

Estudio de modos guiados en guía rectangular conteniendo un metamaterial

Beatriz Moreno Arranz

Director: Álvaro Gómez Gómez

El volumen de investigación en los metamateriales ha crecido de forma vertiginosa durante los últimos años. La respuesta electromagnética de estos materiales presenta unas características inusuales que no se encuentran en materiales de la naturaleza. Por lo tanto, se deben construir de forma artificial y se encuadran dentro de los denominados genéricamente medios complejos. Los metamateriales se caracterizan por la inclusión periódica de elementos electromagnéticamente pequeños y separados entre sí una distancia mucho menor que la longitud de onda; en otras palabras, el tamaño de la celda unidad es mucho menor que la longitud de onda. Esto es una diferencia esencial con otro tipo de estructuras periódicas como los “band-gaps” electromagnéticos. Este hecho hace que los metamateriales puedan ser considerados, desde el punto de vista electromagnético, como un medio homogéneo habitual, al que se le puede aplicar un proceso de homogenización que proporciona los valores macroscópicos de su permitividad y de su permeabilidad, cuyas partes reales resultan ser negativas. Una de las propiedades más representativas de un metamaterial es que las velocidades de grupo y de fase de las ondas que se propagan por él son antiparalelas, dichas ondas se conocen con el nombre de ondas “backward”.

En este trabajo se ha analizado el comportamiento de las ondas de diferentes modos guiados soportados por una guía de onda rectangular parcialmente llena de un metamaterial. Con esta idea en mente, se han obtenido las ecuaciones de dispersión que caracterizan el problema. La resolución de dichas ecuaciones se ha realizado mediante un programa implementado en MATLAB que proporciona el valor de las constantes de propagación de los diferentes modos guiados que pueden existir en el interior de la guía.

Asimismo, se han comparado los resultados anteriores con los obtenidos mediante un método semi-analítico formulado en el dominio de la frecuencia: el método de modos acoplados (MMA).

Trabajo Fin de Carrera

Facultad de Ciencias

Estudio de modos guiados en guía rectangular conteniendo un metamaterial

Beatriz Moreno Arranz

Director: Álvaro Gómez Gómez



Licenciatura en Física

Universidad de Cantabria

Diciembre 2012

Índice

Índice	1
Introducción	2
Capítulo 1: Metamateriales	4
1.1 Metamateriales (MTM).....	4
1.2 Propiedades de un medio zurdo	5
A. Refracción negativa, ley de Snell	7
B. Efecto Doppler inverso	9
C. Otros efectos	10
1.3 Diseño de un medio zurdo	10
1.4 Historia de los metamateriales	12
1.5 Aplicaciones.....	13
A. Superresolución: Lente perfecta	13
B. Invisibilidad	14
Capítulo 2: Desarrollo matemático	16
2.1 Vectores auxiliares.....	16
Obtención de los potenciales vector A y F	16
2.2 Soluciones	18
• Modo TM^x	19
• Modo TE^x	20
• Guía vacía.....	21
• Guía parcialmente llena.....	23
Capítulo 3: Resultados	28
3.1 Guía de planos paralelos	28
3.2 Guía rectangular	30
3.3 Dependencia con el espesor	33
3.5 Método de modos acoplados.....	34
Capítulo 4: Conclusiones y líneas futuras.....	37
Bibliografía	39

Introducción

La búsqueda de nuevos materiales que presenten propiedades especiales que no se encuentren de forma natural es un tema que siempre ha motivado a la comunidad científica y que ha dirigido diferentes ramas de investigación. Dentro de este tipo de nuevos materiales podemos destacar los comúnmente conocidos con el nombre de metamateriales. Gracias a sus propiedades intrínsecas y a sus potenciales aplicaciones, estos medios han despertado gran interés a lo largo de los últimos años en diversos campos de la investigación.

El ámbito de las microondas no ha sido ajeno a la aparición de estos materiales. Así, en la actualidad, tal y como se verá a lo largo de la memoria, existen diferentes aplicaciones que avalan el esfuerzo empleado en su estudio, diseño y construcción. Además de sus aplicaciones en medio libre también se están realizando análisis para su uso en dispositivos de guiado de señal, tanto en guía de onda como en línea microstrip.

Dentro de las estructuras de guiado de energía electromagnética, podemos destacar las guías de onda, las cuales son básicas en el guiado de señal dentro de los satélites de comunicaciones. Con el fin de analizar la influencia de estos nuevos materiales sobre de este tipo de estructuras, se ha optado por realizar un estudio sobre el comportamiento de los diferentes modos guiados en una guía de onda rectangular parcialmente llena de un metamaterial. En particular, el caso elegido es el de la guía de onda rectangular que contiene un slab de metamaterial de altura completa (Figura 1), ya que su solución se puede obtener a través de la resolución de una relación de dispersión.

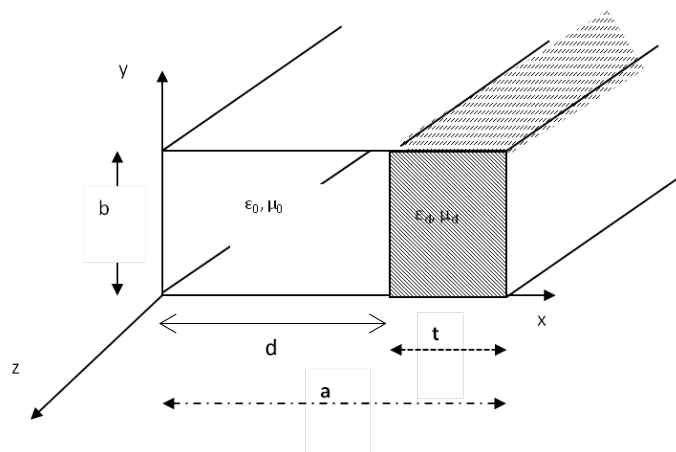


Figura 1: Guía de onda rectangular parcialmente llena de un metamaterial.

De forma resumida, y a modo de presentación, el plan de trabajo que se ha seguido para resolver el problema que nos ocupa ha sido el siguiente:

En primer lugar se ha realizado una pequeña revisión de los metamateriales y de las principales propiedades y aplicaciones que presentan, como base para adquirir los conocimientos básicos sobre estos nuevos materiales.

A continuación, se ha resuelto el problema electromagnético de la guía rectangular vacía, puesto que la solución que ofrezca de los campos será la base para obtener la solución buscada para la guía de onda que contiene el slab de metamaterial.

Como se ha comentado con anterioridad, la solución de nuestro problema vendrá determinada por una relación de dispersión que hay que resolver de forma numérica. Para ello, se ha implementado un programa en Matlab cuya solución nos ofrece los valores de las constantes de fase como función de la frecuencia de los diferentes modos de propagación del campo electromagnético que pueden existir en el interior de nuestra estructura. Con el fin de verificar las soluciones obtenidas con nuestro programa se han reproducido resultados de algunos trabajos en los que se analizan problemas similares.

Una vez que nos hemos asegurado del correcto funcionamiento de nuestro programa, hemos examinado los efectos que producen los cambios en el espesor del slab. Asimismo, se han comparado nuestros resultados con los que se obtienen al aplicar un método semi-numérico muy utilizado a la hora de estudiar problemas de propagación en guías de onda que contienen diferentes tipos de materiales, éste es, el Método de Modos Acoplados.

Antes de comenzar con la presentación de los puntos anteriores, es conveniente comentar que la notación que se va a seguir es que la propagación de los campos se realizará según la dirección el eje z y que dichos campos tendrán una dependencia espacial y temporal armónica de la forma $\exp(j\omega t - \beta z)$.

Capítulo 1: Metamateriales

1.1 Metamateriales (MTM)

Los metamateriales electromagnéticos se definen, de manera general, como medios artificiales que presentan propiedades electromagnéticas especiales (propagación de ondas de retroceso, refracción negativa, presencia de bandas prohibidas,...) que no se encuentran en la naturaleza.

Los metamateriales están formados por diferentes estructuras que se disponen de manera periódica. La distancia entre las mismas (tamaño de celda p) cumple la condición de homogeneidad efectiva (1) que nos permite considerar al medio como homogéneo y por tanto definir unos parámetros constitutivos efectivos (permitividad (ϵ) y permeabilidad (μ)) que caracterizan al mismo.

La condición de homogeneidad establece que si el tamaño de celda es mucho menor que la longitud de onda de la onda incidente λ_g , el medio se puede considerar homogéneo dentro de una banda de frecuencias:

$$p < \frac{\lambda_g}{4} \quad (1)$$

Los parámetros constitutivos que caracterizan al material, se relacionan mediante el índice de refracción:

$$n = \pm \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \quad (2)$$

donde ϵ_r y μ_r son la permitividad y permeabilidad relativas al vacío.

Atendiendo a los posibles signos de los parámetros constitutivos relativos los materiales pueden clasificarse en cuatro grupos como indica la Figura 2.

En los cuadrantes (a) y (d) tenemos medios de índice de refracción imaginario lo que da lugar a ondas evanescentes y no se produce propagación, por tanto este tipo de medios carece de interés.

En cambio, en los medios de los cuadrantes (b) y (c) sí se produce propagación. En el cuadrante (b), donde $\epsilon > 0$ y $\mu > 0$, se sitúan los medios dieléctricos ordinarios, mientras que en (c), donde $\epsilon < 0$ y $\mu < 0$, los metamateriales.

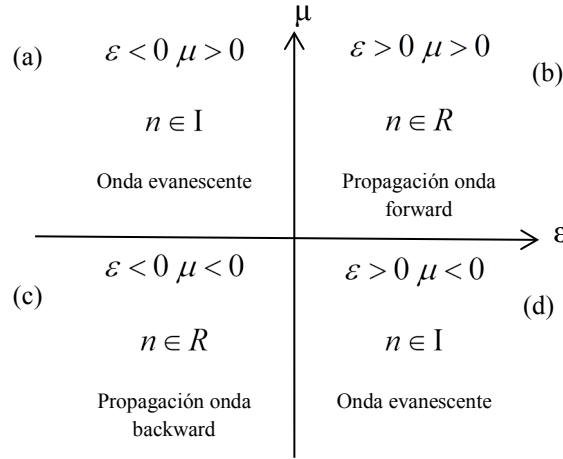


Figura 2: Clasificación de los materiales según sus parámetros constitutivos relativos.

De acuerdo a esta idea, se puede concretar la definición de metamateriales como aquellos materiales que poseen permitividad (ϵ) y permeabilidad (μ) negativas simultáneamente. Debido a esta característica, a este tipo de medios también se les suele denominar como medios DNG (double negative).

En la siguiente sección se describen algunas de las propiedades más importantes que hacen de los medios DNG unos materiales especiales.

1.2 Propiedades de un medio zurdo

Como se mencionó con anterioridad, un medio DNG es un medio electromagnético que presenta permitividad (ϵ) y permeabilidad (μ) negativas simultáneamente. Veamos en qué medida afecta este cambio de signos a las ecuaciones de una onda que se transmita a través del metamaterial.

Para este tipo de medios la ecuación de ondas en su forma general (3) no cambia, ya que al aparecer el producto de los parámetros constitutivos se cancelen los signos de los mismos:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \overline{E} = 0 \quad (3)$$

Sin embargo, las ecuaciones de Maxwell para ondas planas sí cambian. Considerando un medio sin pérdidas y en regiones sin fuentes, estas toman una forma diferente:

$$\begin{aligned}\vec{k} \cdot \vec{E} &= 0 & \vec{k} \cdot \vec{H} &= 0 \\ \vec{k} \times \vec{E} &= \mu\omega\vec{H} & \vec{k} \times \vec{H} &= -\epsilon\omega\vec{E}\end{aligned}\quad (4)$$

A diferencia de lo que sucede con los medios ordinarios, en las dos últimas ecuaciones de (4) para un medio DNG se observa que, debido a los signos de la permitividad y permeabilidad, el campo magnético ($\vec{H}$) resulta ser antiparalelo al rotacional del campo eléctrico y el campo eléctrico ($\vec{E}$) antiparalelo al rotacional del campo magnético. Esto hecho introduce un cambio muy importante en el triedro formado por el campo eléctrico $\vec{E}$, el campo magnético $\vec{H}$ y el vector de onda $\vec{k}$.

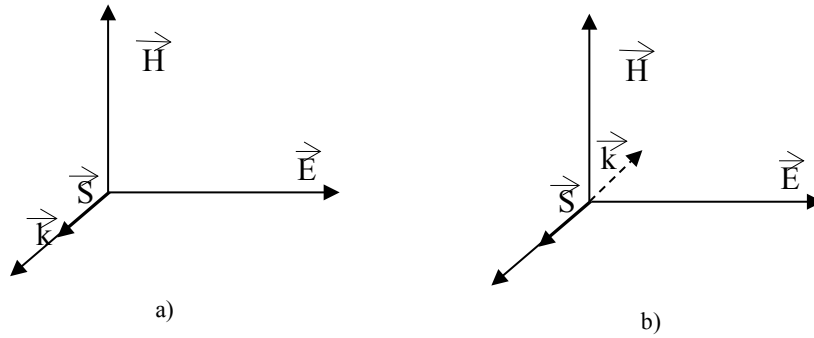


Figura 3: Representación del campo eléctrico $\vec{E}$, magnético $\vec{H}$, vector de Poynting $\vec{S}$ y vector de onda $\vec{k}$ para un medio ordinario (a) y para un medio DNG (b).

