

A mi familia, que siempre esperan de mi lo máximo gracias por el apoyo y cariño durante estos 5 años de largas carreras y por haberme permitido siempre dedicarme a lo que me gusta.

A todos los que han formado parte de este largo pero bonito viaje, tanto profesores como compañeros y amigos. A Andrea y a Elena difícil imaginarme sin ellas. A todos los de los jueves, aunque muchos esteis en Madrid y se os eche de menos.

Gracias a todos

Resumen

En este trabajo se ha estudiado la relación existente entre funciones -campos vectoriales tangentes- definidos sobre variedades diferenciables y la topología de las mismas a través del Teorema de Poincaré-Hopf el cual relaciona un invariante topológico global de una variedad compacta M como es su característica de Euler con un invariante local como es el índice de un campo de vectores tangente en una singularidad. Más concretamente el Teorema estipula que la suma de los índices de un campo vectorial con un número finito de singularidades aisladas es igual a la característica de Euler de la variedad donde se encuentra definido. Para poder demostrar en detalle el anterior resultado se ha introducido la teoría básica de variedades diferenciables, seguidamente se han estudiado en profundidad los campos vectoriales tangentes y se han dado dos visiones diferentes pero equivalentes del índice usando técnicas distintas. Por último, a partir de la teoría de homología simplicial se ha definido la característica de Euler de una variedad compacta.

Palabras clave: Teorema Poincaré-Hopf, campos vectoriales, singularidad, índice, grado, característica de Euler.

Abstract

In this work we have studied the relationship between mappings -tangent vector fields- defined on a differentiable manifold and its topology through the study of Poincaré-Hopf Theorem which relates a topological global invariant of a compact manifold M , the Euler characteristic, with a local invariant, the index of a singularity. More concretely, the Theorem states that the sum of the indices of any tangent vector field with finitely many isolated zeros defined on a manifold equals its Euler characteristic. In order to give a complete proof of the previous result, we have introduced the basic theory related with differentiable manifolds. Afterwards, we have deeply studied tangent vector fields, and two different approaches of indices using different techniques have been given. Lastly, using simplicial homology theory we have defined the Euler characteristic of a compact manifold.

Keywords: Poincaré-Hopf Theorem, vector fields, singularities, index, degree, Euler characteristic.

Índice

1	Introducción	1
2	Preliminares de variedades	3
2.1	Variedades diferenciables: Nociones básicas	3
2.2	Espacio tangente y aplicación tangente	9
2.3	Inmersiones y submersiones	13
2.4	Variedades con borde	16
2.5	Puntos y valores críticos y regulares.	18
3	Campos vectoriales	22
3.1	Índice de un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^2$	24
4	Triangulaciones y característica de Euler.	32
4.1	Subdivisión baricéntrica.	36
5	Teorema de Poincaré-Hopf	38
5.1	Notación y consideraciones previas.	38
5.2	Resultados previos a la demostración.	39
5.3	Demostración del Teorema de Poincaré-Hopf.	44

1 Introducción

El presente trabajo se dedica al estudio de campos vectoriales tangentes definidos sobre variedades diferenciables. Más concretamente, estudiaremos campos vectoriales tangentes que presenten un número finito de singularidades aisladas y cómo la variedad diferenciable sobre la que se encuentran definidos restringe muchas de las diferentes posibles configuraciones que a priori pudiésemos imaginar. Estamos hablando del conocido Teorema de Poincaré-Hopf, el cual exige que la suma de los índices de todas las singularidades sea igual a la característica de Euler de la variedad sobre la que se encuentre definido. Dicho resultado fue probado en una versión más débil por Henri Poincaré a finales del siglo XIX y mejorado posteriormente por Heinz Hopf en 1926 quien dio la versión general conocida en la actualidad.

El anterior teorema suele ser ilustrado con el conocido corolario de “La bola peluda” cuyo enunciado intuitivo estipula que no se puede peinar una bola de forma continua sin formar en ella ningún remolino. Es decir, que no podemos tener definido un campo vectorial tangente continuo sobre la superficie de una esfera sin que este se anule en ningún punto.

En muchas áreas de las matemáticas, estamos interesados en establecer invariantes, o propiedades fundamentales que nos ayudan a determinar cuando dos objetos matemáticos son distintos o no. El anterior resultado nos permite en cierto modo hacer este tipo de distinción, así como veremos, una esfera y un toro no pueden ser equivalentes en el sentido de la topología ya que sobre la esfera no existen campos vectoriales sin singularidades mientras que en el toro sí.

Las características intrínsecas del resultado, marcarán muchas de las peculiaridades del trabajo. Así, dado que el teorema relaciona un concepto puramente topológico como es la característica de Euler de una superficie, con un concepto proveniente de la geometría diferencial o del análisis como son los campos de vectores y las singularidades, la presente memoria utilizará y relacionará diferentes ramas de las matemáticas como son la topología algebraica, la geometría diferencial y el análisis.

Además de establecer un nexo entre diferentes campos de las matemáticas, el teorema resulta tener una propiedad que lo hace aún más interesante y es su carácter “global-local”. Ya que la característica de Euler es un concepto global, que depende de la variedad en su conjunto y como veremos, los índices de campos vectoriales dependen simplemente de lo que le sucede al campo en un pequeño entorno de sus singularidades. Los resultados que relacionan propiedades locales con propiedades globales son importantes en matemáticas ya que permiten extraer mucha información del objeto de estudio a partir del análisis de unos pocos lugares en los que hay propiedades que no se comportan como uno esperaría.

El trabajo comenzará con una introducción de conceptos generales de variedades diferenciables en los que sentaremos también las bases de nuestra notación. Seguidamente

en la Sección 3, estudiaremos los campos vectoriales tangentes, definiremos el concepto de singularidad y veremos varias aproximaciones al grado topológico con diferentes herramientas. En la Sección 4 haremos uso de la homología simplicial para definir los números de Betti de una variedad diferenciable cualquiera y poder así extender la noción de característica de Euler para finalmente en la Sección 5 con todas las bases asentadas demostrar el resultado que pone nombre a este trabajo.

2 Preliminares de variedades

El objetivo de este capítulo es estudiar las propiedades fundamentales de variedades que se utilizarán a lo largo de este trabajo. En esta sección se ha seguido principalmente el libro [6].

2.1 Variedades diferenciables: Nociones básicas

Con motivo de extender la definición de función diferenciable entre conjuntos más generales introducimos a continuación las siguientes definiciones.

Definición 2.1. Sea M un conjunto, una aplicación inyectiva $x : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ cuya imagen es un abierto de $\mathbb{R}^n$ se llama *carta de dimensión n* . Usando las proyecciones $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, cada carta define en su dominio U un conjunto de funciones coordenadas $x^i = \pi_i \circ x$ de tal forma que

$$x = (x^1, \dots, x^n)$$

$x(m) = (x^1(m), \dots, x^n(m))$ se le llama conjunto de coordenadas del punto $m \in U$ en la carta x .

Utilizaremos la notación (x, U) para referirnos a la carta y el dominio donde se encuentra definida y nos referiremos a dicho conjunto como abierto coordenado.

Un conjunto de cartas n -dimensionales cuyos dominios cubren todo M se le llama *atlas* $\mathcal{A}$.

Definición 2.2. Se dice que un atlas $\mathcal{A}$ de M a $\mathbb{R}^n$ es C^∞ si dadas dos cartas cualesquiera (x, U) e (y, V) de $\mathcal{A}$, con $U \cap V \neq \emptyset$, el cambio de coordenadas

$$y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow y(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$$

es un difeomorfismo de clase C^∞ .

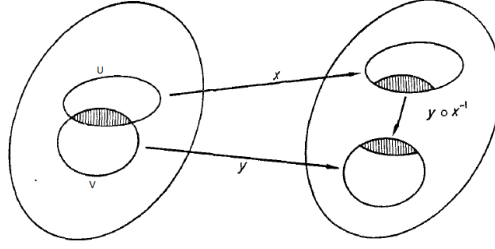


Figura 1: Esquema de los diferentes dominios de cartas y el cambio de carta. Figura obtenida de [6].

Definición 2.3. Un conjunto M con una estructura (atlas) C^∞ de dimensión n dada, se llama *variedad diferenciable de dimensión n* .

Para ilustrar las definiciones anteriores y familiarizarnos con los cambios de carta veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1. Sea $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ la circunferencia unidad en $\mathbb{R}^2$. Si tomamos $U = \{(\cos 2\pi s, \sin 2\pi s) : 0 < s < 1\} \subset \mathbb{S}^1$ entonces la función $x : U \subset \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $x((\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)) = s$ es una aplicación inyectiva en un abierto de $\mathbb{R}$ y por lo tanto es una carta.

Equivalentemente si tenemos el conjunto $U' = \{(\cos 2\pi s, \sin 2\pi s) : -\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2}\} \subset \mathbb{S}^1$ la función $x' : U' \subset \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $x'((\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)) = s$ es también una carta.

Los dominios de U y U' juntos cubren toda la circunferencia. Además donde los dominios de las cartas se intersecan, se tiene que el cambio de carta $x' \circ x^{-1} : (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1) \rightarrow (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$ es

$$x' \circ x^{-1}(s) = \begin{cases} s & \text{si } s \in (0, \frac{1}{2}) \\ s - 1 & \text{si } s \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

y por tanto trivialmente un difeomorfismo. En la Figura 2 se muestran los dominios U, U' y $U \cap U'$. Podemos notar que una representación con dos cartas es minimal ya que como se verá más adelante $\mathbb{S}^1$ es una subvariedad regular de $\mathbb{R}^2$ (ver proposición 2.4) esto quiere decir que la topología inducida por la estructura de variedad diferenciable (ver p. 7) coincide con la topología de subespacio de $\mathbb{R}^2$. Como $\mathbb{S}^1$ es compacto como subespacio de $\mathbb{R}^2$, no puede admitir una representación que conste de una única carta.

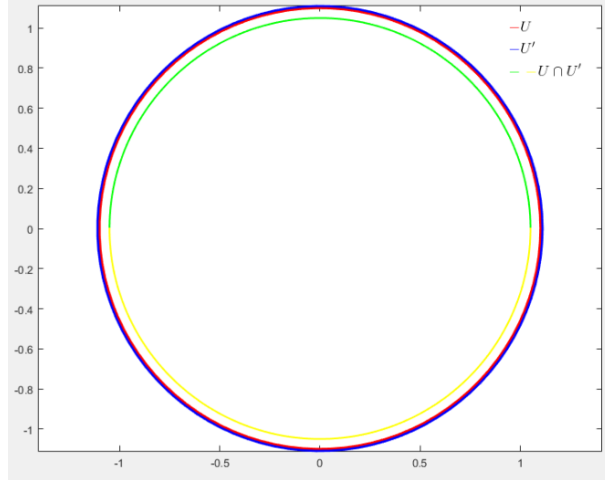


Figura 2: Dominios de las cartas mencionadas. En verde y amarillo las dos componenetes conexas de $U \cap U'$.

Para la misma variedad se puede dar otro atlas cuyas cartas se definen del siguiente modo. Sean:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^1 : z_1 > 0\} \\ U_2 &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^1 : z_2 > 0\} \\ U_3 &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^1 : z_1 < 0\} \\ U_4 &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^1 : z_2 < 0\} \end{aligned}$$

Y respectivamente las cartas

$$\begin{aligned} x_1 : U_1 &\rightarrow \mathbb{R} : x_1(z_1, z_2) = z_2 \\ x_2 : U_2 &\rightarrow \mathbb{R} : x_2(z_1, z_2) = z_1 \\ x_3 : U_3 &\rightarrow \mathbb{R} : x_3(z_1, z_2) = z_2 \\ x_4 : U_4 &\rightarrow \mathbb{R} : x_4(z_1, z_2) = z_1 \end{aligned}$$

Los conjuntos U_1, U_2, U_3, U_4 conjuntamente cubren todo $\mathbb{S}^1$ como se muestra en la Figura 3 y para toda intersección de dominios se tiene que el cambio de cartas es difeomorfismo. Por ejemplo, se tiene que:

$$\begin{aligned} x_2 \circ x_1^{-1} : (0, 1) &\longmapsto (0, 1) \\ s &\longmapsto \sqrt{1 - s^2} \end{aligned}$$

que es un difeomorfismo en el intervalo abierto $(0, 1)$. De forma equivalente se obtienen difeomorfismos para todos los cambios de carta.



Figura 3: Dominios de las cartas mencionadas.

Definición 2.4. Dados dos atlas de una misma variedad diferenciable $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ diremos que son *equivalentes* si la unión de ambos forma un nuevo atlas; es decir, si los cambios de carta entre cartas de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son también difeomorfismos.

En el caso del ejemplo 2.1, los dos atlas que se dan son equivalentes ya que los cambios de carta

$$\begin{aligned} x(U \cap U_1) &= (0, \tfrac{1}{4}) \cup (\tfrac{3}{4}, 1) & x_1(U \cap U_1) &= (-1, 0) \cup (0, 1) \\ x_1 \circ x^{-1}(s) &= \sin(2\pi s) \end{aligned}$$

y sucesivos son todos difeomorfismos.

Llegados a este punto nos interesará saber cuando podemos decir que una función $f : M \rightarrow M'$ entre dos variedades es diferenciable. Sean M y M' dos variedades de dimensiones n y n' respectivamente. Dado un punto $m \in M$ en el dominio de f , y dadas (x, U) y (x', U') dos cartas en m y $m' = f(m)$ respectivamente, tenemos

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & U' \\ \downarrow x & & \downarrow x' \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^{n'} \end{array}$$

llamaremos a la función

$$F = x' \circ f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow x'(U')$$

representante coordenado de f , y diremos que f es *diferenciable* en el punto m si F es de clase C^∞ en $x(m)$. La aplicación f se dice diferenciable en M si lo es en todos los puntos $m \in M$.

Observación 2.1. La definición anterior no depende de las cartas x y x' ya que para cualesquiera cartas y, y' con dominios apropiados $y \circ x^{-1}$ y $y' \circ x'^{-1}$ son difeomorfismos.

La estructura C^∞ definida sobre la variedad M induce una topología sobre la misma, donde el conjunto de dominios de cartas forma una base de dicha topología. Usando la topología de la variedad, toda carta es por tanto un homeomorfismo y en particular, por ejemplo una variedad que admita una carta global nunca podrá ser compacta.

Cabe destacar en este punto que las variedades con su estructura C^∞ pueden presentar en general una topología distinta a la topología del subespacio y además, está no tiene porqué cumplir axiomas de separabilidad T_2 , sin embargo, para muchos resultados se necesitarán propiedades de compacidad, conexión y que sea Hausdorff. Un ejemplo que puede ilustrar esta diferencia entre las posibles topologías es la conocida como “figura del ocho” $O = \{(\sin 2s, \sin s), s \in \mathbb{R}\}$ que se presenta a continuación en la Figura 4.

