UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Departamento de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación

Problemas de Control Óptimo Gobernados por Ecuaciones Semilineales con Restricciones de Tipo Integral sobre el Gradiente del Estado

Memoria de Tesis Doctoral

Presentada por:

Mariano Mateos Alberdi

Dirigida por:

Eduardo Casas Rentería

Santander, 2000

Agradecimientos

Esta tesis ha sido llevada a cabo bajo la dirección del Profesor Eduardo Casas Rentería del Departamento de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación de la Universidad de Cantabria, quien ha sido el verdadero impulsor de la misma y a quien se deben la mayor parte de las ideas aquí desarrolladas. Por todo ello y por mucho más, gracias Eduardo.

También quiero hacer una mención especial al Profesor Luis Alberto Fernández del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Cantabria, que me ha ayudado especialmente dedicando muchas horas a la lectura y corrección de los borradores que le he ido entregando, aportando ideas y siempre de manera desinteresada y positiva. Fruto de esta colaboración, surgen varios de los resultados referentes al problema elíptico, que aparecen en el artículo de Casas, Fernández y el autor [31].

Debo mencionar también al Profesor Jean-Pierre Raymond de la Université de Toulouse, Paul-Sabatier (Francia). Los resultados referentes a ecuaciones parabólicas han sido en su mayor parte conseguidos con su colaboración, durante las estancias del autor en Mayo de 1997 y Octubre de 1998 en Francia, y la estancia del Profesor Raymond en Febrero de 1999 en la Universidad de Cantabria. Estos resultados van a ser publicados en [34].

Debo también mi agradecimiento al Profesor Fredi Tröltzsch, de la Technische Universität Chemnitz-Zwickau (Alemania) cuyos resultados sobre condiciones de optimalidad son profusamente utilizados en el presente trabajo. Además debo agradecer las atenciones que tuvo conmigo durante mi estancia en Chemnitz en Noviembre de 1997, en la que comenzamos una colaboración sobre el Principio de Independencia de la Malla para la resolución efectiva de problemas de control mediante una sucesión de programas cuadráticos. El artículo, a medio escribir, no ha podido ser introducido en la parte final de esta tesis, como habría sido natural, por problemas de tiempo y espacio.

Esta tesis fue parcialmente escrita en el Departamento de Matemática Aplicada y

Ciencias de la Computación de la Universidad de Cantabria, mientras el autor disfrutaba de una beca FPI (ref. FP95 11421750, convocatoria: 1995 B.O.E. 1/12/95) de la Dirección General de Enseñanza Superior e Investigación Científica. Quiero agradecer a todos los miembros de dicho departamento el trato amable y amistoso que tuvieron conmigo durante los dos años y medio de mi estancia en Santander.

También he trabajado en esta tesis en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Oviedo, a cuyos miembros también quiero recordar en estas líneas.

Por último, dar las gracias a mi familia por el apoyo que me han dado durante estos años y todo el esfuerzo hecho en mi educación a lo largo de mi vida.

Y sobre todo, quisiera dedicarle esta tesis, fruto de más de cuatro años de trabajo ...

... a Cristina

Índice General

Capítulo 1

Introducción

Esta memoria está dedicada al estudio de problemas de control óptimo gobernados por ecuaciones en derivadas parciales. En un problema de control óptimo hay que minimizar un funcional, que depende de dos variables. La variable de control, que denotaremos por u y la variable de estado, que denotaremos por y. El estado y el control vienen relacionados por alguna ecuación funcional, donde el control u hace las veces de algún dato de la ecuación y el estado y, que llamaremos *estado asociado*, es la solución de la misma. En los problemas aquí tratados, para cada control u hay un único estado asociado, que denotaremos por y_u. Normalmente escogeremos el control entre una familia de controles *admisibles* $\mathbb{K}$, y tendremos ciertas restricciones sobre el estado $y \in C$.

Uno de los primeros ejemplos que surgen es el de un problema de control gobernado por una ecuación diferencial ordinaria. Sean f y g funciones, $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^m$ no vacío y a un estado inicial dado. Podemos formular el problema de control como:

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{Encontrar } y \in W^{1,\infty}(0,T;\mathbb{R}^n), \quad u \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^m) \\[2ex]
\text{que minimicen } J(y,u) = \displaystyle\int_0^T g(t, y(t), u(t))\, dt, \\[2ex]
\text{donde } u(t) \in \mathbb{K} \text{ para c.t.p. } t \in [0,T], \\[2ex]
y(0) = a, \\[2ex]
\dot{y}(t) = f(t, y(t), u(t)) \text{ para c.t.p. } t \in [0,T],
\end{array}\right.$$

La teoría de control óptimo se inició con el estudio de problemas gobernados por ecuaciones diferenciales ordinarias, y aún hoy este tipo de problemas sigue siendo objeto de estudio. Referencias básicas sobre este tema son los libros de Fleming [57], Pontryagin [73] o Cesari [40]. El rango de aplicaciones de los problemas de control es muy amplio. Véase por ejemplo [58].

Nosotros nos dedicaremos a problemas de control gobernados por ecuaciones en derivadas parciales. El punto de referencia para el estudio de este tipo de problemas es el libro de J. L. Lions [66]. Tal vez uno de los ejemplos más simples de problemas de control gobernado por ecuaciones en derivadas parciales es el llamado problema lineal-cuadrático con restricciones puntuales sobre el control y sin restricciones sobre el estado

$$\begin{cases} \text{Encontrar } y \in L^2(\Omega), u \in L^\infty(\Omega) \\ \text{que minimicen } J(y,u) = \displaystyle\int_\Omega |y(x) - y_d(x)|^2\,dx + \frac{k}{2}\int_\Omega u(x)^2\,dx \\ \text{donde } a \leq u(x) \leq b \text{ para c.t.p. } x \in \Omega, \\ -\Delta y = u \text{ en } \Omega, \\ y = 0 \text{ sobre } \Gamma. \end{cases}$$

El problema se complica cuando añadimos restricciones sobre el estado. Han sido estudiados problemas de control gobernados por ecuaciones en derivadas parciales para distintos tipos de restricciones sobre el estado. Por ejemplo, restricciones de tipo integral, tanto de igualdad como de desigualdad

$$\int_\Omega |y(x)|^p\,dx \leq \delta, \quad \int_\Omega |y(x)|^p = \delta;$$

restricciones de tipo puntual en un número finito de puntos

$$y(x_j) = \delta_j \quad \text{para } j = 1, \ldots, n;$$

restricciones puntuales en un número infinito de puntos

$$y(x) \leq \delta \text{ para todo } x \in \bar{\Omega}.$$

El Capítulo 9 se dedica al estudio del análisis numérico de un problema con este tipo de restricciones.

Otro tipo de restricciones son restricciones integrales sobre el gradiente del estado

$$\int_\Omega |\nabla y(x)|^p\,dx \leq \delta.$$

Esta memoria se dedica principalmente a problemas con este tipo de restricciones. Hay pocos resultados disponibles para problemas con restricciones sobre el gradiente del estado. Casas y Fernández [29] tratan un problema con restricciones sobre el gradiente del estado en el cual, debido a las hipótesis hechas, se puede asegurar que la solución es C^1, simplificando de manera importante las dificultades que aparecen. Fattorini [53, 54] trata problemas de control formulados en un marco abstracto. La ecuación de estado adjunto resultante no es una ecuación en derivadas parciales, y debe entenderse de manera formal.

Otra de las dificultades que se le pueden añadir a este tipo de problemas es considerar que la ecuación que relaciona al estado y al control es no lineal. Problemas de control gobernados por ecuaciones cuasilineales han sido estudiados por Fernández [56], Casas y Fernández [24, 23, 25, 28, 26, 27, 30], Casas, Fernández y Yong [32], Hu y Yong [60] o Casas y Yong [38]. En esta memoria se estudian problemas de control gobernados por ecuaciones semilineales, tanto elípticas como parabólicas. También existe literatura sobre este particular. Citemos a Lions [67], Bonnans [7], Bonnans y Casas [8, 9, 11], Casas [19, 20, 21, 22], Casas y Fernández [29], Fattorini [55, 52], Yong [92], Casas y Mateos [33], Hu y Yong [60], Raymond [75], Raymond y Zidani [78, 79], Unger [88] o Casas y Tröltzsch [37].

Por último decir que el funcional J puede ser más complicado que el arriba expuesto. En general J será un funcional que dependerá tanto del control como del estado asociado.

1.1 Notación

Introduciremos ahora los espacios que vamos a usar en esta memoria. Existen muchas referencias donde se pueden encontrar propiedades de estos espacios. Véase por ejemplo [2, 70, 43, 68, 13, 86] entre otros. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$. Denotaremos $\bar{\Omega}$ su clausura y Γ su frontera. Sobre este conjunto podemos definir los espacios funcionales

$$C(\bar{\Omega}) = \{y : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R},\ \text{continuas}\},$$

y para $m \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$,

$$C^m(\bar{\Omega}) = \{y : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R},\ \text{tales que } \partial^\alpha y \in C(\bar{\Omega}) \text{ para todo multiíndice } |\alpha| \leq m\}.$$

Para $1 \leq p \leq \infty$

$$L^p(\Omega) = \{y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ \text{medibles en el sentido de Lebesgue, tales que } \|y\|_{L^p(\Omega)} < \infty\},$$

donde
$$\|y\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |y(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$
si $1 \leq p < \infty$ y
$$\|y\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup\text{ess}\{|y(x)| : x \in \Omega\}.$$
Recuérdese que un elemento de un espacio de Lebesgue es una clase de funciones que son iguales en casi todo punto, i.e., salvo en un conjunto de medida (de Lebesgue) nula. Normalmente escribiremos c.t.p. para abreviar *casi todo punto*. La medida de Lebesgue de un conjunto A la denotaremos por $|A|$.

Definimos las normas de Sobolev sobre $C^m(\bar{\Omega})$ como
$$\|y\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |\partial^\alpha y|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$
si $1 \leq p < \infty$ y
$$\|y\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq m} \left\{ \sup\text{ess}\{|\partial^\alpha y(x)| : x \in \Omega\} \right\}.$$
Con estas normas, los espacios $C^m(\bar{\Omega})$ no resultan completos. Denotaremos
$$W^{m,p}(\Omega) = \overline{C^m(\bar{\Omega})},$$
donde la barra indica clausura en el sentido de la norma de Sobolev arriba definida. Para $p = 2$, normalmente se escribe
$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega).$$
Dado $\sigma \in (0, 1]$, diremos que la frontera de Ω es de clase $C^{m,\sigma}$ [resp. C^m] si existen números $\alpha > 0$, $\beta > 0$, sistemas de coordenadas $(x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kN})$, para abreviar (x'_k, x_{kN}), $k = 1, 2, \ldots, \Lambda$, y funciones b_k de clase $C^{m,\sigma}$ [resp. C^m] en los cubos cerrados $N-1$ dimensionales $|x_{ki}| \leq \alpha$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, de tal modo que cada punto x de Γ se puede representar al menos en unos de estos sistemas como $x = (x'_k, b_k(x'_k))$. También se supone que los puntos (x'_k, x_{kN}) tales que $x'_k \in [-\alpha, \alpha]^{N-1}$, $b_k(x'_k) < x_{kN} < b_k(x'_k) + \beta$ están en Ω, mientras que los puntos (x'_k, x_{kN}) tales que $x'_k \in [-\alpha, \alpha]^{N-1}$, $b_k(x'_k) - \beta < x_{kN} < b_k(x'_k)$ están fuera de $\bar{\Omega}$ (cf: Nečas [72]). Si la frontera es de clase $C^{0,1}$ diremos que es Lipschitz.

Una definición rigurosa de los espacios de Lebesgue sobre la frontera a través de particiones de la unidad y sistemas de cartas asociados a un recubrimiento se puede encontrar en [72, págs. 82,83].

Si Ω es de clase C^m, podemos definir la aplicación traza para $l < m$

$$\gamma_l : C^m(\bar{\Omega}) \longrightarrow \prod_{j=0}^{l} L^p(\Gamma)$$

mediante

$$\gamma_l y = \left(y, \frac{\partial y}{\partial n}, \ldots, \frac{\partial^l y}{\partial n^l} \right),$$

donde n es el vector unitario normal exterior a Γ. Esta aplicación se extiende de manera continua a $W^{m,p}(\Omega)$. A la imagen de $W^{m,p}(\Omega)$ por γ_l la denotaremos

$$\gamma_l(W^{m,p}(\Omega)) = \prod_{j=0}^{l} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma).$$

Normalmente llamaremos γ sin subíndice a γ_0. Para definir γ es suficiente que Γ sea Lipschitz.

Definimos ahora

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \{ y \in W^{m,p}(\Omega) : \ \gamma_{m-1} y = 0, \}$$

dotado de la misma norma que $W^{m,p}(\Omega)$. Es sabido que si Γ es Lipschitz,

$$C_0^m(\Omega) = \{ y \in C^m(\bar{\Omega}) : \ \mathrm{supp}\, y \subset \Omega \text{ es compacto } \}$$

y denotamos

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcap_{m \geq 1} C_0^m(\Omega),$$

entonces

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)},$$

véase Nečas [72].

El espacio de funciones continuas y acotadas en Ω se denomina $C_b(\Omega)$.

Dado un espacio normado X denotaremos por X' su dual, i.e., el espacio de funcionales lineales y continuos sobre X. Definimos

$$W^{-m,p}(\Omega) = \left(W_0^{m,p}(\Omega) \right)'.$$

Dado $\sigma \in (0,1)$ definimos los espacios de funciones Hölder como

$$C^{0,\sigma}(\bar{\Omega}) = \{y \in C(\bar{\Omega}) : \sup_{x,x' \in \bar{\Omega}} \frac{|y(x) - y(x')|}{|x - x'|^{\sigma}} < \infty\}.$$

La norma en este espacio será

$$\|y\|_{C^{0,\sigma}(\bar{\Omega})} = \sup_{x,x' \in \bar{\Omega}} \frac{|y(x) - y(x')|}{|x - x'|^{\sigma}}.$$

Para $\sigma = 1$, $C^{0,1}(\bar{\Omega})$ se denomina espacio de funciones Lipschitz, y coincide con $W^{1,\infty}(\Omega)$. También

$$C^{m,\sigma}(\bar{\Omega}) = \{y \in C^{m}(\bar{\Omega}) : \ \partial^{\alpha} y \in C^{0,\sigma}(\bar{\Omega}) \text{ para } |\alpha| = m\}.$$

Definimos los espacios de Sobolev fraccionarios de la siguiente manera. Sea $\sigma \in (0,1)$. Sea

$$I_{\sigma,p}(y) = \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|y(x) - y(x')|^{p}}{|x - x'|^{N + \sigma p}} dx\, dx',$$

y para $s > 0$

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ y \in W^{[s],p}(\Omega) : \ I_{s-[s],p}(\partial^{\alpha} y) < \infty \text{ para } |\alpha| = [s] \right\},$$

donde $[s]$ es la parte entera de s. La norma en este espacio viene dada por

$$\|y\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\|y\|^{p}_{W^{[s],p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha| = [s]} I_{s-[s],p}(\partial^{\alpha} y)^{p} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Tenemos los siguientes resultados de inclusión continua

$$W^{s,p}(\Omega) \subset L^{q}(\Omega) \text{ para } q \leq \frac{Np}{N - sp} \text{ si } N - sp > 0,$$

$$W^{s,p}(\Omega) \subset C^{0,\lambda}(\bar{\Omega}) \text{ para } 0 < \lambda < s - \frac{N}{p} \text{ si } sp - N > 0.$$

Si Γ es Lipschitz, la siguiente inclusión es compacta

$$W^{1+\sigma,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega) \text{ para } \sigma > 0.$$

Dado $T > 0$, definimos los espacios de Lebesgue vectoriales, para $1 \leq \tau \leq \infty$ como

$$L^{\tau}(0,T; W^{s,p}(\Omega)) = \left\{ y : (0,T) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \ \|y\|_{L^{\tau}(0,T;W^{s,p}(\Omega))} < \infty \right\},$$

donde

$$\|y\|_{L^\tau(0,T;W^{s,p}(\Omega))} = \left(\int_0^T \|y(t,\cdot)\|^\tau_{W^{s,p}(\Omega)} d\tau \right)^{\frac{1}{\tau}}$$

si $1 \leq \tau < \infty$ y

$$\|y\|_{L^\infty(0,T;W^{s,p}(\Omega))} = \sup \mathrm{ess} \left\{ \|y(t,\cdot)\|_{W^{s,p}(\Omega)} : \ t \in (0,T) \right\}.$$

También podemos definir espacios de Sobolev vectoriales:

$$W^{1,\tau}(0,T;W^{s,p}(\Omega)) = \left\{ y \in L^\tau(0,T;W^{s,p}(\Omega)) \text{ tales que } \frac{dy}{dt} \in L^\tau(0,T;W^{s,p}(\Omega)) \right\},$$

donde la derivada se toma en el sentido de las distribuciones.

Definimos también

$$C([0,T],C^{0,\sigma}(\bar{\Omega})) = \{y \in C([0,T] \times \bar{\Omega}) : \ \|y\|_{C([0,T],C^{0,\sigma}(\bar{\Omega}))} < \infty\},$$

donde

$$\|y\|_{C([0,T],C^{0,\sigma}(\bar{\Omega}))} = \sup_{t \in [0,T]} \|y(t,\cdot)\|_{C^{0,\sigma}(\bar{\Omega})}.$$

En esta memoria, siempre que no lleve a confusión, usaremos las siguientes abreviaturas: $L^\tau(W^{s,p})$, $L^2(H^1)$, $W^{1,\tau}((W^{1,p})')$, $L^{\tilde{k}}(L^k(\Omega))$, $L^{\tilde{\sigma}}(L^\sigma(\Gamma))$, y $C(C^{0,\varepsilon}(\bar{\Omega}))$ respectivamente por $L^\tau(0,T;W^{s,p}(\Omega))$, $L^2(0,T;H^1(\Omega))$, $W^{1,\tau}(0,T;(W^{1,p}(\Omega))')$, $L^{\tilde{k}}(0,T;L^k(\Omega))$, $L^{\tilde{\sigma}}(0,T;L^\sigma(\Gamma))$ y $C([0,T];C^{0,\varepsilon}(\bar{\Omega}))$, para τ, s, p, $\tilde{k}$, k, $\tilde{\sigma}$, σ y ε números reales adecuados. Denotaremos también, como es habitual

$$W(0,T) = \{y \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) : \ \frac{dy}{dt} \in L^2(0,T;H^1(\Omega)')\}.$$

Dado un espacio métrico X, denotaremos la bola de centro x y radio r por $B_X(x,r)$.

Como es habitual, denotaremos $\mathbb{R}^N_+ = \{x = (x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N \text{ tales que } x_N > 0\}$.

1.2 Plan de exposición

El objeto de la memoria es estudiar los siguientes problemas de control:

Problema elíptico Sean Ω un abierto de $\mathbb{R}^N$, Γ su frontera, A un operador elíptico y f, g y L funciones $f : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \Gamma \to \mathbb{R}$, $L : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Sean n_i, n_d enteros no negativos y sean $g_j : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ funciones para $1 \leq j \leq n_i + n_d$. Nuestro primer problema de control se formula como

$$
(\mathbf{P_e}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } J(u) = \displaystyle\int_\Omega L(x, y_u(x), u(x))dx, \\ u \in U_{ad} = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : \ u(x) \in K_\Omega(x) \text{ c.t.p. } x \in \Omega\}, \\ \displaystyle\int_\Omega g_j(x, \nabla y_u(x))\, dx = 0, \ 1 \leq j \leq n_i, \\ \displaystyle\int_\Omega g_j(x, \nabla y_u(x))\, dx \leq 0, \ n_i + 1 \leq j \leq n_i + n_d, \end{array} \right.
$$

donde

$$
\left\{ \begin{array}{rcll} Ay_u & = & f(x, y_u, u) & \text{en } \Omega \\ \partial_{n_A} y_u & = & g & \text{sobre } \Gamma, \end{array} \right.
$$

y K_Ω es una multiaplicación medible con imagen no vacía y cerrada en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Problema parabólico Sean Ω un abierto de $\mathbb{R}^N$, Γ su frontera y $T > 0$. Sean $Q = \Omega \times]0, T[$ y $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$. Sea A un operador elíptico. Consideremos funciones $F : Q \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $G : \Sigma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $L : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \Sigma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $y_0 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. El problema de control es el siguiente:

$$
(\mathbf{P_p}) \left\{ \begin{array}{l} \min J(v) = \displaystyle\int_0^T \int_\Omega F(x, t, y_v)\ dx\ dt + \int_0^T \int_\Gamma G(s, t, y_v, v)\ ds\ dt \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_\Omega L(x, y_v(x, T))\ dx \\ v \in V_{ad} = \{v \in L^\infty(\Sigma) : \ v(s,t) \in K_\Sigma(s,t) \text{ para casi todo } (s,t) \in \Sigma\}, \\ \nabla_x y_v \in C \subset (L^\tau(0, T; L^p(\Omega)))^N, \end{array} \right.
$$

donde

$$
\left\{ \begin{array}{rcll} \dfrac{\partial y_v}{\partial t} + Ay_v & = & f(x, t, y_v) & \text{en } Q, \\ \dfrac{\partial y_v}{\partial n_A} & = & g(s, t, y_v, v) & \text{sobre } \Sigma, \\ y_v(\cdot, 0) & = & y_0 & \text{en } \Omega, \end{array} \right.
$$

K_Σ es una multiaplicación medible con imagen no vacía y compacta en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y C es un subconjunto cerrado, convexo y con interior no vacío de $(L^\tau(0, T; L^p(\Omega)))^N$.

Hemos decidido introducir un control distribuido para el problema elíptico y un control frontera para el parabólico a modo de ilustración, ya que escribir todos los casos posibles habría aumentado innecesariamente la longitud de la memoria. No obstante, después del estudio detallado de estos problemas, enunciaremos resultados para otros problemas que pueden ser tratados siguiendo las mismas técnicas.

El plan de la obra es el siguiente:

En la primera parte se estudian las ecuaciones que aparecen en los problemas de control estudiados. En el Capítulo 2 hacemos un estudio sobre regularidad para ecuaciones lineales. Estos resultados serán aplicados más tarde para establecer la regularidad tanto del estado como del estado adjunto. En el Capítulo 3 estudiamos las ecuaciones de estado que gobiernan los problemas de control. Mostramos las relaciones de continuidad y diferenciabilidad que hay entre el control y el estado. También hacemos un análisis de la sensitividad del estado respecto a perturbaciones difusas del control.

La segunda parte constituye el núcleo central de la memoria. En ella estudiamos condiciones de optimalidad, tanto necesarias como suficientes, para los problemas de control. En el Capítulo 4 exponemos propiedades de los funcionales que aparecen en los problemas de control: el funcional objetivo y las restricciones. Estudiamos bajo que condiciones son diferenciables y, en vistas a probar un Principio de Pontryagin, damos resultados de sensitividad respecto a perturbaciones difusas del control. En el Capítulo 5 exponemos el Principio de Pontryagin. En el Capítulo 6 introducimos condiciones de optimalidad de primer y segundo orden. Por último, en el Capítulo 7 introducimos un nuevo tipo de condiciones de segundo orden en las que se ve involucrado el Hamiltoniano.

Se va intercalando en cada capítulo el caso elíptico y el parabólico.

En la tercera parte se hace un estudio de las aproximaciones numéricas del siguiente problema de control: Sean Ω un abierto de $\mathbb{R}^N$, Γ su frontera, A un operador elíptico, U_{ad} un subconjunto de $L^\infty(\Omega)$ y $L : \Omega \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Sea $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Formulamos el problema de control óptimo

$$(P_\delta) \begin{cases} \min J(u) = \displaystyle\int_\Omega L\left(x, y_u(x), u(x)\right) dx \\ u \in K \quad g\left(x, y_u(x)\right) \leq \delta \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \end{cases} \tag{1.2.1}$$

donde

$$\begin{cases} Ay = f(x,y) + u & \text{en } \Omega \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

Las cuestiones sobre existencia de solución y condiciones de optimalidad para este problema ya han sido tratadas por Casas en [18].

Parte I

Estudio de las ecuaciones

En esta primera parte de la tesis estudiamos las ecuaciones que intervienen en los problemas de control que vamos a tratar. Este estudio se divide en dos partes principales. En primer lugar se aborda el estudio de ecuaciones lineales, que nos permitirá tratar más tarde las ecuaciones de estado linealizadas y las ecuaciones de estado adjunto. Por último, estableceremos las propiedades de la aplicación que liga al control y al estado.

En nuestro caso, al estar estudiando problemas de control con restricciones de tipo integral sobre el gradiente del estado, el estudio de ambas ecuaciones (linealizada y de estado adjunto) viene a ser muy parecido, ya que, *grosso modo*, se trata de demostrar regularidad $W^{1,p}(\Omega)$ de la solución de una ecuación lineal, para $p \in (1, \infty)$.

La segunda parte es el estudio de la relación existente entre el control y el estado. En nuestro caso, para cada control existe un único estado. Existen estudios para problemas de control en los que esto no se verifica. Por ejemplo, Casas y Fernández [24] o Bonnans y Casas [8] estudian un problema de control multiestado. Abergel y Casas [1] estudian problemas de control multiestado que aparecen en mecánica de fluidos.

En nuestro caso, y al tratarse de problemas gobernados por ecuaciones semilineales, el funcional, llamémosle G, que relaciona el estado y con el control u es no lineal. Debemos probar que existe una única solución, que está en el espacio adecuado y que depende continuamente del control. En la segunda parte de la memoria, obtenemos condiciones de primer y segundo orden. Para ello estudiamos también bajo que condiciones G es C^1 o C^2. Si escribimos el funcional a minimizar como

$$J(u) = F(y_u, u) = F(G(u), u),$$

ayudándonos de la regla de la cadena, podemos demostrar que algunas de las propiedades de G son heredadas por J. Esto se ve con detalle en la segunda parte de la tesis.

Por último, para tratar el caso no convexo, introducimos un desarrollo de Taylor del estado basado en perturbaciones difusas del control. El objetivo es deducir un Principio de Pontryagin. En este enfoque, utilizamos los desarrollos de Taylor (Teoremas 3.3.2 y 3.3.4) para la solución de la ecuación de estado, con un resto que converja a cero en la norma de $L^\tau(0, T; W^{1,p}(\Omega))$ en el caso parabólico y en la norma de $W^{1,p}(\Omega)$ en el caso elíptico (la norma correspondiente a la restricción sobre el estado).

Para establecer este resultado, en el caso parabólico, usamos la inyección compacta de $L^\tau(0, T; W^{1+\varepsilon,p}(\Omega)) \cap W^{1,\tau}(0, T, (W^{1,p'}(\Omega))')$ en $L^\tau(0, T; W^{1,p}(\Omega))$ (véase la prueba del Teorema 3.3.4). Por ello tenemos que establecer resultados de regularidad en $L^\tau(0, T; W^{1+\varepsilon,p}(\Omega))$ para la ecuación de estado linealizada en la sección 2.2.

Capítulo 2

Teoremas de regularidad para ecuaciones lineales

2.1 Ecuaciones elípticas

En esta sección nos ocupamos de la regularidad en $W^{1,p}(\Omega)$ de las soluciones de los problemas de Dirichlet y Neumann. Esta sección viene a rellenar el gap entre algunos resultados y contraejemplos conocidos sobre esta regularidad. El objetivo es deducir existencia, unicidad y estimaciones en $W^{1,p}(\Omega)$ de la solución bajo condiciones mínimas de regularidad sobre los coeficientes de la parte principal del operador elíptico y sobre la frontera del dominio. Coeficientes continuos y frontera C^1 son suficientes para esta regularidad. También se investiga el caso de una frontera Lipschitz.

Aunque los resultados aquí presentados son más o menos conocidos por los especialistas en EDP, no existe una referencia clara para ellos. Los presentamos aquí por completitud y claridad en la exposición.

Introducción y resultados principales

Sea Ω un conjunto acotado y abierto de $\mathbb{R}^N$ de frontera Γ y sea

$$Ay = -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_{x_j} \left[a_{ij} \partial_{x_i} y \right], \tag{2.1.1}$$

donde los coeficientes a_{ij} pertenecen a $L^\infty(\Omega)$ y cumplen que existen $m, M > 0$ tales que

$$m\|\xi\|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq M\|\xi\|^2 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N \text{ y } \forall x \in \Omega. \tag{2.1.2}$$

También introducimos $a_0 \in L^r(\Omega)$, $a_0(x) \geq 0$ en Ω, donde escogemos $r \geq Np/(N+p)$ si $p > N$, $r \geq N/2$ si $N/(N-1) \leq p \leq N$ y $r \geq Np'/(N+p')$ si $p < N/(N-1)$, con $p' = p/(p-1)$. Por ejemplo, si $p > N$, podemos escoger $r = p/2$.

Sea $f_D \in W^{-1,p}(\Omega)$, $f \in \left(W^{1,p'}(\Omega)\right)'$ con $1/p + 1/p' = 1$ y $g \in W^{-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$, con $p \in (1, \infty)$.

El propósito de esta sección es estudiar la regularidad $W^{1,p}(\Omega)$ de la solución del problema de Dirichlet

$$\left\{\begin{array}{rcll} Ay + a_0 y & = & f_D & \text{en } \Omega \\ y & = & 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{array}\right. \tag{2.1.3}$$

y, suponiendo $a_0 \not\equiv 0$, del problema de Neumann

$$\left\{\begin{array}{rcll} Ay + a_0 y & = & f & \text{en } \Omega \\ \partial_{n_A} y & = & g & \text{sobre } \Gamma. \end{array}\right. \tag{2.1.4}$$

La existencia, unicidad y regularidad de y en $W^{1,p}(\Omega)$ depende de la regularidad de Γ y de los coeficientes a_{ij} y a_0.

Si $p \geq 2$, podemos reducir el problema de Dirichlet al caso $a_0 = 0$ y el problema de Neumann al caso $a_0 = 1$: si $p \geq 2$, entonces gracias a los Lemas 2.1.4 y 2.1.12, existe una solución $y \in H^1(\Omega) \cap L^{p^*}(\Omega)$, donde $p^* = \infty$ si $p > N$, p^* es cualquier número en $[1, \infty)$ si $p = N$ y $p^* = Np/(N-p)$ si $2 \leq p < N$. Por tanto $a_0 y \in L^{\frac{Np}{N+p}}(\Omega)$. Así, por las desigualdades de Sobolev, para el problema de Dirichlet $a_0 y \in W^{-1,p}(\Omega)$ y podemos sumar $-a_0 y$ a la ecuación (2.1.2) y si renombramos f_D como $f_D - a_0 y$, tendremos que resolver el problema

$$\left\{\begin{array}{rcll} Ay & = & f_D & \text{en } \Omega \\ y & = & 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{array}\right. \tag{2.1.5}$$

Y para el problema de Neumann, podemos reemplazar f por $f - a_0 y + y \in \left(W^{1,p'}(\Omega)\right)'$ y así tendremos

$$\left\{\begin{array}{rcll} Ay + y & = & f & \text{en } \Omega \\ \partial_{n_A} y & = & g & \text{sobre } \Gamma. \end{array}\right. \tag{2.1.6}$$

Para $p < 2$ el resultado se alcanza por el método de transposición y dualidad.

Se sabe (Troianiello [87, Teorema 3.16(iv)]) que si los coeficientes a_{ij} son Hölder continuos y el dominio es de clase $C^{1,\delta}$, con $0 < \delta < 1$, entonces se puede asegurar regularidad $W^{1,p}(\Omega)$ de la solución, tanto para el problema de Dirichlet como para el de Neumann. También se sabe (Serrin [81]) que si los coeficientes no son continuos, esto puede no ser cierto.

Ejemplo 2.1.1 *Sea Ω la bola unidad en $\mathbb{R}^N$, $N > 1$ y $v(x) = x_1(|x|^\lambda - 1)$ con $\lambda = \frac{1}{2} - N$. Tenemos que $v \in W_0^{1,r}(\Omega)$ para todo $r \in \left[1, \frac{2N}{2N-1}\right)$ y $v \notin W_0^{1,p}(\Omega)$ para todo $p \geq \frac{2N}{2N-1}$. Pongamos $a = \frac{4(N-1)}{2N-3}$ y $a_{ij} = \delta_{ij} + (a-1)\frac{x_i x_j}{|x|^2}$. Entonces los coeficientes a_{ij} están acotados y se cumple* (2.1.2)*. Ahora es fácil comprobar que v es solución del siguiente problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} Ay = f_D & \text{en } \Omega \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases} \tag{2.1.7}$$

donde

$$f_D(x) = \frac{(a-1)(N-2)x_1}{|x|^2}.$$

La función f_D pertenece a $L^q(\Omega)$ para todo $q < N$, luego $f_D \in W^{-1,p}(\Omega)$ para todo $p < \infty$. Esto prueba que la regularidad puede fallar para coeficientes no continuos.

Por otro lado, sabemos que existe una única solución y en $H_0^1(\Omega) \subset W_0^{1,r}(\Omega)$ para el anterior problema. Como $v \notin H_0^1(\Omega)$, entonces $y \neq v$ y ambas son soluciones en $W_0^{1,r}(\Omega)$ de (2.1.7)*, luego podemos deducir que la unicidad falla en este espacio.*

Nuestros resultados vienen a rellenar este *gap* entre el resultado de Troianiello y el contraejemplo anterior. Veremos más adelante que la continuidad de los coeficientes es suficiente para obtener unicidad y regularidad.

Por otro lado, la regularidad $C^{1,\delta}$ de la frontera supuesta por Troianiello [87, Teorema 3.16(iv)] se puede relajar. De hecho, los Teoremas 2.1.1 y 2.1.3 establecen la regularidad $W^{1,p}(\Omega)$ de las soluciones de los problemas (2.1.3) y (2.1.4) suponiendo regularidad C^1 de Γ. El Teorema 2.1.1 fue establecido por Simader [82] y Jerison y Kenig [62] para el operador de Laplace, y por Morrey [71, pág. 156].

La cuestión es si el mismo resultado se puede alcanzar suponiendo sólo que Γ es Lipschitz. Jerison y Kenig [62, Teoremas 0.5, 1.1, 1.3] respondieron a esta cuestión para el Problema (2.1.3) en el caso del operador de Laplace, $A = -\Delta$. Ellos probaron que si la frontera Γ es Lipschitz, entonces podemos sólo asegurar regularidad $W^{1,p}(\Omega)$ para

$p_1' < p < p_1$, con $p_1 = 4+\varepsilon(\Omega)$ si $N = 2$ y $p_1 = 3+\varepsilon(\Omega)$ si $N \geq 3$. Además este resultado es óptimo. De hecho, en [62], se prueba que para cualquier $p > 4$ si $N = 2$, o $p > 3$ si $N \geq 3$, existe un dominio Lipschitz Ω y una función $f_D \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tal que la solución (2.1.3) no pertenece a $W^{1,p}(\Omega)$. El Teorema 2.1.2 extiende [62] al caso de un operador elíptico A con coeficientes continuos.

También ha sido demostrado (Dauge [47]) que si Ω es un dominio poliédrico convexo ($N \leq 3$) y los coeficientes del operador son continuos, entonces $y \in W_0^{1,p}(\Omega)$, con $1 < p < \infty$ para el problema de Dirichlet, y con $6/(3+\sqrt{5}) < p < 6/(3-\sqrt{5})$ para el problema de Neumann.

La continuidad de los coeficientes a_{ij} es relajada por Chiarenza [41], asumiendo que a_{ij} son funciones de oscilación media acotada, cuya oscilación integral sobre bolas encogiéndose[1] hacia un punto converge uniformemente hacia cero. Esto se hace para el problema de Dirichlet bajo regularidad $C^{1,1}$ de Γ.

En todas las referencias citadas, excepto en [87], se supone simetría del operador A, $a_{ij} = a_{ji}$. Nosotros eliminamos esta hipótesis, que no cambia la demostración del problema de Dirichlet, pero introduce algunas dificultades extra cuando se trata del problema de Neumann; véase al respecto la Nota 2.1.3. La demostración de la regularidad para el problema de Neumann no se lleva a cabo en el libro de [87].

Existen estimaciones en $W^{1,p}(\Omega)$ para coeficientes continuos de las que podrían deducirse los resultados presentados en esta sección (cf. [3, Teoremas15.3',15.1"]), al menos en el caso de coeficientes simétricos. No obstante, hemos decidido incluir aquí las demostraciones, ya que no hemos podido encontrar demostración detallada del método, y nos parece que el caso de coeficientes no simétricos es suficientemente interesante y no está tratado en la literatura existente.

Establecemos ahora los teoremas que vamos a probar en esta sección.

Teorema 2.1.1 *Si Γ es de clase C^1 y los coeficientes $a_{ij} \in C(\bar{\Omega})$, entonces existe una única solución $y \in W_0^{1,p}(\Omega)$ al problema de Dirichlet* (2.1.5)*. Además, se cumple la estimación*

$$\|y\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C\|f_D\|_{W^{-1,p}(\Omega)}, \tag{2.1.8}$$

donde C es una constante que sólo depende de p, la dimensión N, los coeficientes a_{ij} y Ω.

[1] *shrinking* en el original

Teorema 2.1.2 *Si Γ es Lipschitz y los coeficientes $a_{ij} \in C(\bar{\Omega})$ entonces existen $\varepsilon(\Omega) > 0$ y una única solución $y \in W_0^{1,p}(\Omega)$ al problema de Dirichlet* (2.1.5) *para todo $p_1' < p < p_1$, donde $p_1 = 4+\varepsilon(\Omega)$ si $N = 2$ y $p_1 = 3+\varepsilon(\Omega)$ si $N \geq 3$. Además, se cumple la estimación*

$$\|y\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C\|f_D\|_{W^{-1,p}(\Omega)},$$

donde C es una constante que sólo depende de p, la dimensión N, los coeficientes a_{ij} y Ω.

Teorema 2.1.3 *Si Γ es de clase C^1 y los coeficientes $a_{ij} \in C(\bar{\Omega})$, entonces existe una única solución variacional $y \in W^{1,p}(\Omega)$ del problema de Neumann* (2.1.6)*. Además, se cumple la estimación*

$$\|y\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C(\|f\|_{\left(W^{1,p'}(\Omega)\right)'} + \|g\|_{W^{-\frac{1}{p},p}(\Gamma)}),$$

donde C es una constante que sólo depende de p, la dimensión N, los coeficientes a_{ij} y Ω.

En este nivel de regularidad, no tiene sentido la derivada normal (cf. Lions y Magenes [68]). Precisemos que entendemos por solución variacional del problema (2.1.6).

Definición 2.1.1 *Llamaremos solución variacional de* (2.1.6) *a la solución del problema variacional*

$$a(y,z) = \langle f, z\rangle_{\left(W^{1,p'}(\Omega)\right)'\times W^{1,p'}(\Omega)} + \langle g, \gamma v\rangle_{W^{-\frac{1}{p},p}(\Gamma)\times W^{\frac{1}{p},p'}(\Gamma)} \ \forall z \in W^{1,p'}(\Omega), \qquad (2.1.9)$$

donde

$$a(y,z) = \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij}\partial_{x_i}y\partial_{x_j}z + \int_\Omega a_0 yz \qquad (2.1.10)$$

es la forma bilineal asociada al operador A y $\gamma : W^{1,p'}(\Omega) \to W^{\frac{1}{p},p'}(\Gamma)$ es el operador traza.

En los teorema anteriores la dependencia de la estimaciones respecto a los coeficientes a_{ij} es a través de m, M y su módulo de continuidad.

Nota 2.1.1 *Algunos autores han estudiado el caso caso correspondiente a datos f y g, en los anteriores problemas, que son medidas sobre Ω y Γ respectivamente; véase, por ejemplo, Casas [16] o Boccardo [6]. Debido a que una medida en Ω es un elemento de $(W^{1,p'}(\Omega))'$ y una medida sobre Γ pertenece a $W^{-1/p,p}(\Gamma)$ para todo $p < N/(N-1)$, entonces los Teoremas 2.1.1 y 2.1.3 establecen la existencia y unicidad de soluciones en $W^{1,p}(\Omega)$ para todo $p < N/(N-1)$, que es el resultado clásico.*

Problema de Dirichlet. Prueba de los Teoremas 2.1.1 y 2.1.2

Para la prueba de los Teoremas 2.1.1 y 2.1.2 usaremos el siguiente resultado, debido a Stampacchia [84].

Lema 2.1.4 *Supongamos $p \geq 2$. Entonces existe una única función $y \in H_0^1(\Omega) \cap L^{p^*}(\Omega)$, donde $p^* = \infty$ si $p > N$, p^* es cualquier número en $[1, \infty)$ si $p = N$ y $p^* = Np/(N-p)$ si $2 \leq p < N$, que satisface la ecuación* (2.1.3)*. Además, se cumple la estimación*

$$\|y\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|f_D\|_{W^{-1,p}(\Omega)},$$

donde C es una constante que sólo depende de p, la dimensión N, m, M y la medida de Ω. Nótese que obviamente también $y \in L^p(\Omega)$ y

$$\|y\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|f_D\|_{W^{-1,p}(\Omega)}.$$

Usaremos también el siguiente lema sobre operadores con coeficientes constantes.

Lema 2.1.5 *Supongamos que los coeficientes a_{ij} del operador A son constantes para $1 \leq i, j \leq N$. Si*

1. *Γ es de clase C^1 y $1 < p < \infty$ o*

2. *Γ es Lipschitz y $p_1' < p < p_1$, donde p_1 depende de Ω, $p_1 > 3$ si $N = 3$ y $p_1 > 4$ si $N = 2$,*

entonces existe una única función $y \in W_0^{1,p}(\Omega)$ que satisface la ecuación en derivadas parciales

$$\left\{\begin{array}{rcll} Ay & = & f_D & \text{en } \Omega \\ y & = & 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{array}\right. \tag{2.1.11}$$

Además, se cumple la estimación

$$\|y\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C_0\|f_D\|_{W^{-1,p}(\Omega)},$$

donde C_0 depende de a_{ij}, Ω, N y p.

Demostración. Asumamos sin pérdida de generalidad que $a_{ij} = a_{ji}$. Entonces, la hipótesis (2.1.2) implica que $\hat{A} = (a_{ij})$ es simétrica y definida positiva, por lo tanto existe una matriz real y regular P tal que $\hat{A} = P\,P^T$. Sea $T = P^{-1}$. Mediante el cambio de variable lineal

$$\hat{x} = Tx$$

transformamos nuestro problema (2.1.11) en

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta\hat{y} & = & \hat{f}_D & \text{en } \hat{\Omega} \\ \hat{y} & = & 0 & \text{sobre } \partial\hat{\Omega}, \end{array}\right. \tag{2.1.12}$$

donde $\hat{y} = y \circ T^{-1}$, $\hat{f}_D = f_D \circ T^{-1}$ y $\hat{\Omega} = T(\Omega)$.

Aplicando el resultado de Jerison y Kenig [62] tenemos que (2.1.12) tiene una solución única $\hat{y} \in W_0^{1,p}(\hat{\Omega})$ y que

$$\|\hat{y}\|_{W_0^{1,p}(\hat{\Omega})} \leq C\|\hat{f}_D\|_{W^{-1,p}(\hat{\Omega})},$$

donde C depende de p, N y la constante de Lipschitz de la frontera $\hat{\Omega}$.

Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos que $y \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y se satisface la estimación

$$\|y\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq (\det T)^{\frac{1}{p'}}\, C\|f_D\|_W^{-1,p}(\Omega).$$

□

Estamos ya en posición de probar el Teorema 2.1.1.

Demostración del Teorema 2.1.1. Gracias a la continuidad de los coeficientes, sabemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\rho > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{N} |a_{ij}(x_1) - a_{ij}(x_2)| < \varepsilon\ \forall x_1, x_2 \in \bar{\Omega},\ \text{con } |x_1 - x_2| < \rho. \tag{2.1.13}$$

Sea $\left\{C_\rho^s\right\}_{s=1}^{\mu}$ una colección de conjuntos abiertos que recubre a Ω, y tal que cada conjunto C_ρ^s tiene una frontera de clase C^1 que deja el interior del conjunto a un lado de la frontera y cuyo diámetro es menor o igual que ρ. Escojamos $x_s \in C_\rho^s$ un punto cualquiera, pero fijo, y sea $\{\varphi_s\}_{s=1}^{\mu}$ una partición de la unidad relativa a ese recubrimiento.

Consideremos primero el caso $p \geq 2$. Tomemos $y \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ como en el Lema 2.1.4 y definamos

$$y_s = \varphi_s y, \text{ para } 1 \leq s \leq \mu. \tag{2.1.14}$$

Tenemos que y_s verifica la ecuación

$$\left\{\begin{array}{rcll} A_s y_s & = & \varphi_s f_D - \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\partial_{x_j}\varphi_s \partial_{x_i} y - \sum_{i,j=1}^{N} \partial_{x_j}\left(a_{ij}(x) y \partial_{x_i}\varphi_s\right) - & \\ & & \sum_{i,j=1}^{N} \partial_{x_j}\left[(a_{ij}(x_s) - a_{ij}(x))\partial_{x_i} y_s\right] & \text{en } C_\rho^s \\ y_s & = & 0 & \text{sobre } \partial C_\rho^s, \end{array}\right. \tag{2.1.15}$$

donde A_s es el operador asociado a matriz de coeficientes constantes $(a_{ij}(x_s))$. En el caso $N \geq 3$, en una primera etapa, supondremos que

$$p \leq \frac{2N}{N-2}.$$

El Lema 2.1.4, las condiciones impuestas a p y las condiciones sobre el soporte de los φ_s nos permiten deducir que

$$\varphi_s f_D - \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\partial_{x_j}\varphi_s \partial_{x_i} y - \sum_{i,j=1}^{N} \partial_{x_j}\left(a_{ij}(x) y \partial_{x_i}\varphi_s\right) \in W^{-1,p}(\Omega).$$

Primero, tenemos la desigualdad

$$\|\varphi_s f_D\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \leq C\left(\|\varphi_s\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\right)\|f_D\|_{W^{-1,p}(\Omega)}. \tag{2.1.16}$$

También, gracias al Lema 2.1.4, tenemos

$$\begin{aligned} \|\sum_{i,j=1}^{N} \partial_{x_j}\left(a_{ij} y \partial_{x_i}\varphi_s\right)\|_{W^{-1,p}(\Omega)} &\leq \sum_{i,j=1}^{N} \|a_{ij} y \partial_{x_i}\varphi_s\|_{L^p(\Omega)} \leq \\ &\leq C\left(\|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\varphi_s\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\right)\|f_D\|_{W^{-1,p}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

Por otro lado, las condiciones impuestas a p implican que $L^2(\Omega) \subset W^{-1,p}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, con inclusión continua. Usando las estimaciones usuales en $H_0^1(\Omega)$ tenemos

$$\begin{array}{rcl} \|\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\partial_{x_i}\varphi_s \partial_{x_j} y\|_{W^{-1,p}(\Omega)} & \leq & \|\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\partial_{x_i}\varphi_s \partial_{x_j} y\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ \sum_{i,j=1}^{N} \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\varphi_s\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\|\partial_{x_j} y\|_{L^2(\Omega)} & \leq & \\ \leq C\left(\|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\varphi_s\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\right)\|y\|_{H_0^1(\Omega)} & \leq & \\ C\left(\|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\varphi_s\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\right)\|f_D\|_{H^{-1}(\Omega)} & \leq & C\|f_D\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \end{array} \tag{2.1.18}$$

Veamos que $y_s \in W^{1,p}(\Omega)$ y que se satisface la estimación

$$\|y_s\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C\|f_D\|_{W^{-1,p}(\Omega)}. \tag{2.1.19}$$

Para probar esto, introduzcamos alguna notación. Dado $\xi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, definimos T_ξ como sigue

$$\begin{aligned} T_\xi(z) \quad = \quad & < f_D\varphi_s, z > + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)y(x)\partial_{x_i}\varphi_s(x)\partial_{x_j}z(x) \\ & + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_{x_i}y(x)\partial_{x_j}\varphi_s(x)z(x) \\ & + \int_{C_\rho^s} \sum_{i,j=1}^N \left(a_{ij}(x_s) - a_{ij}(x)\right)\partial_{x_i}\xi(x)\partial_{x_j}z(x). \end{aligned}$$

Es obvio que $T_\xi \in W^{-1,p}(\Omega)$ y usando el Lema 2.1.5 deducimos la existencia y unicidad de una solución $y_\xi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de la igualdad variacional

$$a_s(y_\xi, z) = T_\xi(z) \ \forall z \in W_0^{1,p'}(\Omega),$$

donde $a_s(\cdot,\cdot)$ es la forma bilineal asociada al operador A_s. Además se satisface la siguiente estimación

$$\|y_\xi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C_0\|T_\xi\|_{W^{-1,p}(\Omega)},$$

donde C_0 depende de $\|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}$, Ω y de p.

Ahora usando esta notación y teniendo en cuenta que el soporte de φ_s es compacto, la ecuación (2.1.15) se puede escribir de manera variacional como sigue

$$a_s(y_s, z) = T_{y_s}(z) \ \forall z \in W_0^{1,p'}(\Omega).$$

La aplicación $\xi \mapsto y_\xi$ es contractiva: Tomemos $\xi_1, \xi_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y sean $y_1 = y_{\xi_1}, y_2 = y_{\xi_2}$. Entonces se satisface la igualdad

$$a_s(y_1 - y_2, z) = T_{\xi_1}(z) - T_{\xi_2}(z) \ \forall z \in W_0^{1,p'}(\Omega).$$

De aquí deducimos que

$$\|y_1 - y_2\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C_0\|T_{\xi_1} - T_{\xi_2}\|_{W^{-1,p}(\Omega)}. \tag{2.1.20}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
|T_{\xi_1}(z) - T_{\xi_2}(z)| &= |\int_{C_\rho^s} \sum_{i,j=1}^{N} (a_{ij}(x_s) - a_{ij}(x))\, \partial_{x_i}(\xi_1(x) - \xi_2(x))\partial_{x_j} z(x)| \\
&\leq \varepsilon N \|\xi_1 - \xi_2\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \|z\|_{W_0^{1,p'}(\Omega)}, \qquad (2.1.21)
\end{aligned}$$

lo cual implica

$$\|T_{\xi_1} - T_{\xi_2}\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \leq \varepsilon N \|\xi_1 - \xi_2\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}. \qquad (2.1.22)$$

Tomando $0 < \varepsilon < \frac{1}{2N} \min\{1, 1/C_0\}$, de (2.1.20) y (2.1.22) deducimos la contractividad de la aplicación $\xi \mapsto y_\xi$. Por lo tanto existe un único punto fijo $\hat{y}$ para esta aplicación. Por otro lado, en $H_0^1(\Omega)$ hay también un único punto fijo, que es necesariamente y_s. Pero $\hat{y} \in W_0^{1,p}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ es también un punto fijo, luego $\hat{y} = y_s$.

Veamos ahora que se cumple la estimación (2.1.19). Usando la condición de continuidad (2.1.13) como en (2.1.21) y la elección de ε, tenemos que

$$\|\sum_{i,j=1}^{N} \partial_{x_j} \left[(a_{ij}(x_s) - a_{ij}(x))\partial_{x_i} y_s\right] \|_{W^{-1,p}(\Omega)} \leq \varepsilon N \|y_s\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} <$$

$$< \frac{1}{2} \min\{1, 1/C_0\} \|y_s\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

Esta desigualdad, junto con (2.1.16), (2.1.17) y (2.1.18) nos lleva a

$$\|y_s\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\|y_s\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + C\left(\|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\varphi_s\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}), \Omega, p\right) \|f_D\|_{W^{-1,p}(\Omega)}.$$

Notemos que $\|\varphi_s\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$, depende del tamaño del soporte de la función, que depende de ρ, y éste a su vez depende del modulo de continuidad de las funciones a_{ij} y de ε, el cual, como se dijo antes, sólo depende de Ω, $\|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}$, N y p.

Una vez obtenida esta desigualdad, sumando todos los y_s, obtenemos la estimación (2.1.8):

$$\|y\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|\sum_{s=1}^{\mu} y_s\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \sum_{s=1}^{\mu} \|y_s\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \mu C \|f_D\|_{W^{-1,p}(\Omega)},$$

donde el número μ de funciones de la partición de la unidad sólo depende de ρ, y por lo tanto de Ω, $\|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}$, N, p y el módulo de continuidad de las funciones a_{ij}.

Supongamos ahora que $p > \frac{2N}{N-2}$ si $N = 3$ o $N = 4$ y

$$\frac{2N}{N-2} \leq p \leq \frac{2N}{N-4}$$

si $N \geq 5$. En este caso, todos los argumentos previos son todavía válidos, excepto la desigualdad (2.1.18). En lugar de las inclusiones $L^2(\Omega) \subset W^{-1,p}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ usaremos ahora que $L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega) \subset W^{-1,p}(\Omega) \subset W^{-1,\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$ y el hecho de que $y \in W_0^{1,\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$, así como las estimaciones que acabamos de obtener, para conseguir

$$\begin{aligned}
\| \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \partial_{x_i} \varphi_s \partial_{x_j} y \|_{W^{-1,p}(\Omega)} &\leq \| \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \partial_{x_i} \varphi_s \partial_{x_j} y \|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)} \leq \\
\sum_{i,j=1}^{N} \|a_{ij}(x)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\varphi_s\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \|\partial_{x_j} y\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)} &\leq \\
C(\|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\varphi_s\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}) \|y\|_{W_0^{1,\frac{2N}{N-2}}(\Omega)} &\leq \\
C(a_{ij}, \|\varphi_s\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}, p, N, \Omega) \|f_D\|_{W^{-1,\frac{2N}{N-2}}(\Omega)} &\leq C \|f_D\|_{W^{-1,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Este proceso puede ser repetido tomando p cada vez más grande, y el resultado queda así demostrado para $2 \leq p < \infty$. Por lo tanto hemos probado hasta ahora que la aplicación

$$A : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{-1,p}(\Omega)$$

es un isomorfismo para $p \geq 2$, Por lo tanto su operador adjunto

$$A^* : W_0^{1,p'}(\Omega) \longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$$

es también un isomorfismo. Esto no permite concluir que el teorema también es valido para $1 < p < 2$. $\square$

Demostración del Teorema 2.1.2. La prueba es como la del Teorema 2.1.1, con dos excepciones. La colección de conjuntos abiertos $\left\{C_\rho^s\right\}_{s=1}^{\mu}$ debe ser tomada con fronteras Lipschitz. Además, las condiciones impuestas a p en el teorema implican que $L^2(\Omega) \subset W^{-1,p}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ y por lo tanto no hay necesidad de imponer condiciones adicionales a p durante la demostración. $\square$

Problema de Neumann. Prueba del Teorema 2.1.3

Para hacer esta demostración, conseguiremos antes estimaciones para un problema en el espacio y en el semiespacio. Usaremos algunas de las ideas expuestas por Grisvard [59, Sección 2.3.2], aunque sus métodos no pueden ser aplicados directamente.

Denotaremos E la solución fundamental del operador $-\Delta + 1$.

Lema 2.1.6 *El operador de convolución por E es continuo de $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ en $W^{k+2,p}(R^N)$ para todo entero k.*

Demostración. Es un hecho conocido que para todo $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $E * f \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ y existe una constante que cumple que

$$\|E * f\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.1.23}$$

Para $k < 0$ la demostración se basa en dos hechos: el primero es que todo $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ se puede escribir como la suma de derivadas hasta el orden $|k|$-ésimo de funciones f_α de $L^p(\mathbb{R}^N)$:

$$f = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq |k|} \partial^\alpha f_\alpha$$

y la norma de f en $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ se puede expresar en términos de las normas de las f_α en $L^p(\mathbb{R}^N)$. El segundo es que $\|\partial^\alpha(E * f_\alpha)\|_{W^{k+2,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|E * f_\alpha\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^N)}$ para cualquier multiíndice α de orden menor o igual que $|k|$, y gracias a (2.1.23) $\|E * f_\alpha\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f_\alpha\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$. Por lo tanto podemos estimar la norma en $W^{k+2}(\mathbb{R}^N)$ de $E * f$ en términos de las normas en $L^p(\mathbb{R}^N)$ de las f_α y por lo tanto en términos de la norma en $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ de f.

Si $k > 0$ sólo tenemos que tener en cuenta que para cualquier multiíndice $\beta = \alpha + \alpha_2$ con $|\alpha| = k$, $|\alpha_2| = 2$, $\|\partial^\beta(E * f)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|\partial^{\alpha_2}(E * \partial^\alpha f)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$. Por la definición de la norma en $W^{2,p}$, esta cantidad es menor o igual que $\|E * \partial^\alpha f\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^N)}$ y aplicando (2.1.23), esto es menor o igual que $C\|\partial^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^N)}$. □

Corolario 2.1.7 *Sea $\mathcal{A} = (a_{ij})$ una matriz definida positiva de entradas reales, $\lambda > 0$ y $f \in \left(W^{1,p'}(\mathbb{R}^N)\right)' = W^{-1,p}(\mathbb{R}^N)$. Entonces existe una única solución $y \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ de la ecuación*

$$-\sum_{i,j=1}^{N} \partial_{x_j}(a_{ij}\partial_{x_i} y) + \lambda y = f \ \text{ en } \mathbb{R}^N \tag{2.1.24}$$

Además, se cumple la estimación

$$\|y\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f\|_{\left(W^{1,p'}(\mathbb{R}^N)\right)'}$$

para alguna C que depende de los coeficientes del operador, N y p.

Demostración. Si renombramos $f = f/\lambda$ y $b_{ij} = (a_{ij} + a_{ji})/(2\lambda)$, entonces (2.1.24) se puede escribir como

$$-\sum_{i,j=1}^{N} \partial_{x_j}(b_{ij}\partial_{x_i} y) + y = f \text{ en } \mathbb{R}^N \tag{2.1.25}$$

Como $\mathcal{B} = (b_{ij})$ es una matriz simétrica y definida positiva, existe P regular tal que $\mathcal{B} = PP^T$. Hacemos el cambio de variable $x = \hat{x}$ y definimos $\hat{y} = y \circ P$ y $\hat{f} = f \circ P$, con lo que (2.1.25) se escribe como

$$-\Delta\hat{y} + \hat{y} = \hat{f} \text{ en } \mathbb{R}^N. \tag{2.1.26}$$

Como E es la solución fundamental del operador $-\Delta + 1$, entonces $\hat{y} = E * \hat{f} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ es la única solución de (2.1.26) y satisface

$$\|\hat{y}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\hat{f}\|_{\left(W^{1,p'}(\mathbb{R}^N)\right)'}.$$

La unicidad se deduce a través de la transformada de Fourier teniendo en cuenta la densidad del espacio $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N)$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Deshaciendo el cambio de variable, tenemos que $y \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ es la única solución de (2.1.24) y

$$\|y\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f\|_{\left(W^{1,p'}(\mathbb{R}^N)\right)'},$$

donde C depende de p, N y (a_{ij}). $\square$

Ahora vamos a deducir algunas estimaciones en un semiespacio. Comenzamos con problemas que involucran sólo al operador de Laplace.

Introduzcamos alguna notación, siguiendo a Grisvard [59, págs. 97–105]. Para toda función f definida en $\mathbb{R}^N_+$, $\tilde{f}$ es su extensión por cero a todo el espacio.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^N_+ \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Con δ_N denotamos la medida de Dirac en la variable x_N y δ'_N su derivada en el sentido de las distribuciones en $\mathbb{R}$. Para todo $s > 1/p$ y $p > 1$, la aplicación

$$\gamma_N : W^{s,p}(\mathbb{R}^N_+) \to W^{s-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})$$

denota el operador traza sobre el eje x_N. Para $g \in W^{s,p}(\mathbb{R}^{N-1})$, $s < 0$, definimos

$$g \otimes \delta_N \in \left(W^{1/p'-s,p'}(\mathbb{R}^N)\right)'$$

por

$$< g \otimes \delta_N, u > = < g, \gamma_N u > .$$

Sea $F\varphi$ la transformada de Fourier de φ en las variables $x' = (x_1, \ldots, x_{N-1})$

$$F\varphi = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-i\xi x'} \varphi(x') dx'.$$

Lema 2.1.8 *Para $f \in \left(W^{1,p'}(\mathbb{R}^N_+)\right)'$ existe una única solución variacional $y \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$ del problema de Neumann*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta y + y & = & f & \text{en } \mathbb{R}^N_+ \\ \partial_{x_N} y & = & 0 & \text{sobre } \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}. \end{array} \right. \tag{2.1.27}$$

Además, se cumple la estimación

$$\|y\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)} \leq C \|f\|_{\left(W^{1,p'}(\mathbb{R}^N_+)\right)'},$$

donde C depende de N y p.

Nota 2.1.2 *Recuérdese que en todo momento estamos hablando de la solución de un problema variacional, y que la escritura del problema en forma de ecuación en derivadas parciales es meramente simbólica, y nos sirve para mantener una unidad de notación respecto al caso Dirichlet.*

Demostración. Tomemos una sucesión de funciones f_k en $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ que converja hacia f en la norma de $\left(W^{1,p'}(\mathbb{R}^N_+)\right)'$ y sea

$$w_k = E * \tilde{f}_k.$$

Tenemos que $w_k \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y

$$\|w_k\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\tilde{f}_k\|_{W^{-1,p}(\mathbb{R}^N)} = C \|f_k\|_{\left(W^{1,p'}(\mathbb{R}^N_+)\right)'}.$$

Definamos ahora, para $x_N > 0$

$$y_k(x', x_N) = w_k(x', x_n) + w_k(x', -x_N).$$

Claramente en $\mathbb{R}^N_+$

$$-\Delta y_k + y_k = [-\Delta w_k(x', x_N) + w_k(x', x_N)] + [-\Delta w_k(x', -x_N) + w_k(x', -x_N)] =$$

$$= f_k + 0 = f_k \tag{2.1.28}$$

y como $w_k \in W^{2,p}(R^N_+)$ podemos escribir

$$\partial_{x_N} y_k(x', 0) = \partial_{x_N} w_k(x', 0) - \partial_{x_N} w_k(x', 0) = 0. \tag{2.1.29}$$

Ahora (2.1.28) y (2.1.29) nos llevan a

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} (\nabla y_k \nabla z + y_k z) =< f_k, z > \quad \forall z \in W^{1,p'}(\mathbb{R}^N_+). \tag{2.1.30}$$

Además

$$\|y_k\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)} \le \|w_k\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)} + \|w_k\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_-)} = \|w_k\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$$

y por tanto

$$\|y_k\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)} \le C\|f_k\|_{\left(W^{1,p'}(\mathbb{R}^N_+)\right)'}.$$

De la continuidad de la convolución, deducimos que $w_k = E * \tilde{f}_k \to w = E * \tilde{f}$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, y consecuentemente, $y_k \to y$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$, con $y(x', x_N) = w(x', x_N) + w(x', -x_N)$. Ahora podemos pasar al límite en (2.1.30) para deducir que y es la solución variacional de (2.1.27).

La unicidad se sigue de la densidad de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap H^1(\mathbb{R}^N_+)$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$. □

Damos ahora un resultado clave para el tratamiento del problema de Neumann cuando la matriz de coeficientes no es simétrica. Se trata de un resultado para un problema con derivada oblicua. El mismo problema ha sido considerado por Grisvard en [59], donde se ha prueba regularidad $W^{2,p}$ de la solución para un dato más regular.

Lema 2.1.9 *Para $g \in W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})$ y $m_1, \dots, m_N \in \mathbb{R}$, $m_N \neq 0$, existe una única solución variacional $y \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$ del problema*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta y + y & = & 0 & \text{en } \mathbb{R}^N_+ \\ \displaystyle\sum_{j=1}^N m_j \partial_{x_j} y & = & g & \text{sobre } \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\} \end{array} \right. \tag{2.1.31}$$

Además, se cumple la estimación

$$\|y\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)} \le C\|g\|_{W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})}$$

para alguna constante C que depende de N, p y de los coeficientes m_j.

Demostración. Nótese que para funciones en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$, y $1 \leq j \leq N-1$, $\partial_{x_j} y(x',0) = (\partial_{x_j}\gamma_N y)(x') \in W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})$. Por lo tanto, la solución variacional de (2.1.31) es la solución del problema variacional

$$\int_{R^N_+} (\nabla y \nabla z + yz) + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{m_j}{m_N} < \partial_{x_j} y, \gamma_N z >= \frac{1}{m_N} < g, \gamma_N z > \quad \forall z \in W^{1,p'}(\mathbb{R}^N_+).$$

Vamos a adaptar algunas de las ideas de Grisvard [59]. Para ese propósito tomamos una sucesión de funciones $g_n \in W^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})$ con $g_n \to g$ en $W^{-1/p,p}(R^{N-1})$. Estudiemos las ecuaciones variacionales

$$\int_{R^N_+} (\nabla y_n \nabla z + y_n z) + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{m_j}{m_N} < \partial_{x_j} y_n, \gamma_N z >= \frac{1}{m_N} < g_n, \gamma_N z > \quad \forall z \in W^{1,p'}(\mathbb{R}^N_+). \tag{2.1.32}$$

Estas ecuaciones se pueden escribir como

$$\begin{cases} -\Delta y_n + y_n &= 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N_+ \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{N} m_j \partial_{x_j} y_n &= g_n \quad \text{sobre } \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}. \end{cases}$$

Gracias a Grisvard [59], sabemos que cada una de estas ecuaciones tiene una solución única $y_n \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+)$, y que puede ser explícitamente representada por medio de transformadas de Fourier como

$$y_n = -E * (k_0^n \otimes \delta'_N + k_1^n \otimes \delta_N), \tag{2.1.33}$$

donde

$$k_0^n = F^{-1} b F g_n,$$

$$k_1^n = F^{-1} p_- b F g_n,$$

$$b = \left(m_N p_- + \sum_{j=1}^{N-1} i m_j \xi_j \right)^{-1}$$

y

$$p_- = -i\sqrt{1 + \|\xi\|^2}.$$

Queremos una estimación de la norma en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$ de y_n en términos de la norma de g_n en $W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})$, para poder pasar al límite en (2.1.32).