Como se puede apreciar en la Figura 3, a consecuencia de los signos negativos de los parámetros constitutivos del medio, el vector de onda $\vec{k}$ cambia de sentido resultando antiparalelo al vector de Poynting $\vec{S}$, cuya dirección indica la dirección de propagación de la energía.

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (5)$$

Por tanto, las velocidades de fase $\vec{v}_p$ y de grupo $\vec{v}_g$ de la onda tienen direcciones opuestas dentro del metamaterial.

$$\vec{v}_p = \frac{\omega}{\vec{k}} \quad (6)$$

A las ondas que se propagan por el metamaterial de esta forma, velocidad de fase y de grupo opuestas, se las denomina ondas backward u ondas de retroceso. De la existencia de este tipo de ondas en el metamaterial provienen otras formas utilizadas para denominar al medio DNG: medio BW (backward-wave), medio NPV (negative phase velocity) o medio LH (left handed, zurdo).

Con el fin de generalizar la ecuación (2) a cualquier tipo de medio, incluidos los medios LH, se puede introducir el término s , el cual nos indicará si el material en cuestión es un dieléctrico convencional o un metamaterial DNG.

$$n = s\sqrt{\epsilon_r\mu_r} \quad (7)$$

$$\text{donde } s = \begin{cases} +1 & \text{para dieléctricos ordinarios} \\ -1 & \text{para materiales DNG} \end{cases} \quad (8)$$

El hecho de que en los medios DNG resulten unas velocidades de fase y de grupo antiparalelas produce una serie de propiedades características de este tipo de medios como por ejemplo, la inversión de la ley de Snell y del efecto Doppler.

A. Refracción negativa, ley de Snell

Se trata del más interesante de los fenómenos que se invierten para medios zurdos y uno de los primeros observados por Veselago [1], precursor en la investigación de los metamateriales.

La ley de Snell enuncia que al incidir una onda sobre la superficie límite de separación entre dos medios, la relación entre el ángulo de incidencia θ_1 y el ángulo de refracción θ_2 , resulta:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \quad (9)$$

donde n_1 y n_2 son los índices de refracción de cada uno de los medios.

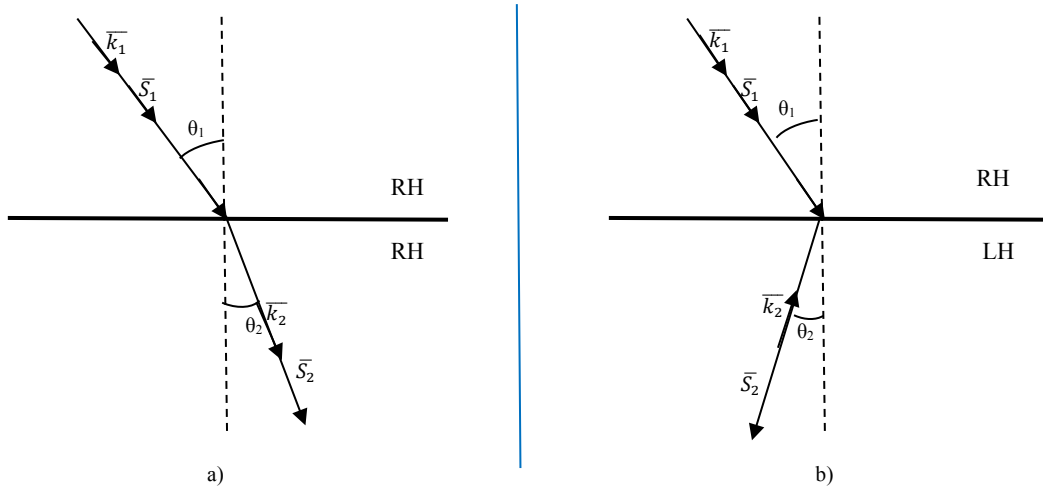


Figura 4: Refracción en la superficie de separación de a) dos medios diestros y b) uno medio diestro y otro zurdo.

Cuando uno de los medios es un medio DNG la ecuación anterior se modifica debido al signo negativo del índice de refracción del mismo. En este caso, la componente normal a la superficie de los vectores de onda incidente y refractado, $\vec{k}_1$ y $\vec{k}_2$, son antiparalelas entre sí (ver Figura 4) y la refracción se invierte.

De forma general, y de acuerdo a (8) la ecuación de Snell se puede escribir de la forma:

$$s_1 |n_1| \sin \theta_1 = s_2 |n_2| \sin \theta_2 \quad (10)$$

El fenómeno de la refracción negativa fue observado por primera vez de manera experimental en 2001 por R. Shelby et al. [2], para ello se utilizó el dispositivo de la Figura 5.

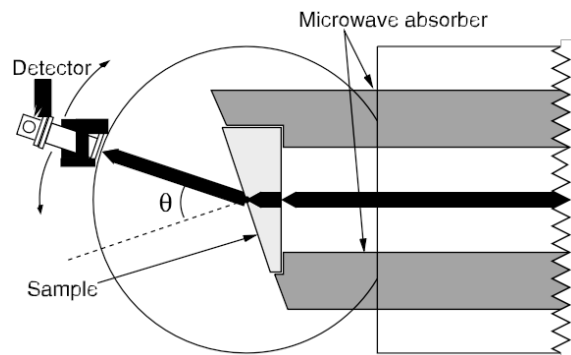


Figura 5: Esquema del dispositivo utilizado por Shelby para demostrar la refracción inversa (Fuente [2]).

B. Efecto Doppler inverso

Otro de los efectos clásicos que también varía cuando las ondas se propagan por un metamaterial es el efecto Doppler. Para un medio en general, cuando se introduce en él una fuente F moviéndose en la dirección z con una velocidad v , que irradia de manera homogénea con una frecuencia angular ω , y que se aleja de un observador O situado también en el eje z , Figura 6, la radiación percibida por el observador tendrá la forma:

$$\overline{E}(z, t), \overline{H}(z, t) \propto \frac{e^{j\varphi(\omega, t)}}{z} \quad (11)$$

mientras que la fase φ vendrá dada por la siguiente expresión:

$$\varphi = \omega t - kv t = \left(1 - \frac{k}{\omega} v\right) \omega t = \left(1 - \frac{v}{v_p}\right) \omega t = (1 - \Delta\omega) \omega t \quad (12)$$

donde k representa el número de onda y $\Delta\omega$ se denomina corrimiento Doppler.

En consecuencia, cuando el medio por el que se propagan las ondas sea un dieléctrico ordinario la frecuencia de las ondas percibidas disminuye (corrimiento al rojo), lo cual equivale a que $\Delta\omega$ sea positivo. En cambio, cuando el medio sea DNG la frecuencia de las ondas percibidas aumenta (corrimiento al azul) y resultará un $\Delta\omega$ negativo.

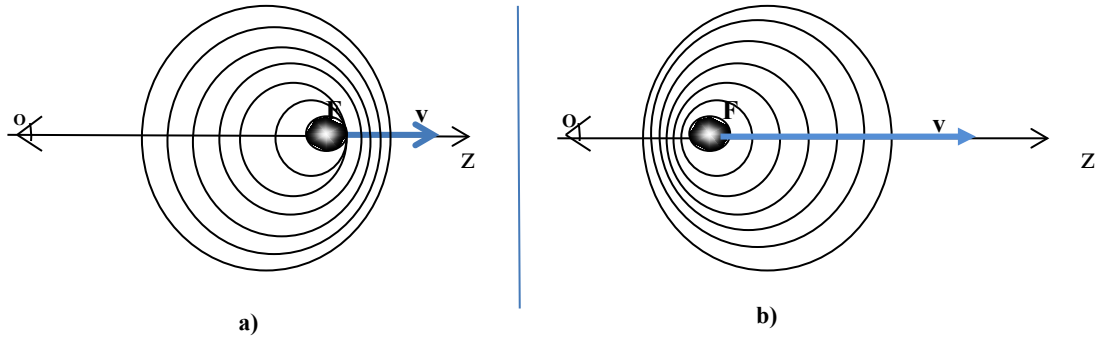


Figura 6: Efecto Doppler en a) un medio diestro y b) un medio zurdo.

C. Otros efectos

Además de los efectos comentados anteriormente existen otros que conviene resaltar, pero que, debido a la profundidad de su análisis, únicamente se ha optado por numerar alguno de los más importantes:

- La convergencia y divergencia en lentes cóncavas y convexas [1].
- Los coeficientes de Fresnel [3].
- La radiación de Vavilov-Cerenkov inversa [1].
- El efecto de Goos-Hänchen inverso [3].

1.3 Diseño de un medio zurdo

A la hora de enfrentarse a la tarea de diseñar un metamaterial se ha de tener en cuenta su complejidad de construcción puesto que no existe de forma natural.

Aunque la existencia de medios con ϵ y μ negativos fue predicha por Veselago [1], no fue hasta 30 años después en Mayo del 2000 cuando D. R. Smith et al. [4] propusieron la primera estructura de un medio zurdo, para lo cual optaron por superponer dos estructuras que habían sido estudiadas anteriormente por Pendry, una con $\epsilon < 0$ y otra con $\mu < 0$.

- Para obtener una permitividad negativa se utilizó el alambre delgado o Thin-wire (TW) [5], que proporciona una $\epsilon < 0$ cuando el campo eléctrico lleva la dirección de los alambres (dirección z en la Figura 7a).
- Por otro lado, para conseguir la permeabilidad negativa se usó split-ring resonator (SRR) [6], que proporciona una $\mu < 0$ cuando el campo magnético es perpendicular al plano de los anillos (dirección y en la Figura 7b).

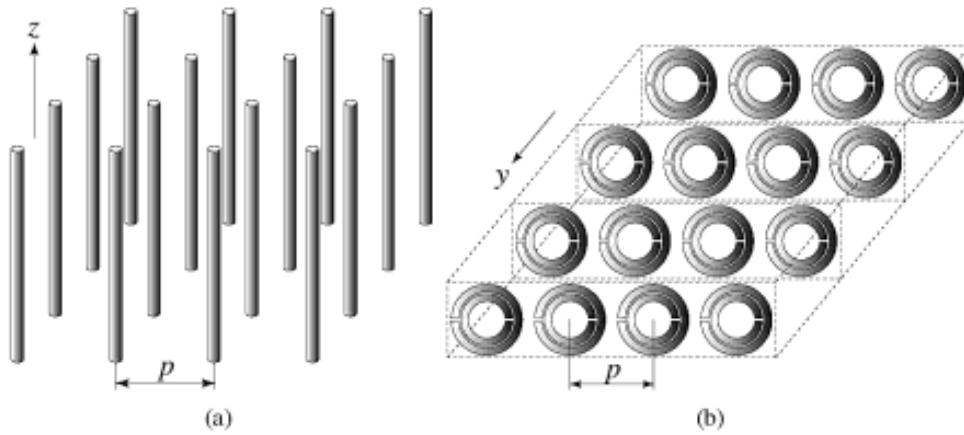


Figura 7: Estructuras propuestas por Pendry: a) Thin-wire, que produce $\varepsilon < 0$. b) Split ring resonator, que produce $\mu < 0$. (Fuente [3])

Smith demostró experimentalmente [4] que al combinar las dos estructuras (TW y SRR) de manera adecuada en una estructura compuesta, proporcionaba permitividad y permeabilidad negativas y lo más difícil, en la misma banda de frecuencias.

La primera estructura era sencilla, monodimensional, pero después se mejoró el diseño consiguiendo estructuras más complejas, Figura 8.

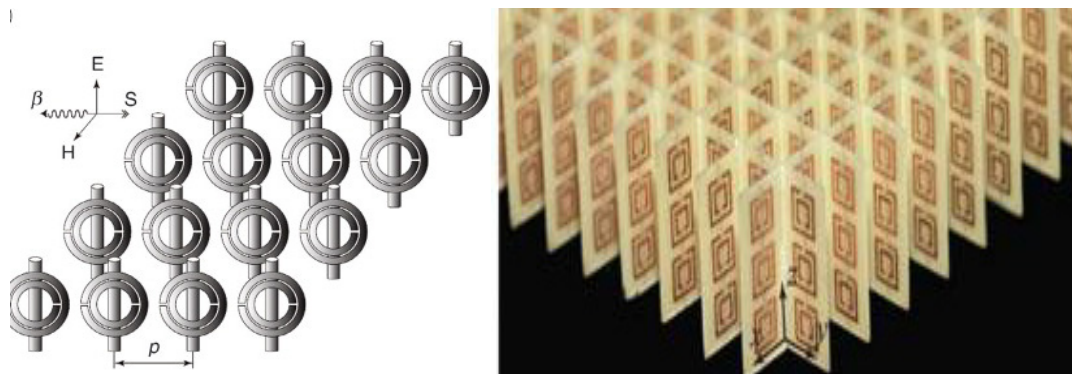


Figura 8: Diferentes estructuras de un material zurdo.