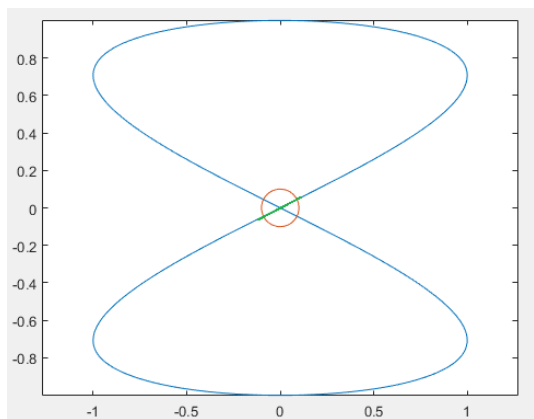


Figura 4: Figura del ocho.

La aplicación $x : O \rightarrow (0, 2\pi)$ dada por $x(\sin 2s, \sin s) = s$ nos da una carta de O cuyo dominio es todo O . Tenemos por lo tanto que (O, x) es un atlas C^∞ de O . Si lo vemos

con su estructura C^∞ el segmento en verde es un abierto de la topología sin embargo un abierto como subconjunto de $\mathbb{R}^2$ sería la intersección del ocho con la bola cuya frontera esta dibujada en rojo $O \cap B(0, \epsilon)$. Obviamente estos entornos de cero no son homeomorfos ya que quitando el punto $(0, 0)$ uno lo desconectamos en dos componentes conexas mientras que el otro en cuatro.

Además, como subconjunto de $\mathbb{R}^2$ es compacto por ser cerrado y acotado, mientras que con la topología dada por la estructura C^∞ este no es el caso ya que su atlas está formado por una sola carta y por tanto es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}$.

Proposición 2.1. Sea M una variedad diferenciable y $W \subset M$ un abierto. Entonces W es variedad diferenciable.

Demostración. La restricción del atlas $\mathcal{A}$ de la variedad M al abierto W obtenido al intersecar los dominios de las cartas con W es un atlas para W . Y por tanto W tiene estructura de variedad diferenciable. $\square$

Algunos problemas que aparecen en el estudio de las variedades diferenciables pueden ser más fácilmente resolubles en entornos locales, es decir, en entornos coordinados de puntos. Las particiones de la unidad que se definirán a continuación, permiten construir soluciones globales a partir de estas soluciones locales y nos serán útiles más adelante.

Definición 2.5. Una *partición de la unidad* definida sobre M es una colección $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de funciones diferenciables $\phi_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ tales que:

1. El soporte C_α de las funciones ϕ_α es compacto y está contenido en un abierto coordinado.
2. La familia $\{C_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es localmente finita¹.
3. Si $m \in M$ entonces $\phi_\alpha(m) \geq 0$ y además $\sum_\alpha \phi_\alpha(m) = 1$.

Observaciones 2.2. La condición (2) implica que la suma dada en (3) tiene siempre un numero finito de sumandos no ceros.

Una variedad Hausdorff con una base numerable admite una partición de la unidad (Proposición 3.4.2 de [6]).

Presentamos ahora un resultado que nos será útil más adelante.

¹Recordamos que una familia de conjuntos de un espacio topológico X es localmente finita si todo punto $x \in X$ tiene al menos un entorno que interseca solamente un número finito de conjuntos de la familia.

Proposición 2.2. Supongamos que U es un conjunto abierto de una variedad compacta M y que C es un cerrado contenido en U . Entonces existe una función diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f = 1$ en el cerrado C y $f = 0$ en $M \setminus U$.

Demostración. Dado que C es un cerrado los conjuntos U y $M \setminus C$ forman un recubrimiento abierto de la variedad. Tomamamos ϕ_α una partición de la unidad subordinada a este recubrimiento. Consideramos $f = \sum \phi_\alpha$ donde la suma se extiende a los valores de α para los que el soporte de ϕ_α está contenido en U .

Claramente $f = 0$ en $M \setminus U$ y además se tiene $f = \sum \phi_\alpha = 1$ en C . $\square$

2.2 Espacio tangente y aplicación tangente

A continuación intentaremos dar dos visiones equivalentes del espacio tangente de una variedad en un punto. Primero lo definiremos de forma formal a través de las derivaciones y después como el conjunto de vectores tangentes a curvas contenidas en la variedad que pasan por el punto m , finalmente veremos que ambas definiciones coinciden.

Denotaremos por $\mathcal{F}(m) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ diferenciables en un entorno de } m\}$. Una función $\mathbb{R}$ -lineal en $\mathcal{F}(m)$ será llamada operador lineal en $\mathcal{F}(m)$.

Definición 2.6. Una *derivación* en $\mathcal{F}(m)$ es un operador lineal $\Lambda : \mathcal{F}(m) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\Lambda(fg) = f(m) \cdot \Lambda(g) + \Lambda(f) \cdot g(m).$$

Supongamos que (x, U) es una carta de una variedad diferenciable M y sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable con representante coordenado $F = f \circ x^{-1} : x(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con F clase C^∞ .

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \downarrow x & \nearrow F & \\ x(U) & & \end{array}$$

Denotaremos F_{x_i} a las derivadas parciales para $1 \leq i \leq n$ y definimos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_m (f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_m = F_{x_i}(x(m)) \quad (1)$$

Con esta notación el operador $\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_m (f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_m$ será una derivación de $\mathcal{F}(m)$.

Antes de definir el espacio tangente, veamos algunas propiedades que satisfacen las derivaciones.

1. Si x es una carta de M cuyo dominio incluye al punto m , el operador

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m : \mathcal{F}(m) &\longmapsto \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_m \end{aligned}$$

es una derivación en $\mathcal{F}(m)$.

2. Si Λ es una derivación y $f \in \mathcal{F}(m)$ es constante en un entorno de m entonces $\Lambda(f) = 0$.
3. Si Λ y Ω son derivaciones en $\mathcal{F}(m)$ y $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $a\Lambda + b\Omega$ es una derivación en $\mathcal{F}(m)$.

Esta última propiedad dota al conjunto de todas las derivaciones en $\mathcal{F}(m)$ de estructura de $\mathbb{R}$ –espacio vectorial. Es precisamente a este espacio vectorial al que llamaremos espacio tangente de M en el punto m y vendrá denotado por $T_m M$. Cualquier derivación en $\mathcal{F}(m)$ es, por supuesto, un elemento de este espacio y se llama vector tangente en m .

Teorema 2.1. Si (U, x) es una carta de M cuyo dominio incluye al punto m , los vectores $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m$, $i = 1, \dots, n$, forman una base de $T_m M$.

Demostración.

Probaremos primero el siguiente resultado.

Sea (x, U) una carta de M con $m \in U$ y tal que $x(m) = a$. Si $f \in \mathcal{F}(m)$ existen funciones $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{F}(m)$ tales que, en un entorno de m , la función f coincide con la siguiente expresión

$$f(m) + \sum_{i=1}^n (x^i - a^i) h_i$$

donde $a = (a^1, \dots, a^n)$.

Sea $y = x - a$ y denotemos por F a la restricción de $f \circ y^{-1}$ a una bola B de centro 0 contenida en el dominio de $f \circ y^{-1}$. Para todo $z \in B$ se tiene

$$\begin{aligned} F(z_1, \dots, z_n) - F(0, \dots, 0) &= \int_0^1 \frac{d}{ds} [F(sz_1, \dots, sz_n)] ds \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 F_{z_i}(sz_1, \dots, sz_n) z_i ds = \sum_{i=1}^n z_i H_i(z_1, \dots, z_n) \end{aligned}$$

Las funciones h_i que buscamos están dadas por $h_i = H_i \circ y$. Una vez tenemos este resultado, sea $\Lambda \in T_m M$ y veamos que se puede poner como combinación de los vectores $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m$:

$$\begin{aligned}\Lambda(f) &= \Lambda(f(m) + \sum_{i=1}^n (x^i - a^i) h_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (x^i - a^i)_{(m)} \Lambda(h_i) + \sum_{i=1}^n (\Lambda(x^i - a^i))(h_i(m)) \\ &= \sum_{i=1}^n \Lambda(x^i)(h_i(m)).\end{aligned}$$

Además tenemos que:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_m (f) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^j}\right)_m (h_i(m)) = h_j(m).$$

Por lo tanto

$$\Lambda = \sum \Lambda(x^i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m.$$

□

Corolario 2.1. La dimensión del espacio tangente coincide con la dimensión de M .

Se puede definir de forma alternativa, pero equivalente, el espacio tangente a M en el punto m como el conjunto de vectores tangentes a curvas contenidas en M que pasan por el punto m .

Llamaremos *curva* en M a cualquier aplicación $\sigma : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ de clase C^∞ . Dado $t_0 \in (a, b)$, el vector tangente a la curva σ en $\sigma(t_0) = m$ es la derivación $\sigma_*\left(\left(\frac{d}{dt}\right)_{t_0}\right) = (\sigma_*\left(\frac{d}{dt}\right))_m$ definida por $\sigma_*\left(\left(\frac{d}{dt}\right)_{t_0}\right)(f) = \left(\frac{d(f \circ \sigma)}{dt}\right)_{t_0}$. En particular, si consideramos un abierto coordenado (x, U) con $m \in U$, podemos escribir $x \circ \sigma(t) = (\sigma_1(t), \dots, \sigma_n(t))$ y por tanto

$$\sigma_*\left(\left(\frac{d}{dt}\right)_{t_0}\right)(x^i) = \frac{d\sigma_i}{dt}(t_0) = \sigma'_i(t_0)$$

en consecuencia,

$$\sigma_*\left(\left(\frac{d}{dt}\right)_{t_0}\right)_m = \sum_{i=1}^n \sigma'_i(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m.$$

En particular, si consideramos la curva $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subset M$ dada por $x \circ \sigma(t) = x(m) + te_i$, con $e_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\left(\sigma_* \left(\frac{d}{dt} \right) \right)_m = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_m$$

Corolario 2.2. El espacio tangente $T_m M$ a la variedad M en el punto m coincide con el espacio vectorial formado por los vectores tangentes a las curvas contenidas en M que pasan por m .

Pasamos ahora a definir lo que se conoce como aplicación tangente.

Definición 2.7. Sea $\phi : M \rightarrow M'$ una aplicación diferenciable. Dado un punto $m \in M$, se llama *aplicación tangente en el punto m* y se denota por $\phi_{*,m}$ a la aplicación

$$\phi_{*,m} : T_m M \rightarrow T_{\phi(m)} M'$$

que actúa sobre los elementos de $T_m M$ de la siguiente forma

$$\phi_{*,m}(\Lambda)(g) = \Lambda(g \circ \phi).$$

Pese a que la función $\phi_{*,m}$ dependa del punto evitaremos denotarlo explícitamente por comodidad cuando no conlleve confusión y pasará a denotarse simplemente por ϕ_* .

La aplicación anterior es lineal y admite por lo tanto una expresión local en forma de matriz en términos de los operadores $\frac{\partial}{\partial x^i}$ que se da a continuación.

Con la notación precedente dada en la ecuación (1), sea (y, V) con $y = (y^1, \dots, y^{n'})$ un abierto coordenado que contiene a $\phi(m)$ y sea (x, U) un abierto coordenado de M que contiene a m , con $U \subset \phi^{-1}(V)$ y $x = (x^1, \dots, x^n)$. Por el Teorema 2.1, tenemos que $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_m, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_m \right\}$ es una base de $T_m M$ y $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y^1} \right)_{\phi(m)}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y^{n'}} \right)_{\phi(m)} \right\}$ es una base de $T_{\phi(m)} M$. Queremos calcular la matriz de ϕ_* en estas bases. Para ello tenemos que escribir $\phi_* \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_m \right)$ en términos de la base de $T_{\phi(m)} M$, es decir, si escribimos

$$\phi_* \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_m \right) = \sum_{j=1}^{n'} \lambda_j \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_{\phi(m)}$$

tenemos que

$$\lambda_j = \phi_* \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_m \right) (y^j) = \frac{\partial}{\partial x^i} (y^j \circ \phi)$$

luego, si denotamos $\phi_i = y^i \circ \phi$, la matriz de la aplicación lineal tangente ϕ_* en las bases anteriormente mencionadas es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x^1}(m) & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x^n}(m) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_{n'}}{\partial x^1}(m) & \cdots & \frac{\partial \phi_{n'}}{\partial x^n}(m) \end{pmatrix}$$

Es importante notar, que se tiene la siguiente relación:

$$\begin{array}{ccc} U \subset M & \xrightarrow{\phi} & V \\ \downarrow x & & \downarrow y \\ x(U) \subset \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\Phi} & y(V) \subset \mathbb{R}^{n'} \end{array}$$

Donde $\Phi = y \circ \phi \circ x^{-1}$ y por tanto $\frac{\partial}{\partial x^i}(\phi_j) = \frac{\partial}{\partial x^i}(y^j \circ \phi) = \frac{\partial}{\partial x^i}(y^j \circ \phi \circ x^{-1}) = \frac{\partial}{\partial x^i}\Phi_j$ donde $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_{n'})$ y todo está bien definido.

Definición 2.8. Llamaremos *rango de una aplicación diferenciable* al rango de su aplicación tangente vista como aplicación lineal.

Pasamos ahora a estudiar que entendemos por variedad orientable, para ello, primeramente daremos la siguiente definición

Definición 2.9. Una *orientación* en un espacio vectorial es una clase de equivalencia de bases ordenadas. Dos bases B y B' pertenecerán a la misma clase de equivalencia si el determinante de la matriz $M_{BB'}$ de cambio de base verifica $\det(M_{BB'}) > 0$. Con esta definición hay dos orientaciones posibles. La *orientación canónica* es la que da signo positivo a la base canónica de vectores $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$.

Apoyándonos en la anterior definición, estudiaremos la orientación de nuestras variedades diferenciables.

Definición 2.10. Sea M una variedad diferenciable. Una orientación de M en el punto m es una orientación del espacio vectorial $T_m M$. Diremos que la variedad admite una orientación en un abierto $U \subset M$ si todos los puntos de U presentan la misma orientación. Diremos que la variedad M es *orientable* si admite una orientación global, en particular se tendrá que dados dos abiertos coordenados (x, U) e (y, V) el determinante $\det(x_* \circ y_*^{-1})$ es positivo.

2.3 Inmersiones y submersiones

Enunciaremos y discutiremos a continuación un teorema clásico probado por Whitney que resulta ser el punto de partida para la definición de variedad en el caso de muchos autores. No se dará aquí la demostración pero se puede seguir en [1].

Teorema 2.2. Cualquier variedad diferenciable Hausdorff y que verifica el segundo axioma de numerabilidad² de dimensión n puede ser embebida regularmente en $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Este resultado fue posteriormente mejorado sustituyendo $\mathbb{R}^{2n+1}$ por $\mathbb{R}^{2n}$. Además se sabe que no puede ser mejorado ya que existen ejemplos en los que no existe embebimiento regular en $\mathbb{R}^{2n-1}$ (ver ejemplo 2.2). Para entender lo que dice el teorema daremos las siguientes definiciones.