El Lema 2.3.2.5 en Grisvard [59] implica que

$$k_1^n \in W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})$$

y

$$\|k_1^n\|_{W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})} \leq C\|g_n\|_{W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})}. \tag{2.1.34}$$

Aplicando el Lema 2.3.2.2 en Grisvard [59], con $s = -1/p$, tenemos que

$$k_1^n \otimes \delta_N \in W^{-1,p}(\mathbb{R}^N)$$

y

$$\|k_1^n \otimes \delta_N\|_{W^{-1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|k_1^n\|_{W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})}. \tag{2.1.35}$$

El Lema 2.1.6 implica que

$$E * (k_1^n \otimes \delta_N) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

y que

$$\|E * (k_1^n \otimes \delta_N)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|k_1^n \otimes \delta_N\|_{W^{-1,p}(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.1.36}$$

Poniendo juntas (2.1.34), (2.1.35) y (2.1.36) tenemos

$$\|E * (k_1^n \otimes \delta_N)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|g_n\|_{W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})}. \tag{2.1.37}$$

De la misma manera,, usando los Lemas 2.3.2.5 y 2.3.2.2 en Grisvard [59] tenemos que

$$k_0^n \in W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1}),$$

$$\|k_0^n\|_{W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})} \leq C\|g_n\|_{W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})},$$

$$k_0^n \otimes \delta_N \in W^{-1,p}(\mathbb{R}^N)$$

y

$$\|k_0^n \otimes \delta_N\|_{W^{-1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|k_0^n\|_{W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})}. \tag{2.1.38}$$

Siguiendo de nuevo el mismo método que para k_1^n, tenemos que

$$E * (k_0^n \otimes \delta_N) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

y

$$\|E * (k_0^n \otimes \delta_N)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|g_n\|_{W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

Por lo tanto

$$\partial_{x_N}[E*(k_0^n\otimes\delta_N)]\in L^p(\mathbb{R}^N)$$

y

$$\|\partial_{x_N}[E*(k_0^n\otimes\delta_N)]\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\le C\|g_n\|_{W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

Pero

$$\partial_{x_N}[E*(k_0^n\otimes\delta_N)]=E*(k_0^n\otimes\delta_N'), \tag{2.1.39}$$

así que

$$E*(k_0^n\otimes\delta_N')\in L^p(\mathbb{R}^N)$$

y

$$\|E*(k_0^n\otimes\delta_N')\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\le C\|g_n\|_{W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})}. \tag{2.1.40}$$

Para ver que $E*(k_0^n\otimes\delta_N')\in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$, sólo hay que probar que sus derivadas pertenecen a $L^p(\mathbb{R}^N_+)$. Para $1\le j\le N-1$ podemos escribir

$$\partial_{x_j}k_0^n=F^{-1}i\xi_j bFg_n,$$

y entonces, usando los Lemas 2.3.2.5 y 2.3.2.2 en Grisvard y el Lema 2.1.6 tenemos que

$$\partial_{x_j}k_0^n\in W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1}),$$

$$\|\partial_{x_j}k_0^n\|_{W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})}\le C\|g_n\|_{W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})},$$

$$\partial_{x_j}k_0^n\otimes\delta_N\in W^{-1,p}(\mathbb{R}^N),$$

$$\|\partial_{x_j}k_0^n\otimes\delta_N\|_{W^{-1,p}(\mathbb{R}^N)}\le C\|\partial_{x_j}k_0^n\|_{W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})},$$

$$E*(\partial_{x_j}k_0^n\otimes\delta_N)\in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \tag{2.1.41}$$

y

$$\|E*(\partial_{x_j}k_0^n\otimes\delta_N)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}\le C\|g_n\|_{W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

Y por lo tanto

$$\partial_{x_j}\left[E*(k_0^n\otimes\delta_N')\right]\in L^p(\mathbb{R}^N)$$

y

$$\|\partial_{x_j}\left[E*(k_0^n\otimes\delta_N')\right]\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\le C\|g_n\|_{W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})}. \tag{2.1.42}$$

Para comprobar que $\partial_{x_N}\left[E*(k_0^n\otimes\delta_N')\right]\in L^p(\mathbb{R}_+^N)$ y obtener una estimación de su norma en términos de la norma de g_n en $W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})$, podemos escribir

$$\partial_{x_N}\left[E*(k_0^n\otimes\delta_N')\right]=\partial^2_{x_N^2}\left[E*(k_0^n\otimes\delta_N)\right]=E*(k_0^n\otimes\delta_N)-\sum_{j=1}^{N-1}\partial^2_{x_j^2}\left[E*(k_0^n\otimes\delta_N)\right]\ \text{ en } \mathbb{R}_+^N$$

ya que E es una solución fundamental de $-\Delta+1$ y $k_0^n\otimes\delta_N$ es una distribución con soporte en $R^{N-1}\times\{0\}$. Ya sabemos que $E*(k_0^n\otimes\delta_N)\in L^p(R^N)$ y tenemos una estimación de su norma en términos de $\|g_n\|_{W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})}$ (de hecho, sabemos que pertenece a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$). Teniendo en cuenta (2.1.41) y escribiendo para $1\le j\le N-1$

$$\partial^2_{x_j^2}\left[E*(k_0^n\otimes\delta_N)\right]=\partial_{x_j}\left[E*(\partial_{x_j}k_0^n\otimes\delta_N)\right],$$

tenemos que

$$\partial^2_{x_j^2}\left[E*(k_0^n\otimes\delta_N)\right]\in L^p(\mathbb{R}^N)$$

y

$$\|\partial^2_{x_j^2}\left[E*(k_0^n\otimes\delta_N)\right]\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\le C\|g_n\|_{W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

Así que finalmente obtenemos

$$\partial_{x_N}\left[E*(k_0^n\otimes\delta_N')\right]\in L^p(\mathbb{R}_+^N)$$

y

$$\|\partial_{x_N}\left[E*(k_0^n\otimes\delta_N')\right]\|_{L^p(\mathbb{R}_+^N)}\le C\|g_n\|_{W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})}. \tag{2.1.43}$$

Poniendo juntas (2.1.40), (2.1.42) y (2.1.43), obtenemos que

$$E*(k_0^n\otimes\delta_N')\in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)$$

y

$$\|E*(k_0^n\otimes\delta_N')\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)}\le C\|g_n\|_{W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})}. \tag{2.1.44}$$

Ahora, de (2.1.33), (2.1.37) y (2.1.44), deducimos

$$\|y_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)}\le C\|g_n\|_{W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

Ahora podemos tomar y el limite de y_n en $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)$, y pasar al límite en la ecuación (2.1.32), para así obtener que y es una solución variacional de nuestro problema.

La unicidad se sigue de nuevo de la densidad de $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)\cap H^1(\mathbb{R}_+^N)$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)$.

$\square$

Corolario 2.1.10 *Para* $f \in \left(W^{1,p'}(\mathbb{R}^N_+)\right)'$, $g \in W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})$ *y* $m_1, \ldots, m_N \in \mathbb{R}$, $m_N \neq 0$, *existe una única solución variacional* $y \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$ *del problema*

$$\begin{cases} -\Delta y + y &= f \quad \text{en } \mathbb{R}^N_+ \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{N} m_j \partial_{x_j} y &= g \quad \text{sobre } \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}. \end{cases}$$

además, se satisface la estimación

$$\|y\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)} \leq C \left(\|f\|_{\left(W^{1,p'}(\mathbb{R}^N_+)\right)'} + \|g\|_{W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})} \right),$$

donde C *depende de* N, p *y los coeficientes* m_j.

Demostración. Gracias al Lema 2.1.8, sabemos que existe una única solución variacional $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$ de

$$\begin{cases} -\Delta v + v &= f \quad \text{en } \mathbb{R}^N_+ \\ \partial_{x_N} v &= 0 \quad \text{sobre } \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}. \end{cases}$$

Esta función satisface

$$\|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)} \leq C \|f\|_{\left(W^{1,p'}(\mathbb{R}^N_+)\right)'} \tag{2.1.45}$$

Entonces tenemos que

$$\gamma_N v \in W^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1}),$$

y para $1 \leq j \leq N-1$,

$$\partial_{x_j} \gamma_N v \in W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})$$

y

$$\|\partial_{x_j} \gamma_N v\|_{W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})} \leq \|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)}. \tag{2.1.46}$$

Gracias al Lema 2.1.9 podemos resolver el problema

$$\begin{cases} -\Delta w + w &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{en } \mathbb{R}^N_+ \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{N} m_j \partial_{x_j} w &= g - \displaystyle\sum_{j=1}^{N-1} m_j \partial_{x_j} (\gamma_N v) \quad \text{sobre } \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\} \end{cases}$$

Tenemos que $w \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$ y que

$$\|w\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)} \leq C \left(\|g\|_{W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})} + \|\sum_{j=1}^{N-1} m_j \partial_{x_j} \gamma_N v\|_{W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})} \right).$$

Usando esta desigualdad junto con (2.1.46) y (2.1.45), conseguimos

$$\|w\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)} \leq C\left(\|f\|_{\left(W^{1,p'}(\mathbb{R}^N_+)\right)'} + \|g\|_{W^{-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})}\right). \tag{2.1.47}$$

Obtenemos que $y = v + w \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$ es la solución de nuestro problema, y de (2.1.45) y (2.1.47) se deduce que se cumple la estimación requerida. □

Corolario 2.1.11 *Sea $\mathcal{A} = (a_{ij})$ una matriz definida positiva de entradas reales, $\lambda > 0$ y $f \in \left(W^{1,p'}(\mathbb{R}^N_+)\right)'$. Entonces, existe una solución única $y \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$ de la igualdad variacional*

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \int_{\mathbb{R}^N_+} \partial_{x_i} y \partial_{x_j} z + \lambda \int_{\mathbb{R}^N_+} yz =< f, z > \quad \forall z \in W^{1,p'}(\mathbb{R}^N_+). \tag{2.1.48}$$

Además, se satisface la estimación

$$\|y\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)} \leq C\|f\|_{\left(W^{1,p'}(\mathbb{R}^N_+)\right)'}, \tag{2.1.49}$$

donde C es una constante que depende sólo de p, m, M, λ y N.

Demostración. Si llamamos $\mathcal{B} = (b_{ij})$, $b_{ij} = (a_{ij}+a_{ji})/(2\lambda)$, y renombramos $f = f/\lambda$, entonces nuestra ecuación puede ser escrita formalmente como

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \partial_{x_j}(b_{ij}\partial_{x_i} y) + y & = & f & \text{en } \mathbb{R}^N_+ \\ \nabla y^T \mathcal{A} n & = & 0 & \text{sobre } \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}, \end{array}\right. \tag{2.1.50}$$

donde $n = (0, \ldots, 0, 1)^T$. Nótese que $\mathcal{A}n$ no pertenece a $\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$.

La matriz $\mathcal{B}$ es simétrica y definida positiva, por lo tanto existe una matriz regular P tal que $\mathcal{B} = PP^T$. Si escribimos $T = P^{-1}$ y hacemos el cambio de variable $\hat{x} = Tx$, entonces (2.1.50) se convierte en

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta\hat{y} + \hat{y} & = & \hat{f} & \text{en } T\mathbb{R}^N_+ \\ \nabla\hat{y}^T T\mathcal{A}n & = & 0 & \text{sobre } T(\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}), \end{array}\right.$$

donde $\hat{y} = y \circ P$ y $\hat{f} = f \circ P$. Nótese de nuevo que debido a que T es regular $T\mathcal{A}n \notin T(\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\})$.

Tomemos ahora una matriz ortogonal Q tal que $QT(\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}) = \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$ y $QT\mathbb{R}^N_+ = \mathbb{R}^N_+$. Si llamamos $\tilde{x} = Q\hat{x}$, $\tilde{y} = \hat{y} \circ Q^{-1}$ y $\tilde{f} = \hat{f} \circ Q^{-1}$, obtenemos la ecuación

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta\tilde{y} + \tilde{y} & = & \tilde{f} & \text{en } \mathbb{R}^N_+ \\ \nabla\tilde{y}^T QT\mathcal{A}n & = & 0 & \text{sobre } \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}. \end{array} \right. \tag{2.1.51}$$

Otra vez, como Q es regular $QT\mathcal{A}n \notin \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$. Si llamamos $m = QT\mathcal{A}n$, esto significa que $m_N \neq 0$ y estamos bajo las condiciones del Corolario 2.1.10. Por lo tanto existe una única solución variacional $\tilde{y} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$ y

$$\|\tilde{y}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)} \leq C\|\tilde{f}\|_{\left(W^{1,p'}(\mathbb{R}^N_+)\right)'}$$

Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos que existe una única solución variacional $y \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$ de (2.1.48) y que cumple la estimación (2.1.49). □

Nota 2.1.3 *Notemos que la condición frontera de* (2.1.51) *se reduce a* $\partial_{x_N}\tilde{y} = 0$ *sobre* $\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$ *cuando la matriz* $\mathcal{A} = (a_{ij})$ *es simétrica. En tal caso, el Lema 2.1.9 no es necesario para establecer el Corolario 2.1.11, siendo la demostración mucho más simple. De hecho se puede realizar aplicando solamente el Lema 2.1.8.*

Ahora estamos listos para probar el Teorema 2.1.3. En lo que sigue denotaremos $f_N = f + g \circ \gamma$ y tenemos que $f_N \in \left(W^{1,p'}(\Omega)\right)'$. Entonces (2.1.9) se puede escribir como sigue.

$$a(y, z) = \langle f_N, z\rangle \quad \forall z \in W^{1,p'}(\Omega). \tag{2.1.52}$$

Usaremos un resultado análogo al Lema 2.1.4; véanse Troianiello [87] y Stampacchia [84] para una demostración.

Lema 2.1.12 *Supongamos que* $p \geq 2$*. Entonces existe una solución variacional única* $y \in H^1(\Omega) \cap L^{p^*}(\Omega)$ *que satisface la ecuación* (2.1.4)*. Además, se satisface la estimación*

$$\|y\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|f_N\|_{\left(W^{1,p'}(\Omega)\right)'}, \tag{2.1.53}$$

donde C *es una constante que sólo depende de* p*, la dimensión* N*,* m*,* M *y la medida de* Ω*. Nótese que obviamente también*

$$\|y\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|f_N\|_{\left(W^{1,p'}(\Omega)\right)'},$$

Demostración del Teorema 2.1.3. Consideremos primero el caso $2 \leq p < +\infty$ si $N = 2$ y $2 \leq p \leq 2N/(N-2)$ si $N \geq 3$. Sea $y \in H^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ como en el Lema 2.1.12. El plan de la demostración es como sigue.

1. Tomamos una colección de sistemas de coordenadas sobre Γ y un subdominio de Ω, así como una partición de la unidad relativa a esta colección. Estudiamos la ecuación (2.1.52) en cada uno de estos dominios.

2. Hacemos un cambio de variable para así obtener un problema con coeficientes continuos en un rectángulo. Además sabemos que el soporte de la solución interseca a lo sumo uno de los lados del rectángulo y está "lejos" de los otros.

3. "Congelamos" los coeficientes. Así obtenemos un problema con coeficientes constantes en un rectángulo. El soporte de la solución puede estar, bien en el interior del rectángulo, bien intersecando sólo uno de los lados.

4. Extendemos el problema a todo el espacio o al semiespacio y lo resolvemos.

Paso 1.

Como la frontera de Ω es de clase C^1, existen (cf: Nečas [72]) números $\alpha > 0$, $\beta > 0$, sistemas de coordenadas $(x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kN})$, para abreviar (x'_k, x_{kN}), $k = 1, 2, \ldots, \Lambda$, y funciones b_k de clase C^1 en los cubos cerrados $N-1$ dimensionales $|x_{ki}| \leq \alpha$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, de tal modo que cada punto x de Γ se puede representar al menos en unos de estos sistemas como $x = (x'_k, b_k(x'_k))$. También se supone que os puntos (x'_k, x_{kN}) tales que $x'_k \in [-\alpha, \alpha]^{N-1}$, $b_k(x'_k) < x_{kN} < b_k(x'_k) + \beta$ están en Ω, mientras que los puntos (x'_k, x_{kN}) tales que $x'_k \in [-\alpha, \alpha]^{N-1}$, $b_k(x'_k) - \beta < x_{kN} < b_k(x'_k)$ están fuera de Ω.

Para cada $k = 1, 2, \ldots, \Lambda$ denotemos

$$G_k = \left\{ (x'_k, b_k(x'_k) + t),\ x'_k \in (-\alpha, \alpha)^{N-1},\ 0 < t < \beta \right\},$$

y tomemos un conjunto abierto $G_{\Lambda+1} \subset \bar{G}_{\Lambda+1} \subset \Omega$ tal que $\{G_1, \ldots, G_\Lambda, G_{\Lambda+1}\}$ sea un recubrimiento por abiertos de la clausura de Ω. También escogemos $\{\psi_1, \ldots, \psi_\Lambda, \psi_{\Lambda+1}\}$ una partición de la unidad relativa a este recubrimiento.

Tomando

$$y_k = \psi_k y$$

y

$$< f_k, z > = < \psi_k f_N, z > - \int_{G_k} \sum_{i,j=1}^{N} z a_{ij} \partial_{x_i} y \partial_{x_j} \psi_k + \int_{G_k} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} y \partial_{x_i} \psi_k \partial_{x_j} z \quad \forall z \in W^{1,p'}(G_k)$$

se comprueba que y_k verifica la ecuación

$$\int_{G_k} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\partial_{x_i} y_k \partial_{x_j} z + \int_{G_k} y_k z =< f_k, z > \quad \forall z \in W^{1,p'}(G_k).$$

Usando el Lema 2.1.12, las hipótesis sobre p establecidas previamente y argumentando como en las relaciones (2.1.16)–(2.1.18), obtenemos que $f_k \in \big(W^{1,p'}(G_k)\big)'$.

Nótese que el tanto el soporte de y_k como el de f_k están "lejos"de la parte de la frontera de G_k que no interseca Γ.

Paso 2.

Ahora vamos a hacer un cambio de variable para transformar nuestro dominio G_k en un rectángulo. Para $k = 1, 2, \ldots, \Lambda$ definamos $J_k : G_k \longrightarrow \mathcal{R} = (-\alpha, +\alpha)^{N-1} \times (0, \beta)$ por

$$\tilde{x} = J_k(x) = (x', -b_k(x') + x_n).$$

J_k es un difeomorfismo C^1. La función $z_k(\tilde{x}) = y_k(\tilde{x}', b_k(\tilde{x}') + \tilde{x}_N)$ satisface la ecuación variacional

$$a_k(z_k, z) =< f^k_{\mathcal{R}}, z > \quad \forall z \in W^{1,p'}(\mathcal{R}),$$

donde $f^k_{\mathcal{R}} \in \big(W^{1,p'}(\mathcal{R})\big)'$ es la transformada de f_k por el cambio de variable y

$$a_k(z_k, z) = \int_{\mathcal{R}} \nabla z_k (DJ_k)\hat{A}(DJ_k)^T \nabla z^T |\mathrm{Jac} J_k^{-1}| + \int_{\mathcal{R}} z_k z |\mathrm{Jac} J_k^{-1}|,$$

donde $\hat{A}$ es la matriz (a_{ij}).

La forma bilineal a_k tiene coeficientes continuos y es coerciva en $H^1(\mathcal{R})$. Denotaremos los coeficientes de a_k por a^k_{ij} y a^k_0. Por construcción, sabemos que $z_k \in H^1(\mathcal{R}) \cap L^p(\mathcal{R})$ y que su soporte interseca una de las caras de $\mathcal{R}$ y está "lejos"de los otros. Probemos que $z_k \in W^{1,p}(\mathcal{R})$ y que satisface la estimación

$$\|z_k\|_{W^{1,p}(\mathcal{R})} \leq C \|f^k_{\mathcal{R}}\|_{\left(W^{1,p'}(\mathcal{R})\right)'}. \tag{2.1.54}$$

Para $G_{\Lambda+1}$ no es necesario hacer ningún cambio de variable. En este caso el soporte de $y_{\Lambda+1}$ está dentro de $G_{\Lambda+1}$.

Paso 3.

Esta parte de la demostración es análoga a la del caso Dirichlet. Usando (2.1.13), tomamos de nuevo un recubrimiento por abiertos de diámetro menor o igual que ρ,

$\left\{C_\rho^{k,s}\right\}_{s=1}^{\mu}$. Estos conjuntos son cuadrados para $k = 1, 2, \ldots, \Lambda$ o tienen una frontera de clase C^∞ para $k = \Lambda + 1$. Escogemos un punto $x_{k,s} \in C_\rho^{k,s}$. También tomamos una partición de la unidad relativa a ese recubrimiento $\{\varphi_{k,s}\}_{s=1}^{\mu}$. Tomamos $z_{k,s}$ para $1 \leq s \leq \mu$ como en (2.1.14) y así obtenemos que $z_{k,s}$ satisface la igualdad variacional

$$a_{k,s}(z_{k,s}, z) = T^N_{z_{k,s}}(z) \; \forall z \in W^{1,p'}(\mathcal{R})$$

donde

$$a_{k,s}(z, v) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}^k(x_{k,s}) \int_{\mathcal{R}} \partial_{x_i} z \partial_{x_j} v + a_0^k(x_{k,s}) \int_{\mathcal{R}} zv$$

y

$$\begin{aligned} T^N_\xi(z) \;\; = \;\; & < f_N, \varphi_{k,s} z > + \int_{\mathcal{R}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^k(x) z(x) \partial_{x_i} \varphi_{k,s}(x) \partial_{x_j} z(x) + \\ & \int_{\mathcal{R}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^k(x) \partial_{x_i} z_k(x) \partial_{x_j} \varphi_{k,s}(x) z(x) + \\ & \int_{C_\rho^{k,s}} \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}^k(x_{k,s}) - a_{ij}(x)\right) \partial_{x_i} \xi(x) \partial_{x_j} z(x) + \\ & \int_{C_\rho^{k,s}} \left(a_0^k(x_{k,s}) - a_0^k(x)\right) \xi z, \end{aligned}$$

para cualquier $\xi \in W^{1,p}(\mathcal{R})$. Para $k = \Lambda + 1$ las relaciones previas se mantienen reemplazando $\mathcal{R}$ por $G_{\Lambda+1}$.

Paso 4.

Nótese que gracias a las propiedades de los soportes de z_k y $\varphi_{k,s}$, sólo dos casos pueden aparecer:

- Primer caso: el soporte de $z_{k,s}$ está dentro de $C_\rho^{k,s}$.
- Segundo caso: el soporte de $z_{k,s}$ interseca una cara de $C_\rho^{k,s}$ y está "lejos" de las otras.

Tomando $E = \mathbb{R}^N$ en el primer caso y $E = \mathbb{R}^N_+$ en el segundo, tenemos que $z_{k,s} \in H^1(E) \cap L^p(E)$ y satisface la siguiente igualdad variacional.

$$\tilde{a}_{k,s}(z_{k,s}, z) = T^N_{z_{k,s}}(z) \; \forall z \in W^{1,p'}(E),$$

donde

$$\tilde{a}_{k,s}(z,v) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}^k(x_{k,s}) \int_E \partial_{x_i} z \partial_{x_j} v + a_0^k(x_{k,s}) \int_E zv.$$

Usando los Corolarios 2.1.7 y 2.1.11 deducimos la existencia de una única solución $z_\xi \in W^{1,p}(E)$ de

$$\tilde{a}_{k,s}(z_\xi, z) = T_\xi^N(z) \ \forall z \in W^{1,p'}(E)$$

para cada $\xi \in W^{1,p}(E)$. Como en la demostración del Teorema 2.1.1 podemos mostrar la contractividad de la aplicación $\xi \to z_\xi$ para ρ suficientemente pequeño. Por lo tanto existe un único punto fijo de esta aplicación, que es $z_{k,s}$. Así tenemos que $z_{k,s} \in W^{1,p}(\mathcal{R})$ y $z_{k,s}$ satisface la estimación (2.1.54).

La demostración concluye sumando todos los $z_{k,s}$, deshaciendo el cambio de variable y sumando todos los y_k.

De nuevo, argumentando como en la demostración del Teorema 2.1.1, el resultado se puede extender para todo $p > 2N/(N-2)$ y por dualidad para todo $1 < p < 2$. □

2.2 Ecuaciones parabólicas

En esta sección nos ocupamos de la regularidad en $L^\tau(0,T;W^{1+\varepsilon,p}(\Omega))$, $\varepsilon \geq 0$ de la solución de un problema parabólico con condición de frontera Neumann. El objetivo es deducir regularidad $L^\tau(0,T;W^{1+\varepsilon,p}(\Omega))$ de la solución bajo condiciones mínimas de regularidad sobre los coeficientes de la parte principal del operador y sobre la frontera del dominio. Como en el caso elíptico, coeficientes continuos y frontera C^1 son suficientes para esta regularidad si $\varepsilon = 0$. Si $\varepsilon > 0$, serán necesarios coeficientes Hölder continuos y frontera de clase $C^{1+\hat{\varepsilon}}$.

Introducción

Sea Ω un subconjunto abierto acotado y conexo de $\mathbb{R}^N$. De nuevo denotaremos por Γ la frontera de Ω. Sea T un número real positivo. Sean $Q = \Omega\times]0,T[$ y $\Sigma = \Gamma\times]0,T[$. Introducimos el operador elíptico

$$Ay = -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_{x_j}\left(a_{ij}(x,t)\partial_{x_i} y\right).$$

El propósito de esta sección es estudiar resultados de regularidad en $L^\tau(0,T;W^{1+\varepsilon,p}(\Omega))$ de la solución del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay &= \hat{f} \quad \text{en } Q, \\ \dfrac{\partial y}{\partial n_A} &= \hat{g} \quad \text{sobre } \Sigma, \\ y(\cdot,0) &= 0 \quad \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

En esta sección, siempre que no lleve a confusión, usaremos las siguientes abreviaturas: $L^\tau(W^{s,p})$, $L^2(H^1)$, $W^{1,\tau}((W^{1,p})')$, $L^{\tilde{k}}(L^k(\Omega))$, $L^{\tilde{\sigma}}(L^\sigma(\Gamma))$, y $C(C^{0,\varepsilon}(\bar{\Omega}))$ respectivamente por $L^\tau(0,T;W^{s,p}(\Omega))$, $L^2(0,T;H^1(\Omega))$, $W^{1,\tau}(0,T;(W^{1,p}(\Omega))')$, $L^{\tilde{k}}(0,T;L^k(\Omega))$, $L^{\tilde{\sigma}}(0,T;L^\sigma(\Gamma))$ y $C([0,T];C^{0,\varepsilon}(\bar{\Omega}))$.

Existen en la literatura diferentes resultados relacionados con este. Por sencillez en la exposición, y por que la mayor parte de la literatura trata el problema de Dirichlet, consideraremos en esta introducción el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay &= f \quad \text{en } Q \\ y &= 0 \quad \text{sobre } \Sigma \\ y(0) &= 0 \quad \text{en } \Omega \times \{0\} \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Los resultados que buscamos están relacionados con resultados de regularidad maximal en el espacio $L^\tau(0,T;W^{1,p}(\Omega)$ ($L^\tau(W^{1,p})$-MRR para abreviar):

> *"La aplicación Λ que asocia f con la solución y de la ecuación* (2.2.2) *es continua de $L^\tau(0,T;W^{-1,p}(\Omega))$ en $L^\tau(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))\cap W^{1,\tau}(0,T;W^{-1,p}(\Omega))$."*

Como se explica en el Teorema 2.2.1, este resultado de regularidad está estrechamente relacionado con este otro

> *"La aplicación Λ que asocia f con la solución y de* (2.2.2) *es continua de $L^\tau(0,T;L^p(\Omega))$ en $L^\tau(0,T;W^{2,p}(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega))\cap W^{1,\tau}(0,T;L^p(\Omega))$."*

Nos referiremos a él como un resultado de regularidad maximal en $L^\tau(W^{2,p})$ ($L^\tau(W^{2,p})$-MRR para abreviar). Hay una literatura extensa para tales resultados:

Si la frontera de Ω es de clase C^2, el operador está en forma de *no-divergencia* y $a_{i,j}(x,t) \in C(\bar{Q})$, entonces se pueden encontrar $L^\tau(W^{2,p})$-MRR en Schlag [80] o Ladyzhenskaya, Solonnikov y Ural'tseva [64] para $p = \tau$, Dore y Venni [48] o Amann [4] para $p \neq \tau$ pero $a_{i,j}$ independientes del tiempo. Para $a_{i,j}$ dependientes del tiempo, un $L^\tau(W^{2,p})$-MRR se puede encontrar para Γ de clase C^4 en Von Wahl [90]. Amann anuncia al final del Capítulo IV de [4] que aparecerán otros resultados en el segundo volumen de su monografía [5]. Labbas y Moussaoui en [63] establecen un $L^\tau(W^{2,p})$-MRR suponiendo que Γ es de clase C^2, $a_{i,j}(x,t) \in C(\bar{Q})$, $\frac{\partial a_{i,j}}{\partial x_k} \in L^\infty(Q)$, y $a_{i,j}(x,t) = a_1(x)a_2(t)$ si $i = j$, $a_{i,j} = 0$ si no. En Cannarsa y Vespri [14] un $L^\tau(W^{2,p})$-MRR se establece para $\Omega = \mathbb{R}^N$, con coeficientes acotados $a_{i,j}(x,t) \in C(\bar{Q})$, $\frac{\partial a_{i,j}(x,t)}{\partial x_k} \in C(\bar{Q})$.

Veamos que un $L^\tau(W^{1,p})$-MRR se puede deducir de un $L^\tau(W^{2,p})$-MRR por dualidad e interpolación.

Teorema 2.2.1 *Si la aplicación Λ que asocia la solución y de (2.2.2) con f es continua del espacio $L^\tau(0,T;L^p(\Omega))$ en $L^\tau(0,T;W^{2,p}(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega))\cap W^{1,\tau}(0,T;L^p(\Omega))$ entonces Λ es también continua de $L^\tau(0,T;W^{-1,p}(\Omega))$ en $L^\tau(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))\cap W^{1,\tau}(0,T;W^{-1,p}(\Omega))$.*

Demostración. Consideremos la ecuación parabólica

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay &= f \quad \text{en } Q \\ y &= 0 \quad \text{sobre } \Sigma \\ y(T) &= 0 \quad \text{en } \Omega \times \{T\} \end{cases} \tag{2.2.3}$$

De la hipótesis de continuidad hecha sobre Λ, se deduce que la aplicación L que asocia la solución y de (2.2.3) con f es continua de $L^{\tau'}(L^{p'})$ en $L^{\tau'}(W^{2,p'} \cap W_0^{1,p'}) \cap W^{1,\tau'}(L^{p'})$. Ahora supongamos que f pertenece a $L^\tau((W^{2,p'} \cap W_0^{1,p'})')$. Podemos definir la solución de (2.2.2) por el llamado método de transposición de la siguiente manera:

Decimos que $y \in L^\tau(L^p)$ es una solución de (2.2.2) (cuando $f \in L^\tau((W^{2,p'} \cap W_0^{1,p'})')$) si

$$y = L^* f \tag{2.2.4}$$

(donde L^* es el operador adjunto del operador L arriba definido), esto es

$$\int_Q y(-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi)dxdt = \langle f, \varphi \rangle_{L^\tau((W^{2,p'}\cap W_0^{1,p'})')\times L^{\tau'}(W^{2,p'}(\Omega)\cap W_0^{1,p'})} \tag{2.2.5}$$

para todo $\varphi \in L^{\tau'}(W^{2,p'} \cap W_0^{1,p'}) \cap W^{1,\tau'}(L^{p'})$.

Como L es continua de $L^{\tau'}(L^{p'})$ en $L^{\tau'}(W^{2,p'} \cap W_0^{1,p'})$, entonces L^* es continua de $L^\tau((W^{2,p'} \cap W_0^{1,p'})')$ en $L^\tau(L^p)$.

Obsérvese que $L^\tau(L^p)$ puede ser identificada con un subespacio de $L^\tau((W^{2,p'} \cap W_0^{1,p'})')$ y que si $f \in L^\tau(L^p)$ entonces $\Lambda f = L^* f$.

Por lo tanto L^* es un operador continuo de $L^\tau(L^p)+L^\tau((W^{2,p'}\cap W_0^{1,p'})') = L^\tau((W^{2,p'}\cap W_0^{1,p'})')$ en $L^\tau(L^p)$. También es continuo de $L^\tau(L^p)$ en $L^\tau(W^{2,p'}\cap W_0^{1,p'})$.

Luego también es un operador continuo de

$$\Big[L^\tau(L^p), L^\tau((W^{2,p'}\cap W_0^{1,p'})')\Big]_{1/2}$$

en

$$\Big[L^\tau(L^p), L^\tau(W^{2,p'}\cap W_0^{1,p'})\Big]_{1/2} = L^\tau(W_0^{1,p}),$$

(donde $[\cdot,\cdot]_{1/2}$ es el functor de interpolación compleja de exponente $1/2$).

Usando Triebel [85, Teorema 1.11.3] y con la identidad

$$[L^{\tau'}(L^{p'}), L^{\tau'}(W^{2,p'}\cap W_0^{1,p'})]_{1/2} = L^{\tau'}(W_0^{1,p'}),$$

obtenemos

$$[L^\tau(L^p), L^\tau((W^{2,p'}\cap W_0^{1,p'})')]_{1/2} = L^\tau(W^{-1,p}).$$

Por lo tanto L^* (o Λ) es un operador continuo de $L^\tau(W^{-1,p})$ en $L^\tau(W_0^{1,p})$.

Ahora, si y es una solución de (2.2.2) podemos escribir

$$\langle\frac{dy}{dt},\varphi\rangle_{W^{-1,p}(\Omega)\times W_0^{1,p'}(\Omega)} = \langle f,\varphi\rangle - \int_\Omega (\sum_{i,j=1}^N a_{i,j}\partial_{x_j}y\partial_{x_i}\varphi)dx$$

para cada $\varphi\in W_0^{1,p'}(\Omega)$. Como $y\in L^\tau(W_0^{1,p})$ se sigue que la distribución $\dfrac{dy}{dt}$ pertenece a $L^\tau(W^{-1,p})$ y satisface

$$\left\|\frac{dy}{dt}\right\|_{L^\tau(W^{-1,p})} \le C\|f\|_{L^\tau(W^{-1,p})}.$$

La prueba está completa. □

El objetivo de esta sección es conseguir un resultado de regularidad en $L^\tau(W^{1,p})$ con coeficientes continuos y frontera de clase C^1. Bajo estas condiciones es imposible obtener un resultado en $L^\tau(W^{2,p})$, por lo que el teorema anterior resulta inaplicable. El único resultado parecido que hemos encontrado en la literatura es de Vespri [89, Teorema 3.1].

La técnica que usamos es la de perturbación del caso de coeficientes constantes y la aplicamos directamente para deducir regularidad $L^\tau(W^{1+\varepsilon,p})$.

Estimaciones preliminares

Supondremos que $\tau \in (1,\infty)$ y $p \in (1,\infty)$ son dados y fijos en todo la sección. Establezcamos ahora algunas hipótesis.

- La frontera Γ es de clase $C^{1,\hat{\varepsilon}}$ para algún $0 < \hat{\varepsilon} < 1$.
- Los coeficientes a_{ij} pertenecen a $C([0,T];C^{0,\hat{\varepsilon}}(\bar{\Omega}))$ y existen $m, M > 0$ tales que
$$m\|\xi\|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leq M\|\xi\|^2$$
para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$ y todo $(x,t) \in Q$.

Recordemos algunos resultados de regularidad. Supongamos que la frontera Γ es de clase C^2. Sean $\bar{a}_{ij} = a_{ij}(\bar{x},\bar{t})$ y $\bar{A}y = -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_{x_j}(\bar{a}_{ij}\partial_{x_i}y)$, donde $(\bar{x},\bar{t})$ es cualquier punto de $\bar{Q}$. Entonces la aplicación que asocia $\hat{f}$ con la solución y de
$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial y}{\partial t} + \bar{A}y &=& \hat{f} & \text{en } Q, \\ \dfrac{\partial y}{\partial n_{\bar{A}}} &=& 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(\cdot,0) &=& 0 & \text{en } \Omega, \end{array}\right.$$
es continua de $L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega))$ en $L^{\tau}(W^{1+\varepsilon_k,p})$ si se cumple alguna de las condiciones siguientes
$$0 < \frac{\varepsilon_k}{2} < \frac{N}{2p} + \frac{1}{\tau} + \frac{1}{2} - \frac{N}{2k_1} - \frac{1}{\tilde{k}_1}, \quad \text{si } k_1 \leq p \text{ y } \tilde{k}_1 \leq \tau, \tag{2.2.6}$$
$$0 < \frac{\varepsilon_k}{2} < \frac{N}{2p} + \frac{1}{2} - \frac{N}{2k_1}, \quad \text{si } k_1 \leq p \text{ y } \tilde{k}_1 > \tau, \tag{2.2.7}$$
$$0 < \frac{\varepsilon_k}{2} < \frac{1}{\tau} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{k}_1}, \quad \text{si } k_1 > p \text{ y } \tilde{k}_1 \leq \tau, \tag{2.2.8}$$
$$0 < \varepsilon_k < 1, \quad \text{si } k_1 > p \text{ y } \tilde{k}_1 > \tau. \tag{2.2.9}$$

Para datos no homogéneos en la frontera, la aplicación que asocia $\hat{g}$ con la solución y de
$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial y}{\partial t} + \bar{A}y &=& 0 & \text{en } Q, \\ \dfrac{\partial y}{\partial n_{\bar{A}}} &=& \hat{g} & \text{sobre } \Sigma, \\ y(\cdot,0) &=& 0 & \text{en } \Omega, \end{array}\right.$$

es continua de $L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma))$ en $L^\tau(W^{1+\varepsilon_\sigma,p})$ si se cumple alguna de las condiciones siguientes:

$$0 < \frac{\varepsilon_\sigma}{2} < \frac{N}{2p} + \frac{1}{\tau} - \frac{N-1}{2\sigma_1} - \frac{1}{\tilde{\sigma}_1}, \quad \text{si } \sigma_1 \le p \text{ y } \tilde{\sigma}_1 \le \tau, \tag{2.2.10}$$

$$0 < \frac{\varepsilon_\sigma}{2} < \frac{N}{2p} - \frac{N-1}{2\sigma_1}, \quad \text{si } \sigma_1 \le p \text{ y } \tilde{\sigma}_1 > \tau, \tag{2.2.11}$$

$$0 < \frac{\varepsilon_\sigma}{2} < \frac{1}{2p} + \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tilde{\sigma}_1}, \quad \text{si } \sigma_1 > p \text{ y } \tilde{\sigma}_1 \le \tau, \tag{2.2.12}$$

$$0 < \varepsilon_\sigma < \frac{1}{p}, \quad \text{si } \sigma_1 > p \text{ y } \tilde{\sigma}_1 > \tau. \tag{2.2.13}$$

Los anteriores resultados de regularidad se pueden demostrar usando las mismas técnicas que en [77, Prop. 3.2].

En todo lo que sigue $\varepsilon > 0$ es dado y fijo, estrictamente menor que $\min(\hat{\varepsilon}, 2/\tau, 2/p)$, y menor o igual que $\min(\varepsilon_\sigma, \varepsilon_k)$, donde ε_σ, ε_k son escogidos como en (2.2.6)–(2.2.13). Hacemos las siguientes hipótesis sobre $\tilde{k}_1$, k_1, $\tilde{\sigma}_1$, σ_1.

- El par $(\tilde{k}_1, k_1)$ satisface una de las condiciones (2.2.6)–(2.2.9) y

$$\frac{N}{2k_1} + \frac{1}{\tilde{k}_1} < 1. \tag{2.2.14}$$

- El par $(\tilde{\sigma}_1, \sigma_1)$ satisface una de las condiciones (2.2.10)–(2.2.13) y

$$\frac{N-1}{2\sigma_1} + \frac{1}{\tilde{\sigma}_1} < \frac{1}{2}. \tag{2.2.15}$$

Nota 2.2.1 *Las condiciones* (2.2.14) *y* (2.2.15) *son necesarias para demostrar las Proposiciones 2.2.7 y 2.2.9.*

Un resultado de regularidad en $L^\tau(W^{1+\varepsilon,p})$ para la ecuación lineal (2.2.1) se establece en la Proposición 2.2.7. Primero establecemos algunas estimaciones preliminares.

Proposición 2.2.2 *Supongamos que la frontera* Γ *es de clase* C^2. *Sean* $\bar{a}_{ij} = a_{ij}(\bar{x}, \bar{t})$ *y*

$$\bar{A}y = -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_{x_j}(\bar{a}_{ij}\partial_{x_i} y),$$

donde $(\bar{x}, \bar{t})$ *es cualquier punto en* $\bar{Q}$. *Sea* $\hat{f}$ *un elemento de* $L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega))$ *y* $\hat{g}$ *un elemento de* $L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma))$. *Entonces la solución débil* y *de la ecuación*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + \bar{A}y &= \hat{f} \quad \text{en } Q, \\ \dfrac{\partial y}{\partial n_{\bar{A}}} &= \hat{g} \quad \text{sobre } \Sigma, \\ y(\cdot, 0) &= 0 \quad \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{2.2.16}$$

pertenece a $L^\tau(W^{1+\varepsilon,p}) \cap L^2(H^1)$, *y satisface*

$$\|y\|_{L^\tau(W^{1+\varepsilon,p})\cap L^2(H^1)} \leq C(\|\hat{f}\|_{L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega))} + \|\hat{g}\|_{L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma))}), \tag{2.2.17}$$

donde C *depende de* Ω, T, ε, $\tilde{k}_1$, k_1, $\tilde{\sigma}_1$, *y* σ_1 *pero es independiente del punto* $(\bar{x}, \bar{t})$.

Demostración. La demostración se puede llevar a cabo usando las estimaciones en semigrupos analíticos como en Raymond y Zidani [77, Proposición 3.2]. Obsérvese que las condiciones establecidas ligando $\tilde{k}_1$, k_1, $\tilde{\sigma}_1$, y σ_1, con p, τ, ε_σ y ε_k son necesarias para probar estas estimaciones. □

Proposición 2.2.3 *Supongamos que la frontera* Γ *es de clase* C^2, *y definamos los coeficientes* $\bar{a}_{ij}$ *como en la Proposición 2.2.2. Sea* $\vec{f}$ *un elemento de* $(L^\tau(W^{\varepsilon,q}) \cap L^2(Q))^N$, *con* $min(p, \frac{2N}{N-2+2\varepsilon}) \leq q \leq p$. *Entonces la solución débil* y *de la ecuación variacional*

$$-\int_Q y\frac{\partial \phi}{\partial t}\, dx\, dt + \int_Q \sum_{i,j=1}^N \bar{a}_{ij}\partial_{xi} y \partial_{x_j}\phi\, dx\, dt = \int_Q \vec{f}\cdot\nabla\phi\, dx\, dt$$

para todo $\phi \in C^1(\bar{Q})$ *tal que* $\phi(T) = 0$, *pertenece a* $L^\tau(W^{1+\varepsilon,q}) \cap L^2(H^1)$ *y satisface*

$$\|y\|_{L^\tau(W^{1+\varepsilon,q})\cap L^2(H^1)} \leq C\|\vec{f}\|_{(L^\tau(W^{\varepsilon,q})\cap L^2(Q))^N},$$

donde C *es independiente de* $(\bar{x}, \bar{t}) \in \bar{Q}$ *y de* $q \in [min(p, \frac{2N}{N-2+2\varepsilon}), p]$.

Demostración. La estimación en $L^2(H^1)$, cuando $\vec{f}$ pertenece a $(L^2(Q))^N$ es clásica. Probemos la estimación en $L^\tau(W^{1+\varepsilon,q})$. De resultados de regularidad maximal para ecuaciones con coeficientes regulares, deducimos que la aplicación $\vec{f} \mapsto y_{\vec{f}}$ (donde $y_{\vec{f}}$ denota la solución de la ecuación) es continua de $L^\tau(W^{1,q})$ en $L^\tau(W^{2,q})$, y de $L^\tau(L^q(\Omega))$ en $L^\tau(W^{1,q})$ (véase Vespri [89]). Además la constante en las correspondientes estimaciones puede ser escogida independientemente de $q \in [min(p, \frac{2N}{N-2+2\varepsilon}), p]$. Como $(L^\tau(W^{2,q}), L^\tau(W^{1,q}))_{\varepsilon,q} \equiv L^\tau(W^{1+\varepsilon,q})$ (véase Triebel [85], o Daners y Medina [46]), el resultado se sigue por medio de interpolación real. □

Proposición 2.2.4 *Supongamos que la frontera Γ es de clase C^2, y definamos los coeficientes $\bar{a}_{ij}$ como en la Proposición 2.2.2. Sea f un elemento de $L^2(Q)$, y sea y la solución débil en $L^2(H^1)$ de la ecuación variacional*

$$-\int_Q y\frac{\partial\phi}{\partial t}\,dx\,dt + \int_Q \sum_{i,j=1}^N \bar{a}_{ij}\partial_{x_i}y\,\partial_{x_j}\phi\,dx\,dt = \int_Q f\phi\,dx\,dt$$

para todo $\phi \in C^1(\bar{Q})$ tal que $\phi(T) = 0$. Si $p \leq 2$, entonces

$$\|y\|_{L^\tau(W^{1+\varepsilon,p})\cap L^2(H^1)} \leq C\|f\|_{L^2(Q)}.$$

Se $\tau \leq 2$ y $p > 2$, entonces

$$\|y\|_{L^\tau(W^{1+\varepsilon,q})\cap L^2(H^1)} \leq C\|f\|_{L^2(Q)},$$

con $q = \frac{2N}{N-2+2\varepsilon}$. Si $\tau > 2$ y $p > 2$, entonces

$$\|y\|_{L^\tau(W^{1+\varepsilon,q})\cap L^2(H^1)} \leq C\|f\|_{L^2(Q)},$$

para cualquier $q \geq 2$ que satisfaga $\frac{N}{4} + \frac{1}{2} < \frac{N}{2q} + \frac{1}{\tau} + \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}$. Además, en las anteriores estimaciones, las constantes C son independientes de$(\bar{x}, \bar{t}) \in \bar{Q}$.

Demostración. Si $p \leq 2$, usando estimaciones en semigrupos analíticos, probamos que y pertenece a $L^\tau(W^{1+\varepsilon,2})$ para todo $\tau \geq 2$ tal que $1/2 < 1/\tau + 1/2 - \varepsilon/2$. Como $\varepsilon < 2/\tau$, y pertenece a $L^\tau(W^{1+\varepsilon,2})$ para todo $\tau \geq 2$. Si $\tau \leq 2$ y $p > 2$, entonces y pertenece a $L^2(W^{2,2})$. En este caso, la estimación se sigue de las desigualdades de Sobolev. El último caso se puede tratar también usando estimaciones en semigrupos analíticos. $\square$

Proposición 2.2.5 *Supongamos que la frontera Γ es de clase C^3, y definamos los coeficientes $\bar{a}_{ij}$ como en la Proposición 2.2.2. Sea f un elemento de $L^\tau(W^{\varepsilon,q}) \cap L^2(Q)$, con $min(p, \frac{2N}{N-2+2\varepsilon}) \leq q \leq p$. Entonces la solución débil y de la ecuación variacional*

$$-\int_Q y\frac{\partial\phi}{\partial t}\,dx\,dt + \int_Q \sum_{i,j=1}^N \bar{a}_{ij}\partial_{x_i}y\,\partial_{x_j}\phi\,dx\,dt = \int_Q f\phi\,dx\,dt$$

para todo $\phi \in C^1(\bar{Q})$ tal que $\phi(T) = 0$, pertenece a $L^\tau(W^{1+\varepsilon,\tilde{q}}) \cap L^2(H^1)$ con $\tilde{q} = \frac{Nq}{N-q}$ si $q < N$, $q = p$ si $q \geq N$, y satisface

$$\|y\|_{L^\tau(W^{1+\varepsilon,\tilde{q}})\cap L^2(H^1)} \leq C\|f\|_{L^\tau(W^{\varepsilon,q})\cap L^2(Q)},$$

donde C es independiente de $(\bar{x}, \bar{t}) \in \bar{Q}$ y de $q \in [min(p, \frac{2N}{N-2+2\varepsilon}), p]$.

Demostración. Usando interpolación real, como en la prueba de la Proposición 2.2.3, demostramos primero que

$$\|y\|_{L^\tau(W^{2+\varepsilon,q})\cap L^2(H^1)} \leq C\|f\|_{L^\tau(W^{\varepsilon,q})\cap L^2(Q)}.$$

Concluimos con desigualdades de Sobolev. □

Lema 2.2.6 *Sea $\varepsilon < \tilde{\varepsilon} < \hat{\varepsilon}$. Para todo $q \in [min(p, \frac{2N}{N-2+2\varepsilon}), p]$, todo $y \in L^\tau(W^{\varepsilon,q})$, y todo $a \in C([0,T]; C^{0,\tilde{\varepsilon}}(\bar{\Omega}))$, ay pertenece a $L^\tau(W^{\varepsilon,q})$, y*

$$\|ay\|_{L^\tau(W^{\varepsilon,q})} \leq C\|a\|_{C([0,T];C^{0,\tilde{\varepsilon}}(\bar{\Omega}))}\|y\|_{L^\tau(W^{\varepsilon,q})},$$

donde C no depende de $q \in [min(p, \frac{2N}{N-2+2\varepsilon}), p]$.

Demostración. Usando la definición de la norma en $L^\tau(W^{\varepsilon,q})$, con cálculos directos llegamos a

$$\begin{aligned}
\|ay\|^\tau_{L^\tau(W^{\varepsilon,q})} &= \int_0^T \left(\int_{\Omega\times\Omega} \frac{|a(x,t)y(x,t) - a(x',t)y(x',t)|^q}{|x-x'|^{n+\varepsilon q}}\,dx\,dx'\right)^{\tau/q} dt \\
&\leq C\int_0^T \left(\int_{\Omega\times\Omega} \frac{|a(x,t) - a(x',t)|^q}{|x-x'|^{\tilde{\varepsilon}q}}\frac{|y(x,t)|^q}{|x-x'|^{n+(\varepsilon-\tilde{\varepsilon})q}}\,dx\,dx'\right)^{\tau/q} dt \\
&\quad +C\int_0^T \left(\int_{\Omega\times\Omega} |a(x',t)|^q \frac{|y(x,t) - y(x',t)|^q}{|x-x'|^{n+\varepsilon q}}\,dx\,dx'\right)^{\tau/q} dt \\
&\leq C\|a\|^\tau_{C(C^{0,\tilde{\varepsilon}}(\bar{\Omega}))}\max_{\xi\in\bar{\Omega}}\left(\int_\Omega \frac{dx'}{|\xi - x'|^{n+(\varepsilon-\tilde{\varepsilon})q}}\right)^{\tau/q}\int_0^T\left(\int_\Omega |y(x,t)|^q dx\right)^{\tau/q} dt \\
&\quad +C\|a\|^\tau_{C(\bar{Q})}\|y\|^\tau_{L^\tau(W^{\varepsilon,q})}.
\end{aligned}$$

La prueba está completa. □

Una vez establecidos estas estimaciones auxiliares, ya estamos en disposición de escribir los resultados de regularidad necesarios para el estudio de las ecuaciones que intervienen en el problema de control. Comencemos con el resultado principal de esta sección.

Proposición 2.2.7 *Sean $a \in L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega))$, $b \in L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma))$, $\hat{f} \in L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega))$ y $\hat{g} \in L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma))$. Entonces la solución y en $L^2(H^1) \cap C([0,T]; L^2)$ de la ecuación*

$$\left\{\begin{array}{rcll}
\dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay + ay &=& \hat{f} & \text{en } Q, \\
\dfrac{\partial y}{\partial n_A} + by &=& \hat{g} & \text{sobre } \Sigma, \\
y(\cdot,0) &=& 0 & \text{en } \Omega,
\end{array}\right. \tag{2.2.18}$$

satisface la estimación

$$\|y\|_{L^\tau(W^{1+\varepsilon,p})} \leq C(\|\hat{f}\|_{L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega))} + \|\hat{g}\|_{L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma))}), \tag{2.2.19}$$

donde C sólo depende de Ω, T, A y una cota superior de $\|a\|_{L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega))} + \|b\|_{L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma))}$.

Demostración. Debido a (2.2.14) y (2.2.15), notemos primero que $y \in L^\infty(Q)$ (véase Casas, Raymond y Zidani [35]), y que

$$\|y\|_{L^\infty(Q)} \leq C(\|\hat{f}\|_{L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega))} + \|\hat{g}\|_{L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma))}), \tag{2.2.20}$$

donde C depende de una cota superior de $\|a\|_{L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega))} + \|b\|_{L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma))}$. Por lo tanto es suficiente considerar el caso donde $a \equiv 0$ y $b \equiv 0$. Supondremos que estamos en ese caso pues. Para probar (2.2.19), cuando los coeficientes $a_{ij} \in C([0,T]; C^{\hat{\varepsilon}}(\bar{\Omega}))$, usamos la técnica de “congelar los coeficientes” como en Vespri [89, Teorema 3.1]. Hasta el Paso 3, supondremos que la frontera Γ es regular.

Paso 1.

Probemos primero una estimación en $L^\tau(W^{\varepsilon,p})$. De Ladyženskaja et al. [64, Capítulo 3, Teorema 5.1], sabemos que la solución débil de (2.2.18) pertenece al espacio $L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$, y satisface

$$\|y\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega))} \leq C(\|\hat{f}\|_{L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega))} + \|\hat{g}\|_{L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma))}). \tag{2.2.21}$$

Escojamos $\tilde{r}$ y r, tales que $\frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + \frac{1-\tilde{\varepsilon}}{r} = \frac{1}{p}$, y $\frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + \frac{1-\tilde{\varepsilon}}{\tilde{r}} = \frac{1}{\tau}$, donde $\tilde{\varepsilon}$ es un exponente estrictamente mayor que ε. Como $\|y\|_{L^{\tilde{r}}(L^r(\Omega))} \leq C\|y\|_{L^\infty(Q)}$ y $[L^r(\Omega), W^{1,2}(\Omega)]_{\tilde{\varepsilon}} \hookrightarrow W^{\varepsilon,p}(\Omega)$, de (2.2.20) y (2.2.21), y por interpolación se sigue que

$$\|y\|_{L^\tau(W^{\varepsilon,p})} \leq C(\|\hat{f}\|_{L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega))} + \|\hat{g}\|_{L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma))}).$$

Paso 2.

Para cualquier $\rho > 0$, sea $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k < \ldots < t_K = T$ una subdivisión regular de $[0,T]$, tal que $t_k - t_{k-1} = \ell(\rho)$ y

$$\max\{\|a_{ij}(t,\cdot) - a_{ij}(t',\cdot)\|_{C^{0,\hat{\varepsilon}}(\bar{\Omega})} \mid t \in [t_{k-1},t_k], t' \in [t_{k-1},t_k], 1 \leq i,j \leq N, 2 \leq k \leq K\} \leq \rho.$$

Sea $\{C_\rho^s\}_{s=1}^{\mu}$ una colección de conjuntos abiertos de clase C^∞, de diámetro menor o igual que $\rho > 0$ tales que

$$\bar{\Omega} \subset \cup_{s=1}^{\mu} C_\rho^s,$$

y sea $\{\varphi_s\}_{s=1}^{\mu}$ una partición de la unidad subordinada a ese recubrimiento. Sea ψ_k la función continua en $[0,T]$, afín en cada intervalo $[t_k,t_{k+1}]$, que es igual a 1 en t_k y 0 en t_j si $j\neq k$. Para un punto fijo dado $x_s\in C_\rho^s$, sea

$$\bar a_{ij}^{sk}=a_{ij}(x_s,t_k)\quad \text{y}\quad y_{sk}(x,t)=\psi_k(t)\varphi_s(x)y(x,t) \text{ para } 1\le s\le\mu,\ 1\le k\le K. \tag{2.2.22}$$

Fijemos $1\le k\le K$ y $1\le s\le\mu$. Para todo $\xi\in L^2(H^1)$, definimos el operador T_ξ^{ks} como

$$\begin{aligned} T_\xi^{ks}(\phi) &= \int_Q \psi_k\varphi_s\hat f\phi\,dx\,dt+\int_\Sigma \psi_k\varphi_s\hat g\phi\,ds\,dt\\ &+\int_Q\psi_k\sum_{i,j=1}^N a_{ij}y\partial_{x_i}\varphi_s\partial_{x_j}\phi\,dx\,dt-\int_Q\psi_k\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\partial_{x_i}y\partial_{x_j}\varphi_s\phi\,dx\,dt\\ &+\int_Q\varphi_s y\frac{\partial\psi_k}{\partial t}\phi\,dx\,dt+\int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}}\int_{C_\rho^s}\sum_{i,j=1}^N(\bar a_{ij}^{sk}-a_{ij})\partial_{x_i}\xi\partial_{x_j}\phi\,dx\,dt, \end{aligned}$$

con la convención $t_0=t_1=0$ y $t_{K+1}=t_K=T$. Para todo $\xi\in L^2(H^1)$, sea $z(\xi)$ la única solución en $L^2(H^1)$ de la ecuación variacional

$$-\int_Q z\frac{\partial\phi}{\partial t}\,dx\,dt+\int_Q\sum_{i,j=1}^N\bar a_{ij}^{sk}\partial_{x_i}z\partial_{x_j}\phi\,dx\,dt=T_\xi^{ks}(\phi) \tag{2.2.23}$$

para todo $\phi\in C^1(\bar Q)$ tal que $\phi(T)=0$. Obsérvese que $z(y_{sk})\equiv y_{sk}$. Probemos que, si ρ es suficientemente pequeño, entonces la aplicación $\xi\mapsto z(\xi)$ admite un punto fijo en $L^\tau(W^{1+\varepsilon,p_1})\cap L^2(H^1)$, donde $p_1=\min(p,\frac{2N}{N-2+2\varepsilon})$. Debido al Lema 2.2.6, si $\xi\in L^\tau(W^{1+\varepsilon,p_1})\cap L^2(H^1)$, entonces $\sum_{i=1}^N(\bar a_{ij}^{st}-a_{ij})\partial_{x_i}\xi$ pertenece a $L^\tau(W^{\varepsilon,p_1})\cap L^2(Q)$ para todo $1\le j\le N$. Nótese que $\psi_k\varphi_s\hat f$ pertenece a $L^{\tilde k_1}(L^{k_1}(\Omega))$, $\psi_k\varphi_s\hat g$ pertenece a $L^{\tilde\sigma_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma))$. Debido al Paso 1 y el Lema 2.2.6, $\psi_k\sum_{i=1}^N a_{ij}y\partial_{x_i}\varphi_s$ pertenece a $L^\tau(W^{\varepsilon,p})\cap L^2(Q)$ para $1\le j\le N$. Obsérvese también que $\psi_k\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\partial_{x_i}y\partial_{x_j}\varphi_s$ pertenece a $L^2(Q)$, y $\varphi_s y\frac{\partial\psi_k}{\partial t}$ pertenece a $L^\infty(Q)$. De las Proposiciones 2.2.2 a 2.2.4, se sigue que $z(\xi)$ pertenece a $L^\tau(W^{1+\varepsilon,p_1})\cap L^2(H^1)$ para todo $\xi\in L^\tau(W^{1+\varepsilon,p_1})\cap L^2(H^1)$.

Por otro lado, debido a la Proposición 2.2.3 y el Lema 2.2.6, se sigue que

$$\|z(\xi_1)-z(\xi_2)\|_{L^\tau(W^{1+\varepsilon,p_1})\cap L^2(H^1)}\le C\sum_{i,j=1}^N\|(\bar a_{ij}^{sk}-a_{ij})(\partial_{x_i}\xi_1-\partial_{x_i}\xi_2)\|_{L^\tau(W^{\varepsilon,p_1})\cap L^2(]t_{k-1},t_{k+1}[\times C_\rho^s)}$$

$$\le C\left(\max_{i,j}\|\bar a_{ij}^{sk}-a_{ij}(t_k,\cdot)\|_{C^{0,\bar\varepsilon}(\bar C_\rho^s)}+\max_{i,j}\|a_{ij}(t_k,\cdot)-a_{ij}(\cdot)\|_{C([t_{k-1},t_{k+1}];C^{0,\bar\varepsilon}(\bar C_\rho^s))}\right)\cdot$$

$$\cdot\|\nabla\xi_1 - \nabla\xi_2\|_{(L^\tau(W^{\varepsilon,p_1})\cap L^2(Q))^N}$$

$$\leq C(\rho^{\hat{\varepsilon}-\tilde{\varepsilon}} + \rho)\|\nabla\xi_1 - \nabla\xi_2\|_{(L^\tau(W^{\varepsilon,p_1})\cap L^2(Q))^N},$$

para algún $\tilde{\varepsilon} \in]\varepsilon, \hat{\varepsilon}[$. Por lo tanto, para ρ suficientemente pequeño, la aplicación $\xi \to z(\xi)$ es una contracción en $L^\tau(W^{1+\varepsilon,p_1}) \cap L^2(H^1)$. Como la solución z de la ecuación

$$-\int_Q z\frac{\partial\phi}{\partial t}\,dx\,dt + \int_Q \sum_{i,j=1}^N \bar{a}_{ij}^{sk}\partial_{x_i}z\partial_{x_j}\phi\,dx\,dt = T_{y_{sk}}^{ks}(v)$$

para todo $\phi \in C^1(\bar{Q})$ tal que $\phi(T) = 0$, es única en $L^2(H^1)$ y es igual a y_{sk}, este punto fijo es y_{sk}. De la igualdad $y = \Sigma_{k=1}^K \Sigma_{s=1}^\mu y_{sk}$, se sigue que y pertenece a $L^\tau(W^{1+\varepsilon,p_1})$.

Paso 3.

Si $p = p_1$ la demostración está completa. De otro modo, definimos $p_2 = \frac{Np_1}{N-p_1}$ si $p_1 < N$, y $p_2 = p$ si $p_1 \geq N$. Repetimos el Paso 2. Queremos probar que la aplicación $\xi \mapsto z(\xi)$ admite un punto fijo en $L^\tau(W^{1+\varepsilon,p_2}) \cap L^2(H^1)$. Debido al Lema 2.2.6, si $\xi \in L^\tau(W^{1+\varepsilon,p_2}) \cap L^2(H^1)$, entonces $\sum_{i=1}^N(\bar{a}_{ij}^{st} - a_{ij})\partial_{x_i}\xi$ pertenece a $L^\tau(W^{\varepsilon,p_2}) \cap L^2(Q)$ para todo $1 \leq j \leq N$. Como y pertenece a $L^\tau(W^{1+\varepsilon,p_1})$, $\psi_k \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\partial_{x_i}y\partial_{x_j}\varphi_s$ pertenece a $L^\tau(W^{\varepsilon,p_1}) \cap L^2(Q)$, y debido a las desigualdades de Sobolev, $\psi_k \sum_{i=1}^N a_{ij}y\partial_{x_i}\varphi_s$ pertenece a $L^\tau(W^{\varepsilon,p_2}) \cap L^2(Q)$ para $1 \leq j \leq N$.

Como antes $\psi_k\varphi_s\hat{f}$ pertenece a $L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega))$, $\psi_k\varphi_s\hat{g}$ pertenece a $L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma))$, y $\varphi_s y\frac{\partial\psi_k}{\partial t}$ pertenece a $L^\infty(Q)$. De las Proposiciones 2.2.2, 2.2.3 y 2.2.5, se sigue que $z(\xi)$ pertenece a $L^\tau(W^{1+\varepsilon,p_2}) \cap L^2(H^1)$ para todo $\xi \in L^\tau(W^{1+\varepsilon,p_2}) \cap L^2(H^1)$. Concluimos demostrando que la aplicación $\xi \mapsto z(\xi)$ es una contracción en $L^\tau(W^{1+\varepsilon,p_2}) \cap L^2(H^1)$ para el mismo ρ que en el Paso 2, y que y pertenece a $L^\tau(W^{1+\varepsilon,p_2})$. Repitiendo este argumento un número finito de veces, finalmente probamos que y pertenece a $L^\tau(W^{1+\varepsilon,p})$ y que

$$\|y\|_{L^\tau(W^{1+\varepsilon,p})} \leq C(\|\hat{f}\|_{L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega))} + \|\hat{g}\|_{L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma))}).$$

Obsérvese que la primera iteración del Paso 2 (con p_1) es diferente de la segunda. De hecho, para la primera iteración sólo sabemos que $\psi_k \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\partial_{x_i}y\partial_{x_j}\varphi_s$ pertenece a $L^2(Q)$, y usamos la Proposición 2.2.4. Para la segunda iteración del Paso 2, sabemos que $\psi_k \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\partial_{x_i}y\partial_{x_j}\varphi_s$ pertenece a $L^\tau(W^{\varepsilon,p_1}) \cap L^2(Q)$, y usamos la Proposición 2.2.5.

Paso 4.

Si la frontera Γ es de clase $C^{1,\hat{\varepsilon}}$, haciendo un cambio de variable en la formulación variacional de la ecuación (2.2.18), la ecuación puede ser reducida a una ecuación similar a (2.2.18) pero en un dominio con frontera regular. Debido a los Pasos 1-3, la correspondiente solución pertenece a $L^\tau(W^{1+\varepsilon,p})$. Deshaciendo el cambio de variable, demostramos que la solución de la ecuación (2.2.18) satisface (2.2.19). $\square$

Supongamos ahora que las hipótesis de regularidad sobre Γ y los coeficientes son reemplazadas por

- La frontera Γ es de clase C^1.
- Los coeficientes a_{ij} pertenecen a $C(\bar{Q})$ y existen $m, M > 0$ que satisfacen

$$m\|\xi\|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leq M\|\xi\|^2 \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}^N \text{ y todo } (x,t) \in Q.$$

En este caso, podemos adaptar la prueba de la Proposición 2.2.7 para establecer los siguientes resultados.

Proposición 2.2.8 *Sean* $a \in L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega))$, $b \in L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma))$, $\hat{f} \in L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega))$ *y* $\hat{g} \in L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma))$. *Entonces la solución* y *en* $L^2(H^1) \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$ *de la ecuación*

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay + ay & = & \hat{f} & \text{en } Q, \\ \dfrac{\partial y}{\partial n_A} + by & = & \hat{g} & \text{sobre } \Sigma, \\ y(\cdot,0) & = & 0 & \text{en } \Omega, \end{array}\right. \tag{2.2.24}$$

satisface la estimación

$$\|y\|_{L^\tau(W^{1,p})} \leq C(\|\hat{f}\|_{L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega))} + \|\hat{g}\|_{L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma))}), \tag{2.2.25}$$

donde C *sólo depende de* Ω, T, A *y una cota superior de* $\|a\|_{L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega))} + \|b\|_{L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma))}$.

Proposición 2.2.9 *Sean* $a \in L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega))$, $b \in L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma))$, $\hat{f} \in L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega))$, $\hat{g} \in L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma))$ *y* $\zeta \in L^\tau(W^{1,p})$. *Entonces, la solución* y *de la ecuación*

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay + ay & = & \hat{f}\zeta & \text{en } Q, \\ \dfrac{\partial y}{\partial n_A} + by & = & \hat{g}\zeta & \text{sobre } \Sigma, \\ y(\cdot,0) & = & 0 & \text{en } \Omega, \end{array}\right. \tag{2.2.26}$$

satisface la estimación

$$\|y\|_{L^\tau(W^{1,p})} \leq C(\|\hat{f}\|_{L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega))} + \|\hat{g}\|_{L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma))})\|\zeta\|_{L^\tau(W^{1,p})}, \tag{2.2.27}$$

donde C sólo depende de Ω, T, A y una cota superior de $\|a\|_{L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega))} + \|b\|_{L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma))}$.