1.4 Historia de los metamateriales

Aunque existen muchos precedentes en el tema de los metamateriales, nombraremos cronológicamente algunos de los más relevantes.

Alrededor de 1944 L.I. Mandelstam [7] estudió cómo se propagarían las ondas electromagnéticas con velocidad de fase y de grupo antiparalelas.

Aunque tenía grandes dudas acerca de su existencia, el primero en hablar sobre la posibilidad de que los parámetros constitutivos fueran negativos simultáneamente en un mismo material fue D.V. Sivukhin en 1957 [8].

Más tarde se realizaron estudios acerca de como afectaba la negatividad de los parámetros constitutivos a diferentes campos. Uno de ellos fue V.E. Pafomov [9], que se centró en el desarrollo del efecto Cherenkov en medios DNG. Una gran parte de estos estudios se basaban en que la velocidad de fase y de grupo eran antiparalelas en medios con permitividad y permeabilidad negativas.

Pero fue el físico ruso V. G. Veselago, en 1968, el primero en conectar todas estas líneas de investigación en su artículo [1], donde se demuestra de forma teórica la existencia de medios zurdos (aunque todavía no se denominaban de esta forma) diferenciándolos de los medios diestros. En su artículo, Veselago prevé que estas sustancias tienen algunas propiedades diferentes a los materiales con ambas cantidades positivas, por ello estudia la manera en que se propagan las ondas en estos materiales (relación antiparalela entre la velocidad de fase y de grupo) y en la superficie entre un medio diestro y otro zurdo (refracción negativa).

La predicción de Veselago fue confirmada experimentalmente años después por D. Smith [4] cuando crea un material con índice de refracción negativo basándose en los estudios de Pendry [5] - [6] (ver apartado anterior).

A partir de estos avances, surgió un gran abanico de campos de investigación basados en los metamateriales hasta convertirse en uno de los temas de investigación más activos en electromagnetismo en la actualidad [10].

1.5 Aplicaciones

El potencial de los metamateriales es tan elevado debido a que continuamente se están logrando nuevos avances tanto a nivel teórico como experimental. Hasta la fecha, algunas de las aplicaciones que más interés han despertado son las de la lente perfecta y la invisibilidad.

A. Superresolución: Lente perfecta

La característica principal de este sistema óptico es su capacidad de superar el límite óptico de difracción.

Llegados a este punto, conviene recordar que la capacidad de resolución de un sistema óptico está limitada por la longitud de onda utilizada para iluminar el objeto. Si el objeto es menor que la longitud de onda, las ondas se atenúan y no llegan a formar la imagen (ondas evanescentes).

Por tanto, el objetivo de la lente perfecta es amplificar las ondas evanescentes para que la resolución no dependa de la longitud de onda (superresolución). Para ello J.B. Pendry en [11] propuso introducir un metamaterial de índice -1 en el sistema óptico como muestra la Figura 9.

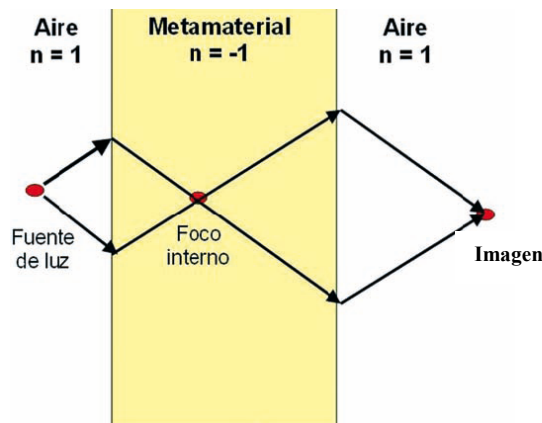


Figura 9: Esquema de una lente perfecta.

En su trabajo, Pendry expone que los metamateriales con $\epsilon_r = -1$ y $\mu_r = -1$ amplifican las ondas evanescentes presentes en el sistema óptico. Por tanto, un metamaterial puede utilizarse para crear una lente perfecta en el sentido de que no hay reflexión fuera del mismo, está libre de aberraciones y transmite las ondas evanescentes al igual que las ondas planas.

Unas de las primeras demostraciones sobre el funcionamiento real de una lente perfecta a frecuencias ópticas fue la realizada por Hyesog Lee y Nicholas Fang [12]-[13] en 2005. Para ello utilizaron una lámina de plata de 35nm de espesor obteniendo una permitividad negativa. Al utilizar esta lámina como lente perfecta consiguieron reconstruir una imagen con detalles más pequeños que la longitud de onda incidente que era de 365 nm, Figura 10.

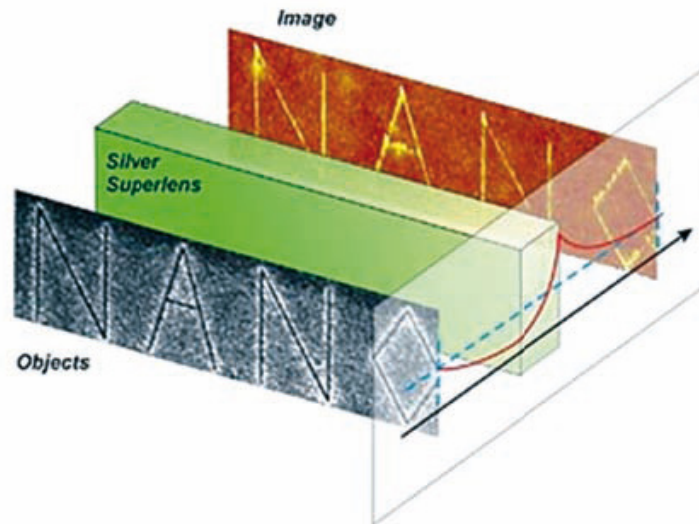


Figura 10: Sistema óptico que utiliza como lente perfecta una lámina de plata. En rojo se puede observar la amplificación de la onda evanescente.

En la actualidad, se están obteniendo buenos resultados de metamateriales capaces de trabajar en el visible. Este avance permitirá observar objetos con tamaños de nanómetro como las cadenas de ADN sin necesidad de utilizar el microscopio electrónico.

B. Invisibilidad

La segunda y última aplicación que se va a comentar se corresponde con la invisibilidad. La creación de un “manto de invisibilidad” que haga que aquella región a la que cubre sea invisible está todavía lejos del alcance de la tecnología actual, aunque es un campo que causa gran interés.

Un objeto es visible porque las ondas electromagnéticas interactúan con él reflejándose y refractándose en su superficie. Este comportamiento de las ondas viene regido por el índice de refracción del medio, de este modo, una forma de hacer invisible el objeto es modificar su índice de refracción. Como ya se ha comentado los metamateriales se pueden fabricar con un índice de refracción determinado, por lo que es un firme candidato para crear un manto de invisibilidad.

Para ello, se cubriría el objeto con un metamaterial que sea capaz de curvar las ondas de manera que éstas rodeen el objeto, como si fueran un fluido, y continuarían su trayectoria como si el espacio que ocupa el objeto estuviera vacío, Figura 11.

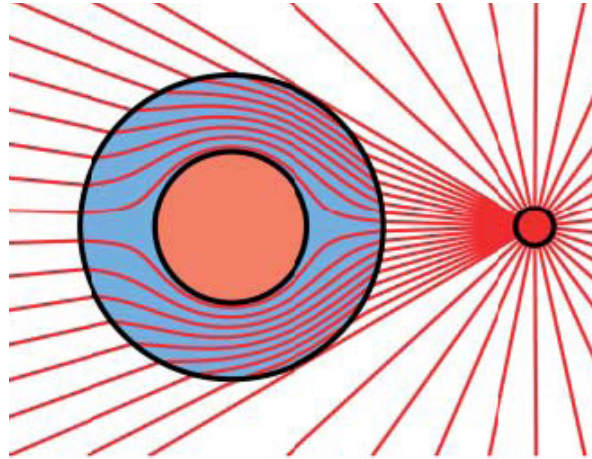


Figura 11: Diagrama de los rayos que son redirigidos por el metamaterial para ocultar el objeto (Fuente [14]).

Los principales inconvenientes que presenta este sistema son, que sólo es válido para un rango pequeño de frecuencias y que es muy dispersivo, por lo que provoca grandes pérdidas de señal. Por otro lado, las ondas dentro del metamaterial deberían tener una velocidad de fase mayor que las que viajan fuera del mismo lo que resulta imposible si las ondas fueran viajan a la velocidad de la luz. Además, el sistema sería único para cada objeto, es decir, si el objeto cambia de tamaño o de forma, la capa de invisibilidad debería ser rediseñada y reconstruida para poder ocultarlo por completo.

Dentro del interesante tema de investigación acerca de la manera de redirigir los campos electromagnéticos y el ocultamiento de objetos puede destacarse el trabajo de J.B. Pendry junto a D. Shurig y D.R. Smith [14]. Más recientemente se ha publicado por el sistema de observación y prospección tecnológica (SOPT) del ministerio de defensa un estudio [15] acerca de los metamateriales y sus potenciales aplicaciones relacionadas con defensa, incluyendo las líneas de investigación actuales que se llevan a cabo a este respecto en dicho ministerio. Es claro que, de conseguirse la invisibilidad a cualquier tipo de frecuencia, sería un logro muy útil para la defensa.

Capítulo 2: Desarrollo matemático

2.1 Vectores auxiliares

Tal y como se puede leer en cualquier libro de electromagnetismo básico, la solución del problema de propagación del campo electromagnetismo es única y ésta se obtiene a partir de la resolución de las ecuaciones de Maxwell y de la imposición de una serie de condiciones de contorno.

En algunos casos, el abordaje directo de las ecuaciones de Maxwell sobre los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ y la posterior aplicación de las condiciones de contorno, resulta ser una tarea ardua que se puede simplificar a través de la introducción de ciertos vectores auxiliares, que son funciones matemáticas, a partir de los cuales se obtendrá la solución deseada de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ [16]. Es decir, en primer lugar se resuelve el problema con los vectores auxiliares $\mathbf{A}$ y $\mathbf{F}$ para, a partir de ellos se obtiene los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$, Figura 12.

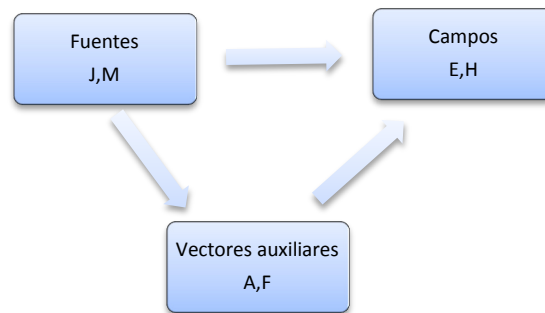


Figura 12: Diagrama que representa el paso por los vectores auxiliares para determinar los campos.

Obtención de los potenciales vector $\mathbf{A}$ y $\mathbf{F}$

Supongamos un campo electromagnético que se propaga por un medio homogéneo, lineal e isótropo. En el caso que no existan fuentes, las ecuaciones de Maxwell se reducen a:

$$\nabla \vec{E} = 0 \quad (13)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (14)$$

$$\nabla \vec{H} = 0 \quad (15)$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} \quad (16)$$

Además, puesto que el flujo de campo magnético es un vector solenoidal, se puede definir un vector $\mathbf{A}$, que cumple:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B} = \mu \vec{H} = \nabla \times \vec{A} \quad (17)$$

A partir de la cual podemos expresar el campo magnético como:

$$\vec{H}_A = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \quad (18)$$

Sustituyendo (17) en (14) se obtiene:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} = -j\omega(\nabla \times \vec{A}) \rightarrow \nabla \times [\vec{E} + j\omega\vec{A}] = 0 \rightarrow \nabla \times (-\nabla\phi_e) = 0 \quad (19)$$

donde ϕ_e es el potencial eléctrico escalar, que es función de la posición.