Definición 2.11. Dadas dos variedades diferenciables M y M' , llamaremos *inmersión* a toda aplicación diferenciable $\Psi : M \rightarrow M'$ cuyo rango es igual a la dimensión de M en todo punto de su dominio. Es decir, si la aplicación tangente $\Psi_* : T_m M \rightarrow T_{\Psi(m)} M'$ es inyectiva para todo $m \in M$. Además, si Ψ es inyectiva se llamará *embebimiento*.

Definición 2.12. Con la notación precedente se dice que Ψ es *submersión* si $\Psi_* : T_m M \rightarrow T_{\Psi(m)} M'$ es suprayectiva para todo $m \in M$ o equivalentemente que el rango de Ψ sea igual a la dimensión de M' para todo punto de su dominio.

Definición 2.13. Sean M y M' dos variedades diferenciables con $M' \subset M$ si la topología de M' inducida por su estructura C^∞ coincide con la topología como subconjunto de M diremos que M' es una *subvariedad regular* de M .

Definición 2.14. Juntando las anteriores definiciones, tenemos que $f : M \rightarrow M'$ es un *embebimiento regular* si f es un embebimiento y $f(M)$ es una subvariedad regular de M' .

A partir del Teorema 2.2 se puede probar que toda variedad Hausdorff compacta puede ser localmente vista como subconjunto de $\mathbb{R}^n$ para un n suficientemente grande. A continuación veremos un ejemplo de embebimiento de una variedad diferenciable.

Ejemplo 2.2. El plano proyectivo real $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ admite un atlas C^∞ dado por tres cartas $(x_1, U_1), (x_2, U_2), (x_3, U_3)$. Donde los U_i se definen como $U_i = \{[z_1, z_2, z_3] : z_i \neq 0\}$ y las imágenes de las cartas como $x_1([z_1, z_2, z_3]) = (\frac{z_2}{z_1}, \frac{z_3}{z_1}) \in \mathbb{R}^2$ y de forma análoga para x_2 y x_3 .

Se puede definir un embebimiento $g : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$ dado por:

$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) &\longmapsto \mathbb{R}^4 \\ [z_1, z_2, z_3] &\longmapsto \left(\frac{z_1^2}{|z|^2}, \frac{2z_1 z_2}{|z|^2}, \frac{2z_1 z_3 + z_2^2}{|z|^2}, \frac{2z_2 z_3}{|z|^2} \right) \end{aligned}$$

²Recordamos que un espacio topológico se dice que verifica el segundo axioma de numerabilidad si su topología posee alguna base de abiertos numerable.

donde $|z|^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$. La aplicación g está bien definida ya que al estar dada por cocientes de polinomios homogéneos de grado dos la imagen de dos vectores proporcionales es la misma $g([\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda z_3]) = g([z_1, z_2, z_3])$. Y por tanto la imagen no depende del representante escogido. Además $|z| \neq 0$ ya que $[0, 0, 0]$ no es punto proyectivo. Probemos ahora que la aplicación g es inyectiva, para ello sean $z = [z_1, z_2, z_3]$ y $w = [w_1, w_2, w_3]$ y supongamos que $g(z) = g(w)$. Como son vectores de $\mathbb{R}^4$ igualando componentes obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{z_1^2}{|z|^2} &= \frac{w_1^2}{|w|^2} \rightarrow w_1 = \pm z_1 \cdot \frac{|w|}{|z|} \\ \frac{2z_1 z_2}{|z|^2} &= \frac{2w_1 w_2}{|w|^2} \xrightarrow{w_1 = \pm z_1 \cdot \frac{|w|}{|z|}} w_2 = \pm z_2 \cdot \frac{|w|}{|z|} \\ \frac{2z_1 z_3 + z_2^2}{|z|^2} &= \frac{2w_1 w_3 + w_2^2}{|w|^2} \xrightarrow{w_1 = \pm z_1 \cdot \frac{|w|}{|z|}, w_2 = \pm z_2 \cdot \frac{|w|}{|z|}} w_3 = \pm z_3 \cdot \frac{|w|}{|z|} \end{aligned} \quad (2)$$

y por tanto obtenemos que $g(z) = g(w)$ implica $z_i = \pm \frac{|z|}{|w|} w_i$ luego $[z_1, z_2, z_3] = [\pm \lambda w_1, \pm \lambda w_2, \pm \lambda w_3]$ y z, w son el mismo punto proyectivo.

Por último, para probar que es embebimiento, debemos ver que el rango de g es dos en todos los puntos. Para ello debemos estudiar la expresión local dada por las cartas y estudiar las funciones $g \circ x_i^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$. Lo haremos en detalle para la carta x_1 .

Primeramente veamos como actúa x_1^{-1}

$$\begin{aligned} x_1^{-1} : \quad \mathbb{R}^2 &\longmapsto \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \\ (x, y) &\longmapsto [1, x, y] \end{aligned}$$

por tanto se tiene que $g \circ x_1^{-1} = (\frac{1}{1+x^2+y^2}, \frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y+x^2}{1+x^2+y^2}, \frac{2xy}{1+x^2+y^2})$ cuya matriz g_* toma la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \frac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2} & \frac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2} \\ \frac{-4x^2}{(1+x^2+y^2)^2} + \frac{2}{1+x^2+y^2} & \frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2} \\ \frac{-2x(2y+x^2)}{(1+x^2+y^2)^2} + \frac{2x}{1+x^2+y^2} & \frac{-2y(2y+x^2)}{(1+x^2+y^2)^2} + \frac{2}{1+x^2+y^2} \\ \frac{-4x^2 y}{(1+x^2+y^2)^2} + \frac{2y}{1+x^2+y^2} & \frac{-4xy^2}{(1+x^2+y^2)^2} + \frac{2x}{1+x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Nuestro trabajo ahora es encontrar para todo punto del dominio de U_1 , es decir para todo valor de x e y un menor de tamaño dos no nulo.

El primer menor dos por dos nos da el siguiente determinante $d_1 = \frac{4y}{(1+x^2+y^2)^3}$ el cual es no

nulo para todos los puntos con $y \neq 0$ si realizamos la restricción $y = 0$ la matriz resultante es

$$\begin{pmatrix} \frac{-2x}{(1+x^2)^2} & 0 \\ \frac{-4x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{2}{1+x^2} & 0 \\ \frac{-2x^3}{(1+x^2)^2} + \frac{2x}{1+x^2} & \frac{2}{1+x^2} \\ 0 & \frac{2x}{1+x^2} \end{pmatrix}$$

Realizando el último menor obtenemos un determinante $d_2 = \frac{-4x^4}{(1+x^2)^3} + \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}$ que es cero si y solo si $x = 0$. Por tanto, sólo nos queda encontrar un menor dos por dos distinto de cero en el caso $y = 0, x = 0$ pero este es trivial ya que la matriz toma la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto nuestra aplicación tiene rango dos en todos los puntos del dominio U_1 . Equivalentemente se comprueba para las demás cartas.

Como conclusión, la aplicación g es inmersión inyectiva y el plano proyectivo real se puede embeber en $\mathbb{R}^4$.

Sin embargo, se tiene que el plano proyectivo admite una inmersión en $\mathbb{R}^3$ con autointersecciones pero no se puede embeber en $\mathbb{R}^3$, esto es consecuencia de un resultado que dice que una variedad compacta no orientable de dimensión n no admite un embebimiento en $\mathbb{S}^{n+1}$ (ver [12], p.223). Por lo tanto, una superficie compacta y no orientable no puede embeberse en $\mathbb{S}^3$ y tampoco en $\mathbb{R}^3$ ya que podemos considerar $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{S}^3$ vía la proyección estereográfica.

2.4 Variedades con borde

Introducimos ahora la noción de variedad diferenciable con borde. Algunos ejemplos son un disco circular, un semiplano cerrado, o una bola n -dimensional cerrada. Las variedades con borde serán importantes en la Sección 5. Consideremos los conjuntos $H^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$ y el subespacio $\partial H^n = \{x \in H : x_n = 0\}$ con la topología de subespacio de $\mathbb{R}^n$. Recordando ahora la manera en la que hemos definido la diferenciabilidad para aplicaciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ observamos que la noción de homomorfismo se aplica también a conjuntos abiertos de H^n . De esta manera definiremos variedad diferenciable M con borde si cada punto $x \in M$ admite un entorno difeomorfo

a un subconjunto de H^n .

Definición 2.15. Una *variedad diferenciable con borde* es un espacio Hausdorff M que satisface el segundo axioma de numerabilidad y que cada abierto $U \subset M$ es difeomorfo a un abierto de H^n .

Definición 2.16. Sea (U, x) un abierto coordinando de M si $x(p) \in \partial H^n$ entonces $p \in \partial M$. El conjunto de puntos que satisfacen la anterior condición constituyen el *borde* de M .

La definición de orientación dada para variedades sin borde se extiende a variedades con borde. Si M es una variedad con borde dado por ∂M todos los espacios tangentes $T_m M$ poseen una orientación, independientemente de que m sea o no un punto del borde. Se tiene que M es orientable si y sólo si $M \setminus \partial M$ es orientable. La orientación de M en los puntos del borde viene determinada por los puntos de su entorno que pertenecen a $M \setminus \partial M$. Además, cuando M es una variedad orientable con borde, su borde se puede orientar como una variedad como sigue a continuación.

Si M es una variedad con borde de dimensión n , ∂M es una variedad de dimensión $n - 1$. Podemos considerar por lo tanto el espacio tangente a ∂M como un espacio vectorial de dimensión $n - 1$. Si $m \in \partial M$ y $\varphi : U \subset M \rightarrow H^n$ es una carta, podemos tomar $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ y la aplicación $\varphi_{*,m}$ determina un espacio lineal de dimensión n . Como $T_m \partial M$ es un subespacio de dimensión $n - 1$, podemos considerar un vector u tal que $u \in T_m M$ pero $u \notin T_m \partial M$. Diremos que el vector u *apunta hacia afuera* si $\varphi_{*,m}(u)$ es un vector de $\mathbb{R}^{n-1} \times \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$; en caso contrario, diremos que u *apunta hacia dentro*. Dado cualquier punto $m \in \partial M$ podemos tomar una base de $T_m M$ con la condición de que el vector que no esté en $T_m \partial M$ apunte hacia afuera. Esta elección determina una orientación en $T_m \partial M$.

El anterior resultado puede ser visto de forma más geométrica estudiando los gérmenes de curvas en los puntos m del borde de nuestra variedad como vemos a continuación (ver [19] p.90).

Como hasta ahora sea $m \in \partial M$, distinguiremos los siguientes casos:

1. Si tenemos una curva $\gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow M$ con $\gamma(0) = m \in \partial M$ y $\gamma'(0) = u \in T_m M \setminus T_m \partial M$, entonces decimos que u apunta hacia adentro.
2. Si en cambio, tenemos una curva $\gamma : (1 - \varepsilon, 1] \rightarrow M$ con $\gamma(1) = m \in \partial M$ y $\gamma'(1) = u \in T_m M \setminus T_m \partial M$, entonces decimos que u apunta hacia afuera.

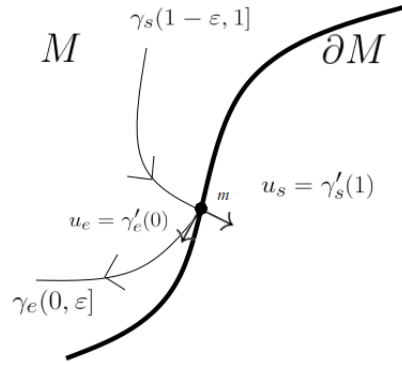


Figura 5: Orientación en el borde a partir de gérmenes de curvas definidos sobre un punto m del borde.

2.5 Puntos y valores críticos y regulares.

A continuación estudiaremos los puntos y valores regulares y críticos de una aplicación entre variedades. Para ello, sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable.

Definición 2.17. La contraimagen $f^{-1}(n)$ de un punto $n \in N$ se denomina *fibra* de n .

Un punto $m \in M$ es *regular* si $f_* : T_m M \rightarrow T_{f(m)} N$ es suprayectiva, o equivalentemente si el rango de f en el punto m denotado por $rg(f)_m$ coincide con $dim(N)$. Si m no es un punto regular se le llama *punto crítico*.

Un punto $n \in N$ se llama *valor regular* si su fibra sólo contiene puntos regulares, si no, se le llama *valor crítico*.

A partir de la definición se extraen algunas consecuencias obvias.

Observaciones 2.3. Se tiene que

1. Si la fibra de algún punto n es vacía, entonces dicho punto es un valor regular.
2. Si f es submersión, se tiene que todo punto de M es regular y todo punto de N es valor regular.
3. Si $dim(M) < dim(N)$, entonces no hay puntos regulares en M .

Proposición 2.3. El conjunto de los puntos críticos $C(M)$ es un cerrado.

Demostración. Si $\dim(M) < \dim(N)$ se tiene que $C(M) = M$ y es cerrado. Para probar el resultado en el caso $\dim(M) \geq \dim(N)$ veremos que el conjunto de puntos regulares es un abierto.

Sea $m \in M$ un punto regular y tomamos (x, U) y (y, V) entornos coordenados de m y $f(m)$ respectivamente. Entonces, si consideramos las bases de $T_m M$ y $T_{f(m)} M$ correspondientes a estos entornos coordenados como en el Teorema 2.1, la matriz de f_* viene dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1}(m) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x^n}(m) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{n'}}{\partial x^1}(m) & \cdots & \frac{\partial f_{n'}}{\partial x^n}(m) \end{pmatrix}$$

donde $f_i = y^i \circ f$.

Como f_* es suprayectiva, el rango de dicha matriz es n' ya que estamos en el caso $\dim(M) = n \geq n' = \dim(N)$, por lo que existe un menor de tamaño $n' \times n'$ de la matriz no nulo. Dado que $\frac{\partial f_i}{\partial x^j}$ son funciones continuas, existe un abierto W con $m \in W \subset M \setminus C(M)$. Por lo tanto el conjunto de puntos regulares es abierto y el conjunto de puntos críticos es cerrado. $\square$

Un importante resultado que satisfacen los valores regulares es el siguiente.

Proposición 2.4. Sea $a \in N$ un valor regular, entonces su fibra $f^{-1}(a)$ es una subvariedad regular de M de dimensión $\dim(M) - \dim(N)$.

La demostración puede seguirse en [14]. La idea de la demostración es la siguiente: Dada una aplicación $g : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n'} \times \mathbb{R}^{n-n'} \rightarrow \mathbb{R}^{n'}$ cuyo rango en un punto $p \in f^{-1}(a)$ es n' , por ser a valor regular podemos extenderla a un difeomorfismo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por $f(x_1, \dots, x_n) = (g(x), x_{n'+1}, \dots, x_n)$. Una vez tenemos dicho difeomorfismo estudiamos la aplicación g como una proyección y concluimos el resultado.

Se tiene un resultado análogo a la Proposición 2.4 para variedades con borde que también se enuncia a continuación (ver [19], Teorema 3.2 ó [14], p.13).

Proposición 2.5. Sean M y N variedades diferenciables con borde y $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Si $a \in N \setminus \partial N$ es un valor regular de f y de $f|_{\partial M}$, entonces se tiene:

1. $f^{-1}(a)$ es una variedad con borde dado por $f^{-1}(a) \cap \partial M$, cuya dimensión es $\dim(M) - \dim(N)$.
2. $T_m f^{-1}(a) = \text{Ker}(f_{*,m})$ para cada $m \in f^{-1}(a)$.

