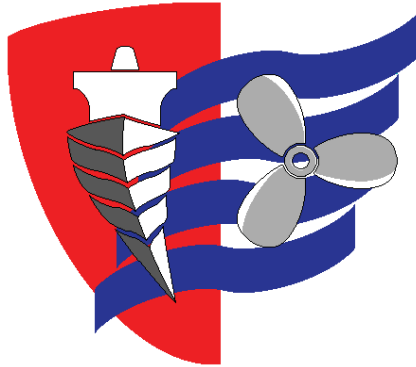


ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE NÁUTICA

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA



Trabajo Fin de Grado

APLICACIÓN DE LA TRIGONOMETRÍA RACIONAL EN LA NÁUTICA

**Rational trigonometry application in nautical
studies**

Para acceder al Título de Grado en

**INGENIERÍA NÁUTICA Y TRANSPORTE
MARÍTIMO**

Autor: Pablo Cabieces García

Director: José Iván Martínez García

Junio - 2018

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi sentido agradecimiento a las siguientes instituciones y personas que han ayudado a que el presente Trabajo Final de Grado llegue a buen término.

Vaya mi primera muestra de gratitud a la Universidad de Cantabria, en particular a la Escuela Técnica Superior de Náutica de Santander, por darme la oportunidad de cursar este Grado.

A mi director de trabajo, D. José Iván Martínez García, por su confianza en mí para sacar adelante este proyecto. Su plena disposición, paciencia y compromiso durante el desarrollo del Trabajo Fin de Grado no merecen menos, agradeciendo sus rápidas respuestas, así como sus consejos.

Al Departamento de Ciencias y Técnicas de la Navegación y de la Construcción Naval en su conjunto, del que he adquirido un abanico de destrezas y habilidades que me serán de gran ayuda en el mundo profesional.

A mis compañeros, con mención especial para Pablo Solana, Luis Moreno y Pablo Carriles que hicieron el camino académico más ameno a lo largo de los pasados cuatro años.

A la Sociedad de Salvamento y Seguridad Marítima, por su acogida en el Centro de Coordinación de Santander, agradecido por su generosidad y disposición en la sala de comunicaciones, muy especialmente a Don Pedro Laborda Ortiz y el Capitán José Luis Díaz Campa, así como al equipo de controladores de tráfico marítimo del centro.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS.....	3
ÍNDICE DE TABLAS.....	4
ÍNDICE DE ILUSTRACIONES.....	4
RESUMEN.....	6
ABSTRACT.....	7
1.-PLANTEAMIENTO DEL ESTUDIO.....	8
1.1-GENERAL.....	8
1.2-TÍTULO.....	8
1.3-DESTINATARIO.....	8
1.4-JUSTIFICACIÓN.....	9
1.5-OBJETIVOS.....	9
1.6-METODOLOGÍA.....	9
1.7-ANTECEDENTES.....	10
1.8-INTRODUCCIÓN.....	13
2.-LA TRIGONOMETRÍA EN EL ESTUDIO DE LAS CIENCIAS NÁUTICAS Y LA NAVEGACIÓN.....	13
2.1-INTRODUCCIÓN. TRIGONOMETRÍA PLANA.....	13
2.2-FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.....	14
2.3-FUNCIONES EN BASE A SUS CUADRANTES.....	18
2.4-IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS.....	23
2.5-UTILIZACIÓN DE LA TRIGONOMETRIA CONVENCIONAL SOBRE TRIÁNGULOS.....	24
2.5.1- TRIÁNGULO RECTÁNGULO.....	25
2.5.2.- TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO.....	25
2.6-TABLAS TRIGONOMÉTRICAS. OBTENCIÓN.....	27
2.7.- LA TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA.....	28
2.7.1.- REGLAS DE NEPER.....	30
2.7.2.- CONVENIO EN LAS CIENCIAS NÁUTICAS.....	32
3.-TRIGONOMETRIA RACIONAL.....	33
3.1.- FUNDAMENTOS Y MARCO TEÓRICO.....	33
3.2.-INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA RACIONAL.....	35
3.2.1.- <i>QUADRANCE</i>	43
3.2.2-EL <i>SPREAD</i> (DISPERSIÓN).....	46
3.2.3-INSTRUMENTOS Y MEDICIÓN.....	52
3.3-LEYES Y TEOREMAS DE LA TRIGONOMETRIA RACIONAL.....	54
3.3.1-PRIMERA LEY.DEL TEOREMA DE PITÁGORAS.....	57

3.3.2-LEY DE TRIPLE QUAD.....	57
3.3.3-LEY DE DISPERSION, LEY DE <i>SPREAD</i>	60
3.3.4-LEY DE INTERSECCIÓN.....	62
3.3.5-LEY DE TRIPLE DISPERSIÓN	63
3.3.6- ESQUEMA DE FÓRMULAS PRINCIPALES	63
3.3.7-CUADRO GENERAL COMPARATIVO	64
4.-APLICACIONES PRÁCTICAS EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DE CALCULO DE NAVEGACIÓN	65
4.1-DISTANCIA A FARO.....	65
4.2-CINEMÁTICA	67
4.2.1-PROBLEMA CINEMÁTICO DIRECTO.....	67
4.2.2-PROBLEMA CINEMÁTICO DE ALCANCE A UN BUQUE (RENDEZVOUS).....	71
4.3-NAVEGACIÓN	74
4.4-ESTIMA DIRECTA.....	79
4.5-ESTIMA INVERSA.....	83
4.6-TABLA ANÁLISIS RESULTADOS DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS	86
4.7- HOJA DE CÁLCULO Y TRIGONOMETRÍA RACIONAL.....	87
TABLA DE CONVERSIONES.	87
5.-BREVE INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA RACIONAL	89
6.-CONCLUSIONES.....	92
BIBLIOGRAFÍA.....	94
WEBGRAFÍA.....	95

ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura 1. Triángulos rectos semejantes. (Fuente: el autor)</i>	15
<i>Figura 2. Triángulo básico. (Fuente: el autor)</i>	16
<i>Figura 3. Relación numérica de lados de triángulos de 30 °, 60 ° y 45 °. (Fuente: el autor)</i>	17
<i>Figura 4. Funciones en sus diferentes cuadrantes como convención matemática. (Fuente: el autor)</i> .	20
<i>Figura 5. Ejemplo triángulo plano oblicuángulo. (Fuente: el autor)</i>	25
<i>Figura 6. Representación de un triángulo esférico en una esfera. (Fuente: el autor)</i>	28
<i>Figura 7. Triedro de un triángulo esférico. (Fuente: el autor)</i>	29
<i>Figura 8. Partes de un triángulo esférico rectángulo. (Fuente: el autor)</i>	31
<i>Figura 9. Diagrama de pentágono de Neper. (Fuente: el autor)</i>	31
<i>Figura 10. Aproximación clásica. (Fuente: el autor)</i>	36
<i>Figura 11. Ejemplo. (Fuente: el autor)</i>	37
<i>Figura 12: Separación de dos líneas. Aproximación ambigua. (Fuente: el autor)</i>	38
<i>Figura 13. Círculo y rectas. (Fuente: el autor)</i>	39
<i>Figura 14. Separación entre dos líneas. aproximación más correcta. (Fuente: el autor)</i>	40

Figura 15. Esquema seguido para la notación de los Spread. (Fuente: el autor)	41
Figura 16. Spreads en un triángulo y en un cuadrilátero. (Fuente: el autor).....	46
Figura 17. Retícula de representación. (Fuente: el autor)	47
Figura 18. Se muestran tres quadrances P, Q y R. (Fuente: el autor)	48
Figura 19. Triángulo recto 90 45 45. (Fuente: el autor)	50
Figura 20. Triángulo 90 60 30. (Fuente: el autor).....	50
Figura 21. Relación tamaño folio. (Fuente: Norma UNE-EN ISO 216).....	51
Figura 22. Paso a trabajar con quadrance. (Fuente: el autor)	52
Figura 23. Triángulo spreads y quadrances. (Fuente: el autor).....	55
Figura 24. Quadrance. (Fuente: el autor)	56
Figura 25. Quadrances afectos al spread. (Fuente: el autor).....	56
Figura 26. Pitágoras. (Fuente: el autor)	57
Figura 27. Colinealidad. (Fuente: el autor).....	57
Figura 28. Triángulo no rectángulo. (Fuente: el autor)	58
Figura 29. Representación quadrance perpendicular. (Fuente: el autor).....	59
Figura 30. Representación puntos colineales. (Fuente: el autor)	61
Figura 31. Esquema de cálculo convencional. (Fuente: el autor)	65
Figura 32. Esquema de cálculo con Trigonometría Racional. (Fuente: el autor).....	66
Figura 33. Esquema de cálculo convencional. (Fuente: el autor)	68
Figura 34. Cinemática. Esquema de cálculo con Trigonometría Racional. (Fuente: el autor)	69
Figura 35. Esquema de cálculo convencional. (Fuente: el autor)	71
Figura 36. Cinemática. Esquema de cálculo con Trigonometría Racional. (Fuente: el autor).....	73
Figura 37. Navegación corriente desconocida, esquema de cálculo convencional analítico. (Fuente: el autor).....	74
Figura 38. Navegación con corriente. Esquema Trigonometría Racional. (Fuente: el autor).....	76
Figura 39. Otra posible solución con la corriente de 30,8 descartada. (Fuente: el autor).....	78
Figura 40. Esquema triángulos de la estima y equivalentes en trigonometría racional. (Fuente: el autor).....	79
Figura 41. Triángulos Estima inversa. Notación convencional y trigonometría racional. (Fuente: el autor).....	83

