

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA



TESIS DOCTORAL

**MÉTRICAS DE CONDICIONAMIENTO Y
PUNTOS BIEN DISTRIBUIDOS EN VARIEDADES**

JUAN GONZÁLEZ CRIADO DEL REY

DIRIGIDA POR CARLOS BELTRÁN ÁLVAREZ
Y NURIA CORRAL PÉREZ

SANTANDER, MAYO DE 2018



Universidad de Cantabria

Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación

Programa de Doctorado en Ciencia y Tecnología

**Métricas de condicionamiento y
puntos bien distribuidos en variedades**

Juan González Criado del Rey

Dirigida por Carlos Beltrán Álvarez y Nuria Corral Pérez

Agradecimientos

Quiero dar las gracias, en primer lugar, a mis directores de tesis, Carlos y Nuria, por lo bien que se han portado conmigo y por todas las oportunidades que me han dado a lo largo de estos años. Por lo bien que lo hemos pasado juntos, por todo lo que nos hemos reído y por todo lo que he podido aprender de ellos. Me siento muy afortunado por haberme encontrado con vosotros.

Gracias a mis padres por la jobiana paciencia que han demostrado y por estar detrás de mí en cada decisión que he tomado, ya fuera buena o mala, apoyándome costara lo que costara.

También quiero dar las gracias a Dulce y a Consuelo porque su figura me ha alentado siempre a seguir estudiando y son en parte responsables de que haya llegado a escribir una tesis doctoral.

Por último, quiero dedicar un agradecimiento a mi familia y a mis amigos. A Jorge, a Marta, a Paula y a Raúl, y en especial a Nacho. También a mi hermana académica, Ujué, por estar siempre pendiente de todo lo que es importante.

La elaboración de esta tesis doctoral ha sido parcialmente financiada por las becas MTM2017-83816-P, MTM2014-57590-P y MTM2013-46337-C2-1-P del Ministerio de Economía y Competitividad, 21.SI01.64658 del Banco Santander y la Universidad de Cantabria, y un contrato de formación predoctoral de la Universidad de Cantabria.

*I'm killing time while I wait for life to shower me with meaning
and happiness.*

— Calvin.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción | 15 |
| 1.1. El problema de Tammes | 16 |
| 1.2. Puntos de energía mínima | 17 |
| 1.3. Distribución asintótica de los óptimos | 19 |
| 1.4. Distancia de separación | 22 |
| 1.5. Energía de Green | 24 |
| 1.6. Métricas de condicionamiento | 25 |
| 1.7. Principales aportaciones de la memoria | 31 |
| 1.7.1. Configuraciones óptimas para la energía de Green | 31 |
| 1.7.2. Autoconvexidad y curvatura | 34 |
| 2. Preliminares | 37 |
| 2.1. Elementos de geometría riemanniana | 37 |
| 2.1.1. Notaciones y definiciones básicas | 37 |
| 2.1.2. Integración de densidades y n -formas | 39 |
| 2.1.3. Formas pares e impares | 43 |
| 2.1.4. Variaciones y campos de Jacobi | 45 |
| 2.2. Comparación de triángulos | 47 |
| 2.2.1. Teorema de Toponogov | 48 |
| 2.2.2. Teorema de comparación de Rauch | 49 |
| 2.3. Corrientes | 50 |
| 2.3.1. Identidades de Green para corrientes | 50 |
| 2.3.2. Teorema de descomposición de Hodge | 53 |
| 2.4. Variedades armónicas | 56 |
| 2.4.1. Densidad de volumen | 56 |
| 2.4.2. Variedades localmente armónicas | 58 |
| 2.5. Energías y medidas de equilibrio | 61 |
| 2.5.1. Energía discreta y energía continua | 61 |

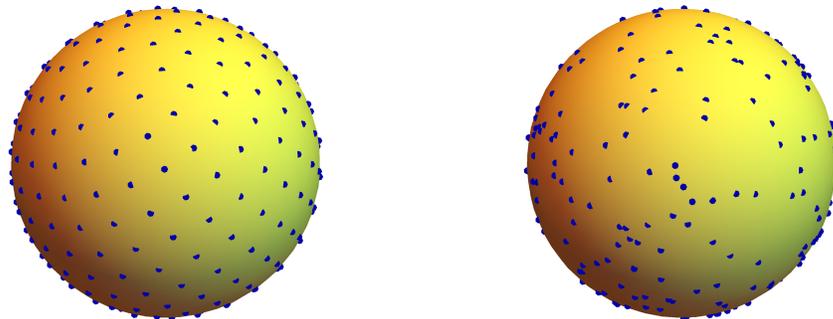
| | | |
|-----------|---|------------|
| 2.5.2. | Medida de equilibrio: existencia | 64 |
| 2.5.3. | Medida de equilibrio: unicidad | 67 |
| 2.5.4. | Relación entre las energías continua y discreta | 69 |
| 3. | Distribución asintótica de las colecciones óptimas para la energía de Green en una variedad compacta | 73 |
| 3.1. | El núcleo de Green | 73 |
| 3.2. | Mollifiers en variedades riemannianas | 76 |
| 3.3. | Positividad del núcleo de Green | 79 |
| 3.4. | Distribución asintótica uniforme | 90 |
| 4. | Bolas armónicas | 91 |
| 4.1. | Bolas armónicas | 91 |
| 4.2. | Áreas de influencia de los óptimos | 97 |
| 5. | Energía de Green en variedades localmente armónicas | 99 |
| 5.1. | El núcleo de Green de una variedad LH y Blaschke | 100 |
| 5.2. | Algunos ejemplos | 105 |
| 5.3. | Distancia de separación | 107 |
| 6. | Métricas de condicionamiento y curvatura | 115 |
| 6.1. | Una fórmula para la hessiana | 115 |
| 6.2. | Algunos ejemplos | 118 |
| 6.3. | Autoconvexidad en el caso de curvatura no negativa | 123 |
| 6.4. | Autoconvexidad en el caso de curvatura negativa | 126 |
| 7. | Bibliografía | 133 |

Capítulo 1

Introducción

En el colegio, al inicio de la clase de gimnasia, la profesora solía pedirnos que nos repartiéramos ocupando todo el espacio posible en el patio. Después de tener que insistir en ello dos o tres veces, todos comenzábamos a movernos mirando a nuestro alrededor, tratando de no estar demasiado cerca de nuestros vecinos ni de los límites del patio. No sabría decir con precisión cuál era la estrategia exacta que seguía cada uno de nosotros, pero el caso es que al final siempre terminábamos más o menos bien distribuidos.

Todos tenemos una noción intuitiva aproximada de lo que es un conjunto de objetos bien distribuidos en el espacio. Al menos, en muchos casos, somos capaces de decidir que tales objetos están bien distribuidos, mientras que tales otros no lo están. Observemos, por ejemplo, el siguiente dibujo:



Aquí se representan dos esferas, cada una de ellas con 500 puntos azules en su superficie. Todo el mundo entiende que los puntos en la esfera de la izquierda están, más o menos, bien distribuidos, pero los puntos en la esfera de la derecha no. El porqué de que esto sea así, la formalización –o, más bien, las formalizaciones– de la idea de “puntos bien distribuidos”, es uno de los temas centrales en esta memoria.

1.1. El problema de Tammes

Una posible aproximación a la definición de “puntos bien distribuidos” en una esfera –o en cualquier otro espacio métrico compacto– consiste en pedir que nunca haya dos puntos demasiado cercanos. Es decir, que si $\{x_1, \dots, x_N\}$ es una colección de $N \geq 2$ puntos distintos, entonces la distancia $\|x_i - x_j\|$ entre dos puntos distintos x_i y x_j cualesquiera sea siempre grande. Por ejemplo, podemos querer maximizar la cantidad

$$\text{dsep}(x_1, \dots, x_N) = \min_{i \neq j} \|x_i - x_j\|. \quad (1.1)$$

Este problema se conoce como *problema de Tammes* en honor al botánico holandés P. M. L. Tammes, quien lo describió en [76].

En el año 1930 Tammes se encontraba estudiando las partículas de polen de distintas especies de plantas. Muchas partículas de polen tienen una forma esférica con un diámetro que oscila entre los 4.5 y los 200 μm –por tener una referencia, el diámetro de un cabello humano está entre los 70 y los 80 μm –. En la superficie de estas esferas se pueden apreciar una serie de agujeros por los que se expulsa el material genético de la planta, que se encuentra protegido dentro del grano de polen (ver Figura 1.1).

Tammes comenzó a contar los agujeros que podía encontrar en los granos de polen de distintas especies y halló un curioso patrón: había muchos granos con 4, 6, 8 ó 12 agujeros; no tantos con 7, 9 ó 10; muy pocos granos con 11 agujeros y ningún grano con 5 agujeros. Ante este dato, Tammes propuso la siguiente hipótesis: los agujeros necesitan un cierto espacio para desarrollarse y es adecuado modelarlos como capas esféricas de un cierto radio, digamos R . Este valor de R es fijo para cada especie de planta, ya que depende sólo de la forma particular del agujero en cada especie. Durante la gestación del grano de polen, los agujeros –ahora capas esféricas– van apareciendo uno detrás de otro, haciendo sitio cada vez para que salga el siguiente, hasta que ya no caben más agujeros y el proceso se detiene.

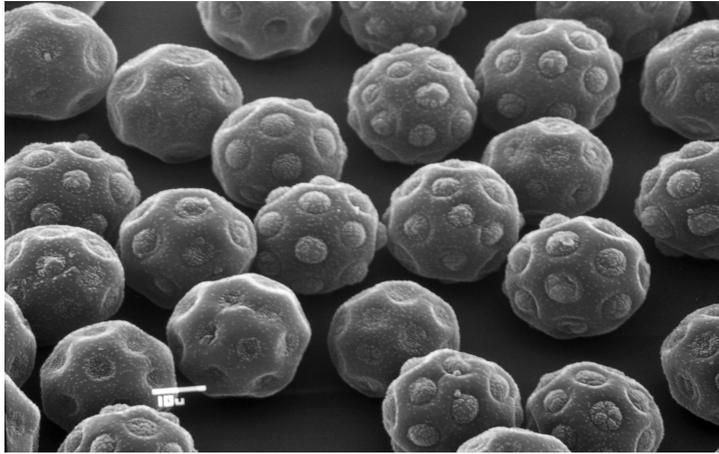


Figura 1.1: Granos de polen de *Halothamnus glaucus* al microscopio electrónico. En la superficie se distribuyen los agujeros por los que se expulsa el material genético. La imagen puede encontrarse en [46].

Sabemos –es un teorema no muy difícil de demostrar– que si en una esfera hay espacio para colocar 5 capas esféricas de un cierto radio R fijo, entonces también hay espacio para colocar 6 capas esféricas del mismo radio R . Esto es consistente con la hipótesis de Tammes: no hay granos de polen con 5 agujeros porque, por el mismo precio, es posible tener 6 agujeros. Lo mismo ocurre con 11 y 12 capas esféricas: si caben 11 capas esféricas de radio R , entonces también caben 12.

Se conocen las soluciones exactas para el problema de Tammes en la esfera de dimensión 2 sólo para una cantidad finita del número de puntos N , a saber, $N = 2, 3, \dots, 14$ y $N = 24$. Las soluciones para $N = 3, 4, 6$ y 12 fueron encontradas por Fejes Tóth en 1943 [37], para $N = 5, 7, 8$ y 9 por Schütte y van der Waerden en 1951 [70], para $N = 24$ por Robinson en 1961 [67], para $N = 10$ y 11 por Danzer en 1961 [28] (ver también [17] para $N = 11$) y, más recientemente, para $N = 13$ y 14 por Musin y Tarasov [58, 59].

1.2. Puntos de energía mínima

Otra manera de definir “puntos bien distribuidos” es pensar que los puntos representan partículas cargadas que se repelen las unas a las otras. Pongamos que dos partículas x e y se repelen con “intensidad” $K(x, y)$. Definimos

entonces la K -energía de un sistema de N partículas x_1, \dots, x_N como la suma de las interacciones dos a dos de partículas distintas. Esto es,

$$E_K(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i \neq j} K(x_i, x_j). \quad (1.2)$$

Un ejemplo clásico consiste en tomar $K(x, y) = \frac{1}{\|x-y\|}$ para puntos x, y en la esfera \mathbb{S}^2 , donde $\|\cdot\|$ es la norma euclídea en \mathbb{R}^3 . Es decir, para cada $N \geq 2$, buscamos N puntos $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{S}^2$ que minimicen la energía $\sum_{i \neq j} \frac{1}{\|x_i - x_j\|}$. Este problema se conoce como problema de Thomson en honor al descubridor del electrón J. J. Thomson, quien en 1904 planteó el problema –que aquí parafraseamos–

¿En qué posición –dentro de un cierto conjunto, como una bola o una esfera– deben colocarse N electrones para minimizar su potencial electrostático? [77]

Thomson tenía en mente un cierto modelo atómico –el conocido como *plum pudding model*– que tuvo un corto recorrido debido a los espectaculares avances en la Física producidos a principios del siglo XX. No obstante, el problema matemático permaneció abierto y fue ganando importancia con el tiempo.

La función de energía del problema de Thomson es un caso particular de toda una familia de funciones de energía conocidas como s -energías de Riesz, las cuales se definen a partir del *núcleo de Riesz* $K(x, y) = \frac{1}{\|x-y\|^s}$, donde s es un cierto número real positivo. Denotamos la s -energía de Riesz por

$$E_s(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i \neq j} \frac{1}{\|x_i - x_j\|^s}. \quad (1.3)$$

Naturalmente, esta energía puede definirse no sólo en la esfera \mathbb{S}^2 , sino en cualquier subconjunto de \mathbb{R}^n . Debido a que la energía de Riesz es una función semicontinua inferior, siempre que el conjunto en el que se defina sea compacto e infinito, para cualquier número de puntos N existirá –por lo menos– una colección de puntos x_1^*, \dots, x_N^* que minimiza E_s .

El parámetro s controla, de alguna manera, el “rango de acción” del núcleo de Riesz. Cuando s es muy grande, la suma en (1.3) está dominada por el sumando correspondiente a la distancia $\|x_i - x_j\|$ más pequeña. Por simplicidad, supongamos que existe un único par de puntos que realiza la mínima distancia. Entonces,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} E_s(x_1, \dots, x_N)^{1/s} = \max_{i \neq j} \frac{1}{\|x_i - x_j\|} = \frac{1}{\min_{i \neq j} \|x_i - x_j\|}.$$

1.3. Distribución asintótica de los óptimos

Si ahora echamos un vistazo a la definición de d_{sep} (1.1), veremos que minimizar la energía de Riesz para valores de s muy grandes es aproximadamente equivalente a maximizar d_{sep} , es decir, resolver el problema de Tammes. Por otra parte, de la observación de que $\frac{d}{ds}|_{s=0} \frac{1}{a^s} = \log a^{-1}$ se sigue que

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{E_s(x_1, \dots, x_N) - N(N-1)}{s} = \sum_{i \neq j} \log \|x_i - x_j\|^{-1}.$$

Consecuentemente, si s es muy cercano a 0, entonces minimizar la energía de Riesz es aproximadamente equivalente a minimizar la *energía logarítmica*

$$E_{\log}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i \neq j} \log \|x_i - x_j\|^{-1}. \quad (1.4)$$

La idea que debemos extraer de estas observaciones es que los valores pequeños del parámetro s provocan que las interacciones a larga distancia “pesen mucho” para el cómputo total de la energía, mientras que los valores grandes de s hacen que prácticamente sólo importen las interacciones a muy corta distancia.

1.3. Distribución asintótica de los óptimos

Cabría esperar que, cuando N es muy grande, las colecciones de N puntos óptimos –minimizantes– para la s –energía de Riesz, el problema de Tammes o la energía logarítmica estuvieran bien distribuidos. Una manera posible de formalizar esta idea es considerar, para cada colección óptima $\omega_N^* = \{x_1^*, \dots, x_N^*\}$, la medida de probabilidad asociada $\nu_N = \frac{1}{N} \sum_{x \in \omega_N^*} \delta_x$, donde δ_x es la distribución delta de Dirac concentrada en el punto x . Si, cuando $N \rightarrow \infty$, las medidas ν_N convergen –en el sentido *–débil– a la distribución de probabilidad uniforme σ , entonces decimos que las colecciones de óptimos están *asintóticamente uniformemente distribuidas*. Según esta definición, las colecciones de óptimos asintóticamente uniformemente distribuidas están razonablemente bien distribuidas desde el punto de vista, por ejemplo, de la integración numérica, ya que en este caso para toda función continua f se cumplirá que

$$\int f d\sigma = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{x \in \omega_N^*} f(x).$$

La teoría general de la distribución asintótica de las familias de minimizadores para la energía discreta ha sido objeto de estudio desde mediados del siglo XX por parte de autores clásicos de Teoría del Potencial, tales como [24, 60, 39]. El llamado *Poppy-seed Bagel Theorem* –en inglés, Teorema de la rosquilla con semillas de amapola– de Hardin y Saff [43] muestra que la distribución asintótica de las colecciones minimizantes para la energía de Riesz no es automáticamente uniforme, sino que depende fuertemente de la relación entre el parámetro s y la dimensión de Hausdorff del subconjunto de \mathbb{R}^n en el que se define la energía. Más precisamente, el teorema afirma que si s es estrictamente mayor que la dimensión de Hausdorff, entonces las colecciones óptimas están asintóticamente uniformemente distribuidas, pero que en otro caso no tendría por qué ser así. La Figura 1.2 muestra tres configuraciones aproximadamente óptimas de 1000 puntos para la energía de Riesz en un toro –dimensión de Hausdorff 2– para los valores de $s = 0.1$ (izquierda), 0.8 (centro) y 2 (derecha). A medida que incrementamos el valor del parámetro s , las colecciones óptimas se parecen más a una muestra de la distribución uniforme. Un corolario es, por ejemplo, que los óptimos para la energía logarítmica en el toro no son adecuados para integración numérica por métodos cuasi-Monte Carlo.

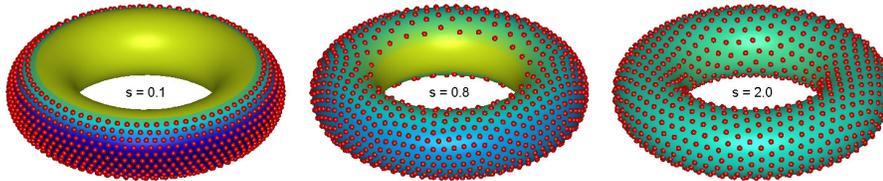


Figura 1.2: 1000 puntos con s -energía de Riesz casi mínima en un toro con $s = 0.1$ (izquierda), $s = 0.8$ (centro) y $s = 2$ (derecha). Tal y como afirma el *Poppy-seed Bagel Theorem*, cuando s sobrepasa la dimensión de Hausdorff del toro, que es 2, los puntos de s -energía mínima pasan a estar asintóticamente uniformemente distribuidos. Estos dibujos son cortesía de Rob Womersley. Se puede visitar su sitio web en <http://web.maths.unsw.edu.au/~rsw/Torus/> para ver más experimentos numéricos relativos al *Poppy-seed Bagel Theorem*.

El resultado de Hardin y Saff no impide, sin embargo, que los óptimos de la energía logarítmica o la energía de Riesz con valores pequeños de s estén asintóticamente uniformemente distribuidos en algunos subconjuntos

1.3. Distribución asintótica de los óptimos

de \mathbb{R}^n . Se sabe, por ejemplo, que para la esfera $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ los óptimos de la s -energía de Riesz están asintóticamente uniformemente distribuidos para todo valor de $s > 0$ (ver [52, Cap. 3, pp. 160–162], y también [27, Teorema 3] y [43, Teorema 1.1] para $s \in (0, n)$, [27, Teorema 1] para $s = n$, y [43, Teorema 2.2] para $s > n$). Los óptimos de la energía logarítmica también están asintóticamente uniformemente distribuidos [19, Teorema 1.6]. Otras colecciones de puntos asintóticamente uniformemente distribuidos son, por ejemplo, los llamados puntos de Fekete, que son puntos que maximizan un determinante que involucra bases de armónicos esféricos (ver [56]).

Los puntos de energía logarítmica mínima en la esfera \mathbb{S}^2 –a veces llamados puntos elípticos de Fekete por [38], pero que no deben ser confundidos con los puntos de Fekete que acabamos de mencionar– tendrán un interés especial para nosotros. Estos puntos son el objeto del séptimo problema en la lista de problemas de Smale [74]. Si denotamos

$$\mathcal{E}_{\log}(N) = \min_{x_1, \dots, x_N \in \mathbb{S}^2} E_{\log}(x_1, \dots, x_N)$$

la mínima energía logarítmica para N puntos en \mathbb{S}^2 , el Problema 7 reza:

Can one find $\{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{S}^2$ such that

$$E_{\log}(x_1, \dots, x_N) - \mathcal{E}_{\log}(N) \leq C \log N, \quad (1.5)$$

C a universal constant?

Smale pide un algoritmo –en el sentido del modelo de computación BSS– que en tiempo polinómico en N produzca N puntos en \mathbb{S}^2 cuya energía logarítmica sea pequeña.

El motivo de que no se exija encontrar una colección óptima tiene que ver con un resultado que se encuentra dentro de la serie de artículos de Shub y Smale *Complexity of Bezout's Theorem*. En [72] se muestra que si x_1, \dots, x_N son puntos en \mathbb{S}^2 satisfaciendo (1.5), y consideramos z_1, \dots, z_N las imágenes de x_1, \dots, x_N por la proyección estereográfica $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, entonces la sucesión de polinomios $\{f_N\}_{N \geq 2}$ dada por $f_N(z) = \prod_{i=1}^N (z - z_i)$ está bien condicionada en el sentido de que la sucesión de los números de condición de los polinomios f_N está acotado superiormente por un polinomio en N . Shub y Smale estaban entonces interesados en encontrar una sucesión con estas características para obtener buenos puntos de inicio para los métodos de homotopía, algo de lo que hablaremos más adelante, en la Sección 1.6.

1.4. Distancia de separación

Otra de las medidas que indican si los puntos x_1, \dots, x_N están bien distribuidos es la distancia de separación (1.1): la mínima distancia entre cada par de puntos distintos. Lógicamente, las colecciones con mayor distancia de separación son las soluciones del problema de Tammes. Un sencillo argumento del propio Tammes [76, Teorema 30] muestra que la máxima distancia de separación posible para N puntos en la esfera \mathbb{S}^n es $O(N^{-1/n})$. En efecto, si $\{x_1, \dots, x_N\}$ son N puntos tales que $d(x_i, x_j) \geq \delta$ para todo $i \neq j$, entonces las capas esféricas centradas en los puntos x_i y de radio $\delta/2$ no se intersecan, luego la suma de sus volúmenes, un número de la forma $CN\delta^n$ para una cierta constante $C > 0$, está superiormente acotada por el volumen V de la esfera, de donde $\delta \leq C^{-1/n}V^{1/n}N^{-1/n}$. Es por esto que decimos que una sucesión $(\omega_N)_{N \geq 2}$ de colecciones de puntos $\omega_N = \{x_1, \dots, x_N\}$ en la esfera \mathbb{S}^n está *bien separada* si la correspondiente sucesión de distancias de separación es $\Omega(N^{-1/n})$.

Una técnica que ha proporcionado cotas inferiores precisas para la distancia de separación de puntos de energía mínima es el análisis de una instancia particular del problema de energía continua con campo externo. Un campo externo en la esfera es una función $Q : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ que representa un campo físico con el que interactúa cada partícula, independientemente de su interacción con el resto de partículas. En concordancia con esta interpretación, se define la energía discreta con campo externo Q como

$$E_{K,Q}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i \neq j} K(x_i, x_j) + Q(x_i) + Q(x_j). \quad (1.6)$$

La energía discreta (1.2) es, entonces, el caso correspondiente a $Q = 0$. En paralelo a la definición de energía discreta, tenemos la definición de energía continua con campo externo Q de una medida μ con soporte en \mathbb{S}^n , dada por

$$E_{K,Q}(\mu) = \int_{x,y \in \mathbb{S}^n} K(x,y) d\mu(x) d\mu(y) + 2 \int_{x \in \mathbb{S}^n} Q(x) d\mu(x). \quad (1.7)$$

Bajo ciertas condiciones, se puede asegurar que existe una única medida de probabilidad $\mu_{K,Q}^*$, llamada *medida de equilibrio*, que minimiza la energía continua, y tal que si ω_N^* es una configuración que minimiza la energía discreta con campo externo (1.6), entonces ω_N^* está necesariamente contenida en el soporte $\text{supp } \mu_{K,Q}^*$ de $\mu_{K,Q}^*$. La importancia de este hecho viene de la

1.4. Distancia de separación

observación de que si $p \in \mathbb{S}^n$ es un punto cualquiera, y consideramos el campo externo $Q_{p,N}(x) = \frac{1}{N-2}K(p, x)$ para cualquier $N > 2$, un cálculo sencillo muestra que

$$E_{K,Q_{p,N}}(x_1, \dots, x_{N-1}) = E_K(x_1, \dots, x_{N-1}, p).$$

Si x_1^*, \dots, x_N^* es una configuración óptima para E_K y tomamos como punto p cualquiera de los puntos de la colección, por ejemplo, $p = x_N^*$, entonces los puntos x_1^*, \dots, x_{N-1}^* minimizan $E_{K,Q_{x_N^*,N}}$, luego –bajo ciertas hipótesis– todos ellos están contenidos en el soporte de la medida de equilibrio $S_{K,Q_{x_N^*,N}} = \text{supp } \mu_{K,Q_{x_N^*,N}}$. Si resulta que el conjunto complementario $\mathbb{S}^n \setminus S_{K,Q_{x_N^*,N}}$ contiene una bola –una capa esférica– centrada en x_N^* de un cierto radio r_N , la conclusión es que $\text{dsep}(x_1^*, \dots, x_N^*) \geq r_N$.

Calcular el soporte $S_{K,Q}$ de la medida de equilibrio no es una tarea sencilla. En algunos artículos como [20, 21] los autores combinan el uso del funcional de Mhaskar–Saff con la técnica del balayage clásico para calcular $S_{K,Q}$. El funcional de Mhaskar–Saff \mathfrak{F} , introducido originalmente en [57] (véase también [69]), es una función que asigna a cada subconjunto compacto $S \subset \mathbb{S}^n$ que no sea demasiado pequeño –técnicamente, con capacidad positiva– un número real $\mathfrak{F}(S)$. Lo que hace útil a esta función es que alcanza su mínimo valor en $S = S_{K,Q}$, de modo que si tenemos una colección $\{S_t\}_t$ de candidatos para el soporte de la medida de equilibrio, sólo tenemos que minimizar la función $\Phi(t) = \mathfrak{F}(S_t)$. Para evaluar el funcional de Mhaskar–Saff de un compacto S , los autores necesitan calcular una determinada medida con signo η_S conocida como medida de equilibrio con signo, y para calcular η_S recurren a la técnica del balayage clásico.

El balayage clásico –del francés *balayage*, limpiar, barrer– es un proceso ideado por Poincaré que consiste, grosso modo, en eliminar o limpiar toda la masa de una medida ν en el interior de un conjunto compacto K para obtener otra medida $\hat{\nu} = \text{Bal}(\nu, K)$, de modo que los potenciales newtonianos de ν y $\hat{\nu}$ coincidan fuera de K . Por ejemplo, si δ_p es una unidad de masa –en sentido físico– centrada en un punto p del espacio tridimensional, y $K = \overline{B(p, r)}$ es una bola cerrada, entonces la medida δ_p y la medida de probabilidad uniforme σ_r en la esfera $S(p, r) = \partial \overline{B(p, r)}$ generan el mismo potencial gravitatorio en el exterior de la bola $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B(p, r)}$. Por lo tanto, $\text{Bal}(\delta_p, \overline{B(p, r)}) = \sigma_r$.

Mediante el uso de estas ideas, los autores son capaces de producir cotas explícitas para la distancia de separación de los puntos óptimos para la s –energía de Riesz en \mathbb{S}^n , $n \geq 2$, con parámetro $n - 2 \leq s < n$ –entendiendo

que, si $n = 2$ y $s = 0$, entonces se considera la energía logarítmica– (ver [20, Teorema 14 y Proposición 15]).

Los óptimos en la esfera \mathbb{S}^n para las energías de Riesz y, cuando $n = 2$ y $s = 0$, para la energía logarítmica, se sabían ya colecciones de puntos bien separados para valores de s en el intervalo $[n - 2, n)$ (ver [65, 66] y [34] para la energía logarítmica en \mathbb{S}^2 , [48] para $s \in (n - 1, n)$, [35] para $s \in (n - 2, n)$). También se probó en [48] que cuando $s > n$ –el llamado caso hipersingular– los óptimos para la energía de Riesz en \mathbb{S}^n están bien separados. Se desconoce –aunque se espera que así sea– si los óptimos para la energía de Riesz en las esferas de dimensiones altas cuando $0 < s < n - 2$ están bien separados o no. No se conocen muchos resultados sobre distancia de separación en subvariedades del espacio euclídeo más generales. En [26] se estudia el caso de una hipersuperficie de \mathbb{R}^n con la energía de Riesz de parámetro $s = n - 2$, demostrando que, bajo ciertas hipótesis, los óptimos están bien separados.

1.5. Energía de Green

Tanto la energía de Riesz (1.3) como la energía logarítmica (1.4) están definidas en términos de la distancia euclídea ambiente $\|x - y\|$, que es una cantidad muy conveniente cuando se trabaja con subconjuntos del espacio euclídeo. No obstante, es concebible que alguien quisiera obtener puntos bien distribuidos en una variedad diferenciable compacta abstracta –sin usar una inmersión particular en \mathbb{R}^n – como pueden ser los grupos de Lie clásicos, los espacios proyectivos, las grassmannianas, las variedades de Stiefel, etcétera.

Para tener un marco de trabajo común que englobe todos estos casos, buscamos una buena función de energía que se pueda definir en cualquier variedad riemanniana compacta \mathcal{M} . Una posibilidad es imitar las definiciones de las energías de Riesz o la energía logarítmica sustituyendo la distancia euclídea por la distancia geodésica intrínseca $d(x, y)$. No obstante, las funciones de energía resultantes, $\sum_{i \neq j} d(x_i, x_j)^{-s}$ o $\sum_{i \neq j} \log d(x_i, x_j)^{-1}$, no son diferenciables en todo punto, ya que la función distancia $y \mapsto d(x, y)$ no es diferenciable cuando y pertenece al cut locus de x . El análisis de estas funciones de energía no podría beneficiarse, por tanto, de todas las herramientas que ofrece la Geometría Diferencial.

En [6] se demuestran una serie de propiedades de los puntos de energía logarítmica mínima en \mathbb{S}^2 usando el hecho de que para cualquier punto $x \in \mathbb{S}^2$, la función $y \mapsto \log \|x - y\|^{-1}$ tiene laplaciano constante independiente de x .

1.6. Métricas de condicionamiento

Esto se debe a que el núcleo logarítmico es, salvo producto por una constante positiva, una solución fundamental de la ecuación de Poisson en \mathbb{S}^2 . Es decir, que si $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua tal que $\int_{\mathbb{S}^2} f = 0$, entonces la función

$$u(x) = \int_{\mathbb{S}^2} \frac{1}{2\pi} \log \|x - y\|^{-1} f(y) d\text{vol}(y)$$

cumple $\Delta u = f$. Tomando esta propiedad como la fundamental de la energía logarítmica, definimos la energía de Green de N puntos x_1, \dots, x_N en una variedad compacta \mathcal{M} cualquiera como

$$E(x_1, \dots, x_N) = E_G(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i \neq j} G(x_i, x_j), \quad (1.8)$$

donde G es una solución fundamental de la ecuación de Poisson en \mathcal{M} . Es decir, $G : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ cumple que

$$\Delta_x G(x, y) = \delta_y - V^{-1} d\text{vol},$$

donde $V = \text{vol}(\mathcal{M})$ es el volumen de \mathcal{M} y $d\text{vol}$ es la forma de volumen –o la densidad– riemanniana. Para que G sea única, imponemos que $\int_y G(x, y) = 0$ para todo $x \in \mathcal{M}$ (ver Teorema 3.1.1) y llamamos a G la función de Green de \mathcal{M} . Podemos interpretar $x \mapsto G(x, y)$ como una solución estacionaria de la ecuación del calor cuando introducimos calor de forma constante a través del punto y , y al mismo ritmo dicho calor se pierde uniformemente en todo \mathcal{M} .

Algunas de las principales aportaciones originales de esta memoria tratan sobre propiedades de los conjuntos de minimizadores de la energía de Green.

1.6. Métricas de condicionamiento

Decíamos al final de la Sección 1.3 que Shub y Smale estaban interesados en obtener puntos de energía logarítmica casi mínima en \mathbb{S}^2 porque con ellos eran capaces de construir una sucesión de polinomios bien condicionados. Estos polinomios servirían, entonces, como buenos puntos iniciales para los “métodos de homotopía”.

Los métodos de homotopía son una serie de métodos diseñados para resolver una amplia variedad de problemas en análisis numérico, desde la aproximación de ceros de polinomios o de soluciones de sistemas de ecuaciones

polinomiales hasta el problema de autovalores (puede consultarse, por ejemplo, el texto de Blum, Cucker, Shub y Smale [15]).

A grandes rasgos, la idea detrás de los métodos de homotopía es la siguiente (ver Figura 1.3): dado un problema o *input* f_1 , buscamos una solución aproximada o *output* ζ_1 de f_1 . Consideramos otro problema f_0 para el que ya conozcamos una solución ζ_0 , así como un camino dentro del espacio de *inputs* f_t , con $t \in [0, 1]$, uniendo f_0 con f_1 . Bajo ciertas hipótesis, existe un camino asociado ζ_t en el espacio de *outputs* que une ζ_0 con ζ_1 y tal que ζ_t es una solución de f_t para cada $t \in [0, 1]$. Es decir, el camino $\gamma(t) = (f_t, \zeta_t)$ es una curva en la llamada variedad solución

$$\mathcal{V} = \{(f, \zeta) : \zeta \text{ es una solución de } f\} \subset \text{Inputs} \times \text{Outputs}. \quad (1.9)$$

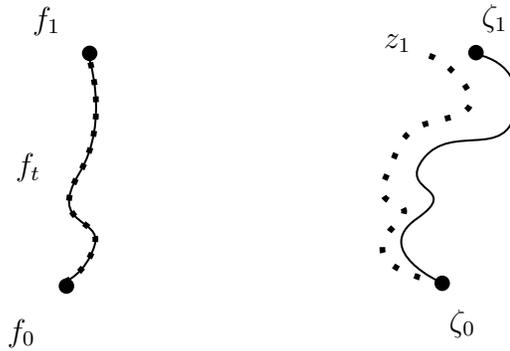


Figura 1.3: En la parte izquierda, un problema objetivo f_1 y un problema inicial f_0 unidos por un camino –continuo– f_t . En la parte derecha, el correspondiente camino ζ_t en el espacio de soluciones. A partir de una discretización del camino f_t se puede obtener una aproximación discreta z_t de ζ_t .

Si consideramos una discretización $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ del intervalo $[0, 1]$, entonces podemos tratar de hallar, para cada problema f_{t_i} , una solución aproximada z_{t_i} . Una posible manera de hacerlo es usar, en cada paso i , la aproximación anterior $z_{t_{i-1}}$ como punto inicial para una iteración del método de Newton –cuando tal cosa tenga sentido–. Si la discretización es suficientemente fina –esto es, si k es suficientemente grande–, a veces podemos asegurar que la última de las soluciones aproximadas $z_{t_k} = z_1$ es, de hecho, una solución aproximada para f_1 . El entero positivo k es el número de problemas intermedios que hay que resolver, o el número de iteraciones del método de Newton que hay que realizar, para continuar una solución ζ_0

1.6. Métricas de condicionamiento

de f_0 a una solución aproximada z_1 de f_1 . Por lo tanto, podemos interpretar k como la “complejidad” del método de homotopía.

Uno de los aspectos más interesantes de los métodos de homotopía es que, en muchos casos, es posible obtener cotas teóricas precisas para su complejidad. Por ejemplo, en [71, Teorema 3], Shub demuestra el siguiente resultado: supongamos que el espacio de *inputs* es el espacio de n sistemas de ecuaciones polinomiales homogéneas –complejas– de grados (d_1, \dots, d_n) . Si $\gamma = (f, \zeta) : [0, 1] \rightarrow \mathcal{V}$ es una curva en la variedad solución (1.9), entonces el número de pasos k necesarios para continuar una solución ζ_0 de f_0 a una solución aproximada z_1 de f_1 está acotado como

$$k \leq CD^{3/2} \int_0^1 \mu(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt + 1, \quad (1.10)$$

donde C es una constante, D es el máximo de los grados d_i , $\mu(\gamma(t)) = \mu(f_t, \zeta_t)$ es el condicionamiento de (f_t, z_t) y $\dot{\gamma}$ es el vector tangente a γ .

Esta cota superior para el número de pasos del método de homotopía, así como su antecesora, obtenida por Shub y Smale en [73], fueron el germen de la solución del problema número 17 de Smale, propuesta por Beltrán y Pardo en [10, 11, 12], así como de sus versiones deterministas [22] –con tiempo casi polinómico– y [50]. Todos los estudios posteriores sobre la complejidad de los métodos de homotopía han seguido esta misma filosofía (véase [4, 3, 51]).

En [2, Teorema 3] Armentano demuestra una desigualdad muy similar a (1.10) para el problema de autovalores. Si $\gamma(t) = (A_t, \lambda_t, v_t)$ es una curva en la variedad solución –es decir, $A_t v_t = \lambda_t v_t$ –, entonces

$$k \leq C \int_0^1 \mu(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt + 1,$$

donde C es una constante.

A la integral $\int_0^1 \mu(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt$ se la conoce a veces como la longitud de condicionamiento de γ , denotada $\ell_\kappa(\gamma)$. El motivo es que si llamamos g a la métrica riemanniana de la variedad solución \mathcal{V} –con la que se calcula la norma del vector tangente $\|\dot{\gamma}(t)\|$ –, entonces $\ell_\kappa(\gamma)$ es la longitud de γ en la métrica $\mu^2 g$. Por lo tanto, las curvas para las que la cota de la complejidad k es más pequeña son, precisamente, las geodésicas de $(\mathcal{V}, \mu^2 g)$.