A partir de (19) se obtiene la relación entre el potencial vector $\mathbf{A}$ y el campo eléctrico:

$$\vec{E}_A = -\nabla\phi_e - j\omega\vec{A} \quad (20)$$

Por otro lado, puesto que la divergencia de $\mathbf{A}$ es independiente de la curva, podemos definirla del siguiente modo:

$$\nabla \cdot \vec{A} = -j\omega\mu\epsilon\phi_e \quad (21)$$

En consecuencia, podemos comprobar que el potencial vector $\mathbf{A}$ cumple la ecuación de ondas siguiente:

$$\nabla^2 \vec{A} + \beta^2 \vec{A} = 0 \quad (22)$$

Y el campo eléctrico resulta:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla\phi_e - j\omega\vec{A} = -j\omega\vec{A} + \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) \rightarrow \\ &\rightarrow \vec{E}_A = -j\omega\vec{A} - j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) \end{aligned} \quad (23)$$

Siguiendo un procedimiento análogo se obtiene otra relación adicional que liga a un nuevo potencial vector $\mathbf{F}$ con los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ mediante las expresiones.

$$\vec{E}_F = -\frac{1}{\epsilon} (\nabla \times \vec{F}) \quad (24)$$

$$\vec{H}_F = -j\omega\vec{F} - \frac{j}{\omega\mu\epsilon} \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{F}) \quad (25)$$

Una vez conocido las expresiones de los potenciales vector $\mathbf{A}$ y $\mathbf{F}$, el campo $\mathbf{E}$ se obtiene de las ecuaciones (23) y (24) aplicando el principio de superposición:

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_F = -j\omega\vec{A} - j\frac{1}{\omega\mu\epsilon}\nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \frac{1}{\epsilon}(\nabla\times\vec{F}) \rightarrow \quad (26)$$

$$\rightarrow \vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon}(\nabla\times\vec{H}_A) - \frac{1}{\epsilon}(\nabla\times\vec{F}) \quad (27)$$

Y, de forma equivalente, el campo $\mathbf{H}$ de (18) y (25):

$$\vec{H} = \vec{H}_A + \vec{H}_F = \frac{1}{\mu}(\nabla\times\vec{A}) - j\omega\vec{F} - \frac{j}{\omega\mu\epsilon}\nabla\cdot(\nabla\cdot\vec{F}) \rightarrow \quad (28)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}(\nabla\times\vec{A}) - \frac{1}{j\omega\mu}(\nabla\times\vec{E}_F) \quad (29)$$

2.2 Soluciones

La forma en la que puede aparecer la solución del problema de propagación del campo electromagnético en el interior de una estructura de guiado no es única. Así, existen varias configuraciones de los campos (modos de propagación) que verifican las ecuaciones de Maxwell. De entre todos los tipos de modos disponibles, los más destacados son: el modo transversal electromagnético (TEM), el modo transversal eléctrico (TE) y el modo transversal magnético (TM).

El modo TEM no tiene componente del campo eléctrico y ni del campo magnético en la dirección de propagación y sólo aparece cuando hay más de un conductor. En el caso que nos ocupa, el de la guía de onda rectangular, puesto que sólo existe un conductor, el modo TEM no se propaga.

El modo TE (o TE^z) se caracteriza por tener nula la componente del campo eléctrico que está en la dirección de propagación (dirección z), de forma equivalente el modo TM (o TM^z) tiene nula la componente del campo magnético en dicha dirección. Si la componente nula del campo eléctrico (campo magnético) no está en la dirección de propagación del campo, los modos se denotan como TE^i (TM^i), donde i indica la dirección en la que el campo correspondiente es nulo ($i = x, y$).

Cuando se analiza el problema de propagación en el interior de una guía de onda rectangular vacía, la solución más sencilla se corresponde con los modos TE^z y TM^z por separado. Sin embargo, cuando la guía se llena parcialmente estos modos de manera independiente no cumplen las condiciones de contorno.

En el caso que nos ocupa la discontinuidad se encuentra en la dirección y (Figura 1), y el slab del material es de altura completa. Por tanto, los modos más adecuados para describir el campo resultan ser los TE^x y TM^x , ya que carecen de componente en la dirección normal a la discontinuidad (dirección x) del campo $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$, respectivamente. Esto hace que la resolución de dichos modos sea más sencilla.

• Modo TM^x

Comenzaremos el análisis con el modo TM^x y a partir de los resultados obtenidos lo trasladaremos al modo TE^x .

Puesto que el modo transversal magnético a x tiene la componente de $\mathbf{H}$ en la dirección x nula ($TM^x \rightarrow H_x = 0$) se toman los potenciales $\mathbf{F}$ y $\mathbf{A}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= A_x(x, y, z) \hat{a}_x \\ \vec{F} &= 0\end{aligned}\tag{30}$$

Sustituyendo (30) en (28) resulta un campo magnético con componentes en la dirección “ y ” y “ z ”, como se pretendía

$$\vec{H} = H_y \hat{u}_y + H_z \hat{u}_z\tag{31}$$

Puesto que el vector potencial $\mathbf{A}$ ha de cumplir la ecuación de ondas (22), introducimos la forma $\vec{A} = A_x(x, y, z) \hat{a}_x$ en la misma y ésta queda reducida a una ecuación escalar:

$$\nabla^2 A_x(x, y, z) + k^2 A_x(x, y, z) = 0\tag{32}$$

que se puede resolver utilizando el método de separación de variables:

$$A_x(x, y, z) = f(x) g(y) h(z)\tag{33}$$

Para el caso de la guía de onda rectangular la forma más adecuada de las funciones f , g y h es:

$$A_x(x, y, z) = [C_1 \cos(k_x x) + D_1 \sin(k_x x)] [C_2 \cos(k_y y) + D_2 \sin(k_y y)] A_3 e^{-j\beta z}\tag{34}$$

donde k_x , k_y y β vienen dados por la relación de dispersión:

$$k_x^2 + k_y^2 + \beta^2 = k^2 = \omega^2 \mu \epsilon\tag{35}$$

Como se comentó en la introducción, se ha considerado las ondas viajando en el sentido positivo de la dirección z , por lo cual la dependencia en dicha dirección es $A_3 e^{-j\beta z}$.

Una vez obtenida la expresión del potencial $\mathbf{A}$, las componentes del campo eléctrico ($\mathbf{E}$) y magnético ($\mathbf{H}$) en función del mismo son:

$$\begin{aligned} E_x &= -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \right) A_x & H_x &= 0 \\ E_y &= -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y} & H_y &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ E_z &= -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} & H_z &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{aligned} \quad (36)$$

• Modo TE^x

Siguiendo un razonamiento análogo para el modo TE^x , se llega a que el potencial $\mathbf{F}$ toma la forma:

$$F_x(x, y, z) = [C_1 \cos(k_x x) + D_1 \text{sen}(k_x x)] [C_2 \cos(k_y y) + D_2 \text{sen}(k_y y)] A_3 e^{-j\beta z} \quad (37)$$

Y las componentes del campo electromagnético en función del potencial $\mathbf{F}$ que se obtienen son:

$$\begin{aligned} E_x &= 0 & H_x &= -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \right) F_x \\ E_y &= -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial F_x}{\partial z} & H_y &= -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \frac{\partial^2 F_x}{\partial x \partial y} \\ E_z &= \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial F_x}{\partial y} & H_z &= -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \frac{\partial^2 F_x}{\partial x \partial z} \end{aligned} \quad (38)$$

Las expresiones del campo (en función de los potenciales $\mathbf{A}$ y $\mathbf{F}$) obtenidas para los modos TM^x y TE^x (36) y (38) nos permiten aplicar las condiciones de contorno de la guía de forma sencilla.

• Guía vacía

Previamente a resolver el caso que nos interesa es necesario analizar el caso de la guía vacía, Figura 13. Para lo cual se debe aplicar las condiciones de contorno que implican las paredes de la guía.

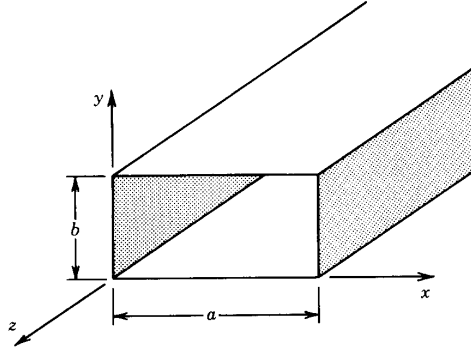


Figura 13: Guía de onda rectangular vacía.

Las componentes del campo electromagnético tangenciales a las paredes han de anularse, por tanto las condiciones de contorno son:

$$\begin{aligned} E_x(0 \leq x \leq a, y = 0, z) &= E_x(0 \leq x \leq a, y = b, z) = 0 \\ E_z(0 \leq x \leq a, y = 0, z) &= E_z(0 \leq x \leq a, y = b, z) = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} E_y(x = 0, 0 \leq y \leq b, z) &= E_y(x = a, 0 \leq y \leq b, z) = 0 \\ E_z(x = 0, 0 \leq y \leq b, z) &= E_z(x = a, 0 \leq y \leq b, z) = 0 \end{aligned}$$

La componente E_z en términos del potencial F se obtiene sustituyendo (37) en (38):

$$E_z = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{k_y}{\varepsilon} [C_1 \cos(k_x x) + D_1 \text{sen}(k_x x)] [-C_2 \text{sen}(k_y y) + D_2 \cos(k_y y)] A_3 e^{-j\beta z} \quad (40)$$

A continuación se aplican las condiciones de contorno en las paredes inferior ($y = 0$), superior ($y = b$), izquierda ($x = 0$) y derecha ($x = a$) de la guía:

- $E_z(0 \leq x \leq a, y = 0, z) = 0$:

$$\frac{k_y}{\varepsilon} [C_1 \cos(k_x x) + D_1 \text{sen}(k_x x)] [D_2] A_3 e^{-j\beta z} = 0 \Rightarrow D_2 = 0$$

Luego:

$$E_z = \frac{k_y}{\varepsilon} [C_1 \cos(k_x x) + D_1 \text{sen}(k_x x)] [-C_2 \text{sen}(k_y y)] A_3 e^{-j\beta z}$$

- $E_z(0 \leq x \leq a, y = b, z) = 0$:

$$\frac{k_y}{\varepsilon} [C_1 \cos(k_x x) + D_1 \text{sen}(k_x x)] [-C_2 \text{sen}(k_y b)] A_3 e^{-j\beta z} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}(k_y b) = 0 \Rightarrow k_y b = n\pi \Rightarrow k_y = \frac{n\pi}{b}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (41)$$

- $E_z(x = 0, 0 \leq y \leq b, z) = 0$:

$$\frac{k_y}{\varepsilon} [C_1] [-C_2 \text{sen}(k_y y)] A_3 e^{-j\beta z} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

Luego:

$$E_z = -\frac{k_y}{\varepsilon} [D_1 \text{sen}(k_x x)] [C_2 \text{sen}(k_y y)] A_3 e^{-j\beta z} \quad (42)$$

- $E_z(x = a, 0 \leq y \leq b, z) = 0$:

$$-\frac{k_y}{\varepsilon} [D_1 \text{sen}(k_x a)] [C_2 \text{sen}(k_y y)] A_3 e^{-j\beta z} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_x a = m\pi \Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a}; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (43)$$

Agrupando constantes ($A_{mn} = D_1 C_2 A_3$) el potencial F resulta:

$$F_x(x, y, z) = A_{mn} \text{sen}(k_x x) \cos(k_y y) e^{-j\beta z} \quad (44)$$

Procediendo de forma análoga con el potencial A obtenemos la expresión:

$$A_x(x, y, z) = B_{mn} \cos(k_x x) \text{sen}(k_y y) e^{-j\beta z} \quad (45)$$

Los valores de m y n son números enteros que indican el índice del modo y no pueden ser simultáneamente nulos porque la solución que se obtiene es trivial.

$$\text{Si } n = 0 \rightarrow m \neq 0 \quad (46)$$

• Guía parcialmente llena

Una vez conocida la solución para la guía vacía se procede a resolver el problema de la guía parcialmente llena, Figura 14. En este caso además de las condiciones de contorno sobre las paredes debemos tener en cuenta las de la discontinuidad.

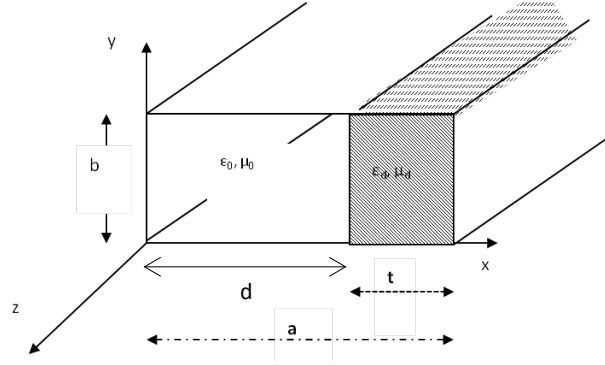


Figura 14: Guía parcialmente llena de un metamaterial con parámetros ϵ_r y μ_r .