Veamos a continuación una colección de ejemplos para ilustrar las proposiciones anteriores.

Ejemplo 2.3.

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ que es una función diferenciable en todo $\mathbb{R}^3$. Veamos que el valor 1 es valor regular de la función f . La expresión de f_* toma la forma $(2x, 2y, 2z)$ la cual no es sobreyectiva en el punto $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ pero se tiene que $\mathbf{0} \notin f^{-1}(1)$. Por lo tanto se tiene en virtud de la Proposición 2.4 que $f^{-1}(1)$ es una variedad diferenciable de dimensión $3 - 1 = 2$ como efectivamente se tiene ya que $f^{-1}(1)$ es la esfera $\mathbb{S}^2$.
2. Sean M y N variedades diferenciables y consideremos cualquiera de las proyecciones $\pi_1 : M \times N \rightarrow M$ ó $\pi_2 : M \times N \rightarrow N$. En cualquiera de los dos casos la aplicación es submersión y por consiguiente todos los puntos de $M \times N$ son regulares y todos los valores son regulares. Todas las fibras son de dimensión $\dim(N)$ en el primer caso y $\dim(M)$ en el segundo.
3. Por último consideremos el disco $\mathbb{R}^2 \supset D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y la siguiente aplicación $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = y$. Tenemos que el 0 es un valor regular de f y su contraimagen $f^{-1}(0) = [-1, 1] \times \{0\}$ que es una variedad con borde de dimensión 1 cuyo borde son los puntos $\{(-1, 0), (1, 0)\}$.

Si tenemos una aplicación $f : M \rightarrow N$ donde todo punto de M es regular, la proposición 2.4 nos permite estudiar la variedad M a partir de la función f y la variedad N de menor dimensión a partir del estudio de las fibras $M = \bigcup_{q \in N} f^{-1}(q)$. Un ejemplo de

aplicación de este hecho se da en las funciones de Morse las cuales no se tratarán en este trabajo pero puede encontrarse en [13, 21, 7]. Se da a continuación una breve idea de la reconstrucción de la variedad M a partir de las fibras de los puntos críticos no degenerados. Brevemente, las funciones de Morse son funciones $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ donde todos sus puntos críticos son aislados y además, son no degenerados. Decimos que un *punto crítico es no degenerado* si el determinante de la matriz Hessiana de la aplicación en dicho punto es distinto de cero. Dado que la matriz Hessiana es una forma bilineal simétrica en cada punto $p \in M$, tiene asociada una forma cuadrática. Diagonalizando la anterior forma cuadrática obtenemos una representación con 1 y -1 en la diagonal. Diremos que el índice del punto crítico no degenerado p es el número de -1 que aparecen en dicha forma cuadrática.

Enunciaremos a continuación un Teorema que nos será útil ahora para el estudio de las fibras y más adelante en la Sección 5. Su demostración, puede seguirse en [8].

Teorema 2.3. (Clasificación de variedades compactas de dimensión 1). Toda variedad compacta conexa de dimensión uno con borde es difeomorfa a $[0, 1]$ o a $\mathbb{S}^1$.

Estudiemos ahora el siguiente ejemplo que ilustra, cómo se puede extraer mucha información acerca de la variedad sobre la que se define una aplicación con el estudio de las fibras de la misma.

Ejemplo 2.4. Sea $f : M \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse de una superficie compacta y conexa en la recta real. Nos disponemos a reconstruir la variedad M a partir de las fibras de los valores regulares y de los puntos críticos.

Si $p \in \mathbb{R}$ es un valor regular su fibra será una variedad compacta de dimensión 1, por lo tanto, en virtud del Teorema de clasificación de variedades compactas de dimensión uno (Teorema 2.3) será una familia finita de circunferencias. La topología de las fibras cambia al atravesar un punto crítico. Si $q \in M$ es un punto crítico entonces puede ser de índice 2, 1, 0 y estudiando su expresión local tendremos que $f^{-1}(f(q))$ es un punto, un par de rectas o un punto respectivamente ya que:

$$\begin{aligned}\text{índice 2: } & \{-(x^1)^2 - (x^2)^2 = 0\} \\ \text{índice 1: } & \{-(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0\} \\ \text{índice 0: } & \{+(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0\}\end{aligned}$$

Supongamos que f posee cuatro puntos críticos p, q, r, s con $f(p) > f(q) > f(r) > f(s)$ y con índices 2, 1, 1, 0 respectivamente.

Situando M verticalmente se tiene:

1. Por encima de $z = f(p)$ no tenemos puntos de la superficie.
2. Entre $f(p)$ y $f(q)$ todos los valores son regulares y se tiene que su fibra es una circunferencia. Además el punto q es crítico de índice 1 luego localmente tenemos un par de rectas. Como todas las fibras son compactas tenemos en realidad una lemniscata.
3. Entre $f(q)$ y $f(r)$ todos los valores son regulares y se tiene que su fibra son dos circunferencias. Además el punto r es crítico de índice 1 luego localmente tenemos un par de rectas. Como todas las fibras son compactas tenemos en realidad una lemniscata.
4. Entre $f(r)$ y $f(s)$ todos los puntos son regulares y se tiene de nuevo que su fibra es una circunferencia.
5. Finalmente por debajo de $z = f(s)$ no tenemos puntos de la superficie.

Si con el estudio de las fibras hemos obtenido los anteriores resultados podemos recomponer nuestra variedad M y obtener que es un toro.

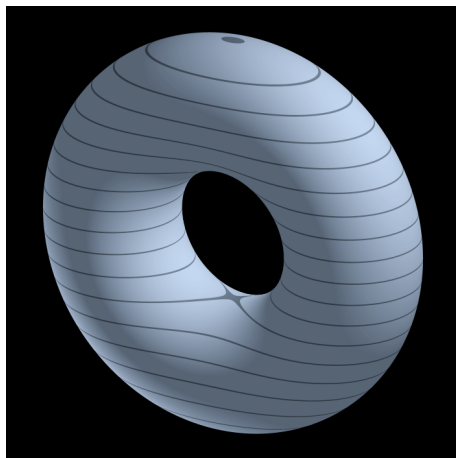


Figura 6: Fibras del toro. Se pueden observar todas las condiciones descritas anteriormente. Figura obtenida de https://es.wikipedia.org/wiki/Teoría_de_Morse

Por último enunciaremos el siguiente teorema, que nos habla sobre el número de puntos críticos que tiene una aplicación diferenciable. La prueba de este resultado puede encontrarse en [14].

Teorema 2.4. (Teorema de Sard). Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable de clase $r \geq 1$ con $r > \dim(M) - \dim(N)$. Entonces el conjunto de valores regulares de f es denso en N .

3 Campos vectoriales

En esta sección introduciremos el objeto de estudio de este trabajo, los campos vectoriales tangentes, que por comodidad nos referiremos a ellos simplemente por campos vectoriales. Primero daremos la definición global y seguidamente veremos una versión local más simple que será suficiente para los requerimientos de este trabajo.

Para ello veamos las siguientes definiciones:

Definición 3.1. Se define el *fibrado tangente de una variedad* M como la unión disjunta de todos los espacios tangentes en cada punto de la variedad y se denota por $TM =$

$$\bigsqcup_{m \in M} T_m M = \bigcup_{m \in M} \{m\} \times T_m M$$

El fibrado tangente TM admite una proyección

$$\pi : TM \rightarrow M$$

definida por $\pi(v) = m$ si y sólo si $v \in T_m M$.

Es posible dotar a TM de estructura de variedad diferenciable C^∞ del siguiente modo

Definición 3.2. Sea (x, U) una carta de M con $m \in U$. Dado un par $(m, v_m) \in \pi^{-1}(U)$, el vector v_m se expresa de manera única como $v_m = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_m$ donde $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Por tanto tenemos la siguiente aplicación inyectiva

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(U) \subset TM &\longmapsto \mathbb{R}^{2n} \\ (m, v_m) &\longmapsto (x(m), a) \end{aligned}$$

A esta aplicación se le llama carta estándar de TM asociada a la carta x de M .

Proposición 3.1. Las cartas estándar de TM definen una estructura de variedad diferenciable de dimensión $2n$.

Corolario 3.1. La aplicación π es por ende una submersión.

Nos encontramos ahora en condiciones de definir lo que entendemos por campo vectorial sobre una variedad M .

Definición 3.3. Un *campo vectorial* v sobre una variedad M es una aplicación diferenciable que a cada punto $m \in M$ le hace corresponder un vector $v(m) \in T_m M$. Es decir es una aplicación diferenciable $v : M \rightarrow TM$ tal que:

$$\pi \circ v = Id_M.$$

Sin embargo, localmente para un $m \in M$ con entorno coordenado (x, U) , el espacio tangente $T_m M$ admite una base $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_m, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_m \right\}$ y por tanto el valor que toma el campo vectorial en m se podrá escribir de manera única como

$$v(m) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(m) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_m$$

donde $\alpha_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones bien definidas a las que exigiremos ser diferenciables.

Por tanto podemos entender localmente los campos de vectores como aplicaciones $v : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ e incluso componiendo con la carta $v \circ x^{-1} : x(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Definición 3.4. Diremos que un campo vectorial v presenta una *singularidad* en un punto $m \in M$ si $v(m) = 0$. Además diremos que es una *singularidad aislada* si existe un entorno de m en el que no haya más singularidades.

Ejemplo 3.1. Existen también campos de vectores sin singularidades aisladas como el que se muestra a continuación $w : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por:

$$w = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xz \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z},$$

donde se ha tomado la notación $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ por ser la habitual en $\mathbb{R}^3$. El cual se anula en todos los puntos del eje z . El estudio de estos campos no será objeto del presente trabajo aunque existan teorías que generalizan algunas de las nociones que se darán a continuación.

3.1 Índice de un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^2$

En esta sección estudiaremos el índice de singularidades aisladas para campos vectoriales definidos sobre $\mathbb{R}^2$, daremos dos aproximaciones diferentes pero equivalentes y trataremos algunos ejemplos.

Se supondrán algunos conceptos básicos de teoría de homotopía general (ver por ejemplo [10]). Algunos conceptos se definirán a continuación para fijar notación.

Definición 3.5. Sea $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ una aplicación continua. La aplicación h induce un homomorfismo de grupos fundamentales $h_* : \pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1)$. Llamaremos *grado topológico* de h a $h_*(1_\pi)$ y lo denotaremos por $gra(h)$. Donde 1_π denota el lazo que da una vuelta en sentido anti horario y es el generador del grupo fundamental de la circunferencia $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \langle 1_\pi \rangle \cong \mathbb{Z}$.

Intuitivamente el grado topológico de f medirá cuantas vueltas da a la circunferencia la función $f \circ \sigma$ donde $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ está dado por $\sigma(t) = e^{2\pi it}$ y cuya clase de equivalencia con la relación de homotopía es $[\sigma] = 1_\pi$.

Sea M una superficie y $m \in M$ una singularidad aislada de un campo de vectores v . Tomamos (x, U) un entorno coordenado con $m \in U$ y consideramos la aplicación $w = v \circ x^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Dado que $x(m)$ es una singularidad aislada de w podemos considerar una bola centrada en $x(m)$ y radio ε tal que no contiene más singularidades. Llamemos f a la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} f : \partial B(x(m), \varepsilon) &\longmapsto \mathbb{S}^1 \\ a &\longmapsto \frac{w(a)}{\|w(a)\|} \end{aligned}$$

Es importante notar que para que la aplicación f está bien definida $\partial B(x(m), \varepsilon)$ no debe contener ninguna singularidad, lo cual no es un problema ya que siempre podríamos tomar $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2}$ y por lo tanto la aplicación $w : \partial B(x(m), \tilde{\varepsilon}) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ no se anula. Con esta notación definiremos el índice de la singularidad como:

Definición 3.6. Llamaremos *índice* de la singularidad al grado topológico de la anterior aplicación f y lo denotaremos por $I(v, m) = I(w, x(m))$.

La definición anterior no depende del radio ε escogido siempre y cuando la bola $B(x(m), \varepsilon)$ no contenga más singularidades.

Definición 3.7. Si tenemos un campo de vectores con un número finito de singularidades aisladas, llamaremos *índice del campo vectorial* a la suma de los índices de todas sus singularidades y lo denotaremos por $I(v)$.

A continuación en la figura 7 veremos algunos ejemplos que ayudan a entender las definiciones anteriores.

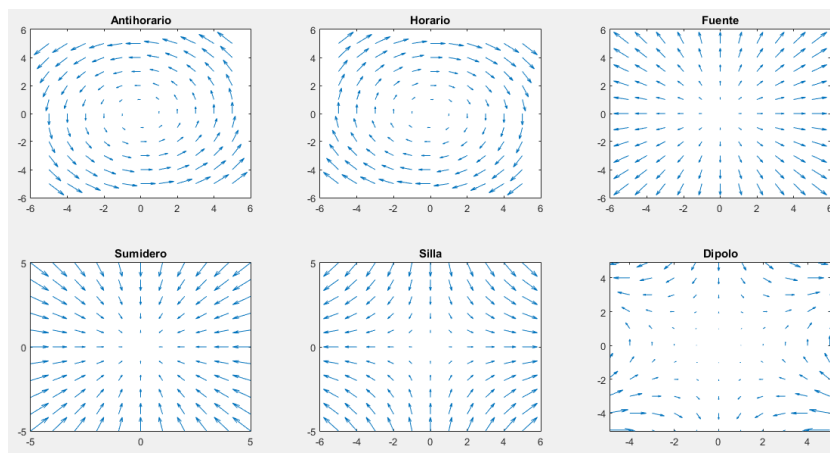


Figura 7: Diferentes posibles campos vectoriales sobre $\mathbb{R}^2$.

Los anteriores ejemplos de campos vectoriales presentan una única singularidad en el origen $(0, 0)$. En la siguiente tabla se recogen los valores de los índices de dichas singularidades.

Campo vectorial	Índice
Anti horario	+1
Horario	+1
Fuente	+1
Sumidero	+1
Silla	-1
Dipolo	+2

Cuadro 1: Índice de los campos vectoriales que aparecen en la Figura 7.

Observación 3.1. Parecería que la definición anterior sólo es aplicable para dimensión dos, sin embargo, los grupos de homología que se encuentran definidos en la Sección 4 permiten extender esta definición a dimensiones mayores ya que se tiene que $H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$. De esta forma es posible extender tanto la noción de índice de un campo vectorial cómo la de grado topológico de una aplicación.

A continuación veremos otra forma de definir el índice de un campo vectorial utilizando herramientas de la geometría diferencial. Como veremos más adelante ambas definiciones serán equivalentes.