El condicionamiento μ suele ser una función complicada, pero muchas veces se puede acotar por –o aproximar como– el inverso de la distancia al conjunto de problemas mal condicionados, que denotamos Σ' siguiendo la

tradición en la literatura. Estos resultados de acotación se conocen genéricamente con el nombre de Teoremas del Número de Condición (ver [15, p. 234, Teorema 3] para sistemas de ecuaciones polinomiales, [2, Teorema 4] para el problema de autovalores, [30, Teorema 5.1] para el problema de autovalores generalizado y [31, 23] para la teoría general). Por este motivo, si g es la métrica de la variedad solución, se define la métrica de condicionamiento como

$$g_\kappa(x) = d(x, \Sigma')^{-2}g(x), \quad x \in \mathcal{V} \setminus \Sigma',$$

y estudiamos entonces las geodésicas de g_κ .

El conjunto $\Sigma' \subset \mathcal{V}$, llamado a veces variedad crítica, tendrá una expresión u otra dependiendo del problema. Por ejemplo, en el caso de polinomios univariados, Σ' es el conjunto de los $(f, \zeta) \in \mathcal{V}$ tales que ζ es una raíz múltiple de f . En el caso del problema de autovalores, Σ' es el conjunto de los $(A, \lambda, v) \in \mathcal{V}$ tales que λ es un autovalor múltiple de A . Para poder cubrir todos estos casos, nosotros estudiamos la métrica de condicionamiento en el caso general en el que $\mathcal{M} = \mathcal{V}$ es una variedad riemanniana cualquiera y $\mathcal{N} = \Sigma'$ es una subvariedad de \mathcal{M} .

Como la función distancia $d(x, \mathcal{N})$ no es diferenciable en todo punto de $\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}$, la métrica g_κ no es una métrica riemanniana en sentido estricto. Sin embargo, $(\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}, g_\kappa)$ es siempre una variedad localmente Lipschitz con la distancia riemanniana y se pueden definir las geodésicas como las curvas localmente minimizantes. En efecto, si $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathcal{M} \setminus \mathcal{N}$ es una curva localmente Lipschitz, por el Teorema de Rademacher (ver [64, §6.9, Corolario 41]) el vector tangente $\dot{\gamma}$ existe en casi todo punto y, por el Teorema Principal de Lebesgue (ver [64, §6.8, Teorema 38]), es integrable. Se define entonces la longitud de γ en la métrica de condicionamiento como

$$\ell_\kappa(\gamma) = \int_a^b \frac{\|\dot{\gamma}(t)\|}{d(\gamma(t), \mathcal{N})} dt.$$

Una *geodésica minimizante* del condicionamiento es, entonces, una curva localmente Lipschitz $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M} \setminus \mathcal{N}$ tal que $\ell_\kappa(\gamma) \leq \ell_\kappa(c)$ para toda curva localmente Lipschitz $c : [a, b] \rightarrow \mathcal{M} \setminus \mathcal{N}$ con $c(a) = \gamma(a)$ y $c(b) = \gamma(b)$. Una *geodésica* –a secas– es una curva localmente Lipschitz que es localmente una geodésica minimizante. La versión de Gromov del Teorema de Hopf–Rinow (ver [49, Teorema 1.10]) asegura que todo par de puntos en $\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}$ pueden ser unidos por –al menos– una geodésica minimizante del condicionamiento. Allí donde la función distancia sea diferenciable, esta definición de geodésica

coincide con la definición usual –riemanniana– de geodésica como una curva que satisface las ecuaciones de Euler–Lagrange.

Una de las preguntas que más interés ha despertado en relación a la métrica de condicionamiento es si “lo peor está en los extremos”. Es decir, si dado un segmento geodésico $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M} \setminus \mathcal{N}$ en la métrica de condicionamiento, el punto $\gamma(t)$ más cercano a \mathcal{N} –con respecto de la métrica original de \mathcal{M} – es alguno de los extremos $\gamma(a)$ o $\gamma(b)$. En términos de los métodos de homotopía, esta propiedad se traduce en que el problema más difícil –peor condicionado– en una curva (f_t, ζ_t) es siempre el problema objetivo (f_1, ζ_1) o el problema inicial (f_0, ζ_0) . De esta manera podemos estar seguros de que el método de homotopía nunca tendrá que resolver un problema intermedio peor condicionado que el problema objetivo.

Si para toda geodésica γ en la métrica de condicionamiento la función $t \mapsto d(\gamma(t), \mathcal{N})^{-2}$ es convexa, entonces, en efecto, lo peor está en los extremos. A menudo sucede que esta función no sólo es convexa, sino que es log–convexa –en particular, es convexa– en los puntos en los que la función distancia $x \mapsto d(x, \mathcal{N})$ es diferenciable. Es decir, que la función $t \mapsto \log d(\gamma(t), \mathcal{N})^{-2}$ es convexa. Por ello, introducimos la siguiente definición:

Definición 1.6.1. Sea $U \subset \mathcal{M} \setminus \mathcal{N}$ un abierto. Decimos que la función $d(x, \mathcal{N})^{-2}$ es *autoconvexa* en U si la función $\log d(x, \mathcal{N})^{-2}$ es convexa en U en la métrica de condicionamiento. Es decir, si la hessiana $\text{Hess}_\kappa \log d(x, \mathcal{N})^{-2}$ en la métrica de condicionamiento es semidefinida positiva en U .

Observación 1.6.2. Más generalmente, si (\mathcal{M}, g) es una variedad riemanniana posiblemente no completa, y $\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable que toma valores estrictamente positivos, podemos decir que α es autoconvexa si es convexa en la métrica $g_\kappa = \alpha g$.

Ahora y en adelante denotaremos siempre por $\mathcal{U}_\mathcal{N}$ el mayor abierto en el que la función distancia $d(x, \mathcal{N})$ es diferenciable. En [8] los autores demuestran el siguiente teorema.

Teorema 1.6.3. [8, Teorema 2] Supongamos que la variedad ambiente \mathcal{M} es el espacio euclídeo \mathbb{R}^n . Entonces, para cualquier subvariedad $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ de clase C^2 , la función $d(x, \mathcal{N})^{-2}$ es autoconvexa en $\mathcal{U}_\mathcal{N}$.

Una de nuestras contribuciones en esta memoria consiste en una generalización de este resultado.

Por su parte, en [71, 13] se considera el caso de los sistemas de ecuaciones polinomiales. Para analizar la autoconvexidad en este caso, los autores comenzaron estudiando el problema lineal en el que

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\text{lin}} = \{(M, \zeta) \in \mathbb{C}^{n \times (n+1)} \times \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) : M\zeta = 0\}$$

y

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\text{lin}} = \{(M, \zeta) \in \mathcal{M}_{\text{lin}} : \dim \ker M > 1\}.$$

En [9] consiguieron demostrar que la función $\log d(x, \mathcal{N}_{\text{lin}})^{-2}$ es convexa en la métrica de condicionamiento en $\mathcal{M}_{\text{lin}} \setminus \mathcal{N}_{\text{lin}}$ –incluso en aquellos puntos en los que $d(x, \mathcal{N}_{\text{lin}})$ no es diferenciable–. El argumento considera una estratificación del espacio de matrices $\mathbb{C}^{n \times (n+1)}$ basada en la descomposición en valores singulares. Para cada m -upla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ de enteros tales que $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = n$, se considera el conjunto $\mathcal{P}_{(\alpha)}$ de matrices en $\mathcal{M}_{\text{lin}} \setminus \mathcal{N}_{\text{lin}}$ tales que sus α_1 primeros valores singulares son iguales, sus α_2 segundos valores singulares son iguales, etcétera. Esto es,

$$\mathcal{P}_{(\alpha)} = \{M \in \mathbb{C}^{n \times (n+1)} : \text{svd}(M) = (\sigma_1, \dots, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \dots, \sigma_m)\}.$$

donde σ_i se repite α_i veces, y $\sigma_1 > \dots > \sigma_m > 0$. Consideramos, también, el conjunto

$$\mathcal{N}_{(\alpha)} = \{M \in \mathbb{C}^{n \times (n+1)} : \text{svd}(M) = (\sigma_1, \dots, \sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}, \dots, \sigma_{m-1}, 0, \dots, 0)\},$$

donde en la parte final hay α_m ceros. Se prueba que $\mathcal{P}_{(\alpha)}$ es una variedad diferenciable y se define la métrica de condicionamiento para el par $(\mathcal{P}_{(\alpha)}, \mathcal{N}_{(\alpha)})$. La función distancia $d(x, \mathcal{N}_{(\alpha)})$ es diferenciable en $\mathcal{P}_{(\alpha)}$ y resulta que la función $d(x, \mathcal{N}_{(\alpha)})^{-2}$ es autoconvexa en $\mathcal{U}_{\mathcal{N}_{(\alpha)}} = \mathcal{P}_{(\alpha)}$. Los autores entonces encuentran la manera de pegar todas las piezas en la estratificación y probar la autoconvexidad de $d(x, \mathcal{N}_{\text{lin}})^{-2}$.

Dado que la propiedad de autoconvexidad en $\mathcal{U}_{\mathcal{N}}$ se cumple cuando \mathcal{N} es cualquier subvariedad de \mathbb{R}^n , y también en casos algo “exóticos” como $(\mathcal{M}_{\text{lin}}, \mathcal{N}_{\text{lin}})$ y $(\mathcal{P}_{(\alpha)}, \mathcal{N}_{(\alpha)})$, tal vez uno podría esperar un argumento general que demostrara la autoconvexidad en $\mathcal{U}_{\mathcal{N}}$ para $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ cualesquiera. Uno de los casos de estudio más interesantes es el caso en el que la variedad solución es la correspondiente al problema de resolución de sistemas de ecuaciones polinomiales y $\mathcal{N} = \Sigma'$, un problema que todavía permanece abierto.

1.7. Principales aportaciones de la memoria

En esta sección presentaré los principales resultados originales aportados en la memoria. Una primera parte tratará sobre los conjuntos de óptimos de la energía de Green en una variedad riemanniana compacta. A continuación veremos algunos resultados relativos a la autoconvexidad de las métricas de condicionamiento.

1.7.1. Configuraciones óptimas para la energía de Green

Si \mathcal{M} es una variedad compacta de dimensión $n \geq 2$, entonces, para cada $N \geq 2$, existe al menos una configuración óptima $\omega_N^* = \{x_1^*, \dots, x_N^*\}$ para la energía de Green (1.8), ya que la función de Green es semicontinua inferior. La función $G(x, y)$ tiene una singularidad en la diagonal comparable a $\log d(x, y)^{-1}$ si $n = 2$ y a $d(x, y)^{2-n}$ si $n > 2$, de modo que para dos puntos x e y próximos, la energía de Green se comporta de manera similar a la s -energía de Riesz con parámetro $s = n - 2$. El *Poppy-seed Bagel Theorem*, mencionado en la Sección 1.3, implica que si \mathcal{M} es una subvariedad n -dimensional de \mathbb{R}^m , entonces los óptimos de la s -energía de Riesz están asintóticamente uniformemente distribuidos siempre que $s > n$. Sin embargo, si $s \leq n$, entonces es posible que la distribución asintótica de los óptimos no sea uniforme –como en el caso del toro y la energía logarítmica en la Figura 1.2–. El primer resultado que veremos –fruto de un trabajo conjunto con C. Beltrán y N. Corral, y que figura en [7]– dice que, a pesar de lo anterior, los óptimos para la energía de Green sí que están asintóticamente uniformemente distribuidos. Denotemos como $V = \text{vol}(\mathcal{M})$ el volumen de \mathcal{M} .

Teorema 1.7.1. Sea \mathcal{M} una variedad riemanniana compacta de dimensión $n \geq 2$. Entonces la medida de probabilidad uniforme $V^{-1}d\text{vol}$ es la única medida de probabilidad en \mathcal{M} que minimiza la energía de Green continua

$$E(\mu) = \int_{x, y \in \mathcal{M}} G(x, y) d\mu(x) d\mu(y).$$

Es más, si $(\omega_N^*)_{N \geq 2}$ es una sucesión de óptimos para la energía de Green, entonces

$$\frac{1}{N} \sum_{x \in \omega_N^*} \delta_x \xrightarrow{*} V^{-1} d\text{vol}$$

cuando $N \rightarrow \infty$.

Demostraremos el Teorema 1.7.1 en la Sección 3.4. En esta memoria nos ocuparemos también de la distancia de separación o, más generalmente, de lo que llamaremos a veces “áreas de influencia” de los puntos óptimos para la energía de Green. En la Sección 1.4 decíamos que, para valores del parámetro s con $n - 2 \leq s \leq n$, alrededor de cada punto x_i^* en una configuración óptima $\{x_1^*, \dots, x_N^*\}$ para la s -energía en \mathbb{S}^n existe una bola geodésica $B(x_i^*, r_N)$ en la que ningún otro punto de la configuración puede entrar. Si \mathcal{M} es una variedad no tan simétrica como la esfera, entonces el área de influencia natural de cada punto en una configuración óptima no es una bola geodésica, sino un conjunto llamado *bola armónica*. La bola armónica $B^h(p, a)$ centrada en un punto $p \in \mathcal{M}$ y con radio –o volumen– un número real a , con $0 < a < V$, es un abierto en el que se cumple la propiedad del valor medio para funciones armónicas. Es decir, que si h es una función integrable y armónica en $B^h(p, a)$, entonces

$$\frac{1}{\text{vol}(B^h(p, a))} \int_{B^h(p, a)} h \, \text{dvol} = h(p).$$

Técnicamente, la bola armónica se define en términos de un cierto problema del obstáculo (ver Definición 4.1.4).

Teorema 1.7.2. Sea \mathcal{M} una variedad riemanniana compacta de dimensión $n \geq 2$, y sea $\{x_1^*, \dots, x_N^*\}$, con $N > 2$, una configuración óptima para la energía de Green discreta. Entonces, para cada $i, j = 1, \dots, N$ con $i \neq j$, se tiene que

$$x_j^* \notin B^h\left(x_i^*, \frac{V}{N-1}\right).$$

Demostraremos el Teorema 1.7.2 en la Sección 4.2. En algunos casos las bolas armónicas y las bolas geodésicas coinciden como familias. En [42], por ejemplo, los autores prueban que las bolas armónicas y las bolas geodésicas coinciden como familias cuando \mathcal{M} es una variedad de dimensión 2 con curvatura de Gauss constante (ver también [45]). En esta memoria generalizaremos estos resultados demostrando que las bolas armónicas son bolas geodésicas cuando la densidad de volumen es radialmente simétrica. Para un punto $p \in \mathcal{M}$, la densidad de volumen es una función $\omega_p(x)$ cuya expresión en coordenadas normales alrededor de p es

$$\omega_p(x) = \sqrt{\det g_{ij}(x)}$$

(ver Definición 2.4.5). Que la densidad de volumen sea radialmente simétrica en torno a p , o sea, que $\omega_p(x)$ sólo dependa de la distancia $d(p, x)$, es equivalente a que las esferas geodésicas centradas en p tengan curvatura media constante a lo largo de toda la esfera geodésica.

Existe una clase particular de variedades riemannianas, llamadas *variedades localmente armónicas* –a veces variedades LH en la literatura por sus siglas en inglés–, en las que la densidad de volumen es una función radialmente simétrica alrededor de cada punto. Si añadimos la condición de que \mathcal{M} sea compacta, y que el radio de inyectividad de la variedad –el ínfimo de las distancias al cut locus de los puntos de \mathcal{M} – coincida con el diámetro –lo que se conoce como propiedad de *Blaschke*–, entonces el núcleo de Green $G(x, y)$ depende únicamente de la distancia $d(x, y)$ para todo par de puntos de \mathcal{M} , y además el volumen de las bolas geodésicas –y de las esferas geodésicas– no depende del punto base. En la Sección 5.3 demostraremos el siguiente resultado:

Teorema 1.7.3. Sea \mathcal{M} una variedad localmente armónica y Blaschke de dimensión $n \geq 2$ y diámetro D . Entonces, para todo $0 < r < D$, se tiene que

$$B(p, r) = B^h(p, V(r)),$$

donde $V(r) = \text{vol}(B(p, r))$ es el volumen de la bola geodésica.

Además, los teoremas 1.7.2 y 1.7.3 se combinan para producir un resultado sobre la distancia de separación.

Teorema 1.7.4. Sea \mathcal{M} una variedad localmente armónica y Blaschke de dimensión $n \geq 2$. Si $\{x_1^*, \dots, x_N^*\}$, con $N > 2$, es una configuración óptima para la energía de Green discreta, entonces

$$\text{dsep}(x_1^*, \dots, x_N^*) \geq r_N,$$

donde r_N es el radio de la bola geodésica tal que

$$V(r_N) = \frac{V}{N-1}. \tag{1.11}$$

En particular, como $V(r) \sim Cr^n$ para una cierta constante C , la distancia de separación es $\Omega(N^{-1/n})$ y los óptimos para la energía de Green en estas

variedades están bien separados. Esta cota generaliza la cota $2/\sqrt{N-1}$ obtenida en [34, Teorema 2] para la energía logarítmica en \mathbb{S}^2 , ya que la ecuación (1.11) para ese caso se lee, en términos de la distancia euclídea d , como

$$\pi d^2 = \frac{4\pi}{N-1}.$$

La demostración del Teorema 1.7.4 puede encontrarse en la Sección 5.3.

1.7.2. Autoconvexidad y curvatura

Los dos últimos resultados presentados en esta memoria, publicados en [25], relacionan la curvatura con la autoconvexidad en las métricas de condicionamiento, de la que se habló en la Sección 1.6.

Recordemos, informalmente, el concepto de curvatura seccional –puede consultarse el Capítulo 2 para ver una definición formal–. Si p es un punto de una superficie S sumergida en \mathbb{R}^3 , decimos que la curvatura de Gauss en p es no negativa si, en un entorno de p suficientemente pequeño, todos los puntos de la superficie quedan en uno de los lados del plano tangente $T_p S$. Es decir, la superficie se parece localmente a una esfera, un elipsoide o un cilindro. En caso contrario, decimos que la curvatura es negativa. Para una variedad \mathcal{M} de dimensión mayor, tomamos un punto $p \in \mathcal{M}$ y un subespacio 2-dimensional Π del espacio tangente $T_p \mathcal{M}$. Formamos una pequeña subvariedad S de dimensión 2 –una superficie– alrededor de p considerando todas las geodésicas que parten de p con velocidades iniciales en Π . La curvatura seccional $K(\Pi)$ se define, entonces, como la curvatura de Gauss de S en p .

El primero de los teoremas sobre la autoconvexidad que presentamos aquí es una generalización del Teorema 1.6.3, en el que $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$. Recordemos que denotábamos por $\mathcal{U}_{\mathcal{N}}$ el mayor abierto de $\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}$ en el que la función distancia $d(x, \mathcal{N})$ es diferenciable.

Teorema 1.7.5. Sea \mathcal{M} una variedad riemanniana con curvaturas seccionales no negativas. Entonces, para cualquier subvariedad \mathcal{N} de clase C^2 la función $d(x, \mathcal{N})^{-2}$ es autoconvexa en $\mathcal{U}_{\mathcal{N}}$.

El segundo resultado sobre autoconvexidad dice que si existe un punto de la variedad ambiente en el que todas las curvaturas seccionales son negativas, entonces la conclusión del Teorema 1.7.5 es falsa.

Teorema 1.7.6. Sea \mathcal{M} una variedad riemanniana. Si existe un punto $p \in \mathcal{M}$ en el que todas las curvaturas seccionales son negativas, entonces existe una subvariedad \mathcal{N} de \mathcal{M} tal que la función $x \mapsto d(x, \mathcal{N})^{-1}$ es estrictamente cóncava alrededor de p en la métrica de condicionamiento.

La variedad solución correspondiente a los sistemas de ecuaciones polinomiales tiene curvaturas de distinto signo en distintos puntos y distintas direcciones, de modo que los teoremas 1.7.5 y 1.7.6 no permiten demostrar ni descartar la autoconvexidad en este caso. Sin embargo, representan el primer paso hacia su resolución desde los artículos originales [8, 9].

Capítulo 2

Preliminares

Los problemas de los que nos ocupamos en esta memoria requieren del uso de técnicas procedentes de distintas áreas de las Matemáticas. Con el objetivo de hacer el texto más accesible, hemos decidido incluir una pequeña recopilación de algunos resultados en Geometría Riemanniana y en Teoría del Potencial, que son las dos grandes áreas a las que acudiremos con más frecuencia.

2.1. Elementos de geometría riemanniana

Comenzaremos estableciendo la notación que vamos a utilizar y recordando algunos de los resultados más básicos de Geometría Riemanniana. Las principales referencias que utilizaremos son [55, 54, 62, 33, 29].

2.1.1. Notaciones y definiciones básicas

Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable –de clase C^∞ – de dimensión n . Denotamos por $T\mathcal{M}$ el fibrado tangente de \mathcal{M} y por $T_p\mathcal{M}$ el espacio tangente a un punto $p \in \mathcal{M}$. Si (U, \mathbf{x}) es una carta de \mathcal{M} , donde $U \subset \mathcal{M}$ es un abierto y $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, denotamos por x^1, \dots, x^n las funciones coordenadas, de tal modo que $\mathbf{x}(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p)) \in \mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^n$ para $p \in U$. Denotamos por $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ o, simplemente, $\partial_1, \dots, \partial_n$, los campos coordenados, y por dx^1, \dots, dx^n , las 1–formas coordenadas, de tal modo que $dx^i(\partial_j) = \delta_j^i$.

Todas las variedades riemannianas en esta memoria se suponen conexas y completas salvo que se especifique lo contrario –algo que ocurre, en ocasio-

nes, en el Capítulo 6-. Si g es una métrica riemanniana en \mathcal{M} , denotamos las funciones coordenadas de la métrica por $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$. Se definen las funciones $g^{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ por la relación $g^{ik}g_{kj} = \delta_j^i$, $i, j = 1, \dots, n$, donde hemos usado el convenio de sumación de Einstein.

Denotamos por $C^\infty(\mathcal{M})$ el espacio de funciones diferenciables sobre \mathcal{M} , y por $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ el espacio de campos de vectores diferenciables en \mathcal{M} . Asimismo, denotamos por $\Omega^k\mathcal{M}$ el espacio de k -formas diferenciales de \mathcal{M} , esto es, el espacio de secciones diferenciables del fibrado de tensores covariantes alternados de rango k en \mathcal{M} , al cual denotamos $\Lambda^k\mathcal{M}$.

Denotamos por d la diferencial en k -formas, de modo que si $\omega \in \Omega^k\mathcal{M}$ se escribe en coordenadas como

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

entonces

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d\omega_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

El *gradiente* de una función diferenciable $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ es el campo de vectores métricamente equivalente a la diferencial. Es decir, es el único campo de vectores ∇f que satisface

$$g(\nabla f, X) = df(X), \quad X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}).$$

En coordenadas, el gradiente tiene la expresión

$$\nabla f = g^{ij} \partial_i f \partial_j.$$

Dado un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, denotamos por ∇_X la derivada covariante con respecto de X , donde siempre consideramos en \mathcal{M} la conexión de Levi-Civita. Si $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, la *diferencial covariante* es la aplicación lineal $\nabla Y : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ dada por $\nabla Y(X) = \nabla_X Y$. La *divergencia* $\operatorname{div} X$ de un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ es la traza de su diferencial covariante. Si E_1, \dots, E_n es un sistema de referencia ortonormal definido en un abierto U de \mathcal{M} , entonces

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n g(\nabla_{E_i} X, E_i) \quad \text{en } U.$$

2.1. Elementos de geometría riemanniana

El *laplaciano* de una función $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ es la función $\Delta f = -\operatorname{div} \nabla f^1$. En un sistema coordenado,

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j \right), \quad (2.1)$$

donde $|g| = \det(g_{ij})$.

Dados dos campos de vectores $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, el *operador de curvatura* es la aplicación $C^\infty(\mathcal{M})$ -lineal $R(X, Y) : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

donde $[X, Y]$ es el corchete de Lie. El *tensor de curvatura* es la aplicación $C^\infty(\mathcal{M})$ -multilineal $R : \mathfrak{X}(\mathcal{M})^{\times 4} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W).$$

La *curvatura seccional* de un subespacio 2-dimensional $\Pi \subset T_p \mathcal{M}$, generado por dos vectores linealmente independientes X e Y es

$$K(\Pi) = K(X, Y) = \frac{R(X, Y, Y, X)}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - g(X, Y)^2}.$$

2.1.2. Integración de densidades y n -formas

En algunos de los teoremas que veremos en esta memoria vamos a necesitar usar las Identidades de Green para variedades no orientables. Estos resultados aparentemente no son tan bien conocidos como sus versiones orientables porque la formalización de la integración en variedades no orientables requiere un poco más de trabajo. Esta formalización se hace, en la mayoría de los casos, a través del concepto de “densidad”, un objeto que recibe diferentes nombres en la literatura –*density* para [55], *odd form* para [29], *twisted form* para [1], etcétera-. Nosotros intentaremos introducir las densidades de manera que podamos enunciar las identidades de Green lo antes posible.

Recordemos que un fibrado vectorial real (E, π, \mathcal{M}) de rango k queda completamente determinado, salvo isomorfismo de fibrados, por un recubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de \mathcal{M} y unas *funciones de transición* diferenciables $\tau_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \operatorname{GL}(k, \mathbb{R})$ satisfaciendo la *condición de cociclo*

$$\tau_{\alpha\beta}(p) \tau_{\beta\gamma}(p) = \tau_{\alpha\gamma}(p), \quad \forall p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma.$$

¹Algunos autores definen el laplaciano con el signo opuesto.

Las trivializaciones locales $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ satisfacen, entonces,

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(p, v) = (p, \tau_{\alpha\beta}(p)v).$$

(Véase, por ejemplo, [55] o [44]). Desde este punto de vista, el fibrado $\Lambda^n \mathcal{M}$ es el fibrado lineal con aplicaciones de transición

$$\rho_{\alpha\beta}(p) = \det d(\mathbf{x}_\beta \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1})(\mathbf{x}_\alpha(p)),$$

donde $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}_\alpha$ es un atlas de \mathcal{M} .

Observación 2.1.1. La manera de recuperar la definición clásica del fibrado vectorial en términos de las trivializaciones locales a partir de la definición por aplicaciones de transición es la siguiente: se considera la unión disjunta $\tilde{E} = \coprod_\alpha U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ junto con la relación de equivalencia $(\alpha, p, v) \sim (\beta, q, w)$ si, y sólo si, $p = q$ y $w = \tau_{\alpha\beta}(p)v$. Entonces $E = \tilde{E} / \sim$, $\pi : E \rightarrow \mathcal{M}$ está dada por $\pi[\alpha, p, v] = p$, y las trivializaciones locales son $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ dadas por $\varphi_\alpha[\beta, p, v] = (p, \tau_{\beta\alpha}(p)v)$.

Definición 2.1.2. El *fibrado de volumen* $\text{Vol}(\mathcal{M})$ de \mathcal{M} es el fibrado lineal con aplicaciones de transición

$$\nu_{\alpha\beta} = |\det d(\mathbf{x}_\beta \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1})(\mathbf{x}_\alpha(p))|.$$

Una sección $\mu \in \Gamma \text{Vol}(\mathcal{M})$ se llama *densidad*.

En vista de las definiciones de $\Lambda^n \mathcal{M}$ y de $\text{Vol}(\mathcal{M})$, cobra sentido la siguiente definición:

Definición 2.1.3. El *fibrado de orientaciones* $\text{Or}(\mathcal{M})$ de \mathcal{M} es el fibrado lineal con aplicaciones de transición

$$\sigma_{\alpha\beta}(p) = \text{sgn}(\det d(\mathbf{x}_\beta \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1})(\mathbf{x}_\alpha(p))).$$

La relación entre las funciones de transición $\rho_{\alpha\beta}$, $\nu_{\alpha\beta}$ y $\sigma_{\alpha\beta}$ se traduce en una relación entre los fibrados correspondientes mediante la siguiente definición.

Definición 2.1.4. Sean (E, π_E, \mathcal{M}) y (F, π_F, \mathcal{M}) dos fibrados vectoriales sobre \mathcal{M} de rangos k_E y k_F , respectivamente. Sea $\{U_\alpha\}_\alpha$ un recubrimiento abierto de \mathcal{M} tal que ambos E y F trivializan sobre los abiertos U_α . Sean $\{\tau_{\alpha\beta}\}_{\alpha\beta}$ y $\{\theta_{\alpha\beta}\}_{\alpha\beta}$ las funciones de transición de E y de F , respectivamente. El *producto tensorial* de los fibrados E y F , denotado $E \otimes F$, es el fibrado de rango $k_E k_F$ con funciones de transición $\tau_{\alpha\beta} \otimes \theta_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(k_E k_F, \mathbb{R})$.

2.1. Elementos de geometría riemanniana

Observación 2.1.5. Si F es un fibrado lineal trivial, entonces F es isomorfo al fibrado $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$, cuyas funciones de transición son $\theta_{\alpha\beta} \equiv 1$. En este caso $E \otimes F = E$.

Corolario 2.1.6. Se tiene que

$$\Lambda^n \mathcal{M} = \text{Or}(\mathcal{M}) \otimes \text{Vol}(\mathcal{M}), \quad \text{Vol}(\mathcal{M}) = \text{Or}(\mathcal{M}) \otimes \Lambda^n \mathcal{M}.$$

El corolario anterior nos dice que, en la práctica, una densidad μ siempre se puede escribir en un entorno coordenado U_α como

$$\mu = \mu_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n,$$

donde $\mu_\alpha = \pi_2 \circ \varphi_\alpha \circ \mu \in C^\infty(U_\alpha)$ y $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ son trivializaciones de $\text{Or}(\mathcal{M})$, con la precaución de que el cambio de cartas se realiza con el valor absoluto del determinante del jacobiano:

$$\begin{aligned} \mu_\beta dx_\beta^1 \wedge \cdots \wedge dx_\beta^n &= \sigma_{\beta\alpha} \nu_{\beta\alpha} \mu_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n \\ &= \mu_\alpha |\det d(\mathbf{x}_\alpha \circ \mathbf{x}_\beta^{-1})| dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n. \end{aligned}$$

Si \mathcal{M} es orientable, entonces admite un atlas con cambios de carta positivos y podemos quitar el valor absoluto para obtener

$$\mu_\beta dx_\beta^1 \wedge \cdots \wedge dx_\beta^n = \mu_\alpha \det d(\mathbf{x}_\alpha \circ \mathbf{x}_\beta^{-1}) dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n,$$

de modo que μ se identifica con una n -forma.

Las densidades son los objetos que se transforman de la manera correcta por cambio de coordenadas para poder ser integrados.

Definición 2.1.7. Sea $\mu \in \Gamma \text{Vol}(\mathcal{M})$ una densidad con soporte compacto. Se define la *integral de μ* como

$$\int_{\mathcal{M}} \mu = \sum_{\alpha \in A} \int_{\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)} \eta_\alpha(\mathbf{x}_\alpha^{-1}(x)) \mu_\alpha(\mathbf{x}_\alpha^{-1}(x)) dx,$$

donde $\{\eta_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una partición de la unidad subordinada al recubrimiento $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\mu_\alpha = \pi_2 \circ \varphi_\alpha \circ \mu : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$, $\{\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}\}_{\alpha \in A}$ son las trivializaciones locales y $\pi_2 : U_\alpha \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la segunda proyección.

Lema 2.1.8. La integral de una densidad está bien definida.

Demostración. Supongamos que $\{(V_\alpha, \mathbf{y}_\alpha)\}_{\alpha \in B}$ es otro atlas de \mathcal{M} , y sea $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in B}$ una partición de la unidad subordinada al recubrimiento $\{V_\alpha\}_{\alpha \in B}$. Sean $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in B}$ las trivializaciones locales del fibrado de volumen asociadas al atlas $\{(V_\alpha, \mathbf{y}_\alpha)\}_{\alpha \in B}$. Entonces

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{M}} \mu &= \sum_{\alpha \in A} \int_{\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)} \eta_\alpha(\mathbf{x}_\alpha^{-1}(x)) \mu_\alpha(\mathbf{x}_\alpha^{-1}(x)) dx \\
 &= \sum_{\alpha \in A} \int_{\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)} \sum_{\beta \in B} \xi_\beta(\mathbf{x}_\alpha^{-1}(x)) \eta_\alpha(\mathbf{x}_\alpha^{-1}(x)) \mu_\alpha(\mathbf{x}_\alpha^{-1}(x)) dx \\
 &= \sum_{\alpha \in A, \beta \in B} \int_{\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha \cap V_\beta)} \xi_\beta(\mathbf{x}_\alpha^{-1}(x)) \eta_\alpha(\mathbf{x}_\alpha^{-1}(x)) \mu_\alpha(\mathbf{x}_\alpha^{-1}(x)) dx \\
 &= \sum_{\alpha \in A, \beta \in B} \int_{\mathbf{y}_\beta(U_\alpha \cap V_\beta)} \xi_\beta(\mathbf{y}_\beta^{-1}(y)) \eta_\alpha(\mathbf{y}_\beta^{-1}(y)) \\
 &\quad \cdot \pi_2(\varphi_\alpha(\mu(\mathbf{y}_\beta^{-1}(y)))) |\det d(\mathbf{x}_\alpha \circ \mathbf{y}_\beta^{-1})| dy \\
 &= \sum_{\alpha \in A, \beta \in B} \int_{\mathbf{y}_\beta(U_\alpha \cap V_\beta)} \xi_\beta(\mathbf{y}_\beta^{-1}(y)) \eta_\alpha(\mathbf{y}_\beta^{-1}(y)) \\
 &\quad \cdot \pi_2(\psi_\beta(\mu(\mathbf{y}_\beta^{-1}(y)))) dy \\
 &= \sum_{\beta \in B} \int_{\mathbf{y}_\beta(V_\beta)} \sum_{\alpha \in A} \eta_\alpha(\mathbf{y}_\beta^{-1}(y)) \xi_\beta(\mathbf{y}_\beta^{-1}(y)) \mu_\beta(\mathbf{y}_\beta^{-1}(y)) dy \\
 &= \sum_{\beta \in B} \int_{\mathbf{y}_\beta(V_\beta)} \xi_\beta(\mathbf{y}_\beta^{-1}(y)) \mu_\beta(\mathbf{y}_\beta^{-1}(y)) dy.
 \end{aligned}$$

□

Observación 2.1.9. Si $\omega \in \Omega^n \mathcal{M}$ es una n -forma, entonces podemos definir una densidad $|\omega| \in \Gamma \text{Vol}(\mathcal{M})$ de la siguiente manera: sean $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ las trivializaciones locales de $\text{Vol}(\mathcal{M})$ y sea $\{\eta_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una partición de la unidad subordinada al recubrimiento $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Supongamos que ω se escribe en coordenadas en U_α como

$$\omega = \omega_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n.$$

Entonces

$$|\omega|(p) = \sum_{\alpha \in A} \eta_\alpha(p) \varphi_\alpha^{-1}(p, |\omega_\alpha(p)|).$$

2.1. Elementos de geometría riemanniana

Para ver que $|\omega|$ está bien definida, supongamos que $p \in U_\alpha \cap U_\beta$. Entonces

$$\begin{aligned}\varphi_\beta^{-1}(p, |\omega_\beta(p)|) &= \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(p, |\omega_\beta(p)|) \\ &= \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(p, |\det d(\mathbf{x}_\beta \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1})(\mathbf{x}_\alpha(p))| |\omega_\alpha(p)|) \\ &= \varphi_\alpha^{-1}(p, |\omega_\alpha(p)|).\end{aligned}$$

Definición 2.1.10. Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable, y sea $\omega \in \Omega^n \mathcal{M}$ una n -forma con soporte compacto. Se define la *integral* de ω como

$$\int_{\mathcal{M}} \omega = \int_{\mathcal{M}} |\omega|.$$

En el caso de una variedad riemanniana, podemos integrar funciones a través de la densidad riemanniana.

Definición 2.1.11. Sea (\mathcal{M}, g) una variedad riemanniana. Se define la *densidad riemanniana* como

$$\text{dvol}(p) = \sum_{\alpha \in A} \eta_\alpha(p) \varphi_\alpha^{-1} \left(p, \sqrt{|g|(p)} \right).$$

Definición 2.1.12. Si (\mathcal{M}, g) es una variedad Riemanniana y $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ es una función con soporte compacto, se define

$$\int_{\mathcal{M}} f = \int_{\mathcal{M}} f \text{dvol}.$$

2.1.3. Formas pares e impares

Siguiendo [29], en ocasiones nos referiremos a las k -formas como *formas pares* para distinguirlas de las formas impares que definiremos a continuación.

Definición 2.1.13. Llamamos *k -forma impar* a una sección del fibrado vectorial $\text{Or}(\mathcal{M}) \otimes \Lambda^k \mathcal{M}$.

Observación 2.1.14. De acuerdo con el Corolario 2.1.6, una n -forma impar es una densidad.

De forma similar a lo ya mencionado anteriormente para las densidades, podemos representar localmente una k -forma impar ω como

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

teniendo en cuenta que en el cambio de carta se introduce el signo del determinante del jacobiano. De nuevo, si \mathcal{M} está orientada, entonces las k -formas impares se identifican con las k -formas pares.

La derivada exterior y el producto de formas impares –y de pares con impares– se define en coordenadas de forma totalmente análoga al caso de formas pares. La derivada exterior preserva la paridad, el producto de dos formas de la misma paridad es una forma par y el producto de dos formas de distinta paridad es una forma impar.

Es posible también definir un operador dual $*$ para formas impares completamente análogo al dual de Hodge clásico. Este operador nos permitirá, por fin, establecer un producto escalar en $\Omega^k \mathcal{M}$ para variedades riemannianas cualesquiera, independientemente de que estén orientadas o no, además del operador codiferencial y el laplaciano.

Definición 2.1.15. Sea ω una k -forma (par o impar). Definimos la forma dual $*\omega$ como la $(n - k)$ -forma de paridad opuesta a la paridad de ω que, en coordenadas, tiene la expresión

$$*\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{n-k} \leq n} (*\omega)_{j_1, \dots, j_{n-k}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{n-k}},$$

donde

$$(*\omega)_{j_1, \dots, j_{n-k}} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \delta_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k}}^{1, \dots, n} \sqrt{|g|} g^{i_1 \ell_1} \dots g^{i_k \ell_k} \omega_{\ell_1, \dots, \ell_k}$$

y $\delta_{b_1, \dots, b_n}^{a_1, \dots, a_n}$ es la delta de Kronecker.