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Funciones trascendentales (Fuente: el autor).....	18
Tabla 2. Signos de las funciones en virtud de su cuadrante. (Fuente: el autor)	22
Tabla 3. Grupo de fórmulas para la resolución de triángulos oblicuos planos (Fuente: el autor).....	26
Tabla 4. Cuadro general comparativo (Fuente: El autor)	64
Tabla 5. Análisis de resultados (Fuente: El autor)	86
Tabla 6. Spreads en forma fraccional. (Fuente: el autor).....	87
Tabla 7. Spreads en forma decimal. (Fuente: el autor)	88

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Tablilla de contabilidad, Sumer c 2350 a. de C. Permitía registrar y consultar datos tales como cuentas de ovejas y cabras. (Fuente: Mitología, todos los mitos y leyendas del mundo, 2018) 10

<i>Ilustración 2. Plimton 322. La primera tabla trigonométrica del mundo, cortesía de Rare Book and Manuscript Library, Universidad de Columbia, Nueva York. (Fuente: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086017300691, 2018)</i>	<i>12</i>
<i>Ilustración 3. Representación gráfica de los valores trigonométricos de las funciones en los diferentes cuadrantes (Fuente: Bowditch, The american practical navigator, 2018)</i>	<i>22</i>
<i>Ilustración 4. Ángulo referido a la región de doble rayado (Fuente: Geometría Métrica tomo I, Puig Adam 2018)</i>	<i>34</i>
<i>Ilustración 5. Spread protractor. Transportador de spreads escala decimal (Fuente: https://www.researchgate.net/figure/A-spread-protractor_fig4_284572258)</i>	<i>53</i>
<i>Ilustración 6. Spread protractor, transportador de spreads escala fraccional (Fuente: http://www.ossmann.com/protractor/)</i>	<i>54</i>
<i>Ilustración 7. Esquema del supuesto práctico 4.4. (Fuente: el autor)</i>	<i>65</i>

RESUMEN

En el presente trabajo se ha tratado de mostrar, en primer lugar, un desarrollo de los procedimientos de cálculo trigonométricos aplicados basados en el planteamiento de unas matemáticas anteriores a la trigonometría convencional utilizada habitualmente.

Inicialmente se ha procedido a explicar el origen de este planteamiento en un marco histórico y arqueológico, así como el cometido fundamental de su aplicación.

A continuación, se hace un repaso general de los conceptos más importantes de la trigonometría convencional.

Seguidamente se pasa a hacer una descripción del concepto intrínseco de la trigonometría racional, así como de sus bases y conceptos más importantes.

Más tarde se da una definición de los elementos constitutivos principales, desglosando en detalle tanto los elementos individuales como las relaciones que generan entre sí dichos elementos. A continuación, se pasa a la demostración y desarrollo detallado de las principales leyes y teoremas en las que se fundamenta y que se ha considerado pueden ser útiles para las aplicaciones subsiguientes y los cálculos objeto de estudio en el campo de las ciencias náuticas.

Para finalizar, se ha desarrollado un grupo de cálculos de interés para las aplicaciones náuticas, realizados tanto por el procedimiento tradicional como por el nuevo procedimiento alternativo de la aplicación de la trigonometría racional.

Se termina el presente estudio con unas conclusiones que han lugar en base a la comparación de resultados de uno y otro procedimiento para poder determinar qué procedimiento resulta más preciso.

PALABRAS CLAVE: trigonometría racional, navegación, cálculos, estima.

ABSTRACT

In this final Project of degree, it has been tried to carry out, in the first place, an analysis of the procedures of trigonometric calculations based on the approach of mathematics before the commonly used trigonometric concepts.

At first, the origin of this approach has been explained in a historical and archaeological frame, as well as the fundamental task of its application.

Thereby, a description of the intrinsic concept of rational trigonometry is made, also its most important bases and concepts.

Following this, definitions and main concepts will be done, breaking down in detail both, the individual elements and relationships generated between them.

After this, detailed development of the main laws, theorems and proofs will be shown and how these has been considered useful for subsequent applications and calculations object of study in the field of nautical sciences.

Finally, a group of interesting problem intended for nautical applications have been chosen and developed to carry out a study both ways, by traditional procedures and by the new alternative rational trigonometry.

The present study closes with some conclusions based on the comparison of these systems in order to determine which procedures can reach best rates of precision.

KEYWORDS: Rational trigonometry, navigation, calculus, Dead reckoning

1.-PLANTEAMIENTO DEL ESTUDIO

1.1-GENERAL

Tras varios años de utilización de la trigonometría como herramienta habitual de cálculo en diferentes áreas de la titulación de grado, se me plantearon las siguientes cuestiones.

¿Puede ser posible estudiar y aplicar la trigonometría de otra forma?

¿Se pueden resolver cálculos útiles para la navegación con una trigonometría diferente?

¿Serían estos cálculos de confianza?

En las siguientes líneas se va a tratar de averiguar si es posible resolver cálculos para la navegación y si éstos son fiables, sin tener que recurrir a las tablas trigonométricas y a las funciones trascendentales desarrolladas principalmente en el siglo XIV y atribuidas al matemático Madhava.¹

1.2-TÍTULO

Aplicación de la trigonometría racional en la náutica

1.3-DESTINATARIO

El estudio propuesto en el presente documento tiene por destinatario la Escuela Técnica Superior de Náutica de la Universidad de Cantabria, lugar donde se realizará la presentación como Trabajo de fin de Grado, al objeto de obtener la titulación de Grado en Ingeniería Náutica y Transporte Marítimo.

¹ Madhava de Sangamagrama, Matemático de la India medieval, de la Escuela de Kerala, a quien se atribuye series infinitas para seno, coseno tangente y arcotangente como inicio a los procesos finitos tradicionales del álgebra.

1.4-JUSTIFICACIÓN

La idea del presente estudio surge con la intención de mostrar un procedimiento de cálculo para la resolución de problemas útiles al marino desde una perspectiva matemática diferente y que pudiera resultar de interés en la formación académica de los alumnos, especialmente en aquellas materias vinculadas más específicamente al de la resolución y ejecución de cálculos de navegación y demás ejercicios de esta índole. De este modo, se hace un intento de proveer, tanto a estudiantes como a profesionales, así como a todos aquellos que encuentren en la resolución de problemas de navegación como una materia apasionante y de su interés, de una nueva perspectiva en la ejecución de los cálculos matemáticos.

1.5-OBJETIVOS

El objeto del presente documento tiene dos vertientes. Por un lado, se va a llevar a cabo una nueva formulación con planteamientos trigonométricos diferentes a los habitualmente utilizados. Por otra parte, se va a tratar los resultados obtenidos con la finalidad de demostrar cuál de los procedimientos ofrece mayor precisión en los cálculos comparando resultados.

Así mismo, se tratará de abordar la trigonometría de manera que se puedan llevar a cabo cálculos aplicados a la navegación con los planteamientos de la trigonometría racional y de la evitando la trigonometría convencional clásica.

1.6-METODOLOGÍA

La metodología que se va a seguir para el presente estudio consiste en el análisis previo del origen de la idea de la trigonometría racional como herramienta matemática para la resolución de cálculos. La lectura de la bibliografía y artículos publicados por varios profesores de la Universidad de Nueva Gales del Sur en Sídney, Australia, así como una asimilación y comprensión del contenido matemático de la

principal bibliografía disponible. Una vez llevada a cabo esta fase, se traslada a ser aplicado en diferentes ejercicios y problemas propuestos, todos ellos relacionados con el ámbito de la navegación marítima.

Los ejercicios propuestos son previamente resueltos por el procedimiento analítico clásico para continuar posteriormente a resolverse desde el enfoque de la trigonometría racional. En ambos casos se ha tratado de conservar el debido rigor en los cálculos al objeto de que el resultado comparativo final pueda ser lo más objetivo posible.

1.7-ANTECEDENTES

Marco histórico y arqueológico

A principios del siglo XX en una excavación arqueológica situada al sur del actual Irak, es encontrada una tablilla datada con unos 3700 años de antigüedad, es decir, producida entorno al siglo XVII A.C. Este artilugio de arcilla con inscripciones cuneiformes forma parte de un conjunto de elementos que la cultura de Mesopotamia nos muestra como parte de una serie de herramientas de cálculo y útiles de resolución matemáticos.



Ilustración 1. Tablilla de contabilidad, Sumer c 2350 a. de C. Permitía registrar y consultar datos tales como cuentas de ovejas y cabras. (Fuente: Mitología, todos los mitos y leyendas del mundo, 2018)

La tablilla fue hallada entorno al año 1922 en Larsa, una antigua ciudad Sumeria cerca del Golfo Pérsico y está datado entre los años 1822 y 1762 A.C. lo cual se correspondería con el tiempo de Hammurabi.²

Investigadores de la universidad de Nueva Gales del Sur en Australia, proponen que se trataba de una sofisticada tabla trigonométrica utilizada por los babilonios, siendo por tanto una evidencia de que los primeros cálculos trigonométricos surgen en Babilonia, aproximadamente 1000 años antes que en la antigua Grecia.

La idea principal mostrada por los investigadores es que se trataba de un pequeño compendio de cálculos trigonométricos basados en proporciones en vez de en círculos y ángulos como la corriente tradicional griega nos propone.

Los símbolos acuñados pudieron ser útiles para la resolución de problemas de tipo arquitectónico, agrimensura, construcción de templos y canales entre otros.