Para resolver el problema de una forma más sencilla analizamos el campo electromagnético como la composición del campo en la parte vacía (E^0 y H^0) y en la parte del material (E^d y H^d). De este modo, las condiciones de contorno sobre las paredes de la guía son:

$$E_z^d(d \leq x \leq a, y = 0, z) = E_z^d(d \leq x \leq a, y = b, z) = 0 \quad (47)$$

$$E_z^d(x = a, 0 \leq y \leq b, z) = 0 \quad (48)$$

$$E_z^0(0 \leq x \leq d, y = 0, z) = E_z^0(0 \leq x \leq d, y = b, z) = 0 \quad (49)$$

$$E_z^0(x = 0, 0 \leq y \leq b, z) = 0 \quad (50)$$

$$E_x^d(d \leq x \leq a, y = 0, z) = E_x^d(d \leq x \leq a, y = b, z) = 0 \quad (51)$$

$$E_y^d(x = a, 0 \leq y \leq b, z) = 0 \quad (52)$$

$$E_x^0(0 \leq x \leq d, y = 0, z) = E_x^0(0 \leq x \leq d, y = b, z) = 0 \quad (53)$$

$$E_y^0(x = 0, 0 \leq y \leq b, z) = 0 \quad (54)$$

Sobre la superficie de separación existente entre los dos medios, las componentes de los campos tangenciales a la misma han de ser nulas, por tanto hay que añadir las siguientes condiciones de contorno:

$$E_z^d(x=d, 0 \leq y \leq b, z) = E_z^0(x=d, 0 \leq y \leq b, z) \quad (55)$$

$$H_z^0(x=d, 0 \leq y \leq b, z) = H_z^d(x=d, 0 \leq y \leq b, z) \quad (56)$$

$$E_y^0(x=d, 0 \leq y \leq b, z) = E_y^d(x=d, 0 \leq y \leq b, z) \quad (57)$$

$$H_y^d(x=d, 0 \leq y \leq b, z) = H_y^0(x=d, 0 \leq y \leq b, z) \quad (58)$$

Comenzamos con el modo TE^x para la región vacía, para ello se introduce el potencial vector F (59) en (38) y se obtiene la componente z del campo eléctrico (60).

$$F_x^0(d \leq x \leq a, y, z) = [C_1^0 \cos(k_{x0}x) + D_1^0 \text{sen}(k_{x0}x)] [C_2^0 \cos(k_{y0}y) + D_2^0 \text{sen}(k_{y0}y)] A_3^0 e^{-j\beta z} \quad (59)$$

$$E_z^0 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial F_x^0}{\partial y} = \frac{k_{y0}}{\epsilon_0} [C_1^0 \cos(k_{x0}x) + D_1^0 \text{sen}(k_{x0}x)] [-C_2^0 \text{sen}(k_{y0}y) + D_2^0 \cos(k_{y0}y)] A_3^0 \cdot e^{-j\beta z} \quad (60)$$

A continuación se aplica la condición de contorno (49) obteniendo:

$$E_z^0(0 \leq x \leq d, y=0, z) = \frac{k_{y0}}{\epsilon_0} [C_1^0 \cos(k_{x0}x) + D_1^0 \text{sen}(k_{x0}x)] \cdot D_2^0 \cdot A_3^0 \cdot e^{-j\beta z} = 0 \Rightarrow D_2^0 = 0$$

$$E_z^0(0 \leq x \leq d, y=b, z) = \frac{k_{y0}}{\epsilon_0} [C_1^0 \cos(k_{x0}x) + D_1^0 \text{sen}(k_{x0}x)] \cdot [-C_2^0 \text{sen}(k_{y0}b)] \cdot A_3^0 \cdot e^{-j\beta z} = 0 \Rightarrow$$

$$\text{sen}(k_{y0}b) = 0 \Rightarrow k_{y0}b = \pi \cdot n \Rightarrow k_{y0} = \frac{n\pi}{b}; n = 0, 1, 2, \dots$$

Por otro lado con la condición (50) se anula otra de las constantes:

$$E_z^0(x=0, 0 \leq y \leq b, z) = \frac{k_{y0}}{\epsilon_0} \cdot C_1^0 \cdot [-C_2^0 \text{sen}(k_{y0}y)] \cdot A_3^0 \cdot e^{-j\beta z} = 0 \Rightarrow C_1^0 = 0$$

Agrupando las constantes ($D_1^0 \cdot C_2^0 \cdot A_3^0 = A_{mn}^0$), la componente del campo eléctrico en la dirección z se puede reescribir de la forma:

$$E_z^0 = -\frac{k_{y0}}{\epsilon_0} A_{mn}^0 \cdot \text{sen}(k_{x0}x) \cdot \text{sen}(k_{y0}y) \cdot e^{-j\beta z} \quad (61)$$

Y el potencial vector F como:

$$F_x^0 = A_{mn}^0 \cdot \text{sen}(k_{x0}x) \cdot \cos(k_{y0}y) \cdot e^{-j\beta z} \quad (62)$$

De manera análoga para la región del dieléctrico se utilizan las condiciones (47) y (48), obteniéndose las expresiones:

$$E_z^d = -\frac{k_{yd}}{\epsilon_d} A_{mn}^d \text{sen}(k_{xd}(a-x)) \text{sen}(k_{yd}y) e^{-j\beta z} \quad (63)$$

$$F_x^d = A_{mn}^d \cdot \text{sen}(k_{xd}(a-x)) \cdot \cos(k_{yd}y) \cdot e^{-j\beta z} \quad (64)$$

Donde k_y resulta ser la misma en las dos regiones:

$$k_{yd} = k_{y0} = \frac{n\pi}{b} \quad (65)$$

La relación de dispersión se puede escribir para las dos regiones como:

$$k_{x0}^2 + k_{y0}^2 + \beta^2 = k_{x0}^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \beta^2 = k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \quad (66)$$

$$k_{xd}^2 + k_{yd}^2 + \beta^2 = k_{xd}^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \beta^2 = k_d^2 = \omega^2 \mu_d \epsilon_d \quad (67)$$

A partir de las expresiones del campo eléctrico obtenidas, (61) y (63), se aplica (55) para obtener:

$$\frac{k_{y0}}{\epsilon_0} A_{mn}^0 \cdot \text{sen}(k_{x0}d) \cdot \text{sen}(k_{y0}y) = \frac{k_{yd}}{\epsilon_d} A_{mn}^d \text{sen}(k_{xd}(a-d)) \text{sen}(k_{yd}y) \quad (68)$$

y teniendo en cuenta (65) la ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{1}{\epsilon_0} A_{mn}^0 \cdot \text{sen}(k_{x0}d) = \frac{1}{\epsilon_d} A_{mn}^d \text{sen}(k_{xd}(a-d)) \quad (69)$$

Para obtener las componentes H_z^0 y H_z^d se aplica (56) derivando en (38):

$$H_z^0 = -\frac{\beta k_{x0}}{\omega \mu_0 \epsilon_0} A_{mn}^0 \cos(k_{x0}x) \cos(k_{y0}y) e^{-j\beta z} \quad (70)$$

$$H_z^d = \frac{\beta k_{xd}}{\omega \mu_d \epsilon_d} A_{mn}^d \cos(k_{xd}(a-x)) \cos(k_{yd}y) e^{-j\beta z} \quad (71)$$

Introduciendo (56) resulta:

$$-\frac{k_{x0}}{\mu_0 \epsilon_0} A_{mn}^0 \cos(k_{x0}d) = \frac{k_{xd}}{\mu_d \epsilon_d} A_{mn}^d \cos(k_{xd}(a-d)) \quad (72)$$

Dividiendo (69) entre (72) y simplificando se obtiene la ecuación de dispersión para los modos TE^x :

$$-\frac{\mu_0}{k_{x0}} \operatorname{tg}(k_{x0}d) = \frac{\mu_d}{k_{xd}} \operatorname{tg}(k_{xd}(a-d)) \quad (73)$$

Para reducir la ecuación, $t = a - d$ donde t es el espesor del material (Figura 14), luego la expresión resultante es:

$$-\frac{\mu_0}{k_{x0}} \operatorname{tg}(k_{x0}d) = \frac{\mu_d}{k_{xd}} \operatorname{tg}(k_{xd}t) \quad (74)$$

Siguiendo el mismo procedimiento para los modos TM^x utilizando el potencial vector $\mathbf{A}$, se llega finalmente a una expresión similar para la ecuación característica:

$$\frac{k_{x0}}{\varepsilon_0} \operatorname{tg}(k_{x0}d) = -\frac{k_{xd}}{\varepsilon_d} \operatorname{tg}(k_{xd}t) \quad (75)$$

En este caso, cabe destacar que los valores que puede tomar n son números naturales distintos de cero, ya que para este valor el potencial A se anularía como se puede observar en las siguientes expresiones:

$$A_x^0 = B_{mn}^0 \cos(k_{x0}x) \operatorname{sen}(k_{y0}y) e^{-j\beta z} \quad (76)$$

$$A_x^d = B_{mn}^d \cos[k_{xd}(a-x)] \operatorname{sen}(k_{yd}y) e^{-j\beta z} \quad (77)$$

y la solución resultaría trivial.

Se pueden generalizar las ecuaciones (74) y (75) para el caso en el que el primer medio fuese un dieléctrico en lugar del vacío, denominando medio 1 al que se sitúa en la parte vacía (0) y medio 2 al de la parte llena (d). En este caso, las ecuaciones toman la forma:

$$-\frac{\mu_1}{k_{x1}} \operatorname{tg}(k_{x1}d) = \frac{\mu_2}{k_{x2}} \operatorname{tg}(k_{x2}t) \quad \text{modo } TE^x \quad (78)$$

$$\frac{k_{x1}}{\varepsilon_1} \operatorname{tg}(k_{x1}d) = -\frac{k_{x2}}{\varepsilon_2} \operatorname{tg}(k_{x2}t) \quad \text{modo } TM^x \quad (79)$$

A la hora de implementar las expresiones anteriores en MATLAB se han realizado algunas operaciones matemáticas con estas ecuaciones para evitar que se generen problemas de polos. Para ello se ha descompuesto la tangente en senos y cosenos de manera que las ecuaciones programadas son:

$$(\mu_1 k_{x2} + \mu_2 k_{x1}) \operatorname{sen}(k_{x1}d + k_{x2}t) = (-\mu_1 k_{x2} + \mu_2 k_{x1}) \operatorname{sen}(k_{x1}d - k_{x2}t) \quad \text{modo } TE^x \quad (80)$$

$$(\varepsilon_2 k_{x1} + \varepsilon_1 k_{x2}) \text{sen}(k_{x1}d + k_{x2}t) = (-\varepsilon_2 k_{x1} + \varepsilon_1 k_{x2}) \text{sen}(k_{x1}d - k_{x2}t) \quad \text{modo } TM^x \quad (81)$$

Otro aspecto que se ha tenido en cuenta a la hora de escribir el programa es que bajo algunas condiciones k_{x1} puede ser un número imaginario. En este caso se han sustituido las tangentes por tangentes hiperbólicas para que las ecuaciones sean de variable real:

$$\mu_1 k_{x2} \tanh(k_{x1}d) \cos(k_{x2}t) = -\mu_2 k_{x1} \text{sen}(k_{x2}t) \quad \text{modo } TE^x \quad (82)$$

$$\varepsilon_2 k_{x1} \tanh(k_{x1}d) \cos(k_{x2}t) = \varepsilon_1 k_{x2} \text{sen}(k_{x2}t) \quad \text{modo } TM^x \quad (83)$$

Cuando k_{x2} es imaginario se demuestra fácilmente que k_{x1} también lo es a partir de la ecuación que se obtiene al restar (66)–(67):

$$k_{x1}^2 - k_{x2}^2 = (1 - \mu_r \varepsilon_r) k_1^2 \quad (84)$$

donde μ_r y ε_r son los parámetros relativos del medio 2 frente al 1. Por tanto, en este caso habrá que tomar las tangentes hiperbólicas para las dos variables:

$$\mu_1 k_{x2} \tanh(k_{x1}d) = -\mu_2 k_{x1} \tanh(k_{x2}t) \quad \text{modo } TE^x \quad (85)$$

$$\varepsilon_2 k_{x1} \tanh(k_{x1}d) = -\varepsilon_1 k_{x2} \tanh(k_{x2}t) \quad \text{modo } TM^x \quad (86)$$

La solución de las ecuaciones (85) y (86) caso nos describe las ondas superslow, que son ondas con velocidad de grupo mucho menor que la velocidad de fase, es decir, en estas ondas la energía es más lenta que la propia onda.

Capítulo 3: Resultados

Para resolver las ecuaciones características de los modos TE^x y TM^x se implementa un programa en MATLAB. En dicho programa se introducen como datos de entrada las dimensiones de la guía, los parámetros constitutivos de los medios contenidos en la misma y el rango de frecuencia en el que queremos trabajar. Como datos de salida proporciona el valor de las constantes de propagación de los diferentes modos que pueden existir en la guía que contiene el metamaterial en función de la frecuencia.

En nuestro caso, puesto que se considera que no hay pérdidas, la constante de propagación (γ) puede tomar valores reales o imaginarios, dependiendo del valor de la constante de fase (β).

$$\gamma = j\beta \quad (87)$$

$$\begin{aligned} \beta \text{ real} &\rightarrow \gamma \text{ imaginario} \\ \beta \text{ imaginario} &\rightarrow \gamma \text{ real} \end{aligned} \quad (88)$$

Para verificar el programa se han reproducido algunos resultados que aparecen publicados en [17] y [18] en los que se resuelven ecuaciones de dispersión de casos similares. En primer lugar comenzamos con el caso de la guía de planos paralelos [17] y se continuó con la guía rectangular [18]. Por último se han comparado los resultados obtenidos con nuestro método con los de otro método que resuelve el mismo problema de forma semi-analítica, éste es, el método de modos acoplados (MMA) [19].