Es decir,

$$* : \Gamma \Lambda^k \mathcal{M} \rightarrow \Gamma(\text{Or}(\mathcal{M}) \otimes \Lambda^{n-k} \mathcal{M}),$$

y

$$* : \Gamma(\text{Or}(\mathcal{M}) \otimes \Lambda^k \mathcal{M}) \rightarrow \Gamma \Lambda^{n-k} \mathcal{M}.$$

En particular, $*1 = \text{dvol}$ y $*\text{dvol} = 1$. Además, el operador $*$ es $C^\infty(\mathcal{M})$ -lineal y $**\omega = (-1)^{k(n+1)}\omega$, por lo que $*^{-1} = (-1)^{k(n+1)}*$.

Definición 2.1.16. Sea \mathcal{M} una variedad riemanniana compacta. Si ω y ν son dos k -formas pares, entonces $\omega \wedge *\nu$ es una densidad, y se define

$$(\omega, \nu) = \int_{\mathcal{M}} \omega \wedge *\nu.$$

Definición 2.1.17. La *codiferencial exterior* δ es el operador adjunto a la diferencial exterior. Es decir,

$$\delta = (-1)^{n(k+1)+1} * d * .$$

Definición 2.1.18. El *laplaciano* es el operador

$$\Delta = \delta d + d\delta.$$

Un cálculo sencillo muestra que si ω es una k -forma, entonces $\delta\omega$ es una $(k-1)$ -forma con la misma paridad que ω . Por su parte, $\Delta\omega$ es una k -forma con la misma paridad que ω .

2.1.4. Variaciones y campos de Jacobi

Los campos de Jacobi son campos de vectores a lo largo de una curva diferenciable –normalmente una geodésica– que sirven para medir la dispersión de una familia de curvas próximas. En particular, sirven para formalizar la idea de que las geodésicas próximas convergen cuando la curvatura ambiente es positiva, y divergen cuando es negativa.

Comenzaremos recordando brevemente la definición de derivada covariante a lo largo de una curva. Para ver una demostración del siguiente lema puede consultarse, por ejemplo, [54, Lema 4.9] o [61, Proposición 18]. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ es una curva diferenciable, denotamos por $\mathfrak{X}(\gamma)$ el $C^\infty(\mathcal{M})$ -módulo de campos de vectores a lo largo de γ . Esto es, el conjunto de aplicaciones diferenciables $V : [a, b] \rightarrow T\mathcal{M}$ tales que $V(t) \in T_{\gamma(t)}\mathcal{M}$ para todo $t \in [a, b]$.

Lema 2.1.19. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ una curva diferenciable. Existe una única aplicación

$$D_t : \mathfrak{X}(\gamma) \rightarrow \mathfrak{X}(\gamma)$$

satisfaciendo las siguientes propiedades:

a) \mathbb{R} -linealidad:

$$D_t(\alpha X + \beta Y) = \alpha D_t X + \beta D_t Y, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

b) Regla del producto:

$$D_t(fX) = df(X) + fD_t X, \quad f \in C^\infty([a, b]).$$

- c) Si $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$ admite una extensión a un campo de vectores definido en todo \mathcal{M} , entonces para cualquier extensión \tilde{X} de X se tiene que

$$D_t X = \nabla_{\dot{\gamma}} \tilde{X}.$$

Observación 2.1.20. En la propiedad c) del Lema 2.1.19 hemos escrito la derivada covariante con respecto de un único vector tangente $\dot{\gamma}$ porque la derivación covariante ∇_X es $C^\infty(\mathcal{M})$ -lineal en X .

Llamamos a D_t la *derivada covariante a lo largo de γ* . Con esta terminología, una geodésica es una curva γ tal que $D_t \dot{\gamma} \equiv 0$ a lo largo de γ .

Una *variación* de una curva diferenciable $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ es una aplicación diferenciable $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$, para un cierto $\varepsilon > 0$, satisfaciendo que $\Gamma(0, t) = \gamma(t)$ para todo $t \in [a, b]$. Para cada s fijo, llamamos a las curvas $t \mapsto \Gamma_s(t) = \Gamma(s, t)$ *curvas principales* y, análogamente, para cada t fijo, llamamos a las curvas $s \mapsto \Gamma^{(t)}(s) = \Gamma(s, t)$ *curvas transversales*. Decimos que Γ es una *variación por geodésicas* si todas las curvas principales son geodésicas –en particular, γ debe ser también una geodésica–.

De forma análoga a la definición de campos de vectores a lo largo de curvas, un *campo de vectores a lo largo de Γ* es una aplicación diferenciable $V : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow T\mathcal{M}$ tal que $V(s, t) \in T_{\Gamma(s, t)}\mathcal{M}$ para todo $(s, t) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b]$. Los campos tangentes a las curvas principales y a las curvas transversales son ejemplos de campos de vectores a lo largo de Γ . Los denotamos, respectivamente,

$$\partial_t \Gamma(s, t) = \frac{d}{dt} \Gamma_s(t) \quad \text{y} \quad \partial_s \Gamma(s, t) = \frac{d}{ds} \Gamma^{(t)}(s).$$

Si V es un campo de vectores a lo largo de Γ , podemos calcular su derivada covariante a lo largo de las curvas principales, denotada $D_t V$, o a lo largo de las curvas transversales, denotada $D_s V$.

El campo de vectores $\partial_s \Gamma(0, t)$ es un campo de vectores a lo largo de γ que mide la rapidez con la que se separan de γ las curvas principales cercanas. Por ello, este campo recibe el nombre de *campo de variaciones* de Γ . Si Γ es una variación por geodésicas, entonces el campo de variaciones satisface la llamada *ecuación de Jacobi*

$$D_t^2 V + R(V, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0. \tag{2.2}$$

Puede verse [54, Teorema 10.2] para una demostración de este hecho.

2.2. Comparación de triángulos

Definición 2.1.21. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ una geodésica, y sea $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$. Decimos que V es un *campo de Jacobi* si V satisface la ecuación (2.2).

El campo de variaciones de una variación por geodésicas es, como hemos dicho ya, un campo de Jacobi. Recíprocamente, todo campo de Jacobi se puede obtener como el campo de variaciones de una variación por geodésicas (véase [54, Lema 10.3]). Por ello, podemos pensar en los campos de Jacobi como aproximaciones lineales de geodésicas próximas.

Definición 2.1.22. Supongamos que $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ es una geodésica, y pongamos $p = \gamma(a)$ y $q = \gamma(b)$. Decimos que p y q son *conjugados a lo largo de γ* si existe un campo de Jacobi no nulo J a lo largo de γ tal que $J(a) = J(b) = 0$.

Intuitivamente, q es conjugado a p cuando las geodésicas que parten de p con velocidades iniciales próximas al vector $\dot{\gamma}(a)$ terminan por converger en q . Por ejemplo, el polo norte y el polo sur de una esfera son puntos conjugados a lo largo de cualquier meridiano.

La existencia de puntos conjugados es algo propio de la curvatura positiva, tal y como muestra el siguiente resultado.

Lema 2.1.23. Supongamos que todas las curvaturas seccionales de \mathcal{M} son no positivas. Entonces \mathcal{M} no tiene puntos conjugados.

Demostración. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ una geodésica y sea J un campo de Jacobi tal que $J(a) = J(b) = 0$. Calculamos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g(D_t J, J) &= g(D_t^2 J, J) + \|D_t J\|^2 \stackrel{(2.2)}{=} -g(R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, J) + \|D_t J\|^2 \\ &= -K(J, \dot{\gamma})(\|J\|^2 \|\dot{\gamma}\|^2 - g(J, \dot{\gamma})^2) + \|D_t J\|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

luego $g(D_t J, J)$ es creciente con t . Como $J(a) = J(b) = 0$, necesariamente $g(D_t J, J) \equiv 0$. Pero $g(D_t J, J) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} g(J, J)$, es decir, que $\|J\|$ es constante, y como $J(a) = 0$, se sigue que $J \equiv 0$. \square

2.2. Comparación de triángulos

En esta sección repasaremos dos teoremas clásicos de comparación de triángulos en variedades cuando tenemos cotas sobre la curvatura seccional: el Teorema de Toponogov y el Teorema de comparación de Rauch. Estos resultados nos serán de gran utilidad más adelante para analizar la propiedad de autoconvexidad.

2.2.1. Teorema de Toponogov

En la Sección 2.1.4 hemos podido entrever que existe una relación entre la dispersión de las geodésicas próximas y la curvatura seccional de la variedad que se concreta en la ecuación de Jacobi. El Teorema de Toponogov, que veremos a continuación, y el Teorema de comparación de Rauch, que veremos en la sección siguiente, son dos resultados que permiten acotar la longitud de los lados de los triángulos en una variedad si tenemos una cota de la curvatura seccional.

Comencemos con algo de terminología siguiendo [62, Cap. 8.2]. Una *bisagra* es un par de segmentos geodésicos (σ_1, σ_2) que emanan de un punto común x en el que forman un ángulo $\angle(\sigma_1, \sigma_2)$. Llamamos *vértices* de la bisagra al punto x y a los otros dos extremos de σ_1 y σ_2 , respectivamente.

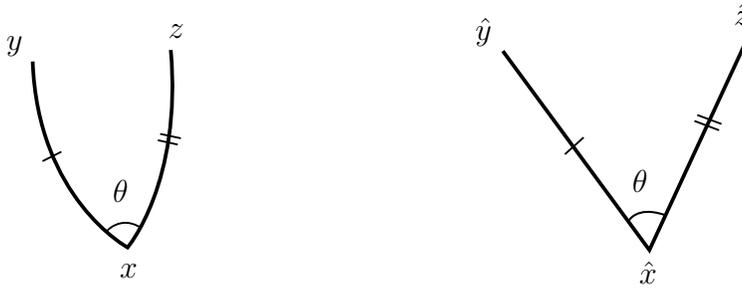


Figura 2.1: Una bisagra en una cierta variedad riemanniana (izquierda) y una bisagra de comparación en el espacio euclídeo \mathcal{M}_0^2 (derecha).

Denotemos por \mathcal{M}_k^n la *forma espacial* de curvatura k . Es decir, la única variedad riemanniana n -dimensional completa y simplemente conexa de curvatura seccional constante k . Dada una bisagra (σ_1, σ_2) en una variedad riemanniana cualquiera (\mathcal{M}, g) de dimensión n , siempre podemos encontrar una bisagra de comparación en \mathcal{M}_k^n , es decir, una bisagra $(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2)$ en \mathcal{M}_k^n tal que las longitudes de σ_1 y $\hat{\sigma}_1$, y las longitudes de σ_2 y $\hat{\sigma}_2$ coinciden, y $\angle(\sigma_1, \sigma_2) = \angle(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2)$ (ver [62, Lema 56] y la Figura 2.1).

El Teorema de Toponogov es un teorema clásico que nos permite comparar distancias en una variedad n -dimensional \mathcal{M} con distancias en \mathcal{M}_k^n en términos de bisagras. No incluiremos aquí una demostración de este resultado, que puede consultarse en [62, Teorema 79]. Si $x, y \in \mathcal{M}$ son dos puntos distintos, denotemos por $d(x, y)$ la distancia (geodésica) entre x e y .

2.2. Comparación de triángulos

Teorema 2.2.1 (Toponogov). Sea (\mathcal{M}, g) una variedad riemanniana de dimensión n con todas sus curvaturas seccionales inferiormente acotadas por una constante k . Para cualquier bisagra en \mathcal{M} con vértices y, x, z , y para cualquier bisagra de comparación en \mathcal{M}_k^n con vértices $\hat{y}, \hat{x}, \hat{z}$, se tiene que

$$d(y, z) \leq d(\hat{y}, \hat{z}).$$

Este resultado se puede interpretar como “cuanto mayor es la curvatura seccional, más rápido convergen las geodésicas”.

2.2.2. Teorema de comparación de Rauch

El Teorema de comparación de Rauch puede interpretarse como una suerte de recíproco del Teorema de Toponogov. Su formulación clásica, tal y como suele aparecer en la literatura, es en términos de campos de Jacobi, lo que lo hace parecer más complicado que el Teorema de Toponogov. Se puede encontrar una demostración del Teorema de Rauch en [54, Teorema 11.9].

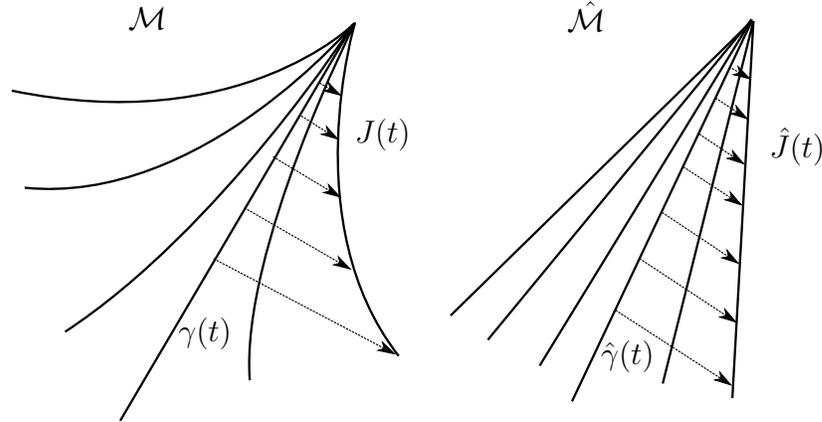


Figura 2.2: Dos geodésicas, γ y $\hat{\gamma}$, y dos campos de Jacobi, J y \hat{J} , a lo largo de γ y $\hat{\gamma}$, respectivamente. La variedad \mathcal{M} (izquierda) tiene curvatura negativa, mientras que la variedad $\hat{\mathcal{M}}$ (derecha) es plana. Aplicando el Teorema de comparación de Rauch, $J(t)$ debe ser siempre más largo que $\hat{J}(t)$.

Teorema 2.2.2 (Teorema de comparación de Rauch). Sean (\mathcal{M}, g) y $(\hat{\mathcal{M}}, \hat{g})$ variedades riemannianas. Sean $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}$ y $\hat{\gamma} : [0, T] \rightarrow \hat{\mathcal{M}}$ segmentos geodésicos tales que $\|\dot{\gamma}(0)\| = \|\dot{\hat{\gamma}}(0)\|$, y tales que $\hat{\gamma}(0)$ no tiene puntos

conjugados a lo largo de $\hat{\gamma}$. Sean J y \hat{J} campos de Jacobi a lo largo de γ y $\hat{\gamma}$, respectivamente, tales que $J(0) = \hat{J}(0) = 0$, $\|D_t J(0)\| = \|\hat{D}_t \hat{J}(0)\|$ y $g(D_t J(0), \dot{\gamma}(0)) = \hat{g}(\hat{D}_t \hat{J}(0), \dot{\hat{\gamma}}(0))$. Supongamos que las curvaturas seccionales de \mathcal{M} y $\hat{\mathcal{M}}$ satisfacen $K(\Pi) \leq \hat{K}(\hat{\Pi})$ cada vez que $\Pi \subset T_{\gamma(t)}\mathcal{M}$ y $\hat{\Pi} \subset T_{\hat{\gamma}(t)}\hat{\mathcal{M}}$ son subespacios 2-dimensionales conteniendo a $\dot{\gamma}(t)$ y a $\dot{\hat{\gamma}}(t)$, respectivamente. Entonces $\|J(t)\| \geq \|\hat{J}(t)\|$ para todo $t \in [0, T]$.

2.3. Corrientes

La noción de corriente, introducida por G. de Rham en [29], es una generalización natural del concepto de distribución introducido por L. Schwartz.

2.3.1. Identidades de Green para corrientes

Definición 2.3.1. Una k -corriente par (resp. impar) es un funcional \mathbb{R} -lineal Λ definido en el espacio de formas diferenciales impares (resp. pares) con soporte compacto de grado $(n - k)$, y que es continuo en el siguiente sentido: para todo entorno coordenado (U, \mathbf{x}) de \mathcal{M} , y para todo compacto $K \subset U$, si $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de $(n - k)$ -formas tales que $\text{supp } \varphi_m \subset K$ para todo $m \in \mathbb{N}$, y tales que las derivadas de cualquier orden de todos los coeficientes de las formas φ_m tienden uniformemente a 0 cuando $m \rightarrow \infty$, entonces $\Lambda(\varphi_m) \rightarrow 0$.

Ejemplo 2.3.2. Si η es una k -forma par (resp. impar), entonces el operador Λ_η dado por

$$\Lambda_\eta(\varphi) = \int_{\mathcal{M}} \eta \wedge \varphi$$

para toda $(n - k)$ -forma impar (resp. par) es una k -corriente par (resp. impar). En efecto, si U es un entorno coordenado, $K \subset U$ es un compacto y $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de $(n - k)$ -formas como en la Definición 2.3.1,

2.3. Corrientes

entonces

$$\begin{aligned}
|\Lambda_\eta(\varphi_m)| &= \left| \int_U \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \eta_{j_1, \dots, j_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \right. \\
&\quad \left. \wedge \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-k} \leq n} \varphi_{m, i_1, \dots, i_{n-k}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n-k}} \right| \\
&= \left| \sum_{i_a, j_b} \int_U \eta_{j_1, \dots, j_k} \varphi_{m, i_1, \dots, i_{n-k}} \delta_{j_1, \dots, j_k, i_1, \dots, i_{n-k}}^{1, \dots, n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \right| \\
&\leq C \sup_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-k} \leq n} \sup_{x \in K} |\varphi_{m, i_1, \dots, i_{n-k}}(x)|
\end{aligned}$$

para una cierta constante C que no depende de m . Dado que las funciones $\varphi_{m, i_1, \dots, i_{n-k}}$ convergen uniformemente a 0 por hipótesis, se sigue que $\sup_{x \in K} |\varphi_{m, i_1, \dots, i_{n-k}}(x)| \rightarrow 0$, luego $|\Lambda_\eta(\varphi_m)| \rightarrow 0$.

Ejemplo 2.3.3. Una medida positiva μ tal que $\mu(\mathcal{M}) < \infty$ se puede identificar con una n -corriente impar Λ_μ poniendo

$$\Lambda_\mu(\varphi) = \mu(\varphi),$$

ya que si $\text{supp } \varphi \subset K$, entonces

$$|\Lambda_\mu(\varphi)| \leq \mu(\mathcal{M}) \sup_{x \in K} |\varphi(x)|.$$

Similarmente, una medida con signo ν , con descomposición de Jordan $\nu = \nu^+ - \nu^-$, y tal que ν^+ y ν^- son medidas finitas, se identifica con una n -corriente $\Lambda_\nu = \Lambda_{\nu^+} - \Lambda_{\nu^-}$.

Si Λ es una k -corriente y ω es una p -forma, se define la $(k+p)$ -corriente $\Lambda \wedge \omega$ por

$$\Lambda \wedge \omega(\varphi) = \Lambda(\omega \wedge \varphi).$$

Se define también $\omega \wedge \Lambda = (-1)^{kp} \Lambda \wedge \omega$. El producto escalar de una k -corriente par (resp. impar) Λ y una $(n-k)$ -forma impar (resp. par) ω se define como

$$(\Lambda, \omega) = (\omega, \Lambda) = \Lambda(*\omega) = \Lambda \wedge *\omega(1).$$

La diferencial exterior de una k -corriente Λ es la $(k+1)$ -corriente $d\Lambda$ de paridad opuesta dada por

$$d\Lambda(\varphi) = (-1)^{k+1} \Lambda(d\varphi).$$

En particular, $d^2\Lambda = 0$. Se define también la corriente dual $*\Lambda$ por

$$*\Lambda(\varphi) = \Lambda(*^{-1}\varphi) = (-1)^{k(n+1)}\Lambda(*\varphi).$$

Definimos la codiferencial $\delta\Lambda$ y el laplaciano $\Delta\Lambda$ de Λ por las fórmulas $\delta = (-1)^{n(k+1)+1} * d *$ y $\Delta = \delta d + d\delta$. Se comprueba que $*\Delta = \Delta*$.

Teorema 2.3.4 (Integración por partes e identidades de Green). Sea \mathcal{M} una variedad riemanniana compacta. Sean Λ una k -corriente y ω una forma del grado y la paridad apropiada. Entonces

$$(d\Lambda, \omega) = (\Lambda, \delta\omega), \quad (\delta\Lambda, \omega) = (\Lambda, d\omega).$$

Además,

$$(\Delta\Lambda, \omega) = (d\Lambda, d\omega) + (\delta\Lambda, \delta\omega) = (\Lambda, \Delta\omega).$$

Demostración. En primer lugar,

$$\begin{aligned} (d\Lambda, \omega) &= d\Lambda(*\omega) \\ &= (-1)^{k+1}\Lambda(d*\omega) \\ &= (-1)^{k+1}\Lambda(* *^{-1} d*\omega) \\ &= (\Lambda, (-1)^{k+1} *^{-1} d*\omega) \\ &= (\Lambda, \delta\omega). \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} (\delta\Lambda, \omega) &= \delta\Lambda(*\omega) \\ &= (-1)^{n(k+1)+1} * d * \Lambda(*\omega) \\ &= (-1)^{n(k+1)+1} d * \Lambda(\omega) \\ &= (-1)^{n(k+1)+1+n-k+1} * \Lambda(d\omega) \\ &= (-1)^{n(k+1)+1+n-k+1+k(n+1)} \Lambda(*d\omega) \\ &= (-1)^{2(nk+n+1)} \Lambda(*d\omega) \\ &= (\Lambda, d\omega). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(\delta d\Lambda, \omega) = (d\Lambda, d\omega) = (\Lambda, \delta d\omega) \quad \text{y} \quad (d\delta\Lambda, \omega) = (\delta\Lambda, \delta\omega) = (\Lambda, d\delta\omega),$$

así que

$$((\delta d + d\delta)\Lambda, \omega) = (d\Lambda, d\omega) + (\delta\Lambda, \delta\omega) = (\Lambda, (\delta d + d\delta)\omega).$$

□

2.3. Corrientes

Observación 2.3.5. Si $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, entonces $\delta f = 0$, luego $\Delta f = -*d*df$. Tomemos coordenadas (U, \mathbf{x}) . De la Definición 2.1.15 se sigue que

$$(*dx^i)_{1,\dots,j-1,j+1,\dots,n} = (-1)^{j+1} \sqrt{|g|} g^{ij},$$

luego

$$*dx^i = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \sqrt{|g|} g^{ij} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Además,

$$*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = * \left(\frac{1}{\sqrt{|g|}} \text{dvol} \right) = \frac{1}{\sqrt{|g|}}.$$

Tenemos, pues, que

$$*df = *(\partial_i f dx^i) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \sqrt{|g|} g^{ij} \partial_i f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Por lo tanto,

$$d*df = \partial_j \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_i f \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

y

$$\Delta f = -*d*df = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_j \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_i f \right),$$

que es la expresión local (2.1) para el laplaciano en funciones diferenciables.

2.3.2. Teorema de descomposición de Hodge

Supongamos que una corriente ω admite una solución u de la ecuación de Poisson $\Delta u = \omega$. Entonces, para toda forma armónica φ con soporte compacto,

$$(\omega, \varphi) = (\Delta u, \varphi) = (u, \Delta \varphi) = 0,$$

de modo que ω debe ser, necesariamente, ortogonal a todas las formas armónicas con soporte compacto. Si \mathcal{M} es compacta, el Teorema de descomposición de Hodge garantiza que esta condición también es suficiente para que el problema de Poisson tenga solución. Incluir en esta memoria la demostración del Teorema de Hodge llevaría demasiado tiempo. Por ello, referimos al lector al texto de G. de Rham [29].

Teorema 2.3.6. Sea \mathcal{M} una variedad riemanniana compacta. Existen operadores lineales G y H satisfaciendo las relaciones

$$\begin{aligned} dH = Hd = 0, \delta H = H\delta = 0, *H = H*, H^2 = H, \\ dG = Gd, \delta G = G\delta, *G = G*, GH = HG = 0, \\ \Delta G = G\Delta = 1 - H. \end{aligned}$$

Corolario 2.3.7 (Teorema de descomposición de Hodge). Sea \mathcal{M} una variedad riemanniana compacta. Entonces toda corriente ω se puede escribir de forma única como

$$\omega = \alpha + \beta + \gamma,$$

donde α es una corriente exacta, β es una corriente coexacta, y γ es una forma armónica.

Demostración. De la relación $\Delta G = 1 - H$ se obtiene que

$$\omega = \Delta G(\omega) + H(\omega) = d\delta G(\omega) + \delta dG(\omega) + H(\omega).$$

Dado que $dH = \delta H = 0$, se sigue que $H(\omega)$ es una corriente armónica, luego es una forma $-$ de clase $C^\infty-$ armónica (ver [29, Teorema 21]). La corriente $d\delta G(\omega)$ es exacta y la corriente $\delta dG(\omega)$ es coexacta.

Para ver la unicidad, supongamos que $\omega = \alpha + \beta + \gamma$ con α una corriente exacta, β una corriente coexacta, y γ una forma armónica. Si φ es una forma cualquiera, podemos escribir

$$\varphi = d\delta G(\varphi) + \delta dG(\varphi) + H(\varphi).$$

Sean a y b corrientes tales que $\alpha = da$ y $\beta = \delta b$. Entonces

$$\begin{aligned} (\alpha, \varphi) &= (da, d\delta G(\varphi) + \delta dG(\varphi) + H(\varphi)) \\ &= (a, \delta d\delta G(\varphi) + \delta^2 dG(\varphi) + \delta H(\varphi)) \\ &= (a, \delta d\delta G(\varphi)) \\ &= (\alpha, d\delta G(\varphi)). \end{aligned}$$

Pero también

$$(\omega, d\delta G(\varphi)) = (\alpha + \delta b + \gamma, d\delta G(\varphi)) = (\alpha, d\delta G(\varphi)),$$

2.3. Corrientes

luego $(\alpha, \varphi) = (\omega, d\delta G(\varphi))$. Ahora,

$$(\omega, d\delta G(\varphi)) = (G(d\delta\omega), \varphi),$$

así que $(\alpha, \varphi) = (G(d\delta\omega), \varphi)$, y como φ es arbitraria, se sigue que $\alpha = G(d\delta\omega) = d\delta G(\omega)$. Similarmente, $\beta = \delta dG(\omega)$ y $\gamma = H(\omega)$. \square

Supongamos que ω es una n -corriente. Entonces $H(\omega)$ es una n -forma armónica. Si \mathcal{M} es compacta –y, como suponemos que es conexa–, necesariamente $H(\omega) = t \text{dvol}$ para una cierta constante t , de modo que

$$\omega = t \text{dvol} + \Delta G(\omega).$$

En particular,

$$\begin{aligned} \omega(1) &= t \text{vol}(1) + \Delta G(\omega)(1) \\ &= t \text{vol}(\mathcal{M}) + \Delta G(\omega)(* \text{dvol}) \\ &= t \text{vol}(\mathcal{M}) + (\Delta G(\omega), \text{dvol}) \\ &= t \text{vol}(\mathcal{M}) + (G(\omega), \Delta \text{dvol}) \\ &= t \text{vol}(\mathcal{M}), \end{aligned}$$

luego

$$t = \frac{\omega(1)}{\text{vol}(\mathcal{M})}.$$

Llamamos a esta cantidad la *masa* de ω y la denotamos $m(\omega)$, ya que si $\omega = \mu$ es una medida, entonces $\mu(1) = \int_{\mathcal{M}} d\mu$, luego $m(\mu) = \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{M})} \int d\mu$. Por otra parte, como $G(\omega)$ es una n -corriente, $dG(\omega) = 0$, así que

$$\Delta G(\omega) = d\delta G(\omega) = -d * d * G(\omega) = -d * d(*G(\omega)).$$

Si denotamos $G^\omega = *G(\omega)$, entonces

$$\omega = m(\omega) \text{dvol} - d * dG^\omega, \tag{2.3}$$

siendo G^ω una 0 -corriente –una distribución– que cumple $G^\omega(\text{dvol}) = 0$. Es decir, $G^\omega(*1) = (G^\omega, 1) = 0$. Como consecuencia, obtenemos la siguiente definición.

Definición 2.3.8. Sea \mathcal{M} una variedad riemanniana compacta, y sea ω una n -corriente. Entonces existe una 0 -corriente ψ tal que

$$\omega = m(\omega) \text{dvol} - d * d\psi.$$

La corriente ψ es única si pedimos que $\psi(\text{dvol}) = 0$, y en tal caso ponemos $\psi = G^\omega$. Decimos que G^ω es la *función de Green* de ω .

2.4. Variedades armónicas

Es bien conocida la propiedad del valor medio para funciones armónicas en el espacio euclídeo \mathbb{R}^n : si $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable y armónica en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $B(x, r)$ es una bola abierta contenida en Ω , entonces

$$h(x) = \frac{1}{\text{vol}(B(x, r))} \int_{y \in B(x, r)} h(y) dy. \quad (2.4)$$

Uno podría preguntarse si esta misma igualdad es cierta en variedades riemannianas generales. La respuesta es que en general no es así. Sin embargo, existen ciertas variedades, como la esfera, en las que la propiedad del valor medio sí se cumple: las variedades localmente armónicas, de las que hablaremos en esta sección.

2.4.1. Densidad de volumen

Sea (\mathcal{M}, g) una variedad riemanniana, y sea $x \in \mathcal{M}$ un punto cualquiera. La densidad de volumen es una función diferenciable $\omega_x : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ que puede definirse globalmente, sin hacer mención a sistemas coordenados, en términos de campos de Jacobi. Sin embargo, para nuestros propósitos, será suficiente con considerar la definición de esta función en coordenadas normales.

En adelante usaremos frecuentemente los conceptos de cut locus y radio de inyectividad. Recordemos las definiciones.

Definición 2.4.1. Para un punto $x \in \mathcal{M}$, el *cut locus* $\text{Cut}(x)$ es el conjunto de puntos $y \in \mathcal{M}$ cumpliendo, al menos, una de las siguientes condiciones:

- a) y es un punto conjugado a x (ver Definición 2.1.22).
- b) Existen dos geodésicas minimizantes distintas que unen x con y .

Es posible que un punto y cumpla la condición b) en la definición anterior, pero no la condición a). Imaginemos el plano proyectivo real como una semiesfera con los puntos antipodales del ecuador identificados, y sea x el polo norte de la semiesfera. Dado un punto y en el ecuador, existen exactamente dos geodésicas minimizantes que unen x con y : las dos que parten con velocidades iniciales opuestas desde x . Sin embargo, las geodésicas próximas a cualquiera de estas dos no convergen en el punto y , sino que van a parar a puntos próximos a y .

2.4. Variedades armónicas

Lo que más nos interesa de la definición de cut locus es que permite identificar los puntos en los que la función distancia es diferenciable.

Proposición 2.4.2. Sea $x \in \mathcal{M}$ un punto cualquiera. La función distancia $r : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $r(y) = d(x, y)$ es diferenciable para todo $y \in \mathcal{M} \setminus (\text{Cut}(x) \cup \{x\})$.

Puede verse la demostración en [62, Corolario 7].

Definición 2.4.3. Sea $x \in \mathcal{M}$. El *radio de injectividad* de x se define como

$$\text{inj}(x) = \sup\{\varepsilon > 0 : \exp_x : \mathbb{B}(\varepsilon) \rightarrow B(x, \varepsilon) \text{ es un difeomorfismo}\},$$

donde $\mathbb{B}(\varepsilon)$ denota la bola euclídea de centro $0 \in \mathbb{R}^n$ y radio ε . El radio de injectividad de \mathcal{M} es

$$\text{inj}(\mathcal{M}) = \inf_{x \in \mathcal{M}} \text{inj}(x).$$

Observación 2.4.4. Si \mathcal{M} es una variedad compacta, entonces $\text{inj}(\mathcal{M}) > 0$.

Definición 2.4.5. Sean (\mathcal{M}, g) una variedad riemanniana, $x \in \mathcal{M}$ un punto y U un entorno normal de x . La *densidad de volumen* es una función cuya expresión en coordenadas normales es

$$\omega_x(y) = \sqrt{|g|(y)}, \quad y \in U.$$

Para ver una definición formal de la densidad de volumen sin usar coordenadas, puede consultarse [14, 6.3] o [47].

Proposición 2.4.6. La densidad de volumen satisface las siguientes propiedades:

- a) ω_x es una función diferenciable en cualquier entorno normal de x .
- b) $\omega_x(x) = 1$.
- c) $\omega_x(y) > 0$ si $d(x, y) < \text{inj}(x)$.
- d) $\omega_x(y) = 0$ si, y sólo si, y es conjugado a x .
- e) $\omega_x(y) = \omega_y(x)$.

Las propiedades a), b) y c) se siguen directamente de la Definición 2.4.5 (para b) recordemos que, en coordenadas normales, $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$). La propiedad d) es consecuencia de la definición de ω_x en términos de campos de Jacobi (ver [14, 6.3]). Finalmente, e) se sigue de la involución geodésica canónica (ver Definición 2.4.7 y Lema 2.4.8 a continuación).

Definición 2.4.7. La *involución geodésica canónica* i del fibrado tangente $T\mathcal{M}$ se define de la siguiente manera. Sea $\mathcal{D} \subset T\mathcal{M}$ el dominio de definición de la aplicación exponencial \exp , y denotemos por γ_v la geodésica $\exp_x(tv)$, con $t \in [0, 1]$, para $(x, v) \in \mathcal{D}$. Entonces $i : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ es la aplicación dada por

$$i(v) = -\dot{\gamma}_v(1).$$

En otras palabras, si $v \in T_x\mathcal{M}$ e $y = \exp_x v$, entonces $i(v)$ es el único vector $w \in T_y\mathcal{M}$ tal que $\exp_y w = x$.

Lema 2.4.8. Sean $x \in \mathcal{M}$, $v \in T_x\mathcal{M}$ e $y = \exp_x v$. Denotemos, abusando de la notación, $\omega(v) = \omega_x(y)$. Entonces $\omega(v) = \omega(i(v))$.

La demostración de este resultado puede encontrarse en [14, Lema 6.12]. Con el Lema 2.4.8 se puede demostrar fácilmente la propiedad e) de la Proposición 2.4.6.

2.4.2. Variedades localmente armónicas

Una variedad localmente armónica es aquella en la que la densidad de volumen es una función radialmente simétrica en un entorno de cada punto. Más formalmente:

Definición 2.4.9. Sea \mathcal{M} una variedad riemanniana, y sea $x \in \mathcal{M}$ un punto. Decimos que \mathcal{M} es *localmente armónica en x* si existe un $\varepsilon > 0$ tal que la densidad de volumen ω_x es radialmente simétrica en $B(x, \varepsilon)$. Es decir, si existe una función $\Omega_x : [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\omega_x(y) = \Omega_x(d(x, y))$ para todo $y \in B(x, \varepsilon)$. Decimos que \mathcal{M} es *localmente armónica* si es localmente armónica en x para todo $x \in \mathcal{M}$.

El espacio euclídeo \mathbb{R}^n es un ejemplo de variedad localmente armónica con $\Omega(r) \equiv 1$. La esfera \mathbb{S}^n es localmente armónica, con $\Omega(r) = \frac{\sin^{n-1}(r)}{r^{n-1}}$. También son variedades localmente armónicas los espacios proyectivos $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, $\mathbb{H}\mathbb{P}^n$, y el plano de Cayley $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$.

Observación 2.4.10. Toda variedad localmente armónica es una variedad de Einstein (ver [14, 6]). Como consecuencia de un teorema de DeTurck y Kazdan [32, Teorema 5.2], esto implica que la representación de la métrica g en coordenadas normales es analítica. Por lo tanto, la representación de la densidad de volumen en coordenadas normales es también una función analítica. Esto significa que si ω_x es radialmente simétrica en $B(x, \varepsilon)$ para un cierto $\varepsilon > 0$, entonces también es radialmente simétrica en $B(x, \text{inj}(x))$. En otras palabras, siempre podemos tomar $\varepsilon = \text{inj}(x)$. Es más, si \mathcal{M} es localmente armónica y $d(x, y) < \text{inj}(\mathcal{M})$, entonces, por [14, Proposición 4.16], ω_x y ω_y son radialmente simétricas con la misma función Ω . Esto significa que en adelante podemos omitir el subíndice x en Ω_x .

Recordemos (ver [5, 4.9]) que en coordenadas polares riemannianas (r, θ) el laplaciano de una función radialmente simétrica $f(r)$ está dado por

$$-\Delta f(r) = f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) + f'(r) \partial_r \log \sqrt{|g|(r\theta)}.$$

Por lo tanto, si \mathcal{M} es localmente armónica, entonces el laplaciano de la función distancia $r(y) = d(x, y)$ tiene la expresión

$$L_x(r) := \Delta r(y) = -\frac{n-1}{r} - \frac{\Omega'(r)}{\Omega(r)} = -\frac{d}{dr} \log r^{n-1} \Omega(r). \quad (2.5)$$

Observación 2.4.11. Dado que el miembro derecho de (2.5) no depende de x , aquí también podemos omitir el subíndice x en L_x .

El siguiente resultado, cuya demostración incluimos por completitud, permite una interpretación alternativa de las variedades localmente armónicas: son aquellas para las que toda esfera geodésica suficientemente pequeña tiene curvatura media constante. Si x e y son dos puntos distintos con $r = d(x, y) < \text{inj}(x)$, denotemos por $\sigma_{x,y}$ el operador de forma de la esfera geodésica $S(x, r)$ en el punto y . Esto es, $\sigma_{x,y}(X) = -\nabla_X N$ para todo campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ tangente a $S(x, r)$ en y , donde $N = \partial_r$ es el vector normal unitario que apunta hacia afuera en $S(x, r)$.

Recordemos que la curvatura media de la esfera geodésica $S(x, r)$ en el punto y se define como $\frac{1}{n-1} \text{tr } \sigma_{x,y}$, donde tr denota la traza del operador.