Demostración. Por sencillez en la exposición, trataremos sólo el caso donde $k_1 \leq p$, $\tilde{k}_1 \leq \tau$, $\sigma_1 \leq p$, y $\tilde{\sigma}_1 \leq \tau$. Los otros casos funcionan de una manera similar.

Nótese que $\hat{f}\zeta$ pertenece a $L^{\tilde{k}}(L^k)$ con $\frac{1}{\tilde{k}} = \frac{1}{\tilde{k}_1} + \frac{1}{\tau}$ y $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{N-p}{Np}$ si $p < N$, todo $k < k_1$ si $p = N$, y $k = k_1$ si $p > N$. Debido a la condición (2.2.14) satisfecha por k_1 y $\tilde{k}_1$, podemos verificar que

$$\frac{N}{2k} + \frac{1}{\tilde{k}} < \frac{N}{2p} + \frac{1}{\tau} + \frac{1}{2}.$$

Podemos también verificar que $\hat{g}\zeta$ pertenece a $L^{\tilde{\sigma}}(L^\sigma(\Gamma))$ con $\frac{1}{\tilde{\sigma}} = \frac{1}{\tilde{\sigma}_1} + \frac{1}{\tau}$ y $\frac{1}{k} = \frac{1}{\sigma_1} + \frac{N-p}{(N-1)p}$ si $p < N$, todo $\sigma < \sigma_1$ si $p = N$, y $\sigma = \sigma_1$ si $p > N$. Debido a la condición (2.2.15) satisfecha por σ_1 y $\tilde{\sigma}_1$, podemos verificar que

$$\frac{N-1}{2\sigma} + \frac{1}{\tilde{\sigma}} < \frac{N}{2p} + \frac{1}{\tau}.$$

Por lo tanto, si $a \equiv 0$ y $b \equiv 0$ podemos probar que y pertenece a $L^\tau(W^{1,p})$, y que se cumple la estimación (2.2.27). Para $a \in L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1})$ y $b \in L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1})$, (2.2.27) se demuestra por un argumento de punto fijo, como al final de la demostración de la Proposición 2.2.10. $\square$

Para tratar la ecuación de estado adjunto para problemas de control gobernados por ecuaciones parabólicas, es necesario darle un sentido. Consideremos la siguiente ecuación

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + A^*\varphi &= \operatorname{div} \vec{\eta} & \text{en } Q, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial n_{A^*}} &= -\vec{\eta} \cdot \vec{n} & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(\cdot, T) &= 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{2.2.28}$$

donde $\vec{n}$ es el vector unidad normal exterior a Γ, y suponemos que $\vec{\eta}$ es regular. (Como de costumbre A^* denota el adjunto formal de A.) Por definición, una función $\varphi \in L^1(W^{1,1})$ es una solución de (2.2.28) si, y sólo si,

$$\int_Q (\varphi \frac{\partial y}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \partial_{x_j} \varphi \partial_{x_i} y) \, dx \, dt = -\int_Q \vec{\eta} \cdot \nabla y \, dx \, dt \tag{2.2.29}$$

para todo $y \in C^1(\bar{Q})$ tal que $y(0) = 0$. La ecuación variacional (2.2.29) tiene sentido si $\vec{\eta}$ pertenece a $L^r(Q)$ para algún $r > 1$, incluso si la traza normal $\vec{\eta} \cdot \vec{n}$ no esta definida.

Por simplicidad en la exposición, seguiremos escribiendo la ecuación variacional (2.2.29) de la forma (2.2.28), incluso aunque la notación $\vec{\eta} \cdot \vec{n}$ sea abusiva cuando $\vec{\eta}$ no es regular.

En el resto de la sección $\tilde{k}_2$, k_2, $\tilde{\sigma}_2$, σ_2 y ν son constantes que satisfacen

$$\frac{N}{2k_2} + \frac{1}{\tilde{k}_2} \leq 1, \quad \frac{N-1}{2\sigma_2} + \frac{1}{\tilde{\sigma}_2} \leq \frac{1}{2}, \quad \text{y } \frac{N}{2\nu} < \min\left(\frac{N}{2k'_1} + \frac{1}{\tilde{k}'_1}, \frac{N-1}{2\sigma'_1} + \frac{1}{\tilde{\sigma}'_1}\right) \tag{2.2.30}$$

donde k'_1 (resp. $\tilde{k}'_1$, σ'_1, $\tilde{\sigma}'_1$) es el exponente conjugado de k_1 (resp. $\tilde{k}_1$, σ_1, $\tilde{\sigma}_1$). También supondremos que $\tilde{k}_1$, k_1, $\tilde{\sigma}_1$, y σ_1 satisfacen las siguientes condiciones adicionales

$$\tilde{k}_1 \geq \tau, \ \tilde{\sigma}_1 \geq \tau,$$

$$k_1 \geq \frac{Np'}{Np' - N + p'} \quad \text{y} \quad \sigma_1 \geq \frac{(N-1)p'}{(N-1)p' - N + p'} \quad \text{si } p' < N.$$

Proposición 2.2.10 *Sean $a \in L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega))$, $b \in L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma))$, $\hat{F} \in L^{\tilde{k}_2}(L^{k_2}(\Omega))$, $\vec{\eta} \in (L^{\tau'}(L^{p'}))^N$, $\hat{G} \in L^{\tilde{\sigma}_2}(L^{\sigma_2}(\Gamma))$ y $\hat{L} \in L^{\nu}(\Omega)$. Entonces, existe un único $\varphi \in L^{\tau'}(W^{1,p'}) + L^2(H^1)$ que satisface la ecuación*

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + A^*\varphi + a\varphi &= \hat{F} + \operatorname{div} \vec{\eta} \quad \text{en } Q, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial n_{A^*}} + b\varphi &= \hat{G} - \vec{\eta} \cdot \vec{n} \quad \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(\cdot, T) &= \hat{L} \quad \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{2.2.31}$$

y se satisface la estimación

$$\|\varphi\|_{L^{\tau'}(W^{1,p'}) + L^2(H^1)} \leq C(\|\eta\|_{(L^{\tau'}(L^{p'}))^N} + \|\hat{F}\|_{L^{\tilde{k}_2}(L^{k_2}(\Omega))} + \|\hat{G}\|_{L^{\tilde{\sigma}_2}(L^{\sigma_2}(\Gamma))} + \|\hat{L}\|_{L^{\nu}(\Omega)}),$$

donde C depende sólo de Ω, T, A y una cota superior para $\|a\|_{L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega))} + \|b\|_{L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma))}$.

Además, si y es la solución de la ecuación (2.2.18), se satisface la fórmula de Green

$$\begin{aligned} &\int_Q \varphi \left(\frac{\partial y}{\partial t} + Ay + ay \right) \, dx \, dt + \int_\Sigma \varphi \left(\frac{\partial y}{\partial n_A} + by \right) \, ds \, dt = \\ &\int_Q \hat{F} y \, dx \, dt - \int_Q \vec{\eta} \cdot \nabla y \, dx \, dt + \int_\Sigma \hat{G} y \, ds \, dt + \int_\Omega \hat{L} y(T) \, dx. \end{aligned} \tag{2.2.32}$$

Demostración. Paso 1. Primero consideraremos el caso donde $\hat{F} \equiv 0$, $\hat{L} \equiv 0$, y $\hat{G} \equiv 0$.

Si $a \equiv 0$ y $b \equiv 0$, y si los coeficientes del operador A son regulares e independientes del tiempo, la existencia de $\varphi \in L^{\tau'}(W^{1,p'})$ satisfaciendo (2.2.31) se puede obtener usando técnicas de dualidad, interpolación y resultados de regularidad maximal como en el Teorema 2.2.1 o Vespri [89, Teorema 3.3] y las referencias ahí contenidas. El paso de coeficientes regulares a coeficientes continuos (también dependientes del tiempo) para A se puede llevar a cabo por localización y un teorema de punto fijo como en la Proposición 2.2.7 o [89, Teorema 3.1].

El caso $a \not\equiv 0$ y $b \not\equiv 0$ se puede deducir del anterior usando un argumento de punto fijo. De hecho, obsérvese que si $\xi \in L^{\tau'}(W^{1,p'})$ entonces $\xi \in L^{\tau'}(L^{p'^*})$, $\xi_{|\Sigma} \in L^{\tau'}(L^{\beta}(\Gamma))$, donde $p'^* = p'N/(N-p')$ y $\beta = ((N-1)p')/(N-p')$ si $p' < N$, p'^* y β son reales cualesquiera en $(1, +\infty)$ si $p' \geq N$. Como $a \in L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega))$, $b \in L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma))$, se verifica que $a\xi \in L^{\tilde{r}}(L^r)$ y $b\xi_{|\Sigma} \in L^{\tilde{s}}(L^s(\Gamma))$, donde $1/\tilde{r} = 1/\tilde{k}_1 + 1/\tau'$, $1/r = 1/k_1 + 1/p'^*$, $1/\tilde{s} = 1/\tilde{\sigma}_1 + 1/\tau'$ y $1/s = 1/\sigma_1 + 1/\beta$. Usando (2.2.14) y (2.2.15), se sigue que

$$\frac{N}{2r} + \frac{1}{\tilde{r}} < \frac{N}{2p'} + \frac{1}{\tau'} + \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{N-1}{2s} + \frac{1}{\tilde{s}} < \frac{N}{2p'} + \frac{1}{\tau'}.$$

Supongamos que $1/k_1 \geq 1/p' - 1/p'^*$ y $1/\sigma_1 \geq 1/p' - 1/\beta$. En este caso, la aplicación que asocia la solución φ_ξ de la ecuación

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \varphi_\xi}{\partial t} + A^*\varphi_\xi = \operatorname{div} \vec{\eta} - a\xi & \text{en } Q, \\ \dfrac{\partial \varphi_\xi}{\partial n_{A^*}} = -\vec{\eta}\cdot\vec{n} - b\xi & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi_\xi(\cdot, T) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

con ξ es afín y continua de $L^{\tau'}(W^{1,p'})$ en si mismo. Usando esta propiedad, podemos probar que $\xi \to \varphi_\xi$ es una contracción en $L^{\tau'}(0, \bar{t}; W^{1,p'})$ para $\bar{t}$ suficientemente pequeño. La estimación en $L^{\tau'}(W^{1,p'})$ se puede deducir mediante una técnica estándar. Si $1/k_1 < 1/p' - 1/p'^*$ r $1/\sigma_1 < 1/p' - 1/\beta$, el método de punto fijo anteriormente expuesto se puede llevar a cabo reemplazando k_1 por $\min(k_1, (1/p' - 1/p'^*)^{-1})$, y σ_1 por $\min(\sigma_1, (1/p' - 1/\beta)^{-1})$.

Paso 2. La ecuación

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+A^*\varphi+a\varphi &=& \hat{F} & \text{en } Q,\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n_{A^*}}+b\varphi &=& \hat{G} & \text{sobre } \Sigma,\\ \varphi(\cdot,T) &=& \hat{L} & \text{en } \Omega, \end{array}\right. \tag{2.2.33}$$

admite una única solución φ que satisface

$$\|\varphi\|_{L^2(H^1)} \leq C(\|\hat{F}\|_{L^{\tilde{k}_2}(L^{k_2}(\Omega))}+\|\hat{G}\|_{L^{\tilde{\sigma}_2}(L^{\sigma_2}(\Gamma))}+\|\hat{L}\|_{L^{\nu}(\Omega)})$$

(cf. [64]). Además, debido a la condición (2.2.30), podemos probar que φ pertenece a $L^{\tilde{k}_1'}(L^{k_1'}(\Omega))$, y $\varphi_{|\Sigma}$ pertenece a $L^{\tilde{\sigma}_1'}(L^{\sigma_1'}(\Gamma))$. (Estos resultados de regularidad son necesarios para la fórmula de Green.)

La fórmula de Green es cierta para funciones regulares, y se sigue de un argumento de densidad. □

Capítulo 3

Estudio de las ecuaciones de estado

En este capítulo estudiamos las ecuaciones no lineales que ligan al control y al estado en los problemas de control estudiados en la segunda parte de la memoria. Se establecen resultados de existencia y unicidad de las soluciones, así como la dependencia continua de las mismas respecto al control. Bajo ciertas hipótesis extra se prueba diferenciabilidad de primer y segundo orden de la solución respecto al control.

Por último se hacen desarrollos de Taylor del estado respecto al control basados en perturbaciones difusas de este último. Esto es preciso cuando el conjunto de controles no es convexo. En este caso no es necesario suponer condiciones de diferenciabilidad respecto al control.

En este capítulo, y a no ser que se diga lo contrario, Ω denotará un subconjunto abierto, acotado y conexo de $\mathbb{R}^N$, cuya frontera Γ es de clase C^1.

3.1 Ecuaciones elípticas

Sean A un operador elíptico de coeficientes continuos de la forma (2.1.1) (pág. 23), $p > N$, $a_0 \in L^{p/2}(\Omega)$, f una función $f : \Omega \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \Gamma \to \mathbb{R}$, $g \in L^{p-1}(\Gamma)$. Consideremos

$$U_{ad} = \{u \in L^\infty(\Omega) : \ u(x) \in K_\Omega(x) \text{ c.t.p. } x \in \Omega\},$$

donde K_Ω es una multiaplicación medible con imagen no vacía y cerrada en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Teorema 3.1.1 *Supongamos que $f : \Omega\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de Carathéodory, monótona decreciente en la segunda variable, y tal que*

E0 - para todo $M \geq 0$ existe una función $\psi_M \in L^{p/2}(\Omega)$ tal que $|f(x,t,u(x)| \leq \psi_M(x)$ para c.t.p. $x \in \Omega$, para todo $|t| \leq M$ y para todo $u \in U_{ad}$.

Entonces, para todo $u \in U_{ad}$ existe una única solución variacional $y_u \in W^{1,p}(\Omega)$ del problema

$$\begin{cases} Ay_u + a_0 y_u = f(x, y_u, u) & \text{en } \Omega \\ \partial_{\nu_A} y_u = g & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

y una constante $C_{U_{ad}}$ tal que

$$\|y_u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C_{U_{ad}} \quad \text{para todo } u \in U_{ad}.$$

Además, si $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset U_{ad}$ y $u_j(x) \to u(x)$ c.t.p. $x \in \Omega$ con $u \in U_{ad}$, entonces $y_{u_j} \to y_u$ en $W^{1,p}(\Omega)$.

Demostración. Sea $u \in U_{ad}$.

Supondremos para empezar que existe $\psi \in L^{p/2}(\Omega)$ tal que $|f(x,y,u(x))| \leq \psi(x)$ para todo $y \in \mathbb{R}$ y casi todo $x \in \Omega$.

Mostremos primero que existe solución. Definimos $F : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ tal que $F(z) = y$ si y sólo si

$$\begin{cases} Ay + a_0 y = f(x, z, u) & \text{en } \Omega \\ \partial_{n_A} y = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

Como $p > N$, existe una solución $y_z = F(z) \in H^1(\Omega)$ y además $\|F(z)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c\|\psi\|_{L^{p/2}(\Omega)}$. De la inclusión compacta $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ tenemos que F es un operador compacto de $L^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$, y por el teorema del punto fijo de Schauder, existe una solución $y \in H_0^1(\Omega)$ de (3.1.1).

La unicidad de sigue de la monotonía de f en la segunda variable.

Veamos que la solución está acotada. Sea $k > 0$. Definimos

$$y_k = \begin{cases} y - k & \text{si} \quad y > k \\ 0 & \text{si} \quad -k \leq y \leq k \\ y + k & \text{si} \quad y < -k. \end{cases}$$

Tenemos que $y_k \in H^1(\Omega)$ por ser la composición de una función de $H^1(\Omega)$ con una función Lipschitz. Además y_k tiene el mismo signo que y. Usando todo esto y que donde $y_k \neq 0$, se tiene que las derivadas parciales de y_k coinciden con las de y, y que $\int_\Omega a_0 y_k y_k \, dx \leq \int_\Omega a_0 y y_k$, tenemos que

$$\begin{aligned}
& m\|y_k\|^2_{H^1(\Omega)} \leq a(y_k, y_k) \leq a(y, y_k) \\
& \leq a(y, y_k) - \int_\Omega (f(x, y, u(x)) - f(x, 0, u(x)) y_k \, dx \\
& = \int_\Omega f(x, 0, u(x)) y_k \, dx \\
& \leq \|f(x, 0, u(x))\|_{L^{p/2}(\Omega)} \|y_k\|_{L^{p/(p-2)}(\Omega)},
\end{aligned}$$

donde $a(\cdot, \cdot)$ es la forma bilineal asociada al operador y está definida en (2.1.10) (pág. 27). Usando la inclusión continua de $W^{1,p'}(\Omega)$ en $L^{p/(p-2)}(\Omega)$ tenemos que

$$m\|y_k\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C\|y_k\|_{W^{1,p'}(\Omega)}.$$

Ahora seguimos por el procedimiento habitual. Sea $A_k = \{x \in \Omega : |y(x)| > k\}$ Por el lado derecho tenemos

$$\|y_k\|_{W^{1,p'}(\Omega)} \leq C|A_k|^{\frac{2-p'}{2p'}} \|y_k\|_{H^1(\Omega)},$$

luego

$$\|y_k\|_{H^1(\Omega)} \leq C|A_k|^{\frac{2-p'}{2p'}}.$$

Por el lado izquierdo

$$\|y_k\|_{H^1(\Omega)} \geq \|y_k\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)} = \|y_k\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(A_k)}.$$

Sea $h > k$. En A_h, se tiene que $|y_k| > h - k$, y además $\|y_k\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(A_k)} \geq \|y_k\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(A_h)}$. Como

$$\|y_k\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(A_h)} = \left(\int_{A_h} |y_k|^{\frac{2N}{N-2}}\right)^{\frac{N-2}{2N}} \geq \left(\int_{A_h} |h - k|^{\frac{2N}{N-2}}\right)^{\frac{N-2}{2N}} = (h - k)|A_h|^{\frac{N-2}{2N}},$$

tenemos

$$(h - k)|A_h|^{\frac{N-2}{2N}} \leq c|A_k|^{\frac{2-p'}{2p'}},$$

o lo que es lo mismo:

$$|A_h| \leq c\frac{|A_k|^{\frac{(2-p')N}{p'(N-2)}}}{(h - k)^{\frac{2N}{N-2}}}.$$

Aplicamos el lema de Kinderlehrer-Stampacchia, teniendo en cuenta que $2N/(N-2) > 0$ y que las condiciones impuestas sobre p implican que $(2-p')N/(p'(N-2)) > 1$, y tenemos que $|A_k| = 0$ para todo $k > d$, con d una constante que sólo depende de Ω, N, p, y $\|f(x,0,u(x))\|_{L^{p/2}(\Omega)}$. Luego $y \in L^\infty(\Omega)$ y

$$\|y\|_{L^\infty(\Omega)} \leq d.$$

La regularidad $W^{1,p}(\Omega)$ de y se sigue inmediatamente del Teorema 2.1.3 y la inclusión $L^{p/2}(\Omega) \subset \big(W^{1,p'}(\Omega)\big)'$.

Supongamos ahora que no existe necesariamente una ψ que acote a f independientemente de y, pero que se cumple E0. En este caso definimos

$$f_j(x,y,u(x)) = \begin{cases} f(x,j,u(x)) & \text{si} \quad y > j \\ f(x,y,u(x)) & \text{si} \quad -j \leq y \leq j \\ f(x,-j,u(x)) & \text{si} \quad y < -j. \end{cases}$$

Tenemos que f_j es monótona decreciente en la segunda variable y que $|f(x,y,u(x)| \leq \psi_j(x)$ para casi todo $x \in \Omega$ con $\psi_j \in L^{p/2}(\Omega)$. Por lo tanto existe una única $y_j \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} Ay_j + a_0 y_j = f_j(x,y_j,u) & \text{en } \Omega \\ \partial_{\nu_A} y_j = g & \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

Además $\|y_j\|_{L^\infty(\Omega)} \leq d$ para todo j. Por lo tanto, para $j > d$, $f_j(x,y_j,u(x)) = f(x,y_j,u(x))$ y se tiene que y_j es solución de (3.1.1). De la monotonía de f respecto de y se deduce la unicidad de solución y_u de (3.1.1) en $W^{1,p}(\Omega)$, lo que implica $y_u = y_j$ para todo $j > d$.

Del Teorema 2.1.3 y la inclusión $L^{p/2}(\Omega) \subset \big(W^{1,p'}(\Omega)\big)'$, se sigue que, para $M \geq \|y_u\|_{L^\infty(\Omega)}$, tenemos que

$$\|y_u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C\|\psi_M\|_{L^{p/2}(\Omega)}.$$

Pero, como vimos antes, la norma en $L^\infty(\Omega)$ de y_u está acotada por una constante que sólo depende de Ω, N, p, y $\|f(x,0,u(x))\|_{L^{p/2}(\Omega)}$. Luego podemos encontrar un M suficientemente grande y tal que si denotamos $C_{U_{ad}} = C\|\psi_M\|_{L^{p/2}(\Omega)}$, se tiene

$$\|y_u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C_{U_{ad}}.$$

Sea ahora $u_j(x) \to u(x)$ c.t.p. $x \in \Omega$. De la anterior propiedad de acotación, se tiene que existe $y \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $y_{u_j} \rightharpoonup y$ débilmente en $W^{1,p}(\Omega)$, y por tanto

$y_{u_j} \to y$ uniformemente. Luego, usando E0 y el teorema de la convergencia dominada, $f(x, y_{u_j}, u_j) \to f(x, y, u)$ en $L^{p/2}(\Omega)$ y al pasar al límite en la ecuación, necesariamente $y = y_u$. Restando las ecuaciones que satisfacen y_{u_j} e y_u y aplicando el Teorema 2.1.1, se sigue inmediatamente que $y_{u_j} \to y_u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. $\square$

Teorema 3.1.2 *Supongamos que*

E1 - $f : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 respecto a las variables segunda y tercera, $f(\cdot, 0, 0) \in L^{p/2}(\Omega)$, para todo $M > 0$ existen una constante $C_M > 0$ y una función $\psi_M \in L^{p/2}(\Omega)$ tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,t,s)\right| \leq C_M \quad y \quad \left|\frac{\partial f}{\partial u}(x,t,s)\right| \leq \psi_M(x)$$

si $|t|, |s| \leq M$ para c.t.p. $x \in \Omega$, y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,t,s) \leq 0$$

para todo $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ y c.t.p. $x \in \Omega$.

Entonces para todo $u \in L^\infty(\Omega)$ existe una única solución de la ecuación de estado

$$\left\{\begin{array}{rcll} Ay_u + a_0 y_u & = & f(x, y_u, u) & \text{en } \Omega \\ \partial_{\nu_A} y_u & = & g & \text{sobre } \Gamma. \end{array}\right. \tag{3.1.2}$$

y la aplicación $G : L^\infty(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)$ que relaciona el control con el estado, dada por $G(u) = y_u$, es de clase C^1. Si $u, h \in L^\infty(\Omega)$ $y_u = G(u)$ y $z_h = G'(u)h$, entonces z_h es la solución de

$$\left\{\begin{array}{rcll} Az + a_0 z & = & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y_u, u)z + \dfrac{\partial f}{\partial u}(x, y_u, u)h & \text{en } \Omega \\ \partial_{\nu_A} z & = & 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{array}\right. \tag{3.1.3}$$

Demostración. Obsérvese que las hipótesis de este teorema son suficientes para deducir para cada $u \in L^\infty(\Omega)$ existencia y unicidad de solución en $W^{1,p}(\Omega)$ de y_u satisfaciendo (3.1.1), sin más que aplicar el Teorema 3.1.1. Por lo tanto, la aplicación G está bien definida. Para comprobar que G es de clase C^1, tomamos

$$V(A) = \left\{y \in W^{1,p}(\Omega) : \ Ay + a_0 y \in L^{p/2}(\Omega), \ \partial_{n_A} y \in L^{p-1}(\Gamma)\right\}$$

con la norma

$$\|y\|_{V(A)} = \|y\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|Ay + a_0 y\|_{L^{p/2}(\Omega)} + \|\partial_{n_A} y\|_{L^{p-1}(\Gamma)}.$$

Definamos ahora la función $F : V(A) \times L^\infty(\Omega) \to L^{p/2}(\Omega) \times L^{p-1}(\Gamma)$, $F(y,u) = (Ay + a_0 y - f(x,y,u), \partial_{n_A} y - g)$. Las hipótesis sobre las derivadas de f implican que F es de clase C^1. Además $\dfrac{\partial F}{\partial y}(y,u)z = (Az + a_0 z - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,u)z, \partial_{n_A} z)$ es un isomorfismo de $V(A)$ en $L^{p/2}(\Omega) \times L^{p-1}(\Gamma)$ gracias al Teorema 2.1.2. Teniendo en cuenta que $F(y,u) = 0$ si y sólo si $y = G(u)$, podemos aplicar el teorema de la función implícita (véase por ejemplo Cartan [15] o Zeidler [93]) para deducir que G es de clase C^1 y satisface que

$$F(G(u), u) = 0.$$

De esta igualdad, derivando, se deduce (3.1.3). □

Teorema 3.1.3 *Supongamos que se cumplen las hipótesis en la condición E1 del teorema anterior y además que*

E2 - f es de clase C^2 respecto a las variables segunda y tercera y para todo $M > 0$ existe $\psi_M \in L^{p/2}(\Omega)$ tal que

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,t,s)\right| + \left|\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial y}(x,t,s)\right| + \left|\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x,t,s)\right| \le \psi_M(x)$$

si $|t|, |s| \le M$ para c.t.p. $x \in \Omega$.

Entonces la aplicación G es de clase C^2, y si tomamos $h_1, h_2 \in L^\infty(\Omega)$, $z_i = G'(u)h_i$ y $z_{12} = G''(u)[h_1,h_2]$, tenemos

$$\left\{\begin{array}{rcll} Az_{12} + a_0 z_{12} & = & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y_u,u)z_{12} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y_u,u)z_1 z_2 + \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x,y_u,u)h_1 h_2 & \\ & & + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial u}(x,y_u,u)(z_1 h_2 + z_2 h_1) & \text{en } \Omega \\ \partial_{\nu_A} z_{12} & = & 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{array}\right. \tag{3.1.4}$$

Demostración. Obsérvese que las hipótesis de este teorema son suficientes para deducir para cada $u \in L^\infty(\Omega)$ existencia y unicidad de solución en $W^{1,p}(\Omega)$ de y_u satisfaciendo (3.1.1), sin más que aplicar el Teorema 3.1.1. Por lo tanto, la aplicación G está bien definida. Introducimos de nuevo el espacio $V(A)$ y la aplicación F igual que en la demostración del Teorema 3.1.2. Las propiedades sobre las derivadas de f implican que F es de clase C^2. Además $\frac{\partial F}{\partial y}(y,u)$ es de nuevo un isomorfismo de $V(A)$ en $L^{p/2}(\Omega) \times L^{p-1}(\Gamma)$. Teniendo en cuenta que $F(y,u) = 0$ si y sólo si $y = G(u)$, de nuevo podemos aplicar el teorema de la función implícita para deducir que G es de clase C^2 y satisface que

$$F(G(u), u) = 0.$$

De esta igualdad, derivando dos veces, se deduce (3.1.4). □

3.2 Ecuaciones parabólicas

Sean T, Q, Σ y A, p, τ, k_1, $\tilde{k}_1$, σ_1, $\tilde{\sigma}_1$ como en la Sección 2.2, con los coeficientes del operador A de clase $C([0,T]; C(\bar{\Omega}))$. Sean f, g, y_0 funciones, $f : Q \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \Sigma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $y_0 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $y_0 \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$. Vamos a estudiar la ecuación parabólica

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay & = & f(x,t,y) & \text{en } Q, \\ \dfrac{\partial y}{\partial n_A} & = & g(s,t,y,v) & \text{sobre } \Sigma, \\ y(\cdot,0) & = & y_0 & \text{en } \Omega. \end{array} \right. \tag{3.2.1}$$

Para cada v denotaremos por y_v la solución de la ecuación (3.2.1).

Supongamos que

P1 - Para todo $y \in \mathbb{R}$, $f(\cdot,\cdot,y)$ es medible en Q. Para casi todo $(x,t) \in Q$, $f(x,t,\cdot)$ es de clase C^1 en $\mathbb{R}$. Se satisfacen las siguientes desigualdades:

$$|f(x,t,0)| \leq M_1(x,t), \qquad C_0 \geq \frac{\partial f}{\partial y}(x,t,y) \geq M_1(x,t)\eta(|y|),$$

donde $C_0 \in \mathbb{R}$, η es una función decreciente de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$, y $M_1 \in L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega))$.

Para todo $y, v \in \mathbb{R}$, $g(\cdot,\cdot,y,v)$ es medible en Σ. Para todo $v \in \mathbb{R}$ y casi todo $(s,t) \in \Sigma$, $g(s,t,\cdot,v)$ es de clase C^1 en $\mathbb{R}$. Para casi todo $(s,t) \in \Sigma$, $g(s,t,\cdot)$ y

$g'_y(s,t,\cdot)$ son continuos en $\mathbb{R}^2$. Se satisfacen las siguientes desigualdades:

$$|g(s,t,0,v)| \leq N_1(s,t) + |v|, \qquad C_0 \geq \frac{\partial g}{\partial y}(s,t,y,v) \geq (N_1(s,t) + |v|)\eta(|y|),$$

donde $N_1 \in L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma))$.

Entonces tenemos

Teorema 3.2.1 *Para todo $v \in L^\infty(\Sigma)$ existe una única $y_v \in L^\tau(W^{1,p}) \cap C_b(\bar{Q} \setminus \bar{\Omega} \times \{0\})$ solución de (3.2.1). Además la aplicación Φ, dada por $\Phi(v) = y_v$ es continua de $L^\alpha(\Sigma)$ en $L^\tau(W^{1,p}) \cap C_b(\bar{Q} \setminus \bar{\Omega} \times \{0\})$ para cualquier $N+1 < \alpha < \infty$.*

Demostración. Teniendo en cuenta la Proposición 2.2.8, la prueba se puede realizar como en Casas, Raymond y Zidani [35], o Raymond y Zidani [78, 79]. □

Dando hipótesis suficientes de diferenciabilidad sobre las funciones que intervienen, podemos asegurar además que Φ es diferenciable.

Teorema 3.2.2 *Supongamos que se satisface P1 y además*

P2 - Para casi todo $(s,t) \in \Sigma$, $g(s,t,\cdot)$ es de clase C^1 y se satisface la desigualdad

$$\left|\frac{\partial g}{\partial v}(s,t,y,v)\right| \leq (N_1(s,t) + |v|)\eta(|y|). \tag{3.2.2}$$

Entonces, la aplicación $\Phi : L^\infty(\Sigma) \to L^\tau(W^{1,p}(\Omega))$, dada por $\Phi(v) = y_v$ es de clase C^1. Además, si v, $h \in L^\infty(\Sigma)$, $y_v = \Phi(v)$ y $z_h = \Phi'(v)h$, entonces z_h es la solución de

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial z_h}{\partial t} + Az_h & = & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,t,y_v)z_h & \text{en } Q, \\ \dfrac{\partial z_h}{\partial n_A} & = & \dfrac{\partial g}{\partial y}(s,t,y_v,v)z_h + \dfrac{\partial g}{\partial v}(s,t,y_v,v)h & \text{sobre } \Sigma, \\ z_h(\cdot,0) & = & 0 & \text{en } \Omega. \end{array}\right. \tag{3.2.3}$$

Demostración. Del teorema anterior tenemos que la aplicación está bien definida y es continua. Vamos a actuar como en el caso elíptico para ver que es de clase C^1. Para ello tomemos

$$V(A) = \left\{y \in L^\tau(W^{1,p}) : \ \partial_t y + Ay \in L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega)), \ \partial_{n_A} y \in L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma)), \ y(0) \in L^\infty(\Omega)\right\}.$$

La aplicación

$$F : V(A) \times L^\infty(\Sigma) \longrightarrow L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega)) \times L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma)) \times L^\infty(\Omega)$$

$$F(y,v) = (\partial_t y + Ay - f(\cdot,y),\ \partial_{n_A} y - g(\cdot,y,v),\ y(0) - y_0)$$

es de clase C^1. Además

$$\frac{\partial F}{\partial y}(y,v)z = (\partial_t z + Az - \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot,y)z,\ \partial_{n_A} z - \frac{\partial g}{\partial y}(\cdot,y,v)z,\ z(0))$$

es un isomorfismo de $V(A)$ en $L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega)) \times L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma)) \times L^\infty(\Omega)$. (Esto se deduce inmediatamente de la Proposición 2.2.8 y la discusión sobre los exponentes de la prueba de la Proposición 2.2.9). Como $F(y,v) = 0$ si y sólo si $y = \Phi(v)$, tenemos que

$$F(\Phi(v),v) = 0.$$

Aplicando el Teorema de la Función Implícita, obtenemos que Φ es de clase C^1 y derivando, se obtiene la expresión (3.2.3). □

Si además hacemos las siguientes hipótesis extra sobre la regularidad de f y g, podemos probar que la aplicación que relaciona al estado y al control es de clase C^2.

P3 - Para casi todo $(x,t) \in Q$, $f(x,t,\cdot)$ es de clase C^2 y se satisface la desigualdad

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,t,y)\right| \le M_1(x,t)\eta(|y|). \tag{3.2.4}$$

Para casi todo $(s,t) \in \Sigma$, $g(s,t,\cdot)$ es de clase C^2 y se satisface la desigualdad

$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(s,t,y,v)\right| + \left|\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(s,t,y,v)\right| + \left|\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial y}(s,t,y,v)\right| \le (N_1(s,t) + |v|)\eta(|y|), \tag{3.2.5}$$

Bajo todas estas hipótesis, podemos probar que la aplicación que relaciona el control con el estado es de clase C^2.

Teorema 3.2.3 *Supongamos que se satisfacen P1, P2 y P3. Entonces la aplicación* $\Phi : L^\infty(\Sigma) \to L^\tau(W^{1,p}(\Omega))$ *es de clase* C^2. *Además, si tomamos* $h_1,\ h_2 \in L^\infty(\Sigma)$,

$z_i = G'(v)h_i$ *y* $z_{12} = G''(v)[h_1, h_2]$, *tenemos*

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial z_{12}}{\partial t} + Az_{12} & = & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,t,y_v)z_{12} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,t,y_v)z_1 z_2 & \textit{en } Q, \\ \\ \dfrac{\partial z_{12}}{\partial n_A} & = & \dfrac{\partial g}{\partial y}(s,t,y_v,v)z_{12} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(s,t,y_v,v)z_1 z_2 + & \\ & & +\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}(s,t,y_v,v)h_1 h_2 + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial v}(s,t,y_v,v)(z_1 h_2 + z_2 h_1) & \textit{sobre } \Sigma, \\ z_h(\cdot,0) & = & 0 & \textit{en } \Omega. \end{array}\right. \tag{3.2.6}$$

Demostración. Definimos $V(A)$ y $F(y,v)$ como en la demostración del resultado anterior. Ahora la hipótesis P3 nos permite asegurar que F es de clase C^2. Como $\frac{\partial F}{\partial y}(y,v)$ es un isomorfismo, el Teorema de la Función Implícita nos permite asegurar que Φ es de clase C^2. Derivando dos veces obtenemos la expresión (3.2.6). □

3.3 Sensitividad del estado respecto a perturbaciones difusas del control

Para establecer un principio de Pontryagin para los problemas de la página 16, debemos establecer otro tipo de desarrollo de Taylor, basado en perturbaciones difusas del control. Ahora no hace falta suponer diferenciabilidad de las funciones involucradas respecto al control y sólo hace falta suponer que es de clase C^1 respecto al estado.

3.3.1 Caso elíptico

Sean A el operador elíptico introducido en la Sección 3.1, $p > N$, $a_0 \in L^{p/2}(\Omega)$, f una función $f : \Omega \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \Gamma \to \mathbb{R}$, $g \in L^{p-1}(\Gamma)$. Empezamos enunciando un lema.

Lema 3.3.1 *Para todo $\rho \in (0,1)$, existe una sucesión de conjuntos medibles $E_\rho^k \subset \Omega$ tales que*

$$|E_\rho^k| = \rho|\Omega|$$

y

$$\lim_{k\to 0} \frac{1}{\rho}\chi_{E_\rho^k} = 1 \ \textit{*-débilmente en } L^\infty(\Omega), \tag{3.3.1}$$

donde $\chi_{E_\rho^k}$ es la función característica del conjunto E_ρ^k.

Demostración. Existen dos pruebas distintas de este importante lema en la literatura. Una constructiva, debida a Casas [22] y una de Raymond y Zidani [78] que utiliza el Teorema de convexidad de Liapunov. □

Sea

$$U_{ad} = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : \ u(x) \in K_\Omega(x) \text{ c.t.p. } x \in \Omega\},$$

donde K_Ω es una multiaplicación medible con imagen no vacía y cerrada en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Teorema 3.3.2 *Supongamos que se satisface E0 (pág. 66) y que*

E3 - $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es C^1 respecto de y, continua respecto a u y medible respecto de x, para todo $M > 0$ existe $C_M > 0$ tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, t, u(x))\right| \leq C_M$$

si $|t| \leq M$ para todo $u \in U_{ad}$ y c.t.p. $x \in \Omega$, y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, t, u(x)) \leq 0$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, todo $u \in U_{ad}$ y c.t.p. $x \in \Omega$.

Entonces para todo $\rho \in (0, 1)$ y todo $u_1, u_2 \in U_{ad}$ existe un conjunto medible $E_\rho \subset \Omega$ tal que

$$|E_\rho| = \rho|\Omega|,$$

y

$$y_\rho = y_1 + \rho z + r_\rho, \ \text{con} \ \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho}\|r_\rho\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 0, \tag{3.3.2}$$

donde

$$u_\rho = \begin{cases} u_1 & \text{en } \Omega \setminus E_\rho \\ u_2 & \text{en } E_\rho, \end{cases}$$

$$y_\rho = y_{u_\rho}, \quad y_1 = y_{u_1},$$

y

$$\begin{cases} Az + a_0 z &= \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y_1, u_1)z + f(x, y_1, u_2) - f(x, y_1, u_1) & \text{en } \Omega \\ \partial_{n_A} z &= 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

Demostración. Sea $(E_\rho^k)_k$ como en el Lema 3.3.1 y sean

$$u_\rho^k = \begin{cases} u_1 & \text{en } \Omega \setminus E_\rho^k \\ u_2 & \text{en } E_\rho^k, \end{cases}$$

$$y_\rho^k = y_{u_\rho^k}$$

y

$$\xi_\rho^k = \frac{y_\rho^k - y_1}{\rho} - z.$$

Se satisface la ecuación

$$\begin{cases} A\xi_\rho^k + a_0\xi_\rho^k + a_\rho^k\xi_\rho^k &= f_\rho^k + h_\rho^k \quad \text{en } \Omega \\ \partial_{n_A}\xi_\rho^k &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

donde

$$a_\rho^k = -\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1 + \theta(y_\rho^k - y_1), u_\rho^k)\, d\theta,$$

$$f_\rho^k = \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1 + \theta(y_\rho^k - y_1), u_\rho^k)\, d\theta - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1, u_1)\right) z$$

y

$$h_\rho^k = \left(1 - \frac{1}{\rho}\chi_{E_\rho^k}\right)\left(f(x, y_1, u_1) - f(x, y_1, u_2)\right).$$

Podemos escribir $\xi_\rho^k = \xi_\rho^{k,1} + \xi_\rho^{k,2}$, donde

$$\begin{cases} A\xi_\rho^{k,1} + a_0\xi_\rho^{k,1} + a_\rho^k\xi_\rho^{k,1} &= f_\rho^k \quad \text{en } \Omega \\ \partial_{n_A}\xi_\rho^{k,1} &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} A\xi_\rho^{k,2} + a_0\xi_\rho^{k,2} + a_\rho^k\xi_\rho^{k,2} &= h_\rho^k \quad \text{en } \Omega \\ \partial_{n_A}\xi_\rho^{k,2} &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

Debido al Teorema 2.1.3

$$\|\xi_\rho^{k,1}\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le C\|f_\rho^k\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{3.3.3}$$

Denotamos por ζ_ρ^k la solución de

$$\begin{cases} A\zeta_\rho^k + a_0\zeta_\rho^k + a\zeta_\rho^k &= h_\rho^k \quad \text{en } \Omega \\ \partial_{n_A}\zeta_\rho^k &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

donde

$$a = -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1, u_1).$$

El operador $\mathcal{T}$ que asocia ζ, la solución en $W^{1,p}(\Omega)$ de

$$\begin{cases} A\zeta + a_0\zeta + a\zeta &= h \quad \text{en } \Omega \\ \partial_{n_A}\zeta &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

con h es continuo de $\big(W^{1,p'}(\Omega)\big)'$ en $W^{1,p}(\Omega)$ (Teorema de regularidad 2.1.3). Como la inyección de $L^\infty(\Omega)$ en $\big(W^{1,p'}(\Omega)\big)'$ es compacta, $\mathcal{T}$ se puede considerar un operador compacto de $L^\infty(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$. De (3.3.1) se sigue que

$$\lim_{k\to\infty} h_\rho^k = 0 \text{ débilmente en } L^{p/2}(\Omega),$$

y por tanto

$$\lim_{k\to\infty} \|\zeta_\rho^k\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 0.$$

Así para todo $\rho \in (0,1)$ existe $k(\rho)$ tal que

$$\|\zeta_\rho^{k(\rho)}\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \rho. \tag{3.3.4}$$

Nótese que

$$\lim_{\rho\to 0} u_\rho^{k(\rho)}(x) = u_1(x) \text{ para c.t.p. } x \in \Omega$$

y, por el Teorema 3.1.1 y la inyección continua de $W^{1,p}(\Omega)$ en $C(\bar{\Omega})$, tenemos que

$$\lim_{\rho\to 0} y_\rho^{k(\rho)} = y_1 \text{ en } C(\bar{\Omega}).$$

Por lo tanto

$$\lim_{\rho\to 0} \|f_\rho^{k(\rho)}\|_{L^\infty(\Omega)} = 0, \tag{3.3.5}$$

y

$$\lim_{\rho\to 0} \|a - a_\rho^{k(\rho)}\|_{L^\infty(\Omega)} = 0. \tag{3.3.6}$$

Obviamente

$$\begin{cases} A(\xi_\rho^{k(\rho),2} - \zeta_\rho^{k(\rho)}) + a_0(\xi_\rho^{k(\rho),2} - \zeta_\rho^{k(\rho)}) + a_\rho^{k(\rho)}(\xi_\rho^{k(\rho),2} - \zeta_\rho^{k(\rho)}) &= (a - a_\rho^{k(\rho)})\zeta_\rho^{k(\rho)} \quad \text{en } \Omega \\ \partial_{n_A}(\xi_\rho^{k(\rho),2} - \zeta_\rho^{k(\rho)}) &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

y

$$\|\xi_\rho^{k(\rho),2} - \zeta_\rho^{k(\rho)}\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \|a - a_\rho^{k(\rho)}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\zeta_\rho^{k(\rho)}\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{3.3.7}$$

Si escribimos

$$\|\xi_\rho^{k(\rho)}\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|\xi_\rho^{k(\rho),1} + \xi_\rho^{k(\rho),2} - \zeta_\rho^{k(\rho)} + \zeta_\rho^{k(\rho)}\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq$$

$$\leq \|\xi_\rho^{k(\rho),1}\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|\xi_\rho^{k(\rho),2} - \zeta_\rho^{k(\rho)}\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|\zeta_\rho^{k(\rho)}\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

teniendo en cuenta (3.3.3), (3.3.5), (3.3.4), (3.3.6) y (3.3.7), tenemos que

$$\lim_{\rho\to 0} \|\xi_\rho^{k(\rho)}\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 0.$$

Tomemos pues $E_\rho = E_\rho^{k(\rho)}$. Tenemos que $r_\rho = \rho\xi_\rho^{k(\rho)}$ y se cumple (3.3.2). $\square$

3.3.2 Caso parabólico

Sean Ω, Γ, T, Q, Σ y A, p, τ, k_1, $\tilde{k}_1$, σ_1, $\tilde{\sigma}_1$ como en la Sección 2.2. Supondremos un poco más de regularidad que para el problema introducido en la Sección 3.2. La frontera Γ es de clase $C^{1+\hat{\varepsilon}}$ y los coeficientes del operador A son de clase $C([0,T];C^{0,\hat{\varepsilon}}(\bar{\Omega}))$, para algún $0 < \hat{\varepsilon} < 1$. Sean f, g, y_0 funciones, $f : Q \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \Sigma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $y_0 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $y_0 \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$.

Gracias a los resultados de regularidad y de continuidad, estamos en posición de establecer desarrollos de Taylor para el estado. Para una prueba del siguiente lema véanse por ejemplo [22] o [78].

Lema 3.3.3 *Para $\rho \in (0,1)$, existe una sucesión de conjuntos medibles $E_\rho^k \subset \Sigma$ tales que*

$$|E_\rho^k| = \rho|\Sigma|$$

y

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\rho}\chi_{E_\rho^k} = 1 \textit{ débil-* en } L^\infty(\Sigma), \tag{3.3.8}$$

donde $\chi_{E_\rho^k}$ es la función característica del conjunto E_ρ^k.

Nota 3.3.1 *Ahora mediante $|E_\rho^k|$ denotamos la medida de Lebesgue sobre Σ, y no sobre $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, ya que si no todas las medidas serían nulas*

Sea

$$V_{ad} = \{v \in L^\infty(\Sigma) : \ v(s,t) \in K_\Sigma(s,t) \text{ para casi todo } (s,t) \in \Sigma\},$$

donde K_Σ es una multiaplicación medible con imagen no vacía y compacta en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Teorema 3.3.4 *Supongamos que se satisface P1. Entonces para todo $\rho \in (0,1)$, y todo $v_1, v_2 \in V_{ad}$, existe un conjunto medible $E_\rho \subset \Sigma$ tal que*

$$|E_\rho| = \rho|\Sigma|,$$

y

$$y_\rho = y_1 + \rho z + r_\rho \ \textit{con} \ \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\rho}\|r_\rho\|_{L^\tau(W^{1,p})} = 0, \tag{3.3.9}$$

donde

$$v_\rho(s,t) = \begin{cases} v_1 & \textit{en } \Sigma \setminus E_\rho \\ v_2 & \textit{en } E_\rho \end{cases}, \qquad y_\rho = y_{v_\rho}, \qquad y_1 = y_{v_1},$$

y

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} + Az &= f'_y(x,t,y_1)z & \textit{en } Q, \\ \dfrac{\partial z}{\partial n_A} &= g'_y(s,t,y_1,v_1)z + g(s,t,y_1,v_2) - g(s,t,y_1,v_1) & \textit{sobre } \Sigma, \\ z(\cdot,0) &= 0 & \textit{en } \Omega \times \{0\}. \end{cases}$$

Demostración. Probemos (3.3.9). Tomemos una sucesión $(E_\rho^k)_k$ como en el Lema 3.3.3. Definamos

$$v_\rho^k(s,t) = \begin{cases} v_1 & \text{en } \Sigma \setminus E_\rho^k \\ v_2 & \text{en } E_\rho^k \end{cases}, \quad y_\rho^k = y_{v_\rho^k} \ \text{ y } \ \xi_\rho^k = \frac{y_\rho^k - y_1}{\rho} - z.$$

La función ξ_ρ^k satisface la ecuación

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi_\rho^k}{\partial t} + A\xi_\rho^k + a_\rho^k \xi_\rho^k &= f_\rho^k & \text{en } Q, \\ \dfrac{\partial \xi_\rho^k}{\partial n_A} + b_\rho^k \xi_\rho^k &= g_\rho^k + h_\rho^k & \text{sobre } \Sigma, \\ \xi_\rho^k(\cdot,0) &= 0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

con

$$a_\rho^k(x,t) = -\int_0^1 f'_y(x,t,(y_1 + \theta(y_\rho^k - y_1)))\, d\theta,$$

$$f_\rho^k = (-f'_y(x,t,y_1) - a_\rho^k)z,$$

$$b_\rho^k(s,t) = -\int_0^1 g'_y(s,t,(y_1 + \theta(y_\rho^k - y_1)), v_\rho^k)\, d\theta,$$

$$g_\rho^k = (-g'_y(s,t,y_1,v_1) - b_\rho^k)z,$$

y

$$h_\rho^k = (1 - \frac{1}{\rho}\chi_{E_\rho^k})(g(s,t,y_1,v_1) - g(s,t,y_1,v_2)).$$

Denotamos por $\xi_\rho^{k,1}$ la solución de

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial \xi_\rho^{k,1}}{\partial t} + A\xi_\rho^{k,1} + a_\rho^k \xi_\rho^{k,1} & = & f_\rho^k & \text{en } Q, \\ \dfrac{\partial \xi_\rho^{k,1}}{\partial n_A} + b_\rho^k \xi_\rho^{k,1} & = & g_\rho^k & \text{sobre } \Sigma, \\ \xi_\rho^{k,1}(\cdot,0) & = & 0 & \text{en } \Omega, \end{array}\right.$$

por $\xi_\rho^{k,2}$ la solución de

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial \xi_\rho^{k,2}}{\partial t} + A\xi_\rho^{k,2} + a_\rho^k \xi_\rho^{k,2} & = & 0 & \text{en } Q, \\ \dfrac{\partial \xi_\rho^{k,2}}{\partial n_A} + b_\rho^k \xi_\rho^{k,2} & = & h_\rho^k & \text{sobre } \Sigma, \\ \xi_\rho^{k,2}(\cdot,0) & = & 0 & \text{en } \Omega, \end{array}\right. \tag{3.3.10}$$

y por ζ_ρ^k la solución de

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial \zeta_\rho^k}{\partial t} + A\zeta_\rho^k + a\zeta_\rho^k & = & 0 & \text{en } Q, \\ \dfrac{\partial \zeta_\rho^k}{\partial n_A} + b\zeta_\rho^k & = & h_\rho^k & \text{sobre } \Sigma, \\ \zeta_\rho^k(\cdot,0) & = & 0 & \text{en } \Omega, \end{array}\right. \tag{3.3.11}$$

donde $a(x,t) = -f'_y(x,t,y_1(x,t))$, y $b(s,t) = -g'_y(s,t,y_1(s,t),v_1(s,t))$. De (3.3.10) y (3.3.11) se sigue que:

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial(\xi_\rho^{k,2} - \zeta_\rho^k)}{\partial t} + A(\xi_\rho^{k,2} - \zeta_\rho^k) + a_\rho^k(\xi_\rho^{k,2} - \zeta_\rho^k) & = & (a - a_\rho^k)\zeta_\rho^k & \text{en } Q, \\ \dfrac{\partial(\xi_\rho^{k,2} - \zeta_\rho^k)}{\partial n_A} + b_\rho^k(\xi_\rho^{k,2} - \zeta_\rho^k) & = & (b - b_\rho^k)\zeta_\rho^k & \text{sobre } \Sigma, \\ (\xi_\rho^{k,2} - \zeta_\rho^k)(\cdot,0) & = & 0 & \text{en } \Omega. \end{array}\right.$$

Debido a las Proposiciones 2.2.8 y 2.2.9, $\xi_\rho^{k,1}$, $\xi_\rho^{k,2}$ y ζ_ρ^k pertenecen a $L^\tau(W^{1,p})$ y se satisfacen las estimaciones:

$$\|\xi_\rho^{k,2} - \zeta_\rho^k\|_{L^\tau(W^{1,p})} \leq C_1\Big(\|a - a_\rho^k\|_{L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega))} + \|b - b_\rho^k\|_{L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma))}\Big)\|\zeta_\rho^k\|_{L^\tau(W^{1,p})}, \tag{3.3.12}$$

$$\|\xi_\rho^{k,1}\|_{L^\tau(W^{1,p})} \leq C_2(\|f_\rho^k\|_{L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega))} + \|g_\rho^k\|_{L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma))}), \tag{3.3.13}$$

donde las constantes C_1 y C_2 no dependen de k.

El operador $\mathcal{T}$ que asocia ζ, la solución en $L^\tau(W^{1+\varepsilon,p}) \cap W^{1,\tau}((W^{1,p'})')$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \zeta}{\partial t} + A\zeta + a\zeta &= 0 \quad \text{en } Q, \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial n_A} + b\zeta &= h \quad \text{sobre } \Sigma, \\ \zeta(\cdot, 0) &= 0 \quad \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{3.3.14}$$

con h, es continuo de $L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma))$ en $L^\tau(W^{1+\varepsilon,p}) \cap W^{1,\tau}((W^{1,p'})')$. La continuidad en $L^\tau(W^{1+\varepsilon,p})$ se sigue de la Proposición 2.2.7. Con la ecuación (3.3.14) probamos que ζ pertenece a $W^{1,\tau}((W^{1,p'})')$, y la estimación correspondiente se sigue de la estimación en $L^\tau(W^{1+\varepsilon,p})$, de una manera similar a como se hace al final de la prueba del Teorema 2.2.1. Como la inyección de $W^{1+\varepsilon,p}(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$ es compacta, (véase Grisvard [59]), entonces la inyección de $L^\tau(W^{1+\varepsilon,p}) \cap W^{1,\tau}((W^{1,p'})')$ en $L^\tau(W^{1,p})$ es compacta (véase Simon, [83, Corolario 4]). Así $\mathcal{T}$ se puede considerar un operador compacto de $L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma))$ en $L^\tau(W^{1,p})$. De (3.3.8) se sigue que

$$\lim_{k\to\infty} h_\rho^k = 0 \text{ débilmente en } L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma)),$$

y por tanto

$$\lim_{k\to\infty} \|\zeta_\rho^k\|_{L^\tau(W^{1,p})} = 0.$$

Así, para todo $\rho \in (0,1)$, existe un $k(\rho)$ tal que

$$\|\zeta_\rho^{k(\rho)}\|_{L^\tau(W^{1,p})} \leq \rho. \tag{3.3.15}$$

Nótese que

$$\lim_{\rho\to 0} v_\rho^{k(\rho)} = v_1 \text{ en } L^\alpha(\Sigma) \text{ para cualquier } \alpha < \infty.$$

Por lo tanto, debido al Teorema 3.2.1, tenemos que

$$\lim_{\rho\to 0} y_\rho^{k(\rho)} = y_1 \text{ en } C_b(\bar{Q} \setminus \bar{\Omega} \times \{0\}). \tag{3.3.16}$$

La relación (3.3.16) implica que

$$\lim_{\rho\to 0} f_\rho^{k(\rho)} = 0 \text{ en } L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega)), \quad \lim_{\rho\to 0} g_\rho^{k(\rho)} = 0 \text{ en } L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma)), \tag{3.3.17}$$

y

$$\lim_{\rho\to 0}(a - a_\rho^{k(\rho)}) = 0 \text{ en } L^{\tilde{k}_1}(L^{k_1}(\Omega)), \quad \lim_{\rho\to 0}(b - b_\rho^{k(\rho)}) = 0 \text{ en } L^{\tilde{\sigma}_1}(L^{\sigma_1}(\Gamma)). \tag{3.3.18}$$

Con (3.3.12), (3.3.13), (3.3.15), (3.3.17) y (3.3.18), obtenemos

$$\lim_{\rho\to 0} \|\xi_\rho^{k(\rho)}\|_{L^\tau(W^{1,p})} = 0. \tag{3.3.19}$$

Sea $E_\rho = E_\rho^{k(\rho)}$. Tenemos que $r_\rho = \rho\xi_\rho^{k(\rho)}$. Luego (3.3.9) se sigue de (3.3.19). □

Parte II

Condiciones de optimalidad

Esta parte de la memoria, que constituye el núcleo de la misma, está dedicada al estudio de condiciones de optimalidad de primer y segundo orden para los problemas de control estudiados.

Para las condiciones de primer orden existen dos vías principales. Deducir una ecuación de Euler-Lagrange en el caso de que el conjunto de controles sea convexo o demostrar que se satisface el Principio de Pontryagin en el caso de que el conjunto de controles no sea convexo.

Las condiciones de Euler-Lagrange vamos a deducirlas de resultados generales para problemas de optimización abstractos. Sin embargo, el Principio de Pontryagin requiere un estudio más adaptado al problema de control. En este caso la clave está en hacer un desarrollo de Taylor apropiado para el estado, como se hizo en el Capítulo 3, y para el funcional, basados en perturbaciones apropiadas del control. En nuestro caso utilizamos perturbaciones difusas.

Estudiaremos también en esta parte condiciones de segundo orden para problemas con un número finito de restricciones sobre el estado y conjunto de controles admisibles convexo. Primero aplicaremos resultados para problemas de optimización abstractos. En este caso nos limitamos a ver que bajo las hipótesis impuestas, nuestros problemas de control verifican las condiciones de los teoremas abstractos. Las hipótesis a verificar para un resultado de condiciones necesarias no revisten mayor dificultad. Es al deducir condiciones suficientes cuando se complica la demostración. Los resultados abstractos se deben a Casas y Tröltzsch [36]. Ellos mismos explican en su artículo como aplicarlo a distintos problemas de control y los problemas que surgen. Hacen notar que la regularidad del estado adjunto se convierte a veces en el principal obstáculo para deducir condiciones suficientes. Nosotros hemos de dar condiciones de regularidad suficientemente fuertes sobre las derivadas de las funciones que intervienen en el objetivo y en las restricciones para lograr que el estado adjunto sea suficientemente regular.

Por último, establecemos condiciones de segundo orden que involucran al Hamiltoniano.

Capítulo 4

Funcionales involucrados en los problemas de control

En este capítulo estudiamos los funcionales involucrados en los problemas de control. Establecemos bajo hipótesis adecuadas propiedades de continuidad y diferenciabilidad. El objetivo es lograr que se satisfagan las hipótesis de un teorema sobre condiciones de optimalidad para problemas generales de optimización. Para los problemas donde el conjunto de controles no es necesariamente convexo, establecemos un desarrollo de Taylor del funcional para perturbaciones difusas del control. El objetivo en este caso es establecer condiciones en forma de principio de Pontryagin.

4.1 Propiedades de diferenciabilidad

En esta sección, y a no ser que se diga lo contrario, Ω denotará un subconjunto abierto, acotado y conexo de $\mathbb{R}^N$, cuya frontera Γ es de clase C^1.

4.1.1 Caso elíptico

Supondremos de nuevo que A un operador elíptico de coeficientes continuos de la forma (2.1.1) (pág. 23), $p > N$, $a_0 \in L^{p/2}(\Omega)$, f una función $f : \Omega \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \Gamma \to \mathbb{R}$, $g \in L^{p-1}(\Gamma)$.

Teorema 4.1.1 *Supongamos que se satisface la hipótesis sobre diferenciabilidad C^1 de f E1 (pág. 69) y que $L : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función*

E4 - medible en x y de clase C^1 en las variables segunda y tercera y tal que para todo $M > 0$ existe $\psi_M \in L^1(\Omega)$ tal que $|L(x,0,0)| \leq \psi_M(x)$ para c.t.p. $x \in \Omega$ y

$$\left|\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,u)\right| + \left|\frac{\partial L}{\partial u}(x,y,u)\right| \leq \psi_M(x)$$

si $|y|, |u| \leq M$ para c.t.p. $x \in \Omega$.

Entonces, el funcional $J : L^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por

$$J(u) = \int_\Omega L(x, y_u, u)dx \tag{4.1.1}$$

es de clase C^1. Además, para todo $u, h \in L^\infty(\Omega)$

$$J'(u)h = \int_\Omega \left(\frac{\partial L}{\partial u}(x,y_u,u) + \varphi_{0u}\frac{\partial f}{\partial u}(x,y_u,u)\right) h\, dx \tag{4.1.2}$$

donde $y_u = G(u)$ ($G(u)$ definido como en el Teorema 3.1.2) y $\varphi_{0u} \in W^{1,p'}(\Omega)$ es la única solución del problema

$$\left\{\begin{array}{rcll} A^*\varphi + a_0\varphi & = & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y_u,u)\varphi + \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y_u,u) & \text{en } \Omega \\ \partial_{n_{A^*}}\varphi & = & 0 & \textit{sobre } \Gamma, \end{array}\right. \tag{4.1.3}$$

donde A^* es el operador adjunto de A

$$A^*\varphi = -\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ji}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right).$$

Demostración. Consideremos la función $F_0 : C(\bar{\Omega}) \times L^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$F_0(y,u) = \int_\Omega L(x, y(x), u(x))\, dx.$$

Gracias a las hipótesis sobre L es directo probar que F_0 es de clase C^1. Ahora, aplicando la regla de la cadena a $J(u) = F_0(G(u), u)$ y usando el Teorema 3.1.2 y el hecho de que $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ obtenemos que J es de clase C^1 y

$$J'(u)h = \int_\Omega \left(\frac{\partial L}{\partial y}(x,y_u,u)z_h + \frac{\partial L}{\partial u}(x,y_u,u)h\right) dx,$$

donde $z_h = G'(u)h$ y viene dada por (3.1.3). Tomemos ahora φ_{0u} solución de (4.1.3). Las hipótesis hechas sobre las derivadas de f y L y el Teorema 2.1.3 nos aseguran que $\varphi_{0u} \in W^{1,p'}(\Omega)$. Podemos por tanto aplicar la fórmula de Green y deducir (4.1.2) de la igualdad anterior. □

Teorema 4.1.2 *Supongamos que se cumplen las hipótesis de diferenciabilidad sobre f E1 (pág. 69) y E2 (pág. 70) y sobre L E4 (pág. 88). Supongamos además que*

E5 - L es de clase C^2 en y, u y para todo $M > 0$ existe $\psi_M \in L^1(\Omega)$, tal que

$$\left|\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y,u)\right| + \left|\frac{\partial^2 L}{\partial u \partial y}(x,y,u)\right| + \left|\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(x,y,u)\right| \leq \psi_M(x)$$

si $|y|, |u| \leq M$ para c.t.p. $x \in \Omega$.

Entonces el funcional $J : L^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ es de clase C^2 y para todo $u, h_1, h_2 \in L^\infty(\Omega)$

$$J''(u)h_1h_2 =$$

$$\int_\Omega \left[\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y_u,u)z_1z_2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial u}(x,y_u,u)(z_1h_2 + z_2h_1) + \frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(x,y_u,u)h_1h_2\right.$$

$$\left. +\varphi_{0u}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y_u,u)z_1z_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial u}(x,y_u,u)(z_1h_2 + z_2h_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x,y_u,u)h_1h_2\right)\right] dx \tag{4.1.4}$$

donde $y_u = G(u)$ ($G(u)$ definido como en el Teorema 3.1.2), $\varphi_{0u} \in W^{1,p'}(\Omega)$ es la única solución del problema (4.1.3) *y $z_i = G'(u)h_i$, $i = 1, 2$.*

Demostración. Consideremos de nuevo la función $F_0 : C(\bar{\Omega}) \times L^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$F_0(y,u) = \int_\Omega L(x, y(x), u(x))\, dx.$$

Gracias a las hipótesis sobre L es directo probar que F_0 es de clase C^2. Ahora, aplicando la regla de la cadena a $J(u) = F_0(G(u), u)$ y usando el Teorema 3.1.3 y el hecho de que $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ obtenemos que J es de clase C^2 y la fórmula (4.1.4) para la derivada segunda. □

Teorema 4.1.3 *Supongamos que se satisfacen las hipótesis de diferenciabilidad C^1 sobre f en E1 (pág. 69) y que para todo $1 \leq j \leq n_d + n_i$, $g_j : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función*

E6 - medible en x, de clase C^1 en la variable η (η designa a la variable muda para el gradiente) y existen una constante $C > 0$ y una función $\psi_1 \in L^{p'}(\Omega)$ tal que

$$\left|\frac{\partial g_j}{\partial \eta}(x,\eta)\right| \leq C|\eta|^{p-1} + \psi_1(x)$$

para c.t.p. $x \in \Omega$.

Entonces para todo $1 \leq j \leq n_d + n_i$, el funcional $G_j : L^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por

$$G_j(u) = \int_\Omega g_j(x, \nabla y_u(x))dx, \tag{4.1.5}$$

es de clase C^1. Además, para todo $u, h \in L^\infty(\Omega)$

$$G_j'(u)h = \int_\Omega \varphi_{ju}\frac{\partial f}{\partial u}(x, y_u, u)h\, dx \tag{4.1.6}$$

donde $y_u = G(u)$, $\varphi_{ju} \in W^{1,p'}(\Omega)$ es la única solución del problema

$$\left\{\begin{array}{rcll} A^*\varphi_{ju} + a_0\varphi_{ju} & = & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y_u, u)\varphi_{ju} - \operatorname{div}\left(\dfrac{\partial g_j}{\partial \eta}(x, \nabla y_u)\right) & \text{en } \Omega \\ \partial_{n_{A^*}}\varphi_{ju} & = & 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{array}\right. \tag{4.1.7}$$

Demostración. Es suficiente considerar la función de clase C^1 $F_j : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$F_j(y) = \int_\Omega g_j(x, \nabla y(x))\, dx.$$

Teniendo en cuenta el Teorema 3.1.2, sabemos que $y_u \in W^{1,p}(\Omega)$. Además, gracias a la hipótesis E6,

$$\frac{\partial g_j}{\partial \eta_i}(x, \nabla y_u) \in L^{p'}(\Omega);$$

por lo tanto, el Teorema 2.1.3 se puede usar para deducir que φ_{ju} está bien definida y pertenece a $W^{1,p'}(\Omega)$. Derivando F_j, usando la regla de la cadena e integrando por partes, obtenemos la expresión (4.1.6) para la derivada. □

Teorema 4.1.4 *Supongamos que se cumplen las hipótesis de diferenciabilidad sobre f E1 (pág. 69) y E2 (pág. 70) y sobre g_j E6. Supongamos además que*

E7 - g_j es de clase C^2 en η y existen una constante $C > 0$ y una función $\psi_2 \in L^{p/(p-2)}(\Omega)$ tales que

$$\left|\frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x,\eta)\right| \leq C|\eta|^{p-2} + \psi_2(x) \text{ c.t.p. } x \in \Omega.$$

Entonces para todo $1 \leq j \leq n_d + n_i$*, el funcional* $G_j : L^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ *es de clase* C^2*. Además para todo* $u, h_1, h_2 \in L^\infty(\Omega)$

$$G_j''(u)h_1h_2 = \int_\Omega \Bigg[\nabla^T z_2 \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x, \nabla y_u)\nabla z_1$$
$$+\varphi_{ju}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y_u, u)z_1z_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial u}(x, y_u, u)(z_1h_2 + z_2h_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x, y_u, u)h_1h_2\right)\Bigg]\, dx \tag{4.1.8}$$

donde $y_u = G(u)$*,* $\varphi_{ju} \in W^{1,p'}(\Omega)$ *es la única solución del problema* (4.1.7) *y* $z_i = G'(u)h_i$*,* $i = 1, 2$*.*

Demostración. La función $F_j : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$F_j(y) = \int_\Omega g_j(x, \nabla y(x))\, dx$$

es de clase C^2. Derivando con la regla de la cadena, obtenemos la expresión (4.1.8) para la derivada segunda. La hipótesis E7 nos asegura que la derivada segunda de g_j respecto al gradiente del estado pertenece a $L^{p/(p-2)}(\Omega)$, y la hipótesis E1 nos asegura que el gradiente de z_i está en $L^p(\Omega)$, con lo cual la integral está bien definida. El segundo sumando de la integral debe entenderse como producto de dualidad en $W^{1,p'}(\Omega)$, ya que, como $L^{p/2}(\Omega) \subset \left(W^{1,p'}(\Omega)\right)'$, gracias a E2 así está bien definido. □

Nota 4.1.1 *Recuérdese que la solución de la ecuación* (4.1.7) *se debe interpretar en el sentido variacional*

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ji}(x)\frac{\partial \varphi_{ku}}{\partial x_i}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x) + a_0(x)\varphi_{ku}(x)\psi(x)\right) dx = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_u, u)\varphi_{ku}(x)\psi(x)\, dx$$
$$+\sum_{j=1}^N \int_\Omega \frac{\partial g_k}{\partial \eta_j}(x, \nabla y_u)\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x)\, dx$$

para todo $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$*.*

4.1.2 Caso parabólico

Sean T, Q, Σ y A, p, τ, k_1, $\tilde{k}_1$, σ_1, $\tilde{\sigma}_1$ como en la Sección 2.2, con los coeficientes del operador A de clase $C([0, T]; C(\bar{\Omega}))$. Sean f, g, y_0 funciones, $f : Q \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$g : \Sigma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $F : Q \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $G : \Sigma \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $y_0 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $y_0 \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$. Sean k_2, $\tilde{k}_2$, σ_2, $\tilde{\sigma}_2$ y ν como en la sección 2.2.