En este sentido, éste antiguo dispositivo de cálculo y su contenido se adelanta más de 10 siglos al Matemático y astrónomo Hiparco de Nicea, considerado por muchos como uno de los padres de la trigonometría, y cuyo trabajo se basa en los conceptos de ángulos de un triángulo, la longitud de sus lados y sus relaciones entre sí.

² Babilonia (actual Iraq), muerto hacia 1750 a.C. Sexto gobernante de la primera dinastía Amorita de Babilonia, conocido por su conjunto de leyes consideradas como las más antiguas de la historia de la humanidad. (Ver código de Hammurabi).



Ilustración 2. Plimton 322. La primera tabla trigonométrica del mundo, cortesía de Rare Book and Manuscript Library, Universidad de Columbia, Nueva York. (Fuente: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086017300691>, 2018)

1.8-INTRODUCCIÓN

Nos iniciamos en el campo de la trigonometría racional lo cual ha de conducirnos, no sin esfuerzos al principio, a abandonar algunos conceptos profundamente arraigados en nuestra cultura matemática como son los siguientes:

En primer lugar, abandonamos la idea de ángulo como tal, y en su lugar vamos a describir un triángulo rectángulo en términos del lado corto, lado largo y diagonal de un rectángulo.

La trigonometría moderna se basa en una lista de triángulos rectos con hipotenusa = 1 y aproximaciones a las longitudes laterales $\sin \theta$ y $\cos \theta$, junto con la relación entre ambas en la forma $\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$.

En la trigonometría racional, basado en las observaciones hechas en la anteriormente citada tablilla Plimpton 322, se trabaja con triángulos rectos caracterizados por tener el lado largo = 1, el lado corto exacto y el lado diagonal exacto.

2.-LA TRIGONOMETRÍA EN EL ESTUDIO DE LAS CIENCIAS NÁUTICAS Y LA NAVEGACIÓN

2.1-INTRODUCCIÓN. TRIGONOMETRÍA PLANA

La trigonometría es el área de las matemáticas que ocupa el estudio de las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos.

La trigonometría plana se ocupa de los triángulos planos, es decir, en una superficie plana.

La trigonometría esférica trata con triángulos esféricos, que se dibujan en la superficie de una esfera.

En la navegación, los métodos habituales de obtención de la situación por posicionamiento a partir de la observación de cuerpos celestes, utiliza los triángulos esféricos.

Para la medida de los ángulos se utiliza un método consistente en que un círculo pueda ser dividido en 360 grados ($^{\circ}$), que es la longitud angular de su circunferencia. Cada grado se puede dividir a su vez en 60 minutos ($'$) y cada minuto en 60 segundos ($''$). La medida angular de un arco se expresa generalmente en estas unidades, así un ángulo recto o cuadrante tiene 90° y un ángulo de semicírculo 180° . En navegación marítima las alturas, elevaciones, y coordenadas geográficas latitud y longitud son generalmente expresadas en grados, minutos y décimas de minutos. Los Azimuts habitualmente se expresan en grados y décimas. El sistema definido es por tanto un sistema sexagesimal.

En el sistema centesimal, que podemos encontrar por ejemplo en Francia, es habitual dividir el círculo en 400 grados centesimales (comúnmente llamados también grados), cada uno de los cuales son divididos en 100 minutos centesimales de 100 centésimos segundos cada uno.

Un radian es el ángulo subtendido en el centro de un círculo por un arco que tiene una longitud lineal igual al radio del círculo. Un círculo (360°) = 2π radianes, un semicírculo (180°) = π radianes, un ángulo recto (90°) = $\pi/2$ radianes. La longitud del arco de un círculo es igual al producto entre el radio y el ángulo subtendido en radianes.

2.2-FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las funciones trigonométricas son las diferentes proporciones o ratios entre los lados de un triángulo rectángulo plano, definido en relación con uno de sus ángulos agudos.

En la figura 1 siendo θ cualquier ángulo agudo. Desde cualquier punto R en la recta OA, se dibuja una recta perpendicular a OB en F. Desde cualquier otro punto R' en OA, se dibuja una recta perpendicular OB en F'.

Así los triángulos OFR y OF'R' son triángulos rectos semejantes porque todos sus correspondientes ángulos son iguales. Como en cualquier par de triángulos semejantes la relación de dos lados de un triángulo es igual a la relación de los dos lados correspondientes del otro triángulo, como se puede ver en la figura 1

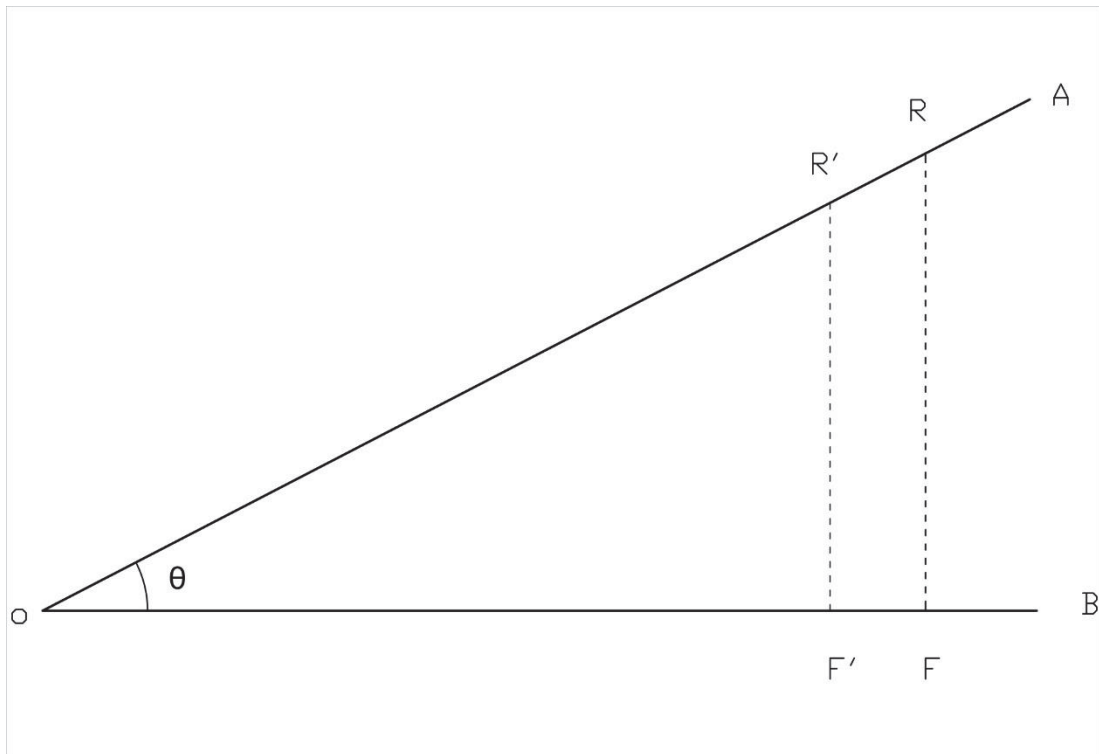


Figura 1. Triángulos rectos semejantes. (Fuente: el autor)

$$\frac{RF}{OF} = \frac{R'F'}{OF'} = \frac{RF}{OR} = \frac{R'F'}{OR'} \quad y \quad \frac{OF}{OR} = \frac{OF'}{OR'}$$

No importa en qué posición se encuentre el punto R en la recta OA, pues la relación entre las longitudes de cualquiera de los dos lados en el triángulo OFR tiene un valor constante. Así, para cualquier valor del ángulo agudo θ hay un conjunto fijo de valores para las relaciones de los diversos lados del triángulo. Dichas relaciones se definen matemáticamente con las siguientes expresiones:

$$\text{seno } \theta = \text{sen } \theta = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{coseno } \theta = \text{cosec } \theta = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tangente } \theta = \tan \theta = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}}$$

$$\text{cosecante } \theta = \text{cosec } \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado opuesto}}$$

$$\text{secante } \theta = \sec \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado adyacente}}$$

$$\text{cotangente } \theta = \cot \theta = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{lado opuesto}}$$

De las seis funciones principales, denotamos que las tres últimas son las recíprocas de las tres primeras, lo cual quedaría expresado del siguiente modo:

$$\text{sen } \theta = \frac{1}{\text{csc } \theta} \quad \text{csc } \theta = \frac{1}{\text{sen } \theta}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta} \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta} \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

En la siguiente figura 2, se puede apreciar que A, B y C son los ángulos de un triángulo rectángulo plano, con el ángulo recto en C. Los lados los nombramos como a, b, c, con ángulos opuestos etiquetados como A, B y C, respectivamente.