Proposición 2.4.12. Sean $x, y \in \mathcal{M}$ dos puntos distintos con $r = d(x, y) < \text{inj}(x)$. Entonces

$$\Delta r = \text{tr } \sigma_{x,y}.$$

Demostración. Sea $\{E_1, \dots, E_{n-1}, N\}$ un sistema de referencia ortonormal en un entorno de y . Entonces

$$\begin{aligned} \Delta r &= -\operatorname{div} \nabla r = -\operatorname{tr} \nabla N = -\sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{E_i} N, E_i) - g(\nabla_N N, N) \\ &= \operatorname{tr} \sigma_{x,y} - g(\nabla_N N, N). \end{aligned}$$

Pero $g(\nabla_N N, N) = \frac{1}{2}N(g(N, N)) = 0$, ya que $g(N, N) \equiv 1$. \square

La proposición anterior nos da una caracterización tal vez algo más intuitiva de las variedades localmente armónicas: son aquellas en las que las esferas geodésicas suficientemente pequeñas tienen curvatura media constante que sólo depende del radio, y no del punto central.

Proposición 2.4.13. Supongamos que \mathcal{M} es localmente armónica en x , y sea $0 < r < \operatorname{inj}(x)$. Denotemos por $v_x(r)$ el volumen $(n-1)$ -dimensional de la esfera geodésica $S(x, r)$. Entonces

$$-L_x(r) = \frac{d}{dr} \log v_x(r).$$

Demostración. Sea $0 < \delta < r$ un número real cualquiera. Denotemos

$$A(x, \delta, r) = \{y \in \mathcal{M} : \delta \leq r(y) \leq r\},$$

donde $r(y) = d(x, y)$. Aplicando la primera identidad de Green,

$$\begin{aligned} -\int_{y \in A(x, \delta, r)} \Delta r(y) \operatorname{dvol}(y) &= \int_{S(x, r)} \|\nabla r(y)\|^2 dS_r(y) \\ &\quad - \int_{S(x, \delta)} \|\nabla r(y)\|^2 dS_\delta(y) \\ &= v_x(r) - v_x(\delta), \end{aligned}$$

ya que $\|\nabla r(y)\| \equiv 1$, donde dS_r es la medida riemanniana inducida en $S(x, r)$. Haciendo tender δ a 0, tenemos por un lado que

$$\int_{y \in B(x, r)} \Delta r(y) \operatorname{dvol}(y) = -v_x(r).$$

2.5. Energías y medidas de equilibrio

Por otro lado, tomando coordenadas polares riemannianas en $B(x, r)$,

$$\begin{aligned} \int_{y \in B(x, r)} \Delta r(y) d\text{vol}(y) &= \int_0^r \int_{y \in S(x, t)} \Delta r(y) dS_t(y) dt \\ &= \int_0^r L(t) v_x(t) dt. \end{aligned}$$

Derivando, tenemos que

$$-\frac{d}{dr} v_x(r) = L(r) v_x(r), \quad \text{luego} \quad -L(r) = \frac{d}{dr} \log v_x(r).$$

□

Observación 2.4.14. Como el miembro izquierdo de la igualdad en la Proposición 2.4.13 no depende del punto x , podemos omitir el subíndice x en $v_x(r)$ siempre que $0 < r < \text{inj}(\mathcal{M})$.

Otras caracterizaciones de las variedades localmente armónicas pueden encontrarse en [14, Proposición 6.21].

2.5. Energías y medidas de equilibrio

En esta sección veremos algunos de los principales resultados relativos a las energías continua y discreta con núcleo arbitrario. Todos estos resultados pueden encontrarse, de forma más o menos explícita, en cualquiera de las referencias clásicas [52, 24, 60]. Nosotros seguiremos el libro [18], que está en proceso de publicación, y que recoge los principales elementos que necesitaremos en esta memoria.

2.5.1. Energía discreta y energía continua

Sea \mathcal{M} una variedad riemanniana compacta. Un *núcleo* es una aplicación $K : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ simétrica y semicontinua inferior. Dada una colección de N puntos $\omega_N = \{x_1, \dots, x_N\}$ en \mathcal{M} , se define su *K -energía discreta* por

$$E_K(\omega_N) = E_K(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i \neq j} K(x_i, x_j).$$

La energía discreta representa la energía de un sistema de N partículas en el que la interacción entre dos de ellas está dada por el núcleo K . Denotamos por $\mathcal{E}_K(N)$ la energía mínima para N partículas. Es decir,

$$\mathcal{E}_K(N) = \inf_{\omega_N} E_K(\omega_N).$$

Como \mathcal{M} es compacta y K es semicontinuo inferior, este ínfimo siempre se alcanza por alguna colección minimizante.

Lema 2.5.1. La sucesión $(\tau_N)_{N \geq 2}$ dada por

$$\tau_N = \frac{\mathcal{E}_K(N)}{N(N-1)}$$

es no decreciente.

Demostración. Sea $\omega_N = \{x_1, \dots, x_N\}$ una configuración cualquiera de $N \geq 3$ puntos en \mathcal{M} . Para cada $k = 1, \dots, N$, tenemos que

$$\begin{aligned} E_K(\omega_N) &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N K(x_k, x_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N K(x_j, x_k) + \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j \neq k}}^N K(x_i, x_j) \\ &\geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N K(x_k, x_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N K(x_j, x_k) + \mathcal{E}_K(N-1). \end{aligned}$$

Sumando estas desigualdades desde $k = 1$ hasta N ,

$$\begin{aligned} NE_K(\omega_N) &\geq \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N K(x_k, x_j) + \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N K(x_j, x_k) + N\mathcal{E}_K(N-1) \\ &\geq 2\mathcal{E}_K(N) + N\mathcal{E}_K(N-1), \end{aligned}$$

y como ω_N es una configuración cualquiera,

$$N\mathcal{E}_K(N) \geq 2\mathcal{E}_K(N) + N\mathcal{E}_K(N-1).$$

Es decir,

$$(N-2)\mathcal{E}_K(N) \geq N\mathcal{E}_K(N-1).$$

2.5. Energías y medidas de equilibrio

Dividiendo por $N(N-1)(N-2)$ obtenemos que

$$\frac{\mathcal{E}_K(N)}{N(N-1)} \geq \frac{\mathcal{E}_K(N-1)}{(N-1)(N-2)},$$

de donde se sigue el resultado. \square

El lema anterior muestra que el límite (posiblemente infinito)

$$\tau_K(\mathcal{M}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}_K(N)}{N^2}$$

existe. Lo llamamos K -diámetro transfinito de \mathcal{M} .

La contraparte continua de la energía discreta se define de la siguiente manera: si μ es una medida (boreliana) finita, el K -potencial de μ es la función U_K^μ definida por

$$U_K^\mu(x) = \int_{y \in \mathcal{M}} K(x, y) d\mu(y).$$

La K -energía continua de μ es

$$I_K[\mu] = (\mu \otimes \mu)(K) = \int_{x \in \mathcal{M}} U^\mu(x) d\mu(x) = \int_{x, y \in \mathcal{M}} K(x, y) d\mu(x) d\mu(y).$$

Una *medida de equilibrio* (si existe) es una medida de probabilidad μ^* que minimiza la energía continua entre todas las medidas de probabilidad. Es decir,

$$I_K[\mu^*] = \inf_{\mu \text{ prob.}} I_K[\mu] =: W_K(\mathcal{M}).$$

Llamamos a $W_K(\mathcal{M})$ la *constante de Wiener* de \mathcal{M} .

Observación 2.5.2. La definición de energía continua se puede extender de manera natural a medidas con signo. Si ν es una medida con signo finita y $\nu = \nu^+ - \nu^-$ es su descomposición de Jordan, podemos escribir

$$I_K[\nu] = (\nu^+ \otimes \nu^+)(K) + (\nu^- \otimes \nu^-)(K) - (\nu^+ \otimes \nu^-)(K) - (\nu^- \otimes \nu^+)(K),$$

siempre que alguna de las sumas $(\nu^+ \otimes \nu^+)(K) + (\nu^- \otimes \nu^-)(K)$ o $(\nu^+ \otimes \nu^-)(K) + (\nu^- \otimes \nu^+)(K)$ sea finita. Observemos que, como K es semicontinuo inferior y \mathcal{M} es compacta, K está inferiormente acotado, luego si $|I_K[\nu]| < \infty$, entonces K es $(\nu \otimes \nu)$ -integrable.

2.5.2. Medida de equilibrio: existencia

Una medida de equilibrio, como veremos a continuación, siempre existe.

Lema 2.5.3. El potencial U_K^μ de una medida finita es una función semicontinua inferior.

Demostración. Sea $x \in \mathcal{M}$ un punto cualquiera, y sea $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos tales que $x_m \rightarrow x$. Aplicando el lema de Fatou y la semicontinuidad inferior del núcleo,

$$\begin{aligned} U_K^\mu(x) &= \int_{y \in \mathcal{M}} K(x, y) d\mu(y) \\ &\leq \int_{y \in \mathcal{M}} \liminf_{m \rightarrow \infty} K(x_m, y) d\mu(y) \\ &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{y \in \mathcal{M}} K(x_m, y) d\mu(y) \\ &= \liminf_{m \rightarrow \infty} U_K^\mu(x_m). \end{aligned}$$

□

A continuación veremos que, como consecuencia del Lema 2.5.3, el potencial $U_K^\mu(x)$ y la energía continua $I_K[\mu]$ también son funciones semicontinuas inferiores de μ en la topología $*$ -débil. Recordemos que una sucesión de medidas $(\mu_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge en el sentido $*$ -débil a una medida μ si para toda función continua $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{M}} f d\mu_m = \int_{\mathcal{M}} f d\mu.$$

Lo denotamos $\mu_m \xrightarrow{*} \mu$.

Proposición 2.5.4 (Principio de descenso). Sea $(\mu_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión de medidas de probabilidad que convergen en el sentido $*$ -débil a una medida de probabilidad μ . Entonces

$$U_K^\mu(x) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} U_K^{\mu_m}(x) \quad \forall x \in \mathcal{M}, \quad (2.6)$$

y

$$I_K[\mu] \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} I_K[\mu_m]. \quad (2.7)$$

2.5. Energías y medidas de equilibrio

Demostración. Como el núcleo K es una función semicontinua inferior, podemos tomar una sucesión no decreciente $(K_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ de funciones continuas $K_\ell : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ que convergen puntualmente a K . Como $\mu_m \xrightarrow{*} \mu$ y las funciones K_ℓ son continuas, para cada ℓ fijo tenemos que

$$U_{K_\ell}^\mu(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} U_{K_\ell}^{\mu_m}(x) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} U_K^{\mu_m}(x). \quad (2.8)$$

Como $K_\ell \uparrow K$, aplicando el Teorema de la convergencia monótona se sigue que $\lim_{\ell \rightarrow \infty} U_{K_\ell}^\mu(x) = U_K^\mu(x)$. Haciendo entonces tender ℓ a infinito en (2.8), obtenemos (2.6).

Como $\mu_m \xrightarrow{*} \mu$, también $\mu_m \otimes \mu_m \xrightarrow{*} \mu \otimes \mu$, y un argumento similar muestra que

$$I_{K_\ell}[\mu] = \lim_{m \rightarrow \infty} I_{K_\ell}[\mu_m] \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} I_K[\mu_m],$$

de donde se obtiene (2.7). \square

Para probar la existencia de una medida de equilibrio necesitaremos antes un resultado bien conocido en Análisis Funcional llamado Teorema de selección de Helly. Aunque se trata de un resultado clásico (ver, por ejemplo, [53]), incluimos la demostración específica para el caso de variedades por completitud.

Teorema 2.5.5 (Teorema de selección de Helly). Sea $(\nu_m)_m$ una sucesión de medidas con signo en una variedad compacta \mathcal{M} tales que la sucesión de variaciones totales $(|\nu_m|(\mathcal{M}))_m$ está acotada. Entonces la sucesión $(\nu_m)_m$ admite una subsucesión que converge en el sentido $*$ -débil a una medida con signo finita ν .

Demostración. Primero veamos que el espacio de funciones continuas $C(\mathcal{M})$ con la norma del supremo es separable. En efecto, como \mathcal{M} es compacta, \mathcal{M} admite un atlas finito $\{(U_k, \varphi_k)\}_k$ tal que $\varphi_k(U_k) = (0, 1)^n \subset \mathbb{R}^n$ para todo k . Sea $\{\eta_k\}_k$ una partición de la unidad subordinada al recubrimiento, de manera que podemos escribir toda función continua $f \in C(\mathcal{M})$ como $f = \sum_k \eta_k f$. Cada función $\eta_k f$ es continua en U_k y para todo $y \in \partial U_k$ se tiene que $\lim_{x \rightarrow y} \eta_k(x) f(x) = 0$. Por el Teorema de Stone–Weierstrass, el espacio de funciones continuas en $[0, 1]^n$ que se anulan en $\partial[0, 1]^n$ es separable, luego componiendo con la carta φ_k el espacio de funciones continuas f en U_k tales que $\lim_{x \rightarrow y \in \partial U_k} f(x) = 0$ también es separable, de donde se deduce que $C(\mathcal{M})$ es separable.

Sea $\{f_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ un conjunto denso y numerable de funciones continuas de \mathcal{M} . Denotemos

$$a_m^\ell = \int_{\mathcal{M}} f_\ell d\nu_m.$$

Por hipótesis, existe una constante M tal que $|\nu_m|(\mathcal{M}) \leq M$ para todo m . Entonces

$$\begin{aligned} |a_m^\ell| &\leq \int_{\mathcal{M}} |f_\ell| d\nu_m^+ + \int_{\mathcal{M}} |f_\ell| d\nu_m^- \\ &\leq \|f_\ell\| (|\nu_m(\text{supp } \nu_m^+)| + |\nu_m(\text{supp } \nu_m^-)|) \leq M\|f_\ell\|. \end{aligned}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Como $(a_m^1)_m$ es una sucesión acotada, admite una subsucesión $(a_{m_p^1}^1)_p$ convergente. Como $(a_{m_p^1}^2)_p$ es una sucesión acotada, admite una subsucesión convergente $(a_{m_p^2}^2)_p$. Continuando este proceso obtenemos, para cada ℓ , una sucesión $(a_{m_p^\ell}^\ell)_p$ convergente de tal modo que $(a_{m_p^r}^r)_p$ es una subsucesión de $(a_{m_p^\ell}^\ell)_p$ para todo $r \geq \ell$. Denotemos $L(f_\ell) = \lim_{p \rightarrow \infty} a_{m_p^\ell}^\ell$. Para cada ℓ , la sucesión diagonal $(a_{m_p^\ell}^\ell)_{p \geq \ell}$ es una subsucesión de $(a_{m_p^\ell}^\ell)_p$, de modo que $\lim_{p \rightarrow \infty} a_{m_p^p}^p = \lim_{p \rightarrow \infty} a_{m_p^\ell}^\ell = L(f_\ell)$.

Sea $f \in C(\mathcal{M})$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_\ell - f\| < \varepsilon$. Además, para índices α y β suficientemente grandes, $|a_{m_\alpha}^\ell - a_{m_\beta}^\ell| < \varepsilon$, así que para índices α y β suficientemente grandes se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \int f d\nu_{m_\alpha} - \int f d\nu_{m_\beta} \right| &\leq \left| \int f d\nu_{m_\alpha} - \int f_\ell d\nu_{m_\alpha} \right| + \left| \int f_\ell d\nu_{m_\alpha} - \int f_\ell d\nu_{m_\beta} \right| \\ &\quad + \left| \int f_\ell d\nu_{m_\beta} - \int f d\nu_{m_\beta} \right| \\ &\leq |\nu_{m_\alpha}| \|f_\ell - f\| + |a_{m_\alpha}^\ell - a_{m_\beta}^\ell| + |\nu_{m_\beta}| \|f_\ell - f\| \\ &\leq M\varepsilon + \varepsilon + M\varepsilon = \varepsilon(2M + 1). \end{aligned}$$

Como \mathcal{M} es compacta, $C(\mathcal{M})$ es completo, así que el límite

$$L(f) = \lim_{p \rightarrow \infty} \int f d\nu_{m_p^p}$$

existe para cada $f \in C(\mathcal{M})$. El funcional $L : C(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal y, puesto que $L(f) \leq M\|f\|$, es acotado. Aplicando el Teorema de representación de

2.5. Energías y medidas de equilibrio

Riesz, existe una medida con signo finita ν tal que

$$L(f) = \int f d\nu, \quad f \in C(\mathcal{M}).$$

Pero entonces $\nu_{m_p} \xrightarrow{*} \nu$ cuando $p \rightarrow \infty$. \square

Corolario 2.5.6. Existe al menos una medida de probabilidad μ^* tal que $I_K[\mu^*] = W_K(\mathcal{M})$.

Demostración. Sea $(\mu_m)_m$ una sucesión de medidas de probabilidad en \mathcal{M} tales que $\lim_{m \rightarrow \infty} I_K[\mu_m] = W_K(\mathcal{M})$. Por el Teorema 2.5.5, existe una subsucesión $(\mu_{m_p})_p$ convergente en el sentido $*$ -débil a una medida con signo finita μ^* . Como la función constante 1 es continua, $\mu^*(\mathcal{M}) = \lim_{p \rightarrow \infty} \mu_{m_p}(\mathcal{M}) = 1$, de modo que μ^* es una medida de probabilidad.

Aplicando la Proposición 2.5.4, tenemos que

$$I_K[\mu^*] \leq \liminf_{p \rightarrow \infty} I_K[\mu_{m_p}] = W_K(\mathcal{M}),$$

de donde se sigue el corolario. \square

2.5.3. Medida de equilibrio: unicidad

Dadas dos medidas finitas μ y ν , denotamos por $I_K[\mu, \nu]$ la energía conjunta de μ y ν , dada por

$$I_K[\mu, \nu] = \int_{x, y \in \mathcal{M}} K(x, y) d\mu(x) d\nu(y).$$

Si μ y ν son medidas con signo finitas, se define

$$I_K[\mu, \nu] = I_K[\mu^+, \nu^+] + I_K[\mu^-, \nu^-] - I_K[\mu^+, \nu^-] - I_K[\mu^-, \nu^+],$$

siempre que al menos una de las sumas $I_K[\mu^+, \nu^+] + I_K[\mu^-, \nu^-]$ o $I_K[\mu^+, \nu^-] + I_K[\mu^-, \nu^+]$ sea finita.

Definición 2.5.7. Decimos que el núcleo K es *estrictamente condicionalmente definido positivo* si para toda medida con signo finita ν tal que $\nu(\mathcal{M}) = 0$ y $I_K[\nu]$ está bien definida se cumple que $I_K[\nu] \geq 0$ y $I_K[\nu] = 0$ si, y sólo si, $\nu = 0$.

Lema 2.5.8. Supongamos que K es estrictamente condicionalmente definido positivo. Entonces para cualquier par de medidas de probabilidad μ_1 y μ_2 con K -energía finita la energía mutua $I_K[\mu_1, \mu_2]$ es finita y, además,

$$I_K[\mu_1, \mu_2] \leq \frac{1}{2}(I_K[\mu_1] + I_K[\mu_2]),$$

y se da la igualdad si, y sólo si, $\mu_1 = \mu_2$.

Demostración. Sea $\nu = \mu_1 - \mu_2$. Veamos, en primer lugar, que la energía $I_K[\nu]$ está bien definida. Sea $\nu = \nu^+ - \nu^-$ la descomposición de Jordan de ν . Sean $A^+ = \text{supp } \nu^+$ y $A^- = \text{supp } \nu^-$. Para cualquier conjunto boreliano B tenemos que

$$\nu^+(B) = \nu^+(B \cap A^+) = \nu(B \cap A^+) \leq \mu_1(B \cap A^+) \leq \mu_1(B),$$

y

$$\nu^-(B) = \nu^-(B \cap A^-) = -\nu(B \cap A^-) \leq \mu_2(B \cap A^-) \leq \mu_2(B).$$

Como K es semicontinuo inferior y \mathcal{M} es compacta, K está inferiormente acotado. Sea c una cota inferior de K . Entonces $K(x, y) - c \geq 0$ y

$$\begin{aligned} I_K[\nu^+, \nu^+] &= \int_{x, y \in \mathcal{M}} (K(x, y) - c) d\nu^+(x) d\nu^+(y) + \int_{x, y \in \mathcal{M}} c d\nu^+(x) d\nu^+(y) \\ &\leq \int_{x, y \in \mathcal{M}} (K(x, y) - c) d\mu_1(x) d\mu_1(y) + \int_{x, y \in \mathcal{M}} c d\nu^+(x) d\nu^+(y) < \infty, \end{aligned}$$

y, similarmente, $I_K[\nu^-, \nu^-] < \infty$. Por tanto $I_K[\nu]$ está bien definida.

Comprobemos ahora que $I_K[\mu_1, \mu_2]$ es finita. Dado que $\nu(\mathcal{M}) = \mu_1(\mathcal{M}) - \mu_2(\mathcal{M}) = 1 - 1 = 0$, $I_K[\nu]$ está bien definida y K es estrictamente condicionalmente definido positivo, se cumple que $I_K[\nu] \geq 0$. En particular, $I_K[\nu^+, \nu^-] = I_K[\nu^-, \nu^+] < \infty$. Pongamos $K_1(x, y) = K(x, y) - c$. Entonces $I_{K_1}[\mu_i, \mu_i] = I_K[\mu_i] - c < \infty$, $i = 1, 2$, y también $I_{K_1}[\nu^+, \nu^-] = I_K[\nu^+, \nu^-] - c < \infty$. Tenemos, además, que

$$\mu_1 = \mu_2 + \nu \leq \mu_2 + \nu^+, \quad \mu_2 = \mu_1 - \nu \leq \mu_1 + \nu^-,$$

y $\nu^+ \leq \mu_1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I_{K_1}[\mu_1, \mu_2] &\leq I_{K_1}[\mu_2, \mu_2] + I_{K_1}[\nu^+, \mu_2] \\ &\leq I_{K_1}[\mu_2, \mu_2] + I_{K_1}[\nu^+, \mu_1] + I_{K_1}[\nu^+, \nu^-] \\ &\leq I_{K_1}[\mu_2, \mu_2] + I_{K_1}[\mu_1, \mu_1] + I_{K_1}[\nu^+, \nu^-] < \infty. \end{aligned}$$

2.5. Energías y medidas de equilibrio

Se sigue que $I_K[\mu_1, \mu_2] = I_{K_1}[\mu_1, \mu_2] - c < \infty$, de modo que –ahora ya todos los términos abajo escritos están bien definidos–

$$0 \leq I_K[\nu, \nu] = I_K[\mu_1] + I_K[\mu_2] - 2I_K[\mu_1, \mu_2],$$

y se da la igualdad si, y sólo si, $\nu = 0$, es decir, $\mu_1 = \mu_2$. \square

El siguiente resultado proporciona condiciones suficientes para la unicidad de la medida de equilibrio.

Teorema 2.5.9. Supongamos que K es estrictamente condicionalmente definido positivo y que existe al menos una medida de probabilidad μ tal que $I_K[\mu] < \infty$. Entonces la medida de equilibrio μ^* es única.

Demostración. Si existe al menos una medida de probabilidad μ tal que $I_K[\mu] < \infty$, entonces $W_K(\mathcal{M}) < \infty$ –además $W_K(\mathcal{M}) > -\infty$ porque K está inferiormente acotado–. Supongamos que ν^* es otra medida de equilibrio. Como $W_K(\mathcal{M}) < \infty$, ambas μ^* y ν^* tienen energía finita. Aplicando el Lema 2.5.8 tenemos que

$$I_K[\mu^*, \nu^*] \leq \frac{1}{2}(I_K[\mu^*] + I_K[\nu^*]) = W_K(\mathcal{M}).$$

Por otra parte, la medida $\lambda = \frac{1}{2}(\mu^* + \nu^*)$ es también una medida de probabilidad en \mathcal{M} , y

$$I_K[\lambda] = \frac{1}{4}I_K[\mu^*] + \frac{1}{4}I_K[\nu^*] + \frac{1}{2}I_K[\mu^*, \nu^*] \leq W_K(\mathcal{M}),$$

de modo que λ es también una medida de equilibrio y $I_K[\lambda] = W_K(\mathcal{M})$. Es decir,

$$I_K[\mu^*, \nu^*] = 2I_K[\lambda] - \frac{1}{2}I_K[\mu^*] - \frac{1}{2}I_K[\nu^*] = W_K(\mathcal{M}) = \frac{1}{2}(I_K[\mu^*] + I_K[\nu^*]).$$

Aplicando de nuevo el Lema 2.5.8, $\mu^* = \nu^*$. \square

2.5.4. Relación entre las energías continua y discreta

Una importante relación entre la energía discreta y la energía continua viene dada por el Teorema 2.5.11 a continuación. Antes de demostrarlo, probaremos un pequeño lema.

Lema 2.5.10. Se cumple que

$$\tau_K(\mathcal{M}) \leq W_K(\mathcal{M}).$$

Demostración. Sea μ^* una medida de equilibrio. Tenemos que

$$\begin{aligned} \min_{x_1, \dots, x_N} E_K(x_1, \dots, x_N) &\leq \int_{x_1, \dots, x_N \in \mathcal{M}} E_K(x_1, \dots, x_N) d\mu^*(x_1) \cdots d\mu^*(x_N) \\ &= \int_{x_1, \dots, x_N \in \mathcal{M}} \sum_{i \neq j} K(x_i, x_j) d\mu^*(x_1) \cdots d\mu^*(x_N) \\ &= \sum_{i \neq j} W_K(\mathcal{M}) = N(N-1)W_K(\mathcal{M}), \end{aligned}$$

luego

$$\frac{\mathcal{E}_K(N)}{N(N-1)} \leq W_K(\mathcal{M}),$$

y haciendo tender N a infinito se obtiene el resultado. \square

Teorema 2.5.11. Se tiene que

$$\tau_K(\mathcal{M}) = W_K(\mathcal{M}).$$

Es más, si $(\omega_N)_{N \geq 2}$ es cualquier sucesión de configuraciones que verifica

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E_K(\omega_N)}{N^2} = \tau_K(\mathcal{M}), \quad (2.9)$$

entonces cualquier punto de acumulación en la topología $*$ -débil de la medida empírica $\mu_{\omega_N} = \frac{1}{N} \sum_{x \in \omega_N} \delta_x$ es una medida de equilibrio para la energía continua.

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que K es un núcleo continuo. Sea $(\omega_N)_N$ una sucesión de configuraciones de puntos que cumple (2.9). Aplicando el Teorema 2.5.5, la sucesión (μ_{ω_N}) admite una subsucesión convergente $(\mu_{\omega_{N_M}})_M$ en la topología $*$ -débil. Sea entonces μ tal que $\mu_{\omega_{N_M}} \xrightarrow{*} \mu$ cuando $M \rightarrow \infty$. Entonces $\mu_{\omega_{N_M}} \otimes \mu_{\omega_{N_M}} \xrightarrow{*} \mu \otimes \mu$. Dado que $I_K[\mu_{\omega_{N_M}}] < \infty$ al ser

2.5. Energías y medidas de equilibrio

K continuo, podemos escribir

$$\begin{aligned}
 I_K[\mu] &= \lim_{M \rightarrow \infty} I_K[\mu_{\omega_{N_M}}] = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{N_M^2} \sum_{i,j=1}^{N_M} K(x_i, x_j) \\
 &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{E_K(\omega_{N_M})}{N_M^2} + \frac{1}{N_M^2} \sum_{i=1}^{N_M} K(x_i, x_i) \\
 &\leq \tau_K(\mathcal{M}) + \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\max_{x \in \mathcal{M}} K(x, x)}{N_M} = \tau_K(\mathcal{M}).
 \end{aligned}$$

Si K no es continuo, entonces podemos tomar una sucesión no decreciente $(K_\ell)_\ell$ de núcleos continuos que convergen puntualmente a K . Aplicando el Teorema de la convergencia monótona,

$$\begin{aligned}
 I_K[\mu] &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} I_{K_\ell}[\mu] = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} I_{K_\ell}[\mu_{\omega_{N_M}}] \\
 &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{E_{K_\ell}(\omega_{N_M})}{N_M^2} + \frac{1}{N_M^2} \sum_{i=1}^{N_M} K_\ell(x_i, x_i) \\
 &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{E_{K_\ell}(\omega_{N_M})}{N_M^2} \leq \lim_{\ell \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{E_K(\omega_{N_M})}{N_M^2} = \tau_K(\mathcal{M}).
 \end{aligned}$$

Y, de nuevo, $I_K[\mu] \leq \tau_K(\mathcal{M})$. Aplicando el Lema 2.5.10, $I_K[\mu] \leq W_K(\mathcal{M})$, luego $I_K[\mu] = W_K(\mathcal{M})$ y así μ es una medida de equilibrio. Además, se tiene que $W_K(\mathcal{M}) \leq I_K[\mu] \leq \tau_K(\mathcal{M}) \leq W_K(\mathcal{M})$, luego $\tau_K(\mathcal{M}) = W_K(\mathcal{M})$. \square

Como consecuencia inmediata de los teoremas 2.5.11 y 2.5.9 tenemos el siguiente corolario:

Corolario 2.5.12. Supongamos que K es estrictamente condicionalmente definido positivo y que existe al menos una medida de probabilidad μ con energía finita. Entonces existe una única medida de equilibrio μ^* y para cualquier sucesión de configuraciones $(\omega_N)_N$ satisfaciendo (2.9) se cumple que $\mu_{\omega_N} \xrightarrow{*} \mu^*$. En particular, esto último se cumple para una sucesión $(\omega_N^*)_N$ de configuraciones óptimas para la energía discreta.

Teorema 2.5.13. Supongamos que K es estrictamente condicionalmente definido positivo. Si el potencial $U_K^{\mu^*}$ de una medida de probabilidad μ^* tiene un valor finito constante igual a c en todo \mathcal{M} , entonces μ^* es la única medida de equilibrio y $W_K(\mathcal{M}) = c$.

Demostración. Tenemos que

$$I_K[\mu^*] = \int_{\mathcal{M}} U_K^{\mu^*} d\mu^* = c,$$

luego la energía de μ^* es finita. Como, además, K es estrictamente condicionalmente definido positivo, por el Teorema 2.5.9 la medida de equilibrio es única. Si, ahora, μ es cualquier otra medida de probabilidad con energía finita, entonces

$$I_K[\mu^*, \mu] = \int_{\mathcal{M}} U_K^{\mu^*} d\mu = c = I_K[\mu^*].$$

Aplicando el Lema 2.5.8, tenemos que

$$I_K[\mu^*] \leq \frac{1}{2}(I_K[\mu^*] + I_K[\mu]),$$

de donde $I_K[\mu^*] \leq I_K[\mu]$. □

Capítulo 3

Distribución asintótica de las colecciones óptimas para la energía de Green en una variedad compacta

Dedicamos este capítulo a la demostración del Teorema 1.7.1, que afirma que las configuraciones óptimas para la energía de Green se distribuyen uniformemente en \mathcal{M} cuando el número de puntos tiende a infinito. En todo el capítulo \mathcal{M} será una variedad riemanniana compacta de dimensión $n \geq 2$.

3.1. El núcleo de Green

En la Sección 2.3.2 pudimos ver que, como consecuencia del Teorema de descomposición de Hodge, si ω es una n -corriente, entonces existe una 0-corriente –una distribución– G^ω tal que

$$\omega = m(\omega)d\text{vol} - d * dG^\omega,$$

donde $m(\omega) = \frac{\omega(1)}{\text{vol}(\mathcal{M})}$ es la masa de ω (ver Definición 2.3.8). Llamamos a G^ω la *función de Green* de ω , que es única si pedimos que sea ortogonal a todas las formas armónicas. Sin embargo, G^ω no admite necesariamente una representación como una función en todos los casos. Esto sólo ocurre si imponemos ciertas condiciones en ω .

Si $\omega = \delta_p$ es una delta de Dirac centrada en $p \in \mathcal{M}$, entonces es un resultado clásico que G^{δ_p} admite una representación como una función semi-continua inferior. El siguiente teorema, cuya demostración no incluimos aquí, puede encontrarse, por ejemplo, en [5, Teorema 4.13].

Teorema 3.1.1. Sea \mathcal{M} una variedad riemanniana compacta de dimensión $n \geq 2$. Existe una única función $G : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ satisfaciendo las siguientes propiedades:

1. Para todo $y \in \mathcal{M}$,

$$-d * dG(x, y) = \delta_y - V^{-1} \text{dvol},$$

donde $V = \text{vol}(\mathcal{M})$, en el sentido de las distribuciones.

2. G es de clase C^∞ en todo $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ excepto en la diagonal.
3. Existe una constante c tal que

$$\begin{aligned} |G(x, y)| &\leq c(1 + \log d(x, y)^{-1}) && \text{si } n = 2, \\ |G(x, y)| &\leq cd(x, y)^{2-n} && \text{si } n > 2. \end{aligned}$$

4. G está inferiormente acotada en \mathcal{M} .
5. Para todo $y \in \mathcal{M}$, $\int_{x \in \mathcal{M}} G(x, y) \text{dvol}(x) = 0$.
6. Para todo $x, y \in \mathcal{M}$, $G(x, y) = G(y, x)$.

Decimos que G es el *núcleo de Green* de \mathcal{M} . Si escribimos $G^{\delta_p}(x) = G(p, x)$, entonces obtenemos un representante de la función de Green de δ_p como una función propiamente dicha. Necesitaremos también una cota inferior del núcleo de Green. El siguiente lema se deduce directamente de [63, Proposición 6.1].

Lema 3.1.2. Existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que, para todo $x \neq y$,

$$\begin{aligned} -c_1 + c_2 \log d(x, y)^{-1} &\leq G(x, y) && \text{si } n = 2, \\ -c_1 + c_2 d(x, y)^{2-n} &\leq G(x, y) && \text{si } n > 2. \end{aligned}$$

Observación 3.1.3. El Teorema 3.1.1 afirma que G es simétrica y que es diferenciable fuera de la diagonal de \mathcal{M} . El Lema 3.1.2 nos dice, además, que $\liminf_{x \rightarrow y} G(x, y) = +\infty$ para todo $y \in \mathcal{M}$, por lo que G es semicontinua inferior en $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$. Esto quiere decir que el núcleo de Green es un núcleo en el sentido de la Sección 2.5.

3.1. El núcleo de Green

Con ayuda del núcleo de Green podemos también calcular funciones de Green para medidas finitas.

Proposición 3.1.4. Sea μ una medida finita en \mathcal{M} , interpretada como una n -corriente. Entonces la función

$$G^\mu(x) = \int_{y \in \mathcal{M}} G(x, y) d\mu(y)$$

es semicontinua inferior y satisface

$$\mu = \mathfrak{m}(\mu) - d * dG^\mu.$$

Demostración. Que la función G^μ es semicontinua inferior se sigue del Lema 2.5.3. Sea $\varphi \in C^\infty(\mathcal{M})$ una función diferenciable. Como G es integrable, podemos aplicar el Teorema de Fubini y el Teorema 3.1.1:

$$\begin{aligned} -d * dG^\mu(\varphi) &= \int_{x \in \mathcal{M}} G^\mu(x) \Delta\varphi(x) d\text{vol}(x) \\ &= \int_{x \in \mathcal{M}} \int_{y \in \mathcal{M}} G(x, y) d\mu(y) \Delta\varphi(x) d\text{vol}(x) \\ &= \int_{y \in \mathcal{M}} \int_{x \in \mathcal{M}} G(x, y) \Delta\varphi(x) d\text{vol}(x) d\mu(y) \\ &= \int_{y \in \mathcal{M}} \left(\varphi(y) - V^{-1} \int_{x \in \mathcal{M}} \varphi(x) d\text{vol}(x) \right) d\mu(y) \\ &= \int_{y \in \mathcal{M}} \varphi(y) d\mu(y) - V^{-1} \int_{x \in \mathcal{M}} \varphi(x) d\text{vol}(x) \int_{y \in \mathcal{M}} d\mu(y) \\ &= (\mu - \mathfrak{m}(\mu) d\text{vol})(\varphi), \end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado. □

Observación 3.1.5. Si ν es una medida con signo finita y $\nu = \nu^+ - \nu^-$ es su descomposición de Jordan, entonces $G^\nu = G^{\nu^+} - G^{\nu^-}$ como 0-corrientes. Ambas G^{ν^+} y G^{ν^-} pueden representarse como funciones semicontinuas inferiores, pero pudiera ocurrir que en un cierto punto $x \in \mathcal{M}$ fuera $G^{\nu^+}(x) = G^{\nu^-}(x) = +\infty$, en cuyo caso no es posible asignar un valor a $G^\nu(x)$. Sin embargo, si alguna de las dos G^{ν^+} o G^{ν^-} está acotada, entonces G^ν sí que admite una representación como una función. En particular, si G^{ν^-} es continua (resp. G^{ν^+} es continua), entonces G^ν es semicontinua inferior (resp. superior).

Definimos la energía de Green como en la Sección 2.5.

Definición 3.1.6. La *energía de Green discreta* de un conjunto de $N \geq 2$ puntos $\{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathcal{M}$ se define como

$$E(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i \neq j} G(x_i, x_j).$$

La *energía de Green continua* de una medida finita μ se define como

$$E(\mu) = \int_{\mathcal{M}} G^\mu(x) d\mu(x) = \int_{\mathcal{M}} \int_{\mathcal{M}} G(x, y) d\mu(x) d\mu(y).$$

Si μ_1 y μ_2 son medidas finitas, definimos

$$E(\mu_1, \mu_2) = \int_{\mathcal{M}} G^{\mu_1}(x) \mu_2(x) = \int_{\mathcal{M}} G^{\mu_2}(y) d\mu_1(y),$$

y si ν es una medida con signo finita, con descomposición de Jordan $\nu = \nu^+ - \nu^-$, entonces

$$E(\nu) = E(\nu^+) + E(\nu^-) - 2E(\nu^+, \nu^-),$$

siempre que alguna de las cantidades $E(\nu^+) + E(\nu^-)$ o $E(\nu^+, \nu^-)$ sea finita.