Para demostrar que el funcional

$$J(v) = \int_0^T \int_\Omega F(x,t,y_v)\, dx\, dt + \int_0^T \int_\Gamma G(s,t,y_v,v)\, ds\, dt + \int_\Omega L(x, y_v(x,T))\, dx$$

es de clase C^1, utilizaremos las siguientes hipótesis.

P4 - Para todo $y \in \mathbb{R}$, $F(\cdot,\cdot,y)$ es medible en Q. Para casi todo $(x,t) \in Q$, $F(x,t,\cdot)$ es de clase C^1 en $\mathbb{R}$. Se satisfacen las siguientes estimaciones:

$$|F(x,t,0)| \leq M_2(x,t), \qquad \left|\frac{\partial F}{\partial y}(x,t,y)\right| \leq M_2(x,t)\eta(|y|),$$

donde $M_2 \in L^{\tilde{k}_2}(L^{k_2}(\Omega))$.

Para todo $y, v \in \mathbb{R}$, $G(\cdot, y, v)$ es medible en Σ. Para todo $v \in \mathbb{R}$ y casi todo $(s,t) \in \Sigma$, $G(s,t,\cdot,v)$ es de clase C^1 en $\mathbb{R}$. Para casi todo $(s,t) \in \Sigma$, $G(s,t,\cdot)$ y $G'_y(s,t,\cdot)$ son continuas $\mathbb{R}^2$. Se satisfacen las siguientes estimaciones:

$$|G(s,t,0,v)| \leq N_2(s,t) + |v|, \qquad \left|\frac{\partial G}{\partial y}(s,t,y,v)\right| \leq (N_2(s,t) + |v|)\eta(|y|),$$

donde $N_2 \in L^{\tilde{\sigma}_2}(L^{\sigma_2}(\Gamma))$.

Para todo $y \in \mathbb{R}$, $L(\cdot, y)$ es medible en Ω. Para casi todo $x \in \Omega$, $L(x,\cdot)$ es de clase C^1 en $\mathbb{R}$. Se satisfacen las siguientes estimaciones:

$$|L(x,y)| \leq M_3(x), \qquad \left|\frac{\partial L}{\partial y}(x,y)\right| \leq M_4(x)\eta(|y|),$$

donde $M_3(x) \in L^1(\Omega)$ y $M_4 \in L^\nu(\Omega)$.

P5 - $G(s,t,v,\cdot)$ es de clase C^1 en $\mathbb{R}$. Se satisface la siguiente estimación:

$$\left|\frac{\partial G}{\partial v}(s,t,y,v)\right| \leq (N_2^*(s,t) + |v|)\eta(|y|),$$

donde $N_2^* \in L^1(\Sigma)$.

Teorema 4.1.5 *Supongamos que se satisfacen las hipótesis hechas sobre f y g, P1 y P2, y las hipótesis hechas sobre F, G y L P4 y P5. Entonces el funcional $J : L^\infty(\Sigma) \to \mathbb{R}$ es de clase C^1. Además para todo v, $h \in L^\infty(\Sigma)$*

$$J'(v)h = \int_\Sigma \left(\frac{\partial G}{\partial v}(s,t,y_v,v) + \varphi_{0v}\frac{\partial g}{\partial v}(s,t,y_v,v) \right) h\, ds\, dt,$$

donde $y_v = \Phi(v)$ es la solución de la ecuación (3.2.1), $\varphi_{0v} \in L^{\tau'}(W^{1,p'}) + L^2(H^1)$ es la única solución del problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + A^*\varphi - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,t,y_v)\varphi & = & \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,t,y_v) & \textit{en } Q, \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial n_{A^*}} - \dfrac{\partial g}{\partial y}(s,t,y_v,v)\varphi & = & \dfrac{\partial G}{\partial y}(s,t,y_v,v) & \textit{sobre } \Sigma, \\[2ex] \varphi(\cdot,T) & = & \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y(T)) & \textit{en } \Omega, \end{array} \right. \tag{4.1.9}$$

Demostración. Consideremos la función $F_0 : L^\tau(W^{1,p}(\Omega)) \times L^\infty(\Sigma) \to \mathbb{R}$ definida por

$$F_0(y,v) = \int_0^T \int_\Omega F(x,t,y)\ dx\ dt + \int_0^T \int_\Gamma G(s,t,y,v)\ ds\ dt + \int_\Omega L(x,y(x,T))\ dx$$

Gracias a las hipótesis sobre F, G y L es directo probar que F_0 es de clase C^1. Ahora, aplicando la regla de la cadena a $J(v) = F_0(\Phi(v),v)$ y usando el Teorema 3.2.2 tenemos que J es de clase C^1 y

$$J'(v)h = \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial F}{\partial y}(x,t,y)z_h\ dx\ dt + \int_0^T \int_\Gamma \frac{\partial G}{\partial y}(s,t,y,v)z_h\ ds\ dt +$$

$$\int_0^T \int_\Gamma \frac{\partial G}{\partial v}(s,t,y,v)h\ ds\ dt + \int_\Omega \frac{\partial L}{\partial y}(x,y(x,T))z_h(T)\ dx$$

donde $z_h = \Phi'(v)h$ y viene dada por (3.2.3). Tomemos ahora φ_{0v} solución de (4.1.9). Las hipótesis hechas sobre las derivadas de f, g, F, G y L y la Proposición 2.2.10 nos aseguran que $\varphi_{0u} \in L^{\tau'}(W^{1,p'}(\Omega)) + L^2(H^1)$ y que podemos aplicar la fórmula de Green y deducir la expresión para la derivada de la igualdad anterior. □

Para lograr que el funcional sea dos veces diferenciable supondremos que

P6 - $F(x,t,y)$ es de clase C^2 en y y existe $\psi_1 \in L^1(Q)$ tal que

$$\left|\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,t,y)\right| \leq \psi_1(x,t)\eta(|y|)$$

para casi todo $(x,t) \in Q$.

$G(s,t,y,v)$ es de clase C^2 en y y en v y existe $\psi_2 \in L^1(\Sigma)$ tal que

$$\left|\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(s,t,y,v)\right| + \left|\frac{\partial^2 G}{\partial y \partial v}(s,t,y,v)\right| + \left|\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}(s,t,y,v)\right| \leq (\psi_2(s,t) + |v|)\eta(|y|)$$

para casi todo $(s,t) \in \Sigma$.

$L(x,y)$ es de clase C^2 en y y existe $\psi_3 \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\left|\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y)\right| \leq \psi_3(x)\eta(|y|)$$

para casi todo $x \in \Omega$.

Teorema 4.1.6 *Supongamos que se satisfacen P1–P6. Entonces el funcional* $J : L^\infty(\Sigma) \to \mathbb{R}$ *es de clase* C^2. *Además para todo* v, h_1, $h_2 \in L^\infty(\Sigma)$

$$J''(v)h_1h_2 =$$
$$= \int_\Sigma \left(\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(s,t,y_v,v)z_1z_2 + \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial v}(s,t,y_v,v)(z_1h_2 + z_2h_1) + \frac{\partial^2 G}{\partial v^2}(s,t,y_v,v)h_1h_2\right) ds\,dt +$$
$$+ \int_\Sigma \varphi_{0v} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(s,t,y_v,v)z_1z_2 + \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial v}(s,t,y_v,v)(z_1h_2 + z_2h_1) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(s,t,y_v,v)h_1h_2\right) ds\,dt,$$

donde y_v *es la solución de la ecuación* (3.2.1), φ_{0v} *es la solución de* (4.1.9) *y* z_i *es la solución de* (3.2.3) *respectivamente para* h_i, $i \in \{1,2\}$.

Demostración. Consideremos F_0 como en la demostración del resultado anterior. Gracias a las hipótesis sobre f, g, F, G y L se tiene que F_0 es de clase C^2. Aplicando la regla de la cadena y el Teorema 3.2.3, obtenemos que J es de clase C^2 y la expresión para su derivada segunda. □

Por último vamos a dar condiciones de diferenciabilidad adecuadas para las restricciones. En el problema $(\mathbf{P_p})$ de la página 16 definimos

$$C = \left\{\vec{f} \in L^\tau(L^p)^N : \int_0^T \zeta_j \left(\int_\Omega g_j(x,t,\vec{f})dx\right) dt = 0 \text{ si } 1 \leq j \leq n_i,\right.$$

$$\left.\int_0^T \zeta_j \left(\int_\Omega g_j(x,t,\vec{f})dx \right) dt \leq 0 \text{ si } n_i + 1 \leq j \leq n_i + n_d \right\},$$

donde $\zeta_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g_j : Q \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ son funciones.

Ejemplo 4.1.1 *Si tuviéramos una relación de desigualdad con $\zeta_1(s) = s^{\tau/p} - \delta/T$ y $g_1(x,t,f) = |f - g_d(x,t)|^p$, con $\delta \in \mathbb{R}$ y $g_d \in L^\tau(L^p)^N$ dados, la restricción sería*

$$\int_0^T \left(\int_\Omega |\nabla y - g_d(x,t)|^p dx \right)^{\frac{\tau}{p}} dt \leq \delta,$$

o sea, que $C = \bar{B}_{L^\tau(L^p)}(g_d, \delta)$.

Nos interesarán las propiedades de diferenciabilidad sobre

$$G_j(v) = \int_0^T \zeta_j \left(\int_\Omega g_j(x,t,\nabla_x y_v)dx \right) dt.$$

Supongamos que

P7 - $\zeta_j(s)$ es C^1 y $g_j(x,t,\eta)$ es de clase C^1 en η y existen una constante $C > 0$ y una función $\psi \in L^{\tau'}(L^{p'})$ tales que

$$|\zeta_j'(s)| \leq C|s|^{\frac{\tau}{p}-1} \quad \text{y} \quad \left| \frac{\partial g_j}{\partial \eta}(x,t,\eta) \right| \leq C|\eta|^{p-1} + \psi(x,t)$$

para c.t.p. $(x,t) \in Q$.

Entonces tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.1.7 *Supongamos que se satisfacen P1, P2 y P7. Entonces para todo j, el funcional $G_j : L^\infty(\Sigma) \to \mathbb{R}$ es de clase C^1. Además, para todo v, $h \in L^\infty(\Sigma)$*

$$G_j'(v)h = \int_\Sigma \varphi_{jv} \frac{\partial g}{\partial v}(s,t,y_v,v)ds\,dt,$$

donde y_v es la solución de la ecuación (3.2.1), *$\varphi_{jv} \in L^{\tau'}(W^{1,p'}) + L^2(H^1)$ es la única* *solución del problema*

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + A^*\varphi - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,t,y_v)\varphi & = & -\mathrm{div}\, \zeta_j'\left(\displaystyle\int_\Omega g_j(x,t,\nabla_x y_v)dx\right)\dfrac{\partial g_j}{\partial \eta}(s,t,\nabla_x y_v(x,t)) \\ & & \textit{en } Q, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n_{A^*}} - \dfrac{\partial g}{\partial y}(s,t,y_v,v)\varphi & = & \mathrm{div}\, \zeta_j'\left(\displaystyle\int_\Omega g_j(x,t,\nabla_x(y_v))dx\right)\dfrac{\partial g_j}{\partial \eta}(s,t,\nabla_x y_v(x,t))\cdot\vec{n} \\ & & \textit{sobre } \Sigma, \\ \varphi(\cdot,T) & = & \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,\bar{y}(T)) \qquad \textit{en } \Omega. \end{cases} \tag{4.1.10}$$

Demostración. Consideremos la función de clase C^1, $F_j : L^\tau(W^{1,p}(\Omega)) \to \mathbb{R}$ definida por

$$F_j(y) = \int_0^T \zeta_j\left(\int_\Omega g_j(x,t,\nabla_x y)dx\right)dt.$$

Así tenemos que $G_j = F_j \circ \Phi$, y por la regla de la cadena, G_j es de clase C^1.

Ahora, teniendo en cuenta el Teorema 3.2.2, podemos asegurar que $y_v \in L^\tau(W^{1,p}(\Omega))$, y gracias a P7, tenemos que

$$\zeta_j'\left(\int_\Omega g_j(x,t,\nabla_x y_v)dx\right)\frac{\partial g_j}{\partial\eta}(s,t,\nabla_x y_v(x,t)) \in L^{\tau'}(L^{p'})^N.$$

Por lo tanto podemos usar la Proposición 2.2.10 para deducir que φ_{jv} está bien definida y pertenece a $L^{\tau'}(W^{1,p'}(\Omega)) + L^2(H^1)$. Derivando F_j, usando la regla de la cadena e integrando por partes, obtenemos la expresión para la derivada de $G_j(v)$. $\square$

Ejemplo 4.1.2 *Retomemos el Ejemplo 4.1.1, con $g_d = 0$ para simplificar la notación. En este caso*

$$F_1(y) = \int_0^T \left(\int_\Omega |\nabla_x y|^p dx\right)^{\frac{\tau}{p}} dt - \delta$$

y

$$F_1'(y)z = \int_0^T \left[\left(\int_\Omega |\nabla_x y|^p dx\right)^{\frac{\tau}{p}-1}\int_\Omega |\nabla_x y|^{p-2}\nabla_x y\nabla_x z dx\right] dt.$$

Para probar que las restricciones son de clase C^2, haremos la siguiente hipótesis.

P8 - $\zeta_j(s)$ es C^2 y $g_j(x,t,\eta)$ es de clase C^2 en η y existen una constante $C>0$ y una función $\psi \in L^{\tau/(\tau-2)}(L^{p/(p-2)})$ tales que

$$|\zeta_j''(s)| \leq C|s|^{\frac{\tau}{p}-2} \quad \text{y} \quad \left|\frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x,t,\eta)\right| \leq C|\eta|^{p-2} + \psi(x,t)$$

para c.t.p. $(x,t) \in Q$.

Ahora podemos demostrar el siguiente resultado.

Teorema 4.1.8 *Supongamos que se satisfacen P1, P2, P3, P7 y P8. Para todo j, el funcional $G_j : L^\infty(\Sigma) \to \mathbb{R}$ es de clase C^2. Además, para todo v, h_1, $h_2 \in L^\infty(\Sigma)$*

$$G_j''(v)h_1h_2 = \int_0^T \left[\zeta_j''\left(\int_\Omega g_j(x,t,\nabla_x y_v)dx\right)\int_\Omega \frac{\partial g_j}{\partial \eta}\nabla_x z_1\, dx \int_\Omega \frac{\partial g_j}{\partial \eta}\nabla_x z_2\, dx\right] dt+$$

$$\int_0^T \left[\zeta_j'\left(\int_\Omega g_j(x,t,\nabla_x y_v)dx\right)\int_\Omega \nabla_x^T z_1 \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x,t,\nabla_x y_v)\nabla_x z_2 dx\right] dt+$$

$$+\int_\Sigma \varphi_{jv}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(s,t,y_v,v)z_1z_2 + \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial v}(s,t,y_v,v)(z_1h_2+z_2h_1) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(s,t,y_v,v)h_1h_2\right) ds\, dt,$$

donde y_v es la solución de la ecuación (3.2.1), $\varphi_{jv} \in L^{\tau'}(W^{1,p'}) + L^2(H^1)$ es la solución de (4.1.10) y z_i es la solución de (3.2.3) respectivamente para h_i, $i \in \{1,2\}$.

Demostración. La función $F_j : L^\tau(W^{1,p}(\Omega)) \to \mathbb{R}$ definida por

$$F_j(y) = \int_0^T \zeta_j\left(\int_\Omega g_j(x,t,\nabla_x y)dx\right) dt$$

es de clase C^2. Derivando y usando la regla de la cadena obtenemos la expresión para la derivada segunda de $G_j(v)$. Las hipótesis hechas nos aseguran que la integral está bien definida. □

Ejemplo 4.1.3 *Retomemos los ejemplos 4.1.1 y 4.1.2. Se tiene que*

$$F_1''(y)z_1z_2 = \int_0^T \left[\left(\int_\Omega |\nabla_x y|^p dx\right)^{\frac{\tau}{p}-2}\int_\Omega |\nabla_x y|^{p-2}\nabla_x y \nabla_x z_1 dx \int_\Omega |\nabla_x y|^{p-2}\nabla_x y \nabla_x z_2 dx\right] dt+$$

$$\int_0^T \left[\left(\int_\Omega |\nabla_x y|^p dx\right)^{\frac{\tau}{p}-1}\int_\Omega \nabla_x^T z_2 \left(|\nabla_x y|^{p-4}\nabla_x y \nabla_x^T y + |\nabla_x y|^{p-2} I_N\right)\nabla_x z_1 dx\right] dt,$$

donde I_N es la matriz identidad $N \times N$.

4.2 Sensitividad de los funcionales respecto a perturbaciones difusas

4.2.1 Caso elíptico

Ω denotará un subconjunto abierto, acotado y conexo de $\mathbb{R}^N$, cuya frontera Γ es de clase C^1; A un operador elíptico de coeficientes continuos de la forma (2.1.1) (pág. 23); $p > N$; $a_0 \in L^{p/2}(\Omega)$; $f : \Omega \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $g : \Gamma \to \mathbb{R}$, $g \in L^{p-1}(\Gamma)$; $L : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g_j : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ para $1 \leq j \leq n_i + n_e$.

Para establecer un principio de Pontryagin para el problema $(\mathbf{P_e})$ de la página 16, debemos establecer otro tipo de desarrollo de Taylor, basado en perturbaciones difusas del control. Ahora no hace falta suponer diferenciabilidad de las funciones involucradas respecto al control.

Teorema 4.2.1 *Supongamos que se satisfacen las hipótesis sobre f E0 (pág. 66), E3 (pág. 75) y sobre g_j E6(pág. 90). Supongamos además que $L : \Omega \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es una*

E8 - función de Carathéodory, de clase C^1 en la segunda variable y para todo $M > 0$ existe $\psi_M \in L^1(\Omega)$ tal que $|L(x, 0, u(x))| \leq \psi_M(x)$ para todo $u \in U_{ad}$ y c.t.p. $x \in \Omega$ y

$$\left| \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, u(x)) \right| \leq \psi_M(x)$$

si $|y| \leq M$ para todo $u \in U_{ad}$ y c.t.p. $x \in \Omega$.

Para todo $\rho \in (0, 1)$ y todo $u_1, u_2 \in U_{ad}$ tomemos E_ρ, u_ρ, y_ρ y z como en el Teorema 3.3.2.

Entonces para todo $\rho \in (0, 1)$ y todo $u_1, u_2 \in U_{ad}$ se cumple que

$$J(u_\rho) = J(u_1) + \rho \Delta J + o(\rho)$$

y

$$G_j(u_\rho) = G_j(u_1) + \rho \Delta G_j + o(\rho) \text{ para } 1 \leq j \leq n_i + n_d,$$

donde

$$\Delta J = \int_\Omega \frac{\partial L}{\partial y}(x, y_1, u_1) z \, dx + \int_\Omega (L(x, y_1, u_2) - L(x, y_1, u_1)) \, dx$$

y

$$\Delta G_j = \int_\Omega \frac{\partial g_j}{\partial \eta}(x, \nabla y_1) \nabla z \, dx$$

para $1 \leq j \leq n_i + n_d$.

Nota 4.2.1 *Nótese que* $\Delta G_j \neq G_j'(u_1)u_2$, *ya que* $z \neq G'(u_1)u_2$.

Demostración. Usando las definiciones de E_ρ, u_ρ, y_ρ y z dadas en el Teorema 3.3.2 tenemos que

$$\frac{J(u_\rho)-J(u_1)}{\rho} - \Delta J = \int_\Omega \left(\int_0^1 \frac{\partial L}{\partial y}(x, y_1 + \theta(y_\rho - y_1), u_\rho) d\theta - \frac{\partial L}{\partial y}(x, y_1, u_1) \right) z\, dx -$$

$$- \int_\Omega \left(1 - \frac{1}{\rho}\chi_{E_\rho}\right) (L(x, y_1, u_2) - L(x, y_1, u_1))\ dx$$

y en virtud del Lema 3.3.1 esta cantidad converge hacia 0.

También

$$\frac{G_j(u_\rho)-G_j(u_1)}{\rho} - \Delta G_j = \int_\Omega \left(\int_0^1 \frac{g_j}{\partial \eta}(x, \nabla y_1 + \theta(\nabla y_\rho - \nabla y_1)) d\theta - \frac{g_j}{\partial \eta}(x, \nabla y_1) \right) \nabla z\, dx$$

y en virtud de la propiedades de crecimiento impuestas sobre $g_j(\eta)$ en E6 y (3.3.2), esta cantidad tiende hacia 0. La prueba está completa. □

4.2.2 Caso parabólico

Sean Ω, Γ, T, Q, Σ y A, p, τ, k_1, $\tilde{k}_1$, σ_1, $\tilde{\sigma}_1$ como en la Sección 2.2, con la frontera Γ de clase $C^{1+\hat{\varepsilon}}$ y los coeficientes del operador A de clase $C([0,T]; C^{0,\hat{\varepsilon}}(\bar{\Omega}))$, para algún $0 < \hat{\varepsilon} < 1$. Sean f, g, y_0 funciones, $f : Q\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \Sigma\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $F : Q\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $G : \Sigma \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $y_0 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $y_0 \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$. Sean k_2, $\tilde{k}_2$, σ_2, $\tilde{\sigma}_2$ y ν como en la sección 2.2.

Consideremos el Problema $(\mathbf{P_p})$ de la página 16.

Teorema 4.2.2 *Supongamos que se satisfacen las hipótesis P1 y P4. Para todo* $\rho \in (0,1)$ *y todo* $v_1, v_2 \in V_{ad}$ *tomemos* E_ρ, v_ρ, y_ρ *y* z *como en el Teorema 3.3.4.*

Entonces, para todo $\rho \in (0,1)$, *y todo* $v_1, v_2 \in V_{ad}$ *se cumple que*

$$J(v_\rho) = J(v_1) + \rho\Delta J + o(\rho), \tag{4.2.1}$$

donde

$$\begin{aligned}\Delta J = & \int_Q F_y'(\cdot, y_1) z\, dx\ dt + \int_\Sigma G_y'(\cdot, y_1, v_1) z ds\ dt + \int_\Omega L_y'(\cdot, y_1(\cdot, T)) z(\cdot, T)\ dx \\ & + \int_\Sigma (G(s,t,y_1,v_2) - G(s,t,y_1,v_1))\ ds\ dt.\end{aligned}$$

Demostración. Usando las definiciones de E_ρ, u_ρ, y_ρ y z dadas en el Teorema 3.3.4 tenemos que,

$$\frac{J(v_\rho) - J(v_1)}{\rho} - \Delta J = \int_Q \left(\int_0^1 F'_y(x,t,y_1 + \theta(y_\rho - y_1))d\theta - F'_y(x,t,y_1) \right) z\, dxdt +$$

$$+ \int_\Sigma \left(\int_0^1 G'_y(s,t,y_1 + \theta(y_\rho - y_1), v_\rho)d\theta - G'_y(s,t,y_1,v_1) \right) z\, dsdt +$$

$$+ \int_\Omega \left(\int_0^1 L'_y(x,y_1 + \theta(y_\rho - y_1))d\theta - L'_y(x,y_1) \right) z\, dx -$$

$$\int_\Sigma \left(1 - \frac{1}{\rho} \right) \chi_{E_\rho} \left(G(s,t,y_1,u_2) - G(s,t(y_1,u_1)\right) dsdt.$$

Gracias al Lema 3.3.3 podemos pasar al límite y verificar (4.2.1). □

Capítulo 5

Principio de Pontryagin

El principal resultado de este capítulo es un principio de Pontryagin para los problemas ($\mathbf{P_e}$) (pág. 16) y ($\mathbf{P_p}$) (pág. 16). En los últimos años ha habido un interés creciente en principios de Pontryagin para problemas de control gobernados por ecuaciones en derivadas parciales con restricciones puntuales o integrales sobre la variable estado. Entre otros podemos citar a Casas [22], Fattorini [52, 54], Bei Hu y Yong [60], Li y Yong [65], Raymond y Zidani [78], Casas, Raymond y Zidani [35].

La prueba de los Teoremas 5.1.1 y 5.2.1 está basada en el principio variacional de Ekeland. Para obtener un principio de Pontryagin aproximado correspondiente a las condiciones de optimalidad que se deducen del principio variacional de Ekeland, usamos el método de perturbaciones difusas, como en los artículos de Raymond y Zidani [78] o Casas, Raymond y Zidani [35].

5.1 Caso elíptico

Consideremos el problema ($\mathbf{P_e}$) de la página 16. De nuevo tomamos Ω de clase C^1; Γ su frontera; A un operador elíptico de coeficientes continuos de la forma (2.1.1) (pág. 23); $p > N$; $a_0 \in L^{p/2}(\Omega)$; $f : \Omega \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $g : \Gamma \to \mathbb{R}$, $g \in L^{p-1}(\Gamma)$; $L : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g_j : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ para $1 \leq j \leq n_i + n_e$.

Definimos el Hamiltoniano $H : \Omega \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$H(x, y, u, \varphi, \nu) = \nu L(x, y, u) + \varphi f(x, y, u).$$

Se satisface el principio de Pontryagin

Teorema 5.1.1 *Sea $\bar{u}$ una solución de $(\mathbf{P_e})$. Supongamos además que se cumplen las hipótesis sobre f E0 (pág. 66) y E3 (pág. 75), sobre g_j E6 (pág. 90) y sobre L E8 (pág. 98). Entonces existen números reales $\bar{\nu}$, $\bar{\lambda}_j$, $j = 1, \ldots, n_d + n_i$ no todos nulos y funciones $\bar{y} \in W^{1,p}(\Omega)$, $\bar{\varphi} \in W^{1,p'}(\Omega)$ tales que satisfacen*

$$\bar{\lambda}_j \geq 0 \quad n_i + 1 \leq j \leq n_i + n_d, \qquad \bar{\lambda}_j \int_\Omega g_j(x, \nabla \bar{y}(x))\, dx = 0, \tag{5.1.1}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcll} A\bar{y} + a_0\bar{y} & = & f(x, \bar{y}(x), \bar{u}(x)) & \textit{en } \Omega \\ \partial_{n_A}\bar{y} & = & 0 & \textit{sobre } \Gamma, \end{array} \right. \tag{5.1.2}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcll} A^*\bar{\varphi} + a_0\bar{\varphi} & = & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \bar{y}, \bar{u})\bar{\varphi} + \bar{\nu}\dfrac{\partial L}{\partial y}(x, \bar{y}, \bar{u}) - \displaystyle\sum_{j=1}^{n_i+n_d} \bar{\lambda}_j \mathrm{div}\left(\dfrac{\partial g_j}{\partial \eta}(x, \nabla \bar{y})\right) & \textit{en } \Omega \\ \partial_{n_{A^*}}\bar{\varphi} & = & 0 & \textit{sobre } \Gamma, \end{array} \right. \tag{5.1.3}$$

y para casi todo $x \in \Omega$,

$$H(x, \bar{y}(x), \bar{u}(x), \bar{\varphi}(x), \bar{\nu}) = \min_{k \in K_\Omega(x)} H(x, \bar{y}(x), k, \bar{\varphi}(x), \bar{\nu}).$$

Demostración. Definimos la distancia de Ekeland sobre el conjunto U_{ad} como

$$d_E(u_1, u_2) = |\{x \in \Omega : \ u_1(x) \neq u_2(x)\}|.$$

Tenemos que (U_{ad}, d_E) es un espacio métrico completo y la convergencia en (U_{ad}, d_E) implica convergencia puntual en Ω.

Definimos el funcional penalizado

$$J_n(u) = \left\{ \left[\left(J(u) - J(\bar{u}) + \frac{1}{n^2} \right)^+ \right]^2 + \sum_{j=1}^{n_i} G_j(u)^2 + \sum_{j=n_i+1}^{n_i+n_d} \left(G_j(u)^+ \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

donde para todo $a \in \mathbb{R}$

$$a^+ = \left\{ \begin{array}{ll} a & \text{si } a > 0, \\ 0 & \text{si } a \leq 0. \end{array} \right.$$

Consideramos el problema

$$(\mathrm{P_n}) \left\{ \min_{u \in U_{ad}} J_n(u). \right.$$

La solución de nuestro problema original $\bar{u}$ es una $\frac{1}{n^2}$-solución de $(\mathrm{P_n})$. J_n es continuo para la distancia de Ekeland, luego por el principio variacional de Ekeland [50] existe $u_n \in U_{ad}$ tal que

$$d_E(u_n, \bar{u}) \leq \frac{1}{n}$$

y

$$J_n(u_n) \leq J_n(u) + \frac{1}{n} d_E(u, u_n) \text{ para todo } u \in U_{ad}. \tag{5.1.4}$$

Sea $u \in U_{ad}$ cualquiera. Por los Teoremas 3.3.2 y 4.2.1, para todo $\rho \in (0,1)$ existe un conjunto medible $E_\rho \subset \Omega$ tal que

$$|E_\rho| = \rho|\Omega|,$$

$$y_\rho = y_n + \rho z_n + r_\rho, \text{ con } \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho} \|r_\rho\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 0,$$

$$J(u_\rho) = J(u_n) + \rho \Delta J^n + o(\rho) \tag{5.1.5}$$

y

$$G_j(u_\rho) = G_j(u_n) + \rho \Delta G_j^n + o(\rho) \text{ para } 1 \leq j \leq n_i + n_d,$$

donde

$$u_\rho = \begin{cases} u_n & \text{en } \Omega \setminus E_\rho \\ u & \text{en } E_\rho, \end{cases}$$

$$y_\rho = y_{u_\rho},$$

$$\begin{cases} A z_n + a_0 z_n &= \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y_n, u_n) z_n + f(x, y_n, u) - f(x, y_n, u_n) & \text{en } \Omega \\ \partial_{n_A} z_n &= 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

$$\Delta J^n = \int_\Omega \frac{\partial L}{\partial y}(x, y_n, u_n) z_n \, dx + \int_\Omega (L(x, y_n, u) - L(x, y_n, u_n)) \, dx$$

y

$$\Delta G_j^n = \int_\Omega \frac{\partial g_j}{\partial \eta}(x, \nabla y_n) \nabla z_n \, dx$$

para $1 \leq j \leq n_i + n_d$.

Por (5.1.4)

$$J_n(u_n) \leq J_n(u_\rho) + \frac{1}{n} d_E(u_\rho, u_n).$$

Pero

$$d_E(u_\rho, u_n) = |E_\rho| = \rho|\Omega|,$$

y por tanto

$$\frac{J_n(u_n) - J_n(u_\rho)}{\rho} \leq \frac{1}{n}|\Omega|.$$

Vamos a pasar al límite cuando ρ tiende hacia cero en esta expresión para obtener así un Principio de Pontryagin en forma integral aproximado.

$$\frac{J_n(u_n) - J_n(u_\rho)}{\rho} = \frac{J_n^2(u_n) - J_n^2(u_\rho)}{\rho(J_n(u_n) + J_n(u_\rho))} =$$

$$= \frac{\left[\left(J(u_n) - J(\bar{u}) + \frac{1}{n^2}\right)^+\right]^2 - \left[\left(J(u_\rho) - J(\bar{u}) + \frac{1}{n^2}\right)^+\right]^2}{\rho(J_n(u_n) + J_n(u_\rho))} +$$

$$+ \frac{\sum_{j=1}^{n_i} \left(G_j(u_n)^2 - G_j(u_\rho)^2\right)}{\rho(J_n(u_n) + J_n(u_\rho))} + \frac{\sum_{j=n_i+1}^{n_i+n_d} \left((G_j(u_n)^+)^2 - (G_j(u_\rho)^+)^2\right)}{\rho(J_n(u_n) + J_n(u_\rho))}$$

Vamos a ver que pasa cuando $\rho \to 0$ sumando a sumando.

$$A^\rho = \frac{\left[\left(J(u_n) - J(\bar{u}) + \frac{1}{n^2}\right)^+\right]^2 - \left[\left(J(u_\rho) - J(\bar{u}) + \frac{1}{n^2}\right)^+\right]^2}{\rho(J_n(u_n) + J_n(u_\rho))} = A_1^\rho \cdot A_2^\rho,$$

donde

$$A_1^\rho = \frac{\left(J(u_n) - J(\bar{u}) + \frac{1}{n^2}\right)^+ - \left(J(u_\rho) - J(\bar{u}) + \frac{1}{n^2}\right)^+}{\rho},$$

y

$$A_2^\rho = \frac{\left(J(u_n) - J(\bar{u}) + \frac{1}{n^2}\right)^+ + \left(J(u_\rho) - J(\bar{u}) + \frac{1}{n^2}\right)^+}{J_n(u_n) + J_n(u_\rho)}$$

debido a la continuidad de J tenemos que

$$\lim_{\rho \to 0} A_2^\rho = \frac{\left(J(u_n) - J(\bar{u}) + \frac{1}{n^2}\right)^+}{J_n(u_n)}$$

A esta cantidad la llamaremos ν^n. Para pasar al límite en A_1^ρ tenemos que tener en cuenta el signo de $J(u_n) - J(\bar{u}) + \frac{1}{n^2}$. Si $J(u_n) - J(\bar{u}) + \frac{1}{n^2} > 0$, entonces para ρ suficientemente pequeño se tiene que $J(u_\rho) - J(\bar{u}) + \frac{1}{n^2} > 0$ y por tanto

$$A_1^\rho = \frac{J(u_n) - J(u_\rho)}{\rho};$$

en virtud de (5.1.5), esta cantidad converge hacia $-\Delta J^n$. Si $J(u_n) - J(\bar{u}) + \frac{1}{n^2} \leq 0$ entonces $\nu^n = 0$. Además para todo ρ se tiene que $|A_1^\rho|$ está acotado: Sabemos que para cualquier par de números reales t_1 y t_2 se tiene que $|t_1^+ - t_2^+| \leq |t_1 - t_2|$. Por lo tanto, y usando (5.1.5) tenemos que

$$|A_1^\rho| \leq \frac{|J(u_n) - J(u_\rho)|}{\rho} \leq |\Delta J^n| + \frac{|o(\rho)|}{\rho},$$

y por tanto $|A_1^\rho|$ está acotado independientemente de ρ.. Así que en cualquier caso podemos escribir que

$$\lim_{\rho \to 0} A^\rho = -\nu^n \Delta J^n.$$

En segundo lugar, para $1 \leq j \leq n_i$, se tiene que

$$\frac{G_j(u_n)^2 - G_j(u_\rho)^2}{\rho(J_n(u_n) + J_n(u_\rho))} = \frac{G_j(u_n) - G_j(u_\rho)}{\rho} \cdot \frac{G_j(u_n) + G_j(u_\rho)}{J_n(u_n) + J_n(u_\rho)}$$

y esta cantidad converge hacia $-\lambda_j^n \Delta G_j^n$, donde

$$\lambda_j^n = \frac{G_j(u_n)}{J_n(u_n)}$$

De la misma manera, si $n_i + 1 \leq j \leq n_i + n_d$ se puede asegurar que

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{(G_j(u_n)^+)^2 - (G_j(u_\rho)^+)^2}{\rho(J_n(u_n) + J_n(u_\rho))} = -\lambda_j^n \Delta G_j^n,$$

siendo en este caso

$$\lambda_j^n = \frac{G_j(u_n)^+}{J_n(u_n)}.$$

Con lo cual tenemos que

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{J_n(u_n) - J_n(u_\rho)}{\rho} = -\nu^n \Delta J^n - \sum_{j=1}^{n_i+n_d} \lambda_j^n \Delta G_j^n,$$

y por lo tanto

$$-\nu^n \Delta J^n - \sum_{j=1}^{n_i+n_d} \lambda_j^n \Delta G_j^n \leq \frac{1}{n}|\Omega|.$$

Si escribimos el primer miembro explícitamente tenemos que

$$-\nu^n \Delta J^n - \sum_{j=1}^{n_i+n_d} \lambda_j^n \Delta G_j^n = -\int_\Omega \nu^n \frac{\partial L}{\partial y}(x, y_n, u_n) z_n \, dx - \int_\Omega \nu^n \left(L(x, y_n, u) - L(x, y_n, u_n)\right) dx -$$

$$- \sum_{j=1}^{n_i+n_d} \int_\Omega \lambda_j^n \frac{\partial g_j}{\partial \eta}(x, \nabla y_n) \nabla z_n \, dx \leq \frac{1}{n}|\Omega|.$$

Sea φ_n el estado adjunto aproximado, que cumple la ecuación

$$\left\{\begin{array}{rcll} A^*\varphi_n + a_0\varphi_n & = & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y_n, u_n)\varphi_n + & \\ & & \nu^n \dfrac{\partial L}{\partial y}(x, y_n, u_n) - \displaystyle\sum_{j=1}^{n_i+n_d} \lambda_j^n \mathrm{div}\Big(\dfrac{\partial g_j}{\partial \eta}(x, \nabla y_n)\Big) & \text{en } \Omega \\ \partial_{n_{A^*}}\varphi_n & = & 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{array}\right.$$

Integrando por partes y usando la definición de z_n, obtenemos

$$-\int_\Omega \varphi_n \left(f(x, y_n, u) - f(x, y_n, u_n)\right) dx - \int_\Omega \nu^n \left(L(x, y_n, u) - L(x, y_n, u_n)\right) \le \frac{1}{n}|\Omega|.$$

Y por lo tanto, tenemos un Principio de Pontryagin aproximado y en forma integral:

$$\int_\Omega \left(\nu^n L(x, y_n, u_n) + \varphi_n f(x, y_n, u_n)\right) dx \le \int_\Omega \left(\nu^n L(x, y_n, u) + \varphi_n f(x, y_n, u)\right) dx + \frac{1}{n}|\Omega|$$

para todo $u \in U_{ad}$.

Ahora, como

$$\nu^{n2} + \sum_{j=1}^{n_i+n_d} \lambda_j^{n2} = 1,$$

podemos tomar subsucesiones que converjan hacia números reales $\bar\nu$ y $\bar\lambda_j$, $1 \le j \le n_i+n_d$, obviamente no todos nulos. Éstos cumplen (5.1.1). Se tiene asimismo que $u_n \to \bar u$ puntualmente, y por tanto, debido al Teorema 3.1.1 $y_n \to \bar y$ en $W^{1,p}(\Omega)$, y por lo tanto uniformemente, con lo que $\varphi_n \to \bar\varphi$ en $W^{1,p'}(\Omega)$, y podemos pasar al límite para obtener el Principio de Pontryagin en forma integral:

$$\int_\Omega \left(\bar\nu L(x, \bar y, \bar u) + \bar\varphi f(x, \bar y, \bar u)\right) dx \le \int_\Omega \left(\bar\nu L(x, \bar y, u) + \bar\varphi f(x, \bar y, u)\right) dx$$

para todo $u \in U_{ad}$.

La forma puntual del principio de Pontryagin se deduce como en [78, pág. 1875] □

Algunas extensiones

De la misma manera podemos llegar a probar un principio de Pontryagin para un control frontera. Consideremos el problema

$$(\mathrm{P}'_{\mathrm{e}}) \begin{cases} \text{Minimizar } J(v) = \displaystyle\int_\Gamma \ell(s, y_v, v) ds, \\ v \in V_{ad} = \{v : \Gamma \to \mathbb{R} : \ v(s) \in K_\Gamma(s) \text{ c.t.p. } s \in \Gamma\}, \\ \displaystyle\int_\Omega g_j(x, \nabla y_u(x))\, dx = 0, \ 1 \le j \le n_i, \\ \displaystyle\int_\Omega g_j(x, \nabla y_u(x))\, dx \le 0, \ n_i + 1 \le j \le n_i + n_d, \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} Ay_v + a_0 y &= f & \text{en } \Omega \\ \partial_{n_A} y_u &= g(s, y_v, v) & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

y K_Γ es una multiaplicación medible con imagen no vacía y cerrada en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Definimos el Hamiltoniano frontera $H : \Gamma \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, como

$$H(s, y, v, \varphi, \nu) = \nu \ell(s, y, v) + \varphi g(s, y, v).$$

Teorema 5.1.2 *Sea $\bar{v}$ solución de $(\mathrm{P}'_{\mathrm{e}})$. Supongamos que $f \in L^{p/2}(\Omega)$; $g : \Gamma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función medible en Γ, de clase C^1 en la segunda variable, continua en la tercera variable y para todo $M > 0$ existen $\psi_M \in L^{p-1}(\Gamma)$ y $C_M > 0$ tales que $|g(s, 0, v(s))| \le \psi_M(s)$,*

$$-C_M \le \frac{\partial g}{\partial y}(s, t, v(s)) \le 0$$

para todo $|t| \le M$, $v \in V_{ad}$ y c.t.p. $s \in \Gamma$; $\ell : \Gamma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función medible en Γ, de clase C^1 en la segunda variable, continua en la tercera variable y para todo $M > 0$ existe $\psi_M \in L^1(\Gamma)$ tal que $|\ell(s, 0, v(s))| \le \psi_M(s)$,

$$|\frac{\partial \ell}{\partial y}(s, t, v(s))| \le \psi_M(s)$$

para todo $|t| \le M$, $v \in V_{ad}$ y c.t.p. $s \in \Gamma$. Supongamos además que se satisface E6 (pág. 90).

Entonces existen números reales $\bar{\nu}$, $\bar{\lambda}_j$, $j = 1, \ldots, n_d + n_i$ no todos nulos y funciones $\bar{y} \in W^{1,p}(\Omega)$, $\bar{\varphi} \in W^{1,p'}(\Omega)$ tales que satisfacen

$$\bar{\lambda}_j \ge 0 \quad n_i + 1 \le j \le n_i + n_d, \qquad \bar{\lambda}_j \int_\Omega g_j(x, \nabla \bar{y}(x))\, dx = 0,$$

$$\begin{cases} A\bar{y} + a_0\bar{y} &= f & en\ \Omega \\ \partial_{n_A}\bar{y} &= g(s, y_v, v) & sobre\ \Gamma, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A^*\bar{\varphi} + a_0\bar{\varphi} &= -\displaystyle\sum_{j=1}^{n_i+n_d} \bar{\lambda}_j \mathrm{div}\left(\frac{\partial g_j}{\partial \eta}(x, \nabla\bar{y})\right) & en\ \Omega \\ \partial_{n_{A^*}}\bar{\varphi} &= \dfrac{\partial g}{\partial y}(s, \bar{y}, \bar{v})\bar{\varphi} + \bar{\nu}\dfrac{\partial \ell}{\partial y}(s, \bar{y}, \bar{v}) & sobre\ \Gamma, \end{cases}$$

y para casi todo $s \in \Gamma$,

$$H(s, \bar{y}(s), \bar{v}(s), \bar{\varphi}(s), \bar{\nu}) = \min_{k \in K_\Gamma(s)} H(s, \bar{y}(s), k, \bar{\varphi}(s), \bar{\nu}).$$

5.2 Caso parabólico

Sean Ω, Γ, T, Q, Σ y A, p, τ, k_1, $\tilde{k}_1$, σ_1, $\tilde{\sigma}_1$ como en la Sección 2.2, con la frontera Γ de clase $C^{1+\hat{\varepsilon}}$ y los coeficientes del operador A de clase $C([0,T]; C^{0,\hat{\varepsilon}}(\bar{\Omega}))$, para algún $0 < \hat{\varepsilon} < 1$. Sean f, g, y_0 funciones, $f : Q\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \Sigma\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $F : Q\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $G : \Sigma \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $y_0 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $y_0 \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$. Sean k_2, $\tilde{k}_2$, σ_2, $\tilde{\sigma}_2$ y ν como en la sección 2.2.

Consideremos el problema $(\mathbf{P_p})$ de la página 16. Para el problema parabólico, a modo de ilustración, no vamos a considerar tan sólo el caso de un número finito de restricciones sobre el gradiente del estado, sino que trataremos la restricción de la manera más general

$$\nabla_x y \in C,$$

donde C es un subconjunto cerrado, convexo y con interior no vacío de $(L^\tau(0,T; L^p(\Omega)))^N$.

Definimos el Hamiltoniano frontera como

$$H_\Sigma(s, t, y, v, \varphi, \nu) = \nu G(s, t, y, v) + \varphi g(s, t, y, v)$$

para todo $(s, t, y, v, \varphi, \nu) \in \Gamma \times [0, T] \times \mathbb{R}^4$.

En el siguiente teorema, establecemos el principio de Pontryagin.

Teorema 5.2.1 *Supongamos que se satisfacen P1 y P4. Si* $(\bar{v})$ *es una solución del problema de control* $(\mathbf{P_p})$ *de la página 16, entonces existen* $\bar{\varphi} \in L^{\tau'}(W^{1,p'}) + L^2(H^1)$, $\bar{\nu} \in \mathbb{R}^+$, *y* $\vec{f} \in (L^{\tau'}(L^{p'}))^N$, *tales que*

$$\begin{aligned} (\vec{f}, \bar{\nu}) \quad &\neq \quad (0,0), && (5.2.1)\\ \int_Q (z - \nabla_x \bar{y})\vec{f} \quad &\leq \quad 0 \quad \textit{para todo } z \in C, && (5.2.2) \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + A^*\bar{\varphi} - \frac{\partial f}{\partial y}(x,t,\bar{y})\bar{\varphi} \quad &= \quad \bar{\nu}\frac{\partial F}{\partial y}(x,t,\bar{y}) + \operatorname{div} \vec{f} \qquad \textit{en } Q,\\ \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n_{A^*}} - \frac{\partial g}{\partial y}(s,t,\bar{y},\bar{v})\bar{\varphi} \quad &= \quad \bar{\nu}\frac{\partial G}{\partial y}(s,t,\bar{y},\bar{v}) - \vec{f}\cdot\vec{n} \quad \textit{sobre } \Sigma,\\ \bar{\varphi}(\cdot,T) \quad &= \quad \bar{\nu}\frac{\partial L}{\partial y}(x,\bar{y}(T)) \qquad \textit{en } \Omega, \end{aligned} \right. \tag{5.2.3}$$

y

$$H_\Sigma(s,t,\bar{y}(s,t),\bar{v}(s,t),\bar{\varphi}(s,t),\bar{\nu}) = \min_{v \in K_\Sigma(s,t)} H_\Sigma(s,t,\bar{y}(s,t),v,\bar{\varphi}(s,t),\bar{\nu}) \tag{5.2.4}$$

para casi todo (s,t) *en* Σ.

Demostración. Definimos la distancia de Ekeland en el espacio V_{ad}:

$$d_E(v_1,v_2) = |\{(s,t): \ v_1(s,t) \neq v_2(s,t)\}|.$$

El espacio (V_{ad}, d_E) es un espacio métrico completo, y la convergencia en (V_{ad}, d_E) implica la convergencia en $L^\alpha(\Sigma)$ para cualquier $\alpha < \infty$. Consideremos el funcional penalizado

$$J_n(v) = \left\{ \left[\left(J(v) - J(\bar{v}) + \frac{1}{n^2} \right)^+ \right]^2 + d_C(\nabla_x y_v)^2 \right\}^{1/2},$$

donde $d_C(\cdot)$ es la distancia $(L^\tau(L^p))^N$ al conjunto C definida por

$$d_C(z) = \inf_{\varphi \in C} \|z - \varphi\|_{(L^\tau(L^p))^N}.$$

El funcional $d_C(\cdot)$ es Lipschitz, convexo y diferenciable Gâteaux para todo $z \notin C$, y en esos puntos

$$\|\nabla d_C(z)\|_{(L^{\tau'}(L^{p'}))^N} = 1.$$

Considérese el problema

$$(P_n): \min_{v\in V_{ad}} J_n(v).$$

Con tal elección, $\bar{v}$ es una $\frac{1}{n^2}$-solución de (P_n). El Teorema 3.2.1 y la hipótesis P4 implican que $J_n(v)$ es continuo para la distancia de Ekeland. Así, debido al principio variacional de Ekeland existe $v_n \in V_{ad}$ tal que

$$d_E\left(v_n, \bar{v}\right) \leq \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad J_n(v_n) \leq J_n(v) + \frac{1}{n} d_E\left(v, v_n\right) \quad \text{para todo } v \in V_{ad}. \tag{5.2.5}$$

Sea $v \in V_{ad}$. Debido a los Teoremas 3.3.4 y 4.2.2, para todo $\rho \in (0,1)$, existe un conjunto medible $E_\rho \subset \Sigma$ tal que

$$|E_\rho| = \rho|\Sigma|, \tag{5.2.6}$$

$$y_\rho = y_n + \rho z_n + r_\rho \text{ con } \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\rho}\|r_\rho\|_{L^\tau(W^{1,p})} = 0, \tag{5.2.7}$$

y

$$J(v_\rho) = J(v_n) + \rho\Delta J^N + o(\rho), \tag{5.2.8}$$

donde

$$v_\rho(s,t) = \begin{cases} v_n & \text{en } \Sigma \setminus E_\rho \\ v & \text{en } E_\rho \end{cases}, \quad y_\rho = y_{v_\rho},$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_n}{\partial t} + Az_n - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,t,y_n)z_n = 0 & \text{en } Q, \\ \dfrac{\partial z_n}{\partial n_A} - \dfrac{\partial g}{\partial y}(s,t,y_n,v_n)z_n = g(s,t,y_n,v) - g(s,t,y_n,v_n) & \text{sobre } \Sigma, \\ z_n(\cdot,0) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

y

$$\begin{aligned} \Delta J^N = & \int_Q \frac{\partial F}{\partial y}(\cdot,y_n)z_n dx\ dt + \int_\Sigma \frac{\partial G}{\partial y}(\cdot,y_n,v_n)z_n ds\ dt + \int_\Omega \frac{\partial L}{\partial y}(\cdot,y_n(\cdot,T))z_n(\cdot,T)\ dx \\ & + \int_\Sigma \left(G(\cdot,y_n,v) - G(\cdot,y_n,v_n)\right)\ ds\ dt. \end{aligned}$$

Las relaciones (5.2.5) y (5.2.6) implican que

$$\frac{J_n(v_n) - J_n(v_\rho)}{\rho} \leq \frac{1}{n}|\Sigma|. \tag{5.2.9}$$

Tenemos
$$\frac{J_n(v_n)-J_n(v_\rho)}{\rho} = \frac{J_n^2(v_n)-J_n^2(v_\rho)}{\rho\,(J_n(v_n)+J_n(v_\rho))}$$

$$= \frac{\left[\left(J(v_n)-J(\bar v)+\frac{1}{n^2}\right)^+\right]^2 - \left[\left(J(v_\rho)-J(\bar v)+\frac{1}{n^2}\right)^+\right]^2}{\rho\,(J_n(v_n)+J_n(v_\rho))} +$$

$$\frac{d_C(\nabla y_n)^2 - d_C(\nabla y_\rho)^2}{\rho\,(J_n(v_n)+J_n(v_\rho))}.$$

De (5.2.8) se sigue que
$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\left[\left(J(v_n)-J(\bar v)+\frac{1}{n^2}\right)^+\right]^2 - \left[\left(J(v_\rho)-J(\bar v)+\frac{1}{n^2}\right)^+\right]^2}{\rho\,(J_n(v_n)+J_n(v_\rho))} = -\nu_n \Delta J^N, \tag{5.2.10}$$
con
$$\nu_n = \frac{\left(J(v_n)-J(\bar v)+\frac{1}{n^2}\right)^+}{J_n(v_n)}.$$

Con (5.2.7), y las propiedades de la función distancia $d_C(\cdot)$, podemos escribir
$$\lim_{\rho\to 0}\frac{d_C(\nabla y_n)^2 - d_C(\nabla y_\rho)^2}{\rho\,(J_n(v_n)+J_n(v_\rho))} = \lim_{\rho\to 0}\frac{d_C(\nabla y_n)-d_C(\nabla y_\rho)}{\rho}\,\frac{d_C(\nabla y_n)+d_C(\nabla y_\rho)}{(J_n(v_n)+J_n(v_\rho))} =$$
$$= \int_Q \vec f_n\cdot\nabla z_n\,dx\,dt, \tag{5.2.11}$$
donde
$$\vec f_n = \begin{cases} \dfrac{d_C(\nabla y_n)}{J_n(v_n)}\nabla d_C(\nabla y_n) & \text{si } \nabla y_n \notin C,\\ 0 & \text{si no.}\end{cases}$$

Para deducir un principio de Pontryagin aproximado, introducimos la ecuación de estado adjunto aproximada. Debido a las hipótesis hechas sobre las derivadas de las funciones que intervienen en el problema y al resultado de regularidad en la Proposición 2.2.10, existe un único $\varphi_n \in L^{\tau'}(W^{1,p'}) + L^2(H^1)$ que satisface
$$\begin{aligned}
-\frac{\partial\varphi_n}{\partial t} + A^*\varphi_n - \frac{\partial f}{\partial y}(x,t,y_n)\varphi_n &= \nu_n\frac{\partial F}{\partial y}(x,t,y_n) + \operatorname{div}\vec f_n \quad &&\text{en } Q,\\
\frac{\partial\varphi_n}{\partial n_{A^*}} - \frac{\partial g}{\partial y}(s,t,y_n,v_n)\varphi_n &= \nu_n\frac{\partial G}{\partial y}(s,t,y_n,v_n) - \vec f_n\cdot\vec n \quad &&\text{sobre } \Sigma,\\
\varphi_n(\cdot,T) &= \nu_n\frac{\partial L}{\partial y}(\cdot,y_n(T)) &&\text{en } \Omega.
\end{aligned}$$

Con la fórmula de Green (2.2.32) de la Proposición 2.2.10 tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_Q \nu_n \frac{\partial F}{\partial y}(x,t,y_n) z_n \, dx\, dt - \int_Q \vec{f} \cdot \nabla z_n \, dx\, dt + \int_\Sigma \nu_n \frac{\partial G}{\partial y}(s,t,y_n,v_n)\, ds\, dt + \\
&\int_\Omega \nu_n \frac{\partial L}{\partial y}(x, y_n(T))\, dx = \\
&= \int_Q \varphi_n \left(\frac{\partial z_n}{\partial t} + A z_n - \frac{\partial f}{\partial y}(x,t,y_n) z_n \right) \, dx \, dt + \\
&+ \int_\Sigma \varphi_n \left(\frac{\partial z_n}{\partial n_A} - \frac{\partial g}{\partial y}(s,t,y_n,v_n) z_n \right) \, ds \, dt \\
&= \int_\Sigma \varphi_n \left(g(s,t,y_n,v) - g(s,t,y_n,v_n) \right) \, ds \, dt.
\end{aligned}$$

Pasando al límite cuando ρ tiende a cero en (5.2.9), con (5.2.10), (5.2.11) y la anterior fórmula de Green, obtenemos el principio de Pontryagin aproximado:

$$\int_\Sigma \left(\nu_n G(s,t,y_n,v_n) + \varphi_n g(s,t,y_n,v_n) \right) \, ds \, dt \leq$$

$$\int_\Sigma \left(\nu_n G(s,t,y_n,v) + \varphi_n g(s,t,y_n,v) \right) \, ds \, dt + \frac{1}{n}|\Sigma| \quad \text{para todo } v \in V_{ad}. \tag{5.2.12}$$

Nótese que $\nu_n^2 + \|\vec{f}_n\|^2_{(L^{\tau'}(L^{p'}))^N} = 1$. Luego existen subsucesiones, aún indexadas por n, tales que $(\nu_n)_n$ converge a ν, y $(\vec{f}_n)_n$ converge débilmente a $\vec{f}$ en $(L^{\tau'}(L^{p'}))^N$. Si $\nu > 0$ entonces se satisface (5.2.1). De otro modo, usando que $\lim_{n\to\infty} \|\vec{f}_n\|^2_{(L^{\tau'}(L^{p'}))^N} = 1$, y que el interior de C es no vacío, podemos demostrar que $\vec{f} \neq 0$ de una manera estándar (véase [78], por ejemplo). Sabemos que existe una bola $B_{L^\tau(L^p)^N}(\vec{z}, \rho) \subset C$, con $\rho > 0$. Tomemos $\vec{z}_n \in B_{L^\tau(L^p)^N}(\vec{0}, \rho)$ tales que

$$\int_Q \vec{z}_n \cdot \vec{f}_n dx\, dt = \frac{1}{2}\rho + \|\vec{f}_n\|_{L^\tau(L^p)^N}.$$

Como $\vec{z} + \vec{z}_n \in C$, de la definición de $\vec{f}_n$ y la definición de subdiferencial en el sentido del análisis convexo (véase por ejemplo [45]), se tiene que

$$\int_Q \vec{f}_n \cdot (\vec{z} + \vec{z}_n - \nabla y_n) dx\, dt \leq 0.$$

Pasando al límite obtenemos que

$$\frac{1}{2}\rho + \int_Q \vec{f} \cdot (\vec{z} - \nabla y_n) \leq 0,$$

lo cual prueba que $\vec{f} \neq 0$.

La condición (5.2.2) se cumple debido a la definición de subdiferencial del funcional convexo $d_C(\cdot)$.

Con (5.2.5), podemos probar que $(y_n)_n$ converge hacia $\bar{y}$ en $C_b(\bar{Q} \setminus \bar{\Omega} \times \{0\})$. Con las hipótesis hechas y con la Proposición 2.2.10, podemos probar que $(\varphi_n)_n$ converge en $L^{\tau'}(W^{1,p'}) + L^2(H^1)$ a la solución $\bar{\varphi}$ de (5.2.3).

Teniendo en cuenta los resultados de convergencia para $(y_n)_n$, $(v_n)_n$, $(\varphi_n)_n$, $(\nu_n)_n$, podemos pasar al límite en (5.2.12) cuando n tiende a infinito, y obtener un principio de Pontryagin en forma integral.

$$\int_\Sigma (\bar{\nu} G(s,t,\bar{y},\bar{v}) + \bar{\varphi} g(s,t,\bar{y},\bar{v}))\ ds\ dt \leq \int_\Sigma (\bar{\nu} G(s,t,\bar{y},v) + \bar{\varphi} g(s,t,\bar{y},v))\ ds\ dt.$$

para todo $v \in V_{ad}$.

El principio de Pontryagin puntual se puede deducir ahora como en [78, pág. 1875]. La prueba está completa. □

Algunas extensiones

En esta sección hemos tratado sólo de controles frontera acotados. El tratamiento de controles no acotados se puede llevar a cabo como en [78], pero ello conlleva algunas dificultades técnicas. Nos remitimos a [78] para tales extensiones. Todos los resultados se pueden conseguir para controles distribuidos sin cambios de importancia en las pruebas.

Para ilustrar estros comentarios, consideremos el problema de control correspondiente a:

- la ecuación de estado:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} + Ay + f(x,t,y,u) &= 0 && \text{en } Q, \\ \frac{\partial y}{\partial n_A} + g(s,t,y,v) &= 0 && \text{sobre } \Sigma, \\ y(\cdot,0) &= y_0 && \text{en } \Omega, \end{aligned} \right. \tag{5.2.13}$$

  con $u \in U_{ad} \subset L^q(Q)$, $v \in V_{ad} \subset L^\sigma(\Sigma)$, $q > N/2+1$ y $\sigma > N+1$. Los conjuntos de control U_{ad} y V_{ad} se definen como sigue.

$$U_{ad} = \{u \in L^q(\Sigma) : \ u(x,t) \in K_Q(x,t) \text{ para casi todo } (x,t) \in Q\},$$

$$V_{ad} = \{v \in L^{\sigma}(\Sigma) : \ v(s,t) \in K_{\Sigma}(s,t) \text{ para casi todo } (s,t) \in \Sigma\},$$

donde K_Q y K_Σ son multiaplicaciones medibles con imagen no vacía y cerrada en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

- El funcional de coste:

$$\begin{aligned} J(y_{uv}, u, v) &= \int_0^T \int_\Omega F(x,t,y_{uv},u)\ dx\ dt + \int_0^T \int_\Gamma G(s,t,y_{uv},v)\ ds\ dt \\ &+ \int_\Omega L(x, y_{uv}(x,T))\ dx, \end{aligned} \tag{5.2.14}$$

- la restricción sobre el estado:

$$\int_0^T \left(\int_\Omega |\nabla_x y - g_d|^p dx \right)^{\tau/p} dt \leq \delta, \tag{5.2.15}$$

donde g_d es una función dada en $(L^\tau(L^p))^N$.

Definimos los Hamiltonianos distribuido y frontera como

$$H_Q(x,t,y,u,\varphi,\nu) = \nu F(x,t,y,u) - \varphi f(x,t,y,u)$$

para todo $(x,t,y,u,\varphi,\nu) \in \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^4$,

$$H_\Sigma(s,t,y,v,\varphi,\nu) = \nu G(s,t,y,v) - \varphi g(s,t,y,v)$$

para todo $(s,t,y,v,\varphi,\nu) \in \Gamma \times [0,T] \times \mathbb{R}^4$. Con algunas modificaciones en las hipótesis P1 y P4 sobre f, g, F y G (hay que suponer que f y F dependen del control u y dar condiciones de crecimiento adecuadas en u), podemos probar el siguiente resultado.

Teorema 5.2.2 *Si $(\bar{y}, \bar{u}, \bar{v})$ es una solución del problema de control, entonces existen $\bar{\varphi} \in L^{\tau'}(W^{1,p'}) + L^2(H^1)$, $\bar{\nu} \in \mathbb{R}^+$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^+$ tales que*

$$(\bar{\nu}, \bar{\mu}) \neq (0,0), \tag{5.2.16}$$

$$\bar{\mu} \left(\int_0^T (|\nabla_x \bar{y} - g_d|^p dx)^{\tau/p} dt - \delta \right) = 0, \tag{5.2.17}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\dfrac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + A\bar{\varphi} + f'_y(x,t,\bar{y},\bar{u})\bar{\varphi} &=& \bar{\nu} F'_y(x,t,\bar{y},\bar{u}) + \bar{\mu}\,\mathrm{div}\,\vec{f} & \textit{en } Q, \\ \dfrac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n_A} + g'_y(s,t,\bar{y},\bar{v})\bar{\varphi} &=& \bar{\nu} G'_y(s,t,\bar{y},\bar{v}) - \bar{\mu}\vec{f} \cdot \vec{n} & \textit{sobre } \Sigma, \\ \bar{\varphi}(\cdot, T) &=& \bar{\nu} L'_y(x, \bar{y}(T)) & \textit{en } \Omega, \end{array} \right. \tag{5.2.18}$$

donde

$$\vec{f} = \left(\int_\Omega |\nabla_x \bar{y} - g_d|^p \, dx \right)^{\frac{\tau}{p} - 1} \big(|\nabla_x \bar{y} - g_d|^{p-2} (\nabla_x \bar{y} - g_d) \big),$$

$$H_Q(x,t,\bar{y}(x,t),\bar{u}(x,t),\bar{\varphi}(x,t),\bar{\nu}) = \min_{u \in K_Q(x,t)} H_Q(x,t,\bar{y}(x,t),u,\bar{\varphi}(x,t),\bar{\nu})$$

para casi todo (x,t) *en* Q, *y*

$$H_\Sigma(s,t,\bar{y}(s,t),\bar{v}(s,t),\bar{\varphi}(s,t),\bar{\nu}) = \min_{v \in K_\Sigma(s,t)} H_\Sigma(s,t,\bar{y}(s,t),v,\bar{\varphi}(s,t),\bar{\nu})$$

para casi todo (s,t) *en* Σ.

Capítulo 6

Condiciones de primer y segundo orden

Establecemos en este capítulo condiciones de primer y segundo orden para los problemas de control estudiados. Aplicamos directamente un teorema para problemas de optimización. Teoremas parecidos para problemas con un número finito de restricciones puntuales o integrales sobre el estado han sido estudiados por ejemplo en [37]. El mismo teorema no puede ser aplicado directamente para problemas con un número infinito de restricciones sobre el estado (por ejemplo $|y(x)| \leq \delta$ en $\bar{\Omega}$). En [10] se pueden encontrar condiciones necesarias de primer orden para este tipo de problemas.

6.1 Condiciones para problemas de optimización abstractos

En esta sección presentamos algunos resultados sobre condiciones de optimalidad para problemas de optimización abstractos que han sido obtenidos por Casas y Tröltzsch [36].

Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida. Consideremos el siguiente problema de optimización

$$
\textbf{(Q)}\begin{cases}
\text{Minimizar } J(u) \\
u \in U_{ad} = \{u \in L^\infty(X) : u_a(x) \le u(x) \le u_b(x) \quad \text{para c.t.p. } x \in X\}, \\
G_j(u) = 0,\ 1 \le j \le n_i, \\
G_j(u) \le 0,\ n_i + 1 \le j \le n_i + n_d
\end{cases}
$$

donde $u_a, u_b \in L^\infty(X)$ y $J, G_j : L^\infty(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones dadas, $1 \le j \le n_i + n_d$. Además, para $u \in L^\infty(X)$ y $\lambda = (\lambda_j)_{j=1}^{n_i+n_d} \in \mathbb{R}^{n_i+n_d}$ definimos la Lagrangiana del problema como

$$
\mathcal{L}(u, \lambda) = J(u) + \sum_{j=1}^{n_i+n_d} \lambda_j G_j(u)
$$

Condiciones necesarias de primer orden

Supondremos que $\bar{u}$ es una solución local de **(Q)**, i.e. existe un número real $\rho > 0$ tal que para todo punto admisible de **(Q)**, con $\|u - \bar{u}\|_{L^\infty(X)} < \rho$, tenemos que $J(\bar{u}) \le J(u)$.

Bajo esta hipótesis, podemos deducir condiciones de optimalidad necesarias de primer orden satisfechas por $\bar{u}$. Para una demostración de las mismas, véase Clarke [44]).