Sean M y N dos variedades diferenciables orientadas sin borde de dimensión n y sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Supongamos que M es compacta y N conexa, entonces podemos definir el *grado de Brower de f* de la forma siguiente: Sea, $p \in M$ un punto regular de f , por lo tanto $f_{*,p} : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es un isomorfismo lineal entre espacios vectoriales orientados. Definimos el signo de $f_{*,p}$ como

$$\text{sign}(f_{*,p}) = \begin{cases} +1 & \text{si } f_{*,p} \text{ conserva la orientación} \\ -1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es decir, el $\text{sign}(f_{*,p})$ será $+1$ ó -1 dependiendo de si el $\det(f_{*,p})$ es positivo o negativo. Para cualquier valor regular $y \in N$ definimos el grado de Brower

$$\deg(f, y) = \sum_{p \in f^{-1}(y)} \text{sign}(f_{*,p}).$$

Dado que M es compacta la suma anterior es finita y como $\deg(f, y)$ es un número entero y N es conexa, entonces $\deg(f, y)$ es una función localmente constante como función de y . Además el valor de $\deg(f, y)$ no depende del valor regular escogido (ver [14], p.28-29) lo cual permite definir $\deg(f) = \deg(f, y)$ sea cual sea el valor regular $y \in N$.

Estudiemos en detalle el siguiente caso. Dado un punto $m \in M$, consideramos un entorno

coordenado (x, U) y sea $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial. Por tanto para todo punto $p \in U$, podemos escribir $v(p)$ en términos de la base de $T_p M$ de manera única como sigue

$$v(p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$$

Consideramos ahora la aplicación tangente v_* , y denotemos por $\det(v_*)$ el determinante de la matriz de la aplicación tangente en las bases anteriormente mencionadas. Es importante notar que, dado que nuestro campo vectorial es tangente, la aplicación $v_* : T_p U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y por tanto la matriz de v_* tiene tamaño $n \times n$ y su determinante está bien definido.

Aplicando las consideraciones anteriores sobre el grado de Brower a dicha aplicación obtenemos la siguiente

Definición 3.8. Supongamos que el campo v presenta una singularidad en p . Diremos que el cero es *no degenerado* si $\det(v_{*,p})$ es distinto de cero. Si estamos en este caso, definiremos el *índice* de v en p en función del signo del determinante de la aplicación v_* en el punto p y se denotará por $\text{ind}(v, p) = \text{sign}(\det(v_{*,p}))$. Así, si el signo de dicho determinante es positivo, el valor del índice será $+1$, si por el contrario el signo del determinante es negativo el valor que tome el índice será -1 .

Si q es un valor regular de v , se tiene que el *grado de Brower* de v en q es

$$\deg(v, q) = \sum_{p \in v^{-1}(q)} \text{ind}(v, p)$$

Como se ha dicho anteriormente puede probarse que esta expresión no depende del valor regular q escogido y por tanto $\deg(v) = \deg(v, q)$ no se realizará la demostración pero puede seguirse en (p.99 de [19]).

Calcularemos de nuevo con esta definición los índices de los campos recogidos en la figura 7 y veremos que ambas definiciones coinciden.

Nombre	Campo v	Matriz v_*	índice
Anti horario	$-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	+1
Horario	$y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	+1
Fuente	$x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	+1
Sumidero	$-x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	+1
Silla	$x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	-1
Dipolo	$-2xy \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial y}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	+2

Cuadro 2: Índice de los campos vectoriales que aparecen en la Figura 7. De nuevo se usa la notación $(x^1, x^2) = (x, y)$, como es habitual en $\mathbb{R}^2$.

En el caso del dipolo se tiene un cero degenerado y para calcular su índice la anterior definición no nos es útil. Veamos el siguiente resultado que nos permite solventar este problema y generalizar el procedimiento anterior al caso degenerado.

Teorema 3.1. Sea $v : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial tangente sobre una variedad compacta M . Sea U un abierto donde v tiene una única singularidad degenerada en un punto p . Entonces existe un entorno abierto V del punto p y un campo vectorial tangente w tal que tiene una cantidad finita de singularidades todas no degeneradas.

Demostración. La cuestión es local así que por comodidad en la notación tomaremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $p \in \Omega$. Consideraremos $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el campo de vectores tal que $v(p) = 0$ es una singularidad degenerada. Consideramos también que el punto p se ha trasladado al origen.

Dado que p es una singularidad aislada existe U entorno de p con $\bar{U} \subset \Omega$ y que no contiene más singularidades. Nos disponemos a crear un campo w que coincida con v fuera de U y tenga un número finito de singularidades no degeneradas en U .

Sea a un valor regular de v con $\|a\| < \|v(x)\|$ para $\varepsilon \leq \|x\| \leq 2\varepsilon$ con ε suficientemente pequeño como para que $B(0, 2\varepsilon) \subset \bar{U}$ (la existencia de este valor la garantiza el Teorema 2.4).

Tomamos una función diferenciable $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|x\| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq 2\varepsilon \end{cases}$ que existe debido a la proposición 2.2.

Consideramos $w = v - a \cdot \theta$. Veamos que cumple todo lo que queremos.

Claramente $v = w$ fuera de U .

Si $\varepsilon \leq \|x\| \leq 2\varepsilon$ el campo w no tiene ceros ya que $\|w\| = \|v - a\theta\| \geq \|v\| - \|a\theta\| > 0$.

Por último en $B(0, \varepsilon)$ el campo w se anula en los puntos de la fibra $v^{-1}(a)$ y por tanto w presenta un número finito de singularidades y todas no degeneradas. $\square$

A continuación se presenta un resultado cuya demostración se puede seguir en [19] que nos relaciona los grados de los dos campos tratados en el Teorema 3.1.

Proposición 3.2. Los dos campos vectoriales v y w correspondientes al Teorema 3.1 poseen el mismo grado.

La demostración se dará más adelante pero primero veamos que las dos definiciones dadas para el índice coinciden, para ello utilizaremos el número de enlace o “winding number” proveniente del análisis complejo.

Definición 3.9. Sea $\sigma : I = [0, 1] \mapsto \mathbb{C}$ un camino cerrado diferenciable. Sea $a \notin \text{Im}(\sigma)$ se define el *número de enlace* $n(\sigma, a)$ como

$$n(\sigma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{dz}{z - a}.$$

La anterior definición se puede extender a una curva diferenciable a trozos sin más que dividir el dominio de integración, esto se obvia por comodidad de la notación. Por el mismo motivo se identificará $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ cuando se precise y se escribirá de forma equivalente $e^{i\theta} = (\cos \theta, \sin \theta)$.

Proposición 3.3. Las nociones de número de enlace y grado topológico de la aplicación $g_{\sigma}(s) = \frac{\sigma(s) - a}{\|\sigma(s) - a\|}$ dadas anteriormente coinciden.

Demostración. Consideramos la función $g_{\sigma}(e^{i2\pi s}) = \frac{\sigma(s) - a}{\|\sigma(s) - a\|}$. Notar, que al ser $\sigma(s)$ un camino cerrado se tiene la identificación $\sigma(0) = \sigma(1)$ lo cual permite entender $g_{\sigma}(e^{i2\pi s})$ como una aplicación $g_{\sigma}(e^{i2\pi s}) : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$. Sea $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ el recubrimiento universal de $\mathbb{S}^1$ y sean $\tilde{g}_{\sigma} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ un levantamiento de g_{σ} y $\theta(s) = 2\pi\tilde{g}_{\sigma}(e^{i2\pi s})$. Con la anterior notación $\sigma(s) - a = \|\sigma(s) - a\|e^{i\theta(s)} = r(s)e^{i\theta(s)}$.

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \frac{dz}{z - a} &= \int_0^1 \frac{r'(s)e^{i\theta(s)} + ir(s)\theta'(s)e^{i\theta(s)}}{r(s)e^{i\theta(s)}} ds = \log(r(s)) + i\theta(s) \Big|_0^1 \\ &= \log r(1) - \log r(0) + i(\theta(1) - \theta(0)) = i2\pi(\tilde{g}_{\sigma}(1) - \tilde{g}_{\sigma}(0)) = i2\pi \text{ gra}(g_{\sigma}) \end{aligned}$$

Y por lo tanto como queríamos demostrar $\text{gra}(g_{\sigma}) = n(\sigma, a)$ $\square$

Proposición 3.4. La noción de índice y el grado de Brower coinciden.

Demostración. Gracias a resultados generales conocidos de topología algebraica, sabemos que dos aplicaciones $f, g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ son homótopas si y sólo si tienen el mismo grado. Por lo tanto bastará probar que la aplicación $f_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $f_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$ con $n \in \mathbb{Z}$, que como comprobaremos a continuación tiene índice n también posee dicho grado de Brower.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ine^{in\theta}}{e^{in\theta}} d\theta = n$$

Por lo tanto, solo tenemos que probar que el grado de Brower de f_n es también n . Dividimos la prueba en dos casos

1. Si $n \neq 0$.

Todos los puntos de $\mathbb{S}^1$ son valores regulares. Para comprobarlo escribimos f_n en su expresión local. Tomamos por ejemplo la carta (U, x) en $\mathbb{S}^1$ dada por $U = \mathbb{S}^1 \setminus \{(1, 0)\}$, y la aplicación $x(U) = (0, 2\pi)$ dada por $x(\cos \theta, \sin \theta) = \theta$. Luego la expresión local de f_n en dicha carta es

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{f_n} & \mathbb{S}^1 \\ \uparrow x^{-1} & & \downarrow x \\ (0, 2\pi) & & (0, 2\pi) \end{array}$$

$$x \circ f_n \circ x^{-1} = n\theta$$

Por lo tanto tenemos que la matriz de f_* es (n) . Ya que $n \neq 0$ la matriz de f_* tiene rango uno en todos sus puntos.

Dado que la fibra $f_n^{-1}(p)$ tiene $|n|$ puntos todos con índice $+1$ si $n > 0$ y con índice -1 si $n < 0$ tenemos que:

$$\deg(f, p) = \pm |n|.$$

Por último faltaría comprobarlo para el punto $(1, 0)$, sin embargo el resultado es análogo tomando la carta (U', x') con $U' = \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1, 0)\}$ y $x'(U') = (-\pi, \pi)$.

2. Si $n = 0$.

Entonces tenemos que f_0 es una aplicación constante y todos los puntos salvo el $(1, 0)$ son valores regulares. Además se tiene $f_0^{-1}(p) = \emptyset$ siempre que $p \neq (1, 0)$ y por tanto su grado de Brower es 0.

□

Corolario 3.2. Las definiciones vistas de índice coinciden entre sí. Por tanto, si v es un campo de vectores, entonces $I(v) = \deg(v)$.

Ahora estamos en condiciones de demostrar la Proposición 3.2

Demostración proposición 3.2. Para probar este resultado utilizaremos la igualdad entre las nociones de grado de Brower y grado topológico que acabamos de demostrar.

Con la notación del Teorema 3.1, el entorno U se puede tomar una bola abierta de tal manera que $S = \bar{U} \setminus U$ sea una esfera de dimensión adecuada. Tenemos que probar:

$$\sum_{z^*} \text{ind}(w, z^*) = \text{gra} \left(\frac{v}{\|v\|} \right)_S,$$

donde la suma se extiende a los ceros no degenerados de w dentro del entorno U . Utilizando la definición de índice para ceros no degenerados y la equivalencia con el grado topológico tenemos:

$$\sum_{z^*} \text{ind}(w, z^*) = \sum_{z^*} \text{sign}(\det(w_{*, z^*})) = \text{gra} \left(\frac{w}{\|w\|} \right)_S$$

Donde la última igualdad se tiene gracias a una propiedad bien conocida de topología algebraica ya que se tiene una situación como la que se muestra en la siguiente figura.

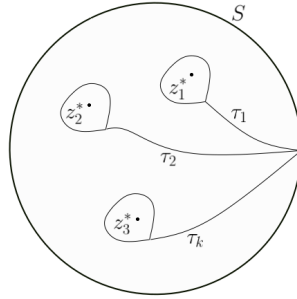


Figura 8: Número finito de singularidades $\{z_1^*, \dots, z_k^*\}$ en las que dividimos la singularidad degenerada original. El camino τ_S que recorre S es homótopo a $\tau_1 * \dots * \tau_k$ donde $*$ denota la concatenación.

Así, como el camino τ_S y el camino $\tau_1 * \dots * \tau_k$ son homótopos se tiene

$$\sum_{z^*} \text{sign}(\det(w_{*,z^*})) = \sum_{i=1}^k \text{gra} \left(\frac{w}{\|w\|} \right)_{\tau_i} = \text{gra} \left(\frac{w}{\|w\|} \right)_S.$$

Por último, debido a la construcción dada en el Teorema anterior los campos v y w coinciden fuera de U , en particular en su frontera por lo tanto se tiene la igualdad deseada. $\square$

4 Triangulaciones y característica de Euler.

En esta sección trataremos de introducir las ideas de triangulación para superficies y subdivisión baricéntrica, así como definir el invariante topológico que ayuda a caracterizarlas, la característica de Euler.

Para poder hablar de triangulación necesitaremos que nuestras superficies sean compactas y Hausdorff, a partir de ahora salvo que se indique lo contrario toda superficie será de este tipo.

El concepto de triangulación de una superficie no es otra cosa que recubrir nuestra superficie S con triángulos $\{T_i\}_{i=1}^n$ de tal manera que satisfagan las siguientes propiedades:

1. $S = \bigcup_{i=1}^n T_i$
2. La intersección de dos triángulos distintos puede ser una arista, un vértice o vacía.

Formalmente, una triangulación es un homeomorfismo entre nuestro espacio topológico X y el espacio subyacente $|K|$ de un complejo simplicial geométrico K . Para introducir los mencionados conceptos incluimos ahora una breve introducción a los conceptos clave de la homología simplicial [10, 18].

Definición 4.1. Dado un conjunto de puntos $\{a_0, \dots, a_n\}$ de $\mathbb{R}^N$ con $N > n$ afínmente independientes, se define *n-símplice geométrico* como la envolvente convexa del conjunto de $n+1$ puntos. Más precisamente, es el conjunto

$$\langle a_0, \dots, a_n \rangle = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : x = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

Diremos que n es la dimensión del símple y los puntos $a_0, \dots, a_n$ se llaman vértices.

En particular un 0-símplice será un punto, un 1-símplice un segmento, un 2-símplice un triángulo (relleno) y un 3-símplice un tetraedro sólido (ver Figura 9.).

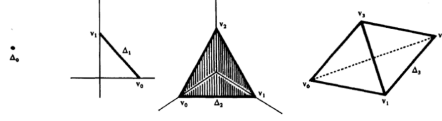


Figura 9: Ejemplos de n -símplices para $n = 0, 1, 2, 3$. Figura obtenida de [9].

Definición 4.2. Dado un n -símplice σ de vértices $a_0, \dots, a_n$, llamamos *cara* de σ a cualquier símplice generado por un subconjunto no vacío de $\{a_0, \dots, a_n\}$.

Definición 4.3. Un *complejo simplicial geométrico* es un conjunto finito K de símplices geométricos que satisfacen las siguientes propiedades:

1. Si $\sigma \in K$, entonces toda cara de σ está en K .
2. La intersección de dos símplices de K o es vacía o es una cara de ambos.

La dimensión de K es la mayor de las dimensiones de cualquier símplice que pertenezca a K .