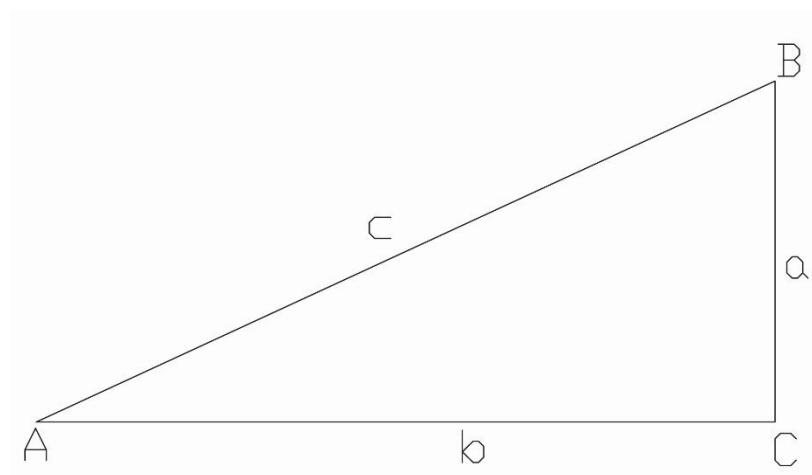


Figura 2. Triángulo básico. (Fuente: el autor)

Para el ángulo B, las seis funciones trigonométricas principales son:

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{c} = \cos A = \cos(90^\circ - B)$$

$$\cos B = \frac{a}{c} = \operatorname{sen} A = \operatorname{sen}(90^\circ - B)$$

$$\tan B = \frac{b}{a} = \tan A = \tan(90^\circ - B)$$

$$\sec B = \frac{c}{a} = \csc A = \csc(90^\circ - B)$$

$$\csc B = \frac{c}{b} = \sec A = \sec(90^\circ - B)$$

Dado que A y B son complementarios, estas relaciones muestran que el seno de un ángulo es el coseno de su complementario, la tangente de un ángulo es la cotangente de su complementario y la secante de un ángulo es la cosecante de su complementario. Por lo tanto, la función conjunta de un ángulo es la función de su complemento.

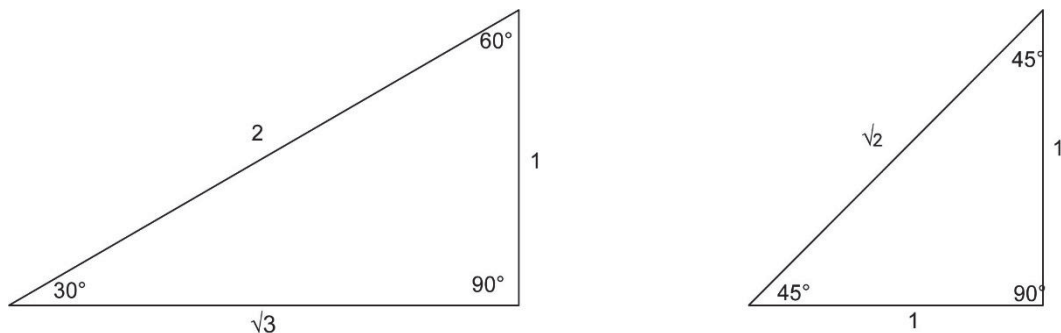


Figura 3. Relación numérica de lados de triángulos de 30°, 60° y 45°. (Fuente: el autor)

Función	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
Coseno	$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

Cotangente	$\frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
Secante	$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$	$\frac{2}{1} = 2$
Cosecante	$\frac{2}{1} = 2$	$\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

Tabla 1. Funciones trascendentales (Fuente: el autor)

$$\operatorname{sen}(90^\circ - A) = \cos A$$

$$\cos(90^\circ - A) = \operatorname{sen} A$$

$$\tan(90^\circ - A) = \cot A$$

$$\csc(90^\circ - A) = \sec A$$

$$\sec(90^\circ - A) = \csc A$$

$$\cot(90^\circ - A) = \tan A$$

El valor numérico de una función trigonométrica se denomina en ocasiones *función natural* para distinguir del logaritmo de una función. Dado que las relaciones de los triángulos rectángulos de 30° , 60° y 45° son las que se muestran en la figura 3, ciertos valores de las funciones básicas se pueden establecer de forma exacta como se muestra en la Tabla 1.

2.3-FUNCIONES EN BASE A SUS CUADRANTES

Al objeto de hacer que las funciones trigonométricas tengan una definición más general y puedan así operar con ángulos de mayor valor que 90° es habitual definir las funciones en términos de las coordenadas cartesianas rectangulares como se muestra en la figura 4 y teniendo muy presente el efecto del signo de la función.

Así, observamos que, suponiendo OR un radio de valor 1, por convención el signo de OR siempre es positivo. De igual modo se trabaja girando en sentido antihorario 360° desde la posición horizontal 0° con dirección positiva a lo largo del todo el eje X. Los 90° sería en su caso la dirección positiva a lo largo del eje Y.

El ángulo entre la posición de origen del radio y su posición en cualquier momento aumenta de 0° a 90° en el primer cuadrante, de 90° a 180° en el segundo cuadrante, de 180° a 270° en el tercero y de 270° a 360° en el cuarto cuadrante.

El valor numérico del seno de un ángulo es igual a la proyección del radio unidad en el eje Y. Así, de acuerdo con la definición dada en el punto 2.2 el seno del ángulo en el primer cuadrante de la figura 6 es $\frac{+y}{+OR}$. Si el radio O es igual a 1, $\text{sen } \theta = +y$. Como $+y$ es igual a la proyección del radio unidad OR sobre el eje Y, la función seno de un ángulo en el primer cuadrante en términos de coordenadas rectangulares cartesianas no contradice la definición dada en el punto 2.2

$$\text{sen } \theta = +y$$

$$\text{sen } (180^\circ - \theta) = +y = \text{sen } \theta$$

$$\text{sen } (180^\circ + \theta) = -y = -\text{sen } \theta$$

$$\text{sen } (360^\circ - \theta) = -y = \text{sen } (-\theta) = -\text{sen } \theta$$

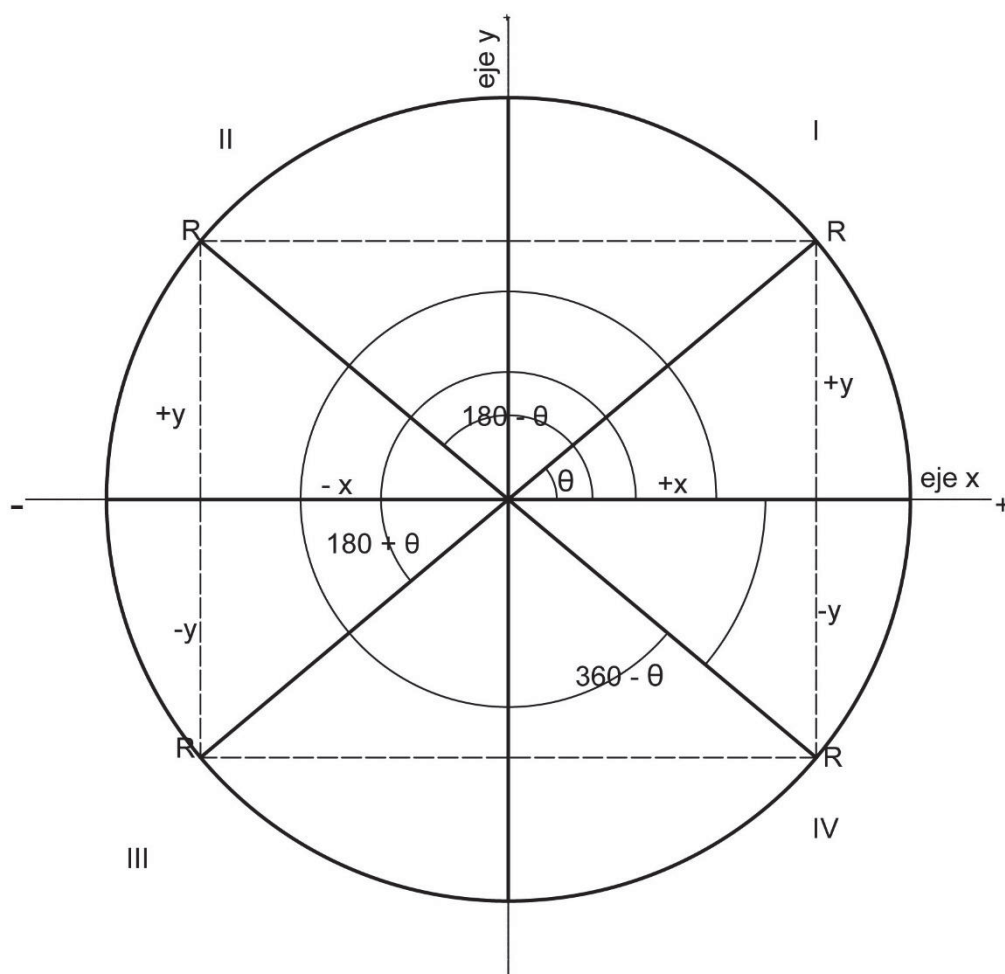


Figura 4. Funciones en sus diferentes cuadrantes como convención matemática. (Fuente: el autor)

El valor numérico del coseno de un ángulo es igual a la proyección del radio unidad sobre el eje X como muestra la Figura 4, entonces

$$\cos \theta = +x$$

$$\cos (180^\circ - \theta) = -x = -\cos \theta$$

$$\cos (180^\circ + \theta) = -x = -\cos \theta$$

$$\cos (360^\circ - \theta) = +x = \cos (-\theta) = \cos \theta$$

Para el caso de la tangente, su valor numérico de un ángulo es igual a la relación de las proyecciones del radio unidad en los ejes X e Y como se muestra también en la misma figura 4.