3.2. Mollifiers en variedades riemannianas

Para demostrar el Teorema 1.7.1 necesitaremos introducir la definición de *mollifier*. En \mathbb{R}^n podemos definir la función diferenciable

$$f_n(r) = \begin{cases} C_n e^{-\frac{1}{1-r^2}} & \text{si } r < 1, \\ 0 & \text{si } r \geq 1, \end{cases}$$

donde C_n es una constante de tal modo que la función $\phi(u) = f_n(\|u\|)$ cumple $\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$. La colección de funciones $\{\phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, donde $\phi_\varepsilon(u) = \varepsilon^{-n} \phi(u/\varepsilon) = \varepsilon^{-n} f(\|u\|/\varepsilon)$ son los clásicos *mollifiers* en \mathbb{R}^n (véase, por ejemplo, [36, Cap. 4.2]). Cada función ϕ_ε es positiva, diferenciable, tiene soporte en la bola cerrada $\bar{\mathbb{B}}(\varepsilon) = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\| \leq \varepsilon\}$, cumple $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon = 1$ y, además,

$$\phi_\varepsilon du \xrightarrow{*} \delta_0$$

3.2. Mollifiers en variedades riemannianas

cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Es decir, para toda función continua $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, se tiene que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(u) \phi_\varepsilon(u) du = f(0).$$

En una variedad riemanniana \mathcal{M} de dimensión n existe también una colección de funciones satisfaciendo propiedades análogas. Para definir las nos valemos de la densidad de volumen $\omega_x(y)$ (ver Sección 2.4.1), cuya expresión en coordenadas normales en torno a $x \in \mathcal{M}$ es

$$\omega_x(y) = \sqrt{|g|(y)}.$$

Para cada $0 < \varepsilon < \text{inj}(\mathcal{M})$, donde $\text{inj}(\mathcal{M})$ es el radio de inyectividad de \mathcal{M} (ver Definición 2.4.3 y Observación 2.4.4), se define la función *mollifier* $H_\varepsilon : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$H_\varepsilon(x, y) = \begin{cases} \frac{\varepsilon^{-n} f_n(d(x, y)/\varepsilon)}{\omega_x(y)} & \text{si } d(x, y) < \varepsilon \\ 0 & \text{si } d(x, y) \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (3.1)$$

Como $\varepsilon < \text{inj}(\mathcal{M})$, si $d(x, y) < \varepsilon$, entonces por la Proposición 2.4.6(c) se tiene que $\omega_x(y) > 0$, de modo que las funciones H_ε están bien definidas. Observemos que si $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$ –olvidándonos de la compacidad–, entonces $H_\varepsilon(x, y) = \phi_\varepsilon(\|x - y\|)$.

Proposición 3.2.1. Las funciones H_ε definidas por (3.1) satisfacen las siguientes propiedades:

1. Para todo $x, y \in \mathcal{M}$, $H_\varepsilon(x, y) \geq 0$.
2. $\text{supp } H_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M} : d(x, y) \leq \varepsilon\}$.
3. Para todo $x, y \in \mathcal{M}$, $H_\varepsilon(x, y) = H_\varepsilon(y, x)$.
4. Para cada $x \in \mathcal{M}$, $\int_{y \in \mathcal{M}} H_\varepsilon(x, y) d\text{vol}(y) = 1$.
5. Para toda medida con signo finita ν en \mathcal{M} , la función

$$\nu_\varepsilon(x) = \int_{y \in \mathcal{M}} H_\varepsilon(x, y) d\nu(y) \quad (3.2)$$

es de clase $C^\infty(\mathcal{M})$.

6. Para toda función continua $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ y para todo $x \in \mathcal{M}$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{y \in \mathcal{M}} f(y) H_\varepsilon(x, y) d\text{vol}(y) = f(x).$$

Demostración. Según la Proposición 2.4.6, $\omega_x(y) \geq 0$. Además, $f_n \geq 0$, de donde se deduce 1. Por otra parte, la función $r \mapsto f_n(r/\varepsilon)$ tiene soporte en $[-\varepsilon, \varepsilon]$, lo cual implica 2. La propiedad 3 se sigue de la simetría de la función distancia y de la densidad de volumen (Proposición 2.4.6(e)). Para ver 4, calculamos en coordenadas normales alrededor de $x \in \mathcal{M}$,

$$\begin{aligned} \int_{y \in \mathcal{M}} H_\varepsilon(x, y) d\text{vol}(y) &= \int_{y \in B(x, \varepsilon)} H_\varepsilon(x, y) d\text{vol}(y) \\ &= \int_{u \in \mathbb{B}(\varepsilon)} \frac{\varepsilon^{-n} f(\|u\|/\varepsilon)}{\sqrt{|g|(\exp_x u)}} \sqrt{|g|(\exp_x u)} du \\ &= \int_{u \in \mathbb{B}(\varepsilon)} \phi_\varepsilon(u) du = 1. \end{aligned}$$

Demostremos ahora 5 por inducción en el orden de diferenciabilidad. Para ello, veamos primero que la función ν_ε es de clase C^1 . Sea (U, \mathbf{x}) una carta de \mathcal{M} , y sea $x \in U$ un punto cualquiera. Para cada $1 \leq i \leq n$, sea $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathcal{M}$ una curva integral del campo coordenado ∂_i con $\gamma(0) = x$. Consideremos la función

$$g(t) = \int_{y \in \mathcal{M}} H_\varepsilon(\gamma(t), y) d\nu(y).$$

Como $\varepsilon < \text{inj}(\mathcal{M})$, las funciones $x \mapsto \varepsilon^{-n} f_n(d(x, y)/\varepsilon)$ y $x \mapsto \omega_x(y)$ son diferenciables en x (Proposición 2.4.6(a)), luego $H_\varepsilon(x, y)$ es diferenciable en x y y , tomando δ suficientemente pequeño, la función $t \mapsto H_\varepsilon(\gamma(t), y)$ es diferenciable en $(-\delta, \delta)$. Escribiendo la descomposición de Jordan $\nu = \nu^+ - \nu^-$ de ν e intercambiando los signos de derivación e integración (véase, por ejemplo, [16, Corolario 2.8.7]), g es derivable y

$$g'(t) = \int_{y \in \mathcal{M}} \frac{d}{dt} H_\varepsilon(\gamma(t), y) d\nu(y),$$

de modo que

$$\partial_i \nu_\varepsilon(x) = \int_{y \in \mathcal{M}} \partial_i H_\varepsilon(x, y) d\nu(y).$$

3.3. Positividad del núcleo de Green

Veamos que $\partial_i \nu_\varepsilon$ es continua en x . Si $\nu = 0$, entonces $\nu_\varepsilon = 0$ y $\partial_i \nu_\varepsilon = 0$ es trivialmente continua. En otro caso, sea $\eta > 0$. Como $\partial_i H_\varepsilon(x, y)$ es continua, existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < d(x, x') < \delta$, entonces $|\partial_i H_\varepsilon(x, y) - \partial_i H_\varepsilon(x', y)| < (\nu^+(\mathcal{M}) + \nu^-(\mathcal{M}))^{-1} \eta$. Por lo tanto, si $d(x, x') < \delta$, entonces

$$|\partial_i \nu_\varepsilon(x) - \partial_i \nu_\varepsilon(x')| \leq \int_{x \in \mathcal{M}} |\partial_i H_\varepsilon(x, y) - \partial_i H_\varepsilon(x', y)| d|\nu|(y) < \eta.$$

Esto prueba que ν_ε es de clase C^1 en U . Ahora supongamos que ν_ε es de clase C^k en U y que

$$\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} \nu_\varepsilon(x) = \int_{y \in \mathcal{M}} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} H_\varepsilon(x, y) d\nu(y)$$

para cualesquiera k índices $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$. Como $x \mapsto \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} H_\varepsilon(x, y)$ es una función de clase C^∞ en U , por el caso base tenemos que, para cualquier $1 \leq i \leq n$,

$$\partial_i \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} \nu_\varepsilon(x) = \int_{y \in \mathcal{M}} \partial_i \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} H_\varepsilon(x, y) d\nu(y),$$

y un argumento análogo al del caso base prueba que esta función es continua. Luego ν_ε es de clase C^{k+1} en U y, así, $\nu_\varepsilon \in C^\infty(\mathcal{M})$.

Para probar 6, calculamos en coordenadas normales alrededor de x ,

$$\int_{y \in \mathcal{M}} H_\varepsilon(x, y) f(y) d\text{vol}(y) = \int_{u \in \mathbb{B}(\varepsilon)} \phi_\varepsilon(u) f(\exp_x u) du \rightarrow f(\exp_x 0) = f(x)$$

cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. □

3.3. Positividad del núcleo de Green

En esta sección probaremos que el núcleo de Green es un núcleo estrictamente condicionalmente definido positivo, es decir, que para toda medida con signo finita ν tal que $\nu(\mathcal{M}) = 0$ se cumple que

$$\int_{x, y \in \mathcal{M}} G(x, y) d\nu(x) d\nu(y) \geq 0, \tag{3.3}$$

y se da la igualdad si, y sólo si, $\nu = 0$ (ver Definición 2.5.7). Esto nos permitirá mostrar que la medida de equilibrio para el problema de minimización de la energía de Green continua es única.

Comprobar la desigualdad (3.3) es relativamente sencillo bajo la hipótesis de que la medida ν es absolutamente continua con densidad de clase C^∞ con respecto de $d\text{vol}$ y, de hecho, bajo esta hipótesis es posible demostrarlo para núcleos más generales (véase [75]).

Observación 3.3.1. En lo que sigue usaremos el Teorema de Fubini y el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue para medidas con signo finitas ν . Observemos que toda función continua $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ es ν -integrable, ya que si consideramos la descomposición de Jordan $\nu = \nu^+ - \nu^-$ de ν , entonces

$$|\nu|(|f|) = \int_{\mathcal{M}} |f| d\nu^+ + \int_{\mathcal{M}} |f| d\nu^-,$$

donde ν^+ y ν^- son medidas positivas, $|f|$ es continua y \mathcal{M} es compacta. Lo mismo se aplica para la medida con signo $\nu \otimes d\text{vol} = \nu^+ \otimes d\text{vol} - \nu^- \otimes d\text{vol}$ y cualquier $f : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Los lemas técnicos 3.3.2, 3.3.3, 3.3.4 y 3.3.5 a continuación nos serán de utilidad en la demostración de la positividad del núcleo de Green cuando tengamos que aplicar el Teorema de la convergencia dominada.

Lema 3.3.2. Sea \mathcal{M} una variedad compacta, y sea ν una medida con signo finita tal que $\nu(\mathcal{M}) = 0$. La sucesión $(\nu_\varepsilon)_{0 < \varepsilon < \text{inj}(\mathcal{M})}$ definida en la Proposición 3.2.1(5) satisface las siguientes propiedades:

1. $\nu_\varepsilon(\mathcal{M}) = 0$ para todo ε . Es decir, $\int_{\mathcal{M}} \nu_\varepsilon d\text{vol} = 0$.
2. $\nu_\varepsilon d\text{vol} \xrightarrow{*} \nu$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demostración. Para cada $0 < \varepsilon < \text{inj}(\mathcal{M})$, la función ν_ε es diferenciable por la Proposición 3.2.1(5). Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \nu_\varepsilon d\text{vol} &= \int_{x \in \mathcal{M}} \left(\int_{y \in \mathcal{M}} H_\varepsilon(x, y) d\nu(y) \right) d\text{vol}(x) \\ &= \int_{y \in \mathcal{M}} \left(\int_{x \in \mathcal{M}} H_\varepsilon(x, y) d\text{vol}(x) \right) d\nu(y) \quad (\text{por el T}^a \text{ de Fubini}) \\ &= \int_{y \in \mathcal{M}} d\nu(y) \quad (\text{Proposición 3.2.1(4)}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

3.3. Positividad del núcleo de Green

Por otra parte, si $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} f \nu_\varepsilon d\text{vol} &= \int_{x \in \mathcal{M}} \left(\int_{y \in \mathcal{M}} H_\varepsilon(x, y) d\nu(y) \right) f(x) d\text{vol}(x) \\ &= \int_{y \in \mathcal{M}} \left(\int_{x \in \mathcal{M}} H_\varepsilon(x, y) f(x) d\text{vol}(x) \right) d\nu(y) \quad (\text{T}^a \text{ de Fubini}) \end{aligned}$$

Denotemos

$$f_\varepsilon(y) = \int_{x \in \mathcal{M}} H_\varepsilon(x, y) f(x) d\text{vol}(x). \quad (3.4)$$

Sabemos por la Proposición 3.2.1(6) que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(y) = f(y)$ para todo $y \in \mathcal{M}$. Como f es continua y \mathcal{M} es compacta, existe una constante C tal que $|f(y)| \leq C$ para todo $y \in \mathcal{M}$. Por lo tanto,

$$|f_\varepsilon(y)| \leq \int_{x \in \mathcal{M}} |f(x)| |H_\varepsilon(x, y)| d\text{vol}(x) \leq C \int_{x \in \mathcal{M}} H_\varepsilon(x, y) d\text{vol}(x) = C$$

(por 1 y 4 en la Proposición 3.2.1). La constante C es ν -integrable, así que aplicando el Teorema de la convergencia dominada,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{M}} f \nu_\varepsilon d\text{vol} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{M}} f_\varepsilon d\nu = \int_{\mathcal{M}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon d\nu = \int_{\mathcal{M}} f d\nu.$$

□

Lema 3.3.3. Sea \mathcal{M} una variedad compacta. Existe una constante $D > 0$ tal que, para todo $0 < \varepsilon < \frac{\text{inj}(\mathcal{M})}{4}$ y para todo par de puntos $y, z \in \mathcal{M}$ con $d(y, z) < 2\varepsilon$, se tiene que

$$\int_{x \in \mathcal{M}} H_\varepsilon(x, z) \log d(x, y)^{-1} d\text{vol}(x) \leq D \log d(y, z)^{-1} \quad \text{si } n = 2,$$

$$\int_{x \in \mathcal{M}} H_\varepsilon(x, z) d(x, y)^{2-n} d\text{vol}(x) \leq D d(y, z)^{2-n} \quad \text{si } n > 2.$$

Demostración. Probamos el caso $n > 2$. La prueba del caso $n = 2$ es similar. Sea $0 < \varepsilon < \frac{\text{inj}(\mathcal{M})}{4}$, y sean $y, z \in \mathcal{M}$ dos puntos tales que $d(y, z) < 2\varepsilon$. La función $(x, z) \mapsto \omega_x(z)$ es continua y estrictamente positiva en el compacto

$$\left\{ (x, z) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M} : d(x, z) \leq \frac{3}{4} \text{inj}(\mathcal{M}) \right\},$$

luego existen constantes k y K que no dependen de ε , con $0 < k \leq K$, tales que para cada par de puntos $p, q \in \mathcal{M}$ con $d(p, q) \leq 3\varepsilon$, se tiene que

$0 < k \leq \omega_p(q) \leq K$. Dado que la función $f_n(r)$ definida al inicio de la Sección 3.2 alcanza un máximo en $r = 0$, tenemos que

$$H_\varepsilon(x, z) = \frac{\varepsilon^{-n} f_n(d(x, z)/\varepsilon)}{\omega_x(z)} \leq \frac{1}{k} \varepsilon^{-n} f_n(0) = \frac{C_n}{ek\varepsilon^n}.$$

Entonces,

$$\int_{x \in \mathcal{M}} H_\varepsilon(x, z) d(x, y)^{2-n} d\text{vol}(x) \leq \frac{C_n}{ek\varepsilon^n} \int_{x \in B(z, \varepsilon)} d(x, y)^{2-n} d\text{vol}(x).$$

Como $\varepsilon < \frac{\text{inj}(\mathcal{M})}{3}$, existen coordenadas normales alrededor de y definidas en $B(y, 3\varepsilon)$. Como $d(y, z) < 2\varepsilon$, aplicando la desigualdad triangular se sigue que para cualquier $x \in B(z, \varepsilon)$, $d(x, y) < 3\varepsilon$, de modo que $B(z, \varepsilon) \subset B(y, 3\varepsilon)$, y

$$\begin{aligned} \frac{C_n}{ek\varepsilon^n} \int_{x \in B(z, \varepsilon)} d(x, y)^{2-n} d\text{vol}(x) &\leq \frac{C_n}{ek\varepsilon^n} \int_{x \in B(y, 3\varepsilon)} d(x, y)^{2-n} d\text{vol}(x) \\ &= \frac{C_n}{ek\varepsilon^n} \int_{u \in \mathbb{B}(3\varepsilon)} \frac{\sqrt{\det g_{ij}(\exp_y u)}}{\|u\|^{n-2}} du \\ &= \frac{C_n}{ek\varepsilon^n} \int_{u \in \mathbb{B}(3\varepsilon)} \frac{\omega_y(\exp_y u)}{\|u\|^{n-2}} du \\ &\leq \frac{C_n K}{ek\varepsilon^n} \int_{u \in \mathbb{B}(3\varepsilon)} \frac{1}{\|u\|^{n-2}} du \\ &= \frac{C_n K}{ek\varepsilon^n} \int_0^{3\varepsilon} \int_{\theta \in \mathbb{S}^{n-1}(r)} \frac{1}{r^{n-2}} d\theta dr \\ &= \frac{C_n K}{ek\varepsilon^n} \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^{3\varepsilon} r dr \\ &= \frac{9\varepsilon^2 C_n K \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})}{2ek\varepsilon^n} \\ &= \frac{9C_n K \text{vol}(\mathbb{S}^{n-2})}{2ek} \varepsilon^{2-n}. \end{aligned}$$

Dado que $d(y, z) < 2\varepsilon$, el resultado se sigue tomando

$$D = \frac{2^{n-3} \cdot 9C_n K \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})}{ek}.$$

□

3.3. Positividad del núcleo de Green

Lema 3.3.4. Sea $0 < \varepsilon < \text{inj}(\mathcal{M})$, y sean $y, z, w \in \mathcal{M}$ puntos tales que $d(y, w) \leq \varepsilon$ y $d(y, z) > 2\varepsilon$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{x \in \mathcal{M}} H_\varepsilon(x, z) \log(x, y)^{-1} d\text{vol}(x) &\leq \log d(y, w)^{-1} \quad \text{si } n = 2, \\ \int_{x \in \mathcal{M}} H_\varepsilon(x, z) d(x, y)^{2-n} d\text{vol}(x) &\leq d(y, w)^{2-n} \quad \text{si } n > 2. \end{aligned}$$

Demostración. Probamos el caso $n > 2$. La prueba del caso $n = 2$ es similar. Aplicando la desigualdad triangular, para cualquier $x \in B(z, \varepsilon)$ tenemos que $d(x, y) \geq d(y, w)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{x \in \mathcal{M}} H_\varepsilon(x, z) d(x, y)^{2-n} d\text{vol}(x) &\leq \int_{x \in \mathcal{M}} H_\varepsilon(x, z) d(y, w)^{2-n} d\text{vol}(x) \\ &= d(y, w)^{2-n}, \end{aligned}$$

ya que $\int H_\varepsilon = 1$. □

Lema 3.3.5. Existe una constante positiva K tal que para todo $0 < \varepsilon < \frac{\text{inj}(\mathcal{M})}{4}$ y para todo $z, w \in \mathcal{M}$ con $z \neq w$,

$$\int_{x, y \in \mathcal{M}} H_\varepsilon(x, z) H_\varepsilon(y, w) \log d(x, y)^{-1} d\text{vol}(x) d\text{vol}(y) \leq K \log d(z, w)^{-1}$$

si $n = 2$, y

$$\int_{x, y \in \mathcal{M}} H_\varepsilon(x, z) H_\varepsilon(y, w) d(x, y)^{2-n} d\text{vol}(x) d\text{vol}(y) \leq K d(z, w)^{2-n}$$

si $n > 2$.

Demostración. Probamos el caso $n > 2$. La prueba del caso $n = 2$ es similar. Sea $0 < \varepsilon < \frac{\text{inj}(\mathcal{M})}{4}$, y sean $z, w \in \mathcal{M}$ con $z \neq w$. Aplicando el Teorema de

Fubini junto con los lemas 3.3.3 y 3.3.4, tenemos que

$$\begin{aligned}
& \int_{x,y \in \mathcal{M}} \frac{H_\varepsilon(x,z)H_\varepsilon(y,w)}{d(x,y)^{n-2}} d\text{vol}(x,y) \\
&= \int_{y \in B(w,\varepsilon)} H_\varepsilon(y,w) \left(\int_{x \in \mathcal{M}} \frac{H_\varepsilon(x,z)}{d(x,y)^{n-2}} d\text{vol}(x) \right) d\text{vol}(y) \\
&= \int_{\{y:d(y,z) \leq 2\varepsilon\} \cap B(w,\varepsilon)} H_\varepsilon(y,w) \left(\int_{x \in \mathcal{M}} \frac{H_\varepsilon(x,z)}{d(x,y)^{n-2}} d\text{vol}(x) \right) d\text{vol}(y) \\
&\quad + \int_{\{y:d(y,z) > 2\varepsilon\} \cap B(w,\varepsilon)} H_\varepsilon(y,w) \left(\int_{x \in \mathcal{M}} \frac{H_\varepsilon(x,z)}{d(x,y)^{n-2}} d\text{vol}(x) \right) d\text{vol}(y) \\
&\leq D \int_{\{y:d(y,z) \leq 2\varepsilon\}} \frac{H_\varepsilon(y,w)}{d(y,z)^{n-2}} d\text{vol}(y) \\
&\quad + \int_{\{y:d(y,z) > 2\varepsilon\}} \frac{H_\varepsilon(y,w)}{d(y,w)^{n-2}} d\text{vol}(y),
\end{aligned}$$

siendo D la constante del Lema 3.3.3. Si $d(z,w) \leq 2\varepsilon$, entonces obtenemos una cota para la primera de las dos integrales anteriores usando de nuevo el Lema 3.3.3:

$$D \int_{\{y:d(y,z) \leq 2\varepsilon\}} \frac{H_\varepsilon(y,w)}{d(y,z)^{n-2}} d\text{vol}(y) \leq D \int_{y \in \mathcal{M}} \frac{H_\varepsilon(y,w)}{d(y,z)^{n-2}} d\text{vol}(y) \leq \frac{D^2}{d(z,w)^{n-2}}.$$

Para la segunda, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\{y:d(y,z) > 2\varepsilon\}} \frac{H_\varepsilon(y,w)}{d(y,w)^{n-2}} d\text{vol}(y) &\leq \int_{y \in \mathcal{M}} \frac{H_\varepsilon(y,w)}{d(y,w)^{n-2}} d\text{vol}(y) \\
&= \int_{u \in \mathbb{B}(\varepsilon)} \frac{\phi_\varepsilon(u)}{\|u\|^{n-2}} du \\
&\leq \frac{C_n}{e\varepsilon^n} \int_{u \in \mathbb{B}(\varepsilon)} \frac{1}{\|u\|^{n-2}} du \\
&= \frac{C_n \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})}{2e\varepsilon^{n-2}} \\
&\leq \frac{2^{n-3}C_n \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})}{ed(z,w)^{n-2}}.
\end{aligned}$$

3.3. Positividad del núcleo de Green

Por lo tanto, si $d(z, w) \leq 2\varepsilon$, entonces

$$\int_{x, y \in \mathcal{M}} \frac{H_\varepsilon(x, z)H_\varepsilon(y, w)}{d(x, y)^{n-2}} d\text{vol}(x)d\text{vol}(y) \leq \frac{D^2 + 2^{n-3}C_n \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})e^{-1}}{d(z, w)^{n-2}}.$$

Llamemos $\hat{K} = D^2 + 2^{n-3}C_n \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})e^{-1}$.

Supongamos ahora que $d(z, w) > 2\varepsilon$. Si $H_\varepsilon(x, z)H_\varepsilon(y, w) \neq 0$, aplicando la desigualdad triangular,

$$d(x, y) \geq d(z, w) - d(z, x) - d(y, w) > 0,$$

luego

$$\begin{aligned} & \int_{x \in B(z, \varepsilon), y \in B(w, \varepsilon)} \frac{H_\varepsilon(x, z)H_\varepsilon(y, w)}{d(x, y)^{n-2}} d\text{vol}(x, y) \\ & \leq \int_{x \in B(z, \varepsilon), y \in B(w, \varepsilon)} \frac{H_\varepsilon(x, z)H_\varepsilon(y, w)}{(d(z, w) - d(z, x) - d(y, w))^{n-2}} d\text{vol}(x)d\text{vol}(y). \end{aligned}$$

Denotemos $t = d(z, w)$. Tomando coordenadas normales alrededor de z y w , esta última integral es igual a

$$\int_{u, v \in \mathbb{B}(\varepsilon)} \frac{\varepsilon^{-n} f_n(\|u\|/\varepsilon) \varepsilon^{-n} f_n(\|v\|/\varepsilon)}{(t - \|u\| - \|v\|)^{n-2}} dudv = \frac{C_n^2}{\varepsilon^{2n}} \int_{u, v \in \mathbb{B}(\varepsilon)} \frac{e^{-\frac{1}{1-\frac{\|u\|^2}{\varepsilon^2}}} e^{-\frac{1}{1-\frac{\|v\|^2}{\varepsilon^2}}}}{(t - \|u\| - \|v\|)^{n-2}} dudv.$$

Tomando ahora coordenadas polares, esto es igual a

$$\frac{C_n^2 \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})^2}{\varepsilon^{2n}} \int_0^\varepsilon \int_0^\varepsilon \frac{r^{n-1} s^{n-1} e^{-\frac{1}{1-\frac{r^2}{\varepsilon^2}}} e^{-\frac{1}{1-\frac{s^2}{\varepsilon^2}}}}{(t - r - s)^{n-2}} dr ds.$$

Mediante el cambio de variables $x = r/\varepsilon$, $y = s/\varepsilon$, esto es

$$\begin{aligned} & \frac{C_n^2 \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})^2}{\varepsilon^{2n}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{(\varepsilon x)^{n-1} (\varepsilon y)^{n-1} e^{-\frac{1}{1-x^2}} e^{-\frac{1}{1-y^2}}}{(t - \varepsilon x - \varepsilon y)^{n-2}} \varepsilon^2 dx dy \\ & = C_n^2 \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})^2 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{n-1} y^{n-1} e^{-\frac{1}{1-x^2}} e^{-\frac{1}{1-y^2}}}{(t - \varepsilon x - \varepsilon y)^{n-2}} dx dy \\ & \leq C_n^2 \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})^2 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{n-1} y^{n-1} e^{-\frac{1}{1-x^2}} e^{-\frac{1}{1-y^2}}}{(t - \frac{t}{2}x - \frac{t}{2}y)^{n-2}} dx dy \quad (t > 2\varepsilon), \end{aligned}$$

y esta última expresión es igual a $\frac{\tilde{K}}{t^{n-2}}$, donde

$$\tilde{K} = C_n^2 \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})^2 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{n-1} y^{n-1} e^{-\frac{1}{1-x^2}} e^{-\frac{1}{1-y^2}}}{(1-x/2-y/2)^{n-2}} dx dy.$$

Veamos que la integral en el miembro derecho converge. Tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{n-1} y^{n-1} e^{-\frac{1}{1-x^2}} e^{-\frac{1}{1-y^2}}}{(1-x/2-y/2)^{n-2}} dx dy &\leq \int_0^1 \int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{1-x^2}} e^{-\frac{1}{1-y^2}}}{(1-x/2-1/2)^{n-2}} dx dy \\ &= 2^{n-2} \int_0^1 e^{-\frac{1}{1-y^2}} dy \int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{1-x^2}}}{(1-x)^{n-2}} dx \\ &= \frac{2^{n-3}}{C_1} \int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{1-x^2}}}{(1-x)^{n-2}} dx. \end{aligned}$$

Esta integral converge porque

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{-\frac{1}{1-x^2}}}{(1-x)^{n-2}} = 0.$$

Finalmente, tomando $K = \max\{\tilde{K}, \hat{K}\}$ se sigue el resultado. \square

El siguiente resultado afirma que podemos aproximar la energía de una medida con signo ν con energía finita tal que $\nu(\mathcal{M}) = 0$ por las energías de las medidas $\nu_\varepsilon d\text{vol}$ definidas en la Proposición 3.2.1.

Lema 3.3.6. Sea ν una medida con signo finita tal que $|E(\nu)| < \infty$ y $\nu(\mathcal{M}) = 0$. Sea $(\nu_\varepsilon)_\varepsilon$ la sucesión de funciones de la Proposición 3.2.1(5). Entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x,y \in \mathcal{M}} G(x,y) \nu_\varepsilon(x) \nu_\varepsilon(y) d\text{vol}(x) d\text{vol}(y) = \int_{x,y \in \mathcal{M}} G(x,y) d\nu(x) d\nu(y).$$

Demostración. Aplicando el Teorema de Fubini, tenemos que

$$\begin{aligned} &\int_{x,y \in \mathcal{M}} G(x,y) \nu_\varepsilon(x) \nu_\varepsilon(y) d\text{vol}(x) d\text{vol}(y) \\ &= \int_{z,w \in \mathcal{M}} \left(\int_{x,y \in \mathcal{M}} G(x,y) H_\varepsilon(z,x) H_\varepsilon(w,y) d\text{vol}(x) d\text{vol}(y) \right) d\nu(z) d\nu(w). \end{aligned}$$

3.3. Positividad del núcleo de Green

Denotemos

$$f_\varepsilon(z, w) = \int_{x, y \in \mathcal{M}} G(x, y) H_\varepsilon(z, x) H_\varepsilon(w, y) d\text{vol}(x) d\text{vol}(y),$$

y veamos que podemos aplicar el Teorema de la convergencia dominada.

En primer lugar, si $z \neq w$, tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, las bolas cerradas $\overline{B(z, \varepsilon)}$ y $\overline{B(w, \varepsilon)}$ tienen intersección vacía. El integrando en $f_\varepsilon(z, w)$ tiene soporte en el conjunto $F = \overline{B(z, \varepsilon)} \times \overline{B(w, \varepsilon)}$ y la función G es continua restringida a este cerrado. Por el Teorema de extensión de Tietze, existe una función \tilde{G} continua en $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ tal que $\tilde{G}|_F = G$. Aplicando la Proposición 3.2.1(6) y el Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(z, w) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x, y \in \mathcal{M}} \tilde{G}(x, y) H_\varepsilon(z, x) H_\varepsilon(w, y) d\text{vol}(x) d\text{vol}(y) \\ &= \tilde{G}(z, w) = G(z, w). \end{aligned}$$

Esto prueba que $f_\varepsilon(z, w) \rightarrow G(z, w)$ puntualmente $d\text{vol}$ -a.e. en $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$.

Supongamos que $n > 2$ –la prueba del caso $n = 2$ es similar–. Aplicando el Teorema 3.1.1(3), existe una constante $c_3 \geq 0$ tal que para todo $x, y \in \mathcal{M}$ con $x \neq y$, se cumple que

$$|G(x, y)| \leq \frac{c_3}{d(x, y)^{n-2}}.$$

Además, por el Lema 3.1.2, existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$\frac{1}{d(x, y)^{n-2}} \leq \frac{G(x, y) + c_1}{c_2}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(z, w)| &\leq \int_{x, y \in \mathcal{M}} \frac{c_3 H_\varepsilon(z, x) H_\varepsilon(w, y)}{d(x, y)^{n-2}} d\text{vol}(x) d\text{vol}(y) \\ &\leq \frac{c_3 K}{d(z, w)^{n-2}} && \text{(por el Lema 3.3.5)} \\ &\leq \frac{c_3 K (G(z, w) + c_1)}{c_2}, \end{aligned}$$

donde todas las constantes son independientes de ε . Como G es $\nu \otimes \nu$ -integrable y también lo son las funciones constantes, el resultado se sigue del Teorema de la convergencia dominada. \square

Estamos ya en condiciones de probar la positividad del núcleo de Green.

Teorema 3.3.7. Sea \mathcal{M} una variedad compacta de dimensión $n \geq 2$. El núcleo de Green $G(x, y)$ es estrictamente condicionalmente definido positivo.

Demostración. Sea ν una medida con signo finita en \mathcal{M} tal que $\nu(\mathcal{M}) = 0$ y $|E(\nu)| < \infty$. Sea $(\nu_\varepsilon)_{0 < \varepsilon < \frac{\text{inj}(\mathcal{M})}{4}}$ la sucesión de funciones diferenciables del Lema 3.3.2. Por el Lema 3.3.2(1), las funciones ν_ε tienen integral 0, así que para cada ε existe una función diferenciable $\tilde{\nu}_\varepsilon$ tal que $\Delta \tilde{\nu}_\varepsilon = \nu_\varepsilon$. Aplicando el Teorema de Fubini y el Teorema 3.1.1(1),

$$\begin{aligned} & \int_{x, y \in \mathcal{M}} G(x, y) \nu_\varepsilon(x) \nu_\varepsilon(y) d\text{vol}(x) d\text{vol}(y) \\ &= \int_{y \in \mathcal{M}} \left(\int_{x \in \mathcal{M}} G(x, y) \nu_\varepsilon(x) d\text{vol}(x) \right) \nu_\varepsilon(y) d\text{vol}(y) \\ &= \int_{y \in \mathcal{M}} \tilde{\nu}_\varepsilon(y) \Delta \tilde{\nu}_\varepsilon(y) d\text{vol}(y) \\ &= \int_{y \in \mathcal{M}} \|\nabla \tilde{\nu}_\varepsilon(y)\|^2 d\text{vol}(y) \geq 0, \end{aligned}$$

donde hemos usado la Primera Identidad de Green. Aplicando el Lema 3.3.6,

$$\begin{aligned} & \int_{x, y \in \mathcal{M}} G(x, y) d\nu(x) d\nu(y) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x, y \in \mathcal{M}} G(x, y) \nu_\varepsilon(x) \nu_\varepsilon(y) d\text{vol}(x) d\text{vol}(y) \geq 0. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que

$$\int_{x, y \in \mathcal{M}} G(x, y) d\nu(x) d\nu(y) = 0.$$

3.3. Positividad del núcleo de Green

Sea $u \in C^2(\mathcal{M})$ una función con integral 0 cualquiera. Entonces,

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{y \in \mathcal{M}} u(y) d\nu(y) \right| &= \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{y \in \mathcal{M}} u(y) \nu_\varepsilon(y) d\text{vol}(y) \right| \\
 &= \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{y \in \mathcal{M}} \left(\int_{x \in \mathcal{M}} G(x, y) \Delta u(x) d\text{vol}(x) \right) \nu_\varepsilon(y) d\text{vol}(y) \right| \\
 &= \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x \in \mathcal{M}} \Delta u(x) \left(\int_{y \in \mathcal{M}} G(x, y) \nu_\varepsilon(y) d\text{vol}(y) \right) d\text{vol}(x) \right| \\
 &= \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x \in \mathcal{M}} \Delta u(x) \tilde{\nu}_\varepsilon(x) d\text{vol}(x) \right| \\
 &= \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x \in \mathcal{M}} g(\nabla u(x), \nabla \tilde{\nu}_\varepsilon(x)) d\text{vol}(x) \right| \\
 &\leq \left(\int_{x \in \mathcal{M}} \|\nabla u(x)\|^2 d\text{vol}(x) \right)^{1/2} \\
 &\quad \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{x \in \mathcal{M}} \|\nabla \tilde{\nu}_\varepsilon(x)\|^2 d\text{vol}(x) \right)^{1/2},
 \end{aligned}$$

y

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x \in \mathcal{M}} \|\nabla \tilde{\nu}_\varepsilon(x)\|^2 d\text{vol}(x) = \int_{x, y \in \mathcal{M}} G(x, y) d\nu(x) d\nu(y) = 0.$$

Luego para toda función $u \in C^2(\mathcal{M})$ con integral 0,

$$\int_{y \in \mathcal{M}} u(y) d\nu(y) = 0,$$

y sumando una constante es inmediato comprobar que la hipótesis de integral 0 es innecesaria. Sea ahora $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Como \mathcal{M} es compacta, por el Teorema de Stone-Weierstrass (ver demostración del Teorema 2.5.5) existe una sucesión $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ de funciones C^2 que convergen uniformemente a f en \mathcal{M} . Por lo tanto, para cualquier punto $x \in \mathcal{M}$ y para cualquier m suficientemente grande, $|f_m(x) - f(x)| \leq 1$, de modo que

$$|f_m(x)| = |f_m(x) - f(x) + f(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x)| \leq 1 + C,$$

donde C es una cota global de f . Por el Teorema de la convergencia dominada,

$$\int_{y \in \mathcal{M}} f(y) d\nu(y) = \lim_m \int_{y \in \mathcal{M}} f_m(y) d\nu(y) = 0.$$

Así, $\nu = 0$, de donde se sigue el resultado. \square

3.4. Distribución asintótica uniforme

Una vez que hemos demostrado que el núcleo de Green es estrictamente condicionalmente definido positivo, es sencillo demostrar el Teorema 1.7.1.

Demostración del Teorema 1.7.1. Aplicando el Teorema 3.1.1(5), el potencial de la medida de probabilidad $V^{-1}\text{dvol}$ es

$$G^{V^{-1}\text{dvol}}(x) = \int_{y \in \mathcal{M}} G(x, y) V^{-1}\text{dvol}(y) = 0, \quad x \in \mathcal{M}.$$

Por el Teorema 3.3.7, G es un núcleo estrictamente condicionalmente definido positivo. Aplicando el Teorema 2.5.13, la única medida de equilibrio que minimiza la energía de Green continua es la medida uniforme $V^{-1}\text{dvol}$ y, además, $W_G(\mathcal{M}) = E(V^{-1}\text{dvol}) = 0$.

Si $(\omega_N^*)_{N \geq 2}$ es una sucesión de configuraciones óptimas para la energía de Green, entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E(\omega_N^*)}{N^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}_G(N)}{N^2} = \tau_G(\mathcal{M}),$$

donde $\mathcal{E}_G(N) = \min_{x_1, \dots, x_N \in \mathcal{M}} E(x_1, \dots, x_N)$ y $\tau_G(\mathcal{M})$ es el diámetro transfinito de \mathcal{M} . El Teorema 2.5.11 completa la prueba. \square

El Teorema 2.5.11 también arroja la siguiente consecuencia inmediata sobre la expansión asintótica de la mínima energía de Green.

Corolario 3.4.1. Sea \mathcal{M} una variedad compacta de dimensión $n \geq 0$. Entonces $\mathcal{E}_G(N) = o(N^2)$.