Teorema 6.1.1 *Supongamos que J y $\{G_j\}_{j=1}^{n_i+n_d}$ son de clase C^1 en un entorno de $\bar{u}$. Entonces existen números reales λ_0, $\{\bar{\lambda}_j\}_{j=1}^{n_i+n_d}$ no todos nulos tales que*

$$
\bar{\lambda}_j \ge 0, \quad n_i + 1 \le j \le n_i + n_d,\ \bar{\lambda}_j = 0 \ \textit{si}\ G_j(\bar{u}) < 0; \tag{6.1.1}
$$

$$
\langle \lambda_0 J'(\bar{u}) + \sum_{j=1}^{n_i+n_d} \bar{\lambda}_j G_j'(\bar{u}), u - \bar{u} \rangle \ge 0 \quad \textit{para todo}\ u_a \le u \le u_b. \tag{6.1.2}
$$

Obviamente, si $\lambda_0 = 0$, la ecuación (6.1.2) no proporciona mucha información. En ese caso se dice que las condiciones de optimalidad están en forma no cualificada. Estableciendo hipótesis extra, podemos asegurar que $\lambda_0 \neq 0$ (y por lo tanto reescalando, que $\lambda_0 = 1$). En dimensión finita es típico imponer la condición de independencia de los gradientes de las restricciones activas. Esta condición ha de ser un poco más fuerte en problemas donde hay un número infinito de restricciones (las restricciones de cota sobre u). Estableceremos la siguiente hipótesis de regularidad que garantiza la cualificación de las condiciones de optimalidad. Sea

$$
I_0 = \{j \le n_i + n_d \,|\, G_j(\bar{u}) = 0\}
$$

el conjunto de índices correspondientes a las restricciones activas. También denotamos el conjunto de restricciones no activas por

$$I_- = \{j \leq n_i + n_d \,|\, G_j(\bar{u}) < 0\}.$$

Para todo $\varepsilon > 0$, denotamos

$$X_\varepsilon = \{x \in X : u_a(x) + \varepsilon \leq \bar{u}(x) \leq u_b(x) - \varepsilon\}.$$

Hacemos la siguiente hipótesis de regularidad

$$\begin{cases} \exists \varepsilon_{\bar{u}} > 0 \text{ y } \{h_j\}_{j \in I_0} \subset L^\infty(X), \text{ con } \operatorname{supp} h_j \subset X_{\varepsilon_{\bar{u}}}, \text{ tal que} \\ G_i'(\bar{u}) h_j = \delta_{ij}, \quad i, j \in I_0, \end{cases} \tag{6.1.3}$$

Tenemos que

Teorema 6.1.2 *Supongamos que se cumple* (6.1.3) *y las hipótesis del Teorema 6.1.1. Entonces las conclusiones de dicho teorema son válidas con* $\lambda_0 = 1$.

Demostración. Supongamos que $\lambda_0 = 0$. Tomemos $\rho > 0$ suficientemente pequeño de tal manera que $u_0 = \bar{u} - \rho \sum_{i > n_i, i \in I_0} h_j$ pertenezca a U_{ad}. Usando la hipótesis de regularidad (6.1.3)

$$\langle G_j'(\bar{u}), (u_0 - \bar{u}) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } j \leq n_i \\ -\rho & \text{si } j > n_i \text{ y } j \in I_0. \end{cases}$$

Además sabemos que si $j > n_i$ entonces $\bar{\lambda}_j \geq 0$, y que si además $j \in I_-$, entonces $\bar{\lambda}_j = 0$. Por lo tanto, usando (6.1.2) y estas consideraciones, tenemos que

$$0 \leq \sum_{j=1}^{n_i + n_d} \bar{\lambda}_j G_j'(\bar{u})(u_0 - \bar{u}) = \sum_{j > n_i, \, j \in I_0} \bar{\lambda}_j G_j'(\bar{u})(u_0 - \bar{u}) = - \sum_{j > n_i, \, j \in I_0} \bar{\lambda}_j \rho \leq 0,$$

Luego si $j > n_i$ entonces $\bar{\lambda}_j = 0$.

Supongamos ahora que $j \leq n_i$, y tomemos un $\rho > 0$ suficientemente pequeño de tal manera que $u_{j-} = \bar{u} - \rho h_j$ y $u_{j+} = \bar{u} + \rho h_j$ pertenezcan a U_{ad}. Tenemos que para $i \leq n_i$

$$G_i'(\bar{u})(u_{j-} - \bar{u}) = -\rho \delta_{ij}$$

y

$$G_i'(\bar{u})(u_{j+} - \bar{u}) = \rho \delta_{ij}.$$

Luego

$$0 \le \sum_{i=1}^{n_i+n_d} \bar{\lambda}_i G_i'(\bar{u})(u_{j-} - \bar{u}) = -\rho\bar{\lambda}_j$$

y

$$0 \le \sum_{i=1}^{n_i+n_d} \bar{\lambda}_i G_i'(\bar{u})(u_{j+} - \bar{u}) = \rho\bar{\lambda}_j,$$

de donde se tiene que $\bar{\lambda}_j = 0$.

Hemos demostrado que $\bar{\lambda}_j = 0$ para $1 \le j \le n_i + n_d$. Esto contradice el hecho de que no todos los multiplicadores son nulos, luego $\lambda_0 \neq 0$, y reescalando podemos tomar $\lambda_0 = 1$. □

Nótese que podemos reescribir (6.1.2) como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(\bar{u}, \bar{\lambda})(u - \bar{u}) \ge 0 \text{ para todo } u_a \le u \le u_b. \tag{6.1.4}$$

Condiciones necesarias de segundo orden

Recogemos en esta sección los principales resultados para problemas de optimización de [36].

Como queremos dar condiciones de optimalidad de segundo orden útiles para el estudio del problema de control ($\mathbf{P_e}$) de la página 16 y ($\mathbf{P_p}$) de la página 16, necesitamos tener en cuenta la discrepancia de las dos normas (*the two-norm discrepancy*); para estas cuestiones véanse por ejemplo Ioffe [61] y Maurer [69]. Entonces tenemos que imponer condiciones adicionales sobre las funciones J y G_j.

(A1) Existen funciones $\phi, \psi_j \in L^2(X)$, $1 \le j \le n_i + n_d$, tales que para todo $h \in L^\infty(X)$

$$J'(\bar{u})h = \int_X \phi(x)h(x)dx \text{ y } G_j'(\bar{u})h = \int_X \psi_j(x)h(x)dx, \ 1 \le j \le n_i + n_d. \tag{6.1.5}$$

(A2) Si $\{h_k\}_{k=1}^\infty \subset L^\infty(X)$ está acotado, $h \in L^\infty(X)$ y $h_k(x) \to h(x)$ para casi todo punto en X, entonces

$$[J''(\bar{u}) + \sum_{j=1}^{n_i+n_d} \bar{\lambda}_j G_j''(\bar{u})]h_k^2 \to [J''(\bar{u}) + \sum_{j=1}^{n_i+n_d} \bar{\lambda}_j G_j''(\bar{u})]h^2. \tag{6.1.6}$$

Si definimos

$$d(x) = \phi(x) + \sum_{j=1}^{n_i+n_d} \bar{\lambda}_j \psi_j(x), \tag{6.1.7}$$

entonces

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(\bar{u}, \bar{\lambda})h = [J'(\bar{u}) + \sum_{j=1}^{n_i+n_d} \bar{\lambda}_j G'_j(\bar{u})]h = \int_X d(x)h(x)dx \quad \forall h \in L^\infty(X). \tag{6.1.8}$$

De (6.1.4) deducimos que

$$d(x) = \begin{cases} 0 & \text{para c.t.p. } x \in X \text{ tal que } u_a(x) < \bar{u}(x) < u_b(x), \\ \geq 0 & \text{para c.t.p. } x \in X \text{ tal que } \bar{u}(x) = u_a(x), \\ \leq 0 & \text{para c.t.p. } x \in X \text{ tal que } \bar{u}(x) = u_b(x). \end{cases} \tag{6.1.9}$$

Asociado con d definimos

$$X^0 = \{x \in X : |d(x)| > 0\}. \tag{6.1.10}$$

Dados $\{\bar{\lambda}_j\}_{j=1}^{n_i+n_d}$ por el Teorema 6.1.2 definimos

$$C^0_{\bar{u}} = \{h \in L^\infty(X) \;\text{ que cumplen }\; (6.1.12) \;\text{ y }\; h(x) = 0 \;\text{ c.t.p. }\; x \in X^0\}, \tag{6.1.11}$$

con

$$\begin{cases} G'_j(\bar{u})h = 0 \text{ si } (j \leq n_i) \text{ ó } (j > n_i,\ G_j(\bar{u}) = 0 \text{ y } \bar{\lambda}_j > 0); \\ \\ G'_j(\bar{u})h \leq 0 \;\text{ si } j > n_i,\ G_j(\bar{u}) = 0 \text{ y } \bar{\lambda}_j = 0; \\ \\ h(x) = \begin{cases} \geq 0 & \text{si } \bar{u}(x) = u_a(x); \\ \leq 0 & \text{si } \bar{u}(x) = u_b(x). \end{cases} \end{cases} \tag{6.1.12}$$

En el siguiente teorema establecemos condiciones de optimalidad necesarias de segundo orden.

Teorema 6.1.3 *Supongamos que se cumplen* (6.1.3)*,* **(A1)** *y* **(A2)***,* $\{\bar{\lambda}_j\}_{j=1}^{n_i+n_d}$ *son los multiplicadores de Lagrange que cumplen* (6.1.1) *y* (6.1.2)*, con* $\bar{\lambda}_0 = 1$*, y* J *y* $\{G_j\}_{j=1}^{n_i+n_d}$ *son de clase* C^2 *en un entorno de* $\bar{u}$*. Entonces se satisface la siguiente desigualdad*

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u^2}(\bar{u}, \bar{\lambda})h^2 \geq 0 \quad \forall h \in C^0_{\bar{u}}. \tag{6.1.13}$$

Con una hipótesis un poco más fuerte que **(A2)** se puede probar una condición necesaria un poco más fuerte que la del Teorema 6.1.3. Introduzcamos para ello el siguiente conjunto

$$C^0_{\bar{u},L^2(X)} = \{h \in L^2(X) \ \text{ que cumplen } \ (6.1.12) \ \text{ y } \ h(x) = 0 \ \text{ c.t.p. } \ x \in X^0\}, \quad (6.1.14)$$

Tenemos la siguiente propiedad

Lema 6.1.4 *Supongamos que se satisfacen* **(A1)** *y la hipótesis de regularidad* (6.1.3). *Entonces*

$$C^0_{\bar{u},L^2(X)} = \bar{C}^0_{\bar{u}},$$

donde $\bar{C}^0_{\bar{u}}$ *denota la clausura de* $C^0_{\bar{u}}$ *en* $L^2(X)$.

Demostración. Que $C^0_{\bar{u}} \subset C^0_{\bar{u},L^2(X)}$ es directo. Además $C^0_{\bar{u},L^2(X)}$ es cerrado, lo que conduce a la conclusión $\bar{C}^0_{\bar{u}} \subset C^0_{\bar{u},L^2(X)}$.

Para ver que $C^0_{\bar{u},L^2(X)} \subset \bar{C}^0_{\bar{u}}$ tomemos $h \in C^0_{\bar{u},L^2(X)}$. Vamos a construir una sucesión $\{h_k\}_{k=1}^\infty \subset C^0_{\bar{u}}$ que converja hacia h en $L^2(X)$. Sea

$$\hat{h}_k(x) = \begin{cases} k & \text{si} \quad h(x) \geq k \\ h(x) & \text{si} \quad -k \leq h(x) \leq k \\ -k & \text{si} \quad h(x) \leq -k. \end{cases}$$

Obviamente

$$\lim_{k\to\infty} \hat{h}_k = h \text{ en } L^2(X).$$

Para $j \in I_0$, tomamos

$$\alpha_{kj} = G'_j(\bar{u})\hat{h}_k - G'_j(\bar{u})h.$$

Se tiene que para todo j

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_{kj} = 0.$$

Gracias a la hipótesis de regularidad, sabemos que existen $\varepsilon_{\bar{u}} > 0$ y $\{\bar{h}_j\}_{j\in I_0} \subset L^\infty(X)$, con $\operatorname{supp} \bar{h}_j \subset X_{\varepsilon_{\bar{u}}}$, tal que $G'_i(\bar{u})\bar{h}_j = \delta_{ij}, \quad i, j \in I_0$.

Tomemos

$$h_k = \hat{h}_k - \sum_{j\in I_0} \alpha_{kj}\bar{h}_j.$$

Obviamente, de las consideraciones sobre los límites de $\hat{h}_k$ y α_{jk} se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} h_k = h \text{ en } L^2(X).$$

Veamos que las $h_k \in C^0_{\bar u}$.

En primer lugar notar que $h(x) = 0$ c.t.p. en X^0. Dado $x \in X$, para $j \in I_0$, si $\bar h_j(x) \neq 0$, entonces $x \in X_{\varepsilon_{\bar u}}$. Por tanto $u_a(x) < \bar u(x) < u_b(x)$, y por (6.1.9), $d(x) = 0$. Luego $x \notin X^0$. Así que en X^0, $\bar h_j = 0$. Gracias a la definición de $\hat h_k$ se tiene entonces que $h_k(x) = 0$ en c.t.p. de X^0.

En segundo lugar, para $i \in I_0$

$$G_i'(\bar u)h_k = G_i'(\bar u)\hat h_k - \sum_{j\in I_0} \alpha_{kj} G_i'(\bar u)\bar h_j = G_i'(\bar u)\hat h_k - \alpha_{ki} = G_i'(\bar u)h.$$

Utilizando ahora que h satisface las relaciones $G_i'(\bar u)h = 0$ si $j \leq n_i$ ó $j > n_i$, $G_i(\bar u) = 0$, $\bar\lambda_i > 0$ y $G_i'(\bar u)h \leq 0$ si $j > n_i$, $G_i(\bar u) = 0$, $\bar\lambda_i = 0$ de (6.2.8), se deduce de la igualdad $G_i'(\bar u)h_k = G_i'(\bar u)h$ que h_k también las cumple.

Por último hay que comprobar la condición de signo. Como supp $\bar h_j \subset X_{\varepsilon_{\bar u}}$, entonces $\bar h_j(x) = 0$ siempre que $\bar u(x) = u_a(x)$ ó $\bar u(x) = u_b(x)$. Consecuentemente, el signo de $\hat h_k(x)$ es el mismo que el signo de $h_k(x)$ si $\bar u(x) = u_a(x)$ ó $\bar u(x) = u_b(x)$. Finalmente, es suficiente notar que signo de $\hat h_k(x)$ es igual al signo de $h(x)$ para todo $x \in X$ y que $h \in C^0_{u,L^2(X)}$ para concluir que h_k satisface la condición de signo. Así $h_k \in C^0_{\bar u}$ y la prueba está completa. $\square$

Introducimos ahora la siguiente hipótesis, un poco más fuerte que **(A2)**.

(A2') $\dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u^2}(\bar u, \bar\lambda)$ es bilineal y continua en $L^2(X)$.

Entonces podemos probar que

Teorema 6.1.5 *Supongamos que se cumplen* (6.1.3), **(A1)** *y* **(A2')**, $\{\bar\lambda_j\}_{j=1}^{n_i+n_d}$ *son los multiplicadores de Lagrange que cumplen* (6.1.1) *y* (6.1.2) *con* $\bar\lambda_0 = 1$, *y* J *y* $\{G_j\}_{j=1}^{n_i+n_d}$ *son de clase* C^2 *en un entorno de* $\bar u$. *Entonces se satisface la siguiente desigualdad*

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u^2}(\bar u, \bar\lambda)h^2 \geq 0 \quad \forall h \in C^0_{\bar u, L^2(X)}. \tag{6.1.15}$$

Demostración. Sea $h \in C^0_{\bar u,L^2(X)}$. Gracias al Lema 6.1.4 podemos encontrar una sucesión $\{h_k\}_{k=1}^\infty \subset C^0_{\bar u}$ tal que $h_k \to h$ en $L^2(X)$. Notando que **(A2')** implica **(A2)** y usando el Teorema 6.1.3 se tiene

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u^2}(\bar u, \bar\lambda)h_k^2 \geq 0$$

para todo k. Por la hipótesis **(A2')**, podemos pasar al límite y obtener así

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u^2}(\bar{u}, \bar{\lambda})h^2 \geq 0.$$

La prueba está completa. □

Condiciones suficientes de segundo orden

Ahora $\bar{u}$ es un elemento dado y admisible para el problema **(Q)** que satisface condiciones necesarias de primer orden. Motivados de nuevo por las consideraciones de la discrepancia de las dos normas, tenemos que hacer algunas hipótesis que involucran a las normas de $L^\infty(X)$ y $L^2(X)$.

(A3) Existe un número positivo $\rho > 0$ tal que J y $\{G_j\}_{j=1}^{n_i+n_d}$ son de clase C^2 en la bola de $L^\infty(X)$, $B_{L^\infty(X)}(\bar{u}, \rho)$ y para todo $\delta > 0$ existe $\varepsilon \in (0, \rho)$ tal que para todo $u \in B_{L^\infty(X)}(\bar{u}, \rho)$, $\|v - \bar{u}\|_{L^\infty(X)} < \varepsilon$, $h, h_1, h_2 \in L^\infty(X)$ y $1 \leq j \leq n_i + n_d$ se tiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \left[\dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u^2}(v, \bar{\lambda}) - \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u^2}(\bar{u}, \bar{\lambda}) \right] h^2 \right| \leq \delta \|h\|_{L^2(X)}^2, \\ \\ |J'(u)h| \leq M_{0,1} \|h\|_{L^2(X)}, \quad |G_j'(u)h| \leq M_{j,1} \|h\|_{L^2(X)}, \\ \\ |J''(u)h_1 h_2| \leq M_{0,2} \|h_1\|_{L^2(X)} \|h_2\|_{L^2(X)}, \\ \\ |G_j''(u)h_1 h_2| \leq M_{j,2} \|h_1\|_{L^2(X)} \|h_2\|_{L^2(X)}, \end{array} \right. \tag{6.1.16}$$

Análogamente a (6.1.10) y (6.1.11) definimos para todo $\tau > 0$

$$X^\tau = \{x \in X : |d(x)| > \tau\} \tag{6.1.17}$$

y

$$C_{\bar{u}}^\tau = \{h \in L^\infty(X) \ \text{ que cumplen } \ (6.1.12) \ \text{ y } \ h(x) = 0 \ \text{ c.t.p. } \ x \in X^\tau\}. \tag{6.1.18}$$

El siguiente teorema nos da condiciones suficientes de segundo orden para **(Q)**.

Teorema 6.1.6 *Sea $\bar{u}$ un punto admisible para el problema* **(Q)** *que cumpla condiciones necesarias de primer orden, y supongamos que se satisfacen las hipótesis* (6.1.3), **(A1)** *y* **(A3)**. *Supongamos también que*

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u^2}(\bar{u}, \bar{\lambda})h^2 \geq \delta \|h\|^2_{L^2(X)} \quad \forall h \in C^\tau_{\bar{u}} \tag{6.1.19}$$

para $\delta > 0$ y $\tau > 0$ dados. Entonces existen $\varepsilon > 0$ y $\alpha > 0$ tales que $J(\bar{u}) + \alpha \|u - \bar{u}\|^2_{L^2(X)} \leq J(u)$ para cada punto admisible u para **(Q)**, *con $\|u - \bar{u}\|_{L^\infty(X)} < \varepsilon$.*

Nota 6.1.1 *Si se satisfacen* **(A1)** *y la hipótesis de regularidad* (6.1.3), *podemos probar, al igual que en el Lema 6.1.4, que*

$$C^\tau_{\bar{u}, L^2(X)} = \bar{C}^\tau_{\bar{u}},$$

donde

$$C^\tau_{\bar{u}, L^2(X)} = \{h \in L^2(X) \ \ \textit{que cumplen} \ \ (6.1.12) \ \ \textit{y} \ \ h(x) = 0 \ \ \textit{c.t.p.} \ \ x \in X^\tau\}$$

y $\bar{C}^\tau_{\bar{u}}$ denota la clausura de $C^\tau_{\bar{u}}$ en $L^2(X)$.

Nótese también que la condición **(A3)** *implica* **(A2')**. *Por lo tanto, si se satisfacen las hipótesis* (6.1.3), **(A1)**, **(A3)** *y* (6.1.19) *para $\delta > 0$ y $\tau > 0$ dados, entonces la condición* (6.1.19) *se cumple no sólo para las funciones de $C^\tau_{\bar{u}}$, sino para todas las funciones de $C^\tau_{\bar{u}, L^2(X)}$:*

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u^2}(\bar{u}, \bar{\lambda})h^2 \geq \delta \|h\|^2_{L^2(X)} \quad \forall h \in C^\tau_{\bar{u}, L^2(X)},$$

que es una condición que a priori parece más fuerte.

6.2 Caso elíptico

Ω denotará un subconjunto abierto, acotado y conexo de $\mathbb{R}^N$, cuya frontera Γ es de clase C^1; A un operador elíptico de coeficientes continuos de la forma (2.1.1) (pág. 23); $p > N$; $a_0 \in L^{p/2}(\Omega)$; $f : \Omega \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $g : \Gamma \to \mathbb{R}$, $g \in L^{p-1}(\Gamma)$; $L : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g_j : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ para $1 \leq j \leq n_i + n_e$.

Además supondremos que el conjunto de controles admisibles es de la forma

$$U_{ad} = \{u \in L^\infty(\Omega) : u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \text{ en c.t.p.} x \in \Omega\},$$

donde $u_a, u_b \in L^\infty(\Omega)$. Con la notación del Capítulo 1, tenemos que $K_\Omega(x) = [u_a(x), u_b(x)]$. Usaremos la misma notación que en la Sección 6.1. En este caso $X = \Omega$. Ahora $J(u)$ viene definido como en (4.1.1) y $G_j(u)$ está definido como en (4.1.5).

$$J(u) = \int_\Omega L(x, y_u, u)dx,$$

$$G_j(u) = \int_\Omega g_j(x, \nabla y_u(x))dx.$$

La Lagrangiana del problema en este caso vendrá dada por

$$\mathcal{L}(u, \lambda) = \int_\Omega L(x, y_u, u)dx + \sum_{j=1}^{n_i+n_d} \lambda_j \int_\Omega g_j(x, \nabla y_u(x))dx.$$

Es interesante introducir de nuevo

$$F_j(y) = \int_\Omega g_j(x, \nabla y(x))dx.$$

Obsérvese que

$$F_j'(y) = -\mathrm{div}\, \frac{\partial g}{\partial \eta}(x, \nabla y)$$

y $G_j = F_j \circ G$, donde $G(u) = y_u$.

Vamos a establecer una hipótesis de regularidad análoga a (6.1.3). Para $\varepsilon > 0$, sea

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : u_a(x) + \varepsilon \leq \bar{u}(x) \leq u_b(x) - \varepsilon\}$$

Lema 6.2.1 *Dado $\bar{u}$ un elemento de U_{ad}, las dos condiciones siguientes son equivalentes:*

(1) *existe $\varepsilon_{\bar{u}} > 0$ y funciones $\{h_j\}_{j\in I_0} \subset L^\infty(\Omega)$ con $\mathrm{supp}\, h_j \subset \Omega_{\varepsilon_{\bar{u}}}$ tales que $G_i'(\bar{u})h_j = \delta_{ij}$ para $i, j \in I_0$;*

(2) *existe $\varepsilon_{\bar{u}} > 0$ tal que*

$$\text{la familia } \{\bar{\varphi}_i \frac{\partial f}{\partial u}(x, \bar{y}, \bar{u})\}_{i\in I_0} \text{ es linealmente independiente en } L^1(\Omega_{\varepsilon_{\bar{u}}}), \quad (6.2.1)$$

donde $\bar{y} = G(\bar{u})$ y $\bar{\varphi}_i = \varphi_{i\bar{u}}$ es la solución de (4.1.7) para $u = \bar{u}$.

Demostración. Antes de empezar recordemos que la expresión para $G_i'(\bar{u})h$, según (4.1.6),

$$G_j'(\bar{u})h = \int_\Omega \bar{\varphi}_j \frac{\partial f}{\partial u}(x, \bar{y}, \bar{u})h\, dx.$$

Probemos primero que (1) implica (2). Supongamos que $G_i'(\bar{u})h_j = \delta_{ij}$ y $\{\bar{\varphi}_i \frac{\partial f}{\partial u}(x, \bar{y}, \bar{u})\}_{i\in I_0}$ no son linealmente independientes. Entonces existen números $\{\alpha_i\}_{i\in I_0}$ no todos nulos tales que $\sum_{i\in I_0} \alpha_i\bar{\varphi}_i \frac{\partial f}{\partial u}(x, \bar{y}, \bar{u}) = 0$ para c.t.p. $x \in \Omega_{\varepsilon_{\bar{u}}}$. Supongamos que $\alpha_j \neq 0$. Por un lado

$$\int_\Omega \left(\sum_{i\in I_0} \alpha_i\bar{\varphi}_i \frac{\partial f}{\partial u}(x, \bar{y}, \bar{u})\right) h_j dx = \int_\Omega 0 h_j dx = 0$$

y por otro

$$\int_\Omega \left(\sum_{i\in I_0} \alpha_i\bar{\varphi}_i \frac{\partial f}{\partial u}(x, \bar{y}, \bar{u})\right) h_j dx = \sum_{i\in I_0} \alpha_i G_i'(\bar{u})h_j dx = \alpha_j.$$

Ambas identidades implican que $\alpha_j = 0$, lo cual es una contradicción con nuestra hipótesis $\alpha_j = 0$. Luego $\left\{\bar{\varphi}_i \frac{\partial f}{\partial u}(x, \bar{y}, \bar{u})\right\}_{i\in I_0}$ son linealmente independientes.

Veamos ahora que (2) implica (1). De la independencia lineal de $\{\bar{\varphi}_i \frac{\partial f}{\partial u}(x, \bar{y}, \bar{u})\}_{i\in I_0}$ se sigue que el funcional $T : L^\infty(\Omega_{\varepsilon_{\bar{u}}}) \to \mathbb{R}^{|I_0|}$ que a cada h hace corresponder

$$Th = \left(\int_\Omega \bar{\varphi}_i \frac{\partial f}{\partial u}(x, \bar{y}, \bar{u}) h\, dx\right)_{i\in I_0}$$

es suprayectivo. En efecto, si T no es suprayectivo, entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}^{|I_0|}$, $\alpha \neq 0$ tal que

$$\alpha \cdot Th = 0 \text{ para todo } h \in L^\infty(\Omega_{\varepsilon_{\bar{u}}}),$$

lo que implica que

$$\sum_{j\in I_0} \bar{\varphi}_j \frac{\partial f}{\partial u}(x, \bar{y}, \bar{u}) = 0 \text{ para c.t.p. } x \in \Omega_{\varepsilon_{\bar{u}}},$$

lo cual contradice (2). Luego para todo j, existe un $h_j \in L^\infty(\Omega_{\varepsilon_{\bar{u}}})$ tal que la Th_j es el vector que tiene un 1 en la componente j y ceros en las demás componentes. Por lo tanto podemos concluir de ahí la existencia de los h_j. □

Condiciones necesarias de primer orden

Las condiciones necesarias de primer orden satisfechas por una solución local de $(\mathbf{P_e})$ se pueden deducir del Teorema 6.1.2 con la ayuda de los Teoremas 4.1.1 y 4.1.3.

Teorema 6.2.2 *Supongamos que $\bar{u}$ es una solución local del problema $(\mathbf{P_e})$. Supongamos que se satisfacen las hipótesis sobre f, L y g_j establecidas en E1 (pág. 69), E4 (pág. 88) y E6 (pág. 90). Supongamos además que se satisface (6.2.1). Entonces existen números reales $\bar{\lambda}_j$, $j = 1, \ldots, n_d + n_i$ y funciones $\bar{y} \in W^{1,p}(\Omega)$, $\bar{\varphi} \in W^{1,p'}(\Omega)$ tales que*

$$\bar{\lambda}_j \geq 0 \quad n_i + 1 \leq j \leq n_i + n_d, \qquad \bar{\lambda}_j \int_\Omega g_j(x, \nabla \bar{y}(x))\, dx = 0, \tag{6.2.2}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcll} A\bar{y} + a_0\bar{y} & = & f(x, \bar{y}(x), \bar{u}(x)) & \textit{en } \Omega \\ \partial_{n_A}\bar{y} & = & 0 & \textit{sobre } \Gamma, \end{array} \right. \tag{6.2.3}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcll} A^*\bar{\varphi} + a_0\bar{\varphi} & = & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \bar{y}, \bar{u})\bar{\varphi} + \dfrac{\partial L}{\partial y}(x, \bar{y}, \bar{u}) - \displaystyle\sum_{j=1}^{n_i+n_d} \bar{\lambda}_j \mathrm{div}\left(\dfrac{\partial g_j}{\partial \eta}(x, \nabla \bar{y})\right) & \textit{en } \Omega \\ \partial_{n_{A^*}}\bar{\varphi} & = & 0 & \textit{sobre } \Gamma, \end{array} \right. \tag{6.2.4}$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(\bar{u}, \bar{\lambda})(u - \bar{u}) = \int_\Omega \left(\frac{\partial L}{\partial u}(x, \bar{y}, \bar{u}) + \bar{\varphi}\frac{\partial f}{\partial u}(x, \bar{y}, \bar{u}) \right)(u - \bar{u})dx \geq 0 \qquad \textit{para todo } u \in U_{ad}. \tag{6.2.5}$$

Además, si $\bar{\varphi}_0 = \varphi_{0\bar{u}}$ *y* $\bar{\varphi}_j = \varphi_{j\bar{u}}$ *para* $1 \leq j \leq n_i + n_d$ *son las soluciones de* (4.1.3) *y* (4.1.7) *respectivamente, para* $u = \bar{u}$ *, entonces*

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_0 + \sum_{j=1}^{n_i+n_d} \bar{\lambda}_j \bar{\varphi}_j. \tag{6.2.6}$$

Demostración. Las hipótesis hechas, los teoremas 4.1.1 y 4.1.3 y el Lema 6.2.1 nos permiten calcular la expresión

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(\bar{u}, \bar{\lambda})(u - \bar{u}) = \int_\Omega \left(\frac{\partial L}{\partial u}(x, \bar{y}, \bar{u}) + \bar{\varphi}\frac{\partial f}{\partial u}(x, \bar{y}, \bar{u}) \right)(u - \bar{u})dx.$$

Ahora podemos aplicar directamente el Teorema 6.1.2 para deducir las condiciones (6.2.2)–(6.2.5). □

Veamos ahora un ejemplo de condición suficiente para que se satisfaga la condición de regularidad (6.2.1)

Lema 6.2.3 *Supongamos que existen* $\varepsilon_{\bar{u}} > 0$ *y un conjunto abierto no vacío* $A_{\varepsilon_{\bar{u}}} \subset \Omega_{\varepsilon_{\bar{u}}}$ *tal que*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x, \bar{y}(x), \bar{u}(x)) \neq 0 \ \textit{en } A_{\varepsilon_{\bar{u}}}$$

y $\{F_j'(\bar{y})\}_{j \in I_0}$ *son linealmente independientes en* $\left(W^{1,p'}(A_{\varepsilon_{\bar{u}}})\right)'$. *Entonces se satisface la condición de regularidad* (6.2.1).

Demostración. Lo que queremos demostrar es la independencia lineal de $\left\{\bar\varphi_i \frac{\partial f}{\partial u}(x,\bar y,\bar u)\right\}_{i\in I_0}$.

Supongamos que $\left\{\bar\varphi_i \frac{\partial f}{\partial u}(x,\bar y,\bar u)\right\}_{i\in I_0}$ no son linealmente independientes en $L^1(\Omega_{\varepsilon_{\bar u}})$. Entonces existen números reales $\{\alpha_i\}_{i\in I_0}$ no todos nulos tales que

$$\sum_{i\in I_0}\alpha_i\bar\varphi_i(x)\frac{\partial f}{\partial u}(x,\bar y,\bar u)=0$$

para c.t.p. $x\in\Omega_{\varepsilon_{\bar u}}$. Como $|A_{\varepsilon_{\bar u}}|>0$ y $\frac{\partial f}{\partial u}(x,\bar y,\bar u)\neq 0$ en $A_{\varepsilon_{\bar u}}$, entonces para casi todo $x\in A_{\varepsilon_{\bar u}}$

$$\sum_{i\in I_0}\alpha_i\bar\varphi_i(x)=0.$$

Teniendo en cuenta que $\bar\varphi_i$ es solución de

$$\left\{\begin{array}{rcll} A^*\bar\varphi_i+a_0\bar\varphi_i &=& \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y_u,u)\bar\varphi_i-\operatorname{div}\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial\eta}(x,\nabla\bar y)\right) & \text{en } \Omega\\ \partial_{n_{A^*}}\varphi_i &=& 0 & \text{sobre } \Gamma\end{array}\right.$$

la expresión

$$F_i'(\bar y)=-\operatorname{div}\frac{\partial g_i}{\partial\eta}(x,\nabla\bar y),$$

y que $A_{\varepsilon_{\bar u}}$ es abierto, obtenemos que

$$\sum_{i\in I_0}\alpha_i F_i'(\bar y)=0 \text{ en } A_{\varepsilon_{\bar u}}$$

con no todos los $\{\alpha_i\}_{i\in I_0}$ nulos. Esto contradice la hipótesis. La prueba está completa. □

Condiciones necesarias de segundo orden

Teniendo en cuenta los Teoremas 4.1.2 y 4.1.4 podemos mostrar que las hipótesis para el Teorema 6.1.3 se cumplen para el problema $(\mathbf{P_e})$. Además en este caso, dado $\bar u\in U_{ad}$, podemos identificar

$$d(x)=\frac{\partial L}{\partial u}(x,\bar y(x),\bar u(x))+\bar\varphi(x)\frac{\partial f}{\partial u}(x,\bar y(x),\bar u(x)),$$

donde $\bar y$ viene dado por (6.2.3) y $\bar\varphi$ viene dado por (6.2.4). Introducimos

$$\Omega^0=\{x\in\Omega:|d(x)|>0\}. \tag{6.2.7}$$

$$C_{\bar u}^0=\{h\in L^\infty(\Omega)\ \text{ que cumplen }\ (6.2.8)\ \text{ y }\ h(x)=0\ \text{ c.t.p. }\ x\in\Omega^0\},$$

y

$$C^0_{\bar{u},L^2(\Omega)} = \{h \in L^2(\Omega) \ \text{ que cumplen } \ (6.2.8) \ \text{ y } \ h(x) = 0 \ \text{ c.t.p. } \ x \in \Omega^0\},$$

donde

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \bar{\varphi}_j \frac{\partial f}{\partial u}(x,\bar{y},\bar{u}) h\, dx = 0 \text{ si } (j \le n_i) \text{ ó } (j > n_i, \int_\Omega g_j(x,\nabla \bar{y}) dx = 0 \text{ y } \bar{\lambda}_j > 0) \\ \\ \displaystyle\int_\Omega \bar{\varphi}_j \frac{\partial f}{\partial u}(x,\bar{y},\bar{u}) h\, dx \le 0 \text{ si } n_i + 1 \le j \le n_d + n_i \text{ y } \int_\Omega g_j(x,\nabla \bar{y}) dx = 0 \text{ y } \bar{\lambda}_j = 0 \\ \\ h(x) \ge 0 \text{ si } \bar{u}(x) = u_a(x) \\ \\ h(x) \le 0 \text{ si } \bar{u}(x) = u_b(x). \end{cases} \tag{6.2.8}$$

La forma cuadrática asociada a la derivada segunda de la Lagrangiana viene dada en este caso por la expresión

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u^2}(\bar{u},\bar{\lambda})h^2 = & \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,\bar{y},\bar{u}) + \bar{\varphi} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,\bar{y},\bar{u}) \right) z_h^2\, dx + \\ & 2\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial u}(x,\bar{y},\bar{u}) + \bar{\varphi} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial u}(x,\bar{y},\bar{u}) \right) h z_h\, dx + \\ & \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(x,\bar{y},\bar{u}) + \bar{\varphi} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x,\bar{y},\bar{u}) \right) h^2\, dx + \\ & \sum_{j=1}^{n_d+n_i} \bar{\lambda}_j \int_\Omega \nabla^T z_h \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x,\nabla \bar{y}) \nabla z_h\, dx \end{aligned}$$

Ahora es necesario exigir un poco más de regularidad a algunas derivadas segundas de f y L. En concreto vamos a suponer que f y L son de clase C^2 respecto a las variables segunda y tercera y existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $M > 0$ existen $\psi^1_M \in L^{1+\varepsilon}(\Omega)$ y $\psi^2_M \in L^{p/2+\tilde{\varepsilon}}(\Omega)$, $\tilde{\varepsilon} = p^2\varepsilon/(4-2(p-2)\varepsilon)$ tales que

$$\left| \frac{\partial^2 L}{\partial u \partial y}(x,y,u) \right| + \left| \frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(x,y,u) \right| \le \psi^1_M(x) \tag{6.2.9}$$

y

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial y}(x,t,s)\right| + \left|\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x,t,s)\right| \le \psi_M^2(x) \tag{6.2.10}$$

si $|y|, |u| \le M$ para c.t.p. $x \in \Omega$. Así obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 6.2.4 *Supongamos que $\bar{u}$ es una solución local del problema* $(\mathbf{P_e})$ *y que se satisfacen las hipótesis sobre f, L y g_j establecidas en E1 (pág. 69), E2 (pág. 70), E4 (pág. 88), E5 (pág. 89), E6 (pág. 90), E7 (pág. 90),* (6.2.9) *y* (6.2.10). *Supongamos además que se satisface* (6.2.1). *Entonces*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u^2}(\bar{u},\bar{\lambda})h^2 = \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,\bar{y},\bar{u}) + \bar{\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,\bar{y},\bar{u})\right) z_h^2\,dx + \\
&2\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial u}(x,\bar{y},\bar{u}) + \bar{\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial u}(x,\bar{y},\bar{u})\right) h z_h\,dx + \\
&\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(x,\bar{y},\bar{u}) + \bar{\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x,\bar{y},\bar{u})\right) h^2\,dx + \\
&\sum_{j=1}^{n_d+n_i} \bar{\lambda}_j \int_\Omega \nabla^T z_h \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x,\nabla\bar{y})\nabla z_h\,dx \ge 0
\end{aligned} \tag{6.2.11}$$

para todo $h \in C^0_{\bar{u}}$, donde z_h viene dado por

$$\left\{\begin{array}{rcll} Az_h + a_0 z_h &=& \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\bar{y},\bar{u})z_h + \dfrac{\partial f}{\partial u}(x,\bar{y},\bar{u})h & \textit{en } \Omega \\ \partial_{\nu_A} z_h &=& 0 & \textit{sobre } \Gamma. \end{array}\right.$$

Demostración. Nótese que podemos aplicar el Teorema 6.2.2 para deducir la existencia de los multiplicadores de Lagrange. Ahora, debido al Teorema 6.1.3, no hay más que verificar que se satisfacen **(A1)** y **(A2)**. En nuestro caso, la hipótesis **(A1)** (véase la página 120), se satisface con

$$\phi = \frac{\partial L}{\partial u}(x,\bar{y},\bar{u}) + \bar{\varphi}_0\frac{\partial f}{\partial u}(x,\bar{y},\bar{u})$$

y

$$\psi_j = \bar{\varphi}_j\frac{\partial f}{\partial u}(x,\bar{y},\bar{u}).$$

De la expresión para las derivadas segundas de J y G_j y de las propiedades impuestas a las derivadas de f, L y g_j, se sigue que se verifica **(A2)**. En efecto, sea $\{h_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^{\infty}(\Omega)$, acotada en $L^{\infty}(\Omega)$ y puntualmente convergente hacia h. Queremos comprobar que

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u^2}(\bar{u},\bar{\lambda})h_k^2 = \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,\bar{y},\bar{u}) + \bar{\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,\bar{y},\bar{u})\right) z_{h_k}^2\, dx +$$

$$2\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial u}(x,\bar{y},\bar{u}) + \bar{\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial u}(x,\bar{y},\bar{u})\right) h_k z_{h_k}\, dx +$$

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(x,\bar{y},\bar{u}) + \bar{\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x,\bar{y},\bar{u})\right) h_k^2\, dx +$$

$$\sum_{j=1}^{n_d+n_i} \bar{\lambda}_j \int_\Omega \nabla^T z_{h_k} \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x,\nabla\bar{y})\nabla z_{h_k}\, dx$$

converge hacia

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u^2}(\bar{u},\bar{\lambda})h^2 = \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,\bar{y},\bar{u}) + \bar{\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,\bar{y},\bar{u})\right) z_h^2\, dx +$$

$$2\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial u}(x,\bar{y},\bar{u}) + \bar{\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial u}(x,\bar{y},\bar{u})\right) h z_h\, dx +$$

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(x,\bar{y},\bar{u}) + \bar{\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x,\bar{y},\bar{u})\right) h^2\, dx +$$

$$\sum_{j=1}^{n_d+n_i} \bar{\lambda}_j \int_\Omega \nabla^T z_h \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x,\nabla\bar{y})\nabla z_h\, dx,$$

donde

$$\left\{\begin{array}{rcll} Az_{h_k} + a_0 z_{h_k} &=& \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\bar{y},\bar{u})z_{h_k} + \dfrac{\partial f}{\partial u}(x,\bar{y},\bar{u})h_k & \text{en } \Omega \\ \partial_{\nu_A} z_{h_k} &=& 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{array}\right.$$

Esto lo podemos hacer sumando a sumando. En primer lugar, destacar que $h_k \to h$ en $L^q(\Omega)$ para todo $q < \infty$, lo cual implica que $z_{h_k} \to z_h$ en $W^{1,p}(\Omega)$.

Así, usando la desigualdad de Hölder y las hipótesis sobre las derivadas segundas, tenemos que

$$\int_\Omega \left| \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,\bar{y},\bar{u}) + \bar{\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,\bar{y},\bar{u}) \right| |z_{h_k}^2 - z_h^2|\, dx \leq$$

$$\leq \|\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,\bar{y},\bar{u}) + \bar{\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,\bar{y},\bar{u})\|_{L^1(\Omega)} \|z_{h_k} + z_h\|_{L^\infty(\Omega)} \|z_{h_k} - z_h\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Los dos primeros factores están acotados y el último converge a cero.

$$\int_\Omega \left| \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial u}(x,\bar{y},\bar{u}) + \bar{\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial u}(x,\bar{y},\bar{u}) \right| |h_k z_{h_k} - h z_h|\, dx \leq$$

$$\|\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,\bar{y},\bar{u}) + \bar{\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,\bar{y},\bar{u})\|_{L^1(\Omega)} \|h_k\|_{L^\infty(\Omega)} \|z_{h_k} - z_h\|_{L^\infty(\Omega)} +$$

$$+\|\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,\bar{y},\bar{u}) + \bar{\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,\bar{y},\bar{u})\|_{L^{1+\varepsilon}(\Omega)} \|z_h\|_{L^\infty(\Omega)} \|h_k - h\|_{L^{(1+\varepsilon)/\varepsilon}(\Omega)}.$$

En cada sumando, los dos primeros factores están acotados y el último converge a cero. Aquí se ve la necesidad de introducir la nueva hipótesis sobre algunas derivadas segundas de f y L, ya que no tenemos convergencia uniforme de las h_k.

$$\int_\Omega \left| \frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(x,\bar{y},\bar{u}) + \bar{\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x,\bar{y},\bar{u}) \right| |{h_k}^2 - h^2|\, dx \leq$$

$$\leq \|\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,\bar{y},\bar{u}) + \bar{\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,\bar{y},\bar{u})\|_{L^{1+\varepsilon}(\Omega)} \|h_k + h\|_{L^\infty(\Omega)} \|h_k - h\|_{L^{(1+\varepsilon)/\varepsilon}(\Omega)}.$$

Los dos primeros factores están acotados y el último converge a cero. Por último

$$\int_\Omega \left| \nabla^T z_{h_k} \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x,\nabla\bar{y}) \nabla z_{h_k} \nabla^T z_h \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x,\nabla\bar{y}) \nabla z_h \right| dx =$$

$$= \int_\Omega \left| \nabla^T (z_{h_k} + z_h) \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x,\nabla\bar{y}) \nabla (z_{h_k} - z_h) \right| dx \leq$$

$$\leq \|\nabla(z_{h_k} + z_h)\|_{L^p(\Omega)} \|\frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x,\nabla\bar{y})\|_{L^{p/(p-2)}(\Omega)} \|\nabla(z_{h_k} - z_h)\|_{L^p(\Omega)}.$$

De nuevo, los dos primeros factores están acotados y el último converge a cero. Por lo tanto se cumple la también la hipótesis **(A2)**. □

Para probar un resultado análogo al Teorema 6.1.5 hay que dar condiciones sobre las derivadas de f, L y g_j para que la derivada segunda de la Lagrangiana sea una forma bilineal y continua sobre $L^2(\Omega)$. Como antes queremos comprobar que

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u}(\bar{u},\bar{\lambda}) h_k^2 \to \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u}(\bar{u},\bar{\lambda}) h^2,$$

pero ahora sólo tenemos que $h_k \to h$ en $L^2(\Omega)$. Fijándonos en la demostración anterior, una de las primeras cosas que se ven es que para probar la convergencia de

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(x,\bar{y},\bar{u}) + \bar{\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x,\bar{y},\bar{u}) \right) h_k^2 \, dx$$

hacia

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(x,\bar{y},\bar{u}) + \bar{\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x,\bar{y},\bar{u}) \right) h^2 \, dx$$

es necesario que

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(x,\bar{y},\bar{u}) + \bar{\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x,\bar{y},\bar{u}) \in L^\infty(\Omega).$$

Nótese que vamos a necesitar que el estado adjunto esté acotado, y por tanto será necesario imponer también condiciones sobre las derivadas primeras de f, L y g_j.

Otra de las cuestiones que surgen es la regularidad de z_h y de su gradiente. Tenemos que $L^2(\Omega) \subset (W^{1,q'}(\Omega))'$ para todo $q < \infty$ si $N = 2$ y para todo $q \leq 2N/(N-2)$ si $N \geq 3$. Por lo tanto, la máxima regularidad que podemos conseguir para z_h es $z_h \in W^{1,q}(\Omega)$, dependiendo de la regularidad de las derivadas primeras de f (cf. pág 69 para la ecuación de z_h y pág. 27 para el resultado de regularidad). Además, para $N = 3$, tenemos que $q = 2N/(N-2) = 6$, que es mayor que N, luego $z_h \in L^\infty(\Omega)$, pero si $N > 4$ entonces z_h no tiene porque ser una función acotada. En vista de estas consideraciones, vamos a introducir las siguientes hipótesis sobre las funciones que intervienen en el problema, dejando claro que podrían ser debilitadas un poco para los casos $N = 2$ y $N = 3$.

E8

- f es de clase C^2 respecto a las variables segunda y tercera,
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,t,s) \leq 0$$
y para todo $M > 0$ existe una constante $C_M > 0$ tal que
$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,t,s)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial u}(x,t,s)\right| + \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,t,s)\right| + \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial u}(x,t,s)\right| + \left|\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x,t,s)\right| \leq C_M$$
si $|t|, |s| \leq M$ para c.t.p. $x \in \Omega$.

- $L : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de Carathéodory, de clase C^2 en las variables segunda y tercera, $|L(x,0,0)| \in L^{p/2}(\Omega)$, y para todo $M > 0$ existen una constante $C_M > 0$ y funciones $\psi_M \in L^{p/2}(\Omega)$ y $\psi_M^* \in L^{\max\{p/2,2\}}(\Omega)$ tales que
$$\left|\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,u)\right| \leq \psi_M(x),$$

$$\left|\frac{\partial L}{\partial u}(x,y,u)\right| \leq \psi_M^*(x)$$

y

$$\left|\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y,u)\right| + \left|\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial u}(x,y,u)\right| + \left|\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(x,y,u)\right| \leq C_M$$

si $|y|, |u| \leq M$ para c.t.p. $x \in \Omega$,

- para todo $1 \leq j \leq n_d + n_i$, $g_j : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es medible en x, de clase C^2 en la variable η y existen exponentes $r \in [1, \infty)$ y $s > N$ una constante $C > 0$, una función $\psi_1 \in L^s(\Omega)$ tales que

$$\left|\frac{\partial g_j}{\partial \eta}(x,\eta)\right| \leq C|\eta|^r + \psi_1(x)$$

y

$$\left|\frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x,\eta)\right| \leq C(1 + |\eta|^r).$$

Bajo esta hipótesis, podemos formular la siguiente condición necesaria.

Teorema 6.2.5 *Supongamos que $\bar{u}$ es una solución local del problema* $(\mathbf{P_e})$ *y que se satisfacen las hipótesis sobre f, L y g_j establecidas en* **E8**. *Supongamos además que se satisface la hipótesis de regularidad* (6.2.1). *Entonces*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u^2}(\bar{u},\bar{\lambda})h^2 = \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,\bar{y},\bar{u}) + \bar{\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,\bar{y},\bar{u})\right) z_h^2\, dx + \\
&2\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial u}(x,\bar{y},\bar{u}) + \bar{\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial u}(x,\bar{y},\bar{u})\right) h z_h\, dx + \\
&\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(x,\bar{y},\bar{u}) + \bar{\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x,\bar{y},\bar{u})\right) h^2\, dx + \\
&\sum_{j=1}^{n_d+n_i} \bar{\lambda}_j \int_\Omega \nabla^T z_h \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x,\nabla\bar{y})\nabla z_h\, dx \geq 0
\end{aligned} \tag{6.2.12}$$

para todo $h \in C^0_{\bar{u},L^2(\Omega)}$.

Demostración. La hipótesis **E8** implica que $\dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u^2}(\bar{u},\bar{\lambda})$ es bilineal y continua en $L^2(\Omega)$. Estamos pues en condiciones de aplicar Teorema 6.1.5 y deducir que la desigualdad (6.2.12) es cierta para todo $h \in C^0_{\bar{u},L^2(\Omega)}$. $\square$

Condiciones suficientes de segundo orden

Claramente, aquí vamos a aplicar el Teorema 6.1.6. Veamos que nuestro problema satisface las hipótesis para este teorema. La principal dificultad aparece al probar que **(A3)** se cumple. Para ello es clave probar regularidad suficiente para el estado adjunto. En concreto es necesario que el estado adjunto esté en $L^\infty(\Omega)$. Para lograr está regularidad es necesario suponer más regularidad para las derivadas de f, L y g_j. De nuevo vamos a suponer que se cumple **(E8)**. Análogamente a como hicimos en el caso abstracto, dado $\bar{u}$ un control admisible, introducimos

$$\Omega^\tau = \{x \in \Omega : |d(x)| > \tau\}.$$

Teorema 6.2.6 *Sea $\bar{u}$ un control admisible para el problema ($\mathbf{P_e}$) que satisface la hipótesis de regularidad* (6.2.1)*,* **(E8)** *y tal que existen números reales $\bar{\lambda}_j$, $j = 1, \ldots, n_d + n_i$ y funciones $\bar{y} \in W^{1,p}(\Omega)$, $\bar{\varphi} \in W^{1,p'}(\Omega)$ que satisfacen* (6.2.2)*,* (6.2.3)*,* (6.2.4) *y* (6.2.5)*. Supongamos también que*

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u^2}(\bar{u}, \bar{\lambda})h^2 = &\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, \bar{y}, \bar{u}) + \bar{\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, \bar{y}, \bar{u}) \right) z_h^2 dx \\ &+2\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial u}(x, \bar{y}, \bar{u}) + \bar{\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial u}(x, \bar{y}, \bar{u}) \right) h z_h dx \\ &+\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(x, \bar{y}, \bar{u}) + \bar{\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x, \bar{y}, \bar{u}) \right) h^2\, dx + \\ &\sum_{j=1}^{n_d+n_i} \bar{\lambda}_j \int_\Omega \nabla^T z_h \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x, \nabla \bar{y}) \nabla z_h\, dx \geq \delta \|h\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad (6.2.13)\end{aligned}$$

para todo $h \in L^\infty(\Omega)$ que cumpla (6.2.8) *y $h(x) = 0$ para casi todo $x \in \Omega^\tau$ y $\delta > 0$ y $\tau > 0$ dados. Entonces existen $\varepsilon > 0$ y $\alpha > 0$ tales que $J(\bar{u}) + \alpha\|u - \bar{u}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq J(u)$ para todo control admisible u con $\|u - \bar{u}\|_{L^\infty(\Omega)} < \varepsilon$.*

Demostración. Obsérvese primero que las nuevas condiciones introducidas sobre las derivadas primeras de f, L y g_j implican que el estado pertenece a $W^{1,p}(\Omega)$ para todo $p > N$ y por lo tanto el estado adjunto pertenece a $L^\infty(\Omega)$.

Vamos a demostrar que se satisface **(A3)**. Sea $\bar{u}$ un control admisible que cumple las condiciones necesarias de primer orden (6.2.2)–(6.2.5). Dado $v \in L^\infty(\Omega)$, denotaremos $\varphi_v = \varphi_{0v} + \sum_{j=1}^{n_i+n_d} \bar{\lambda}_j \varphi_{jv}$, donde φ_{0v} y φ_{jv} son las soluciones de (4.1.3) y (4.1.7) para $u = v$, respectivamente. Tomemos $h \in L^\infty(\Omega)$ y $\delta > 0$.

Verifiquemos la primera desigualdad en (6.1.16). De hecho, estableceremos que

$$\left|\left[\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial u^2}(v,\bar\lambda)-\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial u^2}(\bar u,\bar\lambda)\right]h^2\right|\le$$

$$\int_\Omega\left|\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(x,y_v,v)+\varphi_v\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x,y_v,v)-\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(x,\bar y,\bar u)-\bar\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x,\bar y,\bar u)\right|h^2\,dx+$$

$$\int_\Omega\left|\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial u}(x,y_v,v)+\varphi_v\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial u}(x,y_v,v)\right)z_h-\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial u}(x,\bar y,\bar u)+\bar\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial u}(x,\bar y,\bar u)\right)\bar z_h\right||h|$$

$$+\int_\Omega\left|\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y_v,v)+\varphi_v\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y_v,v)\right)z_h^2-\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,\bar y,\bar u)+\bar\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,\bar y,\bar u)\right)\bar z_h^2\right|\,dx+$$

$$\sum_{j=1}^{n_i+ni}|\bar\lambda_j|\int_\Omega\left|\nabla^T z_h\frac{\partial^2 g_j}{\partial\eta^2}(x,\nabla y_v)\nabla z_h-\nabla^T\bar z_h\frac{\partial^2 g_j}{\partial\eta^2}(x,\nabla\bar y)\nabla\bar z_h\right|\,dx\le\delta\|h\|^2_{L^2(\Omega)}\qquad(6.2.14)$$

supuesto que $\|v-\bar u\|_{L^\infty(\Omega)}<\varepsilon$ con ε suficientemente pequeño, donde

$$\left\{\begin{array}{rcll} A\bar z_h+a_0\bar z_h &=& \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\bar y,\bar u)\bar z_h+\dfrac{\partial f}{\partial u}(x,\bar y,\bar u)h & \text{en }\Omega\\ \partial_{n_A}\bar z_h &=& 0 & \text{sobre }\Gamma.\end{array}\right.\qquad(6.2.15)$$

$$\left\{\begin{array}{rcll} Az_h+a_0z_h &=& \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y_v,v)z_h+\dfrac{\partial f}{\partial u}(x,y_v,v)h & \text{en }\Omega\\ \partial_{n_A}z_h &=& 0 & \text{sobre }\Gamma.\end{array}\right.\qquad(6.2.16)$$

Podemos argumentar trabajando con cada término de forma separada. Enfaticemos el hecho de que los principales ingredientes para probar (6.2.14) son la continuidad del funcional G, la regularidad C^2 de f y g_j $j=0,1,\ldots,n_i+n_d$ y las hipótesis sobre la regularidad de las derivadas de f, L y g_j.

Dados $\tilde\delta>0$, para el primer término de la izquierda de (6.2.14) se puede establecer que

$$\left\|\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(x,y_v,v)+\varphi_v\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x,y_v,v)-\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(x,\bar y,\bar u)-\bar\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x,\bar y,\bar u)\right\|_{L^\infty(\Omega)}<\tilde\delta$$

supuesto $\|v-\bar u\|_{L^\infty(\Omega)}$ es suficientemente pequeño: ello es una consecuencia directa de la dependencia continua de φ_v respecto a v en la norma de $L^\infty(\Omega)$, la cual puede ser obtenida con la ayuda de la Proposición 2.1.3.

Para el segundo término de (6.2.14), la desigualdad de Hölder nos lleva a

$$\int_\Omega \left| \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial u}(x, y_v, v) + \varphi_v \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial u}(x, y_v, v) \right) z_h - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial u}(x, \bar{y}, \bar{u}) + \bar{\varphi} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial u}(x, \bar{y}, \bar{u}) \right) \bar{z}_h \right| |h|$$

$$\leq \|h\|_{L^2(\Omega)} \left(\left\| \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial u}(x, y_v, v) - \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial u}(x, \bar{y}, \bar{u}) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \|z_h\|_{L^2(\Omega)} \right.$$

$$+ \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial u}(x, \bar{y}, \bar{u}) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \|z_h - \bar{z}_h\|_{L^2(\Omega)}$$

$$+ \left\| \varphi_v \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial u}(x, y_v, v) - \bar{\varphi} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial u}(x, \bar{y}, \bar{u}) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \|z_h\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\left. + \left\| \bar{\varphi} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial u}(x, \bar{y}, \bar{u}) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \|z_h - \bar{z}_h\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

La discusión se completa teniendo en cuenta las estimaciones

$$\|z_h\|_{L^2(\Omega)} + \|\bar{z}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \|h\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{y} \tag{6.2.17}$$

$$\|z_h - \bar{z}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \tilde{\delta} \|h\|_{L^2(\Omega)}, \tag{6.2.18}$$

cuando $\|v - \bar{u}\|_{L^\infty(\Omega)}$ es pequeño.

Siguiendo el mismo esquema tenemos

$$\int_\Omega \left| \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y_v, v) + \varphi_v \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y_v, v) \right) z_h^2 - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, \bar{y}, \bar{u}) + \bar{\varphi} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, \bar{y}, \bar{u}) \right) \bar{z}_h^2 \right| \, dx \leq$$

$$\leq \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y_v, v) - \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, \bar{y}, \bar{u}) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \|z_h\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$+ \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, \bar{y}, \bar{u}) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \|z_h - \bar{z}_h\|_{L^2(\Omega)} \|z_h + \bar{z}_h\|_{L^2(\Omega)}$$

$$+ \left\| \varphi_v \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y_v, v) - \bar{\varphi} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, \bar{y}, \bar{u}) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \|z_h\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$+ \left\| \bar{\varphi} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, \bar{y}, \bar{u}) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \|z_h - \bar{z}_h\|_{L^2(\Omega)} \|z_h + \bar{z}_h\|_{L^2(\Omega)},$$

que, junto con (6.2.17)-(6.2.18) nos permite tratar el tercer término de (6.2.14).

Estudiamos el último término descomponiéndolo como sigue y usando de nuevo la desigualdad de Hölder

$$\int_\Omega \left| \nabla^T z_h \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x, \nabla y_v) \nabla z_h - \nabla^T \bar{z}_h \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x, \nabla \bar{y}) \nabla \bar{z}_h \right| \, dx \leq$$

$$\leq \int_\Omega \left| \nabla^T z_h \left(\frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x, \nabla y_v) - \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x, \nabla \bar{y}) \right) \nabla z_h \right| dx$$
$$+ \int_\Omega \left| (\nabla^T z_h - \nabla^T \bar{z}_h) \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(\nabla \bar{y})(\nabla z_h + \nabla \bar{z}_h) \right| \, dx \leq$$

$$\leq \|\nabla z_h\|^2_{L^p(\Omega)^N} \left\| \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x, \nabla y_v) - \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x, \nabla \bar{y}) \right\|_{L^q(\Omega)^{N^2}}$$
$$+ \|\nabla z_h - \nabla \bar{z}_h\|_{L^p(\Omega)^N} \|\nabla z_h + \nabla \bar{z}_h\|_{L^p(\Omega)^N} \left\| \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x, \nabla \bar{y}) \right\|_{L^q(\Omega)^{N^2}}$$

con $p = 2N/(N-2)$ (si $N > 2$), $p = 3$ (si $N = 1$ ó 2) y $q = pp'/(p - p')$ (q es en este caso el exponente conjugado de $p/2$).

El exponente p se ha escogido de tal modo que $L^2(\Omega) \subset (W^{1,p'}(\Omega))'$. Luego, usando el Teorema2.1.3, tenemos que

$$\|\nabla z_h\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla \bar{z}_h\|_{L^p(\Omega)} \leq C_2 \|h\|_{L^2(\Omega)}. \tag{6.2.19}$$

cuando $\|v - \bar{u}\|_{L^\infty(\Omega)}$ está acotado. Además, en este caso, restando las ecuaciones (6.2.15) y (6.2.16) y usando el Teorema 2.1.3 de nuevo, podemos deducir que

$$\|\nabla z_h - \nabla \bar{z}_h\|_{L^p(\Omega)} \leq \tilde{\delta} \|h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Finalmente, podemos deducir que

$$\left\| \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x, \nabla y_v) - \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x, \nabla \bar{y}) \right\|_{L^q(\Omega)^{N^2}} < \tilde{\delta}$$

para $\|v - \bar{u}\|_{L^\infty(\Omega)}$ suficientemente pequeño, uniformemente respecto a v. Mostremos esto en detalle: por la continuidad del funcional G y usando la regularidad $L^p(\Omega)$ del gradiente del estado y la hipótesis hecha sobre las derivadas segundas de g_j, fijado $\tilde{q} > q$, existe una constante positiva C_3 tal que para cada control admisible v

$$\|\nabla y_v\|_{L^{r\tilde{q}}(\Omega)} + \|\nabla \bar{y}\|_{L^{r\tilde{q}}(\Omega)} + \left\| \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x, \nabla y_v) \right\|_{L^{\tilde{q}}(\Omega)^{N^2}} + \left\| \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x, \nabla \bar{y}) \right\|_{L^{\tilde{q}}(\Omega)^{N^2}} \leq C_3,$$

siendo el exponente r el exponente introducido en las hipótesis del teorema. Dado $M > 0$, introduzcamos los siguientes conjuntos $E_1^M = \{x \in \Omega : \|\nabla y_v(x)\| \geq M\}$ y $E_2^M = \{x \in \Omega : \|\nabla \bar{y}(x)\| \geq M\}$. Claramente E_1^M y E_2^M dependen de v y $\bar{u}$, respectivamente, pero no remarcaremos esto. Aquí es importante señalar la desigualdad trivial

$$m(E_1^M) \leq \frac{1}{M} \int_\Omega \|\nabla y_v(x)\| dx \leq \frac{C_4}{M}.$$

El mismo razonamiento vale para E_2^M.

Gracias a la regularidad de g_j, las derivadas de segundo orden son uniformemente continuas en la bola de $\mathbb{R}^N$ con centro en el origen y radio M. Por lo tanto, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que siempre que $\|\eta - \tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^N} \leq \epsilon_1$ con $\|\eta\|_{\mathbb{R}^N}, \|\tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^N} \leq M$, tenemos

$$\left\| \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x, \eta) - \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x, \tilde{\eta}) \right\|_{\mathbb{R}^{N^2}} < \left(\frac{\tilde{\delta}}{4m(\Omega)} \right)^{1/q}.$$

Usando de nuevo la continuidad del funcional G, existe $\epsilon_2 > 0$ tal que cuando $\|v - \bar{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \epsilon_2$, entonces

$$\int_\Omega \|\nabla y_v(x) - \nabla \bar{y}(x)\| dx \leq \epsilon_1 \frac{C_4}{M}.$$

Introduzcamos ahora otro conjunto $E_3^M = \{x \in \Omega : \|\nabla y_v(x) - \nabla \bar{y}(x)\| > \epsilon_1\}$. Razonando como antes, deducimos que

$$\epsilon_1 m(E_3^M) \leq \int_\Omega \|\nabla y_v(x) - \nabla \bar{y}(x)\| dx.$$

En particular, las dos últimas relaciones implican $m(E_3^M) \leq \frac{C_4}{M}$. Combinando las estimaciones precedentes y usando la desigualdad de Hölder con $s = \tilde{q}/q$, obtenemos

$$\int_\Omega \left\| \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x, \nabla y_v) - \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x, \nabla \bar{y}) \right\|^q dx \leq \int_{E_1^M} \left\| \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x, \nabla y_v) - \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x, \nabla \bar{y}) \right\|^q dx +$$

$$\int_{E_2^M} \left\| \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x, \nabla y_v) - \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x, \nabla \bar{y}) \right\|^q dx + \int_{E_3^M} \left\| \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x, \nabla y_v) - \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x, \nabla \bar{y}) \right\|^q dx +$$

$$\int_{\Omega\setminus(E_1^M\cup E_2^M\cup E_M^3)} \left\| \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x,\nabla y_v) - \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x,\nabla \bar{y}) \right\|^q dx \leq$$

$$\frac{\tilde{\delta}}{4} + \left(\sum_{j=1}^{3} m(E_j^M)^{1/s'}\right) \left(\int_\Omega \left\| \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x,\nabla y_v) - \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x,\nabla \bar{y}) \right\|^{\tilde{q}} dx\right)^{1/s}$$

$$\leq \frac{\tilde{\delta}}{4} + 3\left(\frac{C_4}{M}\right)^{1/s'} 2^{q+1/s} C_3^q$$

Este término a la derecha se puede tomar menor que $\tilde{\delta}$, si M es suficientemente grande.