$$\tan \theta = \frac{+y}{+x}$$

$$(180^\circ - \theta) = \frac{+y}{-x} = -\tan \theta$$

$$\tan (180^\circ + \theta) = \frac{-y}{-x} = \tan \theta$$

$$\tan (360^\circ - \theta) = \frac{-y}{+x} = \tan (-\theta) = -\tan \theta$$

Las funciones de los ángulos cosecante, secante y cotangente en los diferentes cuadrantes están determinados de una forma similar del siguiente modo:

$$\csc \theta = \frac{1}{+x}$$

$$\csc (180^\circ - \theta) = \frac{1}{+y} = \csc \theta$$

$$\csc (180^\circ + \theta) = \frac{1}{-y} = -\csc \theta$$

$$\csc (360^\circ - \theta) = \frac{1}{-y} = \csc (-\theta) = -\csc \theta$$

$$\sec \theta = \frac{1}{+x}$$

$$\sec (180^\circ - \theta) = \frac{1}{-x} = -\sec \theta$$

$$\sec (180^\circ + \theta) = \frac{1}{-x} = -\sec \theta$$

$$\sec (360^\circ - \theta) = \frac{1}{+x} = \sec(-\theta) = \sec \theta$$

$$\cot \theta = \frac{+x}{+y}$$

$$\cot (180^\circ - \theta) = \frac{-x}{+y} = -\cot \theta$$

$$\cot (180^\circ + \theta) = \frac{-x}{-y} = \cot \theta$$

$$\cot (360^\circ - \theta) = \frac{+x}{-y} = \cot(-\theta) = -\cot \theta$$

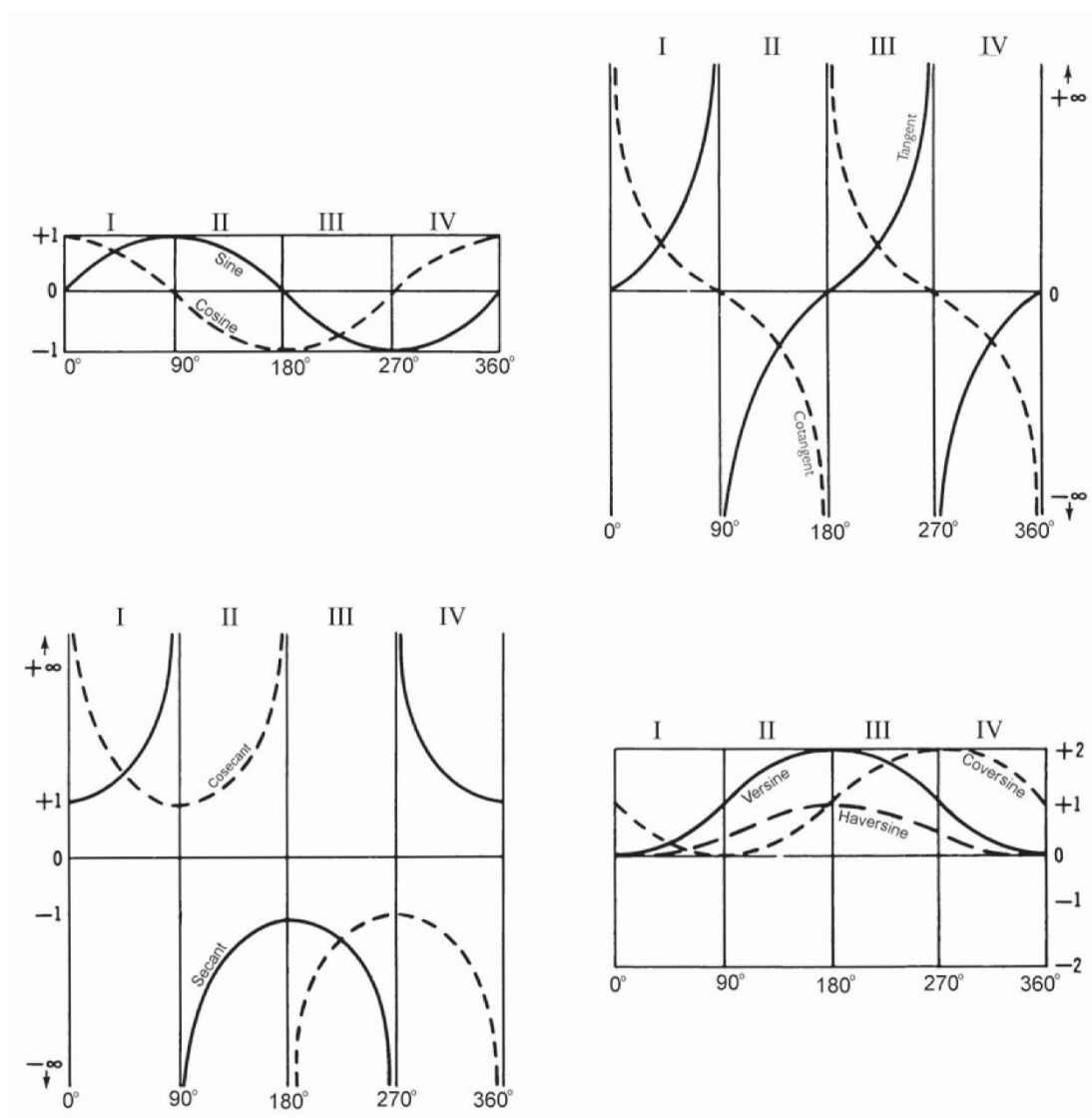


Ilustración 3. Representación gráfica de los valores trigonométricos de las funciones en los diferentes cuadrantes (Fuente: Bowditch, *The american practical navigator*, 2018)

	I	II	III	IV
Seno y cosecante	+	+	-	-
Coseno y secante	+	-	-	+
Tangente y cotangente	+	-	+	-

Tabla 2. Signos de las funciones en virtud de su cuadrante. (Fuente: el autor)

2.4-IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Las identidades trigonométricas se refieren a una igualdad que involucra funciones trigonométricas de θ , la cual es cierta para todos los valores de θ , excepto para aquellos valores en los que una de las funciones no está definida o para la cual un denominador en la igualdad es cero. Las identidades fundamentales son aquellas desde las cuales otras identidades se pueden derivar.

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{\csc \theta}$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}$$

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

$$\operatorname{sen} (90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\csc (90^\circ - \theta) = \sec \theta$$

$$\cos (90^\circ - \theta) = \operatorname{sen} \theta$$

$$\sec (90^\circ - \theta) = \csc \theta$$

$$\tan (90^\circ - \theta) = \cot \theta$$

$$\cot (90^\circ - \theta) = \tan \theta$$

$$\operatorname{sen} (-\theta) = -\operatorname{sen} \theta$$

$$\csc (-\theta) = -\csc \theta$$

$$\csc (-\theta) = \cos \theta$$

$$\sec (-\theta) = \sec \theta$$

$$\tan (-\theta) = -\tan \theta$$

$$\csc (-\theta) = -\cot \theta$$

$$\operatorname{sen} (90^\circ + \theta) = \cos \theta$$

$$\csc (90^\circ + \theta) = \sec \theta$$

$$\cos (90^{\circ} + \theta) = -\operatorname{sen} \theta$$

$$\sec (90^{\circ} + \theta) = -\operatorname{csc} \theta$$

$$\tan (90^{\circ} + \theta) = -\cot \theta$$

$$\cot (90^{\circ} + \theta) = -\tan \theta$$

$$\operatorname{sen} (180^{\circ} - \theta) = \operatorname{sen} \theta$$

$$\operatorname{csc} (180^{\circ} - \theta) = \operatorname{csc} \theta$$

$$\cos (180^{\circ} - \theta) = -\cos \theta$$

$$\sec (180^{\circ} - \theta) = -\sec \theta$$

$$\tan (180^{\circ} - \theta) = -\tan \theta$$

$$\cot (180^{\circ} - \theta) = -\cot \theta$$

$$\operatorname{sen} (180^{\circ} + \theta) = -\operatorname{sen} \theta$$

$$\operatorname{csc} (180^{\circ} + \theta) = -\operatorname{csc} \theta$$

$$\cos (180^{\circ} + \theta) = -\cos \theta$$

$$\sec (180^{\circ} + \theta) = -\sec \theta$$

$$\tan (180^{\circ} + \theta) = \tan \theta$$

$$\cot (180^{\circ} + \theta) = \cot \theta$$

$$\operatorname{sen} (360^{\circ} - \theta) = -\operatorname{sen} \theta$$

$$\operatorname{csc} (360^{\circ} - \theta) = -\operatorname{csc} \theta$$

$$\cos (360^{\circ} - \theta) = \cos \theta$$

$$\sec (360^{\circ} - \theta) = \sec \theta$$

$$\tan (360^{\circ} - \theta) = -\tan \theta$$

$$\cot (360^{\circ} - \theta) = -\cot \theta$$

2.5-UTILIZACIÓN DE LA TRIGONOMETRIA CONVENCIONAL SOBRE TRIÁNGULOS

Un triángulo que se compone de seis partes, tres ángulos y tres lados puede ser designado en los términos A, B y C para sus ángulos y a, b y c para sus lados, siendo ubicados los lados en el lado opuesto de su ángulo referenciado como se describe en la figura 5.

2.5.1- TRIÁNGULO RECTÁNGULO

En un triángulo rectángulo sustituimos los valores numéricos en las fórmulas apropiadas que representan las funciones trigonométricas básicas para resolver. Así, si a y b son conocidos

$$\tan A = \frac{a}{b}$$

$$B = 90^\circ - A$$

$$c = a \csc A$$

Si son c o B los que tenemos sería

$$A = 90^\circ - B$$

$$a = c \sin A$$

$$b = c \cos A$$

2.5.2.- TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

En este caso nos apoyamos en una serie de relaciones como se observa en la tabla 3 así como en las dos leyes, del seno y del coseno que son mostradas después de la tabla adjunta.