Capítulo 4

Bolas armónicas

Las técnicas utilizadas en [20, 21] para hallar cotas para la distancia de separación de las colecciones óptimas para la energía logarítmica y la energía de Riesz en la esfera \mathbb{S}^n no pueden ser trasladadas directamente a una variedad compacta cualquiera. Existen, principalmente, dos impedimentos: en primer lugar, la dificultad para adaptar la definición de transformada de Kelvin al caso de una variedad compacta y, en segundo lugar, el hecho de que la propiedad del valor medio para funciones armónicas no se cumple en todas las variedades compactas.

Recordemos que, en \mathbb{R}^n –y también en la esfera \mathbb{S}^n –, para toda función h integrable y armónica en $B(p, r)$ se cumple que

$$\int_{x \in B(p, r)} h(x) d\text{vol}(x) = h(p), \quad (4.1)$$

donde $\int_{x \in E} = \frac{1}{\text{vol}(E)} \int_{x \in E}$ denota la integral promedio. Esta propiedad no se cumple en una variedad compacta general, aunque sí se cumple en las variedades localmente armónicas (ver [14, Proposición 6.21]). En este capítulo veremos que en una variedad riemanniana compacta cualquiera siempre existen unos dominios abiertos llamados bolas armónicas que satisfacen una propiedad análoga a (4.1) y que juegan un papel importante en la estimación de la distancia de separación para puntos de Green óptimos.

4.1. Bolas armónicas

El balayage clásico de una medida σ en el espacio euclídeo consiste en quitar toda la masa presente en un cierto conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ y

trasladarla a otro lugar. Siguiendo [42], definimos el balayage parcial de la siguiente manera:

Definición 4.1.1. Sean σ y λ medidas con signo de energía finita tales que $m(\sigma) \leq m(\lambda)$. Entonces existe una única medida con signo ν que resuelve el problema de minimización

$$\text{mín } E(\sigma - \nu), \quad \nu \leq \lambda, \quad m(\nu) = m(\sigma).$$

Decimos que ν es el *balayage parcial* de σ con respecto de λ y escribimos $\nu = \text{Bal}(\sigma, \lambda)$.

La medida λ juega un papel similar al que juega el compacto K en el balayage clásico. Se trata de trasladar la masa de σ que “rebosa” sobre λ a otro lugar empleando la menor cantidad de energía en el proceso.

Si σ no tiene energía finita, entonces el balayage no se puede definir a través de una minimización de energía como en la Definición 4.1.1. En su lugar, se define de la siguiente manera (ver [42, Definición 5]):

Definición 4.1.2. Sea σ una medida con signo de masa $m(\sigma) = t$. Supongamos que existe al menos una 0-corriente v –una distribución– tal que

$$\begin{cases} v \leq G^\sigma, \\ \Delta v \leq -t. \end{cases} \quad (4.2)$$

Entonces existe la mayor v satisfaciendo estas dos condiciones y, en términos de ésta, se define

$$\text{Bal}(\sigma, 0) = \text{tdvol} - d * dv.$$

Si σ y λ son medidas con signo cualesquiera tales que $m(\sigma) \leq m(\lambda)$, se define

$$\text{Bal}(\sigma, \lambda) = \text{Bal}(\sigma - \lambda, 0) + \lambda.$$

Observación 4.1.3. La expresión $\text{tdvol} - d * dv$ en principio representa sólo una n -corriente. Sin embargo, la condición $\Delta v \leq -t$ se traduce en que $d * dv \geq \text{tdvol}$. Es decir, que

$$-\text{Bal}(\sigma, 0) = -\text{tdvol} + d * dv \geq -\text{tdvol} + \text{tdvol} = 0$$

en el sentido de las distribuciones. Esto significa que $-\text{Bal}(\sigma, 0)(\varphi) \geq 0$ para toda función diferenciable $\varphi \geq 0$ –y, por tanto, para toda función continua–. Por el Teorema de representación de Riesz, el opuesto de $\text{Bal}(\sigma, 0)$ es una medida positiva.

4.1. Bolas armónicas

La definición que usaremos nosotros es la Definición 4.1.2. La Definición 4.1.1 sirve para motivar el nombre “balayage parcial” y es posible demostrar que si σ tiene energía finita, entonces ambas definiciones coinciden, aunque no haremos uso de este hecho.

A veces nos referiremos al problema de maximización (4.2) como *problema del obstáculo* porque recuerda al problema del obstáculo clásico, en el que se pide encontrar la menor función superarmónica que pasa por encima de un cierto obstáculo (ver Figura 4.1).

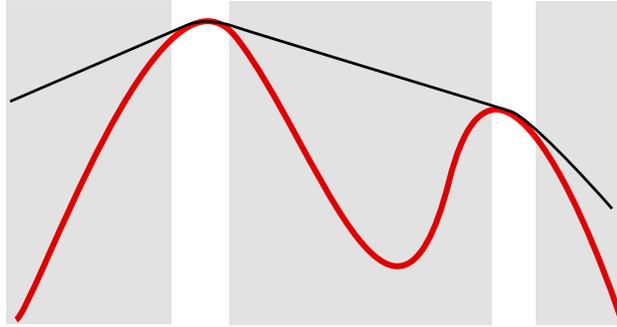


Figura 4.1: Un obstáculo –en rojo– y la menor función superarmónica, con extremos dados, que pasa por encima del obstáculo –en negro–. Las zonas sombreadas representan el conjunto de no coincidencia, donde la función es armónica.

Esta función describe, por ejemplo, la forma de una cama elástica –vista boca abajo– cuando alguien salta sobre ella. En [40] los autores estudian la mayor función subarmónica por debajo de una cierta función a la que denotan $u - v$. Poniendo $u - v = G^{\sigma_+} - G^{\sigma_-} = G^\sigma$, es posible adaptar su argumento para probar que si G^{σ_-} es continua, entonces la solución al problema del obstáculo (4.2) es una función continua (ver [40, Lema 3] y también [42, Observación 3]). En tal caso se define el *conjunto de no coincidencia* como

$$\mathcal{N} = \{x \in \mathcal{M} : v(x) < G^\sigma(x)\},$$

siendo v la solución de (4.2). Como v es continua, el conjunto de no coincidencia es un abierto de \mathcal{M} . Este conjunto sirve para describir la estructura del balayage en el sentido de que si G^{σ_-} es continua y σ_- es absolutamente continua con respecto de dvol , entonces

$$\text{Bal}(\sigma, 0) = \sigma_+|_{\mathcal{N}} - \sigma_-|_{\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}} \quad (4.3)$$

(ver [40, Corolario 11] y [42, Teorema 11]). Por ejemplo, si $\sigma = a\delta_p - \text{dvol}$, con $0 < a < V$, siendo $V = \text{vol}(\mathcal{M})$, entonces $G^{\sigma_-} = G^{\text{dvol}} = 0$, que es una función continua, y $\sigma_- = \text{dvol}$, que es absolutamente continua con respecto de dvol . La masa de σ es $t = m(\sigma) = aV^{-1} - 1 \leq 0$, y la función de Green es $G^\sigma = G^{a\delta_p - \text{dvol}} = aG^{\delta_p}$, que está inferiormente acotada, así que una constante suficientemente pequeña –suficientemente negativa– compite en (4.2), de modo que $\text{Bal}(\sigma, 0)$ está definido. Aplicando (4.3),

$$\text{Bal}(\sigma, 0) = a\delta_p|_{\mathcal{N}} - \text{dvol}|_{\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}}.$$

Sin embargo, como la solución v al problema del obstáculo es continua y $\lim_{x \rightarrow p} aG^{\delta_p}(x) = +\infty$ (por el Lema 3.1.2), necesariamente $p \in \mathcal{N}$, de modo que $a\delta_p|_{\mathcal{N}} = 0$ y

$$\text{Bal}(\sigma, 0) = -\text{dvol}|_{\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}}.$$

Definición 4.1.4. Sean $p \in \mathcal{M}$ un punto cualquiera y a un número real con $0 < a < V$. Se define la *bola armónica* de centro p y radio –o volumen– a , denotada $B^h(p, a)$, como el conjunto de no coincidencia del problema del obstáculo

$$\text{máx } v : \begin{cases} v \leq aG^{\delta_p}, \\ \Delta v \leq 1 - aV^{-1}. \end{cases} \quad (4.4)$$

La bola armónica satisface

$$\text{Bal}(a\delta_p, \text{dvol}) = \chi_{B^h(p, a)} \text{dvol}$$

y esta ecuación la define salvo un conjunto de medida dvol nula.

A continuación veremos que la bola armónica es un dominio de cuadratura para funciones armónicas. Es decir, que satisface una propiedad análoga a la propiedad del valor medio (4.1). Para ello necesitaremos el siguiente lema.

Lema 4.1.5. La solución v del problema del obstáculo (4.4) satisface $\Delta v = 1 - aV^{-1}$ en $B^h(p, a)$ (ver Figura 4.2).

Demostración. Observamos que

$$\begin{aligned} \chi_{B^h(p, a)} \text{dvol} &= \text{Bal}(a\delta_p, \text{dvol}) = \text{Bal}(a\delta_p - \text{dvol}, 0) + \text{dvol} \\ &= (aV^{-1} - 1)\text{dvol} - d * dv + \text{dvol}, \end{aligned}$$

luego

$$-d * dv|_{B^h(p, a)} = (1 - aV^{-1})\text{dvol}|_{B^h(p, a)}.$$

□

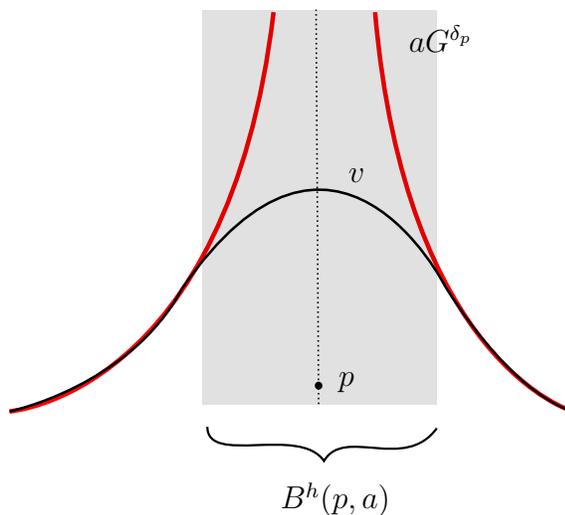


Figura 4.2: Representación esquemática de una sección transversal de la bola armónica $B^h(p, a)$ como el conjunto de no coincidencia –zona sombreada– de la solución v del problema del obstáculo –en color negro– con la función aG^{δ_p} –en rojo–. En el conjunto de no coincidencia la función v tiene laplaciano constante y positivo.

Proposición 4.1.6. Sean $p \in \mathcal{M}$ un punto y $0 < a < V$. Para toda función h integrable y armónica en $B^h(p, a)$ se cumple que

$$\int_{B^h(p, a)} h \, d\text{vol} = ah(p). \quad (4.5)$$

En particular, tomando $h \equiv 1$, se obtiene que el volumen de la bola armónica $B^h(p, a)$ es a . Así, es posible escribir (4.5) en la forma usual de la propiedad del valor medio para funciones armónicas:

$$\int_{B^h(p, a)} h \, d\text{vol} = h(p).$$

Demostración. Sea v la solución del problema (4.4). Entonces, por el Lema 4.1.5, la función $u = v - aG^{\delta_p}$ satisface

$$-d * du|_{B^h(p, a)} = (d\text{vol} - a\delta_p)|_{B^h(p, a)},$$

luego si h es integrable y armónica en $B^h(p, a)$, aplicando el Teorema 2.3.4,

tenemos que

$$0 = \int_{B^h(p,a)} u \Delta h \, \text{dvol} = \int_{B^h(p,a)} h \, \text{dvol} - ah(p),$$

de donde se sigue el resultado. \square

Las siguientes dos proposiciones muestran que las bolas armónicas comparten algunas propiedades con sus homólogas métricas: están anidadas unas dentro de otras según el radio y son conjuntos conexos.

Proposición 4.1.7. Si $0 < a < b < V$, entonces $B^h(p, a) \subset B^h(p, b)$.

Demostración. Consideremos los problemas del obstáculo

$$(P_a) \text{ máx } v : \begin{cases} v \leq aG^{\delta_p} \\ \Delta v \leq 1 - aV^{-1}, \end{cases} \quad (P_b) \text{ máx } v : \begin{cases} v \leq bG^{\delta_p} \\ \Delta v \leq 1 - bV^{-1}, \end{cases}$$

de tal modo que $B^h(p, a)$ es el conjunto de no coincidencia de (P_a) y $B^h(p, b)$ es el conjunto de no coincidencia de (P_b) . Sean v_a la solución de (P_a) y v_b la solución de (P_b) . Tenemos que

$$\begin{aligned} -d * d(v_b - bG^{\delta_p} + aG^{\delta_p}) &\leq (1 - bV^{-1})\text{dvol} + bV^{-1}\text{dvol} - aV^{-1}\text{dvol} \\ &\quad + (a - b)\delta_p \\ &\leq (1 - aV^{-1})\text{dvol}. \end{aligned}$$

Además, como $v_b - bG^{\delta_p} \leq 0$, entonces $v_b - bG^{\delta_p} + aG^{\delta_p} \leq aG^{\delta_p}$. Por lo tanto, $v_b - bG^{\delta_p} + aG^{\delta_p} \leq v_a$, es decir,

$$v_b - bG^{\delta_p} \leq v_a - aG^{\delta_p}.$$

Si $x \in B^h(p, a)$, entonces $v_a(x) - aG^{\delta_p}(x) < 0$, luego $v_b(x) - bG^{\delta_p}(x) < 0$ y $x \in B^h(p, b)$. \square

Proposición 4.1.8. La bola armónica $B^h(p, a)$ es un conjunto conexo.

Demostración. Sea B la componente conexa de $B^h(p, a)$ que contiene a p . Supongamos, por reducción al absurdo, que existe otra componente conexa B' . Sea v la solución del problema del obstáculo (4.4). Entonces v coincide con la función aG^{δ_p} en $\partial B'$. Por el Lema 4.1.5, la función v tiene laplaciano constante igual a $1 - aV^{-1}$ en B' , y como $p \notin B'$, la función aG^{δ_p} tiene laplaciano constante igual a $-aV^{-1}$ en B' . Por el principio del máximo, $v \geq aG^{\delta_p}$ en B' , lo cual supone una contradicción. \square

4.2. Áreas de influencia de los óptimos

En una configuración óptima x_1^*, \dots, x_N^* para la energía de Green discreta, cada punto x_i^* tiene un “área de influencia” propia en la que ningún otro punto puede entrar. En esta sección demostraremos el Teorema 1.7.2, que dice que dicha área de influencia es una bola armónica cuyo radio depende del número de puntos en la configuración. Para ello necesitaremos, en primer lugar, el siguiente resultado, que nos permite identificar puntos que están fuera de la bola armónica.

Lema 4.2.1. Sea $q \in \mathcal{M}$ un punto cualquiera. Supongamos que existe una función f continua en un entorno de q que cumple:

1. $f(q) = aG^{\delta_p}(q)$.
2. $f \leq aG^{\delta_p}$.
3. $\Delta f \leq 1 - aV^{-1}$.

Entonces $q \notin B^h(p, a)$.

Demostración. Sea v la solución del problema del obstáculo (4.4). Como $f \leq aG^{\delta_p}$ y $\Delta f \leq 1 - aV^{-1}$, necesariamente $f \leq v$. Como ambas f y v son continuas en un entorno de q , esta desigualdad se satisface puntualmente en q , luego

$$aG^{\delta_p}(q) = f(q) \leq v(q),$$

y así $aG^{\delta_p}(q) = v(q)$, de modo que $q \in \mathcal{M} \setminus B^h(p, a)$. □

Vamos ya a demostrar el Teorema 1.7.2:

Demostración el Teorema 1.7.2. Por simetría es suficiente probar que $x_{N-1}^* \notin B^h(x_N^*, \frac{1}{N-1}V)$. Para ver esto necesitamos encontrar una función con las condiciones del Lema 4.2.1. Consideremos la función

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{V}{N-1} \left(G^{\delta_{x_N^*}}(x) + \sum_{i=1}^{N-2} G(x_i^*, x) \right) \\ &= \frac{V}{N-1} \left(E(x_1^*, \dots, x_{N-2}^*, x, x_N^*) - \sum_{i \neq j}^{N-2} G(x_i^*, x_j^*) - \sum_{i=1}^{N-2} G(x_i^*, x_N^*) \right). \end{aligned}$$

Como x_1^*, \dots, x_N^* es una configuración óptima para E , la función h alcanza un mínimo global en $x = x_{N-1}^*$. Por lo tanto, si llamamos

$$f(x) = h(x_{N-1}^*) - \frac{V}{N-1} \sum_{i=1}^{N-2} G(x_i^*, x),$$

entonces f es continua en un entorno de x_{N-1}^* ,

$$\frac{V}{N-1} G^{\delta_{x_N^*}}(x) \geq f(x)$$

y se da la igualdad en $x = x_{N-1}^*$. Además,

$$-d * df = -\frac{V}{N-1} \sum_{i=1}^{N-2} -d * dG^{\delta_{x_i^*}} \leq \frac{N-2}{N-1} \text{dvol} = \left(1 - \frac{1}{N-1}\right) \text{dvol}.$$

Aplicando el Lema 4.2.1 con $a = \frac{V}{N-1}$ y $q = x_{N-1}^*$ termina la prueba. \square

Capítulo 5

Energía de Green en variedades localmente armónicas

El estudio de las variedades localmente armónicas comenzó en 1931 con un artículo de H. S. Ruse [68] en el que el autor investigaba las soluciones $u(x)$ de la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ que dependieran únicamente de la función distancia $r(x) = d(p, x)$ a un cierto punto $p \in \mathcal{M}$. Es decir, Ruse buscaba una cierta función diferenciable no constante $F : [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ de tal modo que la función $f = F \circ r : B(p, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ fuera armónica. Un cálculo sencillo muestra que, para una función f de este tipo,

$$\Delta f = -F'' \circ r + (F' \circ r)\Delta r. \quad (5.1)$$

Si f es armónica en $B(p, \varepsilon)$, necesariamente Δr es radialmente simétrica en $B(p, \varepsilon)$, y aplicando la Proposición 2.4.12, la curvatura media de las esferas geodésicas $S(p, r)$ para $0 < r < \varepsilon$ debe ser constante, lo que restringe enormemente la familia de variedades para las que existe tal función y nos conduce a la definición de las variedades localmente armónicas.

Una pregunta natural que podemos hacernos al estudiar la energía de Green es si es posible expresar $G(x, y)$ como una función que dependa únicamente de la distancia $d(x, y)$. Esto es, si existe una función real de variable real ϕ tal que $G(x, y) = \phi(d(x, y))$. Dado que la función $G(x, y) = G^{\delta_x}(y)$ satisface

$$\Delta G^{\delta_x}(y) = -V^{-1} \text{ para todo } y \in B(x, \varepsilon) \setminus \{x\},$$

la función $\phi : (0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ debe cumplir, en vista de (5.1),

$$-V^{-1} = -\phi'' \circ r + (\phi' \circ r)\Delta r, \quad (5.2)$$

donde $r(y) = d(x, y)$, para lo cual, de nuevo, es necesario que Δr sea radialmente simétrica en $B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}$. Es por ello que en este capítulo nos dedicaremos a estudiar algunos aspectos de la energía de Green en el caso en el que \mathcal{M} es una variedad localmente armónica.

5.1. El núcleo de Green de una variedad LH y Blaschke

Supongamos que \mathcal{M} es una variedad compacta localmente armónica. Comenzaremos tratando de construir una función ϕ que exprese la función de Green en términos de la función distancia. En primer lugar, si \mathcal{M} es localmente armónica, entonces sabemos (ver Observación 2.4.11) que existe una función diferenciable $L : (0, \text{inj}(\mathcal{M})) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Delta r_x = L \circ r_x$, donde $r_x(y) = d(x, y)$, para todo $x, y \in \mathcal{M}$ con $0 < d(x, y) < \text{inj}(\mathcal{M})$. Esto nos permite reducir la ecuación en derivadas parciales (5.2) a la EDO

$$\phi''(r) - \phi'(r)L(r) = V^{-1}, \quad r \in (0, \text{inj}(\mathcal{M})). \quad (5.3)$$

Aplicando la Proposición 2.4.13, el factor integrante de esta ecuación es

$$q(r) = e^{\int -L(r)dr} = e^{\log v(r)} = v(r),$$

donde $v(r)$ es el volumen $(n - 1)$ -dimensional de la esfera geodésica $S(x, r)$ –que no depende de x (ver Observación 2.4.14)–. Por lo tanto, la solución general de (5.3) satisface

$$\phi'(r) = \frac{V^{-1} \int v(r)dr + C}{v(r)}, \quad 0 < r < \text{inj}(\mathcal{M}).$$

Ahora nos gustaría recuperar G a partir de ϕ poniendo $G(x, y) = \phi(d(x, y))$. Lo primero que salta a la vista es que esta fórmula no define el valor de G si $d(x, y) > \text{inj}(\mathcal{M})$. Por ello, introducimos la siguiente definición.

Definición 5.1.1. Sea \mathcal{M} una variedad riemanniana compacta. Decimos que \mathcal{M} es *Blaschke* si el radio de inyectividad $\text{inj}(\mathcal{M})$ coincide con el diámetro $\text{diam}(\mathcal{M})$.

Proposición 5.1.2. Sea \mathcal{M} una variedad Blaschke. Para todo $x \in \mathcal{M}$ y para todo $y \in \text{Cut}(x)$, se tiene que $d(x, y) = \text{diam}(\mathcal{M})$.

5.1. El núcleo de Green de una variedad LH y Blaschke

Demostración. Tenemos que

$$\text{inj}(\mathcal{M}) \leq \text{inj}(x) \leq d(x, y) \leq \text{diam}(\mathcal{M}),$$

y como \mathcal{M} es Blaschke, todas estas cantidades coinciden. \square

El siguiente lema proporciona condiciones suficientes para que la función ϕ se pueda extender a una función de clase C^2 definida en todo \mathcal{M} . La demostración es estándar y puede encontrarse, por ejemplo, en [47, Lema 4.2.2].

Lema 5.1.3. Sea \mathcal{M} una variedad Blaschke de diámetro D , y sea $f : (0, D] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $(0, D]$ y de clase C^2 en $(0, D)$. Si $\lim_{r \rightarrow D^-} f(r) = 0$, entonces la función $F(x, y) = f(d(x, y))$ es de clase C^2 en $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ menos la diagonal.

Teorema 5.1.4. Sea \mathcal{M} una variedad localmente armónica y Blaschke de diámetro D . Entonces la función de Green de \mathcal{M} está dada por $G(x, y) = \phi(d(x, y))$, donde

$$\phi'(r) = -\frac{V^{-1} \int_r^D v(t) dt}{v(r)},$$

y ϕ es una primitiva de ϕ' que hace que $\int \phi(d(x, y)) = 0$.

Para demostrar el Teorema 5.1.4 necesitaremos probar antes algunos resultados previos. Si \mathcal{M} es localmente armónica y Blaschke, llamaremos D al diámetro de \mathcal{M} y $\Omega(r)$ a la función definida para $0 \leq r < D$ cumpliendo que $\omega_x(y) = \Omega(d(x, y))$ para todo $x, y \in \mathcal{M}$ con $0 \leq d(x, y) < D$.

Lema 5.1.5. Sea \mathcal{M} una variedad compacta, y sea $p \in \mathcal{M}$ un punto cualquiera. Supongamos que existen $0 < \varepsilon \leq \text{inj}(\mathcal{M})$ y una función $\Omega_p : [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\omega_p(x) = \Omega_p(d(p, x))$ para todo $x \in B(p, \varepsilon)$. Entonces, para cualquier función continua $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ y para cualquier $0 < r < \varepsilon$, se tiene que

$$\int_{y \in S(p, r)} f(y) dS_r(y) = \int_{\theta \in \mathbb{S}^{n-1}} f(\exp_p r\theta) r^{n-1} \Omega_p(r) d\theta,$$

donde dS_r es la medida riemanniana inducida en $S(p, r)$. En particular, tomando $f \equiv 1$ se obtiene que

$$v_p(r) = \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1}) r^{n-1} \Omega_p(r).$$

Demostración. Observamos que

$$\begin{aligned}
 \int_0^r \int_{\theta \in \mathbb{S}^{n-1}} f(\exp_p t\theta) t^{n-1} \Omega_p(t) d\theta dt &= \int_0^r \int_{\theta \in \mathbb{S}^{n-1}(t)} f(\exp_p \theta) \Omega_p(t) d\theta dt \\
 &= \int_0^r \int_{\theta \in \mathbb{S}^{n-1}(t)} f(\exp_p \theta) \sqrt{|g|(\exp_p \theta)} d\theta dt \\
 &= \int_{\theta \in \mathbb{B}(r)} f(\exp_p \theta) \sqrt{|g|(\exp_p \theta)} d\theta \\
 &= \int_{B(p,r)} f(y) d\text{vol}(y) \\
 &= \int_0^r \int_{y \in S(p,t)} f(y) dS_r(y) dt,
 \end{aligned}$$

y derivando con respecto de r se obtiene el resultado. \square

Lema 5.1.6. Sea \mathcal{M} localmente armónica y Blaschke, y sea ϕ la función definida en el enunciado del Teorema 5.1.4. Entonces,

1. $\lim_{r \rightarrow 0^+} r^{n-1} \phi'(r) = -\text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})^{-1}$.
2. $\lim_{r \rightarrow 0^+} r^{n-1} \phi(r) = 0$.

Demostración. Aplicando el Lema 5.1.5,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} r^{n-1} \phi'(r) = - \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{V^{-1} \int_r^D v(t) dt}{\text{vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \Omega(r)} = -\text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})^{-1},$$

ya que $\Omega(0) = 1$ (ver Proposición 2.4.6(b)) y $\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_r^D v(t) dt = V$ porque \mathcal{M} es Blaschke. Esto prueba 1.

Para probar 2, aplicamos la regla de L'Hôpital seguida de 1:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} r^{n-1} \phi(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\phi'(r)}{(n-1)r^{-n}} = -\frac{1}{n-1} \lim_{r \rightarrow 0^+} r \lim_{r \rightarrow 0^+} r^{n-1} \phi'(r) = 0.$$

\square

Lema 5.1.7. Sea \mathcal{M} localmente armónica y Blaschke, y sea ϕ la función definida en el enunciado del Teorema 5.1.4. Para cualquier $x \in \mathcal{M}$, la función $y \mapsto \phi(d(x, y))$ es integrable.

5.1. El núcleo de Green de una variedad LH y Blaschke

Demostración. Como \mathcal{M} es Blaschke, podemos calcular, para $x \in \mathcal{M}$ cualquiera,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} |\phi(d(x, y))| d\text{vol}(y) &= \int_{y \in B(x, D)} |\phi(d(x, y))| d\text{vol}(y) \\ &= \int_0^D \int_{\mathbb{S}^{n-1}(r)} |\phi(r)| \Omega(r) d\theta dr \\ &= \int_0^D \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1}) r^{n-1} |\phi(r)| \Omega(r) dr, \end{aligned}$$

que es una integral finita porque $\lim_{r \rightarrow 0^+} r^{n-1} \phi(r) = 0$ por el Lema 5.1.6. \square

Demostración del Teorema 5.1.4. Primero comprobamos que ϕ' se puede extender de manera continua a $r = D$. Esto es, que existe el límite $\lim_{r \rightarrow D^-} \phi'(r)$. Si $\lim_{r \rightarrow D^-} v(r) \neq 0$, entonces claramente $\lim_{r \rightarrow D^-} \phi'(r) = 0$. Por otra parte, si $\lim_{r \rightarrow D^-} v(r) = 0$, entonces podemos aplicar la regla de L'Hôpital para obtener que

$$\lim_{r \rightarrow D^-} \phi'(r) = \lim_{r \rightarrow D^-} \frac{V^{-1}v(r)}{v'(r)} = \lim_{r \rightarrow D^-} \frac{V^{-1}}{\frac{d}{dr} \log v(r)} = 0,$$

ya que $v(r) \rightarrow 0$, luego $\log v(r) \rightarrow -\infty$ y $\frac{d}{dr} \log v(r) \rightarrow +\infty$. Por lo tanto, existe $\lim_{r \rightarrow D^-} \phi'(r) = 0$. Por el Lema 5.1.3, la función $F(x, y) = \phi(d(x, y))$ es de clase C^2 en $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ menos la diagonal.

Sea ahora $u \in C^2(\mathcal{M})$ una función cualquiera. Sea $0 < \varepsilon < \text{inj}(\mathcal{M})$ un número real, y denotemos $B_\varepsilon = B(x, \varepsilon)$, $B_\varepsilon^c = \mathcal{M} \setminus B(x, \varepsilon)$, $S_\varepsilon = S(x, \varepsilon)$ y $\mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon) = \{\theta \in \mathbb{R}^n : \|\theta\| = \varepsilon\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{y \in \mathcal{M}} \Delta u(y) \phi(d(x, y)) d\text{vol}(y) &= \int_{y \in B_\varepsilon} \Delta u(y) \phi(d(x, y)) d\text{vol}(y) \\ &\quad + \int_{y \in B_\varepsilon^c} \Delta u(y) \phi(d(x, y)) d\text{vol}(y). \end{aligned}$$

Llamemos $I_1(\varepsilon)$ a la primera de las integrales en el miembro derecho de la igualdad anterior, y sea $I_2(\varepsilon)$ la segunda. Aplicando la Segunda Identidad de Green, como el vector normal que apunta hacia afuera en B_ε^c es $N = -\partial_r =$

$-\nabla r$, tenemos que

$$I_2(\varepsilon) = \int_{y \in S_\varepsilon} [-u(y)\partial_r\phi(d(x, y)) + \phi(d(x, y))\partial_r u(y)] dS_\varepsilon(y) \\ + \int_{y \in B_\varepsilon^c} u(y)\Delta_y\phi(d(x, y))d\text{vol}(y).$$

De nuevo, sea $I_3(\varepsilon)$ la primera de las integrales en el miembro derecho, y sea $I_4(\varepsilon)$ la segunda. En coordenadas normales tenemos que

$$I_3(\varepsilon) = -\phi'(\varepsilon) \int_{y \in S_\varepsilon} u(y)dS_\varepsilon(y) + \phi(\varepsilon) \int_{y \in S_\varepsilon} \partial_r u(y)dS_\varepsilon(y) \\ = -\phi'(\varepsilon) \int_{\theta \in \mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon)} u(\exp_x \theta)\Omega(\varepsilon)d\theta \\ + \phi(\varepsilon) \int_{\theta \in \mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon)} \partial_r u(\exp_x \theta)\Omega(\varepsilon)d\theta \\ = -\phi'(\varepsilon)\Omega(\varepsilon) \int_{\theta \in \mathbb{S}^{n-1}} \varepsilon^{n-1}u(\exp_x \varepsilon\theta)d\theta \\ + \phi(\varepsilon)\Omega(\varepsilon) \int_{\theta \in \mathbb{S}^{n-1}} \varepsilon^{n-1}\partial_r u(\exp_x \varepsilon\theta)d\theta \\ = -\phi'(\varepsilon)\varepsilon^{n-1}\Omega(\varepsilon) \int_{\theta \in \mathbb{S}^{n-1}} u(\exp_x \varepsilon\theta)d\theta \\ + \phi(\varepsilon)\varepsilon^{n-1}\Omega(\varepsilon) \int_{\theta \in \mathbb{S}^{n-1}} \partial_r u(\exp_x \varepsilon\theta)d\theta.$$

Como $\Omega(0) = 1$ y, por el Lema 5.1.6 se tiene que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} -\phi'(\varepsilon)\varepsilon^{n-1} = \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})}, \quad \text{y} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \phi(\varepsilon)\varepsilon^{n-1} = 0,$$

concluimos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_3(\varepsilon) = u(x).$$

Como $y \mapsto \phi(d(x, y))$ es integrable por el Lema 5.1.7 y u está acotada, entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_1(\varepsilon) = 0.$$

5.2. Algunos ejemplos

Finalmente, si $y \in B_\varepsilon^c$, entonces $\Delta_y \phi(d(x, y)) = -V^{-1}$, de modo que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_4(\varepsilon) = -V^{-1} \int_{y \in \mathcal{M}} u(y) d\text{vol}(y).$$

Para todo $0 < \varepsilon < \text{inj}(\mathcal{M})$ tenemos que

$$\int_{y \in \mathcal{M}} \Delta u(y) \phi(d(x, y)) d\text{vol}(y) = I_1(\varepsilon) + I_3(\varepsilon) + I_4(\varepsilon).$$

En particular, la integral en el miembro izquierdo es igual a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (I_1(\varepsilon) + I_3(\varepsilon) + I_4(\varepsilon)) = u(x) - V^{-1} \int_{y \in \mathcal{M}} u(y) d\text{vol}(y).$$

Pero, de acuerdo con el Teorema 3.1.1, así es como la función de Green actúa en funciones de clase C^2 . Por unicidad de la función de Green, y como suponemos que ambas $\phi(d(x, y))$ y $G(x, y)$ tienen integral cero, necesariamente $\phi(d(x, y)) = G(x, y)$. \square

Observación 5.1.8. En la demostración del Teorema 5.1.4 hemos distinguido entre los casos

$$\lim_{r \rightarrow D^-} v(r) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{r \rightarrow D^-} v(r) \neq 0.$$

Un ejemplo del primer caso es la esfera \mathbb{S}^2 , en la que las esferas geodésicas $S(x, r)$ colapsan a un punto cuando $r \rightarrow \pi^-$. La situación es diferente en el caso del plano proyectivo real \mathbb{RP}^2 , por ejemplo. Si pensamos en el modelo de semiesfera de \mathbb{RP}^2 , las esferas geodésicas que parten del polo norte crecen en volumen hasta que alcanzan el ecuador, que es el cut locus, y entonces retroceden hasta que colapsan de nuevo en el polo norte. La razón de que ocurra esto es que los puntos en el cut locus en el caso de \mathbb{S}^2 son puntos conjugados (luego $\Omega(D) = 0$), mientras que estos puntos no son conjugados en \mathbb{RP}^2 (luego $\Omega(D) \neq 0$).

5.2. Algunos ejemplos

A decir verdad, no existen muchos ejemplos conocidos de variedades localmente armónicas y Blaschke. De hecho, los únicos ejemplos de variedades

de este tipo que se conocen son los espacios simétricos de rango uno compactos –CROSS, por sus siglas en inglés– (ver [14, 6.18]). Estos espacios, entre otros, fueron clasificados por É. Cartan y son la esfera \mathbb{S}^n , los espacios proyectivos $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ y $\mathbb{H}\mathbb{P}^n$ sobre los números reales, los números complejos y los cuaterniones, respectivamente, y el plano de Cayley $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$. La conjetura de Lichnerowicz afirma que las únicas variedades localmente armónicas y Blaschke son, justamente, los CROSS.

Todo lo que necesitamos para calcular la función de Green de los CROSS es la correspondiente densidad de volumen $\Omega(r)$ y aplicar el Teorema 5.1.4, ya que el Lema 5.1.5 implica que

$$\phi'(r) = -\frac{V^{-1} \int_r^D t^{n-1} \Omega(t) dt}{r^{n-1} \Omega(r)}.$$

En [47, Proposición 3.3.1] el autor calcula estas densidades de volumen, que nosotros mostramos en la Figura 5.1 –suponemos que el diámetro de los espacios proyectivos es $\pi/2$, como en el modelo de semiesfera de $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$, una convención distinta a la adoptada en [47]–.

| | |
|--------------------------|-----------------------------------|
| \mathcal{M} | $r^{n-1} \Omega(r)$ |
| \mathbb{S}^n | $\sin^{n-1} r$ |
| $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ | $2^{n-1} \sin^{n-1} r$ |
| $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ | $2^{2n-1} \sin^{2n-1} r \cos r$ |
| $\mathbb{H}\mathbb{P}^n$ | $2^{4n-1} \sin^{4n-1} r \cos^3 r$ |
| $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ | $2^{15} \sin^{15} r \cos^7 r$ |

Figura 5.1: Densidades de volumen de los CROSS donde se supone que los espacios proyectivos tienen diámetro $\pi/2$. Nótese que la dimensión como variedad diferenciable real de los espacios proyectivos $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ es igual a $n \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$.

En particular, para $\mathcal{M} = \mathbb{S}^2$, tenemos que

$$\phi'(r) = -\frac{(4\pi)^{-1} \int_r^\pi \sin t dt}{\sin r} = -\frac{1 + \cos(r)}{4\pi \sin r},$$

y

$$\phi(r) = -\frac{1}{2\pi} \log \sin \frac{r}{2} - \frac{1}{4\pi}.$$

5.3. Distancia de separación

En términos de la distancia euclídea,

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log \|x - y\|^{-1} - \frac{1}{4\pi},$$

que es igual –salvo reescalamiento– al núcleo logarítmico.

Más generalmente, usando la función hipergeométrica de Gauss y algunas fórmulas de transformación (ver [41, 8.391 y 9.131]) se puede obtener una expresión para la función de Green de \mathbb{S}^n en términos de la distancia euclídea: $G(x, y) = \hat{\phi}(\|x - y\|)$, donde

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(t) &= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int_{\frac{t^2}{4}}^1 \frac{B_{1-x}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)}{(x-x^2)^{n/2}} dx + C \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{n\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int_{\frac{t^2}{4}}^1 {}_2F_1\left(1, n, \frac{n}{2} + 1, 1-s\right) ds + C. \end{aligned}$$

Podemos también calcular la función de Green para los espacios proyectivos –en términos de la distancia intrínseca–. Por ejemplo, para \mathbb{CP}^3 y \mathbb{CP}^4 , tenemos que $G(x, y) = \phi(d(x, y))$, donde

$$\phi(r) = \frac{1}{128\pi^3} \left(\frac{1}{\sin^4 r} + \frac{2}{\sin^2 r} - 4 \log \sin r \right) - \frac{5}{96\pi^3}$$

para \mathbb{CP}^3 y

$$\phi(r) = \frac{1}{512\pi^4} \left(\frac{2}{\sin^6 r} + \frac{3}{\sin^4 r} + \frac{6}{\sin^2 r} - 12 \log \sin r \right) - \frac{47}{1024\pi^4}$$

para \mathbb{CP}^4 .