Por todas estas consideraciones, podemos asegurar que la primera condición sobre la continuidad de la derivada segunda de la Lagrangiana en (6.1.16) se satisface. El resto de las condiciones se sigue fácilmente de las propiedades de las funciones f, L y g_j, $j = 0, 1, \ldots, n_i + n_d$. □

Algunas extensiones

Se pueden demostrar resultados análogos para el problema con control frontera $(\mathrm{P_e})'$ descrito el página 107. Tomemos en este caso

$$K_\Gamma(x) = [v_a(x), v_b(x)],$$

donde $v_a, v_b \in L^\infty(\Gamma)$. La Lagrangiana asociada a este problema es

$$\mathcal{L}(v,\lambda) = \int_\Gamma \ell(x, y_v, v)dx + \sum_{j=1}^{n_i+n_d} \lambda_j \int_\Omega g_j(x, \nabla y_v(x))dx.$$

Recordemos que

$$F_j(y) = \int_\Omega g_j(x, \nabla y(x))dx.$$

Establecemos una hipótesis de regularidad análoga a (6.2.1). Dado $\bar{v} \in V_{ad}$, para $\varepsilon > 0$, sea

$$\Gamma_\varepsilon = \{x \in \Gamma : v_a(x) + \varepsilon \leq \bar{v}(x) \leq v_b(x) - \varepsilon\}.$$

Dado un control $\bar{v}$, diremos que satisface la condición de regularidad si existe $\varepsilon_{\bar{v}} > 0$ tal que

$$\text{la familia } \{\bar{\varphi}_i \frac{\partial g}{\partial v}(s, \bar{y}, \bar{v})\}_{i\in I_0} \text{ es linealmente independiente en } L^1(\Gamma_{\varepsilon_{\bar{v}}}), \qquad (6.2.20)$$

donde $\bar{y}$ es el estado asociado a $\bar{v}$ y φ_i es la única solución de

$$\left\{\begin{array}{rcll} A^*\bar{\varphi} + a_0\bar{\varphi} &=& -\mathrm{div}\left(\dfrac{\partial g_j}{\partial \eta}(x, \nabla\bar{y})\right) & \text{en } \Omega \\ \partial_{n_{A^*}}\bar{\varphi} &=& \dfrac{\partial g}{\partial y}(s, \bar{y}, \bar{v})\bar{\varphi} & \text{sobre } \Gamma. \end{array}\right.$$

Supongamos que

- $g : \Gamma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es medible sobre Γ y de clase C^1 respecto a las variables segunda y tercera, $g(\cdot, 0, 0) \in L^{p-1}(\Gamma)$, para todo $M > 0$ existen $C_M > 0$ y $\psi_M \in L^{p-1}(\Gamma)$ tal que
$$\left|\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, v)\right| \le C_M \quad \text{y} \quad \left|\frac{\partial g}{\partial v}(x, y, v)\right| \le \psi_M(x)$$
para todo $(y, v) \in \mathbb{R}^2$ y c.t.p. $x \in \Gamma$ y
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, v) \le 0.$$

- $\ell : \Gamma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es medible sobre Γ y de clase C^1 respecto a las variables segunda y tercera para todo $M > 0$ existe $\psi_M \in L^1(\Gamma)$ tal que
$$\left|\frac{\partial \ell}{\partial y}(x, y, v)\right| + \left|\frac{\partial \ell}{\partial v}(x, y, v)\right| \le \psi_M(x)$$

y además se satisfacen las condiciones de diferenciabilidad sobre las g_j establecidas en E6 (pág. 90).

Teorema 6.2.7 *Supongamos que $\bar{v}$ es una solución local de* $(\mathrm{P_e})'$. *Supongamos además que se satisface* (6.2.20). *Entonces existen números reales $\bar{\lambda}_j$, $j = 1, \ldots, n_d + n_i$ y funciones $\bar{y} \in W^{1,p}(\Omega)$, $\bar{\varphi} \in W^{1,p'}(\Omega)$ tales que*

$$\bar{\lambda}_j \ge 0 \quad n_i + 1 \le j \le n_i + n_d, \qquad \bar{\lambda}_j \int_\Omega g_j(x, \nabla\bar{y}(x))\, dx = 0, \tag{6.2.21}$$

$$\left\{\begin{array}{rcll} A\bar{y} + a_0\bar{y} &=& f & \textit{en } \Omega \\ \partial_{n_A}\bar{y} &=& g(s, y_v, v) & \textit{sobre } \Gamma, \end{array}\right. \tag{6.2.22}$$

$$\left\{\begin{array}{rcll} A^*\bar{\varphi} + a_0\bar{\varphi} &=& -\displaystyle\sum_{j=1}^{n_i+n_d} \bar{\lambda}_j \mathrm{div}\left(\dfrac{\partial g_j}{\partial \eta}(x, \nabla\bar{y})\right) & \textit{en } \Omega \\ \partial_{n_{A^*}}\bar{\varphi} &=& \dfrac{\partial g}{\partial y}(s, \bar{y}, \bar{v})\bar{\varphi} + \dfrac{\partial \ell}{\partial y}(s, \bar{y}, \bar{v}) & \textit{sobre } \Gamma, \end{array}\right. \tag{6.2.23}$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(\bar{v},\bar{\lambda})(v-\bar{v}) = \int_\Gamma \left(\frac{\partial \ell}{\partial v}(s,\bar{y},\bar{u}) + \bar{\varphi}\frac{\partial f}{\partial v}(s,\bar{y},\bar{s}) \right)(v-\bar{v})ds \geq 0 \qquad \textit{para todo } v \in V_{ad}. \tag{6.2.24}$$

Sea

$$d(s) = \frac{\partial \ell}{\partial v}(s,\bar{y},\bar{u}) + \bar{\varphi}\frac{\partial f}{\partial v}(s,\bar{y},\bar{s})$$

y

$$\Gamma^0 = \{s \in \Gamma : |d(s)| > 0\}.$$

La derivada segunda de la Lagrangiana viene dada en este caso por

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^2}(\bar{v},\bar{\lambda})h^2 = \int_\Gamma \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial y^2}(s,\bar{y},\bar{v}) + \bar{\varphi}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(s,\bar{y},\bar{v}) \right) z_h^2 \, ds +$$

$$2\int_\Gamma \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial y \partial v}(s,\bar{y},\bar{v}) + \bar{\varphi}\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial v}(s,\bar{y},\bar{v}) \right) h z_h \, ds +$$

$$\int_\Gamma \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial v^2}(s,\bar{y},\bar{v}) + \bar{\varphi}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(s,\bar{y},\bar{v}) \right) h^2 \, ds +$$

$$\sum_{j=1}^{n_d+n_i} \bar{\lambda}_j \int_\Omega \nabla^T z_h \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x,\nabla\bar{y})\nabla z_h \, dx,$$

donde $h \in L^\infty(\Gamma)$ y z_h es la solución de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} Az_h + a_0 z_h &=& 0 & \text{en } \Omega \\ \partial_{n_A} z_h &=& \dfrac{\partial g}{\partial y}(s,\bar{y},\bar{v})z_h + \dfrac{\partial g}{\partial v}(s,\bar{y},\bar{v})h & \text{sobre } \Gamma. \end{array} \right.$$

Supongamos que se satisfacen las condiciones sobre diferenciabilidad C^1 de g y ℓ establecidas anteriormente y sobre g_j establecidas en E6. Supongamos además que se satisface la condición E7 sobre las derivadas segundas de las g_j y que g y ℓ son de clase C^2 respecto a las variables segunda y tercera y que para todo $M > 0$ existen ε, $\tilde{\varepsilon} > 0$ y funciones $\psi_M^1 \in L^1(\Gamma)$, $\psi_M^{1,\varepsilon}(\Gamma) \in L^{1+\varepsilon}(\Gamma)$, $\psi_M^2 \in L^{p-1}(\Gamma)$ y $\psi_M^{2,\tilde{\varepsilon}}(\Gamma) \in L^{p-1+\tilde{\varepsilon}}(\Gamma)$ tales que

$$\left|\frac{\partial^2 \ell}{\partial y^2}(s,y,v)\right| \leq \psi_M^1(s), \qquad \left|\frac{\partial^2 \ell}{\partial y \partial v}(s,y,v)\right| + \left|\frac{\partial^2 \ell}{\partial v^2}(s,y,v)\right| \leq \psi_M^{1,\varepsilon}(s),$$

$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(s,y,v)\right| \leq \psi_M^2(s) \quad \text{ y } \quad \left|\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial v}(s,y,v)\right| + \left|\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(s,y,v)\right| \leq \psi_M^{2,\tilde{\varepsilon}}(s)$$

si $|y|$, $|v| \leq M$ para c.t.p. $s \in \Gamma$. Entonces podemos enunciar condiciones necesarias de segundo orden.

Teorema 6.2.8 *Supongamos que $\bar{v}$ es una solución local de* $(\mathrm{P_e})'$*. Supongamos además que se satisface* (6.2.20)*. Entonces*

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^2}(\bar{v}, \bar{\lambda})h^2 \geq 0$$

para todo $h \in L^\infty(\Gamma)$ tal que $h(s) = 0$ para casi todo $s \in \Gamma^0$ y

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Gamma \bar{\varphi}_j \frac{\partial g}{\partial u}(s,\bar{y},\bar{v})h\,ds = 0 \ \textit{si} \ (j \leq n_i) \ \textit{ó} \ (j > n_i, \int_\Omega g_j(x,\nabla\bar{y}) = 0 \ \textit{y} \ \bar{\lambda}_j > 0) \\ \displaystyle\int_\Gamma \bar{\varphi}_j \frac{\partial f}{\partial v}(s,\bar{y},\bar{v})h\,ds \leq 0 \ \textit{si} \ n_i + 1 \leq j \leq n_d + n_i, \ \int_\Omega g_j(x,\nabla\bar{y}) = 0, \ \bar{\lambda}_j = 0 \\ h(s) \geq 0 \ \textit{si} \ \bar{v}(s) = v_a(s) \\ h(s) \leq 0 \ \textit{si} \ \bar{v}(s) = v_b(s). \end{cases} \tag{6.2.25}$$

Para establecer condiciones suficientes es necesario introducir

$$\Gamma^\tau = \{s \in \Gamma : |d(s)| > \tau\}.$$

De nuevo las hipótesis que se hacen sobre las funciones que intervienen en el problema son más fuertes, para lograr que la traza del estado adjunto sea una función acotada.

- g es de clase C^2 respecto a las variables segunda y tercera,

  $$\frac{\partial g}{\partial y}(s,y,v) \leq 0$$

  y para todo $M > 0$ existe una constante $C_M > 0$ tal que

  $$\left|\frac{\partial g}{\partial y}(s,y,v)\right| + \left|\frac{\partial g}{\partial v}(s,y,v)\right| + \left|\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(s,y,v)\right| + \left|\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial v}(s,y,v)\right| + \left|\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(s,y,v)\right| \leq C_M$$

  si $|y|, |v| \leq M$ para c.t.p. $s \in \Gamma$.

- $\ell : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de Carathéodory, de clase C^2 en las variables segunda y tercera, $|\ell(s,0,0)| \in L^{p-1}(\Gamma)$ y para todo $M > 0$ existen una constante $C_M > 0$ y una función $\psi_M \in L^{p-1}(\Gamma)$ tal que

$$\left|\frac{\partial \ell}{\partial y}(s,y,v)\right| + \left|\frac{\partial \ell}{\partial v}(s,y,v)\right| \leq \psi_M(s)$$

y

$$\left|\frac{\partial^2 \ell}{\partial y^2}(s,y,v)\right| + \left|\frac{\partial^2 \ell}{\partial y \partial v}(s,y,v)\right| + \left|\frac{\partial^2 \ell}{\partial v^2}(s,y,v)\right| \leq C_M$$

si $|y|, |v| \leq M$ para c.t.p. $s \in \Gamma$,

- para todo $1 \leq j \leq n_d + n_i$, $g_j : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es medible en x, de clase C^2 en la variable η y existen exponentes $r \in [1, \infty)$ y $s > N$, una constante $C > 0$, una función $\psi_1 \in L^s(\Omega)$ tal que

$$\left|\frac{\partial g_j}{\partial \eta}(x,\eta)\right| \leq C|\eta|^r + \psi_1(x)$$

y

$$\left|\frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x,\eta)\right| \leq C(1 + |\eta|^r).$$

Entonces

Teorema 6.2.9 *Sea $\bar{v}$ un control admisible para el problema* $(\mathrm{P_e})'$ *que satisface la hipótesis de regularidad* (6.2.20) *y tal que existen números reales $\bar{\lambda}_j$, $j = 1, \ldots, n_d + n_i$ y funciones $\bar{y} \in W^{1,p}(\Omega)$, $\bar{\varphi} \in W^{1,p'}(\Omega)$ que satisfacen* (6.2.21), (6.2.22), (6.2.23) *y* (6.2.24). *Supongamos también que*

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^2}(\bar{v}, \bar{\lambda})h^2 \geq \delta \|h\|^2_{L^2(\Omega)}$$

para todo $h \in L^\infty(\Gamma)$ que cumpla (6.2.25) *y $h(s) = 0$ para casi todo $s \in \Gamma^\tau$ y $\delta > 0$ y $\tau > 0$ dados. Entonces existen $\varepsilon > 0$ y $\alpha > 0$ tales que $J(\bar{v}) + \alpha\|v - \bar{v}\|^2_{L^2(\Gamma)} \leq J(v)$ para todo control admisible v con $\|v - \bar{v}\|_{L^\infty(\Gamma)} < \varepsilon$.*

6.3 Caso parabólico

Ω denotará un subconjunto abierto, acotado y conexo de $\mathbb{R}^N$, cuya frontera Γ es de clase C^1. Sean T, Q, Σ y A, p, τ, k_1, $\tilde{k}_1$, σ_1, $\tilde{\sigma}_1$ como en la Sección 2.2, con la frontera

Γ de clase C^1 y los coeficientes del operador A de clase $C([0,T];C(\bar{\Omega}))$. Sean f, g, y_0 funciones, $f : Q \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \Sigma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $F : Q \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $G : \Sigma \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $y_0 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $y_0 \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$. Sean k_2, $\tilde{k}_2$, σ_2, $\tilde{\sigma}_2$ y ν como en la sección 2.2.

Consideremos el problema $(\mathbf{P_p})$ de la página 16. Supondremos que el conjunto de controles admisibles es de la forma

$$V_{ad} = \{v \in L^\infty(\Sigma) : \ v_a(s,t) \le v(s,t) \le v_b(s,t) \text{ c.t.p. } (s,t) \in \Sigma\},$$

donde v_a, $v_b \in L^\infty(\Sigma)$. Esta elección corresponde al caso de tomar

$$K_\Sigma(s,t) = [v_a(s,t), v_b(s,t)].$$

Al igual que en la sección 4.1.2, consideraremos

$$C = \left\{ \vec{f} \in L^\tau(L^p)^N : \int_0^T \zeta_j \left(\int_\Omega g_j(x,t,\vec{f}) dx \right) dt = 0 \text{ si } 1 \le j \le n_i, \right.$$
$$\left. \int_0^T \zeta_j \left(\int_\Omega g_j(x,t,\vec{f}) dx \right) dt \le 0 \text{ si } n_i + 1 \le j \le n_i + n_d \right\},$$

donde $\zeta_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g_j : Q \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ son funciones. Vamos a adaptar para el problema $(\mathbf{P_p})$ los teoremas abstractos dados al inicio de este capítulo. En este caso

$$J(v) = \int_0^T \int_\Omega F(x,t,y_v)\ dx\ dt + \int_0^T \int_\Gamma G(s,t,y_v,v)\ ds\ dt + \int_\Omega L(x,y_v(x,T))\ dx$$

y

$$G_j(v) = \int_0^T \zeta_j \left(\int_\Omega g_j(x,t,\nabla_x y_v) dx \right) dt.$$

La Lagrangiana de este problema viene dada por

$$\mathcal{L}(v,\lambda) = \int_0^T \int_\Omega F(x,t,y_v)\ dx\ dt + \int_0^T \int_\Gamma G(s,t,y_v,v)\ ds\ dt + \int_\Omega L(x,y_v(x,T))\ dx +$$
$$\sum_{j=1}^{n_i+n_d} \lambda_j \int_0^T \zeta_j \left(\int_\Omega g_j(x,t,\nabla_x y_v) dx \right) dt.$$

Recordemos también

$$F_j(y) = \int_0^T \zeta_j \left(\int_\Omega g_j(x,t,\nabla_x y) dx \right) dt,$$

y que su derivada viene dada por

$$F_j'(y) = -\mathrm{div}\, \zeta_j' \left(\int_\Omega g_j(x,t,\nabla_x y)dx \right) \frac{\partial g_j}{\partial \eta}(s,t,\nabla_x y).$$

Vamos a establecer una hipótesis de regularidad análoga a (6.1.3). Para $\varepsilon > 0$, sea

$$\Sigma_\varepsilon = \{(s,t) \in \Sigma : v_a(s,t) + \varepsilon \leq \bar{v}(s,t) \leq v_b(s,t) - \varepsilon\}$$

Lema 6.3.1 *Dado $\bar{v}$ un elemento de V_{ad}, las dos condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *existe $\varepsilon_{\bar{v}} > 0$ y funciones $\{h_j\}_{j\in I_0} \subset L^\infty(\Omega)$ con $\mathrm{supp}\, h_j \subset \Sigma_{\varepsilon_{\bar{v}}}$ tales que $G_i'(\bar{v})h_j = \delta_{ij}$ para $i,j \in I_0$;*
2. *existe $\varepsilon_{\bar{v}} > 0$ tal que*

$$\text{la familia } \{\bar{\varphi}_i \frac{\partial g}{\partial v}(s,t,\bar{y},\bar{v})\}_{i\in I_0} \text{ es linealmente independiente en } L^1(\Sigma_{\varepsilon_{\bar{u}}}), \quad (6.3.1)$$

donde $\bar{y} = G(\bar{u})$ y $\bar{\varphi}_i = \varphi_{i\bar{v}}$ es la solución de (4.1.10) para $v = \bar{v}$.

Demostración. La prueba es completamente análoga a la del Lema 6.2.1. □

Condiciones necesarias de primer orden

Las condiciones necesarias de primer orden satisfechas por $\bar{v}$ se pueden deducir del Teorema abstracto 6.1.2 con la ayuda de los Teoremas 4.1.5 y 4.1.7.

Teorema 6.3.2 *Supongamos que f y g satisfacen las hipótesis P1 y P2, que F, G y L satisfacen P4 y P5 y que las ζ_j y las g_j satisfacen P7. Supongamos además que se satisface (6.3.1). Entonces existen números reales $\bar{\lambda}_j$, $j = 1,\ldots,n_d+n_i$ y funciones $\bar{y} \in L^\tau(W^{1,p}(\Omega))$ y $\bar{\varphi} \in L^{\tau'}(W^{1,p'}(\Omega)) + L^2(H^1)$ tales que*

$$\bar{\lambda}_j \geq 0 \quad n_i+1 \leq j \leq n_i+n_d, \qquad \bar{\lambda}_j \int_0^T \zeta_j \left(\int_\Omega g_j(x,t,\nabla_x \bar{y})dx \right) dt = 0, \qquad (6.3.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dfrac{\partial \bar{y}}{\partial t} + A\bar{y} & = & f(x,t,\bar{y}) & \text{en } Q, \\ \dfrac{\partial \bar{y}}{\partial n_A} & = & g(s,t,\bar{y},\bar{v}) & \text{sobre } \Sigma, \\ \bar{y}(\cdot,0) & = & w & \text{en } \Omega, \end{array} \right. \qquad (6.3.3)$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\dfrac{\partial\bar\varphi}{\partial t}+A^*\bar\varphi-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,t,\bar y)\bar\varphi &=& -\displaystyle\sum_{j=1}^{n_d+n_i}\lambda_j\mathrm{div}\,\zeta_j'\left(\int_\Omega g_j(x,t,\nabla_x\bar y)dx\right)\dfrac{\partial g_j}{\partial\eta}(s,t,\nabla_x\bar y)+ \\ && \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,t,\bar y) \qquad\qquad \textit{en } Q, \\ \dfrac{\partial\bar\varphi}{\partial n_{A^*}}-\dfrac{\partial g}{\partial y}(s,t,\bar y,\bar v)\bar\varphi &=& \displaystyle\sum_{j=1}^{n_d+n_i}\lambda_j\zeta_j'\left(\int_\Omega g_j(x,t,\nabla_x\bar y)dx\right)\dfrac{\partial g_j}{\partial\eta}(s,t,\nabla_x\bar y)\cdot\vec n+ \\ && \dfrac{\partial G}{\partial y}(s,t,\bar y,\bar v) \qquad\qquad \textit{sobre } \Sigma, \\ \bar\varphi(\cdot,T) &=& \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,\bar y(T)) \qquad\qquad \textit{en } \Omega, \end{array}\right. \tag{6.3.4}$$

$$\frac{\partial\mathcal L}{\partial v}(\bar v,\bar\lambda)(v-\bar v)=\int_\Sigma\left(\frac{\partial G}{\partial v}(s,t,\bar y,\bar v)+\bar\varphi\frac{\partial g}{\partial v}(s,t,\bar y,\bar v)\right)(v-\bar v)ds\,dt\geq 0\ \forall\ v_a\leq v\leq v_b. \tag{6.3.5}$$

Además,

$$\bar\varphi=\varphi_{0\bar v}+\sum_{j=1}^{n_i+n_d}\lambda_j\varphi_{j\bar v},$$

donde $\varphi_{0\bar v}$ *y* $\varphi_{j\bar v}$ *para* $1\leq j\leq n_i+n_d$ *son las soluciones de* (4.1.9) *y* (4.1.10) *para* $v=\bar v$.

Demostración. Aplicamos los teoremas 4.1.5 y 4.1.7 para calcular la expresión de la derivada de la Lagrangiana, y deducimos la expresión (6.3.5) como directa aplicación del Teorema 6.1.2 y el Lema 6.3.1. □

De nuevo podemos dar una condición suficiente para que se cumpla la condición de regularidad (6.3.1).

Lema 6.3.3 *Supongamos que existen* $\varepsilon_{\bar v}>0$ *y un conjunto abierto (relativo a la topología de* Σ*) no vacío* $A_{\varepsilon_{\bar u}}\subset\Sigma_{\varepsilon_{\bar v}}$ *tal que*

$$\frac{\partial g}{\partial u}(s,t\bar y(s,t),\bar v(s,t))\neq 0\ \textit{ en } A_{\varepsilon_{\bar v}}$$

y $\{F_j'(\bar y)\}_{j\in I_0}$ *son linealmente independientes en* $L^{\tau'}\left((W^{1,p'}(A_{\varepsilon_{\bar u}}))'\right)$. *Entonces se satisface la condición de regularidad* (6.3.1).

Demostración. La prueba es análoga a la del caso elíptico. □

Condiciones necesarias de segundo orden

Teniendo en cuenta los Teoremas 4.1.5 y 4.1.7, podemos mostrar que las hipótesis del Teorema 6.1.3 se cumplen para el problema $(\mathbf{P_p})$. En este caso podemos identificar

$$d(s,t) = \frac{\partial G}{\partial v}(s,t,\bar{y}(s,t),\bar{v}(s,t)) + \bar{\varphi}(s,t)\frac{\partial g}{\partial v}(s,t,\bar{y}(s,t),\bar{v}(s,t)),$$

donde $\bar{y}$ viene dada por (6.3.3) y $\bar{\varphi}$ viene dada por (6.3.4). Introducimos

$$\Sigma^0 = \{(s,t) \in \Sigma : \, |d(s,t)| > 0\}.$$

De nuevo es necesario exigir un poco más de regularidad a las derivadas segundas de g y G. En concreto, además de P3 y P6, supondremos que existen $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $\tilde{\varepsilon}_2 > 0$, $\psi_M^1 \in L^{1+\varepsilon_1}(\Sigma)$ y $\psi_M^2 \in L^{\tilde{\sigma}_2+\tilde{\varepsilon}_2}(L^{\sigma_2+\varepsilon_2}(\Gamma))$, tales que

$$\left|\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}(s,t,y,v)\right| + \left|\frac{\partial^2 G}{\partial v \partial y}(s,t,y,v)\right| \leq \psi_M^1(s,t) \tag{6.3.6}$$

y

$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(s,t,y,v)\right| + \left|\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial y}(s,t,y,v)\right| \leq \psi_M^2(s,t) \tag{6.3.7}$$

si $|y|$, $|v| \leq M$ para c.t.p. $(s,t) \in \Sigma$.

Así obtenemos

Teorema 6.3.4 *Supongamos que $\bar{v}$ es una solución local para el problema $(\mathbf{P_p})$ y que se satisfacen P1–P8,* (6.3.6) *y* (6.3.7). *Supongamos además que se satisface la hipótesis de* *regularidad* (6.3.1). *Entonces*

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial v^2}(\bar v,\bar\lambda)h^2 = \int_\Sigma \left(\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(s,t,\bar y,\bar v) + \bar\varphi\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(s,t,\bar y,\bar v)\right) z_h^2\, ds\, dt +$$

$$2\int_\Sigma \left(\frac{\partial^2 G}{\partial y\partial v}(s,t,\bar y,\bar v) + \bar\varphi\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial v}(s,t,\bar y,\bar v)\right) hz_h\, ds\, dt +$$

$$\int_\Sigma \left(\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}(s,t,\bar y,\bar v) + \bar\varphi\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(s,t,\bar y,\bar v)\right) h^2\, ds\, dt +$$

$$\sum_{j=1}^{n_d+n_i}\bar\lambda_j\left\{\int_0^T\left[\zeta_j''\left(\int_\Omega g_j(x,t,\nabla_x\bar y)dx\right)\int_\Omega\frac{\partial g_j}{\partial\eta}(x,t,\nabla_x\bar y)\nabla_x z_h\, dx\int_\Omega\frac{\partial g_j}{\partial\eta}(x,t,\nabla_x\bar y)\nabla_x z_h\, dx\right]dt +\right.$$

$$\left.\int_0^T\left[\zeta_j'\left(\int_\Omega g_j(x,t,\nabla_x\bar y)dx\right)\int_\Omega \nabla_x^T z_h\frac{\partial^2 g_j}{\partial\eta^2}(x,t,\nabla_x\bar y)\nabla_x z_h dx\right]dt\right\}\geq 0 \tag{6.3.8}$$

para todo $h\in L^\infty(\Sigma)$ *tal que* $h(s,t)=0$ *para casi todo* $(s,t)\in\Sigma^0$ *y*

$$\begin{cases}\displaystyle\int_\Sigma\bar\varphi_j\frac{\partial g}{\partial v}(s,t,\bar y,\bar v)h\, ds\, dt = 0 \text{ si } (j\leq n_i) \text{ ó } (j>n_i, \int_0^T\zeta_j\left(\int_\Omega g_j(x,t,\vec f)dx\right)dt=0,\ \bar\lambda_j>0)\\ \displaystyle\int_\Sigma\bar\varphi_j\frac{\partial g}{\partial v}(s,t,\bar y,\bar v)h\, ds\, dt\leq 0 \text{ si } n_i+1\leq j\leq n_d+n_i,\ \int_0^T\zeta_j\left(\int_\Omega g_j(x,t,\vec f)dx\right)dt=0,\ \bar\lambda_j=0\\ h(s,t)\geq 0 \text{ si } \bar v(s,t)=v_a(s,t)\\ h(s,t)\leq 0 \text{ si } \bar v(s,t)=v_b(s,t),\end{cases} \tag{6.3.9}$$

donde z_h *viene dado por*

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z_h}{\partial t}+Az_h = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,t,\bar y)z_h & \text{en } Q,\\ \dfrac{\partial z_h}{\partial n_A} = \dfrac{\partial g}{\partial y}(s,t,\bar y,\bar v)z_h+\dfrac{\partial g}{\partial v}(s,t,\bar y,\bar v)h & \text{sobre } \Sigma,\\ z_h(\cdot,0) = 0 & \text{en } \Omega.\end{cases}$$

Demostración. Nótese primero que podemos aplicar el Teorema 6.3.2 para deducir la existencia de los multiplicadores de Lagrange. Ahora, debido al Teorema 6.1.3, no hay más que verificar que se satisfacen **(A1)** y **(A2)**. En nuestro caso, la hipótesis **(A1)** (véase la página 120), se satisface con

$$\phi = \frac{\partial G}{\partial v}(s,t,\bar{y},\bar{v}) + \bar{\varphi}_0 \frac{\partial g}{\partial v}(s,t,\bar{y},\bar{v})$$

y

$$\psi_j = \bar{\varphi}_j \frac{\partial g}{\partial v}(s,t,\bar{y},\bar{v}).$$

De la expresión para las derivadas segundas de J y G_j y de las propiedades impuestas a las derivadas de g, G y g_j, se sigue que se verifica **(A2)**. En efecto, sea $\{h_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^\infty(\Sigma)$, acotada en $L^\infty(\Sigma)$ y puntualmente convergente hacia h. Queremos comprobar que

$$\int_\Sigma \left(\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(s,t,\bar{y},\bar{v}) + \bar{\varphi} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(s,t,\bar{y},\bar{v}) \right) z_{h_k}^2 \, ds\, dt +$$

$$2 \int_\Sigma \left(\frac{\partial^2 G}{\partial y \partial v}(s,t,\bar{y},\bar{v}) + \bar{\varphi} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial v}(s,t,\bar{y},\bar{v}) \right) h_k z_{h_k} \, ds\, dt +$$

$$\int_\Sigma \left(\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}(s,t,\bar{y},\bar{v}) + \bar{\varphi} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(s,t,\bar{y},\bar{v}) \right) h_k^2 \, ds\, dt +$$

$$\sum_{j=1}^{n_d+n_i} \bar{\lambda}_j \left\{ \int_0^T \left[\zeta_j'' \left(\int_\Omega g_j(x,t,\nabla_x \bar{y}) dx \right) \int_\Omega \frac{\partial g_j}{\partial \eta}(x,t,\nabla_x \bar{y}) \nabla_x z_{h_k} \, dx \int_\Omega \frac{\partial g_j}{\partial \eta}(x,t,\nabla_x \bar{y}) \nabla_x z_{h_k} \, dx \right] dt + \right.$$

$$\left. \int_0^T \left[\zeta_j' \left(\int_\Omega g_j(x,t,\nabla_x \bar{y}) dx \right) \int_\Omega \nabla_x^T z_{h_k} \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x,t,\nabla_x \bar{y}) \nabla_x z_{h_k} dx \right] dt \right\},$$

donde z_{h_k} viene dado por

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dfrac{\partial z_{h_k}}{\partial t} + A z_{h_k} & = & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,t,\bar{y}) z_{h_k} & \text{en } Q, \\ \dfrac{\partial z_{h_k}}{\partial n_A} & = & \dfrac{\partial g}{\partial y}(s,t,\bar{y},\bar{v}) z_{h_k} + \dfrac{\partial g}{\partial v}(s,t,\bar{y},\bar{v}) h_k & \text{sobre } \Sigma, \\ z_{h_k}(\cdot,0) & = & 0 & \text{en } \Omega, \end{array} \right.$$

converge hacia

$$\int_\Sigma \left(\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(s,t,\bar{y},\bar{v}) + \bar{\varphi}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(s,t,\bar{y},\bar{v}) \right) z_h^2\, ds\, dt +$$

$$2\int_\Sigma \left(\frac{\partial^2 G}{\partial y \partial v}(s,t,\bar{y},\bar{v}) + \bar{\varphi}\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial v}(s,t,\bar{y},\bar{v}) \right) h z_h\, ds\, dt +$$

$$\int_\Sigma \left(\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}(s,t,\bar{y},\bar{v}) + \bar{\varphi}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(s,t,\bar{y},\bar{v}) \right) h^2\, ds\, dt +$$

$$\sum_{j=1}^{n_d+n_i} \bar{\lambda}_j \left\{ \int_0^T \left[\zeta_j'' \left(\int_\Omega g_j(x,t,\nabla_x \bar{y}) dx \right) \int_\Omega \frac{\partial g_j}{\partial \eta}(x,t,\nabla_x\bar{y}) \nabla_x z_h\, dx \int_\Omega \frac{\partial g_j}{\partial \eta}(x,t,\nabla_x\bar{y}) \nabla_x z_h\, dx \right] dt + \right.$$

$$\left. \int_0^T \left[\zeta_j' \left(\int_\Omega g_j(x,t,\nabla_x \bar{y}) dx \right) \int_\Omega \nabla_x^T z_h \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2}(x,t,\nabla_x\bar{y}) \nabla_x z_h dx \right] dt \right\}$$

Esto lo podemos hacer sumando a sumando. En primer lugar, destacar que $h_k \to h$ en $L^q(\Sigma)$ para todo $q < \infty$, lo cual implica que $z_{h_k} \to z_h$ en $L^\tau(W^{1,p}(\Omega))$.

Las "líneas" 1, 2, 3 y 5 se hacen exactamente igual que en el caso elíptico. Veamos que

$$\left| \int_0^T \left[\zeta_j'' \left(\int_\Omega g_j(x,t,\nabla_x \bar{y}) dx \right) \int_\Omega \frac{\partial g_j}{\partial \eta}(x,t,\nabla_x\bar{y}) \nabla_x z_{h_k}\, dx \int_\Omega \frac{\partial g_j}{\partial \eta}(x,t,\nabla_x\bar{y}) \nabla_x z_{h_k}\, dx \right] dt - \right.$$
$$\left. \int_0^T \left[\zeta_j'' \left(\int_\Omega g_j(x,t,\nabla_x \bar{y}) dx \right) \int_\Omega \frac{\partial g_j}{\partial \eta}(x,t,\nabla_x\bar{y}) \nabla_x z_h\, dx \int_\Omega \frac{\partial g_j}{\partial \eta}(x,t,\nabla_x\bar{y}) \nabla_x z_h\, dx \right] dt \right|$$

converge hacia cero. Para simplificar la escritura, supongamos sin perdida de generalidad que en P7 tenemos

$$\left| \frac{\partial g_j}{\partial \eta}(x,t,\eta) \right| \le C|\eta|^{p-1}.$$

Así, suponiendo que $g(x,t,0) = 0$, tendremos que

$$|g_j(x,t,\eta)| \le C|\eta|^p.$$

Omito ahora la dependencia de $(x,t,\nabla_x\bar{y})$ en g_j y su derivada por falta de espacio en la línea ya que ello no puede llevar a confusión. Tenemos pues, aplicando P8 y la desigualdad de Hölder,

$$\left| \int_0^T \left(\zeta_j'' \left(\int_\Omega g_j dx \right) \int_\Omega \frac{\partial g_j}{\partial \eta}(\nabla_x z_{h_k} + \nabla_x z_h)\, dx \int_\Omega \frac{\partial g_j}{\partial \eta}(\nabla_x z_{h_k} - \nabla_x z_h)\, dx \right) dt \right| \le$$

$$\int_0^T \left(\left| \int_\Omega g_j dx \right|^{\frac{\tau}{p}-2} \| \frac{\partial g_j}{\partial \eta} \|^2_{L^{p'}(\Omega)} \| \nabla_x z_{h_k} + \nabla_x z_h \|_{L^p(\Omega)} \| \nabla_x z_{h_k} - \nabla_x z_h \|_{L^p(\Omega)} \right) dt \leq$$

$$\int_0^T \left(\left(\int_\Omega |\nabla_x \bar{y}|^p \, dx \right)^{\frac{\tau-2p}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla_x \bar{y}|^{(p-1)p'} \, dx \right)^{\frac{2}{p'}} \| \nabla_x z_{h_k} + \nabla_x z_h \|_{L^p(\Omega)} \| \nabla_x z_{h_k} - \nabla_x z_h \|_{L^p(\Omega)} \right) dt \leq$$

$$\int_0^T \left(\left(\int_\Omega |\nabla_x \bar{y}|^p \, dx \right)^{\frac{\tau-2p}{p} \frac{\tau}{\tau-2}} \left(\int_\Omega |\nabla_x \bar{y}|^p \, dx \right)^{\frac{2p-2}{p} \frac{\tau}{\tau-2}} \right) dt \cdot$$

$$\| \nabla_x z_{h_k} + \nabla_x z_h \|_{L^\tau(L^p(\Omega))} \| \nabla_x z_{h_k} - \nabla_x z_h \|_{L^\tau(L^p(\Omega))} \leq$$

$$\int_0^T \left(\int_\Omega |\nabla_x \bar{y}|^p \, dx \right)^{\frac{\tau}{p}} dt \cdot \| \nabla_x z_{h_k} + \nabla_x z_h \|_{L^\tau(L^p(\Omega))} \| \nabla_x z_{h_k} - \nabla_x z_h \|_{L^\tau(L^p(\Omega))}$$

La regularidad de $\bar{y}$, z_{h_k} y z_h, junto con la convergencia de z_{h_k} arriba indicada, nos aseguran que los dos primeros factores están acotados y que el último converge hacia cero.

Se cumple por tanto la hipótesis **(A2)** y el resultado es por tanto consecuencia directa del Teorema 6.1.3. □

Nota 6.3.1 *Ahora no podemos, como en el caso elíptico, dar condiciones suficientes para que la derivada segunda de la Lagrangiana sea bilineal y continua en $L^2(\Sigma)$. El motivo de ello es que no podemos dar regularidad suficiente para el estado adjunto. Véanse a este respecto los comentarios dados a continuación para las condiciones suficientes.*

Condiciones suficientes

Demostrar un resultado análogo para el caso parabólico es todavía un problema abierto. La principal dificultad radica en la regularidad del estado adjunto. Más en concreto, la regularidad de la traza lateral del estado adjunto. Es clave demostrar que pertenece a $L^\infty(\Sigma)$ y depende continuamente de los datos. Este mismo problema es señalado por Raymond y Tröltzsch en [76]. Ellos muestran que si el estado adjunto viene dado por una ecuación con segundo miembro -la parte que corresponde al multiplicador- en un espacio de Lebesgue, entonces sí es posible demostrar en algún caso que el estado adjunto es acotado. Sin embargo, si el multiplicador es una medida, esto en general no es posible (cf. Teorema 4.3 y sección 7.3 de [76]). En nuestro caso el multiplicador es un elemento de $L^{\tau'}((W^{1,p})')$. No está en un espacio de Lebesgue y es una medida. No se puede demostrar que su traza está acotada.

Capítulo 7

Condiciones de segundo orden que involucran al Hamiltoniano

7.1 Introducción

Consideraremos en este capítulo los problemas $(\mathbf{P_e})$ y $(\mathbf{P_p})$, tomando el conjunto de controles admisibles convexo. En estos dos problemas, bajo hipótesis adecuadas, se satisface como hemos visto el Principio de Pontryagin. Es el objetivo de esta sección dar condiciones de segundo orden que involucran al Hamiltoniano del problema. Las condiciones necesarias surgen de manera natural y no son más que corolarios del resultado análogo para funciones reales de variable real. El quid de la cuestión es deducir condiciones suficientes. Con la ayuda de una condición sobre el Hamiltoniano, podemos deducir condiciones análogas a las que se dan en dimensión finita.

Las condiciones de segundo orden impuestas en el Teorema 6.2.6 difieren en un detalle importante de las condiciones de segundo orden para problemas con un número finito de restricciones sobre el control. Para problemas de tipo finito, es suficiente que la Lagrangiana sea definida positiva para todo $h \in C^0_{\bar{u}}$. Existen ejemplos (véase por ejemplo Dunn [49] y Casas y Tröltzsch [36]) que demuestran que esta condición en general no es suficiente para problemas con un número infinito de restricciones.

Bonnans y Zidani en [12] prueban que esta condición es suficiente siempre que la derivada segunda de la Lagrangiana sea una forma de Legendre. Recordemos que una forma cuadrática Q sobre un espacio de Hilbert X, se dice de Legendre si es débilmente semicontinua inferiormente, y para toda sucesión $\{x_k\} \subset X$ que converja débilmente

$x_k \rightharpoonup x$ y tal que $Q(x_k) \to Q(x)$, se tiene que $x_k \to x$ fuertemente. En este caso se puede seguir el mismo esquema de demostración que para dimensión finita.

7.2 Caso elíptico

Consideremos el problema $(\mathbf{P_e})$, donde tomamos

$$K_\Omega(x) = [u_a(x), u_b(x)].$$

De nuevo tomamos Ω de clase C^1; Γ su frontera; A un operador elíptico de coeficientes continuos de la forma (2.1.1) (pág. 23); $p > N$; $a_0 \in L^{p/2}(\Omega)$; $f : \Omega \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $g : \Gamma \to \mathbb{R}$, $g \in L^{p-1}(\Gamma)$; $L : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g_j : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ para $1 \le j \le n_i + n_e$.

Recuérdese que el Hamiltoniano del problema viene dado por

$$H(x, y, u, \varphi) = L(x, y, u) + \varphi f(x, y, u).$$

En este capítulo vamos a dar condiciones suficientes para que el multiplicador ν que acompaña a L sea 1, y por tanto no lo escribimos explícitamente en el Hamiltoniano.

Es interesante escribir algunas de las derivadas de H y observar su relación con las derivadas de la Lagrangiana.

$$H_u(x, y, u, \varphi) = \frac{\partial L}{\partial u}(x, y, u) + \varphi \frac{\partial f}{\partial u}(x, y, u),$$

$$H_{uu}(x, y, u, \varphi) = \frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(x, y, u) + \varphi \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x, y, u),$$

$$H_{uy}(x, y, u, \varphi) = \frac{\partial^2 L}{\partial u \partial y}(x, y, u) + \varphi \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial y}(x, y, u)$$

y

$$H_{yy}(x, y, u, \varphi) = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y, u) + \varphi \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, u).$$

Dados $\bar{u} \in U_{ad}$, $\bar{\lambda}_j$, $j = 1, \ldots, n_d + n_i$ y funciones $\bar{y} \in W^{1,p}(\Omega)$, $\bar{\varphi} \in W^{1,p'}(\Omega)$ que satisfacen (6.2.2), (6.2.3) y (6.2.4), si denotamos

$$\bar{H}_u(x) = H_u(x, \bar{y}(x), \bar{u}(x), \bar{\varphi}(x)),$$

$$\bar{H}_{uu}(x) = H_{uu}(x, \bar{y}(x), \bar{u}(x), \bar{\varphi}(x)),$$

$$\bar{H}_{yu}(x) = H_{yu}(x, \bar{y}(x), \bar{u}(x), \bar{\varphi}(x))$$

y

$$\bar{H}_{yy}(x) = H_{yy}(x, \bar{y}(x), \bar{u}(x), \bar{\varphi}(x)),$$

entonces

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(\bar{u}, \bar{\lambda})h = \int_\Omega \bar{H}_u(x)h(x)\,dx$$

y

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u^2}(\bar{u}, \bar{\lambda})h^2 = \int_\Omega \bar{H}_{uu}(x)h^2(x)\,dx + 2\int_\Omega \bar{H}_{yu}(x)h(x)z_h(x)\,dx + \int_\Omega \bar{H}_{yy}(x)z_h^2(x)\,dx +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n_i+n_d} \bar{\lambda}_j \int_\Omega \nabla^T z_h \frac{\partial^2 g_j}{\partial \eta^2} \nabla z_h\,dx.$$

donde z_h viene dado por (3.1.3) y $\mathcal{L}(u, \lambda)$ es la Lagrangiana del problema, definida en la Sección 6.2, pág. 126.

Condiciones necesarias de primer orden

Lo primero que vamos a hacer es escribir condiciones de primer orden en forma cualificada.

Teorema 7.2.1 *Sea $\bar{u}$ una solución local de* $(\mathbf{P_e})$ *y supongamos que se satisfacen las condiciones sobre f, L y g E1 (pág. 69), E4 (pág. 88) y E6 (pág. 90) y la hipótesis de regularidad* (6.2.1)*. Entonces existen números reales $\bar{\lambda}_j$, $j = 1, \ldots, n_d + n_i$ y funciones $\bar{y} \in W^{1,p}(\Omega)$, $\bar{\varphi} \in W^{1,p'}(\Omega)$ tales que satisfacen* (6.2.2), (6.2.3), (6.2.4) *y*

$$H_u(x, \bar{y}(x), \bar{u}(x), \bar{\varphi}(x))(k - \bar{u}(x)) \geq 0$$

para todo $u_a(x) \leq k \leq u_b(x)$ y c.t.p. $x \in \Omega$.

Demostración. Sea

$$H_\nu(x, y, u, \varphi) = \nu L(x, y, u) + \varphi f(x, y, u).$$

Obsérvese primero que se satisfacen las condiciones del Teorema 5.1.1, y por lo tanto se satisface el principio de Pontryagin.

$$H_{\bar{\nu}u}(x, \bar{y}(x), \bar{u}(x), \bar{\varphi}(x)) = \min_{k \in K_\Omega(x)} H_{\bar{\nu}}(x, \bar{y}(x), k, \bar{\varphi}(x)) \text{ para c.t.p. } x \in \Omega.$$

Debido a las condiciones de diferenciabilidad sobre L y f se tiene que

$$\frac{\partial H_{\bar{\nu}u}}{\partial u}(x, \bar{y}(x), \bar{u}(x), \bar{\varphi}(x))(k - \bar{u}(x)) \geq 0 \text{ para todo } u_a(x) \leq k \leq u_b(x) \text{ y c.t.p. } x \in \Omega.$$

Denotemos

$$\mathcal{L}_\nu(u, \lambda) = \nu J(u) + \sum_{j=1}^{n_i+n_d} \lambda_j G_j(u).$$

Tenemos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\bar{\nu}}}{\partial u}(\bar{u}, \bar{\lambda})(u - \bar{u}) = \int_\Omega \frac{\partial H_{\bar{\nu}}}{\partial u}(x, \bar{y}(x), \bar{u}(x), \bar{\varphi}(x))(u - \bar{u}(x))dx \geq 0 \text{ para todo } u \in U_{ad}.$$

Pero como se vio en el Teorema 6.1.2, la hipótesis de regularidad implica que $\bar{\nu}$ tiene que ser forzosamente distinto de cero, ya que de lo contrario llegaríamos a una contradicción. Reescalando podemos tomar $\bar{\nu} = 1$. La prueba está completa observando que $H(x, y, u, \varphi) = H_1(x, y, u, \varphi)$. $\square$

Condiciones necesarias de segundo orden

Para establecer condiciones necesarias de segundo orden, no es necesario establecer hipótesis extra sobre la regularidad de algunas de las derivadas segundas de f y L, como hicimos en (6.2.9) y (6.2.10).

Recordemos que Ω^0, definido como en el capítulo anterior (pág 129), es

$$\Omega^0 = \{x \in \Omega : |d(x)| > 0\},$$

donde

$$d(x) = \frac{\partial L}{\partial u}(x, \bar{y}(x), \bar{u}(x)) + \bar{\varphi}(x)\frac{\partial f}{\partial u}(x, \bar{y}(x), \bar{u}(x)).$$

Nótese que $d(x) = \bar{H}_u(x)$.

Teorema 7.2.2 *Sea $\bar{u}$ de nuevo una solución local para el problema* ($\mathbf{P_e}$) *(pág. 16). Supongamos que se satisfacen las hipótesis sobre f, L y g_j establecidas en E1 (pág. 69), E2 (pág. 70), E4 (pág. 88), E5 (pág. 89), E6 (pág. 90) y E7 (pág. 90) y la hipótesis de regularidad* (6.2.1)*. Entonces*

$$H_{uu}(x, \bar{y}(x), \bar{u}(x), \bar{\varphi}(x)) \geq 0 \text{ para c.t.p. } x \in \Omega \setminus \Omega^0. \tag{7.2.1}$$

Demostración. De nuevo se satisface el principio del mínimo de Pontryagin, y como H es C^2 respecto de u, la condición necesaria de segundo orden para problemas de una variable se escribe en este caso

$$H_{uu}(x, \bar{y}(x), \bar{u}(x), \bar{\varphi}(x)) \geq 0 \text{ para c.t.p. } x \in \Omega \setminus \Omega^0.$$

O sea, donde $H_u(x, \bar{y}(x), \bar{u}(x), \bar{\varphi}(x)) = 0$, la derivada segunda es mayor o igual que 0. La condición (7.2.1) es información complementaria a (6.2.11). $\square$

Un resultado análogo a estos para problemas de control gobernados por ecuaciones diferenciales ordinarias se puede encontrar en Warga [91].

Condiciones suficientes de segundo orden

En el siguiente teorema se da una condición adicional sobre el Hamiltoniano para que la condición de positividad de la Lagrangiana análoga a la condición en dimensión finita sea suficiente. Recordemos que

$$C^0_{\bar{u},L^2(\Omega)} = \{h \in L^2(\Omega) \ \text{ que cumplen } \ (6.2.8) \ \text{ y } \ h(x) = 0 \ \text{ c.t.p. } \ x \in \Omega^0\}$$

y

$$\Omega^\tau = \{x \in \Omega : |d(x)| > \tau\}.$$

Para establecer el siguiente resultado, hemos de suponer también que se satisfacen las hipótesis extra sobre las derivadas de f, L y g_j establecidas en la página 134, hipótesis **E8**.

Teorema 7.2.3 *Sea $\bar{u}$ un control admisible para el problema* ($\mathbf{P_e}$) *que satisface la hipótesis de regularidad* (6.2.1) *y tal que existen números reales $\bar{\lambda}_j$, $j = 1, \ldots, n_d + n_i$ y funciones $\bar{y} \in W^{1,p}(\Omega)$, $\bar{\varphi} \in W^{1,p'}(\Omega)$ que satisfacen* (6.2.2), (6.2.3), (6.2.4) *y* (6.2.5). *Supongamos también que existen $\omega > 0$, $\tau > 0$ tales que*

$$\begin{cases} H_{uu}(x, \bar{y}(x), \bar{u}(x), \bar{\varphi}(x)) \geq \omega \ \textit{para c.t.p. } x \in \Omega \setminus \Omega^\tau \\ \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u^2}(\bar{u}, \bar{\lambda})h^2 > 0 \ \textit{para todo } h \in C^0_{\bar{u},L^2(\Omega)}. \end{cases} \tag{7.2.2}$$

Entonces existen $\varepsilon > 0$ y $\alpha > 0$ tales que $J(\bar{u}) + \alpha\|u - \bar{u}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq J(u)$ para todo control admisible u con $\|u - \bar{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon$.

Demostración. Supongamos que el resultado es falso. Entonces existe una sucesión $\{u_k\}$ de controles admisibles con $u_k \to u$ en $L^\infty(\Omega)$ tal que

$$J(\bar{u}) + \frac{1}{k}\|u_k - \bar{u}\|^2_{L^2(\Omega)} > J(u_k). \tag{7.2.3}$$

Como u_k es admisible, se tiene que

$$G_j(u_k) = 0 \text{ si } 1 \leq j \leq n_i$$

y

$$G_j(u_k) \leq 0 \text{ si } n_i + 1 \leq j \leq n_i + n_d.$$

Como $\bar{\lambda}_j \geq 0$ si $n_i + 1 \leq j \leq n_i + n_d$, se tiene que

$$\bar{\lambda}_j G_j(u_k) \leq 0 \text{ para } 1 \leq j \leq n_i + n_d.$$

Por otro lado $\bar{\lambda}_j G_j(\bar{u}) = 0$. Luego

$$\mathcal{L}(\bar{u}, \bar{\lambda}) + \frac{1}{k}\|u_k - \bar{u}\|^2_{L^2(\Omega)} > \mathcal{L}(u_k, \bar{\lambda}). \tag{7.2.4}$$

Sea $\delta_k = \|u_k - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}$ y

$$h_k = \frac{u_k - \bar{u}}{\delta_k}.$$

La norma $\|h_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$, luego existe una subsucesión de $\{h_k\}$, que denotaremos igual y $h \in L^2(\Omega)$ tal que $h_k \rightharpoonup h$ débilmente en $L^2(\Omega)$. Además h satisface la condición de signo en (6.2.8), ya que los h_k la cumplen, y el conjunto de funciones que cumplen la condición de signo en (6.2.8) es convexo y cerrado, luego débilmente cerrado. Además

$$\mathcal{L}(u_k, \bar{\lambda}) = \mathcal{L}(\bar{u}, \bar{\lambda}) + \delta_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(v_k, \bar{\lambda}) h_k,$$

donde v_k es un punto intermedio entre u y u_k. Al ser $\delta_k > 0$ y usando (7.2.4), se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(v_k, \bar{\lambda}) h_k < \frac{1}{k}\|u_k - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Esta expresión explícitamente es

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial L}{\partial u}(x, y_k, v_k) + \varphi_k \frac{\partial f}{\partial u}(x, y_k, v_k) \right) h_k < \frac{1}{k}\|u_k - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}, \tag{7.2.5}$$

donde y_k y φ_k son respectivamente el estado y el estado adjunto asociados a v_k. Los teoremas de regularidad, las condiciones impuestas sobre g_j y la convergencia uniforme

$v_k \to \bar{u}$ implican la convergencia uniforme $y_k \to \bar{y}$ y la convergencia en $L^2(\Omega)$, $\varphi_k \to \bar{\varphi}$. Además las condiciones impuestas sobre L implican la convergencia en $L^2(\Omega)$ de su derivada respecto a u. Luego la convergencia débil $h_k \rightharpoonup h$ en $L^2(\Omega)$ es suficiente para pasar al límite en (7.2.5) y obtener

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(\bar{u}, \bar{\lambda})h \leq 0. \tag{7.2.6}$$

Pero como hemos supuesto que $\bar{u}$ satisface (6.2.5), y $h_k = (u_k - \bar{u})/\delta_k$, con $\delta_k > 0$ y $u_k \in U_{ad}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(\bar{u}, \bar{\lambda})h_k \geq 0.$$

Pasando al límite se obtiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(\bar{u}, \bar{\lambda})h \geq 0. \tag{7.2.7}$$

Luego, de (7.2.6) y (7.2.7) se tiene que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(\bar{u}, \bar{\lambda})h = 0. \tag{7.2.8}$$

Como h satisface las condiciones de signo, ésto sólo es posible si $h \in C^0_{\bar{u},L^2(\Omega)}$. En efecto. Veamos que

$$G'_j(\bar{u})h = 0 \text{ si } \begin{cases} j \leq n_i \\ \text{ó} \\ j > n_i,\ G_j(\bar{u}) = 0,\ \bar{\lambda}_j > 0, \end{cases}$$

y

$$G'_j(\bar{u})h \leq 0 \text{ si } j > n_i,\ G_j(\bar{u}) = 0,\ \bar{\lambda}_j = 0.$$

Si $j \leq n_i$, entonces $G_j(u_k) = G_j(\bar{u} + \delta_k h_k) = 0$ y $G_j(\bar{u}) = 0$. Luego

$$0 = \frac{G_j(\bar{u} + \delta_k h_k) - G_j(\bar{u})}{\delta_k},$$

y pasando al límite se obtiene

$$G'_j(\bar{u})h = 0.$$

Si $j > n_i$ y $G_j(\bar{u}) = 0$, se tiene que $G_j(u_k) = G_j(\bar{u} + \delta_k h_k) \leq 0$. Luego

$$0 \geq \frac{G_j(\bar{u} + \delta_k h_k) - G_j(\bar{u})}{\delta_k},$$

y pasando al límite se obtiene

$$G'_j(\bar{u})h \leq 0.$$

Tan sólo nos queda ver que pasa cuando $\bar{\lambda}_j > 0$. Teniendo en cuenta (7.2.3) y que $\delta_k = \|u_k - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}$, llegamos a

$$\frac{\delta_k}{k} \geq \frac{J(u_k) - J(\bar{u})}{\delta_k}.$$

Como $\delta_k \to 0$, pasando al límite se obtiene

$$0 \geq J'(\bar{u})h.$$

Utilizando ahora (7.2.8) y la expresión para la derivada de la Lagrangiana, tenemos que

$$0 = J'(\bar{u})h + \sum_{j=1}^{n_i+n_d} \bar{\lambda}_j G_j'(\bar{u})h.$$

Teniendo en cuenta que si $j \leq n_i$ acabamos de demostrar que $G_j'(\bar{u})h = 0$, y que si $G_j(\bar{u}) < 0$, entonces $\bar{\lambda}_j = 0$, si denotamos

$$I_1 = \{j : n_i < j < n_i + n_d;\ G_j(\bar{u}) = 0;\ \bar{\lambda}_j > 0\},$$

tenemos que

$$0 = J'(\bar{u})h + \sum_{j \in I_1} \bar{\lambda}_j G_j'(\bar{u})h.$$

Así que

$$0 \leq -J'(\bar{u})h = \sum_{j \in I_1} \bar{\lambda}_j G_j'(\bar{u})h \leq 0.$$

Con lo cual si $j \in I_1$ necesariamente $G_j'(\bar{u})h = 0$. Para acabar de comprobar que $h \in C^0_{\bar{u},L^2(\Omega)}$ hay que demostrar que $h(x) = 0$ en c.t.p. Ω^0. Como h satisface la condición de signo, en c.t.p. de Ω^0 se tiene que $d(x)h(x) \geq 0$. Si existiera un conjunto $A \subset \Omega^0$, con $|A| > 0$, tal que $|h(x)| > 0$ en A, entonces

$$\int_\Omega d(x)h(x)\,dx > 0,$$

pero

$$\int_\Omega d(x)h(x)\,dx = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(\bar{u}, \bar{\lambda})h = 0.$$

Por lo tanto $h(x) = 0$ en c.t.p. Ω^0 y $h \in C^0_{\bar{u},L^2(\Omega)}$. Luego, por hipótesis del teorema, se tiene que

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u^2}(\bar{u}, \bar{\lambda})h^2 > 0 \text{ si } h \neq 0. \tag{7.2.9}$$

Por otro lado

$$\mathcal{L}(u_k,\bar{\lambda})=\mathcal{L}(\bar{u},\bar{\lambda})+\delta_k\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}(\bar{u},\bar{\lambda})h_k+\frac{\delta_k^2}{2}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial u^2}(w_k,\bar{\lambda})h_k^2, \tag{7.2.10}$$

donde w_k es un punto intermedio entre u_k y $\bar{u}$.

Ahora, teniendo en cuenta las consideraciones hechas antes sobre la relación entre las derivadas de la Lagrangiana y las del Hamiltoniano, podemos escribir

$$\delta_k\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}(\bar{u},\bar{\lambda})h_k+\frac{\delta_k^2}{2}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial u^2}(\bar{u},\bar{\lambda})h_k^2=\delta_k\int_\Omega \bar{H}_u(x)h_k(x)\,dx+\frac{\delta_k^2}{2}\int_\Omega \bar{H}_{uu}(x)h_k^2(x)\,dx+$$

$$+\frac{\delta_k^2}{2}\left[\int_\Omega \bar{H}_{yy}(x)z_{h_k}^2(x)\,dx+2\int_\Omega \bar{H}_{yu}(x)h_k(x)z_{h_k}(x)\,dx+\sum_{j=1}^{n_i+n_d}\bar{\lambda}_j\int_\Omega \nabla z_{h_k}\frac{\partial^2 g_j}{\partial\eta^2}\nabla z_{h_k}\,dx\right].$$

Teniendo en cuenta que $\bar{H}_u(x)=0$ en $\Omega\setminus\Omega^0$

$$A=\delta_k\int_\Omega \bar{H}_u(x)h_k(x)\,dx+\frac{\delta_k^2}{2}\int_\Omega \bar{H}_{uu}(x)h_k^2(x)\,dx=\delta_k\int_{\Omega^0\setminus\Omega^\tau}\bar{H}_u(x)h_k(x)\,dx+$$

$$+\delta_k\int_{\Omega^\tau}\bar{H}_u(x)h_k(x)\,dx+\frac{\delta_k^2}{2}\int_{\Omega^\tau}\bar{H}_{uu}(x)h_k^2(x)\,dx+\frac{\delta_k^2}{2}\int_{\Omega\setminus\Omega^\tau}\bar{H}_{uu}(x)h_k^2(x)\,dx.$$

Usando ahora que $\bar{H}_u(x)h_k(x)\geq 0$ para c.t.p. $x\in\Omega$, que en Ω^τ se tiene $\bar{H}_u(x)\geq\tau$,

$$A\geq\delta_k\tau\int_{\Omega^\tau}|h_k(x)|\,dx+\frac{\delta_k^2}{2}\int_{\Omega^\tau}\bar{H}_{uu}(x)h_k^2(x)\,dx+\frac{\delta_k^2}{2}\int_{\Omega\setminus\Omega^\tau}H_{uu}(x)h_k^2(x)\,dx.$$

Como $\|\delta_k h_k\|_{L^\infty(\Omega)}=\|u_k-\bar{u}\|_{L^\infty(\Omega)}<\varepsilon$, entonces para c.t.p. $x\in\Omega$, $\delta_k|h_k(x)|\leq\varepsilon$. Por lo tanto

$$\frac{\delta_k^2 h_k^2(x)}{\varepsilon}\leq\delta_k|h_k(x)|.$$

Luego

$$A\geq\frac{\delta_k^2}{2}\int_{\Omega^\tau}\left(\frac{2\tau}{\varepsilon}+\bar{H}_{uu}(x)\right)h_k^2(x)\,dx+\frac{\delta_k^2}{2}\int_{\Omega\setminus\Omega^\tau}\bar{H}_{uu}(x)h_k^2(x)\,dx.$$

Ahora, de (7.2.4), (7.2.10) y teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, tenemos que

$$\frac{\delta_k^2}{k}>\delta_k\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}(\bar{u},\bar{\lambda})h_k+\frac{\delta_k^2}{2}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial u^2}(w_k,\bar{\lambda})h_k^2=\delta_k\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}(\bar{u},\bar{\lambda})h_k+\frac{\delta_k^2}{2}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial u^2}(\bar{u},\bar{\lambda})h_k^2+$$

$$+\frac{\delta_k^2}{k}\left[\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial u^2}(w_k,\bar{\lambda})h_k^2-\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial u^2}(\bar{u},\bar{\lambda})h_k^2\right],$$

$$\frac{\delta_k^2}{2} > \frac{\delta_k^2}{2}\int_{\Omega^\tau}\left(\frac{2\tau}{\varepsilon} + \bar{H}_{uu}(x)\right) h_k^2(x)\,dx + \frac{\delta_k^2}{2}\int_{\Omega\setminus\Omega^\tau} \bar{H}_{uu}(x)h_k^2(x)dx +$$

$$+\frac{\delta_k^2}{2}\left[\int_\Omega \bar{H}_{yy}(x)z_{h_k}^2(x)\,dx + 2\int_\Omega \bar{H}_{yu}(x)h_k(x)z_{h_k}(x)\,dx + \sum_{j=1}^{n_i+n_d}\bar{\lambda}_j\int_\Omega \nabla^T z_{h_k}\frac{\partial^2 g_j}{\partial\eta^2}\nabla z_{h_k}\,dx\right]$$

$$+\frac{\delta_k^2}{2}\left[\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial u^2}(w_k,\bar{\lambda})h_k^2 - \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial u^2}(\bar{u},\bar{\lambda})h_k^2\right]. \qquad (7.2.11)$$

Dividimos ahora por $\delta_k^2/2$. Teniendo en cuenta las hipótesis hechas sobre las derivadas segundas de las funciones, existe una constante $C_H > 0$ tal que $\bar{H}_{uu}(x) \geq -C_H$ para c.t.p. $x \in \Omega$. Así, tomando ε suficientemente pequeño, tenemos que

$$\frac{2\tau}{\varepsilon} + \bar{H}_{uu}(x) \geq \frac{2\tau}{\varepsilon} - C_H > 0 \text{ c.t.p. } x \in \Omega.$$

Así que

$$\liminf_{k\to\infty}\int_{\Omega^\tau}\left(\frac{2\tau}{\varepsilon} + \bar{H}_{uu}(x)\right) h_k^2 dx \geq \int_{\Omega^\tau}\left(\frac{2\tau}{\varepsilon} + \bar{H}_{uu}(x)\right) h^2 dx.$$

Por otro lado, en $\Omega \setminus \Omega^\tau$, $\bar{H}_{uu}(x) > \omega > 0$, luego

$$\liminf_{k\to\infty}\int_{\Omega\setminus\Omega^\tau} \bar{H}_{uu}(x)h_k^2 dx \geq \int_{\Omega\setminus\Omega^\tau} \bar{H}_{uu}(x)h^2 dx.$$

Teniendo en cuenta que se verifica la hipótesis **(A3)**, tomamos el límite inferior en (7.2.11) y obtenemos

$$0 \geq \int_{\Omega^\tau}\left(\frac{2\tau}{\varepsilon} + \bar{H}_{uu}(x)\right) h^2(x)\,dx + \int_{\Omega\setminus\Omega^\tau} \bar{H}_{uu}(x)h^2 dx +$$

$$+\int_\Omega \bar{H}_{yy}(x)z_h^2(x)\,dx + 2\int_\Omega \bar{H}_{yu}(x)h(x)z_h(x)\,dx + \sum_{j=1}^{n_i+n_d}\bar{\lambda}_j\int_\Omega \nabla^T z_h\frac{\partial^2 g_j}{\partial\eta^2}\nabla z_h\,dx.$$

Por lo tanto

$$0 \geq \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial u^2}(\bar{u},\bar{\lambda})h^2$$

y de (7.2.9) y esto, obtenemos que $h = 0$.

Luego en la expresión donde tomamos límite inferior, en realidad podemos tomar el límite. Como todos los sumandos convergen a cero, salvo a lo sumo

$$\int_{\Omega^\tau}\left(\frac{2\tau}{\varepsilon} + \bar{H}_{uu}(x)\right) h_k^2(x)\,dx + \int_{\Omega\setminus\Omega^\tau} \bar{H}_{uu}(x)h_k^2(x)dx,$$

se tiene que este a su vez tiende hacia cero. Pero

$$\min\left\{\omega, \frac{2\tau}{\varepsilon} - C_H\right\} \int_\Omega h_k^2(x)dx \leq \int_{\Omega^\tau} \left(\frac{2\tau}{\varepsilon} + \bar{H}_{uu}(x)\right) h_k^2(x)\, dx + \int_{\Omega\setminus\Omega^\tau} \bar{H}_{uu}(x) h_k^2(x) dx.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{k\to\infty} \|h_k\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Pero $\|h_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Y así hemos llegado a una contradicción. Luego el teorema es cierto. $\square$

Nota 7.2.1 *Si imponemos la condición* (7.2.2) *para c.t.p.* $x \in \Omega$, *obtendremos durante la prueba que la derivada segunda de la función Lagrangiana es una forma cuadrática de Legendre para la sucesión* $\{h_k\}$.

7.3 Caso parabólico

Sean Ω, Γ, T, Q, Σ y A, p, τ, k_1, $\tilde{k}_1$, σ_1, $\tilde{\sigma}_1$ como en la Sección 2.2, con la frontera Γ de clase C^1 y los coeficientes del operador A de clase $C([0,T]; C(\bar{\Omega}))$. Sean f, g, y_0 funciones, $f : Q \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \Sigma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $F : Q \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $G : \Sigma \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $y_0 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $y_0 \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$. Sean k_2, $\tilde{k}_2$, σ_2, $\tilde{\sigma}_2$ y ν como en la sección 2.2.

Consideremos el problema $(\mathbf{P_p})$ de la página 16. Supondremos que el conjunto de controles admisibles es de la forma

$$V_{ad} = \{v \in L^\infty(\Sigma) :\ v_a(s,t) \leq v(s,t) \leq v_b(s,t) \text{ c.t.p. } (s,t) \in \Sigma\},$$

donde v_a, $v_b \in L^\infty(\Sigma)$. Esta elección corresponde al caso de tomar

$$K_\Sigma(s,t) = [v_a(s,t), v_b(s,t)].$$

Al igual que en la sección 4.1.2, consideraremos

$$C = \left\{\vec{f} \in L^\tau(L^p)^N : \int_0^T \zeta_j \left(\int_\Omega g_j(x,t,\vec{f})dx\right) dt = 0 \text{ si } 1 \leq j \leq n_i, \right.$$
$$\left. \int_0^T \zeta_j \left(\int_\Omega g_j(x,t,\vec{f})dx\right) dt \leq 0 \text{ si } n_i + 1 \leq j \leq n_i + n_d \right\},$$

donde $\zeta_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g_j : Q \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ son funciones.