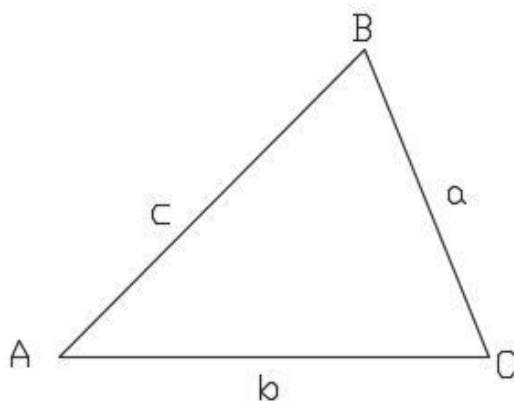


Figura 5. Ejemplo triángulo plano oblicuángulo. (Fuente: el autor)

Conocido	Desconocido	Fórmula	
a,b,c	A	$\cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$	Ley del coseno
a,b,A	B	$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a}$	Ley del seno, dos posibles soluciones si $b > a$
"	C	$C = 180^\circ - (A + B)$	$A + B + C = 180^\circ$
"	c	$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$	Ley del seno
a,b,C	A	$\tan A = \frac{a \operatorname{sen} C}{b - a \cos C}$	
"	B	$B = 180^\circ - (A + C)$	$A + B + C = 180^\circ$
"	c	$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$	Ley del seno
a,A,B	b	$b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$	Ley del seno
"	C	$C = 180^\circ - (A + B)$	$A + B + C = 180^\circ$
"	c	$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$	Ley del seno

Tabla 3. Grupo de fórmulas para la resolución de triángulos oblicuos planos (Fuente: el autor)

$$\text{Ley de los senos : } \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

$$\text{Ley de los cosenos : } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\text{Ley de las tangentes : } \frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

También es digno de mención, en relación con el área de un triángulo que conecta la superficie con los lados y ángulo con la expresión

$$\Delta = \frac{ab \operatorname{sen} C}{2}$$

Así como la fórmula de Heron³ o Arquímedes⁴ presentada en la forma

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

³ Herón de Alejandría, Geómetra de origen griego (S.I d.C)

⁴ Arquímedes, matemático e inventor griego (S-III d.C)

donde

$$s = (a + b + c)/2$$

2.6-TABLAS TRIGONOMÉTRICAS. OBTENCIÓN

Como consideración final en este apartado, digno de citar es el desarrollo de las series de potencia expansivas infinitas que da lugar a la posibilidad de utilizar valores precisos de las funciones trigonométricas.

Así tenemos, para las funciones trigonométricas trascendentales básicas las tres primeras

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11} + \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{40320}x^8 - \frac{1}{3628800}x^{10} + \dots \\ \tan x &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \frac{1382}{155925}x^{11} + \dots \end{aligned}$$

Las series para seno y coseno existen asimismo en una versión menos compleja y más compacta con n- coeficientes en una forma desarrollada por Newton⁵, no siendo así para la serie de la tangente.

Del mismo modo, las funciones trigonométricas inversas secante, cosecante y cotangente también tienen series de potencias.

$$\begin{aligned} \operatorname{arcsen} x &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \frac{63}{2816}x^{11} + \dots \\ \arccos x &= \frac{1}{2}\pi - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 - \frac{5}{112}x^7 - \frac{35}{1152}x^9 - \frac{63}{2816}x^{11} - \dots \\ \arctan x &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{13}x^{13} - \dots \end{aligned}$$

Al igual que la función tangente, no existe formas o versión compacta para éstas tres.

⁵ Sir Isaac Newton (1642-1727) Físico y matemático inglés. Figura culminante de la revolución científica del siglo XVII.

2.7.- LA TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

Se puede definir triángulo esférico como la figura formada sobre la superficie esférica por tres arcos de circunferencia máximos.

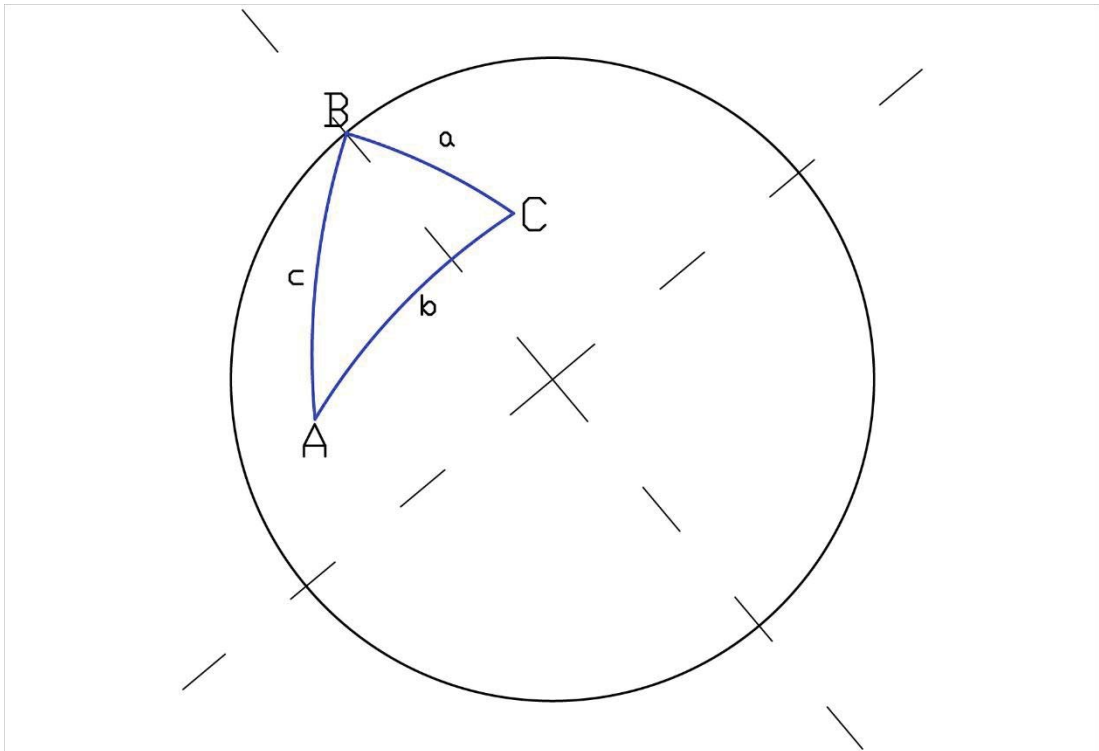


Figura 6. Representación de un triángulo esférico en una esfera. (Fuente: el autor)

El triángulo esférico consta de tres vértices, tres lados y tres ángulos los cuales son medidos en todos los casos en grados. Para obtener la dimensión lineal de un lado es necesario saber el radio de la esfera relativa al triángulo. En el caso específico de aplicaciones náuticas consideramos a la tierra como una esfera perfecta, y en ella cada minuto de arco de circunferencia máxima sea equivalente a una milla náutica.

Triedro correspondiente al triángulo

Uniando el centro de la esfera con los vértices A, B y C que se muestran en la figura adjunta, se forma un triedro convexo, sus caras y ángulos diedros son menores de 180° .

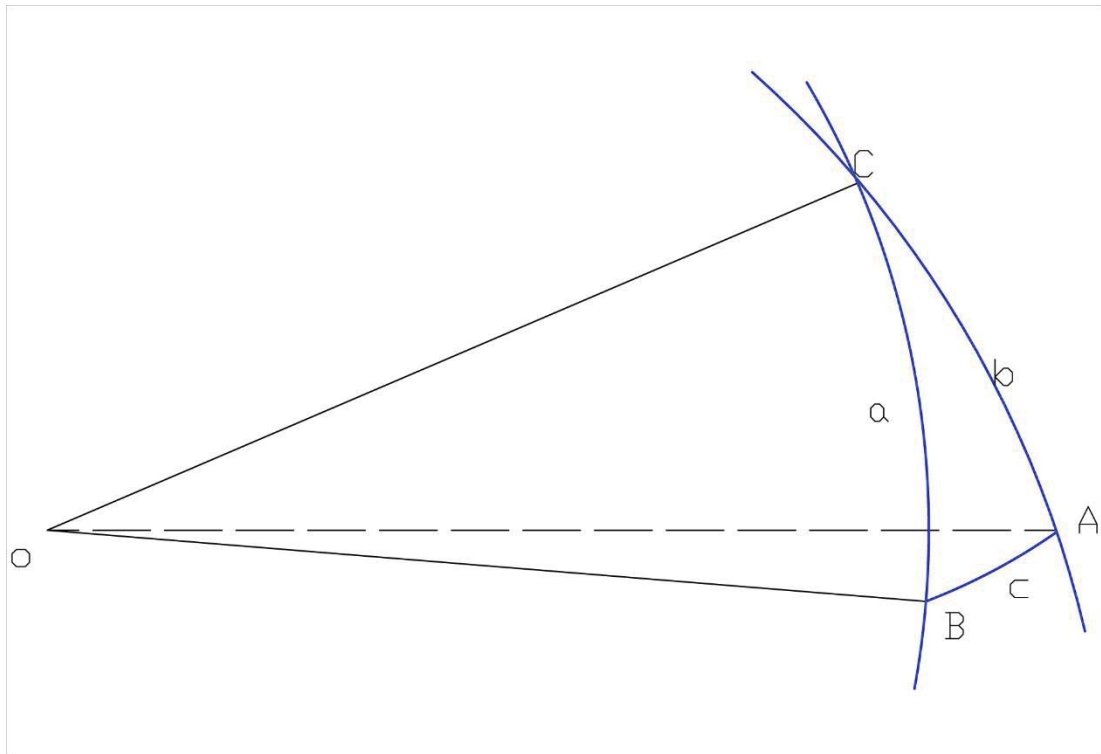


Figura 7. Triedro de un triángulo esférico. (Fuente: el autor)