3.1 Guía de planos paralelos

En este apartado comparamos nuestros resultados con los que aparecen en [17] por lo que se adapta el programa a una guía de planos paralelos, esto se consigue anulando k_y (65) para lo cual se puede considerar la dimensión b muy grande o tomar $n = 0$, que es lo que hacemos en nuestro caso.

Fijando los parámetros de entrada: $t = 5$ mm y $\mu_1 = 1$, $\varepsilon_1 = 1$, $\mu_2 = -2$, $\varepsilon_2 = -4$, se ha obtenido los diagrama de dispersión (variación de la constante de propagación normalizada a k_0 en función de la frecuencia) de los primeros modos de propagación para diferentes valores de d , analizando por separado los modos TE^x y TM^x .

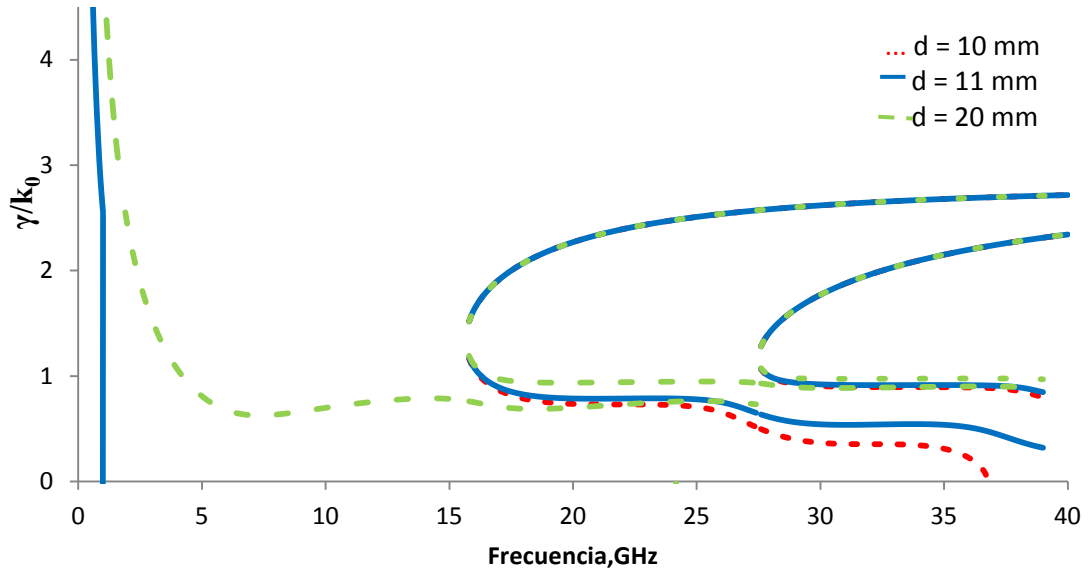


Figura 15: Diagrama de dispersión para los modos TE^x en una guía de planos paralelos con un slab de metamaterial de espesor $t = 5$ mm y $\mu_2 = -2$, $\epsilon_2 = -4$ para $d = 10$ mm, $d = 11$ mm y $d = 20$ mm.

En la Figura 15 se representan los primeros modos TE^x para $d = 10$ mm, $d = 11$ mm y $d = 20$ mm, y se observa la onda forward en la parte superior con pendiente positiva y la onda backward en la parte inferior con pendiente negativa.

Por otro lado, en el rango de frecuencias bajas aparecen unas ondas cuyas constantes de propagación decaen muy rápidamente con la frecuencia, se trata de las denominadas ondas superslow [20], que como se indicó en el capítulo anterior tienen velocidad de grupo mucho menor que la velocidad de fase. Estas ondas viajan por la superficie de separación de los medios.

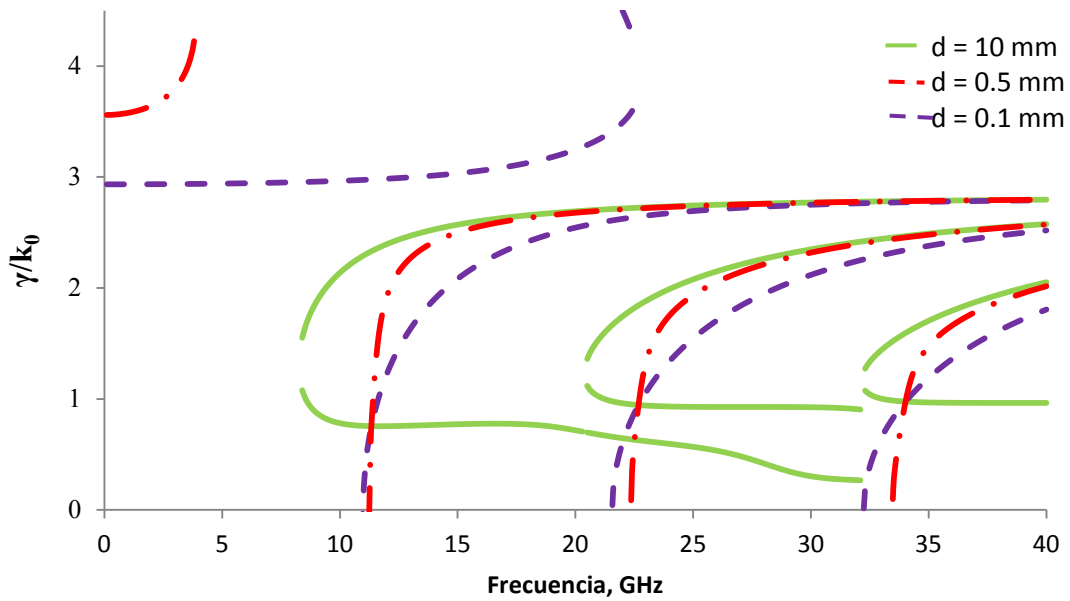


Figura 16: Diagrama de dispersión para los modos TM^x en una guía de planos paralelos con un slab de metamaterial de espesor $t = 5$ mm y $\mu_2 = -2$, $\epsilon_2 = -4$ para $d = 10$ mm, $d = 0.1$ mm y $d = 0.5$ mm.

En la Figura 16 se muestra el diagrama de dispersión para los modos TM^x para $d = 10$ mm, $d = 0.1$ mm y $d = 0.5$ mm, al igual que para los modos TE^x se observan las ondas forward, backward y superslow. Sin embargo, en la Figura 16 se tomaron valores pequeños del espesor d , es decir con la guía casi llena del metamaterial, para comprobar que el diagrama de dispersión se aproxima al de la misma guía llena con un dieléctrico de iguales parámetros constitutivos pero con signo positivo.

Las figuras representadas en este apartado se corresponden con las mostradas en el artículo [17]. Por lo que para las condiciones expuestas anteriormente el programa obtiene resultados similares al resolver las ecuaciones de dispersión.

3.2 Guía rectangular

Con el fin de seguir comprobando el programa, en segundo lugar se ha estudiado la guía de onda rectangular parcialmente llena.

La guía que vamos a utilizar es una guía rectangular de banda X con dimensiones $a \times b = 22.86 \text{ mm} \times 10.16 \text{ mm}$ y se fijan los parámetros constitutivos relativos de los medios: $\mu_1 = 1$, $\epsilon_1 = 1$, $\mu_2 = -1$, $\epsilon_2 = -4$.

Por simplicidad nos centramos en el modo TE^x y estudiamos el diagrama de dispersión en función del espesor en tres casos: $d/t = 1/3$, $d/t = 1$ y $d/t = 3$.

Sin embargo, para comparar los resultados con los de [18] enfrentamos el número de onda k_0 frente a la constante de fase β , ambos multiplicados por el espesor del metamaterial para normalizar.

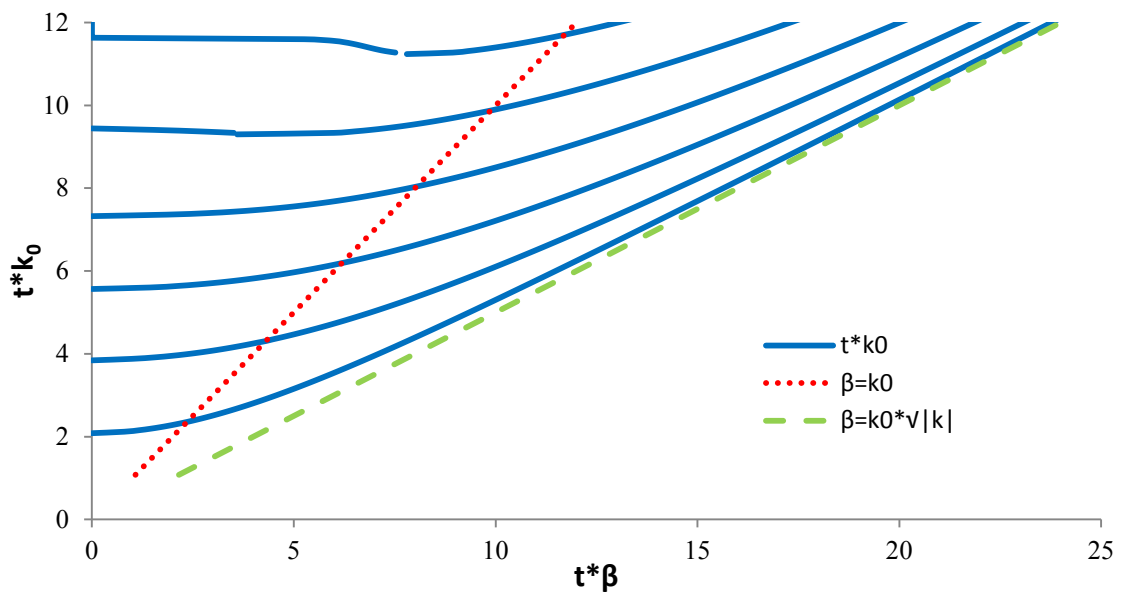


Figura 17: Diagrama de dispersión de una guía rectangular con un slab de metamaterial de parámetros $\mu_2 = -1$, $\epsilon_2 = -4$ y para $d/t = 1/3$.

Los diagramas se han dividido mediante las rectas $\beta = k_0$ y $\beta = \sqrt{|k|}k_0$ en diferentes zonas. Para la primera zona, valores de β entre 0 y k_0 , las soluciones de la ecuación de dispersión en el aire y el metamaterial son trigonométricas, en cambio, para valores entre k_0 y $\sqrt{|k|}k_0$ la solución en el aire es hiperbólica y en el metamaterial trigonométrica esto indica que el campo está concentrado en el metamaterial.

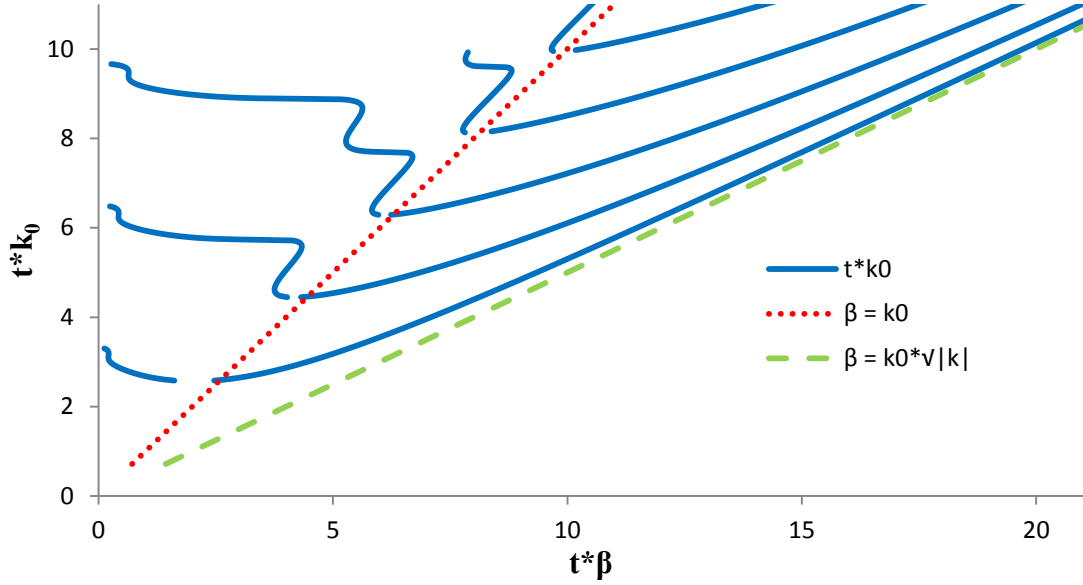


Figura 18: Diagrama de dispersión de una guía rectangular con un slab de metamaterial de parámetros $\mu_2 = -1$, $\epsilon_2 = -4$ y para $d/t = 1$.

Observando las figuras, en la primera zona, el diagrama de dispersión varía para los diferentes espesores mientras que la segunda zona tiene siempre la misma forma.

En la Figura 18, cuando la guía está llena a la mitad, se aprecian en algunas curvas que la pendiente es muy pequeña e incluso negativa, esto es debido al metamaterial ya que se aprecian las ondas backward.