El Hamiltoniano del problema viene dado por

$$H(s,t,y,v,\varphi) = G(s,t,y,v) + \varphi g(s,t,y,v).$$

Lo escribimos así y no como en la página 108 por que vamos a dar condiciones suficientes para que $\bar{\nu} = 1$. Ahora

$$H_v(s,t,y,v,\varphi) = \frac{\partial G}{\partial v}(s,t,y,v) + \varphi \frac{\partial g}{\partial v}(s,t,y,v).$$

Dados $v \in V_{ad}$, números reales $\bar{\lambda}_j$, $j = 1,\ldots,n_d + n_i$ y funciones $\bar{y} \in L^\tau(W^{1,p}(\Omega))$ y $\bar{\varphi} \in L^{\tau'}(W^{1,p'}(\Omega))$ que cumplen (6.3.2)–(6.3.4), entonces

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(\bar{v},\bar{\lambda})h = \int_\Sigma H_v(s,t,\bar{y}(s,t),\bar{v}(s,t),\bar{\varphi}(s,t))h(s,t)\,ds\,dt,$$

donde $\mathcal{L}(v,\lambda)$ es la Lagrangiana del problema definida en la sección 6.3, pág. 146.

Condiciones necesarias de primer orden

Lo primero que vamos a hacer es escribir condiciones de primer orden en forma cualificada.

Teorema 7.3.1 *Supongamos que f y g satisfacen las hipótesis P1 y P2, que F, G y L satisfacen P4 y P5 y que las ζ_j y las g_j satisfacen P7. Supongamos además que se satisface* (6.3.1). *Entonces existen números reales $\bar{\lambda}_j$, $j = 1,\ldots,n_d + n_i$ y funciones $\bar{y} \in L^\tau(W^{1,p}(\Omega))$ y $\bar{\varphi} \in L^{\tau'}(W^{1,p'}(\Omega)) + L^2(H^1)$ tales que satisfacen* (6.3.2)–(6.3.4) *y*

$$H_v(s,t,\bar{y}(s,t),\bar{u}(s,t),\bar{\varphi}(s,t))(k - \bar{v}(s,t)) \geq 0$$

para todo $v_a(x) \leq k \leq v_b(x)$ y c.t.p. $(s,t) \in \Sigma$.

Demostración. La prueba es completamente análoga a la del caso elíptico. Si definimos

$$H_\Sigma(s,t,y,v,\varphi,\nu) = \nu G(s,t,y,v) + \varphi g(s,t,y,v),$$

en virtud del principio de Pontryagin, demostrado en el Teorema 5.2.1,

$$H_\Sigma(s,t,\bar{y}(s,t),\bar{v}(s,t),\bar{\varphi}(s,t),\bar{\nu}) = \min_{v \in K_\Sigma(s,t)} H_\Sigma(s,t,\bar{y}(s,t),v,\bar{\varphi}(s,t),\bar{\nu})$$

Debido a las condiciones de diferenciabilidad impuestas ahora, se tiene que

$$H_{\Sigma v}(s,t,\bar{y}(s,t),\bar{u}(s,t),\bar{\varphi}(s,t),\bar{\nu})(k - \bar{v}(s,t)) \geq 0$$

para todo $v_a(x) \leq k \leq v_b(x)$ y c.t.p. $(s,t) \in \Sigma$. Si denotamos

$$\tilde{\mathcal{L}}(v,\lambda,\nu) = \nu J(v) + \sum_{j=1}^{n_i+n_d} \lambda_j G_j(v),$$

entonces

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(\bar{v},\bar{\lambda},\bar{\nu})(v-\bar{v}) = \int_\Sigma H_{\Sigma v}(s,t,\bar{y}(s,t),\bar{u}(s,t),\bar{\varphi}(s,t),\bar{n}u)(v-\bar{v}(s,t)) \geq 0$$

para todo $v \in V_{ad}$. Pero como se vio en el Teorema 6.1.2, la hipótesis de regularidad implica que $\bar{\nu}$ tiene que ser forzosamente distinto de cero, ya que de lo contrario llegaríamos a una contradicción. Reescalando podemos tomar $\bar{\nu} = 1$. La prueba está completa observando que $H(s,t,y,v,\varphi) = H_\Sigma(s,t,y,v,\varphi,1)$. □

Condiciones necesarias de segundo orden

Para establecer condiciones necesarias de segundo orden, no es necesario establecer hipótesis extra sobre la regularidad de las derivadas segundas de G y g como hicimos en (6.3.6) y (6.3.7).

Recordemos que

$$\Sigma^0 = \{(s,t) \in \Sigma : |d(s,t)| > 0\},$$

donde

$$d(s,t) = \frac{\partial G}{\partial v}(s,t,\bar{y}(s,t),\bar{v}(s,t)) + \bar{\varphi}(s,t)\frac{\partial g}{\partial v}(s,t,\bar{y}(s,t),\bar{v}(s,t)),$$

Nótese que $d(s,t) = H_v(s,t,\bar{y}(s,t),\bar{u}(s,t),\bar{\varphi}(s,t))$.

Teorema 7.3.2 *Supongamos que $\bar{v}$ es una solución local para el problema $(\mathbf{P_p})$ y que se satisfacen P1–P8. Entonces*

$$H_{vv}(s,t,\bar{y}(s,t),\bar{v}(s,t),\bar{\varphi}(s,t)) \geq 0 \textit{ para c.t.p. } (s,t) \in \Sigma \setminus \Sigma^0.$$

Demostración. De nuevo se satisface el Principio de Pontryagin, y como H es C^2 respecto de v, la condición necesaria de segundo orden para problemas de una variable se escribe en este caso como

$$H_{vv}(s,t,\bar{y}(s,t),\bar{v}(s,t),\bar{\varphi}(s,t)) \geq 0 \text{ para c.t.p. } (s,t) \in \Sigma \setminus \Sigma^0.$$

Es decir, donde la derivada primera se anula, la derivada segunda es mayor o igual que cero. □

Condiciones suficientes

Se nos presenta el mismo problema que en la página 153. No podemos garantizar que el estado adjunto tenga la traza acotada.

Parte III

Análisis numérico

La última parte de esta memoria está dedicada al estudio del análisis numérico de un problema de control. El Capítulo 8 está dedicado a estudiar la convergencia uniforme para el método de elementos finitos aplicado a la resolución de ecuaciones semilineales. En el Capítulo 9 se estudia un problema con restricciones puntuales sobre el estado. Este problema difiere del problema estudiado en el Capítulo 4 en que ahora tenemos un número infinito de restricciones sobre el estado.

Capítulo 8

Convergencia uniforme del M.E.F. para ecuaciones semilineales

Este capítulo esta dedicado al estudio de la aproximación de la solución de una ecuación semilineal mediante el método de elementos finitos. En concreto, se estudia la convergencia uniforme de las aproximaciones discretas hacia la solución de la ecuación. Un estudio similar es llevado a cabo en Ciarlet [43] para ecuaciones lineales. Ciarlet estudia un problema tipo Dirichlet y hace uso de triangulaciones de tipo no negativo. Nosotros estudiamos también un problema de Neumann y, en algún caso, no hacemos uso de las triangulaciones de tipo no negativo.

La primera sección describe los elementos comunes a los problemas de Dirichlet y Neumann, así como la discretización. En la segunda sección damos resultados para el problema de Dirichlet y en la tercera para el problema de Neumann.

8.1 Discretización

Sea Ω un subconjunto convexo de R^N, $N = 2$ ó $N = 3$, Γ su frontera y A un operador de la forma

$$Ay = -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_{x_j} \left[a_{ij} \partial_{x_i} y \right],$$

donde $a_{i,j} \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$ y tal que existen $m, M > 0$ tales que

$$m\|\xi\|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq M\|\xi\|^2 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N \text{ y } \forall x \in \Omega.$$

Sea $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de Carathéodory, monótona decreciente en la segunda variable, con $f(\cdot, 0) \in L^{p/2}(\Omega)$ y cumpliendo la siguiente condición de Lipschitz local: Para todo $M > 0$ existe $\phi_M \in L^2(\Omega)$ tal que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq |\phi_M(x)||y_1 - y_2| \text{ para c.t.p. } x \in \Omega \tag{8.1.1}$$

si $|y_1|$, $|y_2| < M$.

Para hacer la aproximación numérica tomamos una familia de triangulaciones sobre $\bar{\Omega}$, $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$. A cada elemento $T \in \mathcal{T}_h$ asociamos dos parámetros: $\rho(T)$ y $\sigma(T)$, donde $\rho(T)$ denota el diámetro del conjunto T y $\sigma(T)$ es el diámetro de la mayor bola contenida en T. Se supone que $h = \max_{T\in\mathcal{T}_h} \rho(T)$ tiende hacia cero. Haremos las siguientes hipótesis de regularidad sobre la triangulación:

- Hipótesis de regularidad: existe $\sigma > 0$ tal que $\frac{\rho(T)}{\sigma(T)} \leq \sigma \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$ y $h > 0$.

- Hipótesis inversa: existe $\rho > 0$ tal que $\frac{h}{\rho(T)} \leq \rho \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$ y $h > 0$.

- Sea $\bar{\Omega}_h = \cup_{T\in\mathcal{T}_h} T$, Ω_h su interior y Γ_h su frontera. Entonces supondremos que los vértices de $\mathcal{T}_h$ localizados sobre la frontera de Γ_h son puntos de Γ.

Consideramos los espacios

$$V_h = \left\{ y_h \in C(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega) : \ y_{h|_T} \in P_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \ y_h = 0 \text{ en } \Omega \setminus \Omega_h \right\}$$

y

$$W_h = \left\{ y_h \in C(\bar{\Omega}_h) : \ y_{h|_T} \in P_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \right\},$$

donde $P_1(T)$ es el espacio de los polinomios de grado 1 sobre T. V_h es un subespacio vectorial de $W_0^{1,p}(\Omega)$ y W_h es un subespacio de $W^{1,p}(\Omega)$.

Nos auxiliaremos del operador de interpolación de Lagrange

$$\Pi_h : \ C(\bar{\Omega}) \ \longrightarrow \ W_h$$

siendo $\Pi_h z$ el único elemento de W_h tal que $\Pi_h z(x_i) = z(x_i)$ para todo x_i nodo de la triangulación.

8.2 Caso Dirichlet

Introducimos también $f_2 \in W^{-1,p}(\Omega)$. Queremos estudiar la aproximación uniforme por el método de elementos finitos de la solución de la ecuación

$$\left\{\begin{array}{rcll} Ay & = & f(\cdot, y) + f_2 & \text{en } \Omega \\ y & = & 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{array}\right. \tag{8.2.1}$$

Para cada h, definimos $y_h \in V_h$ como el único elemento que cumple

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{i,j}(x)\partial_{x_i} y_h(x)\partial_{x_j} z_h(x)dx = \int_\Omega f(x, y_h(x))z_h dx + \langle f_2, z_h\rangle_{W^{-1,p}(\Omega)\times W_0^{1,p}(\Omega)} \quad \forall z_h \in V_h. \tag{8.2.2}$$

Lema 8.2.1 *La ecuación* (8.2.2) *tiene una única solución.*

Demostración. Sea N_h la dimensión de V_h. Para demostrar el lema escribiremos la ecuación de la forma

$$A_h y = F(y) + b$$

donde A_h es una matriz $N_h \times N_h$ definida positiva, $F : \mathbb{R}^{N_h} \to \mathbb{R}^{N_h}$ es localmente Lipschitz, de constante digamos L, y cumple que

$$\langle F(y_1) - F(y_2), y_1 - y_2\rangle \le 0 \text{ para todo } y_1,\, y_2 \in \mathbb{R}^{N_h}$$

y b es un vector de $\mathbb{R}^{N_h}$. Sin pérdida de generalidad supondremos que $F(0) = 0$. Truncamos F mediante

$$F_M(y) = \left\{\begin{array}{cl} F(y) & \text{si } \|F(y)\| \le M \\ M\dfrac{F(y)}{\|F(y)\|} & \text{si } \|F(y)\| \ge M. \end{array}\right.$$

Tenemos que la aplicación que a cada $z \in \mathbb{R}^{N_h}$ le hace corresponder y_z tal que $A_h(y_z) = F_M(z) + b$ cumple que $\|y_z\| \le (M + \|b\|)/\alpha$, donde α es el menor autovalor de A_h. Luego aplicando el teorema del punto fijo de Brauer, tenemos que existe y_M que resuelve $A_h y_M = F_M(y_M) + b$. Además

$$\alpha\|y_M\|^2 \le y_M^T A_h y_M = (F_M(y_M), y_M) + (b, y_M) \le \|b\|\|y_M\|,$$

con lo que

$$\|y_M\| \le \frac{\|b\|}{\alpha}.$$

Por tanto y_M está acotada independientemente de M. Como F es Lipschitz sobre la bola $\bar{B}(0, \frac{\|b\|}{\alpha})$,

$$\|F(y_M)\| \leq \frac{L\|b\|}{\alpha} \text{ para todo } M > 0$$

y si tomamos $M \geq L\|b\|/\alpha$, $F(y_M) = F_M(y_M)$, y por lo tanto habremos encontrado una solución a nuestra ecuación. La unicidad sale de la monotonía de F. $\square$

Nuestro objetivo es demostrar que $y_h \to y$ en $L^\infty(\Omega)$. Comenzamos estudiando el caso lineal, suponiendo la solución suficientemente regular. Seguidamente aplicamos estos resultados al estudio de una ecuación semilineal, también con solución regular. Finalmente, estudiamos el caso que nos ocupa, en el cual la máxima regularidad del estado es la regularidad $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Caso Lineal. $y \in H^2(\Omega)$

Supongamos que $f(\cdot, y) \equiv 0$ y que $f_2 = g \in L^2(\Omega)$. Existe una única función $y \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ (cf. Grisvard [59]) que cumple

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Ay & = & g \text{ en } \Omega \\ y & = & 0 \text{ sobre } \Gamma. \end{array} \right. \tag{8.2.3}$$

Se tiene además que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|y\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^2(\Omega)}. \tag{8.2.4}$$

Podemos formular variacionalmente el problema (8.2.3) como

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } y \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ a(y, z) = (g, z)\ \forall z \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{8.2.5}$$

Se puede formular el problema aproximado como

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } y_h \in V_h \text{ tal que} \\ a(y_h, z_h) = (g, z_h)\ \forall z_h \in V_h. \end{array} \right. \tag{8.2.6}$$

El siguiente lema es conocido como lema de Aubin-Nitsche; ver por ejemplo Ciarlet [43, Teorema 19.1] o Raviart-Thomas [74, Teorema 5.2-1].

Lema 8.2.2 *Sean y e y_h las soluciones de los problemas* (8.2.5) *y* (8.2.6) *respectivamente. Entonces existe una constante $C > 0$ independiente de h tal que*

$$\|y - y_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Demostración. Veamos que existe una constante $C > 0$ independiente de h tal que $\forall\, \psi \in L^2(\Omega)$ se cumple:

$$\int_\Omega \psi(y - y_h)dx \leq Ch^2 \|\psi\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Sea $\psi \in L^2(\Omega)$ y sea $z_\psi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ el único elemento que cumple

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A^* z_\psi & = & \psi \text{ en } \Omega \\ z_\psi & = & 0 \text{ sobre } \Gamma, \end{array} \right. \tag{8.2.7}$$

donde A^* es el operador adjunto de A.

Al igual que antes se sabe que existe una constante $C > 0$ independiente de h tal que

$$\|z_\psi\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|\psi\|_{L^2(\Omega)}. \tag{8.2.8}$$

La formulación variacional de (8.2.7) se escribe:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } z_\psi \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ a(z, z_\psi) = (\psi, z) \ \forall z \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{8.2.9}$$

y se puede aproximar por

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } z_{\psi,h} \in V_h \text{ tal que} \\ a(z_h, z_{\psi,h}) = (\psi, z_h) \ \forall z_h \in V_h. \end{array} \right. \tag{8.2.10}$$

Así, usando (8.2.9), (8.2.5) y (8.2.6), la continuidad de la forma bilineal a sobre $H^1(\Omega)$, las estimaciones usuales para elementos finitos (ver por ejemplo Raviart-Thomas [74, Teorema 5.2-1, ecuación (5.2-20)]), y las acotaciones (8.2.4) y (8.2.8), se obtiene:

$$\begin{array}{rcll} (\psi, y - y_h) & = & a(y - y_h, z_\psi) & = \\ & = & a(y - y_h, z_\psi - z_{\psi,h}) & \leq \\ & \leq & C\|y - y_h\|_{H^1(\Omega)} \|z_\psi - z_{\psi,h}\|_{H^1(\Omega)} & \leq \\ & \leq & Ch^2 \|y\|_{H^2(\Omega)} \|z_\psi\|_{H^2(\Omega)} & \leq \\ & \leq & Ch^2 \|g\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{L^2(\Omega)}. & \end{array}$$

Por lo tanto

$$\|y - y_h\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{\|\psi\|_{L^2(\Omega)} \leq 1} (\psi, y - y_h) \leq Ch^2 \|g\|_{L^2(\Omega)},$$

de donde se sigue el resultado. □

Ahora vamos a dar una estimación del error del método en la norma de $L^\infty(\Omega)$. Por las hipótesis hechas $y \in C(\bar{\Omega})$, y por tanto $y - y_h \in C(\bar{\Omega})$.

Usaremos el siguiente lema (ver Ciarlet [43, Teorema 16.1]), que nos da el error de interpolación:

Lema 8.2.3 *Sean $m \geq 0$, $k \geq 0$, y $p, q \in [1, \infty]$. Si se dan las inclusiones*

$$W^{k+1,p}(T) \hookrightarrow C^0(T)$$
$$W^{k+1,p}(T) \hookrightarrow W^{m,q}(T)$$

entonces existe una constante $C > 0$ independiente de h tal que

$$\|y - \Pi_T y\|_{W^{m,q}(T)} \leq Ch^{N\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) + k + 1 - m} \|y\|_{W^{k+1,p}(T)},$$

donde $\Pi_T y$ es la restricción al elemento T de $\Pi_h y$.

La siguiente desigualdad, cuya demostración se puede encontrar en Ciarlet [43, Teorema 17.2], nos da la constante de equivalencia entre dos normas de Sobolev en un espacio de dimensión finita:

$$\|y_h\|_{W^{m,q}(\Omega_h)} \leq C \frac{1}{h^{N \max\left\{0, \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right\}} h^{m-l}} \|y_h\|_{W^{l,p}(\Omega_h)} \ \forall y_h \in V_h, \text{ si } l \leq m, \tag{8.2.11}$$

siendo $C > 0$ independiente de h.

Se tiene así el resultado principal de esta sección (Ciarlet [43, Teorema 19.3]):

Teorema 8.2.4 *Sean y e y_h las soluciones de los problemas* (8.2.5) *y* (8.2.6) *respectivamente. Entonces existe una constante $C > 0$ independiente de h tal que*

$$\|y - y_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq Ch^{2 - \frac{N}{2}} \|y\|_{H^2(\Omega)}.$$

Demostración. Tenemos que

$$\|y - y_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq \|y - \Pi_h y\|_{L^\infty(\Omega_h)} + \|\Pi_h y - y_h\|_{L^\infty(\Omega_h)}. \tag{8.2.12}$$

En virtud del lema 8.2.3, tomando $m = 0$, $q = \infty$, $k = 1$ y $p = 2$, se obtiene

$$\|y - \Pi_h y\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq Ch^{2-\frac{N}{2}}\|y\|_{H^2(\Omega)}. \tag{8.2.13}$$

Aplicando (8.2.11), se tiene que

$$\|\Pi_h y - y_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq Ch^{-\frac{N}{2}}\|\Pi_h y - y_h\|_{L^2(\Omega_h)}, \tag{8.2.14}$$

donde C es independiente de h.

De nuevo por el Lema 8.2.3, tomando $m = 0$, $q = 2$, $k = 1$ y $p = 2$, obtenemos

$$\|\Pi_h y - y\|_{L^2(\Omega_h)} \leq Ch^2\|y\|_{H^2(\Omega)}, \tag{8.2.15}$$

y por el Lema 8.2.2

$$\|y - y_h\|_{L^2(\Omega_h)} \leq \|y - y_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2\|y\|_{H^2(\Omega)}. \tag{8.2.16}$$

De (8.2.15) y (8.2.16) se sigue que

$$\|\Pi_h y - y_h\|_{L^2(\Omega_h)} \leq \|\Pi_h y - y\|_{L^2(\Omega_h)} + \|y - y_h\|_{L^2(\Omega_h)}, \leq Ch^2\|y\|_{H^2(\Omega)}.$$

Esto, junto con (8.2.14) implica que

$$\|\Pi_h y - y_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq Ch^{2-\frac{N}{2}}\|y\|_{H^2(\Omega)},$$

que junto con (8.2.13) y con (8.2.12) completan la prueba del teorema. □

Caso Semilineal. $y \in H^2(\Omega)$

Supongamos ahora que $f_2 \equiv 0$. Además supondremos que existe una función $\phi \in L^2(\Omega)$ tal que

$$|f(x,t_1) - f(x,t_2)| \leq |\phi(x)|\,|t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega. \tag{8.2.17}$$

Esta restrictiva condición de tipo global se relajará a una de tipo local como se verá más tarde. También vamos a suponer que $f(\cdot, 0) \in L^2(\Omega)$. Así

$$|f(x,t)| \leq |f(x,t) - f(x,0)| + |f(x,0)| \leq |\phi(x)|\,|t| + |f(x,0)|$$

y de esta manera se cumple que para todo numero real $M > 0$ existe una función $\varphi_M(x) = \phi(x)\,M + f(x,0) \in L^2(\Omega)$ tal que si $|t| \leq M$ entonces $|f(x,t)| \leq |\varphi_M(x)|$.

Combinando la técnica del Teorema 3.1.1 con los resultados de regularidad de Grisvard [59], bajo las dos condiciones anteriores se deduce ahora que la ecuación

$$\left\{\begin{array}{rcl} Ay & = & f(x,y) \text{ en } \Omega \\ y & = & 0 \text{ sobre } \Gamma, \end{array}\right. \tag{8.2.18}$$

posee una única solución en $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$.

Veamos ahora las estimaciones del error del método de elementos finitos en las normas de $H^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ y $L^\infty(\Omega)$.
La ecuación (8.2.18) se puede formular variacionalmente como

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Encontrar } y\in H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ a(y,z) = (f(x,y),z)\ \forall z\in H_0^1(\Omega), \end{array}\right. \tag{8.2.19}$$

y se puede aproximar por

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Encontrar } y_h\in V_h \text{ tal que} \\ a(y_h,z_h) = (f(x,y_h),z_h)\ \forall z_h\in V_h. \end{array}\right. \tag{8.2.20}$$

El siguiente resultado es una generalización para ecuaciones semilineales del conocido lema de Céa (cf. Céa [39, Proposición 3.1])

Lema 8.2.5 *Sean y e y_h soluciones de los problemas variacionales* (8.2.19) *y* (8.2.20) *respectivamente. Entonces existe una constante $C>0$ independiente de h tal que*

$$\|y-y_h\|_{H^1(\Omega)} \le C\|y-\Pi_h y\|_{H^1(\Omega)}.$$

Demostración. El resultado es consecuencia de la $H_0^1(\Omega)$-elipticidad de a, la monotonía de f en la segunda variable, la condición de Lipschitz impuesta sobre f y la inclusión continua de $H^1(\Omega)$ en $L^4(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
&\|y-y_h\|^2_{H^1(\Omega)} \le Ca(y-y_h,y-y_h) \le \\
&\le Ca(y-y_h,y-y_h) - (f(\cdot,y)-f(\cdot,y_h),y-y_h) = \\
&= Ca(y-y_h,y-z_h) - (f(\cdot,y)-f(\cdot,y_h),y-z_h) \le \\
&\le C\left\{\|y-y_h\|_{H^1(\Omega)}\|y-z_h\|_{H^1(\Omega)} + \|\phi\|_{L^2(\Omega)}\|y-y_h\|_{L^4(\Omega)}\|y-z_h\|_{L^4(\Omega)}\right\} \le \\
&\le C\left\{\|y-y_h\|_{H^1(\Omega)}\|y-z_h\|_{H^1(\Omega)} + \|\phi\|_{L^2(\Omega)}\|y-y_h\|_{H^1(\Omega)}\|y-z_h\|_{H^1(\Omega)}\right\} \le \\
&\le C\|y-y_h\|_{H^1(\Omega)}\|y-z_h\|_{H^1(\Omega)} \text{ para todo } z_h\in V_h.
\end{aligned}$$

Dividiendo entre $\|y - y_h\|_{H^1(\Omega)}$ y tomando $z_h = \Pi_h y$ se llega al resultado $\square$

Así las cosas, se tiene el siguiente lema.

Lema 8.2.6 *Sean y e y_h soluciones de los problemas variacionales* (8.2.19) *y* (8.2.20) *respectivamente. Entonces existe una constante $C > 0$ independiente de h tal que*

$$\|y - y_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch\|y\|_{H^2(\Omega)}.$$

Demostración. Usando el Lema 8.2.5, la desigualdad

$$\|y\|_{H^1(\Omega\setminus\Omega_h)} \leq Ch\|y\|_{H^2(\Omega)} \text{ para todo } y \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

(cf. Raviart-Thomas [74, Lema 5.2-3]) y el Lema 8.2.3 con $m = 1$, $q = 2$, $k = 1$ y $p = 2$, se tiene

$$\|y - y_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|y - \Pi_h y\|_{H^1(\Omega)} \leq C\left(\|y\|_{H^1(\Omega\setminus\Omega_h)} + \|y - y_h\|_{H^1(\Omega_h)}\right) \leq Ch\|y\|_{H^2(\Omega)},$$

de donde el resultado. $\square$

Para obtener la estimación del error en $L^2(\Omega)$ introducimos la función

$$\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x, y_h(x)) - f(x, y(x))}{y(x) - y_h(x)} & \text{si } y(x) \neq y_h(x) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{8.2.21}$$

Nótese que $\alpha(x) \geq 0$.

De nuevo tenemos que para todo $\psi \in L^2(\Omega)$ existe una única $z_\psi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ cumpliendo

$$\begin{cases} A^* z_\psi + \alpha(x) z_\psi = \psi & \text{en } \Omega \\ z_\psi = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

Como $\|\alpha\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\phi\|_{L^2(\Omega)}$, existe una constante $C > 0$ que independiente de α tal que $\|z_\psi\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|\psi\|_{L^2(\Omega)}$.

Este problema se formula variacionalmente como

$$a(z, z_\psi) + (\alpha z_\psi, z) = (\psi, z) \ \forall z \in H_0^1(\Omega), \tag{8.2.22}$$

y se puede aproximar por

$$a(z_h, z_{\psi,h}) + (\alpha z_{\psi,h}, z_h) = (\psi, z_h) \ \forall z_h \in V_h. \tag{8.2.23}$$

Vamos a aplicar una técnica muy parecida a la del caso lineal para hallar una cota del error $y - y_h$ en $L^2(\Omega)$.

Lema 8.2.7 *Sean y e y_h soluciones de los problemas variacionales* (8.2.19) *y* (8.2.20) *respectivamente. Entonces existe una constante $C > 0$ independiente de h tal que*

$$\|y - y_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|y\|_{H^2(\Omega)}.$$

Demostración. Sea $\psi \in L^2(\Omega)$ cualquiera. Utilizando (8.2.22), la definición de $\alpha(x)$, (8.2.19) y (8.2.20), la continuidad de a, la condición de Lipschitz (8.2.17), y las desigualdades de Sobolev y la desigualdad de Hölder igual que en la demostración anterior tenemos

$$\begin{aligned}
&(\psi, y - y_h) = a(y - y_h, z_\psi) + (\alpha z_\psi, y - y_h) = \\
&= a(y - y_h, z_\psi - z_{\psi,h}) + a(y - y_h, z_{\psi_h}) + (\alpha z_\psi, y - y_h) = \\
&= a(y - y_h, z_\psi - z_{\psi,h}) + \int_\Omega (f(x,y) - f(x,y_h)) z_{\psi,h}\, dx + \\
&+ \int_\Omega \frac{f(x,y_h) - f(x,y)}{y - y_h} z_\psi (y - y_h)\, dx = \\
&= a(y - y_h, z_\psi - z_{\psi,h}) + \int_\Omega (f(x,y_h) - f(x,y))(z_\psi - z_{\psi,h})\, dx \leq \\
&\leq C\|y - y_h\|_{H^1(\Omega)} \|z_\psi - z_{\psi,h}\|_{H^1(\Omega)} + \int_\Omega |\phi(x)|\, |y - y_h|\, |z_\psi - z_{\psi,h}|\, dx \leq \\
&\leq C \left\{ \|y - y_h\|_{H^1(\Omega)} \|z_\psi - z_{\psi,h}\|_{H^1(\Omega)} + \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \|y - y_h\|_{H^1(\Omega)} \|z_\psi - z_{\psi,h}\|_{H^1(\Omega)} \right\} \leq \\
&\leq C\|y - y_h\|_{H^1(\Omega)} \|z_\psi - z_{\psi,h}\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch\|y\|_{H^2(\Omega)} h \|z_\psi\|_{H^2(\Omega)} \leq \\
&\leq Ch^2 \|y\|_{H^2(\Omega)} \|\psi\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

donde las últimas estimaciones se siguen del Lema 8.2.6 y de las estimaciones usuales para elementos finitos. Por lo tanto

$$\|y - y_h\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{\|\psi\|_{L^2(\Omega)} \leq 1} (\psi, y - y_h) \leq Ch^2 \|y\|_{H^2(\Omega)},$$

de donde se sigue el resultado. □

Por último, no hay más que repetir la demostración del Teorema 8.2.4 para obtener un resultado idéntico para el caso semilineal:

Teorema 8.2.8 *Sean y e y_h soluciones de los problemas variacionales* (8.2.19) *y* (8.2.20) *respectivamente. Entonces existe una constante $C > 0$, independiente de h tal que*

$$\|y - y_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq Ch^{2 - \frac{N}{2}} \|y\|_{H^2(\Omega)}.$$

Veamos ahora como se obtienen los mismos resultados con condiciones menos restrictivas sobre el crecimiento de f en la segunda variable.

Teorema 8.2.9 *Supongamos que se cumple* (8.1.1) *y que* $f(x,0) \in L^2(\Omega)$. *Entonces permanecen válidas las conclusiones de los lemas 8.2.6 y 8.2.7 y el Teorema 8.2.8.*

Demostración. Nótese primero que esta nueva condición también implica que para todo $M > 0$ existe $\varphi_M(x) = \phi_M(x)\,M + f(x,0) \in L^2(\Omega)$ tal que $|f(x,t)| \leq \varphi_M(x)$ para todo $|t| \leq M$, con lo cual estamos en las mismas condiciones que antes en lo que respecta a la existencia, unicidad y regularidad de la solución. Tenemos que $y \in C(\bar{\Omega})$. Sea $M = \|y\|_{L^\infty(\Omega)} + 1$ y sea

$$f_M(x,t) = \begin{cases} f(x,-M) & \text{si } t < -M \\ f(x,t) & \text{si } |t| \leq M \\ f(x,M) & \text{si } t > M. \end{cases}$$

Se tiene que para todo $x \in \Omega$, $f_M(x,y(x)) \equiv f(x,y(x))$. Así que se cumple

$$\begin{cases} Ay &= f_M(x,y) \text{ en } \Omega \\ y &= 0 \text{ sobre } \Gamma. \end{cases}$$

Sea y_h^M la solución al problema variacional discreto

$$\begin{cases} \text{Encontrar } y_h^M \in V_h \text{ tal que} \\ a(y_h^M, z_h) = (f_M(x, y_h^M), z_h)\ \forall z_h \in V_h. \end{cases}$$

Del teorema 8.2.8 se tiene que

$$\|y - y_h^M\|_{L^\infty(\Omega_h))} \leq Ch^{2-\frac{N}{2}} \|y\|_{H^2(\Omega)},$$

por tanto para todo h menor que un cierto h_0 se tiene que $\|y - y_h^M\|_{L^\infty(\Omega_h))} \leq 1$, y por tanto $\|y_h^M\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq \|y\|_{L^\infty(\Omega)} + 1 = M$ y se tiene que $f_M(x, y_h^M) = f(x, y_h^M)$ y consecuentemente y_h^M es solución al problema (8.2.20) y se cumplen las estimaciones deseadas. □

Caso $y \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > N$

Supongamos ahora que estamos en el caso extremo: $f(\cdot, 0) \in L^{p/2}(\Omega)$, $f_2 \in W^{-1,p}(\Omega)$ y se cumple la condición de Lipschitz local (8.1.1). Igual que antes, empezaremos suponiendo que se cumple la condición global (8.2.17). En este caso, mediante el método de truncamientos de Stampacchia y utilizando los resultados de regularidad (2.1.1) para una frontera de clase C^1 y (2.1.2) en el caso general (recuérdese que un dominio convexo es siempre Lipschitz), podemos asegurar que $y \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para $p > N$, p próximo a N, supuesto que los coeficientes $a_{i,j} \in C(\bar{\Omega})$.

Basándonos en la convergencia del método de elementos finitos en la norma de $H^1(\Omega)$ se puede demostrar la convergencia uniforme para $N = 2$. Para llegar al mismo resultado para $N = 3$ hay que utilizar triangulaciones de tipo no negativo, tal y como se hace en Ciarlet y Raviart [42] para el caso lineal. En el último caso tan sólo es necesario que los coeficientes $a_{i,j}$ estén en $L^\infty(\Omega)$ (supuesta conocida la regularidad $W^{1,p}(\Omega)$ de la solución, porque, como ya vimos, esta hipótesis es insuficiente para demostrar esta regularidad para y). Veamos primero cuatro lemas.

Lema 8.2.10 *Para todo $y \in W^{1,p}(\Omega)$, $p > N$*

$$\lim_{h \to 0} \|y - \Pi_h y\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 0.$$

Demostración. En virtud del lema 8.2.3, Π_h es continua sobre $W^{1,p}(\Omega)$ con norma acotada independientemente de h. En efecto, sea $y \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces

$$\|y - \Pi_h y\|_{W^{1,p}(\Omega_h)} \leq C\|y\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

y por tanto

$$\|\Pi_h y\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|\Pi_h y\|_{W^{1,p}(\Omega_h)} \leq (1 + C)\|y\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Sea $y \in W^{2,p}(\Omega)$. También directamente del lema 8.2.3 se tiene

$$\|y - \Pi_h y\|_{W^{1,p}(\Omega_h)} \leq Ch\|y\|_{W^{2,p}(\Omega)}. \tag{8.2.24}$$

El resultado se sigue por un argumento de densidad: Sea $y \in W^{1,p}(\Omega)$, $p < \infty$. De la densidad de $W^{2,p}(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$ se tiene que, dado un $\varepsilon > 0$, existe $y_\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega)$ tal que $\|y - y_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega_h)} \leq \|y - y_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \frac{1}{3(1+C)}\varepsilon \leq \frac{1}{3}\varepsilon$. Por la continuidad de Π_h demostrada más arriba también se tiene que $\|\Pi_h y - \Pi_h y_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega_h)} \leq \frac{1}{3}\varepsilon$. De (8.2.24) deducimos la existencia de $h_0 > 0$, que depende de ε, tal que para todo $h \leq h_0$, $\|y_\varepsilon - \Pi_h y_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega_h)} \leq \frac{1}{3}\varepsilon$. Y el resultado se sigue de la desigualdad triangular:

$$\|y - \Pi_h y\|_{W^{1,p}(\Omega_h)} \leq \|y - y_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega_h)} + \|y_\varepsilon - \Pi_h y_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega_h)} + \|\Pi_h y - \Pi_h y_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega_h)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon.$$

Y por tanto el limite es cero. Para concluir la demostración no hay más que observar que como $|\Omega \setminus \Omega_h| \to 0$,

$$\|y - \Pi_h y\|_{W^{1,p}(\Omega\setminus\Omega_h)} = \|y\|_{W^{1,p}(\Omega\setminus\Omega_h)} \to 0.$$

La prueba está completa. □

Lema 8.2.11 *Sean y e y_h respectivamente la solución de las ecuaciones* (8.2.1) *y* (8.2.2). *Entonces*

$$\lim_{h\to 0} \|y - y_h\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

Demostración. Por el Lema de Cea 8.2.5, el resultado anterior y la inclusión $W^{1,p}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, se tiene que

$$\lim_{h\to 0} \|y - y_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \lim_{h\to 0} C\|y - \Pi_h y\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

□

Nota 8.2.1 *Para el anterior resultado, tan sólo es necesario que los coeficientes sean continuos, o incluso sólo acotados, supuesta conocida la regularidad $W^{1,p}(\Omega)$ de la solución.*

También se puede demostrar un resultado de convergencia en $L^2(\Omega)$.

Lema 8.2.12 *Supongamos que los coeficientes $a_{i,j} \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$, y sean y e y_h respectivamente la solución de las ecuaciones* (8.2.1) *y* (8.2.2). *Entonces*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|y - y_h\|_{L^2(\Omega)}}{h} = 0.$$

Demostración. Sea $\psi \in L^2(\Omega)$. Siguiendo exactamente la demostración del lema 8.2.7 se obtiene

$$(\psi, y - y_h) \leq Ch\|y - y_h\|_{H^1(\Omega)}\|z_\psi - z_{\psi,h}\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch\|y - y_h\|_{H^1(\Omega)}\|\psi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Así

$$\frac{1}{h}\|y - y_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|y - y_h\|_{H^1(\Omega)}$$

y aplicando el Lema 8.2.11 se obtiene el límite deseado. □

Lema 8.2.13 *Sea $y \in W^{1,p}(\Omega)$ con $p > N$. Entonces*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|y - \Pi_h y\|_{L^p(\Omega_h)}}{h} = 0.$$

Demostración. Para la demostración aprovechamos que $\Pi_h y \in W^{1,p}(\Omega_h)$ usamos el lema de interpolación 8.2.3 y se tiene que

$$\|y - \Pi_h y\|_{L^p(\Omega_h)} = \|y - \Pi_h y - \Pi_h(y - \Pi_h y)\|_{L^p(\Omega_h)} \leq Ch\|y - \Pi_h y\|_{W^{1,p}(\Omega_h)}$$

y el resultado se obtiene dividiendo por h y aplicando el Lema 8.2.10. □

Ahora ya podemos probar la convergencia uniforme, al menos en dimensión 2.

Teorema 8.2.14 *Supongamos que $N = 2$ y que los coeficientes $a_{i,j} \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$. Sean y e y_h respectivamente la solución de las ecuaciones* (8.2.1) *y* (8.2.2). *Entonces*

$$\lim_{h\to 0} \|y - y_h\|_{L^\infty(\Omega)} = 0.$$

Demostración. Si aplicamos la desigualdad triangular, el lema 8.2.3, la desigualdad (8.2.11) de equivalencia entre dos normas de Sobolev en un espacio de dimensión finita, y que $N = 2$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|y - y_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} &\leq \|y - \Pi_h y\|_{L^\infty(\Omega_h)} + \|\Pi_h y - y_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq \\
&\leq C\left[h^{1-\frac{N}{p}}\|y\|_{W^{1,p}(\Omega)} + h^{-\frac{N}{2}}\|\Pi_h y - y_h\|_{L^2(\Omega_h)}\right] \leq \\
&\leq C\left[h^{1-\frac{N}{p}}\|y\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \frac{\|\Pi_h y - y\|_{L^2(\Omega_h)}}{h} + \frac{\|y - y_h\|_{L^2(\Omega_h)}}{h}\right].
\end{aligned}$$

Por ser $p > N$, el Lema 8.2.12 y la inclusión continua $L^p(\Omega) \in H^2(\Omega)$ esta cantidad tiende a cero.

Nótese que al ser $y \in C(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)$, $\|y\|_{L^\infty(\Omega\setminus\Omega_h)}$ tiende a cero al decrecer h, con lo que ya tenemos el resultado. □

Para dar un resultado para dimensión 3 ó simplemente para coeficientes continuos hay que hacer dos hipótesis suplementarias:

(H1) La función ϕ dada en (8.2.17) pertenece a un espacio $L^r(\Omega)$ con $r > 2$

(H2) La triangulación es de tipo no negativo:

Denotemos b_i, $1 \leq i \leq n$ y b_i, $n \leq i \leq n+m$ los vértices de $\mathcal{T}_h$ que pertenecen a Ω y a Γ respectivamente, y sean w_i, $1 \leq i \leq n+m$ las funciones de W_h que satisfacen

$$w_i(b_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n+m,$$

i.e., las funciones w_i, $1 \leq i \leq n$ o w_i, $1 \leq i \leq n+m$, forman una base de V_h o W_h. Sean $\tilde{a}_{ij} = a(w_j, w_i)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n+m$. Diremos que el problema discreto (8.2.20) es **de tipo no negativo** (o que la triangulación $\mathcal{T}_h$ es de tipo no negativo) si la matriz $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ es irreduciblemente diagonalmente dominante y se satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ij} &\leq 0 \quad \text{para } i \neq j,\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n+m, \\ \sum_{j=1}^{n+m} \tilde{a}_{ij} &\geq 0 \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Siguiendo Ciarlet [43, Teorema 21.4], se tiene para $p > N$, tomando $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, que si y_h es solución del problema discreto

$$a(y_h, z_h) = \langle g, z_h \rangle \quad \text{para todo } z_h \in V_h,$$

con $g \in W^{-1,p}(\Omega_h)$, entonces se cumple el principio del máximo discreto

$$\|y_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq C\|g\|_{W^{-1,p}(\Omega_h)} \tag{8.2.25}$$

para discretizaciones de tipo no negativo.

Usando este principio, tenemos:

Teorema 8.2.15 *Supongamos que los coeficientes $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, y sean y e y_h respectivamente la solución de las ecuaciones* (8.2.1) *y* (8.2.2)*. Entonces si la triangulación es de tipo no negativo,*

$$\|y - y_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq Ch\|y\|_{W^{2,p}(\Omega)} \ \text{si } y \in W^{2,p}(\Omega),\ p > 2N \tag{8.2.26}$$

y

$$\lim_{h\to 0} \|y-y_h\|_{L^\infty(\Omega)} = 0 \ si \ y \in W^{1,p}(\Omega), \ \ p > N. \tag{8.2.27}$$

Demostración. Nótese primero que para que la solución esté en $W^{1,p}(\Omega)$ es suficiente que los coeficientes $a_{i,j} \in C(\bar{\Omega})$ y que para que esté en $W^{2,p}(\Omega)$ es suficiente que que los coeficientes estén en $C^{0,1}(\bar{\Omega})$ y que $f(\cdot, y)$ y f_2 estén en $L^p(\Omega)$. Sean $y \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $y_h \in V_h$ soluciones de los problemas (8.2.19) y (8.2.20) respectivamente (formulación variacional para (8.2.1) y escritura abreviada para (8.2.2) respectivamente). Se tiene que $y_h - \Pi_h y$ es el único elemento de V_h que cumple

$$a(y_h - \Pi_h y, z_h) = a(y - \Pi_h y, z_h) + (f(x, y_h) - f(x, y), z_h) \ \forall z_h \in V_h. \tag{8.2.28}$$

Vamos a estudiar la norma del operador

$$T : W_0^{1,p'}(\Omega_h) \longrightarrow \mathbb{R}$$

que a cada $z \in W_0^{1,p'}(\Omega_h)$ hace corresponder $Tz = a(y - \Pi_h y, z) + (f(x, y_h) - f(x, y), z)$.

Por la desigualdad de Hölder, se ve que

$$a(y - \Pi_h y, z) \leq C\|y - \Pi_h y\|_{W^{1,p}(\Omega_h)} \|z\|_{W_0^{1,p'}(\Omega_h)} \quad \forall z \in W_0^{1,p'}(\Omega_h),$$

donde p' es el exponente conjugado de p. Se tiene que $W^{1,p}(\Omega_h) \hookrightarrow H^1(\Omega_h) \hookrightarrow L^6(\Omega_h)$. Si además $p \leq 3 + \varepsilon$, con ε suficientemente pequeño, entonces $W^{1,p'}(\Omega_h) \hookrightarrow L^s(\Omega_h)$, con $s < 3$, tan próximo a 3 como se precise. Así s puede elegirse de forma que

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{6} + \frac{1}{s} = 1.$$

Así, usando la desigualdad de Hölder y el lema de Cèa generalizado (lema 8.2.5),

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega_h} (f(x, y_h) - f(x, y)) z \, dx \right| \ &\leq \ \int_{\Omega_h} |\phi(x)| \, |y - y_h| \, |z| \, dx \ &&\leq \\
&\leq \ \|\phi\|_{L^r(\Omega)} \|y - y_h\|_{L^6(\Omega_h)} \|z\|_{L^s(\Omega_h)} \ &&\leq \\
&\leq \ C\|y - y_h\|_{H^1(\Omega_h)} \|z\|_{W^{1,p'}(\Omega_h)} \ &&\leq \\
&\leq \ C\|y - \Pi_h y\|_{H^1(\Omega_h)} \|z\|_{W^{1,p'}(\Omega_h)} \ &&\leq \\
&\leq \ C\|y - \Pi_h y\|_{W^{1,p}(\Omega_h)} \|z\|_{W^{1,p'}(\Omega_h)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|T\|_{W^{-1,p}(\Omega_h)} \leq C\|y - \Pi_h y\|_{W^{1,p}(\Omega_h)}$$

Pero, aplicando el principio del máximo (8.2.25) si $3 < p \leq 3 + \varepsilon$ a la ecuación (8.2.28) se tiene que existe una constante $C > 0$ independiente de h tal que

$$\|y_h - \Pi_h y\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq C\|T\|_{W^{-1,p}(\Omega_h)} \leq C\|y - \Pi_h y\|_{W^{1,p}(\Omega_h)},$$

y usando que $W^{1,p}(\Omega_h) \hookrightarrow L^\infty(\Omega_h)$, se llega a:

$$\begin{aligned} \|y - y_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} &\leq \|y - \Pi_h y\|_{L^\infty(\Omega_h)} + \|y_h - \Pi_h y\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq \\ &\leq C\|y - \Pi_h y\|_{W^{1,p}(\Omega_h)}. \end{aligned} \tag{8.2.29}$$

Si además $y \in W^{2,p}(\Omega)$, aplicando el lema 8.2.3 se tiene

$$\|y - \Pi_h y\|_{W^{1,p}(\Omega_h)} \leq Ch\|y\|_{W^{2,p}(\Omega)}, \tag{8.2.30}$$

de donde se concluye (8.2.26). Si $p > 3 + \varepsilon$ el resultado se sigue de la inclusión continua $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{2,3+\varepsilon}(\Omega)$.

El límite

$$\lim_{h \to 0} \|y - y_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} = 0 \text{ si } y \in W^{1,p}(\Omega)$$

se sigue de (8.2.29) y del Lema 8.2.10 si $p < \infty$. Si $y \in W^{1,\infty}(\Omega)$ basta notar que también está en $W^{1,p}(\Omega)$ para $p < \infty$.

Para probar (8.2.27) se hace igual que al final de la demostración anterior: como $y \in L^\infty(\Omega)$, $\|y\|_{L^\infty(\Omega \setminus \Omega_h)}$ tiende hacia cero al decrecer h. □

8.3 Caso Neumann

Supondremos para el problema de Neumann que Γ es poligonal o poliédrica. En este caso $\Omega_h = \Omega$. Consideraremos ahora $a_0 \in L^{\frac{Np}{N+p}}(\Omega)$, $a_0 \geq 0$, $a_0 \not\equiv 0$ en Ω, $f_2 \in \left(W^{1,p'}(\Omega)\right)'$ y $v \in L^\infty(\Gamma)$. Queremos estudiar la aproximación uniforme por el método de elementos finitos de la solución de la ecuación

$$\left\{ \begin{array}{rcll} Ay + a_0 y &=& f(\cdot, y) + f_2 & \text{en } \Omega \\ \partial_{n_A} y &=& v & \text{sobre } \Gamma. \end{array} \right. \tag{8.3.1}$$

Para cada h, definimos $y_h \in W_h$ como el único elemento que cumple

$$\begin{gathered} \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{i,j}(x)\partial_{x_i} y_h(x)\partial_{x_j} z_h(x)dx + \int_\Omega a_0(x)y_h(x)z_h(x)dx = \\ \int_\Omega f(x, y_h(x))z_h dx + \langle f_2, z_h\rangle_{\left(W^{1,p'}(\Omega)\right)' \times W^{1,p'}(\Omega)} + \int_\Gamma v(s)y_h(s)ds \quad \forall z_h \in W_h. \end{gathered} \tag{8.3.2}$$

Lema 8.3.1 *La ecuación* (8.3.2) *tiene una única solución.*

Demostración. La prueba es idéntica a la hecha para la ecuación (8.2.2). □

Nuestro objetivo es demostrar que $y_h \to y$ en $L^\infty(\Omega)$. Aprovecharemos estos resultados en el próximo capítulo para estudiar un problema de control, donde v hará las veces de control. En general $v \notin H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ y por lo tanto no tiene sentido estudiar el caso regular. Mediante el método de truncamientos de Stampacchia [84] y un teorema de regularidad debido a Dauge [47], podemos probar, como en el Teorema 3.1.1 que $y \in W^{1,p}(\Omega)$.

Comenzamos enunciando el conocido resultado de convergencia para el método de elementos finitos

Lema 8.3.2 *Sean y e y_h respectivamente la solución de las ecuaciones* (8.3.1) *y* (8.3.2). *Entonces*

$$\lim_{h\to 0} \|y - y_h\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

También tenemos un resultado en $L^2(\Omega)$.

Lema 8.3.3 *Supongamos que los coeficientes $a_{i,j} \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$, y sean y e y_h respectivamente la solución de las ecuaciones* (8.3.1) *y* (8.3.2). *Entonces*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|y - y_h\|_{L^2(\Omega)}}{h} = 0.$$

Demostración. Para todo $\psi \in L^2(\Omega)$ existe una única $z_\psi \in H^2(\Omega)$ cumpliendo

$$\left\{ \begin{array}{rcll} A^* z_\psi + a_0 z_\psi + \alpha(x) z_\psi & = & \psi & \text{en } \Omega \\ \partial_{n_{A^*}} z_\psi & = & 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{array} \right. \tag{8.3.3}$$

con $\alpha(x)$ definida como en (8.2.21). Como $\|\alpha\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\phi\|_{L^2(\Omega)}$, existe una constante $C > 0$ independiente de α tal que $\|z_\psi\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|\psi\|_{L^2(\Omega)}$.

Ahora podemos continuar la prueba como la del Lema 8.2.12, y aplicar el lema anterior. □

Ahora ya podemos probar, exactamente de la misma manera que en el Teorema 8.2.14 la convergencia uniforme, al menos en dimensión 2.

Teorema 8.3.4 *Supongamos que $N = 2$ y que los coeficientes $a_{i,j} \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$. Sean y e y_h respectivamente la solución de las ecuaciones* (8.3.1) *y* (8.3.2). *Entonces*

$$\lim_{h\to 0} \|y - y_h\|_{L^\infty(\Omega)} = 0.$$

Para probar un resultado de convergencia uniforme para $N = 3$ ó simplemente para coeficientes continuos, hemos de suponer de nuevo que $\phi \in L^r(\Omega)$, $r > 2$ y que la triangulación es de tipo no negativo. Para el problema de Neumann, definimos así una triangulación de tipo no negativo. Denotemos b_i, $1 \leq i \leq n+m$ los vértices de $\mathcal{T}_h$ que pertenecen a $\bar{\Omega}$ y sean w_i, $1 \leq i \leq n+m$ las funciones de W_h que satisfacen

$$w_i(b_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n+m,$$

i.e., las funciones w_i, $1 \leq i \leq n+m$, forman una base de W_h. Sean $\tilde{a}_{ij} = a(w_j, w_i)$, $1 \leq i \leq n+m$, $1 \leq j \leq n+m$. Diremos que el problema discreto (8.3.2) es **de tipo no negativo** (o que la triangulación $\mathcal{T}_h$ es de tipo no negativo) si la matriz $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ es irreduciblemente diagonalmente dominante y se satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ij} \leq 0 \quad &\text{para } i \neq j,\ 1 \leq i \leq n+m,\ 1 \leq j \leq n+m, \\ \sum_{j=1}^{n+m} \tilde{a}_{ij} \geq 0 \quad &1 \leq i \leq n+m. \end{aligned}$$

En este caso se cumplirá el principio del máximo discreto. Si $y_h \in W_h$ es solución del problema discreto

$$a(y_h, z_h) = \langle g, z_h \rangle_{\left(W^{1,p'}(\Omega)\right)' \times W^{1,p'}(\Omega)} + \langle v, \gamma z_h \rangle_{W^{-\frac{1}{p},p}(\Gamma) \times W^{\frac{1}{p},p'}(\Gamma)} \quad \text{para todo } z_h \in W_h,$$

con $g \in \left(W^{1,p'}(\Omega)\right)'$ entonces se cumple el principio del máximo discreto

$$\|y_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \left(\|g\|_{\left(W^{1,p'}(\Omega)\right)'} + \|v\|_{W^{-\frac{1}{p},p}(\Gamma)} \right). \tag{8.3.4}$$

Teorema 8.3.5 *Supongamos que los coeficientes $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, y sean y e y_h respectivamente la solución de las ecuaciones* (8.3.1) *y* (8.3.2). *Entonces si la triangulación es de tipo no negativo,*

$$\|y - y_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq Ch\|y\|_{W^{2,p}(\Omega)} \text{ si } y \in W^{2,p}(\Omega),\ p > 2N \tag{8.3.5}$$

y

$$\lim_{h \to 0} \|y - y_h\|_{L^\infty(\Omega)} = 0 \text{ si } y \in W^{1,p}(\Omega),\ p > N. \tag{8.3.6}$$

Demostración. La prueba es idéntica a la del caso Dirichlet. □

Capítulo 9

Convergencia del M.E.F. para problemas de control

En este capítulo nos dedicamos al estudio de las discretizaciones de un problema de control. En la primera sección nos dedicamos al estudio de un problema de control distribuido gobernado por una ecuación semilineal con condiciones de contorno tipo Dirichlet y en la segunda al estudio de un control frontera gobernado por una ecuación con condiciones de contorno tipo Neumann.

9.1 Caso Dirichlet

Consideremos los conjuntos, operadores, y espacios descritos en la Sección 8.1.

Sean K un subconjunto convexo, *débilmente cerrado, acotado y no vacío en $L^\infty(\Omega)$; $p > N$; $f(\cdot, y) = f_1(\cdot, y) + f_2(\cdot)$, donde $f_1 : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de Carathéodory, monótona decreciente en la segunda variable, con $f_1(\cdot, 0) \in L^{p/2}(\Omega)$ y cumpliendo la condición de Lipschitz local (8.1.1) y $f_2 \in W^{-1,p}(\Omega)$; $L : \Omega \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de Carathéodory, convexa en la tercera variable y que cumple que para todo $M > 0$ existe $\psi_M \in L^1(\Omega)$ tal que $|L(x, y, u)| \leq \psi_M(x)$ para c.t.p. $x \in \Omega$, para todo $|y|$, $|u| \leq M$. Sea $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Formulamos el problema de control óptimo

$$(P_\delta) \begin{cases} \min J(u) = \displaystyle\int_\Omega L\left(x, y_u(x), u(x)\right) dx \\ u \in K \quad g\left(x, y_u(x)\right) \leq \delta \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \end{cases} \tag{9.1.1}$$

donde

$$\left\{\begin{array}{rcll} Ay_u & = & f(x,y_u)+u & \text{en } \Omega \\ y_u & = & 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{array}\right. \tag{9.1.2}$$

Aplicando las mismas técnicas que en el Teorema 3.1.1 tenemos los siguientes resultados.

Teorema 9.1.1 *Para cada $u \in K$ existe una única $y_u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solución de* (9.1.2). *Además existe una constante C_K, que sólo depende una cota para K, tal que $\|y_u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C_K$ para todo $u \in K$. Finalmente si $u_j \to u$ *débilmente en $L^\infty(\Omega)$ entonces $y_{u_j} \to y_u$ fuertemente en $W^{1,p}(\Omega)$.*

Teorema 9.1.2 *Si además $f_1(\cdot,0) \in L^2(\Omega)$ y $f_2 \equiv 0$, entonces para cada $u \in K$ existe una única $y_u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ solución de* (9.1.2)*. Además existe una constante C_K, que sólo depende una cota para K, tal que $\|y_u\|_{H^2(\Omega)} \leq C_K$ para todo $u \in K$. Finalmente si $u_j \to u$ *débilmente en $L^\infty(\Omega)$ entonces $y_{u_j} \to y_u$ fuertemente en $H^2(\Omega)$.*

El siguiente resultado aparece en Casas [18].

Teorema 9.1.3 *Existe un número $\delta_0 \in \mathbb{R}$ de forma que que el problema (P_δ) posee al menos una solución para cada $\delta \geq \delta_0$, mientras que (P_δ) no posee controles admisibles para $\delta < \delta_0$.*

Demostración. De los resultados de regularidad y teniendo en cuenta que K es acotado en $L^\infty(\Omega)$ se deduce que existe una constante C tal que $\|y_u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$ para todo $u \in K$. Sean M y m el supremo y el ínfimo respectivamente de g en $\bar\Omega \times [-C,C]$. Entonces es obvio que (P_δ) no posee controles admisibles para $\delta < m$ y en cambio todos los elementos de K son controles admisibles para $\delta \geq M$. Sea δ_0 el ínfimo de los valores δ para los cuales (P_δ) posee controles admisibles. Entonces $m \leq \delta_0 \leq M$ y (P_δ) no posee controles admisibles para $\delta < \delta_0$. Probemos que existe al menos un control admisible para (P_{δ_0}). Sea $\{\delta_j\}$ una sucesión decreciente convergiendo hacia δ_0 y $\{u_j\} \subset K$ una sucesión de controles tales que cada u_j es admisible para (P_{δ_j}). Puesto que K está acotado, podemos extraer una subsucesión, que denotaremos igual, *-débilmente convergente en $L^\infty(\Omega)$ hacia un elemento $u_0 \in K$. Por continuidad se tiene que los estados $\{y_{u_j}\}$ convergen uniformemente hacia y_{u_0} y por lo tanto

$$g(x,y_{u_0}(x)) = \lim_{j\to\infty} g(x,y_{u_j}(x)) \leq \lim_{j\to\infty} \delta_j = \delta_0 \text{ para todo } x \in \bar\Omega.$$

Por lo tanto u_0 es un control admisible para (P_{δ_0}).

Para concluir la demostración debemos establecer la existencia de un control óptimo para cada $\delta \geq \delta_0$. Sea $\{u_k\} \subset K$ una sucesión minimizante de (P_δ), es decir $J(u_k) \to \inf(P_\delta)$. Podemos extraer una subsucesión, denotada de nuevo de la misma forma, que converge *-débilmente en $L^\infty(\Omega)$ hacia un elemento $\bar{u} \in K$. Utilizando una argumentación similar a la del párrafo anterior se puede comprobar que $g(x, y_{\bar{u}}(x)) \leq \delta$ para cada $x \in \bar{\Omega}$. Así $\bar{u}$ es un control admisible para el problema (P_δ). Veamos que $J(\bar{u}) = \inf(P_\delta)$. Para ello nos servimos del Teorema de Mazur (ver, por ejemplo, Ekeland y Temam [51]): dado $1 < p < \infty$ arbitrario existe una sucesión de combinaciones convexas $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$,

$$v_k = \sum_{j=k}^{n(k)} \lambda_{k,j} u_j, \text{ con } \sum_{j=k}^{n(k)} \lambda_{k,j} = 1 \text{ y } \lambda_{k,j} \geq 0,$$

tales que $v_k \to \bar{u}$ fuertemente en $L^p(\Omega)$. Entonces, utilizando la convexidad de L con respecto a la tercera variable, el teorema de la convergencia dominada y que L está dominada por una función de $L^1(\Omega)$, se obtiene

$$J(\bar{u}) = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega L(x, y_{\bar{u}}(x), v_k(x))dx \leq \limsup_{k\to\infty} \sum_{j=k}^{n(k)} \lambda_{k,j} \int_\Omega L(x, y_{\bar{u}}(x), u_j(x))dx \leq$$

$$\limsup_{k\to\infty} \sum_{j=k}^{n(k)} \lambda_{k,j} J(u_j) + \limsup_{k\to\infty} \int_\Omega \sum_{j=k}^{n(k)} \lambda_{k,j} |L(x, y_{u_j}(x), u_j(x)) - L(x, y_{\bar{u}}(x), u_j(x))|dx =$$

$$\inf(P_\delta) + \limsup_{k\to\infty} \int_\Omega \sum_{j=k}^{n(k)} \lambda_{k,j} |L(x, y_{u_j}(x), u_j(x)) - L(x, y_{\bar{u}}(x), u_j(x))|dx,$$

donde se ha utilizado la convergencia $J(u_k) \to \inf(P_\delta)$. Para probar que el segundo sumando de la derecha de la expresión anterior converge hacia cero, basta con notar que para cada x fijado, la función $L(x, \cdot, \cdot)$ es uniformemente continua sobre subconjuntos acotados de $\mathbb{R}^2$, que la sucesiones $\{y_{u_j}(x)\}$ y $\{u_j(x)\}$ están uniformemente acotadas y que $y_{u_j}(x) \to y_{\bar{u}}(x)$ cuando $j \to \infty$, por lo tanto

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=k}^{n(k)} \lambda_{k,j} |L(x, y_{u_j}(x), u_j(x)) - L(x, y_{\bar{u}}(x), u_j(x))| = 0 \text{ para c.t.p. } x \in \Omega.$$

Usando de nuevo el teorema de la convergencia dominada se deduce que

$$\limsup_{k\to\infty} \int_\Omega \sum_{j=k}^{n(k)} \lambda_{k,j} |L(x, y_{u_j}(x), u_j(x)) - L(x, y_{\bar{u}}(x), u_j(x))|dx = 0,$$

lo cual termina la demostración. □

En esta sección nuestro objetivo es estudiar la convergencia de las discretizaciones de este problema. Para el estudio de la convergencia del problema de control se hace necesario el estudio de la ecuación de estado. En este caso y al ser las restricciones de tipo puntual hay que establecer la convergencia uniforme de las aproximaciones del estado.

Consideramos el espacio

$$U_h = \left\{u_h \in L^\infty(\Omega) : \ u_{h|_T} \in P_0(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\right\}.$$

Para todo $u_h \in U_h$ denotamos por $y_h(u_h)$ el único elemento de V_h que cumple

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{i,j}(x)\partial_{x_i} y_h(x)\partial_{x_j} z_h(x)dx = \int_\Omega (f(x, y_h(x)) + u_h)z_h dx \quad \forall z_h \in V_h, \tag{9.1.3}$$

donde entendemos que $\displaystyle\int_\Omega f_2 z_h\, dx$ denota $\langle f_2, z_h\rangle_{W^{-1,p}(\Omega)\times W_0^{1,p}(\Omega)}$.

Para cada $h > 0$ tomamos K_h un subconjunto convexo, cerrado, acotado y no vacío de U_h de forma que $\{K_h\}$ constituye una aproximación interna de K en el sentido siguiente

1. Para todo $u \in K$ existe $u_h \in K_h$ con $u_h \to u$ en $L^1(\Omega)$.
2. Si $u_h \in K_h$ y $u_h \to u$ *débilmente en $L^\infty(\Omega)$, entonces $u \in K$.
3. Los $\{K_h\}$ están uniformemente acotados en $L^\infty(\Omega)$.

Formulamos el siguiente problema finito dimensional.

$$(P_{\delta h}) \begin{cases} \min J_h(u_h) = \displaystyle\int_{\Omega_h} L\left(x, y_h(u_h)(x), u_h(x)\right) dx \\ u_h \in K_h \quad g\left(x_j, y_h(u_h)(x_j)\right) \le \delta \quad \forall j \in I_h, \end{cases} \tag{9.1.4}$$

donde $\{x_j\}_{j=1}^{n(h)}$ es el conjunto de vértices de $\mathcal{T}_h$, I_h es el conjunto de índices correspondientes a los vértices interiores.

Es el objetivo de este capítulo mostrar que las soluciones de los problemas discretos convergen hacia la solución del problema continuo. Para ello es imprescindible probar el hecho de que si $u_h \to u$ *-débilmente en $L^\infty(\Omega)$, entonces $y_h(u_h) \to y_u$ uniformemente en Ω.

Obsérvese que no estamos exactamente en el caso del capítulo anterior, ya que ahí lo que demostramos es que $y_h = y_h(u)$ converge hacia y_u.

La técnica para demostrar esto varía según sea el estado regular o no, y que tengamos una triangulación de tipo no negativo o no. Vamos a enunciar distintos teoremas, en los que se ve que, bajo hipótesis distintas cada vez, podemos llegar a la conclusión que nos interesa.

Teorema 9.1.4 *Supongamos ahora que $a_{i,j} \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$ y que $f_2 \equiv 0$. Además supondremos que para todo $M > 0$ existe una función $\phi_M \in L^2(\Omega)$ de tal manera que se satisface la condición de Lipschitz local* (8.1.1). *También vamos a suponer que $f_1(\cdot, 0) \in L^2(\Omega)$. Para todo $h > 0$ sea $u_h \in K_h$, tales que $u_h \to u$ *-débilmente en $L^\infty(\Omega)$. Entonces*

$$\lim_{h \to 0} \|y_h(u_h) - y_u\|_{L^\infty(\Omega)} = 0. \tag{9.1.5}$$

Demostración. Las hipótesis hechas nos aseguran que el estado es suficientemente regular. Obsérvese que además, como los K_h están uniformemente acotados en $L^\infty(\Omega)$ (hipótesis 3 sobre los K_h, página 196), existe una constante C tal que

$$\|y_{u_h}\|_{H^2(\Omega)} \leq C \text{ para todo } u_h \in K_h \text{ y para todo } h > 0. \tag{9.1.6}$$

Este es el caso clásico. Tenemos estimaciones sobre el error. Escribimos

$$\|y_h(u_h) - y_u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|y_h(u_h) - y_{u_h}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|y_{u_h} - y_u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Del Teorema 9.1.1 se sigue que el segundo sumando converge hacia cero.

Para el primero, si fijamos h, debido al Teorema 8.2.8, tenemos que $\|y_h(u_h) - y_{u_h}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^{2-\frac{N}{2}} \|y_{u_h}\|_{H^2(\Omega)}$. Gracias a esto y a (9.1.6) tenemos que el primer sumando converge hacia cero, lo que completa la prueba. □

Para probar resultados análogos en el caso de que los estados no sean suficientemente regulares, vamos a introducir el siguiente resultado.