Definición 4.4. Dado un complejo simplicial K , llamamos *espacio subyacente* y se denota por $|K|$ al espacio topológico

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$$

con la topología del subespacio heredada de $\mathbb{R}^N$.

Observación 4.1. Se tiene que

1. Un símplice con todas sus caras forma un complejo simplicial.
2. Un n -símplice tiene $\binom{n+1}{i+1}$ caras de dimensión i con $i = 0, \dots, n$.

Definición 4.5. Una *triangulación* de un espacio topológico X es un homeomorfismo entre X y un espacio subyacente $|K|$ de un complejo simplicial geométrico.

Como mencionamos anteriormente las variedades no compactas no pueden ser triangulables. Esto queda patente ahora ya que al establecer un homomorfismo entre nuestra variedad y $|K|$ que es un espacio compacto esta propiedad se ha de mantener. Un resultado clásico y cuya demostración puede seguirse en [16] asegura que toda superficie compacta y sin borde admite una triangulación.

A continuación definiremos la característica de Euler de dos formas alternativas. Primero,

a partir del número de caras de cada dimensión del complejo simplicial geométrico asociado y seguidamente introduciremos la formulación de Poincaré a partir de los números de Betti.

Definición 4.6. Consideramos un complejo simplicial geométrico K de dimensión n . Para cada $i = 0, \dots, n$, sea α_i el número de símlices de dimensión i en K . Al número

$$\chi(K) = \alpha_0 - \alpha_1 + \dots + (-1)^n \alpha_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha_i$$

se le llama *característica de Euler* de K .

Ejemplo 4.1. Si K es el conjunto de caras de un n -símplice, entonces $\chi(K) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot \binom{n+1}{i+1} = 1$.

Por tanto, si Q es el complejo simplicial geométrico formado por las caras de dimensión $\leq n$ de un $(n+1)$ -símplice, se tiene que $\chi(Q) = 1 + (-1)^n$. De donde se deduce que la característica de Euler de la esfera $\mathbb{S}^n$ es cero si n es impar y dos si n es par.

En particular en el caso de $\mathbb{S}^1$ se tiene que es homeomorfo al borde de un triángulo y efectivamente se tiene que $\chi(\mathbb{S}^1) = v - a = 3 - 3 = 0$.

En el caso de $\mathbb{S}^2$ se tiene que es homeomorfo al borde del tetraedro obteniéndose que $\chi(\mathbb{S}^2) = v - a + c = 4 - 6 + 4 = 2$.

Definición 4.7. Todo símplex induce una *orientación* en el subespacio afín que genera. Dicha orientación está determinada por la base $\{\overrightarrow{a_0 a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0 a_n}\}$. Denotaremos el n -símplice orientado mediante $[a_0, \dots, a_n]$. Un n -símplice orientado induce una orientación en todas sus caras de dimensión $n-1$ de la siguiente forma.

Tomamos una orientación positiva del n -símplice de forma que los $n-1$ primeros vectores estén contenidos en la cara que estamos considerando y el último vector apunte hacia el interior del símplex. Los $n-1$ primeros vectores inducen una orientación en la cara que llamaremos *orientación inducida*.

Definición 4.8. Un *complejo simplicial orientado* es un complejo simplicial K en el que se ha escogido una orientación para cada símplex de K .

Pasamos ahora a definir la característica de Euler a partir de los números de Betti. Para ello primero definimos brevemente el operador borde ∂ y los grupos de homología.

Definición 4.9. Sea K un complejo simplicial orientado. Para cada $n \geq 0$, sea $C_n(K)$ el grupo abeliano formado por las combinaciones lineales del tipo

$$m_1 \sigma_1 + \dots + m_k \sigma_k$$

donde $m_i \in \mathbb{Z}$ y $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ son n -símplices de K . El grupo abeliano $C_n(K)$ se denomina *grupo de cadenas de dimensión n* de K .

Definición 4.10. Llamaremos *operador borde* al siguiente homomorfismo

$$\partial_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$$

que actúa de la forma siguiente

$$\partial_n[a_0, \dots, a_n] = \sum_{i=0}^n (-1)^i [a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n]$$

donde por $\hat{a}_i$ denotamos que eliminamos ese vértice del símplex.

Daremos a continuación una propiedad fundamental del operador borde que permite definir los grupos de homología, la prueba del resultado es simple y se puede seguir en [10].

Proposición 4.1. $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$

Definición 4.11. El núcleo de $\partial_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$ se llama *grupo de n -ciclos* y se denota $Z_n(K)$. La imagen de $\partial_{n+1} : C_{n+1}(K) \rightarrow C_n(K)$ se llama *grupo de n -bordes* y se denota $B_n(K)$.

Por la proposición 4.1 se tiene que $B_n(K) \subset Z_n(K)$ por tanto podemos definir

$$H_n(K) = \frac{Z_n(K)}{B_n(K)}.$$

Al grupo $H_n(K)$ se le llama *n -ésimo grupo homología* de K .

Definición 4.12. Se define *i -ésimo número de Betti* y se denota por β_i a la dimensión del i -ésimo grupo de homología.

A partir de los grupos de homología se puede definir la característica de Euler como

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \beta_i.$$

Teorema 4.1. Las dos definiciones dadas para la característica de Euler son equivalentes.

Demostración. Denotaremos $C_i = C_i(K)$, $B_i = B_i(K)$, $Z_i = Z_i(K)$ y $H_i = H_i(K)$. El grupo abeliano C_i puede ser visto como $\mathbb{Z}$ -módulo. Dado que $\alpha_i = n^\circ$ símlices de dimensión $i = \text{rango de } C_i$ como $\mathbb{Z}$ -módulo se tiene la siguiente relación:

$$\chi(K) = \sum_{i=1}^n (-1)^i \alpha_i = \sum_{i=1}^n (-1)^i \text{rango } C_i$$

Estudiando la cadena de morfismos entre los diferentes grupos de cadenas

$$\dots \longrightarrow C_{i+1} \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \dots$$

obtenemos la relación $\text{rango } C_i = \text{rango } \text{Ker}(\partial_i) + \text{rango } \text{Im}(\partial_i) = \text{rango } Z_i + \text{rango } B_{i-1}$. Además dado que $H_i = \frac{Z_i}{B_i}$ se tiene $\text{rango } Z_i = \text{rango } H_i + \text{rango } B_i$ luego

$$\chi(K) = \sum_{i=1}^n (-1)^i \alpha_i = \sum_{i=1}^n (-1)^i (\text{rango } H_i + \text{rango } B_i + \text{rango } B_{i-1}).$$

Definiendo $\text{rango } B_{-1} = 0$ y notando que para todo i con $i > \dim K$ se tiene que $\text{rango } B_i = 0$ obtenemos

$$\chi(K) = \sum_{i=1}^n (-1)^i \alpha_i = \sum_{i=1}^n (-1)^i \text{rango } H_i = \chi(K),$$

lo cual concluye la demostración. □

4.1 Subdivisión baricéntrica.

En esta sección daremos las definiciones de baricentro, subdivisión baricéntrica y estudiaremos algunas propiedades relativas a la característica de Euler.

Definición 4.13. Sea $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$ un n -símplex de un complejo simplicial geométrico K . Se llama *baricentro de σ* al punto

$$b(\sigma) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n a_i$$

Observación 4.2. Se verifican las siguientes propiedades:

1. El baricentro pertenece al cierre convexo de los vértices del símplex.

2. El baricentro de un 0-símplice es el mismo vértice, el de un 1-símplice es el punto medio del segmento y el de un 2-símplice es el baricentro del triángulo.

Definición 4.14. Dado un complejo simplicial geométrico K se define su *subdivisión baricéntrica* como el complejo simplicial $sb(K)$ cuyos vértices son todos los baricentros de símplexes de K y los símplexes $[b(\sigma_0), \dots, b(\sigma_n)]$ con σ_i cara propia de σ_{i+1} para todo i .

Teorema 4.2. Si K es un complejo simplicial geométrico, entonces se tiene $\chi(K) = \chi(sb(K))$.

Demostración. Daremos una prueba para el caso de dimensión dos. Para el caso general se puede consultar [18].

Sea K el complejo simplicial geométrico a considerar. Entonces la caracterísitica de Euler de K vendrá dada por la suma de los vértices y las caras menos las aristas de dicho complejo simplicial geométrico.

$$\chi(S) = v - a + c.$$

Consideramos ahora $sb(K)$. A cada cara del complejo simplicial geométrico K se le realiza una división del tipo al que se muestra en la Figura 10.



Figura 10: Subdivisión baricéntrica de una cara de K . Figura obtenida de [15].

Por lo tanto, el número de caras de $sb(K)$ será $6c$. El número de vértices será $v + c + a$ ya que estamos añadiendo un vértice por cada cara como el baricentro del triángulo y un vértice como baricentro de cada arista original. Finalmente, el número de aristas será $6c + 2a$ ya que tenemos 6 aristas nuevas internas a la cara y las aristas originales se dividen en dos

$$\chi(sb(K)) = 6c - (6c + 2a) + v + c + a = v - a + c.$$

□

5 Teorema de Poincaré-Hopf

En esta sección utilizaremos todas las técnicas descritas en este trabajo hasta el momento para demostrar el siguiente teorema.

Teorema 5.1. Sea v un campo de vectores tangente con un número finito de singularidades aisladas $\{a_1, \dots, a_s\}$, definido sobre una superficie S compacta, orientable y sin borde. Entonces:

$$\sum_{i=1}^s \text{ind}(v, a_i) = \chi(S),$$

donde a_i denotan las singularidades del campo v .

La demostración se dividirá en dos pasos. Primeramente, demostraremos la existencia de campos vectoriales tangentes con la propiedad requerida para seguidamente demostrar que la suma de los índices de las singularidades es invariante del campo vectorial v escogido. Así concluirá la prueba.

Previo a la demostración del Teorema 5.1 veremos unos resultados que se requerirán para aspectos técnicos de la misma.

5.1 Notación y consideraciones previas.

Antes de pasar al estudio de los resultados previos necesarios para la demostración, aclararemos brevemente la notación que usaremos a lo largo de sus demostraciones.

Primeramente, debido al teorema de clasificación de superficies compactas y orientables, nuestra superficie S estará compuesta por componentes conexas que serán homeomorfas a suma conexa de toros o esferas y por lo tanto S podrá ser embebida regularmente en $\mathbb{R}^3$.

Dada una variedad cualquiera M embebida regularmente en $\mathbb{R}^n$. Se tiene que el producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$ induce un producto escalar en $T_m M$. Más concretamente, con la inclusión podemos considerar los vectores de $T_m M$ como vectores de $\mathbb{R}^n$ y realizar su producto escalar. Este resultado nos permitirá por ejemplo hablar del espacio ortogonal a $T_m M$. Es importante notar, que el ortogonal a $T_m M$ dependerá del espacio ambiente $\mathbb{R}^n$ en el que consideremos embebida regularmente nuestra variedad.

Dado que nuestra variedad M está embebida regularmente en $\mathbb{R}^n$ se tiene que su topología es la topología heredada, en particular la topología dada por la métrica euclídea $d(x, y) = \|x - y\|$, esto nos permite utilizar propiedades de los espacios métricos, en particular dado que M es compacta las relacionadas con compacidad.

Denotemos $d(x, y)$ ó $\|x - y\|$ equivalentemente así como nos referiremos al producto escalar de forma indistinta cuando escribamos $x \cdot y$ ó $\langle x, y \rangle$. Además utilizaremos las estructuras

de $\mathbb{R}^n$ como espacio afín y espacio vectorial libremente, así, hablaremos a veces de punto más vector o que la diferencia de dos puntos sean vectores aunque no sea completamente riguroso.

5.2 Resultados previos a la demostración.

A continuación construiremos lo que se conoce como *entorno tubular* de una variedad M . De forma similar a lo que se hizo en la Definición 3.1 definiremos ahora el fibrado normal de una variedad M .

Definición 5.1. Sea M una variedad diferenciable embebida en $\mathbb{R}^n$. Definimos el *espacio normal* a M en m y lo denotamos por $N_m(M)$ como $N_m(M) = \{(m, v) \in M \times \mathbb{R}^n : v \perp T_m M\}$.

El *fibrado normal* de M en $\mathbb{R}^n$ es el conjunto $TN(M) = \bigsqcup_{m \in M} N_m(M)$. Y denotamos por $\pi : TN(M) \rightarrow M$ la proyección que actúa de la siguiente forma $\pi(m, v) = m$. Definiremos también la aplicación $\theta : TN(M) \rightarrow \mathbb{R}^n$ que actúa del siguiente modo $\theta(m, v) = m + v$.

Dado ε consideraremos el conjunto $TN_\varepsilon(M) = \{(m, v) \in TN(M) : \|v\| < \varepsilon\}$. Con las anteriores notaciones se tiene el siguiente resultado, que se puede seguir en [5].

Teorema 5.2. (Teorema del entorno tubular). Sea M una variedad compacta embebida en $\mathbb{R}^n$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que la aplicación θ es un difeomorfismo entre $TN_\varepsilon(M)$ y el abierto $M_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^n : d(y, M) < \varepsilon\}$.

Demostración. Dividiremos la prueba en varios pasos:

- Para cada $m \in M$ se tiene que θ es un difeomorfismo en un entorno de $(m, 0)$ en $TN(M)$. Para ello veamos que θ_* es un isomorfismo en los puntos $(m, 0) \in TN(M)$. Primero observemos que tenemos la siguiente propiedad entre espacios vectoriales, $T_{(m,0)}TN(M) \cong T_m M \oplus T_m M^\perp$. Por lo que podemos estudiar la acción de θ en cada uno de los anteriores subespacios. Además tenemos las siguientes biyecciones.

$\theta|_{M \times \{0\}} : M \times \{0\} \rightarrow M$ y también $\theta|_{\{m\} \times T_m M^\perp} : \{m\} \times T_m M^\perp \rightarrow T_m M^\perp$. De lo que se deduce que $\theta_{*,(m,0)}$ es la identidad. Por lo que finalmente se tiene que θ_* es un isomorfismo en (m, v) para cualquier punto m y v con $\|v\|$ suficientemente pequeña.

- Seguidamente veremos que existe un δ de tal forma que la aplicación $\theta : TN_\delta(M) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo local.

Por el apartado anterior sabemos que θ es un difeomorfismo en un entorno de $(m, 0)$ que podemos expresar de la siguiente forma $U_m \times N_{\delta(m)}$ donde los U_m son entornos de $m \in M$ y $N_{\delta(m)} = \{v \in T_m M^\perp : \|v\| < \delta(m)\}$ donde es importante notar que la norma del vector podrá variar entre conjuntos. Se tiene que $\{U_m\}_{m \in M}$ es un recubrimiento abierto de M , dado que nuestra variedad es compacta podemos extraer un subrecubrimiento finito $U_{m_1}, \dots, U_{m_r}$. Tomando $\delta = \min\{\delta(m_i) : 1 \leq i \leq r\}$ obtenemos el resultado deseado.