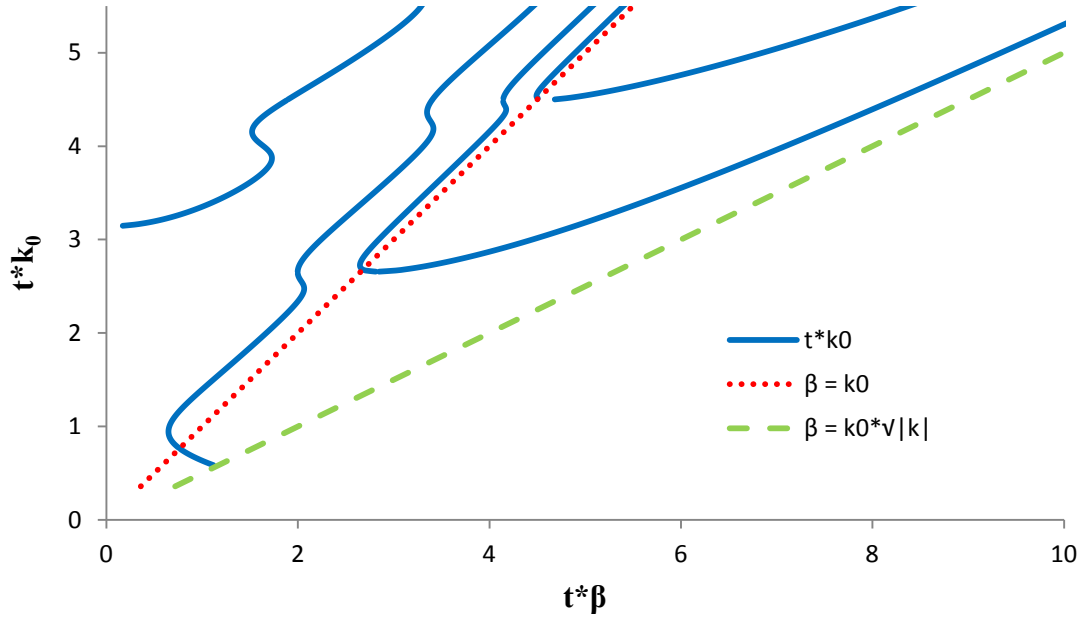


Figura 19: Diagrama de dispersión de una guía rectangular con un slab de metamaterial de parámetros $\mu_2 = -1$, $\epsilon_2 = -4$ y para $d/t = 3$.

Por otro lado en [18] se realiza un análisis en el que se toman valores complejos de β que no se corresponde al nuestro, ya que para nuestro estudio se ha considerado que β sólo puede tomar valores reales o imaginarios. Para tratar de comparar los resultados se representa el diagrama de dispersión tomando las mismas dimensiones de la guía, un espesor de $d/t = 3$ y las siguientes características de los medios: $\mu_1 = 1$, $\epsilon_1 = 1$, $\mu_2 = -1$, $\epsilon_2 = -9$.

En la Figura 20 se representan los valores de la parte imaginaria de la constante de propagación que no coincide con la parte imaginaria de la figura del artículo [18].

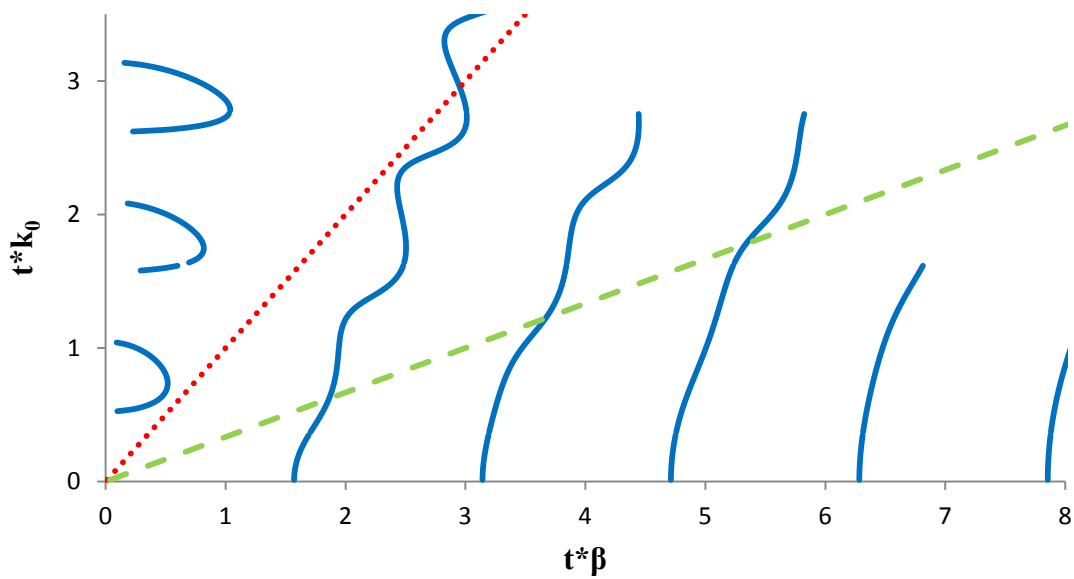


Figura 20: Diagrama de dispersión de una guía rectangular con un slab de metamaterial de parámetros $\mu_2 = -1$, $\epsilon_2 = -9$ para valores imaginarios de beta con $d/t = 3$.

3.3 Dependencia con el espesor

A la vista de la concordancia entre los resultados del programa y los de los artículos [17] y [18] podemos asegurar de forma razonable que nuestro programa funciona correctamente y que, por tanto, estamos en disposición de analizar situaciones algo más complejas. Así, se ha procedido a estudiar cómo afecta el espesor de la lámina de metamaterial con $\epsilon_r = -1$ y $\mu_r = -1$ a los modos que se propagan en la guía de onda rectangular de dimensiones $a \times b = 22.86 \text{ mm} \times 10.16 \text{ mm}$, obteniendo la Figura 21 .

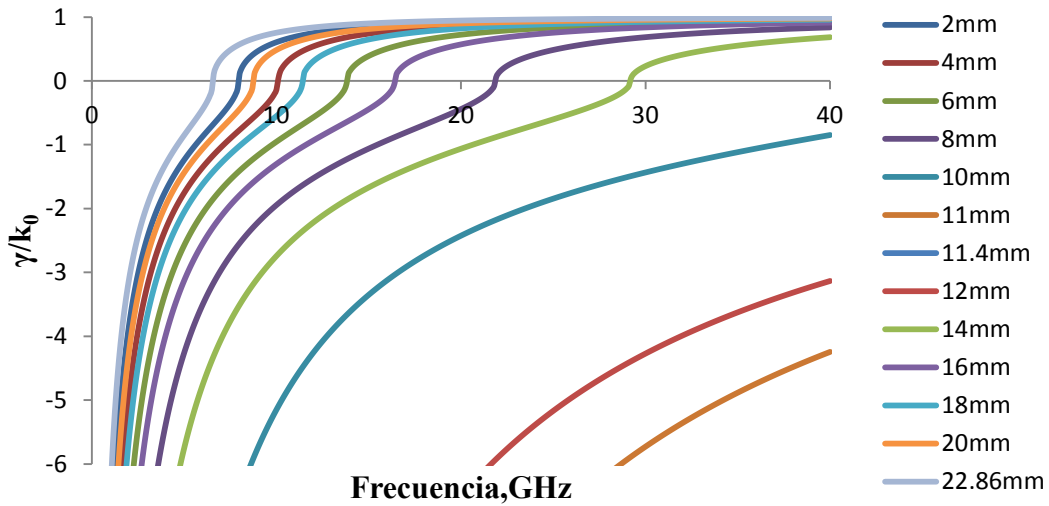


Figura 21: Diagrama de dispersión del primer modo TE^x en una guía rectangular de dimensiones $22.86 \text{ mm} \times 10.16 \text{ mm}$ para diferentes valores del espesor del metamaterial de parámetros $\epsilon_r = -1$ y $\mu_r = -1$.

Se comprueba en la Figura 21 que si la guía está llena de metamaterial ($t = 22.86 \text{ mm}$) la frecuencia de corte ($f_c = 6.56 \text{ GHz}$) es la misma y el modo se propaga igual pero en sentido opuesto que cuando se encuentra vacía.

A medida que la guía se va llenando la onda tiene una frecuencia de corte mayor, como se observa en la Figura 21 hasta llenar la mitad de la guía, después ($t > a/2$) la frecuencia de corte disminuye hasta igualarse con la de la guía vacía.

Otro aspecto que se ha analizado es qué sucede cuando el metamaterial llena la mitad de la guía. En la Figura 22 se muestra el diagrama de dispersión de los modos TE^x y TM^x para una guía rectangular llena hasta la mitad de un metamaterial con $\epsilon_r = -1$ y $\mu_r = -1$ de altura completa. A la vista de los resultados se puede concluir que no existe propagación del campo puesto que todos los modos están en corte y, además, que la constante de atenuación es bastante considerable.

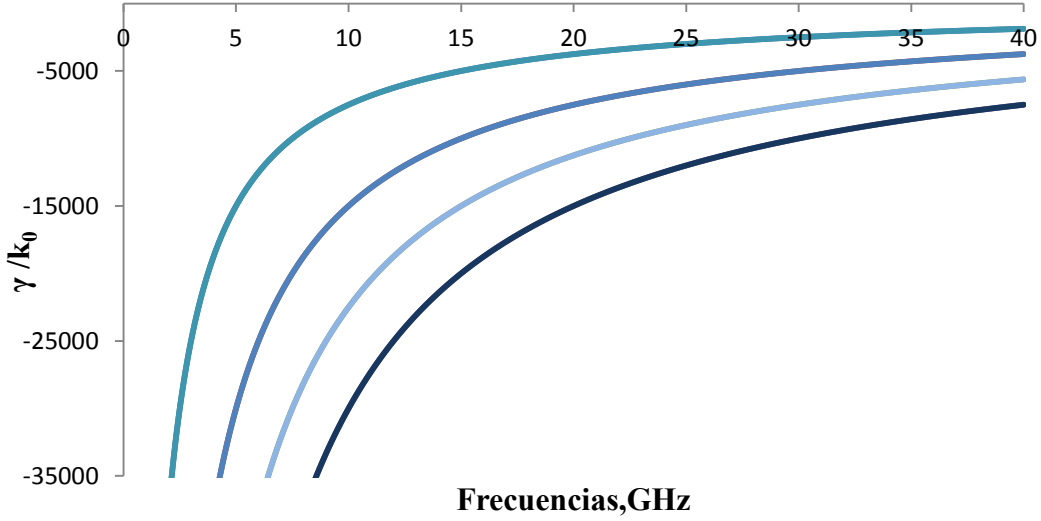


Figura 22: Diagrama de dispersión para la guía llena a la mitad con un metamaterial de $\epsilon_r = -1$ y $\mu_r = -1$.

3.5 Método de modos acoplados

Por último vamos a comparar nuestro método con el método de modos acoplados (MMA). Este método a diferencia del usado anteriormente es un método semi-analítico propuesto originalmente por Schelkunoff [19], que se utiliza en el estudio de la propagación electromagnética en el interior de estructuras cerradas limitadas por paredes conductoras perfectas (PEC) que contienen medios isótropos [19], anisótropos [21] o bi-isótropos [22].

Básicamente, el MMA consiste en expresar las componentes del campo electromagnético a partir de unos desarrollos en serie cuyas funciones base son las expresiones de los campos eléctrico y magnético de la guía vacía [19]. Así, los desarrollos de inicio son:

$$\vec{E}_t = \sum_i V_i \vec{e}_i \quad (89)$$

$$\vec{H}_t = \sum_i I_i \vec{h}_i \quad (90)$$

$$E_z = \sum_i V_i^z e_{z_i} \quad (91)$$

$$H_z = \sum_i I_i^z h_{z_i} \quad (92)$$

con $\vec{e}_i, \vec{h}_i$, respectivamente, las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético de la guía vacía, e_{z_i} y h_{z_i} las componentes longitudinales, y V, V^z, I y I^z los coeficientes de los diferentes desarrollos en serie.

De forma muy resumida, el desarrollo matemático del método consiste en sustituir los desarrollos de los campos y las relaciones de constitución en las ecuaciones de Maxwell y, posteriormente, aplicar el método de Galerkin [23].

Finalmente, se llega a un conjunto de ecuaciones diferenciales que se conoce con el nombre de Ecuaciones del Telegrafista. La resolución del problema de valores propios da como resultado las constantes de propagación de los diferentes modos de la guía y los coeficientes de los desarrollos en serie anteriores.

Al igual que en anteriores casos tomamos una guía de dimensiones $22.86\text{ mm} \times 10.16\text{ mm}$ y diferentes valores del espesor t del metamaterial con parámetros $\mu_2 = -1$, $\epsilon_2 = -3$.

Representando los primeros modos para diferentes espesores con ambos métodos se obtiene la Figura 23 para los modos TE^x y la Figura 24 para los modos TM^x . En la parte negativa del eje y , que hasta ahora no se había incorporado, se representa la atenuación, parte real de la constante de propagación.