5.3. Distancia de separación

Las variedades localmente armónicas no sólo admiten una expresión sencilla para su función de Green, sino que también sus bolas armónicas son fáciles de describir: todas ellas son bolas geodésicas. Existe una interpretación física para las bolas armónicas en términos de los llamados fluidos de Hele–Shaw: imaginemos que \mathcal{M} es una superficie formada por dos capas muy finas de material transparente muy juntas entre sí. Elegimos un punto p en

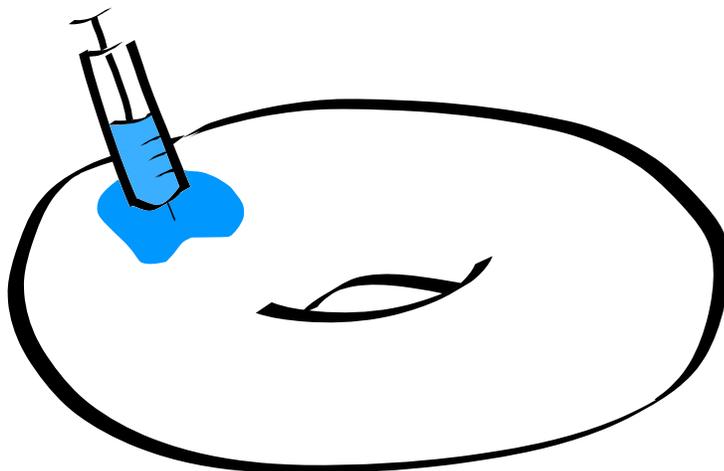


Figura 5.2: Representación de la bola armónica $B^h(p, a)$ como la mancha –en color azul– que resulta de inyectar a unidades de líquido en un punto $p \in \mathcal{M}$.

la superficie e inyectamos a unidades de líquido en p . La mancha resultante es la bola armónica $B^h(p, a)$ (ver Figura 5.2).

En esta interpretación, el espacio –infinitesimal– entre las capas que forman la superficie representa la presión que ejerce sobre el fluido la densidad de volumen de \mathcal{M} . Cuanto mayor es la densidad de volumen, menor es la presión sobre el líquido y más líquido cabe en una región dada. Cabe esperar, entonces, dos cosas: en primer lugar, que si la densidad de volumen es radialmente simétrica en torno a p , entonces $B^h(p, a)$ es un conjunto radialmente simétrico –o sea, una bola geodésica–. En segundo lugar, que cuanto mayor sea la curvatura –por tanto, cuanto menor sea la densidad de volumen–, más grande es la bola geodésica que le corresponde a $B^h(p, a)$. En esta sección veremos que todas estas intuiciones son correctas.

Lema 5.3.1. Sean \mathcal{M} una variedad compacta y $p \in \mathcal{M}$ un punto cualquiera. Supongamos que existen $0 < \varepsilon \leq \text{inj}(\mathcal{M})$ y una función $\Omega_p : [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\omega_p(x) = \Omega_p(d(p, x))$ para todo $x \in B(p, \varepsilon)$. Entonces para cualquier $0 < r < \varepsilon$ la función

$$f_r(x) = \int_{y \in S(p, r)} G(x, y) d\sigma_r(y),$$

donde σ_r es la medida de probabilidad uniforme en $S(p, r)$, es continua y,

5.3. Distancia de separación

además,

$$f_r(x) = \begin{cases} G(p, x) + V^{-1} \int_0^r \frac{V_p(u)}{v_p(u)} du & \text{si } x \in \mathcal{M} \setminus B(p, r), \\ G(p, z) + V^{-1} \int_0^r \frac{V_p(u)}{v_p(u)} du - \int_{d(p,x)}^r \frac{du}{v_p(u)} & \text{si } x \in B(p, r), \end{cases}$$

donde z es cualquier punto en $S(p, r)$, $v_p(r)$ es el volumen de la esfera geodésica $S(p, r)$ y $V_p(r)$ es el volumen de la bola geodésica $B(p, r)$.

Demostración. Sea $t = d(p, x)$. Consideremos la función

$$F(u) = \int_{S(p,u)} G(x, y) d\sigma_u(y), \quad u \in (0, \varepsilon),$$

y observemos que $f_r(x) = F(r)$. Tomando coordenadas normales en torno a p , si $u \neq r$, podemos aplicar el Lema 5.1.5 y obtener que

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u^{n-1} \Omega_p(u) d\theta} \int_{\theta \in \mathbb{S}^{n-1}} G(x, \exp_p u\theta) u^{n-1} \Omega_p(u) d\theta \\ &= \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})} \int_{\theta \in \mathbb{S}^{n-1}} G(x, \exp_p u\theta) d\theta, \end{aligned}$$

luego si $u \neq r$, se tiene que

$$F'(u) = \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})} \int_{\theta \in \mathbb{S}^{n-1}} \frac{d}{du} G(x, \exp_p u\theta) d\theta = \int_{S(p,u)} \nabla_N G(x, y) d\sigma_u(y),$$

donde N es el vector normal unitario que apunta hacia afuera en $B(p, u)$.

Supongamos que $x \in \mathcal{M} \setminus \overline{B(p, r)}$, es decir, que $r < t$. Entonces existe un $\delta > 0$ tal que, para todo $u \in (0, r + \delta)$, el punto x no está en $\overline{B(p, u)}$, así que aplicando la Segunda Identidad de Green obtenemos que

$$v_p(u) F'(u) = - \int_{B(p,u)} \Delta G(x, y) d\text{vol}(y) = V^{-1} V_p(u), \quad u \in (0, r + \delta).$$

Además, por continuidad de la función de Green, tenemos que

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} F(u) = G(p, x).$$

Por lo tanto, aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$f_r(x) = F(r) = G(p, x) + V^{-1} \int_0^r \frac{V_p(u)}{v_p(u)} du.$$

Para ver que la fórmula para $f_r(x)$ es válida también cuando $r = t$, vamos a ver que f_r es continua. Para cada $\delta > 0$, consideremos el conjunto compacto

$$E_\delta = \{(x, y) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M} : G(x, y) \leq \delta^{-1}\}.$$

Como $G|_{E_\delta}$ es continua, por el Teorema de extensión de Tietze podemos encontrar una función continua G_δ definida en $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$, con $G_\delta|_{E_\delta} = G|_{E_\delta}$ y $G_\delta \leq \delta^{-1}$. Entonces la función

$$f_\delta = \int_{S(p,r)} G_\delta(x, y) d\sigma_r(y)$$

es continua. Para cada $x \in \mathcal{M}$, tenemos que $|G_\delta(x, y)| \leq |G(x, y)|$ para todo $y \in \mathcal{M}$. Veamos que $y \mapsto G(x, y)$ es σ_r -integrable. En lo que sigue, C representará una constante positiva arbitraria. Por el Teorema 3.1.1(3), si $n > 2$, entonces

$$\int_{y \in S(p,r)} |G(x, y)| d\sigma_r(y) \leq C \int_{y \in S(p,r)} d(x, y)^{2-n} d\sigma_r(y).$$

Tomando coordenadas normales en torno a p , podemos escribir

$$C \int_{y \in S(p,r)} d(x, y)^{2-n} d\sigma_r = C \int_{v \in \mathbb{S}^{n-1}(r)} d(\exp_p u, \exp_p v)^{2-n} dv,$$

donde $\mathbb{S}^{n-1}(r) = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| = r\}$ y $u = \exp_p^{-1} x$. Dado que \exp_p^{-1} es diferenciable en la bola cerrada $\overline{B(p, r)}$ —porque $r < \varepsilon \leq \text{inj}(\mathcal{M})$ —, es Lipschitz en esta bola, así que existe una constante $L > 0$ tal que $\|u - v\| \leq Ld(\exp_p u, \exp_p v)$. Así,

$$C \int_{v \in \mathbb{S}^{n-1}(r)} d(\exp_p u, \exp_p v)^{2-n} dv \leq C \int_{v \in \mathbb{S}^{n-1}(r)} \|u - v\|^{2-n} dv < \infty.$$

El caso $n = 2$ es similar. Como $y \mapsto G(x, y)$ es σ_r integrable, podemos aplicar el Teorema de la convergencia dominada para obtener

$$f_r(x) = \int_{y \in S(p,r)} \lim_{\delta \rightarrow 0} G_\delta(x, y) d\sigma_r(y) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{y \in S(p,r)} G_\delta(x, y) d\sigma_r(y).$$

Ahora f_r es el límite puntual de una sucesión no decreciente de funciones continuas en una variedad compacta. Por el Teorema de Dini, la convergencia es uniforme, así que f es continua.

5.3. Distancia de separación

Finalmente, si $x \in S(p, r)$, entonces podemos tomar una sucesión de puntos $(x_m)_m$ con $x_m \rightarrow x$ y $d(p, x_m) > r$ para todo m . Así,

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{m \rightarrow \infty} f(x_m) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} G(p, x_m) + V^{-1} \int_0^r \frac{V_p(u)}{v_p(u)} du \\ &= G(p, x) + V^{-1} \int_0^r \frac{V_p(u)}{v_p(u)} du \end{aligned}$$

porque G^{δ_p} es continua en x .

Por último, supongamos que $r > t$. Entonces existe un $\delta > 0$ tal que x está en $B(p, u)$ para todo $u \in (t, r + \delta)$. Aplicando la Segunda Identidad de Green,

$$v_p(u)F'(u) = \int_{\mathcal{M} \setminus B(p, u)} \Delta G(x, y) d\text{vol}(y) = V_p(u)V^{-1} - 1, \quad u \in (t, r + \delta).$$

Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$F(r) = F(t) + \int_t^r \frac{V^{-1}V_p(u) - 1}{v_p(u)} du,$$

y aplicando la continuidad de f y su expresión para el caso $r = t$, tenemos que si $z \in S(p, r)$ es un punto cualquiera, entonces

$$\begin{aligned} f(x) = F(r) &= G(p, z) + V^{-1} \int_0^t \frac{V_p(u)}{v_p(u)} du + \int_t^r \frac{1 - V^{-1}V_p(u)}{v_p(u)} \\ &= G(p, z) + V^{-1} \int_0^r \frac{V_p(u)}{v_p(u)} du - \int_t^r \frac{du}{v_p(u)}. \end{aligned}$$

□

Usando el Lema 5.3.1, podemos demostrar ya el Teorema 1.7.3.

Demostración del Teorema 1.7.3. Veamos, en primer lugar, que $B^h(p, V(r)) \subset B(p, r)$. Para ello, consideremos la función

$$h_r(x) = G^{\chi_{B(p, r)}}(x).$$

Si $x \notin B(p, r)$, entonces podemos aplicar el Lema 5.3.1 para obtener

$$\begin{aligned}
 h_r(x) &= \int_{y \in B(p, r)} G(x, y) d\text{vol}(y) \\
 &= \int_0^r v(t) \int_{S(p, t)} G(x, y) d\sigma_t(y) dt \\
 &= \int_0^r v(t) \left(G(p, x) + V^{-1} \int_0^t \frac{V(u)}{v(u)} du \right) dt \\
 &= V(r)G(p, x) + V^{-1} \int_0^r v(t) \int_0^t \frac{V(u)}{v(u)} du dt.
 \end{aligned}$$

Es decir, que si denotamos

$$w_r(x) = h_r(x) - V^{-1} \int_0^r v(t) \int_0^t \frac{V(u)}{v(u)} du dt,$$

entonces las funciones $V(r)G(p, x)$ y $w_r(x)$ coinciden en $\mathcal{M} \setminus B(p, r)$. Si $x \in B(p, r)$, entonces aplicando el Lema 5.3.1, sabemos que

$$w_r(x) = V(r)G(p, z) - \int_0^r v(t) \int_{d(p, x)}^t \frac{du}{v(u)} dt \quad (5.4)$$

para cualquier $z \in S(p, r)$. En vista de la expresión para ϕ' del Teorema 5.1.4, la función $x \mapsto V(r)G(p, x)$ es creciente con la distancia de p a x . Comparando con (5.4), obtenemos que $w_r(x) < V(r)G(p, x)$ para $x \in B(p, r)$. Es decir,

1. Para todo $x \in \mathcal{M} \setminus B(p, r)$, se tiene que $w_r(x) = V(r)G^{\delta_p}(x)$.
2. $w_r \leq V(r)G^{\delta_p}$ en todo \mathcal{M} .
3. El laplaciano de w_r es

$$-d * dw_r = \chi_{B(p, r)} d\text{vol} - V(r)V^{-1}d\text{vol} \leq (1 - V(r)V^{-1})d\text{vol}.$$

Por el Lema 5.3.1, la función h_r es continua, luego w_r también es continua –e integrable porque \mathcal{M} es compacta–. Aplicando el Lema 4.2.1 obtenemos que $\mathcal{M} \setminus B(p, r) \subset \mathcal{M} \setminus B^h(p, V(r))$, es decir, $B^h(p, V(r)) \subseteq B(p, r)$.

Para la inclusión en el otro sentido, sea v_r la solución del problema del obstáculo (4.4). Entonces w_r y v_r coinciden en $\mathcal{M} \setminus B(p, r)$ porque ambas

5.3. Distancia de separación

coinciden aquí con $V(r)G^{\delta_p}$. Además, en $B(p, r)$, tenemos que $\Delta w_r = 1 - V(r)V^{-1}$, mientras que $\Delta v_r \leq 1 - V(r)V^{-1}$. Por el principio del máximo, $v_r \leq w_r$. Sin embargo, $w_r \leq V(r)G^{\delta_p}$ en todo \mathcal{M} y $\Delta w_r \leq 1 - V(r)V^{-1}$ en todo \mathcal{M} , así que $w_r \leq v_r$ y, por tanto, ambas funciones coinciden, luego ambos conjuntos de no coincidencia con $V(r)G^{\delta_p}$ coinciden, lo que concluye la prueba. \square

Con lo anterior, podemos dar una breve demostración del Teorema 1.7.4.

Demostración del Teorema 1.7.4. Si \mathcal{M} es localmente armónica y Blaschke con diámetro D , entonces existe una función $\Omega : [0, D) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\omega_x(y) = \Omega(d(x, y))$ para todo $x, y \in \mathcal{M}$. Por el Teorema 1.7.3, para todo $p \in \mathcal{M}$ y para todo $0 < r < D$ se tiene que

$$B(p, r) = B^h(p, V(r)),$$

y por el Teorema 1.7.2, si x_1^*, \dots, x_N^* , con $N > 2$, es una configuración óptima para la energía de Green, entonces $x_j^* \notin B^h(x_i^*, V/(N-1))$ para todo $i \neq j$. Como $N > 2$, entonces $V/(N-1) < V$, y como el cut locus tiene medida cero, existe un r_N tal que $V(r_N) = V/(N-1)$. Así, $x_j^* \notin B(x_i^*, V(r_N))$ para todo $i \neq j$, lo que concluye la demostración. \square

Capítulo 6

Métricas de condicionamiento y curvatura

Dedicaremos este capítulo a ver algunos ejemplos concretos de métricas de condicionamiento y a estudiar la relación que existe entre la curvatura de la variedad ambiente \mathcal{M} –que juega el papel de la variedad solución– y la autoconvexidad de la función $d(x, \mathcal{N})^{-2}$. En las últimas secciones del capítulo demostraremos los teoremas 1.7.5 y 1.7.6.

6.1. Una fórmula para la hessiana

Lo primero que haremos será escribir la hessiana en la métrica de condicionamiento $\text{Hess}_\kappa \log d(x, \mathcal{N})^{-2}$ en términos de la métrica original de \mathcal{M} . En [8] los autores obtienen una fórmula de este tipo. Aquí presentaremos una demostración sin usar coordenadas algo más compacta.

Observemos que la métrica $g_\kappa = d(x, \mathcal{N})^{-2}g$ es una transformación conforme de la métrica original, así que podemos usar un resultado bien conocido que describe cómo se modifica la conexión de Levi–Civita al modificar la métrica por una transformación conforme.

Proposición 6.1.1. Sea (\mathcal{M}, g) una variedad riemanniana posiblemente no completa, y sea $\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tomando valores estrictamente positivos. Definamos una nueva métrica $g_\kappa = \alpha g$. Si ∇ es la conexión de Levi–Civita de (\mathcal{M}, g) , entonces la conexión de Levi–Civita ∇^κ de (\mathcal{M}, g_κ) está dada por

$$\nabla_X^\kappa Y = \nabla_X Y + S(X, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}),$$

donde S es el tensor simétrico dado por

$$S(X, Y) = \frac{1}{2\alpha} (X(\alpha)Y + Y(\alpha)X - g(X, Y)\nabla\alpha).$$

Demostración. Un cálculo sencillo muestra que ∇^k así definida es una conexión simétrica y compatible con g_κ , y de la unicidad de la conexión de Levi–Civita se sigue el resultado. \square

Recordemos que la hessiana $\text{Hess}f$ de una función $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ es el tensor simétrico dado por

$$\text{Hess}f(X, Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$$

(ver, por ejemplo, [62, p. 28]).

Lema 6.1.2. En las hipótesis y con las notaciones de la Proposición 6.1.1, la hessiana $\text{Hess}_\kappa\alpha$ de α con respecto de la métrica g_κ satisface

$$\text{Hess}_\kappa\alpha(X, X) = -\alpha^{-1}(d\alpha(X))^2 + \text{Hess}\alpha(X, X) + \frac{1}{2}\alpha^{-1}\|\nabla\alpha\|^2\|X\|^2,$$

para todo campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

Demostración. Sea $\nabla^\kappa\alpha$ el gradiente de α con respecto de g_κ . Para cualquier campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ tenemos que

$$g_\kappa(\alpha^{-1}\nabla\alpha, X) = \alpha g(\alpha^{-1}\nabla\alpha, X) = g(\nabla\alpha, X) = d\alpha(X),$$

por lo que $\nabla^\kappa\alpha = \alpha^{-1}\nabla\alpha$. Ahora un cálculo directo aplicando la Proposición 6.1.1 muestra que

$$\begin{aligned} \text{Hess}_\kappa\alpha(X, X) &= g_\kappa(\nabla_X^\kappa \nabla^\kappa\alpha, X) \\ &= g_\kappa(\nabla_X^\kappa(\alpha^{-1}\nabla\alpha), X) \\ &= g_\kappa(X(\alpha^{-1})\nabla\alpha + \alpha^{-1}\nabla_X^\kappa \nabla\alpha, X) \\ &= g_\kappa(-\alpha^{-2}X(\alpha)\nabla\alpha + \alpha^{-1}\nabla_X \nabla\alpha + (\alpha^{-2}/2)(X(\alpha)\nabla\alpha \\ &\quad + \nabla\alpha(\alpha)X - g(X, \nabla\alpha)\nabla\alpha), X) \\ &= -\alpha^{-1}X(\alpha)g(\nabla\alpha, X) + g(\nabla_X \nabla\alpha, X) + \frac{1}{2}\alpha^{-1}X(\alpha)g(\nabla\alpha, X) \\ &\quad + \frac{1}{2}\alpha^{-1}\nabla\alpha(\alpha)g(X, X) - \frac{1}{2}\alpha^{-1}g(X, \nabla\alpha)g(\nabla\alpha, X) \\ &= -\alpha^{-1}(d\alpha(X))^2 + \text{Hess}\alpha(X, X) + \frac{1}{2}\alpha^{-1}\|d\alpha\|^2\|X\|^2. \end{aligned}$$

\square

6.1. Una fórmula para la hessiana

Podemos dar ya una demostración de [8, Proposición 2].

Proposición 6.1.3. Sean (\mathcal{M}, g) una variedad riemanniana y $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ una subvariedad de clase C^2 . Sea $\mathcal{U}_{\mathcal{N}}$ el mayor abierto de \mathcal{M} en el que la función $r(x) = d(x, \mathcal{N})$ es diferenciable. Entonces la función r^{-2} es autoconvexa en $\mathcal{U}_{\mathcal{N}}$ si, y sólo si, para todo $x \in \mathcal{U}_{\mathcal{N}}$ y para todo vector tangente $X \in T_x\mathcal{M}$,

$$\|X\|^2 - (dr(x)X)^2 - r(x)\text{Hess } r(x)(X, X) \geq 0. \quad (6.1)$$

Demostración. Recordemos [78, Cap. 1.3, Hessian] que si $\mathcal{M} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}$ es una composición de funciones diferenciables, entonces

$$\text{Hess}(\phi \circ f) = (\phi' \circ f)\text{Hess } f + (\phi'' \circ f)df \otimes df. \quad (6.2)$$

En particular, tomando $\phi = \log$ y $f = r^{-2}$, podemos aplicar el Lema 6.1.2 para $\alpha = r^{-2}$ y obtener:

$$\begin{aligned} \text{Hess}_{\kappa} \log r^{-2}(X, X) &= \text{Hess}_{\kappa} \log \alpha(X, X) \\ &= \alpha^{-1}\text{Hess}_{\kappa} \alpha(X, X) - \alpha^{-2}(d\alpha(X))^2 \\ &= -\alpha^{-2}(d\alpha(X))^2 + \alpha^{-1}\text{Hess } \alpha(X, X) \\ &\quad + (\alpha^{-2}/2)\|\nabla \alpha\|^2\|X\|^2 - \alpha^{-2}(d\alpha(X))^2 \\ &= -r^4(-2r^{-3}dr(X))^2 \\ &\quad + r^2(-2r^{-3}\text{Hess } r(X, X) + 6r^{-4}dr(X)^2) \\ &\quad + (r^4/2)\|-2r^{-3}\nabla r\|^2\|X\|^2 - r^4(-2r^{-3}dr(X))^2 \\ &= -4r^{-2}dr(X)^2 - 2r^{-1}\text{Hess } r(X, X) + 6r^{-2}dr(X)^2 \\ &\quad + 2r^{-2}\|\nabla r\|^2\|X\|^2 - 4r^{-2}dr(X)^2 \\ &= 2r^{-2}\|X\|^2 - 2r^{-2}dr(X)^2 - 2r^{-1}\text{Hess } r(X, X), \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\|\nabla r\| \equiv 1$ por ser r una función distancia. Se sigue que la función $\log r^{-2}$ es convexa en $\mathcal{U}_{\mathcal{N}}$ en la métrica de condicionamiento si, y sólo si, para todo $x \in \mathcal{M}$ para todo $X \in T_x\mathcal{M}$,

$$\frac{2}{r(x)^2}\|X\|^2 - \frac{2}{r(x)^2}(dr(x)X)^2 - \frac{2}{r(x)}\text{Hess } r(x)(X, X) \geq 0.$$

La prueba concluye multiplicando ambos miembros por $\frac{r(x)^2}{2}$. \square

Observación 6.1.4. Dado que el miembro izquierdo de la desigualdad (6.1) es homogéneo de grado 2 en $\|X\|$, es suficiente comprobar que dicha desigualdad se cumple para todo vector tangente unitario para garantizar la autoconvexidad en $\mathcal{U}_{\mathcal{N}}$.

6.2. Algunos ejemplos

Probablemente el ejemplo no trivial más sencillo de métrica de condicionamiento es el plano punteado. Esto es, el caso en el que $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$ es el plano euclídeo y $\mathcal{N} = \{0\}$ es un único punto –digamos, el origen de coordenadas–. La función $r(x)$ es, simplemente, $x \mapsto \|x\|$, luego la métrica de condicionamiento en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ es

$$g_\kappa(x)(v, w) = \frac{1}{\|x\|^2} \langle v, w \rangle. \quad (6.3)$$

Para métricas de condicionamiento definidas en el espacio euclídeo \mathbb{R}^n para las que conozcamos la función distancia $r(x) = d(x, \mathcal{N})$, podemos aproximar numéricamente un segmento geodésico $\gamma(t)$ en la métrica de condicionamiento uniendo dos puntos p_1 y p_2 de la siguiente manera: consideramos la aproximación

$$\gamma(t) \approx \gamma_A(t) = p_1 + (p_2 - p_1)t + \sum_{k=1}^m A_k \sin(\pi kt), \quad t \in [0, 1],$$

para unos ciertos coeficientes $A = (A_1, \dots, A_m) \in (\mathbb{R}^n)^m$. Calculamos la longitud de γ_A

$$\ell(A) = \int_0^1 \frac{\|\dot{\gamma}_A(t)\|}{r(\gamma_A(t))} dt,$$

que podemos evaluar numéricamente usando alguna regla de cuadratura. A continuación minimizamos la función $\ell : (\mathbb{R}^n)^m \rightarrow \mathbb{R}$ con alguna rutina de optimización numérica y obtenemos así una aproximación de γ . La curva $\gamma_A(t)$ obtenida, sin embargo, no está parametrizada por la longitud de arco, así que no podemos usarla directamente para calcular la hessiana $\text{Hess}_\kappa \log r^{-2}(x)(X, X)$, donde $x = \gamma_A(0)$ y $X = \dot{\gamma}_A(0)$. Antes de hacer esto debemos calcular el parámetro del arco

$$s = s(t) = \int_0^t \frac{\|\dot{\gamma}_A(u)\|}{r(\gamma_A(u))} du.$$

A continuación debe calcularse la aplicación inversa $t = t(s)$ y, finalmente, la curva $\gamma_A(t(s))$ con $s \in [0, \ell(A)]$ está parametrizada por el arco.

Mediante este procedimiento hemos sido capaces de dibujar algunas geodésicas en la métrica de condicionamiento junto con sus correspondientes funciones asociadas $t \mapsto \log r(\gamma(t))^{-2}$. En la Figura 6.1 se muestran algunas

6.2. Algunos ejemplos

geodésicas en la métrica de condicionamiento (6.3), en la que \mathcal{M} es el plano euclídeo y \mathcal{N} es un único punto.

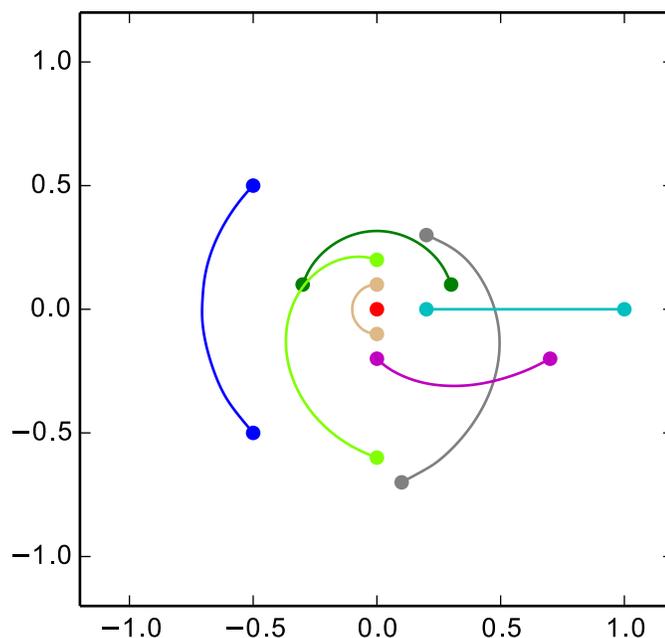


Figura 6.1: Algunas geodésicas en la métrica de condicionamiento cuando \mathcal{M} es el plano euclídeo y \mathcal{N} es el origen de coordenadas –en color rojo–.

En este caso la función distancia $d(x, \{0\}) = \|x\|$ es diferenciable en todo $\mathcal{M} \setminus \mathcal{N} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, luego el Teorema 1.6.3 se aplica y las funciones asociadas a las geodésicas del condicionamiento son siempre convexas.

La variedad riemanniana $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, g_\kappa)$ cumple que todas las circunferencias concéntricas centradas en el origen tienen la misma longitud. Resulta que esta variedad es isométrica a una variedad bien conocida.

Proposición 6.2.1. La variedad $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ con la métrica de condicionamiento es isométrica al cilindro

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$$

con la métrica euclídea inducida.

Demostración. Consideremos la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow C$ dada por

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \log \sqrt{x^2 + y^2} \right).$$

La aplicación f es claramente biyectiva con inversa

$$f^{-1}(x, y, z) = (x e^z, y e^z).$$

Tomemos coordenadas polares $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, y coordenadas cilíndricas $(z, \varphi) \mapsto (\cos \varphi, \sin \varphi, z)$ en C . La expresión local de f en estas coordenadas es $f(r, \theta) = (\log r, \theta)$, luego la matriz jacobiana de f tiene la forma

$$J(f) = \begin{pmatrix} r^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La métrica de condicionamiento g_κ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tiene la expresión coordenada

$$g_\kappa = r^{-2} dr^2 + d\theta^2,$$

luego los vectores tangentes

$$v_1 = r \partial_r, \quad v_2 = \partial_\theta$$

forman una base ortonormal en cada punto. Además,

$$df(v_1) = \partial_z, \quad df(v_2) = \partial_\varphi,$$

que forman una base ortonormal del espacio tangente al cilindro porque la expresión local de la métrica del cilindro es $d\varphi^2 + dz^2$. Esto prueba que f es una isometría. \square

Una consecuencia inmediata del resultado anterior es que la función $x \mapsto d(x, \{0\})^{-2}$ es autoconvexa en el plano punteado. En efecto, como las geodésicas del cilindro son, en las coordenadas dadas, de la forma $\gamma(t) = (a+bt, c+dt)$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, entonces las geodésicas del plano punteado son de la forma $f^{-1} \circ \gamma(t) = (e^{a+bt}, c+dt)$, y

$$\log d(f^{-1} \circ \gamma(t), \{0\})^{-2} = -2 \log e^{a+bt} = -2a - 2bt,$$

—siempre en términos de la expresión local— que es una función afín en t y, por lo tanto, una función convexa.

6.2. Algunos ejemplos

La Figura 6.2 muestra las geodésicas en la métrica de condicionamiento en el plano cuando tomamos $\mathcal{N} = \{y = 0\}$ el eje de abscisas. La métrica g_κ está dada por

$$g_\kappa(x, y)(v, w) = \frac{1}{y^2} \langle v, w \rangle,$$

que es la métrica del modelo de semiplano para el espacio hiperbólico \mathbb{H}^2 .

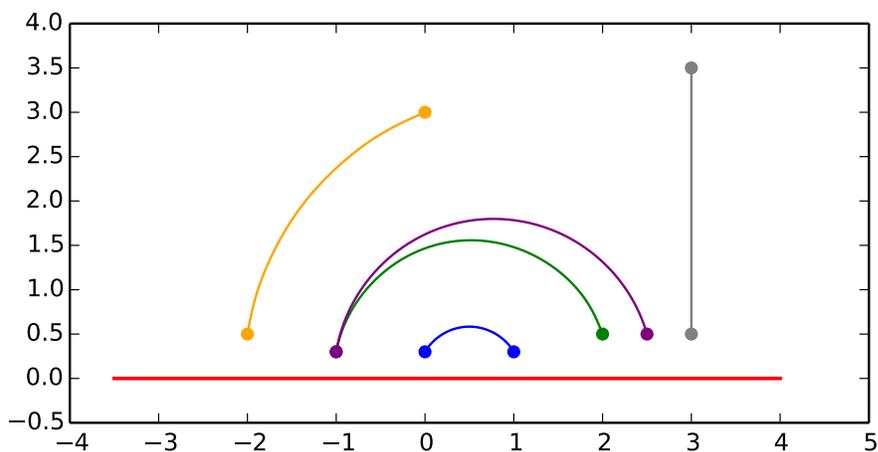


Figura 6.2: Algunas geodésicas en la métrica de condicionamiento en el caso en el que \mathcal{M} es el plano euclídeo y \mathcal{N} es el eje de abscisas $\{y = 0\}$. La métrica resultante es la del modelo de semiplano del espacio hiperbólico.

Las geodésicas, que en este caso son bien conocidas, son segmentos y arcos de circunferencia. De nuevo la función distancia es diferenciable en todo el espacio y, aplicando de nuevo el Teorema 1.6.3, la función $x \mapsto \log d(x, \mathcal{N})^{-2}$ es convexa.

Existen, sin embargo, algunos casos que el Teorema 1.6.3 no cubre completamente. Si, por ejemplo, \mathcal{M} es el espacio euclídeo \mathbb{R}^n y \mathcal{N} es un conjunto finito de puntos, entonces la función distancia es diferenciable en el interior de las celdas de Voronoi de \mathcal{N} , pero no lo es en el borde de las celdas, que

podieran contener $-y$, de hecho, contienen geodésicas del condicionamiento $\gamma(t)$ tales que la función $t \mapsto \log d(\gamma(t), \mathcal{N})^{-2}$ no es convexa. Otro ejemplo interesante de este tipo es el caso en el que $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$ y \mathcal{N} es una hipérbola (ver Figura 6.3).

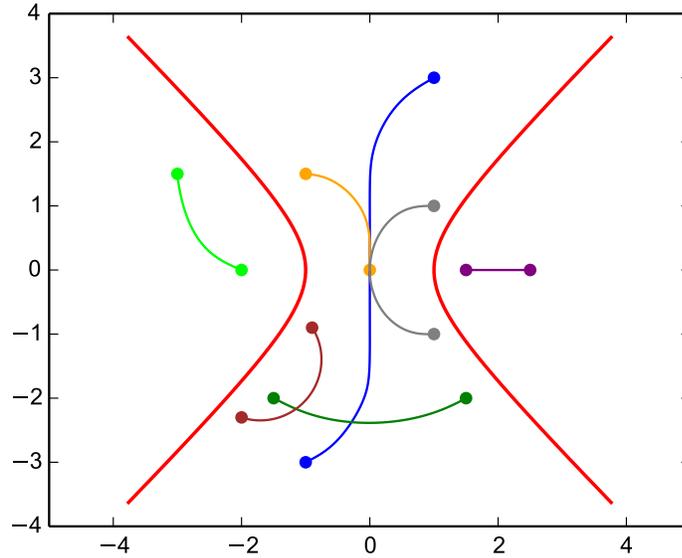


Figura 6.3: Algunas geodésicas en la métrica de condicionamiento cuando $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$ y \mathcal{N} es una hipérbola (en color rojo).

Todas las geodésicas dibujadas aquí, salvo la geodésica azul, cumplen aquello de que “lo peor está en los extremos” y, de hecho, usando el Teorema 1.6.3 se puede probar que cumplen la condición de autoconvexidad. Sin embargo la geodésica azul debe cruzar el “cuello” de la hipérbola para llegar de uno de sus extremos al otro, forzando que lo peor esté, en este caso, en medio de la curva.

La Figura 6.4 muestra las funciones $t \mapsto \log d(\gamma(t), \mathcal{N})^{-2}$ correspondientes a las geodésicas $\gamma(t)$ dibujadas en la Figura 6.3. Como la geodésica azul no cumple que lo peor está en los extremos, su correspondiente función no puede ser convexa.

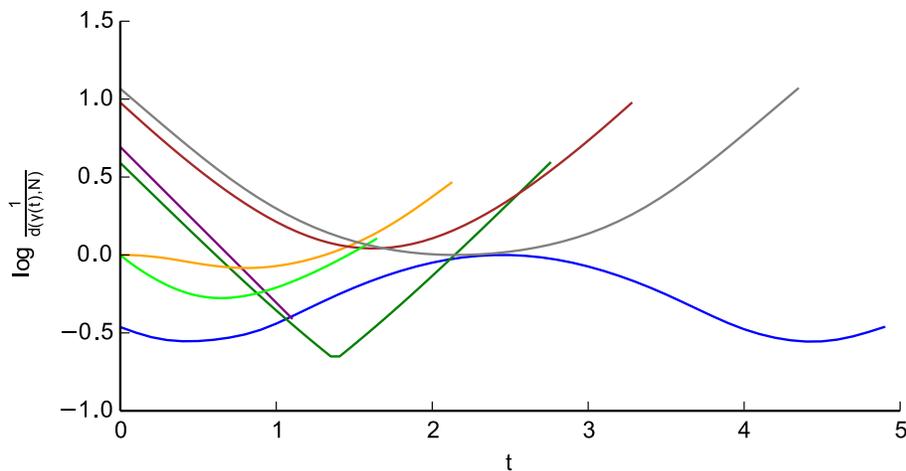


Figura 6.4: Funciones $t \mapsto \log d(\gamma(t), \mathcal{N})^{-2}$ correspondientes, según el color, a las geodésicas dibujadas en la Figura 6.3. Se puede apreciar claramente que la función correspondiente a la geodésica azul no es convexa.

6.3. Autoconvexidad en el caso de curvatura no negativa

En esta sección demostraremos el Teorema 1.7.5. Para ello, demostraremos antes la siguiente proposición.

Proposición 6.3.1. Supongamos que, para cualquier $y \in \mathcal{M}$, la función $x \mapsto d(x, \{y\})^{-2}$ es autoconvexa en $\mathcal{U}_{\{y\}}$. Entonces, para cualquier subvariedad $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ de clase C^2 , la función $d(x, \mathcal{N})^{-2}$ es autoconvexa en $\mathcal{U}_{\mathcal{N}}$.

Demostración. Sea $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ una subvariedad de clase C^2 , y sea $x \in \mathcal{U}_{\mathcal{N}}$. Entonces existe y el punto de \mathcal{N} más cercano a x y la función $r_y(x) = d(x, \{y\}) = d(x, y)$ es diferenciable en un entorno de x . Sea $X \in T_x \mathcal{M}$ un vector tangente unitario. Entonces, con respecto de la métrica original de \mathcal{M} , podemos aplicar la fórmula (6.2) para obtener que

$$\text{Hess}(r_y^2/2)(x)(X, X) = r_y(x)\text{Hess } r_y(x)(X, X) + (dr_y(x)X)^2.$$

Como r_y^{-2} es autoconvexa en $\mathcal{U}_{\{y\}}$ por hipótesis, también lo es en $\mathcal{U}_{\mathcal{N}}$, dado que $y \in \mathcal{N}$. Aplicando la Proposición 6.1.3, tenemos que

$$\text{Hess}(r_y^2/2)(x)(X, X) \leq \|X\|^2 = 1,$$

ya que X es unitario. Esto implica que, para todo $\varepsilon > 0$ y para toda geodésica γ en la métrica original con $\gamma(0) = x$, la función

$$f_{y,\varepsilon}(t) = \frac{r_y(\gamma(t))^2}{2} - \frac{t^2}{2}(1 + \varepsilon)$$

satisface $f''_{y,\varepsilon}(0) \leq -\varepsilon$, luego es cóncava en un entorno de 0. Denotemos ahora $r_{\mathcal{N}}(x) = d(x, \mathcal{N})$, y observemos que $r_{\mathcal{N}}(x) = \inf_{y \in \mathcal{N}} r_y(x)$. Como el ínfimo de una familia de funciones cóncavas es de nuevo una función cóncava, para todo $\varepsilon > 0$ la función

$$f_{\mathcal{N},\varepsilon}(x) = \inf_{y \in \mathcal{M}} f_{y,\varepsilon} = \frac{r_{\mathcal{N}}(\gamma(t))^2}{2} - \frac{t^2}{2}(1 + \varepsilon)$$

es cóncava para toda geodésica γ en la métrica original con $\gamma(0) = x$. En particular, para la geodésica γ con $\gamma(0) = x$ y $\dot{\gamma}(0) = X$, como la función $f_{\mathcal{N},\varepsilon}$ es diferenciable,

$$0 \geq \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} f_{\mathcal{N},\varepsilon}(t) = \text{Hess}(r_{\mathcal{N}}^2/2)(x)(X, X) - (1 + \varepsilon).$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, hemos probado que

$$\|X\|^2 = 1 \geq \text{Hess}(r_{\mathcal{N}}^2/2)(x)(X, X) = r_{\mathcal{N}}(x)\text{Hess } r_{\mathcal{N}}(x)(X, X) + (dr_{\mathcal{N}}(x)X)^2,$$

donde hemos usado otra vez la fórmula (6.2). El resultado se sigue de la Proposición 6.1.3 y la Observación 6.1.4. \square

La Proposición 6.3.1 nos dice, en cierto modo, que el caso en el que \mathcal{N} es un único punto es el peor posible. La demostración del Teorema 1.7.5 consiste en mostrar que este caso es bueno cuando las curvaturas seccionales de \mathcal{M} son no negativas.