- Finalmente para probar que el difeomorfismo es global, (y no solo local) tenemos que ver que θ es una aplicación inyectiva en $TN_\varepsilon(M)$ para un ε con $0 < \varepsilon \leq \delta$. Supongamos que θ no es inyectiva en $TN_\varepsilon(M)$ para ningún $\varepsilon > 0$. Entonces existen dos sucesiones $\{(m_i, v_i)\} \neq \{(n_i, w_i)\}$ en $TN_{1/i}(M)$ con $i \in \mathbb{N}$ tales que $\|v_i\| \rightarrow 0$ y $\|w_i\| \rightarrow 0$ y $\theta(m_i, v_i) = \theta(n_i, w_i)$ para todo i . Debido a que M es subvariedad regular compacta y las consideraciones de Sección 5.1 existen subsucesiones $\{m_{i_l}\}$ y $\{n_{i_l}\}$ que convergen a m y n respectivamente. Entonces se tiene que $\theta(m_{i_l}, v_{i_l}) \rightarrow (m, 0)$ y $\theta(n_{i_l}, w_{i_l}) \rightarrow (n, 0)$ luego $m = n$. Dado que para i suficientemente grande (m_i, v_i) y (n_i, w_i) pertenecerán a $U_m \times N_{\delta(m)}$ donde θ es un difeomorfismo local y por tanto inyectiva, lo que lleva a una contradicción.
- Por último comprobemos que $\theta(TN_\varepsilon(M)) = M_\varepsilon$. Si $y = m + v$ con $m \in M$ y $\|v\| < \varepsilon$ entonces se tiene $d(y, M) \leq d(y, m) = \|v\| < \varepsilon$. Recíprocamente, tomemos $y \in M_\varepsilon$ y sea $m \in M$ tal que $d(y, m) = d(y, M)$ (recordemos que $d(y, M) = \min\{d(y, m) : m \in M\}$ y este mínimo existe dado que M es compacta y la función $d(y, _)$ es continua). El vector $v = y - m$ verifica que $\|v\| < \varepsilon$ (ya que $d(y, m) = \|v\|$) y además $v \in T_m M^\perp$. En efecto, m es un mínimo de la función $\tau_y : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\tau_y(n) = \|y - n\|^2$. Luego $(\tau_y)_{*,m}(u) = 0$ para $u \in T_m M$ y como $(\tau_y)_{*,m}(u) = -2 \langle y - m, u \rangle$ entonces se tiene que $y - m = v \in T_m M^\perp$.

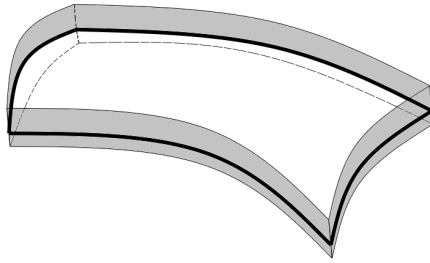


Figura 11: Representación gráfica del entorno tubular.

□

El resultado anterior nos permite construir una retracción diferenciable $r : M_\varepsilon \rightarrow M$ del entorno tubular en M definida por $r(y) = \pi \circ \theta^{-1}(y)$. A consecuencia de la anterior demostración, la aplicación r presenta las siguientes importantes propiedades.

1. $r(m) = m$ si y sólo si $m \in M$.
2. $y - r(y) \in T_{r(y)}M^\perp$ para todo punto $y \in M_\varepsilon$.
3. $d(y, M) = d(y, r(y)) = \|y - r(y)\|$ para todo punto $y \in M_\varepsilon$.

El siguiente lema nos permite construir variedades con borde de forma sencilla se puede encontrar la prueba en [19], p. 56-57.

Lema 5.1. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\right) \neq (0, \dots, 0)$ para todo punto $p \in f^{-1}(t)$, entonces $\{p \in U : f(p) \leq t\}$ es una variedad con borde dado por $\{p \in U : f(p) = t\}$.

Sea $N = \{y \in \mathbb{R}^n : d(y, M) \leq \varepsilon\}$. Apliquemos el lema anterior para ver que es una variedad diferenciable con borde dado por $\partial N = \{y \in \mathbb{R}^n : d(y, M) = \varepsilon\}$.

Para ello consideramos la función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(y) = \|y - r(y)\|^2$. Tenemos que $\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n}\right) = 2(y - r(y))$. Por lo tanto el vector gradiente se anula cuando $y = r(y)$ lo cual sólo sucede en los puntos $y \in M$. Pero si $y \in M$ se tiene $f(y) = 0$. Entonces para cualquier $\tilde{\varepsilon} > 0$ se tiene que el gradiente no se anula en los puntos $f^{-1}(\tilde{\varepsilon}^2)$, luego es un valor regular de f . Aplicando el lema anterior a $t = \tilde{\varepsilon}^2$ se tiene que $N = \{y \in \mathbb{R}^n : d(y, M) \leq \varepsilon\}$ es una variedad diferenciable con $\partial N = \{y \in \mathbb{R}^n : d(y, M) = \varepsilon\}$ tomando $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}^2$.

En el caso que nos interesará, es decir, M una superficie, tendremos en particular que para todo $m \in M$ su espacio normal $N_m(M) = \langle n(m) \rangle = \{t \cdot n(x) : t \in \mathbb{R}\}$ donde $n(m)$ es el vector normal unitario a M en el punto m el cual está bien definido como el producto vectorial de los elementos de la base del espacio tangente asociados a un dominio coordinado como en el Teorema 2.1.

En este caso definiremos $M_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^3 : d(y, M) < \varepsilon\} = \{m + t \cdot n(m) : m \in M, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$.

Seguidamente introducimos un resultado de topología algebraica que necesitaremos más adelante. Para su demostración, necesitamos recordar el Teorema de clasificación de variedades compactas de dimensión 1 que se enunció anteriormente (Teorema 2.3).

Teorema 5.3. Sea M una variedad compacta orientable con borde de dimensión k y sea N de dimensión $k - 1$. Si tenemos una función diferenciable $f : \partial M \rightarrow N$ que se extiende a toda la variedad $F : M \rightarrow N$ entonces el grado de f es cero.

Demostración. Sea a un valor regular de f y de F . Por la Proposición 2.5, $F^{-1}(a)$ es una variedad diferenciable compacta con borde dado por $F^{-1}(a) \cap \partial M$ de dimensión $k - (k - 1) = 1$. Por el Teorema 2.3, $F^{-1}(a)$ es unión de circunferencias (que no tienen borde) o segmentos con dos puntos en el borde. Por lo tanto, sabemos que los puntos del borde de $F^{-1}(a)$ aparecen en pares y basta ver que si p y q son los puntos del borde de uno de los segmentos de $F^{-1}(a)$, que denotaremos por C , entonces:

$$\text{sign}(\det(f_{*,p})) + \text{sign}(\det(f_{*,q})) = 0.$$

Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow C$ una parametrización diferenciable de C (que existe por el Teorema 2.3) tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$.

Podemos elegir k campos de vectores $v_1(t), \dots, v_k(t)$ a lo largo de γ tales que $v_i(0)$ y $v_i(1)$ son tangentes a ∂M para cada i y $\{\gamma'(t), v_1(t), \dots, v_n(t)\}$ sea una base orientada de $T_{\gamma(t)}M$ para todo $t \in [0, 1]$. Como a es un valor regular de F , entonces $\{F_*(\gamma'(t)), F_*(v_1(t)), \dots, F_*(v_n(t))\}$ deben generar $T_a N$ para cada t . Por el apartado 2 de la Proposición 2.5 tenemos que $F_*(\gamma'(t)) = 0$ luego $\{F_*(v_1(t)), \dots, F_*(v_n(t))\}$ es una base para $T_a N$ para todo t . Por lo tanto, $\{F_*(v_1(0)), \dots, F_*(v_n(0))\}$ y $\{F_*(v_1(1)), \dots, F_*(v_n(1))\}$ tienen la misma orientación.

La base $\{\gamma'(t), v_1(t), \dots, v_n(t)\}$ nos da una orientación constante en $T_{\gamma(t)}M$ pero $\gamma'(0)$ apunta hacia adentro y $\gamma'(1)$ apunta hacia afuera, luego $\{v_1(0), \dots, v_n(0)\}$ y $\{v_1(1), \dots, v_n(1)\}$ tienen dos orientaciones diferentes en $T_p \partial M$ y $T_q \partial M$. Por lo que se tiene que $\det(f_{*,p})$ y $\det(f_{*,q})$ deben tener signos opuestos.

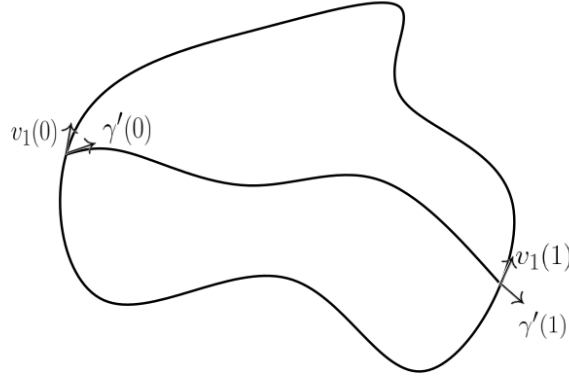


Figura 12: Representación gráfica de la elección de base escogida para la prueba.

□

A continuación nos disponemos a definir la aplicación de Gauss siguiendo ideas de [2]. Serán importantes las consideraciones realizadas en la Sección 2.4, en relación a la orientación de variedades. Podemos definir la aplicación de Gauss para hiper-superficies orientables sin borde M con $\dim(M) = n$ embebidas regularmente en $\mathbb{R}^{n+1}$ ya que para cada punto $m \in M$ la orientación de M proporciona una dirección para el vector normal unitario $n(m)$, de este modo la aplicación de Gauss $G : M \rightarrow \mathbb{S}^n$ actuaría del siguiente modo $G(m) = n(m)$, donde habremos tomado de forma natural la orientación positiva y por lo tanto el vector $n(m)$ apunta siempre hacia afuera. Del mismo modo si consideramos M una variedad orientable con borde de dimensión $n+1$ embebida regularmente en $\mathbb{R}^{n+1}$, tenemos que ∂M es una variedad de dimensión n orientada y por tanto podemos definir la aplicación de Gauss de ∂M de forma análoga $G : \partial M \rightarrow \mathbb{S}^n$. En ambos casos, dado que tenemos una hiper-superficie existe una simple “receta” para el obtener el vector $n(m)$, sabemos que $N_m(M) = T_m M^\perp = \langle \tilde{n}(m) \rangle$, es decir, el espacio normal está generado por un vector proporcional al deseado $n(m)$ sólo tenemos que escoger aquel que apunte hacia afuera, cómo nuestra superficie es orientable, la orientación de M nos da una forma de escoger el vector $n(m)$ de manera continua.

A partir de la definición se obtiene el siguiente lema

Lema 5.2. Sea M una variedad orientada de dimensión n embebida regularmente en $\mathbb{R}^{n+1}$. Todo campo vectorial w continuo definido sobre M que apunta hacia afuera en todos los puntos de M es homótopo a la aplicación de Gauss.

Demostración. Primeramente descomponemos para cada $m \in M$ el campo como suma directa de dos $w = t + o$ donde $t \in T_m M$ es la componente tangente y $o \in N_m(M)$ es la componente ortogonal. Dado que w apunta hacia afuera en todos los puntos $m \in M$ tenemos que o es proporcional al vector normal unitario $n(m)$ dado por la aplicación de Gauss y es no nulo; por lo tanto w no tiene singularidades.

Definimos la homotopía del siguiente modo

$$H : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^n$$

$$(p, \lambda) \rightarrow \begin{cases} \frac{w(p)}{\|w(p)\|} & \text{si } w(p) = \alpha n(p) \\ \frac{(1-\lambda)t(p) + \lambda o(p)}{\|(1-\lambda)t(p) + \lambda o(p)\|} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Observamos que la aplicación es continua y que está bien definida ya que $(1-\lambda)t(p) + \lambda o(p) \neq 0$ porque los vectores $t(p)$ y $o(p)$ son ortogonales y $o(p)$ es no nulo para todo punto de la variedad. Se concluye por tanto el resultado. $\square$

El anterior Lema nos será de utilidad para probar el siguiente importante resultado.

Teorema 5.4. Sea v un campo vectorial tangente definido sobre una variedad con borde M de dimensión n embebida regularmente en $\mathbb{R}^n$ con singularidades aisladas y tal que v

apunta hacia afuera en los puntos del borde ∂M . Entonces la suma de los índices de sus singularidades es igual al grado de la aplicación de Gauss de ∂M y por tanto independiente del campo v .

Demostración. Alrededor de cada singularidad p_i seleccionamos una bola de radio ε de tal forma que no contenga más singularidades y que esté totalmente contenida en M . Y consideramos la variedad con borde $\widetilde{M} = M \setminus \bigcup_i B(p_i, \varepsilon_i)$ donde su borde es $\partial \widetilde{M} = \partial M - \bigcup_i \partial B(p_i, \varepsilon_i)$ donde el signo menos proviene del cambio de orientación (vectores que apuntan hacia afuera en las bolas apuntan hacia adentro en $\widetilde{M}$ y viceversa). Tenemos entonces que el campo $\tilde{v} : \partial \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{S}^n$ definido por $\tilde{v} = \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$ puede extenderse para todo $\widetilde{M}$ ya que $v(x)$ no presenta singularidades para ningún $x \in \widetilde{M}$. Por tanto, en virtud del Teorema 5.3 su grado es cero. De lo que se deduce que $\deg(\tilde{v}|_{\partial M}) - \sum_i \deg(\tilde{v}|_{\partial B(p_i, \varepsilon_i)}) = 0$ donde el signo menos proviene del cambio de orientación. O equivalentemente, $\deg(\tilde{v}|_{\partial M}) = \sum_i \deg(\tilde{v}|_{\partial B(p_i, \varepsilon_i)})$.

Finalmente, consideramos la componente del borde ∂M de M . Dado que v apunta hacia afuera el campo $\tilde{v}$ también, y por lo tanto en virtud del Lema 5.2 es homótopo a la aplicación de Gauss, lo cual implica que tiene el mismo grado. De este modo tenemos que $\deg(G) = \deg(\tilde{v}|_{\partial M}) = \sum_i \deg(\tilde{v}|_{\partial B(p_i, \varepsilon_i)})$. Además por la definición de índice se tiene que $\deg(\tilde{v}|_{\partial B(p_i, \varepsilon_i)}) = I(v, p_i)$ juntando todo tenemos que

$$\sum_i I(v, p_i) = \deg(G).$$

□

5.3 Demostración del Teorema de Poincaré-Hopf.

Como hemos dicho anteriormente dividiremos la prueba en dos pasos. En primer lugar, se muestra la existencia de campos con la propiedad requerida. A este campo le llamaremos campo de Hopf. Se han seguido ideas de [4] y [20]

Campo de Hopf.

A continuación construiremos un campo vectorial sobre nuestra superficie con la propiedad deseada, esto es, que la suma de los índices de las singularidades sea igual a la característica de Euler de la superficie.