Propiedades básicas de los triángulos esféricos

Son consecuencia de las propiedades de los triedros y son las siguientes:

Todo triángulo esférico los lados y los ángulos son menores que dos rectos o $2\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$a, b, c, A, B \text{ y } C < 180^\circ$$

Todo lado es mayor que la suma de los otros dos y menor que su diferencia

$$b - c < a < b + c$$

La suma de los lados es menor que cuatro rectos o $4\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$a + b + c < 360^\circ$$

La suma de los ángulos es mayor que dos rectos y menor que seis, o $2\left(\frac{\pi}{2}\right)$ y menor que $6\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$180^\circ < A + B + C < 540^\circ$$

A lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa

$$a = b \Leftrightarrow A = B$$

A mayor lado se opone mayor ángulo y viceversa

$$a < b \Leftrightarrow A < B$$

Todo ángulo aumentado en dos rectos es mayor que la suma de los otros dos

$$A + 180^\circ > B + C$$

Clasificaciones principales de los triángulos esféricos

Rectángulos, con un ángulo recto

Birrectángulo, con dos ángulos rectos

Trirectángulos, con tres ángulos rectos

Rectiláteros, con un lado recto

Birrectilátero, con dos lados rectos

Trirrectilátero, con tres lados rectos

2.7.1.- REGLAS DE NEPER

Si obviamos uno de los ángulos, más concretamente el ángulo recto, resulta en quedar un triángulo de cinco partes con dos ángulos y tres lados, como se puede ver en la figura 8. Dado que el ángulo derecho ya se conoce, el triángulo puede resolverse si se conocen las otras dos partes. Si los dos lados forman el ángulo recto y se utilizan los complementos de las otras tres partes, pueden organizarse en cinco sectores de un círculo en el mismo orden en que se muestran en la figura del triángulo del caso dado, mostrado en la figura 9.

Los triángulos esféricos rectángulos, por tanto, pueden ser resueltos mediante el procedimiento de las piezas circulares o pentágono de Neper⁶.

⁶ John Napier, (Edimburgo 1550-1617) Matemático escocés popular por su desarrollo del concepto de logaritmo, así como, entre otras, su contribución a la simplificación de cálculos relacionados con la trigonometría esférica.

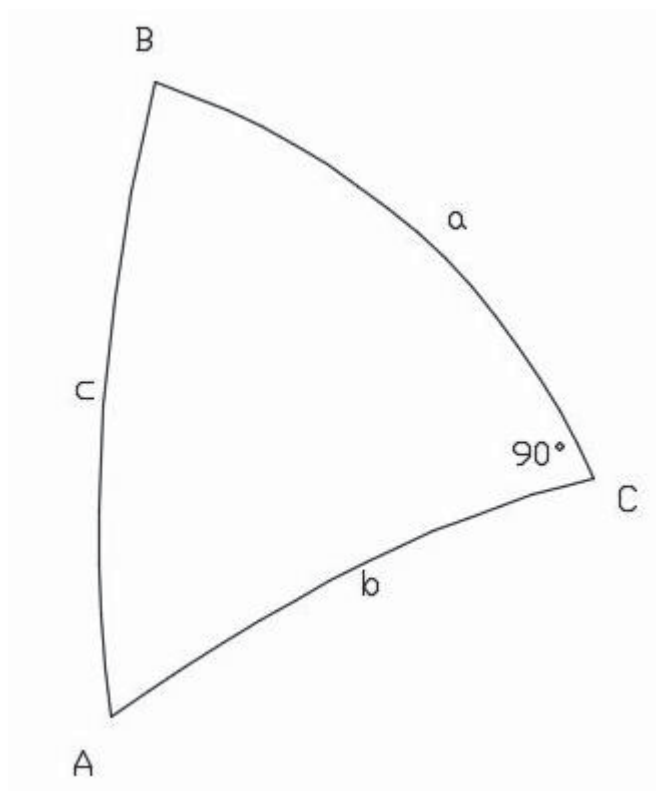


Figura 8. Partes de un triángulo esférico rectángulo. (Fuente: el autor)

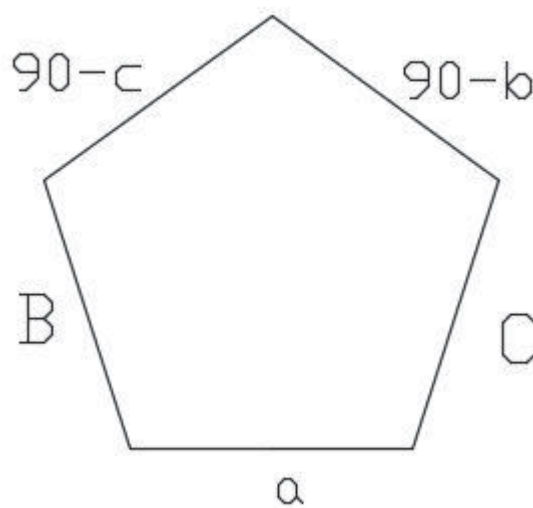


Figura 9. Diagrama de pentágono de Neper. (Fuente: el autor)

Considerando cualquier parte, las dos partes más cercanas en el diagrama se consideran las partes adyacentes y las dos más alejadas son las opuestas.

Con las reglas de Neper como pauta podemos decir: El seno de uno de los lados es igual al producto de las tangentes de las partes adyacentes o los cosenos de las partes opuestas.

De estas reglas podemos obtener el siguiente grupo de formulas

El coseno de un lado es igual al producto de los senos de los lados opuestos:

$$\cos a = \frac{\sin(90 - c) \cdot \sin(90 - b)}{\cos c \cdot \cos b}$$

El coseno de un lado es igual al producto de las cotangentes de los lados adyacentes:

$$\cos a = \cotg C \cdot \cotg B$$

2.7.2.- CONVENIO EN LAS CIENCIAS NÁUTICAS

Así como en matemáticas se utiliza el sistema referenciado anteriormente es importante puntualizar que en la tradición náutica los ángulos se miden de forma distinta. No se toma como referencia el eje de las X a la derecha sino el eje vertical (que puede corresponderse con el de las Y) y que marca el Norte, que quedaría representado como el 0° midiéndose hacia la derecha 90° (Este), 180° (Sur), 270° (Oeste) y de nuevo 360° o 0° el Norte.

3.-TRIGONOMETRIA RACIONAL

3.1.- FUNDAMENTOS Y MARCO TEÓRICO

El origen etimológico y significado de la palabra trigonometría lo encontramos la palabra latina trigonometría, que a su vez procede de una composición de palabras de origen griego que son *trigonon* (triángulo) [tri- gonia: tres ángulos] y *metrom* (medida).

La trigonometría comienza con el estudio de los triángulos. Un triángulo viene descrito por siete cantidades que son tres lados de longitud, tres ángulos de vértices y un área. La trigonometría clásica estudia en detalle estas siete cantidades y las relaciones entre ellas. La trigonometría aplica esta comprensión a figuras más complejas también como cuadriláteros y otros polígonos, así como cuadros tridimensionales, pirámides y cuñas en sus diversas formas. Por tanto, la trigonometría nos dota de la capacidad para la resolución de una amplia gama de problemas derivados de campos de conocimiento tan diversos como la arquitectura, física, topografía, ingeniería, química o navegación, entre otros.

Los elementos básicos de la trigonometría clásica convencional se basan en la distancia, el ángulo y el área.

Informalmente, la distancia se puede considerar como aquello que medimos con una regla, pero con más precisión puede ser en la forma matemática siguiente

$$|A_1, A_2| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$$

Siendo A_1 y A_2 dos puntos sobre un plano.

Del mismo modo podemos definir de manera más o menos burda, el ángulo, que es aquello que podemos medir con un transportador, sin embargo, a diferencia de la distancia, para definirlo con mayor precisión encontramos varios inconvenientes de salida.

Así, entre las varias que podemos encontrar están las siguientes:

ángulo⁷ como interferencia de los (o conjunto de puntos comunes a los) semiplanos siguientes, cuyo borde es la recta a y que contiene a b , y aquel cuyo borde es la recta b y que contiene a a (región rayada de la ilustración).

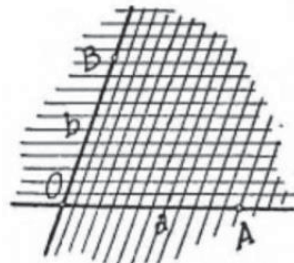


Ilustración 4. Ángulo referido a la región de doble rayado (Fuente: Geometría Métrica tomo I, Puig Adam 2018)

Otra forma la define en términos de longitudes de arco circulares, que requieren una comprensión previa del cálculo matemático.

Otro enfoque que comúnmente se puede encontrar para la definición del ángulo puede ser como $\arctan(y/x)$ lo que requiere la inclusión de π además de la previa comprensión de la función arco tangente, inversa de la tangente, la cual relaciona seno y coseno en términos de proporciones o proyecciones que implican el propio ángulo.

Visto y repasado convenientemente lo anterior comenzamos con la trigonometría racional y sus bases.

La trigonometría racional puede ofrecer una notable y diferente aproximación a la trigonometría y a la geometría euclidiana cuyo elemento clave es el hecho de que muestra la geometría en un dominio cuadrático. La utilización de conceptos cuadráticos como idea central permite a la trigonometría racional reemplazar las nociones quasi-lineares de distancia y ángulo con las relaciones equivalentes, pero más elementales conceptos cuadráticos de *quadrance* y *spread*, haciendo viable así el desarrollo de la geometría euclidiana sobre cualquier campo de estudio tratando de que las funciones trigonométricas usuales se vuelvan más incidentales a la trigonometría y geometría.