Demostración del Teorema 1.7.5. Supongamos que todas las curvaturas seccionales de \mathcal{M} son no negativas. De acuerdo con la Proposición 6.3.1, para demostrar el teorema es suficiente probarlo en el caso particular en el que $\mathcal{N} = \{y\}$ es un único punto. Sea $\mathcal{U} = \mathcal{M} \setminus (\text{Cut}(y) \cup \{y\})$ el mayor abierto en el que la función $x \mapsto r_y(x) = d(x, y)$ es diferenciable, y sea $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathcal{U}$ una geodésica unitaria en la métrica original. Consideremos la función $f(t) = \frac{r_y(\gamma(t))^2}{2} - \frac{t^2}{2}$, y veamos que es cóncava. Como f es continua, es suficiente probar que para todo $t_1, t_2 \in (-\delta, \delta)$,

$$\frac{f(t_1) + f(t_2)}{2} \leq f\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right).$$

6.3. Autoconvexidad en el caso de curvatura no negativa

Sea $t_0 = \frac{t_1+t_2}{2}$, y sea $x = \gamma(t_0)$. Mediante una traslación del parámetro de γ podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $t_1 = -\varepsilon$, $t_2 = \varepsilon$ y $t_0 = 0$ para un cierto $\varepsilon > 0$. Tenemos que probar, entonces, que

$$f(-\varepsilon) + f(\varepsilon) \leq 2f(0) = r_y(x)^2.$$

Sea $z_1 = \gamma(-\varepsilon)$, y sea σ la geodésica minimizante –en la métrica original– que une x con z_1 . Consideremos la bisagra (ver Sección 2.2.1) con vértices y , x , z_1 y ángulo θ_1 , y una bisagra de comparación con vértices \hat{y} , \hat{x} , \hat{z}_1 en el espacio euclídeo \mathbb{R}^n (ver Figura 6.5). Por la ley de los cosenos para el espacio euclídeo,

$$\begin{aligned} d(\hat{y}, \hat{z}_1)^2 &= d(\hat{y}, \hat{x})^2 + d(\hat{x}, \hat{z}_1)^2 - 2d(\hat{y}, \hat{x})d(\hat{x}, \hat{z}_1) \cos \theta_1 \\ &= r_y(x)^2 + \varepsilon^2 - 2r_y(x)\varepsilon \cos \theta_1. \end{aligned}$$

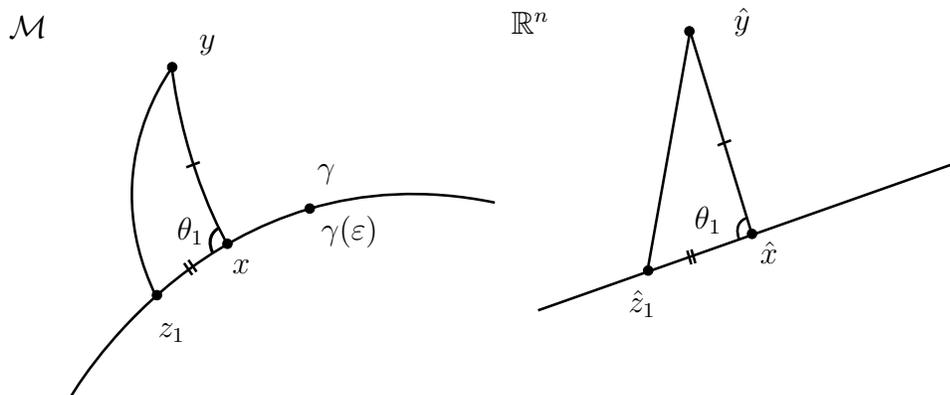


Figura 6.5: Una bisagra en \mathcal{M} junto con una bisagra de comparación en el espacio euclídeo \mathbb{R}^n .

Aplicando el Teorema 2.2.1,

$$\begin{aligned} f(-\varepsilon) &= \frac{1}{2}(d(y, z_1)^2 - \varepsilon^2) \\ &\leq \frac{1}{2}(d(\hat{y}, \hat{z}_1)^2 - \varepsilon^2) \\ &= \frac{1}{2}(r_y(x)^2 + \varepsilon^2 - 2r_y(x)\varepsilon \cos \theta_1 - \varepsilon^2) \\ &= \frac{r_y(x)^2}{2} - r_y(x)\varepsilon \cos \theta_1. \end{aligned}$$

Análogamente, si denotamos $z_2 = \gamma(\varepsilon)$ y θ_2 al ángulo de la bisagra z_2, x, y , tenemos que

$$f(\varepsilon) \leq \frac{r_y(x)^2}{2} - r_y(x)\varepsilon \cos \theta_2.$$

Finalmente,

$$f(-\varepsilon) + f(\varepsilon) \leq r_y(x)^2 - r_y(x)\varepsilon(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) = r_y(x)^2,$$

ya que θ_1 y θ_2 son ángulos suplementarios. Esto prueba que f es cóncava. Como f es diferenciable, se sigue que

$$0 \geq \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} f(t) = \text{Hess}(r_y^2/2)(x)(X, X) - 1,$$

donde $X = \dot{\gamma}(0)$. Como $\|X\| = 1$, aplicando la fórmula (6.2) tenemos que

$$0 \leq \|X\|^2 - r_y(x)\text{Hess } r_y(x)(X, X) - (dr_y(x)X)^2.$$

La Proposición 6.1.3 y la Observación 6.1.4 concluyen la prueba. \square

6.4. Autoconvexidad en el caso de curvatura negativa

Tras ver el Teorema 1.7.5 sobre autoconvexidad en curvatura no negativa, es natural preguntarse qué ocurre cuando la curvatura de la variedad ambiente es negativa. Comenzaremos esta sección con el primer ejemplo de métrica de condicionamiento en el que $d(x, \mathcal{N})^{-2}$ no es autoconvexa en $\mathcal{U}_{\mathcal{N}}$.

Teorema 6.4.1. Sea $(\mathcal{M}, g) = (\mathcal{M}_k^n, g)$ la forma espacial de curvatura seccional k con $k < 0$, y sea $\mathcal{N} = \{y\}$, con $y \in \mathcal{M}$, un punto cualquiera. Denotemos $r(x) = d(x, y)$. Para cualquier $x \in \mathcal{M}$ y para cualquier $X \in T_x\mathcal{M}$ unitario con $g(X, \nabla r(x)) = 0$, se tiene que

$$(dr(x)X)^2 + r(x)\text{Hess } r(x)(X, X) > 1. \quad (6.4)$$

Observación 6.4.2. En el espacio \mathcal{M}_k^n con $k < 0$ la función distancia r es siempre diferenciable como consecuencia del Teorema de Cartan–Hadamard. La desigualdad (6.4) implica entonces, por la Proposición 6.1.3, que la función r^{-2} no es autoconvexa en $\mathcal{U}_{\{y\}}$.

6.4. Autoconvexidad en el caso de curvatura negativa

Demostración del Teorema 6.4.1. Usando el modelo de bola de Poincaré, por inmersión isométrica de \mathcal{M}_k^2 en \mathcal{M}_k^n si $n \geq 2$, es suficiente probar el resultado para el caso $n = 2$. Por simplicidad, sólo en esta demostración, supongamos que $k > 0$ y que la curvatura de \mathcal{M}_k^2 es $-k < 0$. Consideremos el disco abierto de radio $\frac{1}{\sqrt{k}}$ en \mathbb{R}^2 con la métrica dada en coordenadas polares como

$$g(\rho, \theta) = 4 \frac{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2}{k^2 \left(\frac{1}{k} - \rho^2\right)^2}.$$

De acuerdo con [62, Cap. 3.3], esto es un modelo para la forma espacial de dimensión 2 con curvatura seccional constante igual a $-k$. Por homogeneidad, podemos suponer que $\mathcal{N} = \{y\} = \{0\}$ es el origen de coordenadas. Un cálculo directo muestra que la función distancia en este caso es

$$r(\rho, \theta) = \frac{2 \operatorname{arctanh}(\sqrt{k}\rho)}{\sqrt{k}}.$$

Un vector tangente X perpendicular al gradiente $\nabla r(\rho, \theta)$ es de la forma $X = \dot{\theta} \partial_\theta$, ya que r sólo depende de ρ . Dado que

$$dr(\rho, \theta)(\dot{\rho}, \dot{\theta}) = \frac{2\dot{\rho}}{1 - k\rho^2},$$

tenemos que $dr(\rho, \theta)X = 0$. Sea ahora $\gamma(t) = (\rho(t), \theta(t))$ una geodésica en la métrica original con $\gamma(0) = (\rho, \theta)$ y $\dot{\gamma}(0) = X = (0, \dot{\theta})$. Entonces

$$\operatorname{Hess} r(\rho, \theta)(X, X) = \frac{2\ddot{\rho}}{1 - k\rho^2},$$

donde $\ddot{\rho} = \ddot{\rho}(0)$. Para hallar el valor de $\ddot{\rho}$ necesitamos calcular la primera ecuación de las geodésicas. De hecho, como $\dot{\rho} = 0$, sólo necesitamos el símbolo de Christoffel Γ_{22}^1 . Este símbolo es

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{\rho(1 + k\rho^2)}{k\left(\frac{1}{k} - \rho^2\right)}.$$

Por tanto,

$$\ddot{\rho} = -\Gamma_{22}^1 \dot{\theta}^2 = \frac{\rho(1 + k\rho^2)\dot{\theta}^2}{k\left(\frac{1}{k} - \rho^2\right)},$$

así que

$$\text{Hess } r(\rho, \theta)(X, X) = \frac{2\rho(1 + k\rho^2)\dot{\theta}^2}{k^2(\frac{1}{k} - \rho^2)^2}.$$

Como estamos suponiendo que $\|X\| = 1$, se sigue que

$$\frac{\dot{\theta}^2}{k^2(\frac{1}{k} - \rho^2)^2} = \frac{1}{4\rho^2}$$

y

$$\text{Hess } r(\rho, \theta)(X, X) = \frac{1 + k\rho^2}{2\rho}.$$

Por consiguiente, en nuestro caso el miembro izquierdo de la fórmula (6.1) en la Proposición 6.1.3 es

$$\begin{aligned} \|X\|^2 - r(x)\text{Hess } r(x)(X, X) &= 1 - \frac{2 \operatorname{arctanh}(\rho\sqrt{k})}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1 + k\rho^2}{2\rho} \\ &= 1 - \operatorname{arctanh}(\rho\sqrt{k}) \cdot \frac{1 + k\rho^2}{\rho\sqrt{k}}. \end{aligned}$$

Observemos que $\operatorname{arctanh}(0) = 0$ y

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{1 - x^2} > 1 \quad \text{si } 0 < x < 1.$$

Como $0 < \rho\sqrt{k} < 1$, tenemos que $\operatorname{arctanh}(\rho\sqrt{k}) > \rho\sqrt{k}$, y como $k > 0$,

$$\|X\|^2 - r(x)\text{Hess } r(x)(X, X) < 1 - (1 + k\rho^2) = -k\rho^2 < 0,$$

de nuevo porque $k > 0$. □

El Teorema 6.4.1 nos servirá para demostrar el Teorema 1.7.6. Antes de eso necesitaremos demostrar un resultado que es consecuencia del Teorema de comparación de Rauch (ver Sección 2.2.2). A pesar de que la siguiente proposición –con distintas formulaciones– parece ser conocida, no hemos encontrado una buena referencia en la literatura, así que incluimos su demostración.

Recordemos que una *bola fuertemente convexa* U es una bola geodésica tal que todo par de puntos $y, z \in \bar{U}$ pueden ser conectados por una única geodésica minimizante cuyo interior está enteramente contenido en U (ver [33, Cap. 3, Proposición 4.2]).

Proposición 6.4.3. Sea \mathcal{M} una variedad riemanniana de dimensión n con curvaturas seccionales superiormente acotadas por una constante $k \leq 0$. Consideremos la siguiente construcción (ver Figura 6.6):

Sea $x \in \mathcal{M}$ un punto cualquiera, y sea U una bola fuertemente convexa que contiene a x . Sean $y, z \in U$ dos puntos distintos entre sí y distintos de x . Podemos construir una bisagra de comparación con vértices $\hat{y}, \hat{x}, \hat{z}$ en la forma espacial \mathcal{M}_k^n para la bisagra con vértices y, x, z formando un ángulo θ en x de la siguiente manera: sea $\hat{x} \in \mathcal{M}_k^n$ un punto cualquiera, y sea $\varphi : T_x\mathcal{M} \rightarrow T_{\hat{x}}\mathcal{M}_k^n$ una isometría lineal. Sea $\sigma : [0, 1] \rightarrow U$ la geodésica minimizante –no necesariamente con velocidad 1– que une y con z . Sean $v(s) = \exp_x^{-1}\sigma(s)$, $\hat{v}(s) = \varphi v(s)$ y $\hat{\sigma}(s) = \exp_{\hat{x}}\hat{v}(s)$ –que cae enteramente dentro de un entorno normal de \hat{x} porque $k \leq 0$ –. Entonces ponemos $\hat{y} = \hat{\sigma}(0)$ y $\hat{z} = \hat{\sigma}(1)$.

La construcción anterior satisface

$$d(y, z) \geq d(\hat{y}, \hat{z}).$$

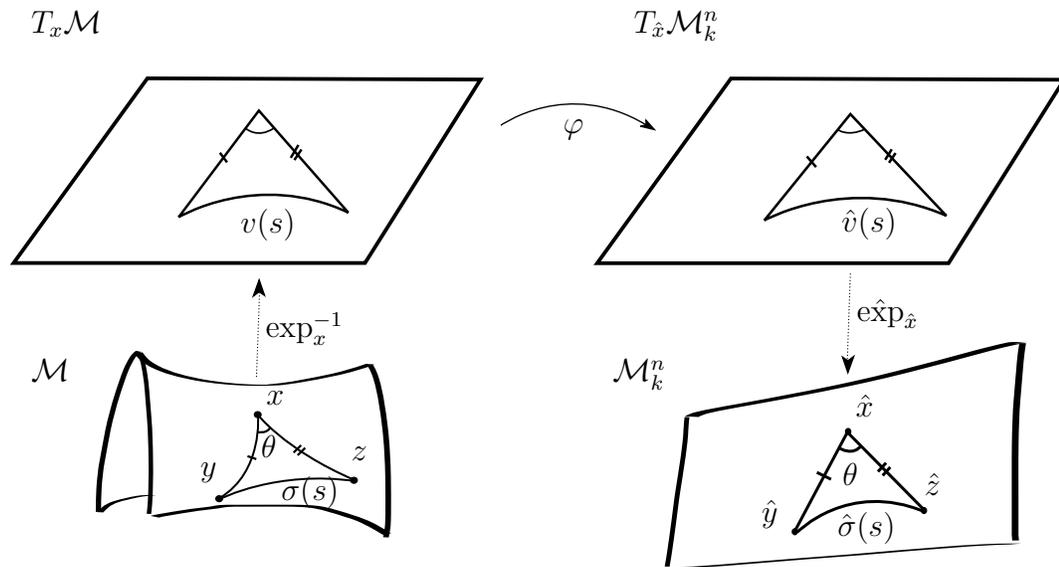


Figura 6.6: Una bisagra en \mathcal{M} junto con la construcción descrita en la Proposición 6.4.3 para obtener una bisagra de comparación en \mathcal{M}_k^n .

Demostración. Sean γ y $\hat{\gamma}$ las geodésicas

$$\gamma(t) = \exp_x tv(0), \quad \hat{\gamma}(t) = \exp_{\hat{x}} t\hat{v}(0).$$

Entonces γ y $\hat{\gamma}$ son geodésicas minimizantes uniendo x e y , y \hat{x} e \hat{y} , respectivamente, y tienen la misma velocidad inicial porque φ es una isometría. Sabemos, por el Lema 2.1.23, que \mathcal{M} no tiene puntos conjugados, luego γ y $\hat{\gamma}$ están en las hipótesis del Teorema 2.2.2.

Consideremos las siguientes variaciones por geodésicas de γ y $\hat{\gamma}$:

$$\Gamma(s, t) = \exp_x tv(s), \quad \hat{\Gamma}(s, t) = \exp_{\hat{x}} t\hat{v}(s),$$

y sean J y \hat{J} los campos de variaciones

$$J(t) = \partial_s \Gamma(0, t), \quad \hat{J}(t) = \partial_s \hat{\Gamma}(0, t),$$

de Γ y $\hat{\Gamma}$, respectivamente, que son campos de Jacobi. Veamos que J y \hat{J} también cumplen las hipótesis del Teorema 2.2.2. Observemos, en primer lugar, que $J(0) = \hat{J}(0) = 0$, ya que $\Gamma(s, 0) \equiv x$ y $\hat{\Gamma}(s, 0) \equiv \hat{x}$. Tomemos coordenadas normales (x^1, \dots, x^n) alrededor de x . En estas coordenadas, $\Gamma(s, t) = \exp_x tv(s)$ tiene la expresión

$$\Gamma(s, t) = tv(s) = (tv^1(s), \dots, tv^n(s)).$$

Calculemos $D_t J(0) = D_t \partial_s \Gamma(0, 0) = D_s \partial_t \Gamma(0, 0)$ (ver [54, Lema 6.3]):

$$D_s \partial_t \Gamma(s, t) = D_s (v^i \partial_i) = \dot{v}^i \partial_i + v^i D_s \partial_i = \dot{v}^i \partial_i + t \dot{v}^j v^i \nabla_{\partial_j} \partial_i.$$

Si evaluamos la expresión anterior en el punto $(s, t) = (0, 0)$, obtenemos que

$$D_t J(0) = D_t \partial_s \Gamma(0, 0) = D_s \partial_t \Gamma(0, 0) = \dot{v}(0).$$

Análogamente, tomando coordenadas normales alrededor de \hat{x} , podemos ver que

$$\hat{D}_t \hat{J}(0) = \dot{\hat{v}}(0).$$

Como

$$\varphi \dot{v}(0) = \varphi \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} v(s) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \varphi v(s) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \hat{v}(s) = \dot{\hat{v}}(0),$$

se sigue que

$$\|\hat{D}_t \hat{J}(0)\| = \|\dot{\hat{v}}(0)\| = \|\varphi \dot{v}(0)\| = \|\dot{v}(0)\| = \|D_t J(0)\|.$$

6.4. Autoconvexidad en el caso de curvatura negativa

Finalmente, observamos que $\dot{\gamma}(0) = v(0)$ y $\dot{\hat{\gamma}}(0) = \hat{v}(0)$. Por lo tanto,

$$\langle \hat{D}_t \hat{J}(0), \dot{\hat{\gamma}}(0) \rangle = \langle \hat{v}(0), \hat{v}(0) \rangle = \langle \varphi \dot{v}(0), \varphi v(0) \rangle = \langle \dot{v}(0), v(0) \rangle = \langle D_t J(0), \dot{\gamma}(0) \rangle.$$

Hemos probado así que J y \hat{J} están en las hipótesis del Teorema 2.2.2. De este modo,

$$\|\dot{\hat{\sigma}}(0)\| = \|\partial_s|_{s=0} \exp_{\hat{x}} \hat{v}(s)\| = \|\hat{J}(1)\| \leq \|J(1)\| = \|\partial_s|_{s=0} \exp_x v(s)\| = \|\dot{\sigma}(0)\|.$$

La desigualdad anterior no sólo se cumple para $s = 0$, sino que se cumple también para todo $s \in [0, 1)$. En efecto, sea $s_0 \in [0, 1)$ y consideremos la siguiente curva con traza contenida en la traza de σ :

$$\sigma_{s_0}(s) = \sigma(s(1 - s_0) + s_0), \quad s \in [0, 1].$$

Sea $y_{s_0} = \sigma_{s_0}(0) = \sigma(s_0)$. Entonces σ_{s_0} es el segmento geodésico minimizante que une y_{s_0} con z y $\|\dot{\sigma}_{s_0}(0)\| = (1 - s_0)\|\dot{\sigma}(s_0)\|$. Sean $v_{s_0}(s) = \exp_x^{-1} \sigma_{s_0}(s)$, $\hat{v}_{s_0}(s) = \varphi v_{s_0}(s)$ y $\hat{\sigma}_{s_0}(s) = \exp_{\hat{x}} \hat{v}_{s_0}(s)$. Aplicando el mismo argumento que para $s_0 = 0$, tenemos que

$$\|\dot{\hat{\sigma}}_{s_0}(0)\| \leq \|\dot{\sigma}_{s_0}(0)\|.$$

Pero también $\|\dot{\hat{\sigma}}_{s_0}(0)\| = (1 - s_0)\|\dot{\hat{\sigma}}(s_0)\|$ y entonces

$$(1 - s_0)\|\dot{\hat{\sigma}}(s_0)\| \leq (1 - s_0)\|\dot{\sigma}(s_0)\|.$$

Consecuentemente, para todo $s \in [0, 1)$, $\|\dot{\hat{\sigma}}(s)\| \leq \|\dot{\sigma}(s)\|$, lo cual implica que

$$d(\hat{y}, \hat{z}) \leq \ell(\hat{\sigma}) \leq \ell(\sigma) = d(y, z),$$

ya que σ es una geodésica minimizante. □

Podemos demostrar ya el Teorema 1.7.6.

Demostración del Teorema 1.7.6. Supongamos que todas las curvaturas seccionales en el punto $x \in \mathcal{M}$ son estrictamente negativas. Por continuidad, existe un entorno abierto U de x en el que todas las curvaturas seccionales están superiormente acotadas por una constante $k < 0$ en cada punto de U . Restringiendo U si fuera necesario, podemos suponer que es una bola fuertemente convexa centrada en x .

Sean X e Y dos vectores ortonormales en $T_x\mathcal{M}$. Sea $\delta > 0$ suficientemente pequeño como para que $y = \exp_x \delta Y \in U$, y pongamos $\mathcal{N} = \{y\}$. Consideremos la geodésica $\gamma(t) = \exp_x tX$ con $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, siendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño como para que $\gamma \subset U$. Sea $\hat{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_k^n$ la forma espacial de curvatura constante k , sea $\hat{x} \in \mathcal{M}_k^n$ un punto cualquiera y sea $\varphi : T_x\mathcal{M} \rightarrow T_{\hat{x}}\hat{\mathcal{M}}$ una isometría lineal. Pongamos $\hat{y} = \exp_{\hat{x}} \delta \varphi Y$, y sea $\hat{\gamma}$ la geodésica en $\hat{\mathcal{M}}$ dada por $\hat{\gamma}(t) = \exp_{\hat{x}} t \varphi X$.

Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, la bisagra con vértices $\hat{y}, \hat{x}, \hat{\gamma}(t)$ es la bisagra de comparación en $\hat{\mathcal{M}}$ inducida por φ , descrita en en la Proposición 6.4.3, para la bisagra en \mathcal{M} con vértices $y, x, \gamma(t)$ que forma un ángulo recto en x . Si denotamos $r_y(z) = d(z, y)$ y $\hat{r}_{\hat{y}}(\hat{z}) = d(\hat{z}, \hat{y})$, entonces aplicando la Proposición 6.4.3 obtenemos que

$$r_y(\gamma(t)) \geq \hat{r}_{\hat{y}}(\hat{\gamma}(t)), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon). \quad (6.5)$$

Por construcción tenemos que

$$\langle \nabla r_y(x), X \rangle = \langle \varphi \nabla r_y(x), \varphi X \rangle = \langle \hat{\nabla} \hat{r}_{\hat{y}}(\hat{x}), \varphi X \rangle = 0.$$

Es decir, que X y φX son perpendiculares a su correspondiente gradiente, ya que X e Y son ortogonales. Usando que

$$r_y(\gamma(0)) = r_y(x) = \hat{r}_{\hat{y}}(\hat{x}) = \hat{r}_{\hat{y}}(\hat{\gamma}(0)),$$

junto con la desigualdad (6.5), obtenemos que

$$\begin{aligned} \text{Hess } r_y(x)(X, X) &= \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} r_y(\gamma(t)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r_y(\gamma(-t)) - 2r_y(\gamma(0)) + r_y(\gamma(t))}{t^2} \\ &\geq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\hat{r}_{\hat{y}}(\hat{\gamma}(-t)) - 2\hat{r}_{\hat{y}}(\hat{\gamma}(0)) + \hat{r}_{\hat{y}}(\hat{\gamma}(t))}{t^2} \\ &= \text{Hess } \hat{r}_{\hat{y}}(\hat{x})(\varphi X, \varphi X). \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando el Teorema 6.4.1, la Proposición 6.1.3 y la ortogonalidad de X y φX con sus respectivos gradientes,

$$\begin{aligned} \text{Hess } (r_y^2/2)(x)(X, X) &= r_y(x) \text{Hess } r_y(x)(X, X) \\ &\geq \hat{r}_{\hat{y}}(\hat{x}) \text{Hess } \hat{r}_{\hat{y}}(\hat{x})(\varphi X, \varphi X) \\ &= \text{Hess } (\hat{r}_{\hat{y}}^2)(\hat{x})(\varphi X, \varphi X) > 1. \end{aligned}$$

La demostración concluye aplicando la Proposición 6.1.3. \square

Capítulo 7

Bibliografía

- [1] R. Abraham, J. E. Marsden, and T. Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag New York, 1988.
- [2] D. Armentano, *Complexity of path-following methods for the eigenvalue problem*, Foundations of Computational Mathematics **14** (2014), no. 2, 185–236.
- [3] D. Armentano, C. Beltrán, P. Bürgisser, F. Cucker, and M. Shub, *Condition length and complexity for the solution of polynomial systems*, Foundations of Computational Mathematics **16** (2016), no. 6, 1401–1422.
- [4] ———, *A stable, polynomial-time algorithm for the eigenpair problem*, Journal of the European Mathematical Society (Por aparecer).
- [5] T. Aubin, *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry*, Springer Monographs in Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, 1998.
- [6] C. Beltrán, *Harmonic properties of the logarithmic potential and the computability of elliptic Fekete points*, Constr. Approx. **37** (2013), no. 1, 135–165.
- [7] C. Beltrán, N. Corral, and J. G. Criado del Rey, *Discrete and continuous Green energy on compact manifolds*, arXiv:1702.00864.
- [8] C. Beltrán, J. P. Dedieu, G. Malajovich, and M. Shub, *Convexity properties of the condition number*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **31** (2009), no. 3, 1491–1506.

- [9] ———, *Convexity properties of the condition number II.*, SIAM J. Matrix Analysis Applications **33** (2012), no. 3, 905–939.
- [10] C. Beltrán and L. M. Pardo, *On Smale’s 17th problem: A probabilistic positive solution*, Foundations of Computational Mathematics **8** (2008), no. 1, 1–43.
- [11] ———, *Smale’s 17th problem: average polynomial time to compute affine and projective solutions*, J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), no. 2, 363–385.
- [12] ———, *Fast linear homotopy to find approximate zeros of polynomial systems*, Foundations of Computational Mathematics **11** (2011), no. 1, 95–129.
- [13] C. Beltrán and M. Shub, *Complexity of Bezout’s theorem. VII. Distance estimates in the condition metric*, Found. Comput. Math. **9** (2009), no. 2, 179–195.
- [14] A. L. Besse, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 2. Folge, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1978.
- [15] L. Blum, F. Cucker, M. Shub, and S. Smale, *Complexity and Real Computation*, Springer, 1997.
- [16] V. I. Bogachev, *Measure theory*, no. v. 1, Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [17] K. Böröczky, *The problem of tammes for $n = 11$* , Studia. Sci. Math. Hungar. **18** (1983), 165–171.
- [18] S. V. Borodachov, D. P. Hardin, and E. B. Saff, *Minimal discrete energy on the sphere and other manifolds*, Springer-Verlag, to appear.
- [19] J. S. Brauchart, *Optimal logarithmic energy points on the unit sphere*, Mathematics of Computation **77** (2008), no. 263, 1599–1613.
- [20] J. S. Brauchart, P. Dragnev, and E. B. Saff, *Riesz external field problems on the hypersphere and optimal point separation*, Potential Analysis **41** (2014), no. 3, 647–678.

-
- [21] J. S. Brauchart, P. D. Dragnev, E. B. Saff, and R. S. Womersley, *Logarithmic and Riesz equilibrium for multiple sources on the sphere — the exceptional case*, arXiv:1706.09346 (2017).
- [22] P. Bürgisser and F. Cucker, *On a problem posed by Steve Smale*, *Annals of Mathematics* **174** (2011), no. 3, 1785–1836.
- [23] ———, *Condition: The geometry of numerical algorithms*, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [24] G. Choquet, *Épistémologie du transfini*, *Cahiers du Séminaire d’Histoire des Mathématiques*, 1, Inst. Henri Poincaré, Paris, 1980, pp. 1–17.
- [25] J. G. Criado del Rey, *Self-convexity and curvature*, *Journal of Complexity* **35** (2016), 1 – 15.
- [26] B. E. J. Dahlberg, *On the distribution of Fekete points*, *Duke Math. J.* **45** (1978), no. 3, 537–542.
- [27] S. B. Damelin and P. J. Grabner, *Energy functionals, numerical integration and asymptotic equidistribution on the sphere*, *Journal of Complexity* **19** (2003), no. 3, 231 – 246, Oberwolfach Special Issue.
- [28] L. Danzer, *Finite point-sets on S^2 with minimum distance as large as possible*, *Discrete Math.* **60** (1986), 3–66.
- [29] G. de Rham, *Differentiable manifolds: forms, currents, harmonic forms*, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Springer-Verlag, 1984.
- [30] J. P. Dedieu, *Condition operators, condition numbers, and condition number theorem for the generalized eigenvalue problem*, *Linear Algebra and its Applications* **263** (1997), 1 – 24.
- [31] J. W. Demmel, *On condition numbers and the distance to the nearest ill-posed problem*, *Numer. Math.* **51** (1987), no. 3, 251–289.
- [32] D. M. Deturck and J. L. Kazdan, *Some regularity theorems in Riemannian geometry*, *Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure* **14** (1981), no. 3, 249–260.

- [33] M. P. do Carmo, *Riemannian geometry*, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston, 2013.
- [34] P. D. Dragnev, *On the separation of logarithmic points on the sphere*, Approximation theory, X (St. Louis, MO, 2001), Innov. Appl. Math., Vanderbilt Univ. Press, Nashville, TN, 2002, pp. 137–144.
- [35] P. D. Dragnev and E. B. Saff, *Riesz spherical potentials with external fields and minimal energy points separation*, Potential Analysis **26** (2007), no. 2, 139–162.
- [36] L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Mathematics, Taylor & Francis, 1991.
- [37] L. Fejes Tóth, *Über die abschätzung des k kürzesten abstandes zweier punkte eines auf einer kugelfläche liegender punktsystems*, Jber. Deut. Math. Verein. **53** (1943), 66–68.
- [38] M. Fekete, *Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten*, Math. Z. **17** (1923), no. 1, 228–249.
- [39] B. Fuglede, *On the theory of potentials in locally compact spaces*, Acta Math. **103** (1960), 139–215.
- [40] S. J. Gardiner and T. Sjödin, *Partial balayage and the exterior inverse problem of potential theory*, Potential theory and stochastics in Albac, vol. 11 of Theta Ser. Adv. Math., Theta, Bucharest (2009), 111–123.
- [41] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, eighth ed., Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2015, Traducido del ruso, Traducción editada con un prefacio de Daniel Zwillinger y Victor Moll, Revisión de la séptima edición.
- [42] B. Gustafsson and J. Roos, *Partial balayage on Riemannian manifolds*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (2017), doi.org/10.1016/j.matpur.2017.07.013.
- [43] D. P. Hardin and E. B. Saff, *Minimal Riesz energy point configurations for rectifiable d -dimensional manifolds*, Advances in Mathematics **193** (2005), no. 1, 174 – 204.

-
- [44] A. Hatcher, *Vector bundles and k-theory*, 2003, <http://www.math.cornell.edu/~hatcher>.
- [45] H. Hedenmalm and S. Shimorin, *Hele Shaw flow on hyperbolic surfaces*, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **81** (2002), no. 3, 187 – 222.
- [46] G. Kothe-Heinrich, *Pollen of *Halothamnus glaucus* ssp. *tianschanicus** — *Wikipedia, the free encyclopedia*, 1991, [Online; accedido el 6 de mayo de 2018].
- [47] P. Kreyssig, *An Introduction to Harmonic Manifolds and the Lichnerowicz Conjecture*, arXiv:1007.0477 (2010).
- [48] A. B. J. Kuijlaars and E. B. Saff, *Asymptotics for minimal discrete energy on the sphere*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), no. 2, 523–538.
- [49] J. LaFontaine, M. Katz, M. Gromov, S.M. Bates, P. Pansu, P. Pansu, and S. Semmes, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston, 2007.
- [50] P. Lairez, *A deterministic algorithm to compute approximate roots of polynomial systems in polynomial average time*, *Found. Comput. Math.* **17** (2017), no. 5, 1265–1292.
- [51] ———, *Rigid continuation paths I. Quasilinear average complexity for solving polynomial systems*, arXiv:1711.03420 (2017).
- [52] N. S. Landkof, *Foundations of modern potential theory*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972, Traducido del ruso por A. P. Doohovskoy, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 180.
- [53] R. Larsen, *Functional analysis: an introduction*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1973, Pure and Applied Mathematics, No. 15.
- [54] J. M. Lee, *Riemannian manifolds: An introduction to curvature*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 1997.
- [55] ———, *Introduction to smooth manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 2013.

- [56] J. Marzo and J. Ortega-Cerdà, *Equidistribution of Fekete points on the sphere*, Constr. Approx. **32** (2010), no. 3, 513–521.
- [57] H. N. Mhaskar and E. B. Saff, *Where does the sup norm of a weighted polynomial live?*, Constructive Approximation **1** (1985), no. 1, 71–91.
- [58] O. R. Musin and A. S. Tarasov, *The strong thirteen spheres problem*, Discrete Comput. Geom. **48** (2012), no. 1, 128–141.
- [59] _____, *The Tammes problem for $N = 14$* , Exp. Math. **24** (2015), no. 4, 460–468.
- [60] M. Ohtsuka, *On potentials in locally compact spaces*, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I Math. **25** (1961), 135–352.
- [61] B. O’Neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Pure and Applied Mathematics, Elsevier Science, 1983.
- [62] P. Petersen, *Riemannian geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2006.
- [63] R. Ponge, *The logarithmic singularities of the Green functions of the conformal powers of the Laplacian*, Geometric and spectral analysis, Contemp. Math., vol. 630, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014, pp. 247–273.
- [64] C. C. Pugh, *Real mathematical analysis*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer New York, 2003.
- [65] E. A. Rakhmanov, E. B. Saff, and Y. M. Zhou, *Minimal discrete energy on the sphere*, Math. Res. Lett. **1** (1994), no. 6, 647–662.
- [66] _____, *Electrons on the sphere*, Computational methods and function theory 1994 (Penang), Ser. Approx. Decompos., vol. 5, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995, pp. 293–309.
- [67] R. M. Robinson, *Arrangement of 24 circles on a sphere*, Math. Ann. **144** (1961), 17–48.
- [68] H. S. Ruse, *On the elementary solution of Laplace’s equation*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society **2** (1931), no. 3, 135–139.

-
- [69] E. B. Saff and V. Totik, *Logarithmic potentials with external fields*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [70] K. Schütte and B. L. van der Waerden, *Auf welcher Kugel haben 5, 6, 7, 8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand Eins Platz?*, Math. Ann. **123** (1951), 96–124.
- [71] M. Shub, *Complexity of Bezout’s theorem. VI. Geodesics in the condition (number) metric*, Found. Comput. Math. **9** (2009), no. 2, 171–178.
- [72] M. Shub and S. Smale, *Complexity of Bezout’s theorem. III. Condition number and packing*, J. Complexity **9** (1993), no. 1, 4–14, Festschrift for Joseph F. Traub, Part I.
- [73] M. Shub and S. Smale, *Complexity of Bezout’s theorem V: polynomial time*, Theoretical Computer Science **133** (1994), no. 1, 141 – 164.
- [74] S. Smale, *Mathematical problems for the next century*, Math. Intelligencer **20** (1998), no. 2, 7–15.
- [75] S. Steinerberger, *Localized quantitative criteria for equidistribution*, Acta Arithmetica **180** (2017), 183–199.
- [76] P. M. L. Tammes, *On the origin of number and arrangement of the places of exit on the surface of pollen-grains*, Recueil des travaux botaniques neerlandais 27, Diss. Groningen., 1930.
- [77] J. J. Thomsom, *On the structure of the atom*, Phil. Mag. **7** (1904), no. 6, 237–265.
- [78] C. Udriste, *Convex functions and optimization methods on Riemannian manifolds*, Mathematics and Its Applications, Springer Netherlands, 2010.