Para ello construiremos el llamado campo de Hopf de la superficie que denotaremos por v_H . Partimos de una triangulación de la superficie K que existe ya que toda superficie compacta es triangulable. Realizamos una subdivisión baricéntrica y obtenemos un complejo simplicial geométrico $K' = sb(K)$. Denotaremos a los vértices de dicha subdivisión

como $\hat{\sigma}^n$ donde $n = 0, 1, 2$ denotará la dimensión del símplice del que proviene. Así $\hat{\sigma}^0$ serán los vértices originales, $\hat{\sigma}^1$ serán los puntos medios de las aristas originales y $\hat{\sigma}^2$ los baricentros de los triángulos originales tal y como se muestra en la Figura 13. Nuestro campo tendrá singularidades en los baricentros y sólo en esos puntos.

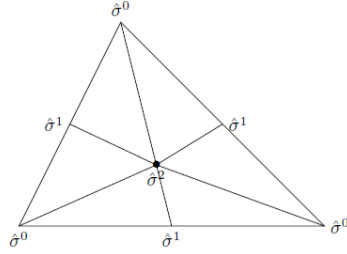


Figura 13: Notación vertices del complejo simplicial geometrico K' .

El campo de Hopf v_H será construido del siguiente modo. Será tangente a los segmentos $[\hat{\sigma}^i, \hat{\sigma}^j]$ de la descomposición baricéntrica saliendo de $\hat{\sigma}^i$ y llegando a $\hat{\sigma}^j$ con ($i < j$) como se muestra en la Figura 14. Seguidamente el campo se extiende de forma continua al símplice generado por $[\hat{\sigma}^0, \hat{\sigma}^1, \hat{\sigma}^2]$ como se muestra en la Figura 15. El campo mostrado es sólo un ejemplo de como podemos extender el campo a todo el símplice $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, en concreto toma la forma $[x(2y + x - 1)(x - 1)] \frac{\partial}{\partial x} + [y^2(1 - y)] \frac{\partial}{\partial y}$. Cómo se puede comprobar sólo presenta singularidades en los puntos deseados.

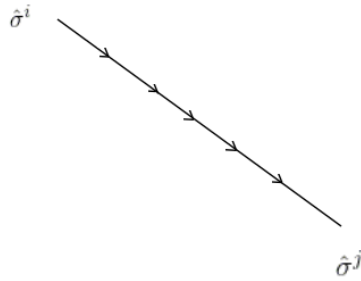


Figura 14: Dirección que toma el campo en las aristas de K' con $i < j$.

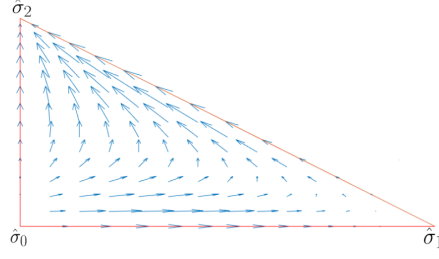
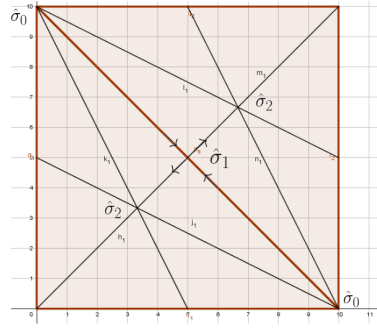


Figura 15: Extensión continua del campo anterior al símlice $[\hat{\sigma}^0, \hat{\sigma}^1, \hat{\sigma}^2]$.

Con esta definición para el campo de Hopf tenemos que las únicas singularidades se encuentran en los baricentros $\hat{\sigma}^i$. Además estas presentan los siguientes índices:

1. Las singularidades de los puntos $\hat{\sigma}^0$ presentan índice $+1$ ya que localmente su campo es tipo fuente ya estudiado en la sección 3.1.
2. Las singularidades de los puntos $\hat{\sigma}^1$ presentan índice -1 ya que al ser puntos medios de aristas se encuentran siempre entre dos caras y localmente su campo es tipo silla ya estudiado en la sección 3.1 (ver figura).



3. Por último las singularidades de los puntos $\hat{\sigma}^2$ presentan índice $+1$ ya que localmente su campo es tipo sumidero ya estudiado en la sección 3.1.

Por lo tanto la suma de los índices de las singularidades será la siguiente

$$\sum_{i=1}^s ind(v_H, a_i) = \sum_{\hat{\sigma}^0} ind(v_H, \hat{\sigma}_0) + \sum_{\hat{\sigma}^1} ind(v_H, \hat{\sigma}_1) + \sum_{\hat{\sigma}^2} ind(v_H, \hat{\sigma}_2) = v - a + c = \chi(S)$$

Donde sólo tenemos que darnos cuenta que tenemos un $\hat{\sigma}^0$ por cada vértice original de K , un $\hat{\sigma}^1$ por cada arista original de K y un $\hat{\sigma}^2$ por cada cara original de K . Con esto concluye la primera etapa.

Invarianza con la elección del campo.

En esta segunda parte, a partir de un campo vectorial v definido sobre nuestra superficie S (recordemos compacta orientable y sin borde), construiremos un campo vectorial w sobre S_ε con las mismas singularidades que v y los mismos índices. Seguidamente, la demostración concluirá comprobando que la suma de los índices del campo w es igual al grado de la aplicación de Gauss y por lo tanto invariante.

En primer lugar consideramos S_ε el entorno tubular cerrado de S , notar que dado que S es una superficie compacta y orientable admite un embebimiento regular en $\mathbb{R}^3$ y por tanto S_ε también. Para todo punto $x \in S_\varepsilon$ consideramos el punto $r(x) \in S$ como se trató en la Sección 5.2. El vector $t(x) = x - r(x)$ es por tanto un vector normal a S en el punto $r(x)$, esto es, $t(x) \in N_x(S)$, a este campo lo llamaremos campo normal.

Consideramos la función $f(x) = \|x - r(x)\|^2$ de la que se tiene $\nabla f = 2(x - r(x))$. La contraimagen $f^{-1}(\varepsilon^2)$ nos da, como sabemos por el Lema 5.1, los puntos del borde de nuestra variedad S_ε . Además dado que el gradiente nos da un vector normal tenemos que la aplicación de Gauss en los puntos del borde es $G(x) = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{x - r(x)}{\varepsilon}$.

En los puntos de $S \subset S_\varepsilon$ se tiene que $t(x) = 0$, por lo tanto podemos extender nuestro campo vectorial v definido sobre S a nuestra variedad S_ε de la siguiente forma $w(x) = (x - r(x)) + v(r(x))$ para $x \in S_\varepsilon$.

El campo w presenta algunas propiedades interesantes que nos disponemos a tratar ahora, las cuales son consecuencia en su mayoría de las cuestiones tratadas en la Sección 5.2:

1. Los vectores $v(r(x))$ y $x - r(x)$ son ortogonales ya que $v(r(x)) \in T_x(S_\varepsilon)$ y $x - r(x) \in N_x(S_\varepsilon)$.
2. El campo w sólo presenta singularidades en las singularidades de v . Dado que $v(r(x))$ y $x - r(x)$ son ortogonales no puede suceder $v(r(x)) = x - r(x)$ salvo en el caso en que ambos se anulen y eso sólo sucede en las singularidades p_i de v ya que $p_i \in S$ y por tanto $r(p_i) = p_i$.
3. El campo w apunta hacia afuera en los puntos del borde ya que $w(x) \cdot G(x) = [(x - r(x)) + v(r(x))] \cdot \frac{x - r(x)}{\varepsilon} = \frac{\|x - r(x)\|^2}{\varepsilon} = \varepsilon > 0$.
4. El índice de w en una singularidad p_i es el mismo que el de v en dicha singularidad. Estudiando w_* en las singularidades p_i tenemos que podemos separar el campo w como suma directa de dos componentes, el campo tangencial $v(r(p_i)) \in T_{p_i}M$ y el campo normal $p_i - r(p_i) \in T_{p_i}M^\perp$. Con esta descomposición tenemos que $\text{sign}(\det(w_{*,p_i})) = \text{sign}(\det(v_{*,r(p_i)})) \cdot \text{sign}(\det(t_{*,p_i}))$ como tenemos que $\text{sign}(\det(t_{*,p_i})) = +1$ se concluye el resultado.

En virtud del Teorema 5.4 el campo w cumple $\deg(w) = \deg(G)$. Además dado que el campo v presenta las mismas singularidades y los mismos índices que w se tiene que $\sum_i I(v, p_i) = \deg(G)$ y por lo tanto la suma de los índices de las singularidades es invariante con el campo escogido.

Juntando las dos partes de la demostración se concluye el resultado.

Una vez probado el teorema, se deducen importantes resultados de forma trivial.

Corolario 5.1. (Teorema de la bola peluda). Un campo de vectores tangente con un número finito de singularidades a la esfera $\mathbb{S}^2$ necesariamente se anula en algún punto.

Demostración. Recordar que en la Sección 4 se probó que la característica de Euler de una esfera de dimensión par es $\chi(\mathbb{S}^n) = 2$ por el Teorema de Poincaré-Hopf se concluye el resultado. $\square$

Observación 5.1. Pese a que en este trabajo se ha probado para superficies, el Teorema de Poincaré-Hopf es cierto para variedades de dimensión n [14]. Por lo tanto el resultado anterior es cierto para esferas $\mathbb{S}^n$ de dimensión arbitraria con n par.

Ejemplo 5.1. Dado que la característica del toro es $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$ está permitido tener campos vectoriales tangentes sin singularidades sobre el mismo (ejemplo tomado de [17]).

Consideramos el toro como superficie de revolución

$$\mathbb{T}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2\},$$

donde $0 < r < a$. Su vector normal unitario presenta la forma

$$n(x, y, z) = \frac{1}{r\sqrt{x^2 + y^2}}(x(\sqrt{x^2 + y^2} - a), y(\sqrt{x^2 + y^2} - a), z\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Definiendo el campo de vectores como

$$v(x, y, z) = \frac{1}{r}\left(\frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, a - \sqrt{x^2 + y^2}\right),$$

obtenemos un campo de vectores tangente a $\mathbb{T}^2$. Es fácil comprobarlo ya que se tiene que

$$n(x, y, z) \cdot v(x, y, z) = \frac{1}{r\sqrt{x^2 + y^2}}(x^2z + y^2z + \frac{-ax^2z - ay^2z}{\sqrt{x^2 + y^2}} + az\sqrt{x^2 + y^2} - zx^2 - zy^2) = 0$$

además no se anula en ningún punto de la superficie del toro con lo que se obtiene el campo deseado. Dicho campo presenta en concreto la siguiente forma

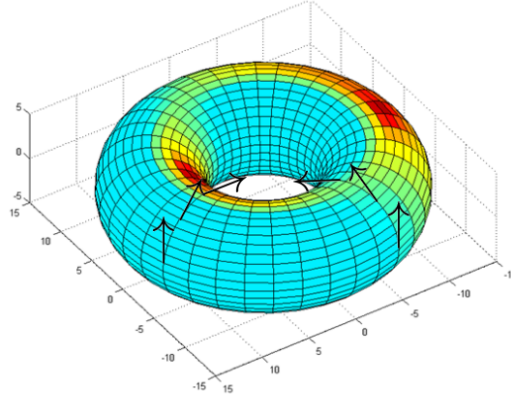


Figura 16: Campo sin ceros sobre el toro tratado en el ejemplo.

Por último, me gustaría mencionar la relación existente entre el Teorema de Poincaré-Hopf y el teorema de Gauss-Bonnet. Los detalles pueden encontrarse en [17], p.278.

Si consideramos una superficie S y la aplicación de Gauss $G : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ tenemos que $G_* : T_p S \rightarrow T_{N(p)} \mathbb{S}^2$ es un endomorfismo ya que el plano tangente a la esfera en el punto $N(p)$ es $N(p)^\perp$ y por lo tanto se tiene $T_{N(p)} \mathbb{S}^2 = T_p S$. Un endomorfismo de dimensión 2 tiene asociados dos invariantes

$$K(p) = \det(N_*)_p \quad \text{y} \quad H(p) = -\frac{1}{2} \text{tra}(N_*)_p,$$

que son respectivamente la curvatura de Gauss y la curvatura media de la superficie en el punto p .

Hablando de manera general y sin entrar en los detalles, el Teorema de Gauss-Bonnet establece que la “suma total” de la curvatura de Gauss en todos los puntos de la superficie es igual a la característica de Euler de dicha superficie multiplicada por 2π [20]. Más concretamente

$$\frac{1}{2\pi} \int_S K(p) d\sigma = \chi(S)$$

Por el teorema de Poincaré-Hopf se tiene además que dicha integral es igual a la suma de los índices de cualquier campo vectorial (en las condiciones de Teorema 5.1) definido sobre S .

Referencias

- [1] M. Adachi. *Embeddings and immersions*. American Mathematical Society, 2012.

- [2] D. Barden and C. Thomas. *An Introduction to Differential Manifolds*. Imperial College Press, 2003.
- [3] W. Boothby. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, volume 120. Academic press, 1986.
- [4] J. Brasselet and T.B. Nguyen. O teorema de poincare-hopf. *arXiv preprint arXiv:1710.08764*, 2017.
- [5] G.E. Bredon. *Topology and Geometry*. Graduate Text in Mathematics, Springer, 1993.
- [6] F. Brickell and R.S. Clark. *Differentiable manifolds: an introduction*. van Nostrand Reinhold company, London, 1970.
- [7] F. Etayo. *Topología diferencial: apuntes asignatura*. UC.
- [8] V. Guillemin and A. Pollack. *Differential Topology*. Prentice-Hall, Inc., 1974.
- [9] C. Kosniowski. *Topología Algebraica*. Editorial reverté,s.a., 1986.
- [10] J.M. Lee. *Introduction to topological manifolds*. Springer, 2000.
- [11] E.L. Lima. *Introdução à Topologia Diferencial*. Publicações Matemáticas. IMPA, 2005.
- [12] W.S. Massey. *Singular Homology Theory*. Springer-Verlag, 1980.
- [13] J.W. Milnor. *Morse theory*. Princeton University Press, 1960.
- [14] J.W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. The University Press of Virginia, Charlottesville, 1965.
- [15] E.G. Minian. Complejos simpliciales y poliedros (introducción). *Depto Matemáticas FCEyN, UBA*.
- [16] E.E. Moise. *Geometric topology in dimensions 2 and 3*. Springer-Verlag, 1977.
- [17] S. Montiel and A. Ros. *Curves and surfaces*, volume 69. American Mathematical Society, 2005.
- [18] J.R. Munkres. *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley Publishing company, 1984.

- [19] E. Outerelo and J.M. Ruiz. *Mapping Degree Theory*, volume 108. American Mathematical Society., 2009.
- [20] K. Ueno, K. Shiga, and S. Morita. *A Mathematical Gift I. The interplay between topology, functions, geometry and algebra*, volume 19. American Mathematical Society., 2003.
- [21] A. Wallace. *Differential topology. First steps*. W.A. Benjamin, Inc, 1968.
- [22] F.W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Springer Science & Business Media, 1971.