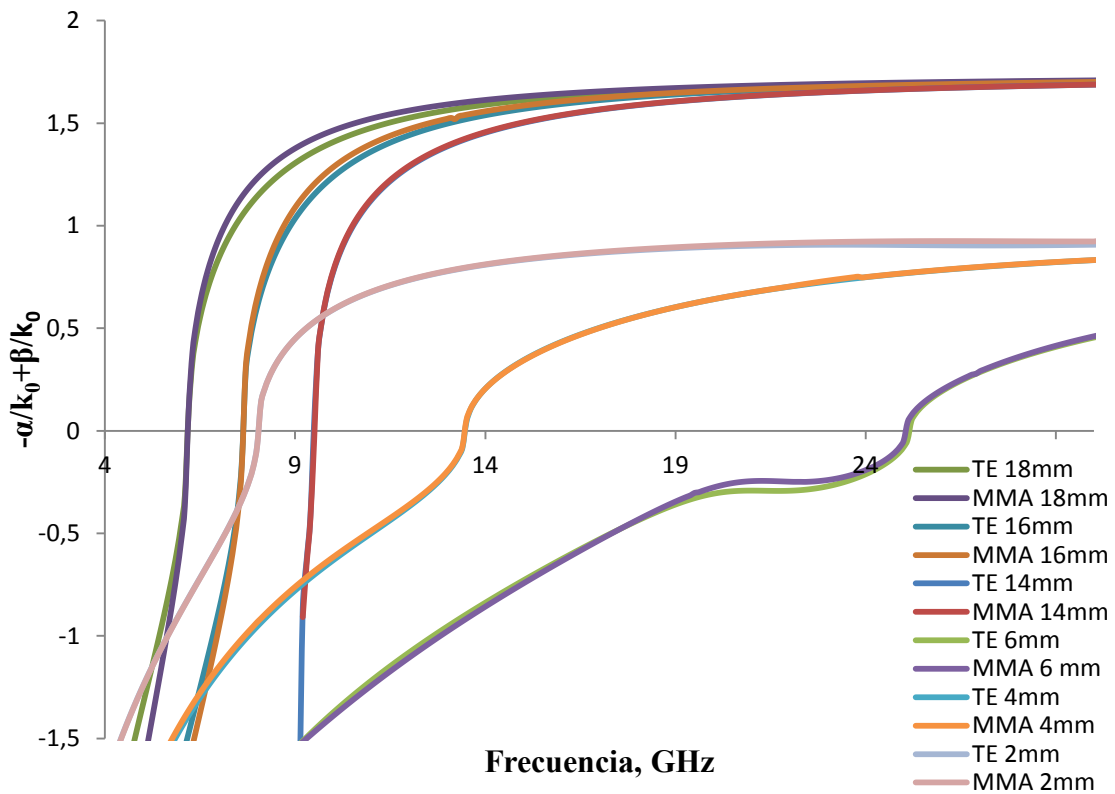


Figura 23: Diagrama de dispersión de los modos TE^x calculados mediante el programa que resuelve la ecuación de dispersión y el MMA. Ambos con valores $\mu_2 = -1$, $\epsilon_2 = -3$ para los parámetros del metamaterial.

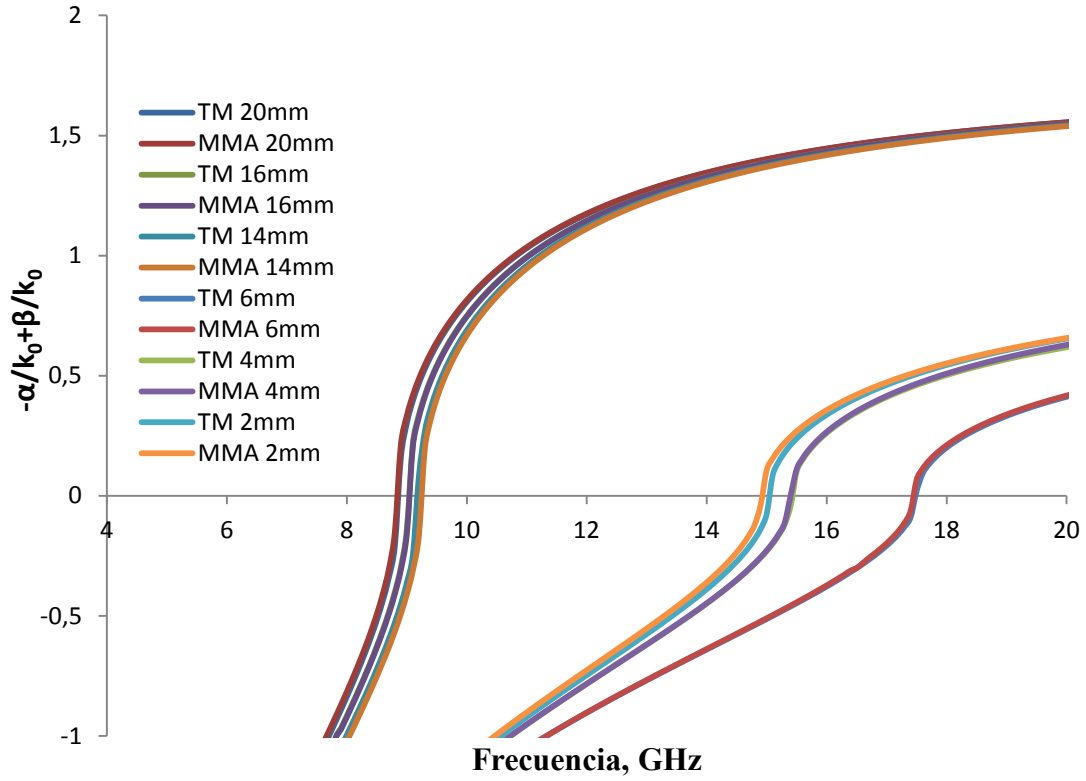


Figura 24: Diagrama de dispersión de los modos TM^x calculados mediante el programa que resuelve la ecuación de dispersión y el MMA. Ambos con valores $\mu_2 = -1$, $\epsilon_2 = -3$ para los parámetros del metamaterial.

Se puede observar en las figuras que, a pesar de tratarse de métodos diferentes, los modos obtenidos resolviendo la ecuación de dispersión se corresponden en gran medida con los obtenidos con el MMA, lo cual pone de manifiesto la bondad del método semi-analítico que ofrece una solución aproximada del problema.

Capítulo 4: Conclusiones y líneas futuras

CONCLUSIONES

Como principales conclusiones que ha dado lugar este trabajo destacamos:

En primer lugar, se ha conseguido implementar un programa que resuelve la ecuación de dispersión para los modos TE^x y TM^x en una guía de onda rectangular parcialmente llena y de altura completa, en la que se pueden encontrar dos medios con parámetros constitutivos positivos y negativos.

Cuando se analiza el caso en el que uno de los medios es el vacío y el otro un metamaterial se obtienen unos diagramas de dispersión en los que se puede apreciar la aparición de la onda backward que caracteriza a los metamateriales, así como, la onda superslow para bajas frecuencias.

Modificando el espesor del metamaterial hemos observado que la frecuencia de corte aumenta hasta que el espesor llega a la mitad de la guía, en ese punto no se propaga ningún modo y si continuamos llenando la guía con el metamaterial, la frecuencia de corte comienza a disminuir. De manera que la frecuencia de corte es la misma cuando la guía está vacía que cuando está completamente llena del metamaterial.

Además, se ha comprobado que los resultados obtenidos al resolver la ecuación de dispersión son similares a los obtenidos con el método de modos acoplados aunque se trate de dos formas diferentes de abordar el problema.

Acerca del estudio de los valores complejos de la constante de propagación, no hemos llegado a un acuerdo con el artículo que teníamos por referencia.

LINEAS FUTURAS

Las líneas futuras de investigación a partir del estudio realizado son numerosas, comenzando por modificar el programa para representar el campo electromagnético, esto nos permitiría mostrar mejor la forma en que se propaga la onda en el metamaterial.

Por otro lado, hemos considerado los medios como no dispersivos (medios cuyo índice de refracción no depende de la frecuencia $n \neq n(\omega)$), sin embargo los metamateriales tienen un carácter fuertemente dispersivo. De tal modo que se podría realizar un estudio más realista para medios dispersivos.

Otra de las aproximaciones que se han realizado es que el metamaterial utilizado es isótropo pero se podría ampliar el estudio a metamateriales anisótropos, es decir, que tienen seis componentes de los parámetros constitutivos: $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \mu_x, \mu_y, \mu_z$. Un estudio de este tipo se realiza en el artículo [24].

Nuestro estudio se puede enlazar a otros que se están desarrollando en estos momentos en el Departamento de Ingeniería de Comunicaciones en los cuales se toman datos de los parámetros de scattering de un metamaterial y mediante un programa se tratan numéricamente para caracterizar dicho metamaterial proporcionando los valores de los parámetros constitutivos. A partir de los parámetros obtenidos podemos utilizar nuestro programa para estudiar los modos.

Bibliografía

- [1] V. G. Veselago, "The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ ," *Soviet Physics Uspekhi*, vol. 10, p. 509, 1968.
- [2] R. Shelby, D. Smith and S. Schultz, "Experimental verification of a negative index of refraction," *Science*, vol. 292, no. 5514, pp. 77-79, 6 April 2001.
- [3] C. Caloz and T. Itoh, *Electromagnetic Metamaterials*, John Wiley & Sons Inc., 2006.
- [4] D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser and S. Schultz, "Composite Medium Simultaneously Negative Permeability and Permittivity," *Physical Review Letters*, vol. 84, no. 18, pp. 4184-7, 1 May 2000.
- [5] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins and W. J. Stewart, "Low frequency plasmons in thin-wire structures," *Journal of Physics: Condensed Matter*, vol. 10, no. 22, pp. 4785-809, 8 June 1998.
- [6] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins and W. J. Stewart, "Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 47, no. 11, pp. 2075-84, November 1999.
- [7] L. I. Mandelshtam, "Lecture on some problems of the theory of oscillations," *Complete Collection of works*, vol. 5, pp. 428-467, 1944.
- [8] D. V. Sivukhin, "On the energy of the electromagnetic fields in dispersing media," *Optika i Spektroskopia*, vol. 3, no. 4, pp. 308-312, Oct 1957.
- [9] V. E. Pafomov, V. N. Agranovich y A. A. Rukhadze, «Cherenkov radiation of an electron moving in a medium with spatial dispersion,» *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki*, vol. 36, nº 1, pp. 238-243, 1959.
- [10] V. G. Veselago, "Waves in metamaterials: Their role in modern physics," in *Electromagnetic and acoustic waves in metamaterials and structures*, Russia, 2011.
- [11] J. B. Pendry, "Negative refraction makes a perfect lens," *Physical review letters*, vol. 85, no. 18, pp. 3966-3969, 30 October 2000.
- [12] H. Lee, Y. Xiong, N. Fang, W. Srituravanich, S. Durant, M. Ambati, C. Sun and X. Zhang, "Realization of optical superlens imaging below the diffraction limit," *New Journal of Physics*, vol. 7, 19 December 2005.

- [13] N. Fang, H. Lee, C. Sun and X. Zhang, "Sub-diffraction-limited optical imaging with a silver superlens," *Science*, vol. 308, no. 5721, pp. 534-537, 22 April 2005.
- [14] J. B. Pendry, D. Shurig and D. R. Smith, "Controlling electromagnetic fields," *Science*, vol. 312, no. 5781, pp. 1780-2, 23 June 2006.
- [15] SOPT, «Los metamateriales y sus aplicaciones en defensa,» 2011.
- [16] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, Jonh Wiley and Sons, 1989.
- [17] I. S. Nefedov and S. A. Tretyakov, "Waveguide containing a backward-wave slab," *Radio Science*, vol. 38, no. 6, pp. 9/1-9/9, 2003.
- [18] H. Cory and A. Shtrom, "Wave propagation along a rectangular metallic waveguide longitudinally loaded with a metamaterial slab," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 41, no. 2, pp. 123-7, 20 April 2004.
- [19] S. A. Schelkunoff, "Generalized telegraphist's equations for waveguides," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 31, pp. 784-801, 1952.
- [20] A. Melloni, F. Morichetti and M. Martinelli, "Optical slow wave structures," *Optics and Photonics News*, vol. 14, no. 11, pp. 44-48, November 2003.
- [21] Y. Xu and R. G. Bosisio, "An efficient method for study of general bi-anisotropic waveguides," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 43, no. 4, pp. 873-879, 1995.
- [22] Á. Gómez, A. Lakhtakia, Á. Vegas y M. A. Solano, «Hybrid technique for analysing metallic waveguides containing isotropic chiral materials,» *IET Microw. Antennas Propag.*, vol. 4, nº 3, pp. 305-315, 2010.
- [23] R. F. Harrington, *Field computation by moment methods*, New Jersey: IEEE Press Series on Electromagnetic Waves, 1993.
- [24] Y. Xu, "A study of waveguides filled with anisotropic metamaterials," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 41, no. 5, pp. 426-31, 5 June 2004.