Lema 9.1.5 *Para todo $h > 0$, todo $u \in K$ y todo $u_h \in K_h$ existe $C > 0$ independiente de h tal que*

$$\|y_h(u_h) - y_h(u)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|u - u_h\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Demostración. De la monotonía de f y la $H_0^1(\Omega)$ elipticidad de $a(\cdot, \cdot)$, tenemos que

$$m\|y_h(u_h) - y_h(u)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq a(y_h(u_h) - y_h(u), y_h(u_h) - y_h(u)) =$$

$$(f(x, y_h(u_h)) - f(x, y_h(u)), y_h(u_h) - y_h(u)) + (u - u_h, y_h(u_h) - y_h(u)) \le$$

$$\le (u - u_h, y_h(u_h) - y_h(u)) \le \|u - u_h\|_{H^{-1}(\Omega)} \|y_h(u_h) - y_h(u)\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Por lo tanto

$$\|y_h(u_h) - y_h(u)\|_{H_0^1(\Omega)} \le \frac{1}{m} \|u - u_h\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

□

Teorema 9.1.6 *Supongamos que los coeficientes* $a_{i,j} \in C(\bar{\Omega})$, $f_1(\cdot, 0) \in L^{p/2}(\Omega)$, $f_2 \in W^{-1,p}(\Omega)$ *y para todo* $M > 0$ *existe una función* $\phi_M \in L^r(\Omega)$, $r > 2$ *de tal manera que se cumple la condición de Lipschitz local* (8.1.1). *Supongamos además que la triangulación es de tipo no negativo. Para todo* $h > 0$ *sea* $u_h \in K_h$, *tales que* $u_h \to u$ **-débilmente en* $L^\infty(\Omega)$. *Entonces*

$$\lim_{h \to 0} \|y_h(u_h) - y_u\|_{L^\infty(\Omega)} = 0. \tag{9.1.7}$$

Demostración. Ahora el estado pertenece a $W^{1,p}(\Omega)$ y no tenemos estimaciones para el error, tan sólo un resultado de convergencia.

En este caso escribimos

$$\|y_h(u_h) - y_u\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|y_h(u_h) - y_h(u)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|y_h(u) - y_u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

El segundo sumando converge a cero como consecuencia del Teorema 8.2.15.

Sabemos que $y_h(u_h) - y_h(u)$ soluciona el problema discreto

$$a(y_h(u_h) - y_h(u), z_h) = (f(x, y_h(u_h)) + u_h - f(x, y_h(u)) - u, z_h) \quad \forall z_h \in V_h.$$

En este caso podemos aplicar el principio del máximo discreto (8.2.25), con lo que

$$\|y_h(u_h) - y_h(u)\|_{L^\infty(\Omega)} \le C \|f(x, y_h(u)) + u - f(x, y_h(u_h)) - u_h\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \le$$

$$\le C \left(\|f(x, y_h(u)) - f(x, y_h(u_h))\|_{W^{-1,p}(\Omega)} + \|u - u_h\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \right).$$

En el segundo sumando, la convergencia *-débil en $L^\infty(\Omega)$ de los u_h implica la convergencia fuerte en $W^{-1,p}(\Omega)$.

Por otro lado lado

$$\|f(x, y_h(u)) - f(x, y_h(u_h))\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \le \|\phi\|_{L^r(\Omega)} \|y_h(u) - y_h(u_h)\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Por el Lema 9.1.5

$$\|y_h(u_h) - y_h(u)\|_{H_0^1(\Omega)} \le \frac{1}{m} \|u - u_h\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

La convergencia *-débil de los u_h implica la convergencia fuerte en $H^{-1}(\Omega)$. Por lo tanto los estados convergen uniformemente. $\square$

Vamos a dar ahora cuatro lemas análogos a los Lemas 8.2.10–8.2.13

Lema 9.1.7 *Para todo $h > 0$ sea $u_h \in K_h$, tales que $u_h \to u$ *-débilmente en $L^\infty(\Omega)$. Entonces*

$$\lim_{h\to 0} \|y_{u_h} - \Pi_h y_{u_h}\|_{W^{1,p}(\Omega_h)} = 0.$$

Demostración. Podemos acotar $\|y_{u_h} - \Pi_h y_{u_h}\|_{W^{1,p}(\Omega_h)}$ como

$$\|y_{u_h} - \Pi_h y_{u_h}\|_{W^{1,p}(\Omega_h)} \le \|y_{u_h} - y_u\|_{W^{1,p}(\Omega_h)} + \|y_u - \Pi_h y_u\|_{W^{1,p}(\Omega_h)} + \|\Pi_h y_u - \Pi_h y_{u_h}\|_{W^{1,p}(\Omega_h)}.$$

El primer sumando converge hacia cero por el Teorema 9.1.1. El segundo en virtud del Lema 8.2.10. El tercero, gracias a la continuidad de Π_h (demostrada al principio de la prueba del Lema 8.2.10), lo podemos acotar por una constante que multiplica a $\|y_{u_h} - y_u\|_{W^{1,p}(\Omega_h)}$, que de nuevo converge hacia cero. $\square$

Lema 9.1.8 *Para todo $h > 0$ sea $u_h \in K_h$, tales que $u_h \to u$ *-débilmente en $L^\infty(\Omega)$. Entonces*

$$\lim_{h\to 0} \|y_h(u_h) - y_{u_h}\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

Demostración. Podemos acotar $\|y_{u_h} - y_h(u_h)\|_{H^1(\Omega)}$ como

$$\|y_{u_h} - y_h(u_h)\|_{H^1(\Omega)} \le \|y_{u_h} - y_u\|_{H^1(\Omega)} + \|y_u - y_h(u)\|_{H^1(\Omega)} + \|y_h(u) - y_h(u_h)\|_{H^1(\Omega)}.$$

El primer sumando converge hacia cero por el Teorema 9.1.1. El segundo en virtud del Lema 8.2.11 y el tercero, gracias al Lema 9.1.5, lo podemos acotar por $\|u - u_h\|_{H^{-1}(\Omega)}$. La convergencia *-débil de los u_h implica la convergencia fuerte en $H^{-1}(\Omega)$. $\square$

Lema 9.1.9 *Supongamos $N = 2$, que los coeficientes $a_{i,j} \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$, $f(\cdot, 0) \in L^{p/2}(\Omega)$, $f_2 \in W^{-1,p}(\Omega)$ y para todo $M > 0$ existe una función $\phi_M \in L^2(\Omega)$ de tal manera que se cumple la condición de Lipschitz local* (8.1.1). *Para todo $h > 0$ sea $u_h \in K_h$, tales que $u_h \to u$ *-débilmente en $L^\infty(\Omega)$. Entonces*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|y_h(u_h) - y_{u_h}\|_{L^2(\Omega)}}{h} = 0.$$

Demostración. Como $y_h(u_h)$ y y_{u_h} son los estados discreto y continuo asociados al mismo control, siguiendo exactamente la demostración del Lema 8.2.7 se obtiene que para todo $\psi \in L^2(\Omega)$

$$(\psi, y_{u_h} - y_h(u_h)) \leq Ch\|y_{u_h} - y_h(u_h)\|_{H^1(\Omega)}\|z_\psi - z_{\psi,h}\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch\|y_{u_h} - y_h(u_h)\|_{H^1(\Omega)}\|\psi\|_{L^2(\Omega)},$$

donde recordemos que z_ψ es la solución del problema (8.2.7) introducido en la página 177 y $z_{\psi h}$ es la solución de (8.2.10). Así

$$\frac{1}{h}\|y_{u_h} - y_h(u_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|y_{u_h} - y_h(u_h)\|_{H^1(\Omega)}$$

y podemos aplicar le lema anterior. La prueba está completa. □

Lema 9.1.10 *Para todo $h > 0$ sea $u_h \in K_h$, tales que $u_h \to u$ *-débilmente en $L^\infty(\Omega)$. Entonces*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|y_{u_h} - \Pi_h y_{u_h}\|_{L^2(\Omega_h)}}{h} = 0.$$

Demostración. Para la demostración aprovechamos que $\Pi_h y_{u_h} \in W^{1,p}(\Omega_h)$ usamos el lema de interpolación 8.2.3 y se tiene que

$$\|y_{u_h} - \Pi_h y_{u_h}\|_{L^p(\Omega_h)} = \|y_{u_h} - \Pi_h y_{u_h} - \Pi_h(y_{u_h} - \Pi_h y_{u_h})\|_{L^p(\Omega_h)} \leq Ch\|y_{u_h} - \Pi_h y_{u_h}\|_{W^{1,p}(\Omega_h)}$$

y el resultado se obtiene dividiendo por h y aplicando el Lema 9.1.7. □

Teorema 9.1.11 *Supongamos $N = 2$, que los coeficientes $a_{i,j} \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$, $f(\cdot, 0) \in L^{p/2}(\Omega)$, $f_2 \in W^{-1,p}(\Omega)$ y para todo $M > 0$ existe una función $\phi_M \in L^2(\Omega)$ de tal manera que se cumple la condición de Lipschitz local* (8.1.1). *Para todo $h > 0$ sea $u_h \in K_h$, tales que $u_h \to u$ *-débilmente en $L^\infty(\Omega)$. Entonces*

$$\lim_{h\to 0} \|y_h(u_h) - y_u\|_{L^\infty(\Omega)} = 0. \tag{9.1.8}$$

Demostración. Gracias a la desigualdad triangular tenemos

$$\|y_h(u_h) - y_u\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq \|y_h(u_h) - y_{u_h}\|_{L^\infty(\Omega_h)} + \|y_{u_h} - y_u\|_{L^\infty(\Omega_h)}.$$

El segundo sumando converge hacia cero por el Teorema 9.1.1. El primero lo podemos acotar de nuevo mediante la desigualdad triangular con

$$\|y_h(u_h) - y_{u_h}\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq \|y_h(u_h) - \Pi_h y_{u_h}\|_{L^\infty(\Omega_h)} + \|\Pi_h y_{u_h} - y_{u_h}\|_{L^\infty(\Omega_h)}.$$

Gracias al Lema (8.2.3), podemos acotar el segundo sumando:

$$\|\Pi_h y_{u_h} - y_{u_h}\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq Ch^{1-\frac{N}{p}}\|y_{u_h}\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Como $\{u_h\}_{h>0}$ está uniformemente acotada, debido al Teorema 9.1.1 y_{u_h} también lo está en $W^{1,p}(\Omega)$. Luego este segundo sumando tiende hacia cero. Para acotar $\|y_h(u_h) - \Pi_h y_{u_h}\|_{L^\infty(\Omega_h)}$, tenemos en cuenta (8.2.11), que nos da la equivalencia entre las normas de Sobolev en espacios de dimensión finita y obtenemos, teniendo en cuenta que $N = 2$ y aplicando de nuevo la desigualdad triangular

$$\|y_h(u_h) - \Pi_h y_{u_h}\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq \frac{C}{h}\|y_h(u_h) - \Pi_h y_{u_h}\|_{L^2(\Omega_h)} \leq$$

$$C\left(\frac{\|y_h(u_h) - y_{u_h}\|_{L^2(\Omega_h)}}{h} + \frac{\|y_{u_h} - \Pi_h y_{u_h}\|_{L^2(\Omega_h)}}{h}\right).$$

Ahora podemos aplicar los Lemas 9.1.9 y 9.1.10 y deducir que esta cantidad converge hacia cero. Así que hemos demostrado que

$$\lim_{h\to 0}\|y_h(u) - y_u\|_{L^\infty(\Omega_h)} = 0.$$

Nótese que al ser $y_u \in C(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)$, $\|y_u\|_{L^\infty(\Omega\setminus\Omega_h)}$ tiende a cero al decrecer h, con lo que ya tenemos el resultado. $\square$

Ya estamos en condiciones para probar que los controles óptimos discretos convergen hacia la solución del problema. Una de las hipótesis clave para probar la convergencia de las discretizaciones es la estabilidad débil por la izquierda.

Definición 9.1.1 *Diremos que el problema de control* (P_δ) *es débilmente estable por la izquierda en* δ *si*

$$\lim_{\delta'\nearrow\delta}\inf(P_{\delta'}) = \inf(P_\delta).$$

Notemos que la estabilidad débil por la derecha

$$\lim_{\delta'\searrow\delta}\inf(P_{\delta'}) = \inf(P_\delta) \tag{9.1.9}$$

siempre se satisface. En efecto, sea u_δ una solución de (P_δ). Como K está acotado se deduce la existencia de una sucesión $\{\delta_j\}$ tal que $\delta_j \searrow \delta$ cuando $j \to \infty$ y $\lim_{j\to\infty} u_{\delta_j} = \bar{u}$ *-débilmente en $L^\infty(\Omega)$ para algún $\bar{u} \in K$, siendo u_{δ_j} una solución de (P_{δ_j}). Si y_j e $\bar{y}$

son los estados asociados a u_{δ_j} y $\bar{u}$ respectivamente, tenemos que $y_j \to \bar{y}$ uniformemente en $\bar{\Omega}$. Por lo tanto $\bar{u}$ es un control admisible para (P_δ). Ahora, usando la convexidad en la tercera variable de L y la admisibilidad de u_δ para cada $(P_{\delta'})$, con $\delta' > \delta$, obtenemos

$$\inf(P_\delta) \leq J(\bar{u}) \leq \liminf_{j\to\infty} J(u_{\delta_j}) = \lim_{\delta' \searrow \delta} \inf(P_{\delta'}) \leq J(u_\delta) = \inf(P_\delta),$$

lo que prueba (9.1.9).

Por lo tanto la estabilidad débil por la izquierda lo que nos viene a asegurar es que $\inf(P_\delta)$ es una función continua en δ.

Hay problemas no débilmente estables por la izquierda. Veamos dos ejemplos de problemas no débilmente estables por la izquierda. El primero es en dimensión finita y sirve para ilustrar geométricamente que la falta de estabilidad débil por la izquierda implica que el problema numéricamente estará mal condicionado.

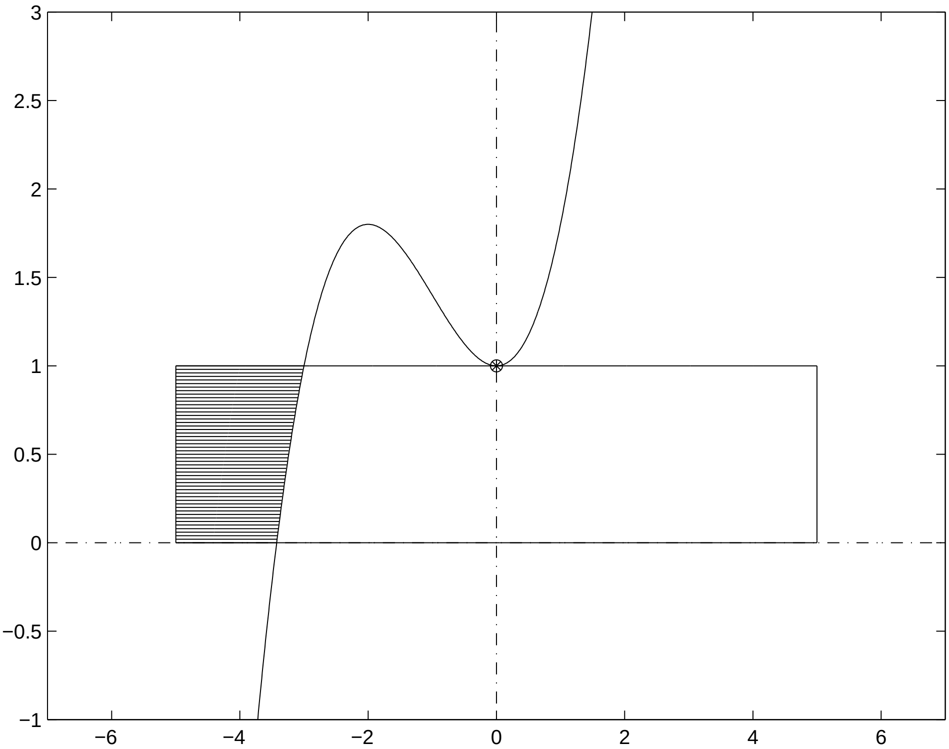
Ejemplo 9.1.1 *Consideremos el problema*

$$(Q_\delta) \begin{cases} \text{Minimizar } x^2 + (y-1)^2 \\ -5 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{5}x^2 - y + 2 \leq \delta. \end{cases}$$

El problema (Q_δ) no es débilmente estable por la izquierda para $\delta = 1$. En efecto, $\inf(P_1) = 0$, alcanzándose la solución en el punto $(0, 1)$. Si tomamos $\delta' < 1$, entonces debe cumplirse que $1 \geq y > (1/5)x^3 + (3/5)x^2 + 1 = x^2((1/5)x + 3/5) + 1$, por lo tanto se debe tener $x + 3 < 0$, o lo que es lo mismo $x < -3$. De donde se deduce que

$$\lim_{\delta' \nearrow 1} \inf(P_{\delta'}) \geq 9 > \inf(P_1).$$

Obsérvese que el problema es que para $\delta = 1$ la región admisible tiene un punto aislado, que en este caso es donde se alcanza el mínimo.



A continuación presentamos un problema de control no débilmente estable por la izquierda.

Ejemplo 9.1.2 *Sea* $\Omega = B(0,1)$ *en* $\mathbb{R}^n$ *y* Γ *su frontera. Dada* $u \in L^\infty(\Omega)$ *consideramos la ecuación en derivadas parciales*

$$\begin{cases} -\Delta y_u &= u \quad \text{en } \Omega \\ y_u &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

Sea

$$z(x) = 2\left(1 - \|x\|^2\right).$$

Es claro que z *cumple la ecuación en derivadas parciales*

$$\begin{cases} -\Delta z &= 4n \quad \text{en } \Omega \\ z &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

y además $z(0) = 2$.

Sea

$$g(t) = \begin{cases} t & si\ t \leq 1 \\ 1 & si\ t > 1 \end{cases}$$

Planteamos el siguiente problema de control

$$(P_\delta) \begin{cases} \min J(u) = \int_\Omega (u - 4n)^2 \, dx \\ u \in L^\infty(\Omega) \ g(y_u) \leq \delta \ \ en \ \Omega. \end{cases}$$

Veamos que nuestro ejemplo no es débilmente estable por la izquierda en $\delta = 1$.

La solución a (P_δ) *se alcanza al tomar* $u_1 = 4n$, *con lo que* $y_{u_1} = z$, *se cumple que* $g(y_{u_1}) \leq 1 \leq \delta$ *y* $J(u) = 0$.

Sea $\delta' < 1$. *Sean* $u_{\delta'}$ *e* $y_{\delta'} = y_{u_{\delta'}}$ *tales que resuelvan* $(P_{\delta'})$. *Podemos demostrar existencia de solución para* $N = 2$ *o* $N = 3$ *mediante el método de tomar una sucesión minimizante. Por la forma del funcional, está sucesión está acotada en* $L^2(\Omega)$, *luego podemos extraer un subsucesión que converja débilmente en* $L^2(\Omega)$. *La sucesión de estados asociados converge entonces débilmente en* $H^2(\Omega)$, *luego uniformemente, y se tiene así que el control límite es admisible. El resto se concluye como en la prueba del Teorema 9.1.3. Si tomasemos el control en un conjunto de controles* U_{ad} *acotado, cerrado y convexo (al que perteneciera el control* $u = 4n$*), se demuestra existencia de solución para cualquier dimensión.*

Forzosamente $y_{\delta'}(0) < 1$ *y por tanto* $1 \leq \|y_{\delta'} - z\|_{L^\infty(\Omega)}$ *ya que tanto* $y_{\delta'}(x)$ *como* $z(x)$ *son funciones continuas. Además* $y_{\delta'} - z$ *resuelve el problema*

$$\begin{cases} -\Delta\,(y_{\delta'} - z) &=& u_{\delta'} - 4n & en\ \Omega \\ y_{\delta'} - z &=& 0 & sobre\ \Gamma, \end{cases}$$

con lo que se tiene la desigualdad

$$1 \leq \|y_{\delta'} - z\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|y_{\delta'} - z\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|u_{\delta'} - 4n\|_{L^2(\Omega)} = C\sqrt{J(u_{\delta'})}.$$

donde C *es una constante que no depende de* δ'. *Por lo tanto para todo* $\delta' < 1$

$$\inf(P_{\delta'}) \geq \frac{1}{C^2} > 0$$

y es imposible que se de la estabilidad por la izquierda.

Sin embargo, casi todos los problemas son débilmente estables por la izquierda.

Teorema 9.1.12 *Sea δ_0 como en el Teorema 9.1.3. Entonces, para todo $\delta > \delta_0$ excepto a lo sumo un conjunto numerable, el problema (P_δ) es débilmente estable por la izquierda.*

Demostración. Sea δ_0 el número obtenido en el Teorema 9.1.3. Si definimos $\varphi : [\delta_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por $\varphi(\delta) = \inf(P_\delta)$, entonces φ es una función monótona decreciente y por lo tanto es continua en cada punto de $[\delta_0, +\infty)$ excepto a lo sumo en un número contable de ellos. Pero como ya vimos, la condición de estabilidad débil por la izquierda es equivalente a la continuidad de φ en δ, lo que prueba el teorema. □

Para problemas débilmente estables por la izquierda tenemos el siguiente resultado. Casas [17] da una prueba de este resultado en el caso de que el estado sea regular. La clave es demostrar que los estados convergen uniformemente.

Definición 9.1.2 *Dada una familia de elementos $\{u_h\}_{h>0}$, con $u_h \in K_h$ para cada $h > 0$, diremos que u es un punto de acumulación de $\{u_h\}_{h>0}$ si existe una subsucesión $\{u_{h_k}\}_{k=1}^{\infty}$, con $h_k \to 0$ tal que $u_{h_k} \to u$ *-débilmente en $L^\infty(\Omega)$.*

Obviamente, de las hipótesis hechas sobre los K_h, para toda familia distinta del vacío existen puntos de acumulación, y estos pertenecen a K. Gracias a la convexidad de L en la tercera variable, tenemos el siguiente resultado.

Lema 9.1.13 *Sea $\{u_{h_k}\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión con $h_k \to 0$, $u_{h_k} \to u$ *-débilmente en $L^\infty(\Omega)$. Entonces*

$$J(u) \leq \liminf_{k\to\infty} J_{h_k}(u_{h_k}).$$

Demostración. Sabemos que existe una sucesión v_{h_k} de combinaciones convexas finitas de los u_{h_k} que converge fuertemente hacia u en $L^p(\Omega)$ para algún $p \in (1, \infty)$:

$$v_{h_k} = \sum_{j=k}^{n(k)} \lambda_{k,j} u_{h_j},$$

con $\lambda_{k,j} \geq 0$, $\displaystyle\sum_{j=k}^{n(k)} \lambda_{k,j} = 1$, $\displaystyle\lim_{k\to\infty} v_{h_k} = u$ en $L^p(\Omega)$.

Así podemos escribir

$$J(u) = \int_\Omega L(x, y_u, u)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_{h_k}} L(x, y_u, v_{h_k})dx \leq$$

$$\leq \liminf_{k\to\infty} \sum_{j=k}^{n(k)} \lambda_{k,j} \int_{\Omega_{h_k}} L(x, y_u, u_{h_j})dx \leq$$

$$\leq \limsup_{k\to\infty} \sum_{j=k}^{n(k)} \lambda_{k,j} \int_{\Omega_{h_k}} (L(x, y_u, u_{h_j}) - L(x, y_{h_j}(u_{h_j}), u_{h_j}))dx +$$

$$+ \liminf_{k\to\infty} \sum_{j=k}^{n(k)} \lambda_{k,j} \int_{\Omega_{h_j}} L(x, y_{h_j}(u_{h_j}), u_{h_j})dx.$$

El segundo sumando es $\liminf_{k\to\infty} J_{h_k}(u_{h_k})$. Como al final de la demostración del Teorema 9.1.3 se obtiene que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_{h_k}} |L(x, y_u, u_{h_k}) - L(x, y_{h_k}(u_{h_k}), u_{h_k})|dx = 0.$$

De aquí se sigue que

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=k}^{n(k)} \lambda_{k,j} \int_{\Omega_{h_k}} |L(x, y_u, u_{h_j}) - L(x, y_{h_j}(u_{h_j}), u_{h_j})|dx = 0.$$

La prueba está completa. □

Teorema 9.1.14 *Sea δ_0 como en el Teorema 9.1.3 y $\delta > \delta_0$. Si (P_δ) es débilmente estable por la izquierda, entonces existe $h_0 > 0$ tal que $(P_{\delta h})$ tiene al menos una solución u_h para $h \leq h_0$. Además cada punto $\bar{u}$ de acumulación de $\{u_h\}_{h\leq h_0}$ es solución de (P_δ). Finalmente*

$$\lim_{h\to 0} J_h(u_h) = \inf(P_\delta). \tag{9.1.10}$$

Demostración. Puesto que cada K_h es compacto y J_h es continua, la existencia de solución de $(P_{\delta h})$ quedará establecida si probamos que el conjunto de controles admisibles para $(P_{\delta h})$ es no vacío. Para ello sea $u_0 \in K$ un control admisible para el problema (P_{δ_0}) y tomemos $u_{0h} \in K_h$ de tal forma que $u_{0h} \to u_0$ c.t.p. $x \in \Omega$. Como $u_{0h} \to u$ en cada $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, entonces, gracias a los teoremas anteriores, $y_h(u_{0h}) \to y_{u_0}$ uniformemente en $\bar{\Omega}$. Ya que $g(x, y_{u_0}(x)) \leq \delta_0$ para cada $x \in \Omega$, se deduce de la convergencia uniforme y la relación $\delta > \delta_0$ la existencia de un $h_0 > 0$ tal que $g(x, y_h(u_{0h})) \leq \delta$ para todo $x \in \bar{\Omega}$ y cada $h \leq h_0$. Así se concluye que (P_{δ_h}) posee solución para cada $h \leq h_0$.

Sea ahora $u_{\delta h}$ una solución de $(P_{\delta h})$, $h \leq h_0$, cuyo estado asociado será denotado y_{δ_h}. Puesto que $\{u_{\delta h}\}_{h\leq h_0} \subset K$ y K está acotado, podemos extraer una subsucesión $\{u_{\delta h_k}\}$

de forma que $h_k \to 0$ y $u_{\delta h_k} \to \bar{u}$ *débilmente en $L^\infty(\Omega)$ para algún $\bar{u} \in K$. Probaremos que $\bar{u}$ es una solución de (P_δ). Sea $\bar{y}$ el estado asociado a $\bar{u}$. Puesto que $y_{\delta h_k} \to \bar{y}$ uniformemente en Ω y $g(x_j, y_{\delta h_k}(x_j)) \leq \delta$ para cada nodo de la triangulación, se deduce que $g(x, \bar{y}(x)) \leq \delta$ para cada $x \in \bar{\Omega}$, y por lo tanto $\bar{u}$ es un control admisible para (P_δ).

Tomemos $\delta' \in (\delta_0, \delta)$ y sea $u_{\delta'}$ una solución de (P'_δ). Para cada $h \leq h_0$ tomemos $u_{\delta' h} \in K_h$ de forma que $u_{\delta' h} \to u_{\delta'}$ c.t.p. en Ω. De la convergencia uniforme $y_h(u_{\delta' h}) \to y_{u_{\delta'}}$ y la relación $g(x, y_{\delta'}(x)) \leq \delta' < \delta$ para cada $x \in \Omega$, se deduce la existencia de $h_{\delta'} > 0$ tal que $g(x, y_h(u_{\delta' h})(x)) \leq \delta$ para todo $x \in \Omega$ y todo $h \leq h_{\delta'}$, es decir, $u_{\delta' h}$ es un control admisible para $(P_{\delta h})$ siempre que $h \leq h_{\delta'}$. De aquí se obtiene que $J_{h_k}(u_{\delta h_k}) \leq J_{h_k}(u_{\delta' h_k})$ para cada k suficientemente grande. Utilizando el Lema 9.1.13 se sigue que

$$J(\bar{u}) \leq \liminf_{k\to\infty} J_{h_k}(u_{\delta h_k}) \leq \liminf_{k\to\infty} J_{h_k}(u_{\delta' h_k}) = J(u_{\delta'}) = \inf(P_{\delta'}).$$

Por último, la condición de estabilidad por la izquierda conduce a

$$\inf(P_\delta) \leq J(\bar{u}) \leq \lim_{\delta' \nearrow \delta} (\inf(P_{\delta'})) = \inf(P_\delta),$$

lo que, junto on la admisibilidad de $\bar{u}$ para (P_δ) nos permite concluir que $\bar{u}$ es una solución de (P_δ). El resto del teorema es inmediato. □

Nota 9.1.1 *En el caso de la solución del problema sea única, se tiene que toda la familia converge *-débilmente hacia la solución del problema.*

Teorema 9.1.15 *Supongamos que se cumplen las hipótesis del teorema anterior y que además L es de clase C^2 en la tercera variable y existe $\alpha > 0$ tal que*

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(x, y, u) \geq \alpha > 0 \text{ para c.t.p. } x \in \Omega \text{ y todo } y, u \in \mathbb{R}.$$

*Para cada $h \leq h_0$ sea u_h una solución de $(P_{\delta h})$ y sea $\bar{u}$ un punto de acumulación de $\{u_h\}$ con $u_{h_k} \to \bar{u}$ *débilmente en $L^\infty(\Omega)$. Entonces*

$$\lim_{k\to\infty} \|\bar{u} - u_{h_k}\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Demostración. Por un lado

$$\int_\Omega (L(x, y_{h_k}(u_{h_k}), u_{h_k}) - L(x, \bar{y}, \bar{u}))dx = (J_{h_k}(u_{h_k}) - J(\bar{u})) + \int_{\Omega\setminus\Omega_{h_k}} L(x, y_{h_k}(u_{h_k}), u_{h_k})dx.$$

El primer sumando converge a cero por el teorema anterior y el segundo porque $\{L(x, y_{h_k}, u_{h_k})\}$ está dominada por una función $\psi_M \in L^1(\Omega)$. Así que

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega (L(x, y_{h_k}(u_{h_k}), u_{h_k}) - L(x, \bar{y}, \bar{u}))dx = 0. \tag{9.1.11}$$

Por otro lado

$$\int_\Omega (L(x, y_{h_k}(u_{h_k}), u_{h_k}) - L(x, \bar{y}, \bar{u}))dx = \int_\Omega (L(x, y_{h_k}(u_{h_k}), u_{h_k}) - L(x, \bar{y}, u_{h_k}))dx + \\ + \int_\Omega (L(x, \bar{y}, u_{h_k}) - L(x, \bar{y}, \bar{u}))dx. \tag{9.1.12}$$

Como en la demostración del Teorema 9.1.3

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega (L(x, y_{h_k}(u_{h_k}), u_{h_k}) - L(x, \bar{y}, u_{h_k}))dx = 0. \tag{9.1.13}$$

Como consecuencia de (9.1.11)–(9.1.13) se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega (L(x, \bar{y}, u_{h_k}) - L(x, \bar{y}, \bar{u}))dx = 0. \tag{9.1.14}$$

Haciendo un desarrollo de Taylor de orden 2 obtenemos que

$$\int_\Omega (L(x, \bar{y}, u_{h_k}) - L(x, \bar{y}, \bar{u}))dx = \int_\Omega \frac{\partial L}{\partial u}(x, \bar{y}, \bar{u})(u_{h_k} - \bar{u})dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(x, \bar{y}, v_k)(u_{h_k} - \bar{u})^2 dx,$$

donde v_k es un punto intermedio entre u_{h_k} y $\bar{u}$. Como u_{h_k} converge *débilmente hacia $\bar{u}$, el primer sumando converge hacia cero:

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \frac{\partial L}{\partial u}(x, \bar{y}, \bar{u})(u_{h_k} - \bar{u})dx = 0. \tag{9.1.15}$$

Por último tenemos que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(x, \bar{y}, v_k)(u_{h_k} - \bar{u})^2 dx \geq \frac{\alpha}{2}\|\bar{u} - u_{h_k}\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Por lo tanto podemos escribir

$$\frac{\alpha}{2}\|\bar{u} - u_{h_k}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_\Omega (L(x, \bar{y}, u_{h_k}) - L(x, \bar{y}, \bar{u}))dx - \int_\Omega \frac{\partial L}{\partial u}(x, \bar{y}, \bar{u})(u_{h_k} - \bar{u})dx$$

que converge hacia cero en virtud de (9.1.14) y (9.1.15). Así que $\|\bar{u} - u_{h_k}\|_{L^2(\Omega)}$ converge hacia cero, y por tanto la prueba está completa. □

9.2 Caso Neumann

Consideremos los conjuntos, operadores, y espacios descritos en las Secciones 8.1 y 8.3. Denotaremos Γ la frontera de Ω, que supondremos poligonal o poliédrica . Consideraremos también $a_0 \in L^{\frac{Np}{N+p}}(\Omega)$, $a_0 \geq 0$, $a_0 \not\equiv 0$ en Ω, $p > N$.

Sean K un subconjunto convexo, *débilmente cerrado, acotado y no vacío en $L^\infty(\Gamma)$, $\ell : \Omega \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de Carathéodory, convexa en la tercera variable y que cumple que para todo $M > 0$ existe $\psi_M \in L^1(\Gamma)$ tal que $|\ell(s, y, v)| \leq \psi_M(s)$ para c.t.p. $s \in \Gamma$, para todo $|y|$, $|v| \leq M$. Sea $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Formulamos el problema de control óptimo

$$(PN_\delta) \begin{cases} \min J(u) = \displaystyle\int_\Gamma \ell\left(s, y_u(s), u(s)\right) ds \\ u \in K \quad g\left(x, y_u(x)\right) \leq \delta \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \end{cases} \tag{9.2.1}$$

donde

$$\begin{cases} Ay + a_0 y = f(\cdot, y) + f_2 & \text{en } \Omega \\ \partial_{n_A} y = u & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \tag{9.2.2}$$

Aplicando las mismas técnicas que en el Teorema 3.1.1 y utilizando los resultados de regularidad de Dauge [47] tenemos al siguiente resultado.

Teorema 9.2.1 *Para cada $u \in K$ existe una única $y_u \in W^{1,p}(\Omega)$ solución de* (9.2.2)*. Además existe una constante C_K, que sólo depende una cota para K, tal que $\|y_u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C_K$ para todo $u \in K$. Finalmente si $u_j \to u$ *débilmente en $L^\infty(\Gamma)$ entonces $y_{u_j} \to y_u$ fuertemente en $W^{1,p}(\Omega)$.*

Análogamente al caso Dirichlet, se tiene el siguiente resultado sobre existencia de solución.

Teorema 9.2.2 *Existe un número $\delta_0 \in \mathbb{R}$ de forma que que el problema (PN_δ) posee al menos una solución para cada $\delta \geq \delta_0$, mientras que (PN_δ) no posee controles admisibles para $\delta < \delta_0$.*

Consideramos ahora el espacio U_h de elementos u de $L^\infty(\Gamma)$ de tal manera que sobre cada lado de un elemento T de $\mathcal{T}_h$ que esté sobre Γ, u es constante.

Para cada $u_h \in U_h$, definimos $y_h(u_h) \in W_h$ como el único elemento que cumple

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{i,j}(x)\partial_{x_i} y_h(u_h)(x)\partial_{x_j} z_h(x)dx + \int_\Omega a_0(x) y_h(u_h)(x) z_h(x)dx =$$
$$\int_\Omega f(x, y_h(u_h)(x)) z_h dx + \langle f_2, z_h\rangle_{\left(W^{1,p'}(\Omega)\right)'\times W^{1,p'}(\Omega)} + \int_\Gamma u_h(s) y_h(u_h)(s)ds \quad \forall z_h \in W_h, \tag{9.2.3}$$

Lema 9.2.3 *La ecuación* (9.2.3) *tiene una única solución.*

El problema de control discreto se formula entonces como

$$(PN_{\delta h}) \begin{cases} \min J_h(u_h) = \displaystyle\int_\Gamma \ell\left(s, y_h(u_h)(s), u_h(s)\right) ds \\ u_h \in K_h \quad g\left(x_j, y_h(u_h)(x_j)\right) \leq \delta \quad \forall j = 1 \ldots n(h), \end{cases} \tag{9.2.4}$$

donde $\{x_j\}_{j=1}^{n(h)}$ es el conjunto de vértices de $\mathcal{T}_h$.

Vamos a enunciar ahora los resultados de convergencia para nuestro problema. Las pruebas son muy similares a las del caso Dirichlet.

Lema 9.2.4 *Para todo $h > 0$, todo $u \in K$ y todo $u_h \in K_h$ existe $C > 0$ independiente de h tal que*

$$\|y_h(u_h) - y_h(u)\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|u - u_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Demostración. De la monotonía de f, la $H^1(\Omega)$ elipticidad de $a(\cdot,\cdot)$ y la continuidad de la traza en $H^1(\Omega)$ tenemos que

$$m\|y_h(u_h) - y_h(u)\|^2_{H^1(\Omega)} \leq a(y_h(u_h) - y_h(u), y_h(u_h) - y_h(u)) =$$

$$(f(x, y_h(u_h)) - f(x, y_h(u)), y_h(u_h) - y_h(u)) + \int_\Gamma (u - u_h)(y_h(u_h) - y_h(u))ds \leq$$

$$\leq \int_\Gamma (u - u_h)(y_h(u_h) - y_h(u))ds \leq \|u - u_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|y_h(u_h) - y_h(u)\|_{H^1(\Omega)}.$$

Por lo tanto

$$\|y_h(u_h) - y_h(u)\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{m}\|u - u_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

□

Teorema 9.2.5 *Supongamos que existe una función $\phi_M \in L^r(\Omega)$, $r > 2$ de tal manera que se cumple la condición de Lipschitz local* (8.1.1). *Supongamos además que la triangulación es de tipo no negativo. Para todo $h > 0$ sea $u_h \in K_h$, tales que $u_h \to u$ *-débilmente en $L^\infty(\Gamma)$. Entonces*

$$\lim_{h\to 0} \|y_h(u_h) - y_u\|_{L^\infty(\Omega)} = 0. \tag{9.2.5}$$

Demostración. El estado pertenece a $W^{1,p}(\Omega)$ y no tenemos estimaciones para el error, tan sólo un resultado de convergencia.

En este caso escribimos

$$\|y_h(u_h) - y_u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|y_h(u_h) - y_h(u)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|y_h(u) - y_u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

El segundo sumando converge a cero como consecuencia del Teorema 8.3.5.

Sabemos que $y_h(u_h) - y_h(u)$ soluciona el problema discreto

$$a(y_h(u_h) - y_h(u), z_h) = (f(x, y_h(u_h)) - f(x, y_h(u)), z_h) + \int_\Gamma (u_h - u) z_h ds \quad \forall z_h \in W_h,$$

donde

$$a(y,z) = \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega a_{i,j}(x)\partial_{x_i} y(x)\partial_{x_j} z(x)dx + \int_\Omega a_0(x)y(x)z(x)dx.$$

En este caso podemos aplicar el principio del máximo discreto (8.3.4), con lo que

$$\|y_h(u_h) - y_h(u)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|f(x, y_h(u)) - f(x, y_h(u_h))\|_{\left(W^{1,p'}(\Omega)\right)'} + \|u_h - u\|_{W^{-\frac{1}{p},p}(\Gamma)}.$$

Por un lado la convergencia *-débil de los u_h implica la convergencia fuerte en $W^{-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$.

Por otro lado

$$\|f(x, y_h(u)) - f(x, y_h(u_h))\|_{\left(W^{1,p'}(\Omega)\right)'} \leq \|\phi\|_{L^r(\Omega)}\|y_h(u) - y_h(u_h)\|_{H^1(\Omega)}.$$

Por el Lema 9.2.4

$$\|y_h(u_h) - y_h(u)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{m}\|u - u_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

La convergencia *-débil de los u_h implica la convergencia fuerte en $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Por lo tanto los estados convergen uniformemente. □

Vamos a dar ahora cuatro lemas análogos a los Lemas 8.2.10–8.2.13 y a los Lemas 9.1.7–9.1.10.

Lema 9.2.6 *Para todo $h > 0$ sea $u_h \in K_h$, tales que $u_h \to u$ *-débilmente en $L^\infty(\Gamma)$. Entonces*

$$\lim_{h\to 0} \|y_{u_h} - \Pi_h y_{u_h}\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 0.$$

Demostración. Podemos acotar $\|y_{u_h} - \Pi_h y_{u_h}\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ como

$$\|y_{u_h} - \Pi_h y_{u_h}\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \|y_{u_h} - y_u\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|y_u - \Pi_h y_u\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|\Pi_h y_u - \Pi_h y_{u_h}\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

El primer sumando converge hacia cero por el Teorema 9.2.1. El segundo en virtud del Lema 8.2.10. El tercero, gracias a la continuidad de Π_h (demostrada al principio de la prueba del Lema 8.2.10), lo podemos acotar por una constante que multiplica a $\|y_{u_h} - y_u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, que de nuevoconverge hacia cero. □

Lema 9.2.7 *Para todo $h > 0$ sea $u_h \in K_h$, tales que $u_h \to u$ *-débilmente en $L^\infty(\Gamma)$. Entonces*

$$\lim_{h\to 0} \|y_h(u_h) - y_{u_h}\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

Demostración. Podemos acotar $\|y_{u_h} - y_h(u_h)\|_{H^1(\Omega)}$ como

$$\|y_{u_h} - y_h(u_h)\|_{H^1(\Omega)} \leq \|y_{u_h} - y_u)\|_{H^1(\Omega)} + \|y_u - y_h(u)\|_{H^1(\Omega)} + \|y_h(u) - y_h(u_h)\|_{H^1(\Omega)}.$$

El primer sumando converge hacia cero por el Teorema 9.2.1. El segundo en virtud del Lema 8.2.11 y el tercero, gracias al Lema 9.2.4, lo podemos acotar por $\|u - u_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}$. La convergencia *-débil de los u_h implica la convergencia fuerte en $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. □

Lema 9.2.8 *Supongamos $N = 2$ y que los coeficientes $a_{i,j} \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$. Para todo $h > 0$ sea $u_h \in K_h$, tales que $u_h \to u$ *-débilmente en $L^\infty(\Gamma)$. Entonces*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|y_h(u_h) - y_{u_h}\|_{L^2(\Omega)}}{h} = 0.$$

Demostración. Como $y_h(u_h)$ y y_{u_h} son los estados discreto y continuo asociados al mismo control, siguiendo exactamente la demostración del Lema 8.3.3 se obtiene que para todo $\psi \in L^2(\Omega)$

$$(\psi, y_{u_h} - y_h(u_h)) \leq Ch\|y_{u_h} - y_h(u_h)\|_{H^1(\Omega)}\|z_\psi - z_{\psi,h}\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch\|y_{u_h} - y_h(u_h)\|_{H^1(\Omega)}\|\psi\|_{L^2(\Omega)},$$

donde recordemos que z_ψ es la solución del problema (8.3.3) introducido en la página 190 y $z_{\psi,h}$ es la correspondiente aproximación por elementos finitos. Así

$$\frac{1}{h}\|y_{u_h} - y_h(u_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|y_{u_h} - y_h(u_h)\|_{H^1(\Omega)}$$

y podemos aplicar le lema anterior. La prueba está completa. □

Lema 9.2.9 *Para todo $h > 0$ sea $u_h \in K_h$, tales que $u_h \to u$ *-débilmente en $L^\infty(\Gamma)$. Entonces*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|y_{u_h} - \Pi_h y_{u_h}\|_{L^2(\Omega)}}{h} = 0.$$

Demostración. Para la demostración aprovechamos que $\Pi_h y_{u_h} \in W^{1,p}(\Omega)$ usamos el lema de interpolación 8.2.3 y se tiene que

$$\|y_{u_h} - \Pi_h y_{u_h}\|_{L^p(\Omega)} = \|y_{u_h} - \Pi_h y_{u_h} - \Pi_h(y_{u_h} - \Pi_h y_{u_h})\|_{L^p(\Omega)} \le Ch\|y_{u_h} - \Pi_h y_{u_h}\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

y el resultado se obtiene dividiendo por h y aplicando el Lema 9.2.6. □

Teorema 9.2.10 *Supongamos $N = 2$, que los coeficientes $a_{i,j} \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$. Para todo $h > 0$ sea $u_h \in K_h$, tales que $u_h \to u$ *-débilmente en $L^\infty(\Gamma)$. Entonces*

$$\lim_{h\to 0} \|y_h(u_h) - y_u\|_{L^\infty(\Omega)} = 0. \tag{9.2.6}$$

Demostración. Gracias a la desigualdad triangular tenemos

$$\|y_h(u_h) - y_u\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|y_h(u_h) - y_{u_h}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|y_{u_h} - y_u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

El segundo sumando converge hacia cero por el Teorema 9.2.1. El primero lo podemos acotar de nuevo mediante la desigualdad triangular con

$$\|y_h(u_h) - y_{u_h}\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|y_h(u_h) - \Pi_h y_{u_h}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\Pi_h y_{u_h} - y_{u_h}\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Gracias al Lema (8.2.3), podemos acotar el segundo sumando:

$$\|\Pi_h y_{u_h} - y_{u_h}\|_{L^\infty(\Omega)} \le Ch^{1-\frac{N}{p}}\|y_{u_h}\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Como $\{u_h\}$ está uniformemente acotada, por el Teorema 9.2.1 y_{u_h} también lo está en $W^{1,p}(\Omega)$. Luego este segundo sumando tiende hacia cero. Para acotar $\|y_h(u_h) - \Pi_h y_{u_h}\|_{L^\infty(\Omega)}$, tenemos en cuenta (8.2.11), que nos da la equivalencia entre las normas de Sobolev en espacios de dimensión finita y obtenemos, teniendo en cuenta que $N = 2$ y aplicando de nuevo la desigualdad triangular

$$\|y_h(u_h) - \Pi_h y_{u_h}\|_{L^\infty(\Omega)} \le \frac{C}{h}\|y_h(u_h) - \Pi_h y_{u_h}\|_{L^2(\Omega)} \le$$

$$C\left(\frac{\|y_h(u_h) - y_{u_h}\|_{L^2(\Omega)}}{h} + \frac{\|y_{u_h} - \Pi_h y_{u_h}\|_{L^2(\Omega)}}{h}\right).$$

Ahora podemos aplicar los Lemas 9.2.8 y 9.2.9 y deducir que esta cantidad converge hacia cero. La prueba está completa. □

Por último, usando de nuevo el concepto de estabilidad débil por la izquierda, podemos probar que las soluciones de los problemas discretos convergen a las soluciones del problema continuo.

Definición 9.2.1 *Diremos que el problema de control* (PN_δ) *es débilmente estable por la izquierda en* δ *si*

$$\lim_{\delta' \nearrow \delta} \inf(PN_{\delta'}) = \inf(PN_\delta).$$

Definición 9.2.2 *Dada una familia de elementos* $\{u_h\}_{h>0}$*, con* $u_h \in K_h$ *para cada* $h > 0$*, diremos que* u *es un punto de acumulación de* $\{u_h\}_{h>0}$ *si existe una subsucesión* $\{u_{h_k}\}_{k=1}^{\infty}$*, con* $h_k \to 0$ *tal que* $u_{h_k} \to u$ **-débilmente en* $L^\infty(\Gamma)$*.*

Teorema 9.2.11 *Sea* δ_0 *como en el Teorema 9.2.2 y* $\delta > \delta_0$*. Entonces si* (PN_δ) *es débilmente estable por la izquierda, existe* $h_0 > 0$ *tal que* $(PN_{\delta h})$ *tiene al menos una solución* u_h *para* $h \leq h_0$*. Además cada punto* u *de acumulación de* $\{u_h\}_{h \leq h_0}$ *es solución de* (PN_δ)*. Finalmente*

$$\lim_{h \to 0} J_h(u_h) = \inf(PN_\delta).$$

Demostración. Puesto que cada K_h es compacto y J_h es continua, la existencia de solución de $(PN_{\delta h})$ quedará establecida si probamos que el conjunto de controles admisibles para $(PN_{\delta h})$ es no vacío. Para ello sea $u_0 \in K$ un control admisible para el problema (PN_{δ_0}) y tomemos $u_{0h} \in K_h$ de tal forma que $u_{0h} \to u_0$ c.t.p. $x \in \Gamma$. Como $u_{0h} \to u$ en cada $L^p(\Gamma)$, $1 \leq p < \infty$, entonces, gracias a los teoremas anteriores, $y_h(u_{0h}) \to y_{u_0}$ uniformemente en $\bar{\Omega}$. Ya que $g(x, y_{u_0}(x)) \leq \delta_0$ para cada $x \in \Omega$, se deduce de la convergencia uniforme y la relación $\delta > \delta_0$ la existencia de un $h_0 > 0$ tal que $g(x, y_h(u_{0h})) \leq \delta$ para todo $x \in \bar{\Omega}$ y cada $h \leq h_0$. Así se concluye que $(PN_{\delta h})$ posee solución para cada $h \leq h_0$.

Sea ahora $u_{\delta h}$ una solución de $(PN_{\delta h})$, $h \leq h_0$, cuyo estado asociado será denotado y_{δ_h}. Puesto que $\{u_{\delta h}\}_{h \leq h_0} \subset K$ y K está acotado, podemos extraer una subsucesión $\{u_{\delta h_k}\}$ de forma que $h_k \to 0$ y $u_{\delta h_k} \to \bar{u}$ *débilmente en $L^\infty(\Gamma)$ para algún $\bar{u} \in K$. Probaremos que $\bar{u}$ es una solución de (PN_δ). Sea $\bar{y}$ el estado asociado a $\bar{u}$. Puesto que

$y_{\delta h_k} \to \bar{y}$ uniformemente en Ω y $g(x_j, y_{\delta h_k}(x_j)) \leq \delta$ para cada nodo de la triangulación, se deduce que $g(x, \bar{y}(x)) \leq \delta$ para cada $x \in \bar{\Omega}$, y por lo tanto $\bar{u}$ es un control admisible para (PN_δ).

Tomemos $\delta' \in (\delta_0, \delta)$ y sea $u_{\delta'}$ una solución de (PN'_δ). Para cada $h \leq h_0$ tomemos $u_{\delta' h} \in K_h$ de forma que $u_{\delta' h} \to u_{\delta'}$ c.t.p. en Γ. De la convergencia uniforme $y_h(u_{\delta' h}) \to y_{u_{\delta'}}$ y la relación $g(x, y_{\delta'}(x)) \leq \delta' < \delta$ para cada $x \in \Omega$, se deduce la existencia de $h_{\delta'} > 0$ tal que $g(x, y_h(u_{\delta' h})(x)) \leq \delta$ para todo $x \in \Omega$ y todo $h \leq h_{\delta'}$, es decir, $u_{\delta' h}$ es un control admisible para $(PN_{\delta h})$ siempre que $h \leq h_{\delta'}$. De aquí se obtiene que $J_{h_k}(u_{\delta h_k}) \leq J_{h_k}(u_{\delta' h_k})$ para cada k suficientemente grande. Utilizando ahora la convexidad de ℓ respecto a la tercera componente se sigue que

$$J(\bar{u}) \leq \liminf_{k\to\infty} J_{h_k}(u_{\delta h_k}) \leq \liminf_{k\to\infty} J_{h_k}(u_{\delta' h_k}) = J(u_{\delta'}) = \inf(PN_{\delta'}).$$

Por último, la condición de estabilidad débil por la izquierda nos permiten concluir

$$\inf(PN_\delta) \leq J(\bar{u}) \leq \lim_{\delta' \nearrow \delta} (\inf(PN_{\delta'})) = \inf(PN_\delta),$$

lo que, junto con la admisibilidad de $\bar{u}$ para (PN_δ) prueba que $\bar{u}$ es una solución de (PN_δ). El resto del teorema es inmediato. □

Análogamente al caso distribuido, podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 9.2.12 *Supongamos que se cumplen las hipótesis del teorema anterior y que además ℓ es de clase C^2 en la tercera variable y existe $\alpha > 0$ tal que*

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial u^2}(s, y, u) \geq \alpha > 0 \text{ para c.t.p. } s \in \Gamma \text{ y todo } y, u \in \mathbb{R}.$$

*Para cada $h \leq h_0$ sea u_h una solución de (PN_h) y sea $\bar{u}$ un punto de acumulación de $\{u_h\}$ con $u_{h_k} \to \bar{u}$ *débilmente en $L^\infty(\Gamma)$. Entonces*

$$\lim_{k\to\infty} \|\bar{u} - u_{h_k}\|_{L^2(\Gamma)} = 0.$$

Bibliografía

[1] F. Abergel and E. Casas. Some optimal control problems of multistate equations appearing in fluid mechanichs. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 27(2):223–247, 1993.

[2] R.A. Adams. *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York, 1975.

[3] S. Agmon, A. Douglis, and L. Nirenberg. Estimates Near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations. I. *Comm. on Pure and Applied Mathematics*, XII:623–727, 1959.

[4] H. Amann. *Linear and Quasilinear Parabolic Problems. Vol. I.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1995. Abstract linear theory.

[5] H. Amann. *Linear and Quasilinear Parabolic Problems. Vol. II.* 1999. To appear.

[6] L. Boccardo. Problemi differenziali e parabiolici con dati misure. *Boll. UMI*, 7(11-A):439–461, 1997.

[7] J.F. Bonnans. Pontryagin's principle for the optimal control of semilinear elliptic systems with state constraints. In *30th IEEE Conference on Control and Decision*, pages 1976–1979, Brighton, England, 1991.

[8] J.F. Bonnans and E. Casas. Optimal control of semilinear multistate systems with state constraints. *SIAM J. Control Optim.*, 27(2):446–455, 1989.

[9] J.F. Bonnans and E. Casas. Un principe de Pontryagine pour le contrôle des systèmes elliptiques. *J. Differential Equations*, 90(2):288–303, 1991.

[10] J.F. Bonnans and E. Casas. Some stability concepts and their applications in optimal control problems. Technical Report 1081, IMA Preprint Series, December 1992.

[11] J.F. Bonnans and E. Casas. An extension of Pontryagin's principle for state-constrained optimal control of semilinear elliptic equations and variational inequalities. *SIAM J. Control Optim.*, 33(1):274–298, 1995.

[12] J.F. Bonnans and H. Zidani. Optimal control problems with partially polyhedric contraints. *SIAM J. Control Optim.*, 37(6), 1999.

[13] H. Brezis. *Análisis Funcional.* Alianza Editorial, Madrid, 1984.

[14] P. Cannarsa and V. Vespri. Generation of analytic semigroups in the L^p topology by elliptic operators in $\mathbb{R}^n$. *Israel J. Math.*, 61(3):235–255, 1988.

[15] H. Cartan. *Calcul Différentiel.* Hermann, Paris, 1967.

[16] E. Casas. Control of an elliptic problem with pointwise state constraints. *SIAM J. Control Optim.*, 24(6):1309–1318, 1986.

[17] E. Casas. Finite element approximations for some optimal control problems with pointwise state constraints. In R. Vichnevetsky and J.J.H. Miller, editors, *IMACS '91 13th World Congress on Computation and Applied Mathematics*, volume 3, pages 1165–1166, Dublin, 1991. Criterion Press.

[18] E. Casas. Finite element approximations for some state-constrained optimal control problems. In *Mathematics of the Analysis and Design of Process Control.* Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), 1992.

[19] E. Casas. Boundary control of semilinear elliptic equations with pointwise state constraints. *SIAM J. Control Optim.*, 31(4):993–1006, 1993.

[20] E. Casas. Pontryagin's principle for optimal control problems governed by semilinear elliptic equations. In F. Kappel and K. Kunisch, editors, *International Conference on Control and Estimation of Distributed Parameter Systems: Nonlinear Phenomena*, pages 97–114, Basel, 1994. Int. Series Num. Analysis. Birkhäuser.

[21] E. Casas. Pontryagin's principle for state-constrained boundary control problems of semilinear parabolic equations. Technical Report 1299, IMA Preprint Series, March 1995.

[22] E. Casas. Pontryagin's principle for state-constrained boundary control problems of semilinear parabolic equations. *SIAM J. Control Optim.*, 35(4):1297–1327, 1997.

[23] E. Casas and L.A. Fernández. Boundary control of quasilinear elliptic equations. Technical Report 782, INRIA Rocquencourt, February 1988.

[24] E. Casas and L.A. Fernández. Optimal control of quasilinear multistate elliptic systems. In A. Bensoussan and J.L. Lions, editors, *Analysis and Optimization of Systems*, pages 395–406, Berlin-Heidelberg-New York, 1988. Springer-Verlag. Lecture Notes in Control and Information Sciences 111.

[25] E. Casas and L.A. Fernández. Optimal control of quasilinear elliptic equations. In A. Bermúdez, editor, *Control of Partial Differential Equations*, pages 92–99, Berlin-Heidelberg-New York, 1989. Springer-Verlag. Lecture Notes in Control and Information Sciences 114.

[26] E. Casas and L.A. Fernández. Optimal control of quasilinear elliptic equations with non differentiable coefficients at the origin. *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid*, 4(2–3):227–250, 1991.

[27] E. Casas and L.A. Fernández. State-constrained control problems of quasilinear elliptic equations. In K.H. Hoffmann and W. Krabs, editors, *Optimal Control of Partial Differential Equations*, pages 11–25, Berlin-Heidelberg-New York, 1991. Springer-Verlag. Lecture Notes in Control and Information Sciences 149.

[28] E. Casas and L.A. Fernández. Distributed control of systems governed by a general class of quasilinear elliptic equations. *J. Differential Equations*, 104(1):20–47, 1993.

[29] E. Casas and L.A. Fernández. Optimal control of semilinear elliptic equations with pointwise constraints on the gradient of the state. *App. Math. Optim.*, 27(1):35–56, 1993. Corrigendum: **28** (1993), no. 3, 337–339.

[30] E. Casas and L.A. Fernández. Dealing with integral state constraints in control problems of quasilinear elliptic equations. *SIAM J. Control Optim.*, 33(2):568–589, 1995.

[31] E. Casas, L.A. Fernández, and M. Mateos. Second-order optimality conditions for semilinear elliptic control problems with constraints on the gradient of the state. *Control and Cybernetics*, 28(3):463–479, 1999.

[32] E. Casas, L.A. Fernández, and J. Yong. Optimal control of quasilinear parabolic equations. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 125A:545–565, 1995.

[33] E. Casas and M. Mateos. Uniform convergence of the finite element method for semilinear equations and applications to control theory. In *XV Congress on Differential Equations and Applications/V Congress on Applied Mathematics, Vol. I, II (Spanish) (Vigo, 1997)*, pages 1063–1068. Univ. Vigo, Vigo, 1998.

[34] E. Casas, M. Mateos, and J.-P. Raymond. Pontryagin's Principle for the Control of Parabolic Equations with Gradient State Constraints. To appear in Non Linear Analysis, 2000.

[35] E. Casas, J.-P. Raymond, and H. Zidani. Pontryagin's principle for local solutions of control problems with mixed control–state constraints. *Preprint, Université de Toulouse.*, 1998.

[36] E. Casas and F. Tröltzsch. Second Order Necessary and Sufficient Optimality Conditions for Optimization Problems and Applications to Control Theory. To appear.

[37] E. Casas and F. Tröltzsch. Second-order necessary optimality conditions for some state-constrained control problems of semilinear elliptic equations. *Applied Mathematics and Optimization*, 39:211–227, 1999.

[38] E. Casas and J. Yong. Maximum principle for state–constrained optimal control problems governed by quasilinear elliptic equations. *Differential Integral Equations*, 8(1):1–18, 1995.

[39] J. Céa. Approximation variationnelle des problèmes aux limites. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 14:345–444, 1964.

[40] L. Cesari. *Optimization—theory and applications*. Springer-Verlag, New York, 1983. Problems with ordinary differential equations.

[41] F. Chiarenza. L^p-regularity for systems of PDE. In Krbec, M. Kufner, and J. A. Rákosník, editors, *Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications*, volume 5, pages 1–32. Prometheus Publishing House, 1995.

[42] P. G. Ciarlet and P.A. Raviart. Maximum principle and uniform convergence for the finite element method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2:17–31, 1973.

[43] P.G. Ciarlet. Basic error estimates for elliptic problems. In P.G. Ciarlet and J.L. Lions, editors, *Handbook of Numerical Analysis*, volume II. Finite Element Methods (Part 1), pages 17–352. North-Holland, 1991.

[44] F. Clarke. A new approach to lagrange multipliers. *Mathematics in Operations Research*, 1(2):165–174, May 1976.

[45] F. Clarke. *Optimization and Nonsmooth Analysis.* Wiley, Toronto, 1983.

[46] D. Daners and P. Koch Medina. *Abstract evolution equations, periodic problems and applications.* Longman Scientific & Technical, Harlow, 1992.

[47] M. Dauge. Neumann and mixed problems on curvilinear polyhedra. *Integral Equations Operator Thoery*, pages 227–261, 1992.

[48] G. Dore and A. Venni. On the closedness of the sum of two closed operators. *Math. Z.*, 196(2):189–201, 1987.

[49] J. Dunn. On second order sufficient optimality conditions for structured nonlinear programs in infinite-dimension function spaces. In *Mathematical programming with data perturbations. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. 195.*, pages 83–107. Dekker, New York, 1998.

[50] I. Ekeland. On the variational principle. *J. Math. Anal. Appl.*, 47:324–353, 1974.

[51] I. Ekeland and R. Temam. *Analyse convexe et problèmes variationnels.* Dunod, 1974. Collection Études Mathématiques.

[52] H. O. Fattorini. Optimal control problems with state constraints for semilinear distributed-parameter systems. *J. Optim. Theory Appl.*, 88(1):25–59, 1996.

[53] H. O. Fattorini. Optimal control problems with state constraints for distributed parameter systems: the parabolic case. *preprint*, 1998.

[54] H. O. Fattorini. *Theory of Optimal Control Problems.* Cambridge University Press, 1998.

[55] H.O. Fattorini. Optimal control problems for distributed parameter systems governed by semilinear parabolic equations in L^1 and L^∞ spaces. In K.H. Hoffmann and W. Krabs, editors, *Optimal Control of Partial Differential Equations*, pages 60–80, Berlin-Heidelberg-New York, 1991. Springer-Verlag. Lecture Notes in Control and Information Sciences 149.

[56] L.A. Fernández. *Control Optimo de Sistemas Gobernados por Ecuaciones Elípticas Cuasilineales*. PhD thesis, Universidad de Cantabria, 1990.

[57] W. H. Fleming and R. W. Rishel. *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. Berlin, New York: Springer, 1975.

[58] W.H. Fleming. *Report of the panel on future directions in control theory: A mathematical perspective*. SIAM, Philadelphia, 1988.

[59] P. Grisvard. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Pitman, Boston-London-Melbourne, 1985.

[60] B. Hu and J. Yong. Pontryagin maximum principle for semilinear and quasilinear parabolic equations with pointwise state constraints. *SIAM J. Control Optim.*, 33(6):1857–1880, 1995.

[61] A. Ioffe. Necessary and sufficient conditions for a local minimum 3: second order conditions and augmented duality. *SIAM J. Control Optim.*, 17:266–288, 1979.

[62] D. Jerison and C. Kenig. The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains. *J. of Functional Analysis*, 130:161–219, 1995.

[63] R. Labbas and M. Moussaoui. Sur la résolution dans les espaces $L^q(L^p)$ d'un problème parabolique à coefficients mesurables bornés. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 323(8):889–893, 1996.

[64] O.A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov, and N.N. Ural'tseva. *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*. American Mathematical Society, Rhode Island, 1968.

[65] X. Li and J. Yong. *Optimal Control Theory for Infinite Dimensional Systems*. Birkhäuser, Boston, 1995.

[66] J.L. Lions. *Contrôle Optimal de Systèmes Gouvernés par des Equations aux Dérivées Partielles*. Dunod, Paris, 1968.

[67] J.L. Lions. *Contrôle de Systèmes Distribués Singuliers*. Dunod, Paris, 1983.

[68] J.L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux Limites non Homogènes*. Dunod, Paris, 1968.

[69] H. Maurer. First and second order sufficient optimality conditions in mathematical programming and optimal control. *Math. Programming Study*, 14:163–177, 1981.

[70] V.G. Maz'ja. *Sobolev Spaces*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1985.

[71] C.B. Morrey. *Multiple integrals in the calculus of variations*. Springer–Verlag, New York, 1966.

[72] J. Nečas. *Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*. Editeurs Academia, Prague, 1967.

[73] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko. *The mathematical theory of optimal processes*. A Pergamon Press Book. The Macmillan Co., New York, 1964. Translated by D. E. Brown.

[74] P.A. Raviart and J.M. Thomas. *Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Derivées Partielles*. Masson, 1992.

[75] J.-P. Raymond. Nonlinear boundary control of semilinear parabolic equations with pintwise sate constraints. *Disc. and Cont. Dyn. Syst.*, 3:341–370, 1997.

[76] J.-P Raymond and F. Tröltzsch. Second order necessary and sufficient optimality conditions for optimization problems and applications to control theory. *Discrete and continuous dynamical systems*, 6:431–450, April 2000.

[77] J.-P. Raymond and H. Zidani. Time optimal problems with boundary controls. *Differential and Integral Equations*, 2000.

[78] J.-P. Raymond and H. Zidani. Pontryagin's principle for state-constrained control problems governed by parabolic equations with unbounded controls. *SIAM J. Control Optim.*, 36(6):1853–1879, 1998.

[79] J.-P. Raymond and H. Zidani. Hamiltonian Pontryagin's principles for control problems governed by semilinear parabolic equations. *Appl. Math. Optim.*, 39(2):143–177, 1999.

[80] W. Schlag. Schauder and L^p estimates for parabolic systems via Campanato spaces. *Comm. Partial Differential Equations*, 21(7-8):1141–1175, 1996.

[81] J. Serrin. Pathological solutions of elliptic differential equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 18(3):385–387, 1964.

[82] Christian G. Simader. *On Dirichlet's Boundary Value Problem.* Springer-Verlag, 1972.

[83] J. Simon. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 146(4):65–96, 1987.

[84] G. Stampacchia. Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 15:189–258, 1965.

[85] H. Triebel. *Interpolation theory, function spaces, differential operators.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978.

[86] H. Triebel. *Interpolation theory, function spaces, differential operators.* Johann Ambrosius Barth, Heidelberg, second edition, 1995.

[87] G.M. Troianiello. *Elliptic Differential Equations and Obstacle Problems.* Plenum Press, New York and London, 1987.

[88] A. Unger. *Hinreichende Optimalitätsbedingungen 2. Ordnung und Konvergenz des SQP-Verfahrens für semilineare elliptische Randsteuerprobleme.* PhD thesis, TU Chemnitz-Zwickau, 1997.

[89] V. Vespri. Analytic semigroups generated in $H^{-m,p}$ by elliptic variational operators and applications to linear Cauchy problems. In Clemens et al., editor, *Semigroup theory and applications*, pages 419–431. Marcel Dekker, New York, 1989.

[90] Wolf von Wahl. The equation $u' + A(t)u = f$ in a Hilbert space and L^p-estimates for parabolic equations. *J. London Math. Soc. (2)*, 25(3):483–497, 1982.

[91] J. Warga. A Second Order Condition that Strengthens Pontryagin's Maximum Prinicple. *Journal of Differential Equations*, 28:284–207, 1978.

[92] J. Yong. Pontryagin maximum principle for semilinear second order elliptic partial differential equations and variational inequalities with state constraints. *Differential Integral Equations*, 5(6):1307–1334, 1992.

[93] E. Zeidler. *Applied Functional Analysis. Main Principles and Their Applications.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidleberg, Tokyo, 1995.