⁷ Véase libro Geometría métrica tomo I de Pedro Puig Adam. Biblioteca Matemática. Madrid 1977. (pp.10-11)

Quadrance mide la separación entre dos puntos y *spread* es referido a la medida de la separación entre líneas, pudiéndose expresar del siguiente modo:

$$quadrance = distancia^2$$

$$spread = \text{sen}^2 \theta$$

Con la trigonometría racional vamos a poder reemplazar algunos elementos más importantes de la trigonometría convencional tales como la ley del seno, la ley del coseno y muchas otras relaciones establecidas con fórmulas trigonométricas que ocasionalmente pueden ser recordadas con cierta dificultad.

En la trigonometría racional disponemos de otras herramientas de cálculo alternativas tales como la fórmula triple *quadrance* (Triple quad formula), la ley de *Spread* (*Spread law*), la ley intersección o de cruce (*Cross law*) y la fórmula triple *spread* (*Triple spread formula*).

Vamos a ver como a su vez, el teorema de Pitágoras puede ser replanteado en términos de cuadrantes jugando un papel clave en este modelo de cálculo.

Se apreciará como con este sistema podemos permitirnos obviar las funciones trigonométricas convencionales comúnmente utilizadas y conocidas como son $\cos \theta$ y $\text{sen } \theta$.

Con la trigonometría racional también se pretende mostrar una forma de cálculo más simplificada que permite prescindir de extensas tablas trigonométricas, así como de calculadoras electrónicas, si bien, éstas últimas aún podría acelerar la ejecución de los cálculos.

3.2.-INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA RACIONAL

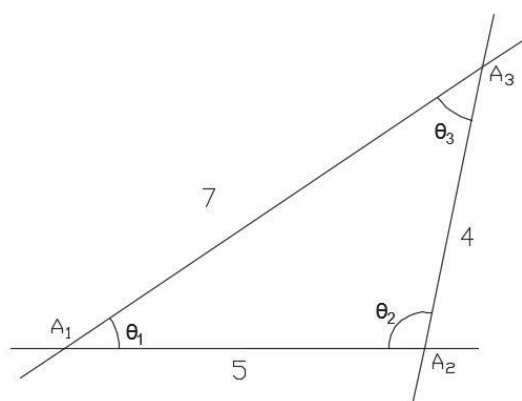
Para comenzar con una primera aproximación a la trigonometría racional es fundamental hacer una presentación inicial general de los conceptos de *quadrance* y *spread*.

Como se ha mencionado anteriormente remarcamos de nuevo que para la trigonometría convencional los conceptos clave se fundamentan en la medida de la

distancia y el ángulo, mientras que en la trigonometría racional se utiliza los conceptos de *quadrance* y *spread*. Es muy importante apreciar la diferencia entre ambas ideas pues es uno de los núcleos que basa el cambio de forma de pensar respecto a la trigonometría, es por esto que podemos comenzar considerando un triángulo plano desde los dos puntos de vista para apreciar la diferencia desde un primer momento.

Medición clásica de un triángulo:

En la figura se muestra un triángulo con lados



Dado un triángulo con lados de longitud

$$d_1 \equiv 4 \quad d_2 \equiv 7 \quad d_3 \equiv 5$$

Y con los ángulos respectivos (aproximadamente)

$$\theta_1 = 33.92^\circ \quad \theta_2 = 102.44^\circ \quad \theta_3 = 43.64^\circ$$

Figura 10. Aproximación clásica. (Fuente: el autor)

Sabemos que existen numerosas relaciones clásicas entre las seis cantidades citadas en el triángulo, como, por ejemplo, la ley de suma de los ángulos

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 180^\circ$$

la ley del seno, del coseno...etc. Generalmente involucran funciones trigonométricas de tipo $\cos \theta$, $\sin \theta$ y $\tan \theta$, así como de forma implícita sus inversas $\arccos$, $\arcsen$ y $\arctan$, las cuales no son fáciles de definir con precisión sin acudir al cálculo.

Medición de un triángulo desde la visión de la trigonometría racional:

En la trigonometría racional, la medida más trascendente asociado con el mismo triángulo es el de los *quadrances* de los lados.

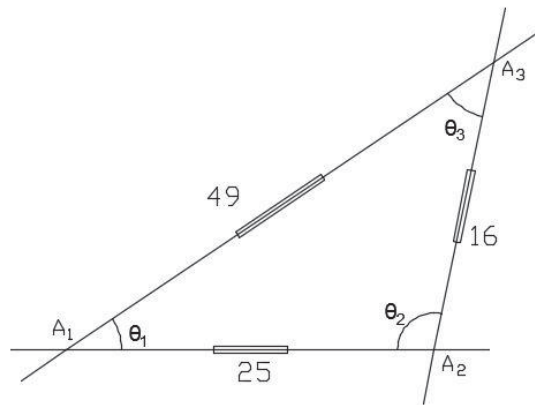


Figura 11. Ejemplo. (Fuente: el autor)

$$Q_1 = 16 \quad Q_2 = 49 \quad Q_3 = 25$$

y los *spreads* de los vértices son

$$s_1 = \frac{384}{1225} \quad s_2 = \frac{24}{25} \quad s_3 = \frac{24}{49}$$

Explicaremos cual es el sentido de estos valores y como los hemos obtenido una vez se explique el concepto de *spread*.

Quadrance, que mide la separación de dos puntos podemos definirlo de forma más sencilla como la distancia al cuadrado y es la noción métrica principal en la trigonometría racional. Partimos del supuesto que ya se conoce lo que es la distancia.

Un punto en el plano se puede definir por sus coordenadas cartesianas X e Y con respecto a dos ejes y la definición de distancia habitual $|A_1, A_2|$ entre los puntos $A_1 = [x_1, y_1]$ y $A_2 = [x_2, y_2]$ es

$$|A_1, A_2| \equiv \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Entonces el *quadrance* $Q(A_1, A_2)$ entre dos puntos es

$$Q(A_1, A_2) \equiv (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Con este punto de vista, *quadrance* es la cantidad más fundamental, dado que no implica la función raíz. La relación entre las dos nociones se describe con mayor exactitud si decimos que la distancia es la raíz cuadrada del *quadrance*.

Como podemos observar en la figura, los lados del triángulo vienen marcados con un pequeño rectángulo paralelo a la línea que define el lado y a lo largo de éste en ambas direcciones. Con esta referencia sabremos que nos estamos dirigiendo al valor de un *quadrance* y no a una distancia de una recta.

Spread, que mide la separación entre dos líneas rectas. Dadas dos rectas que se cruzan como podemos ver en la figura 12, necesitamos definir un valor que cuantifique cuanto de separadas están las rectas. La solución es ciertamente sutil e históricamente se han propuesto diferentes soluciones a este problema.

Aquella que nos resulta más familiar es la del concepto de ángulo. En líneas generales el concepto de ángulo se describe del siguiente modo.

Partiendo de un círculo de radio unidad, en cuyo centro se encuentra la intersección de dos rectas l_1 y l_2 en el punto A. Dejamos este círculo intersectar las rectas l_1 y l_2 respectivamente en los puntos B_1 y B_2 . Seguidamente se “define” el ángulo θ entre las rectas para ser la longitud del arco de círculo entre B_1 y B_2 como muestra la figura 10.

Cuando las rectas están próximas a ser paralelas, el ángulo es cercano a cero, mientras que, si las rectas son perpendiculares, el ángulo resulta ser un número de valor aproximado 1.570796...

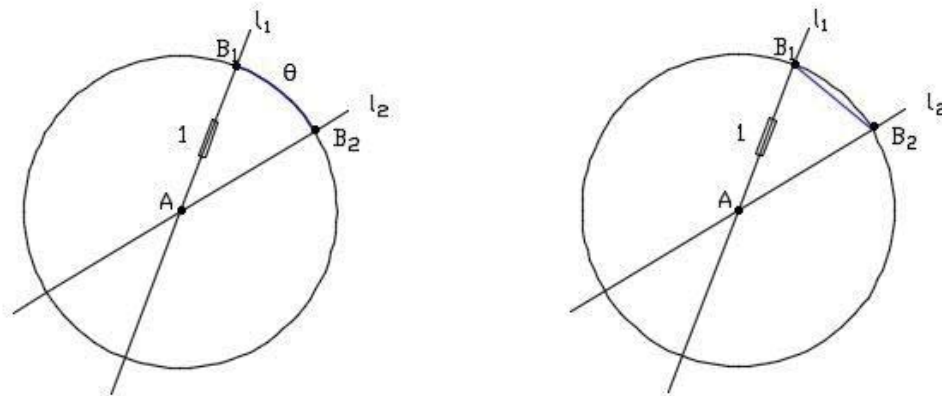


Figura 12: Separación de dos líneas. Aproximación ambigua. (Fuente: el autor)

Desde un primer momento uno puede apreciar algunas dificultades que entraña esta definición. En un primer lugar, surgen dos posibles alternativas para B_1 y también dos posibles para B_2 . por consiguiente, hay cuatro pares posibles $[B_1, B_2]$. Cada uno de los cuales divide el círculo en dos arcos circulares. Entonces, en general, tenemos ocho

posibles arcos circulares a medir y cuatro posibles resultados surgidos de esas mediciones.

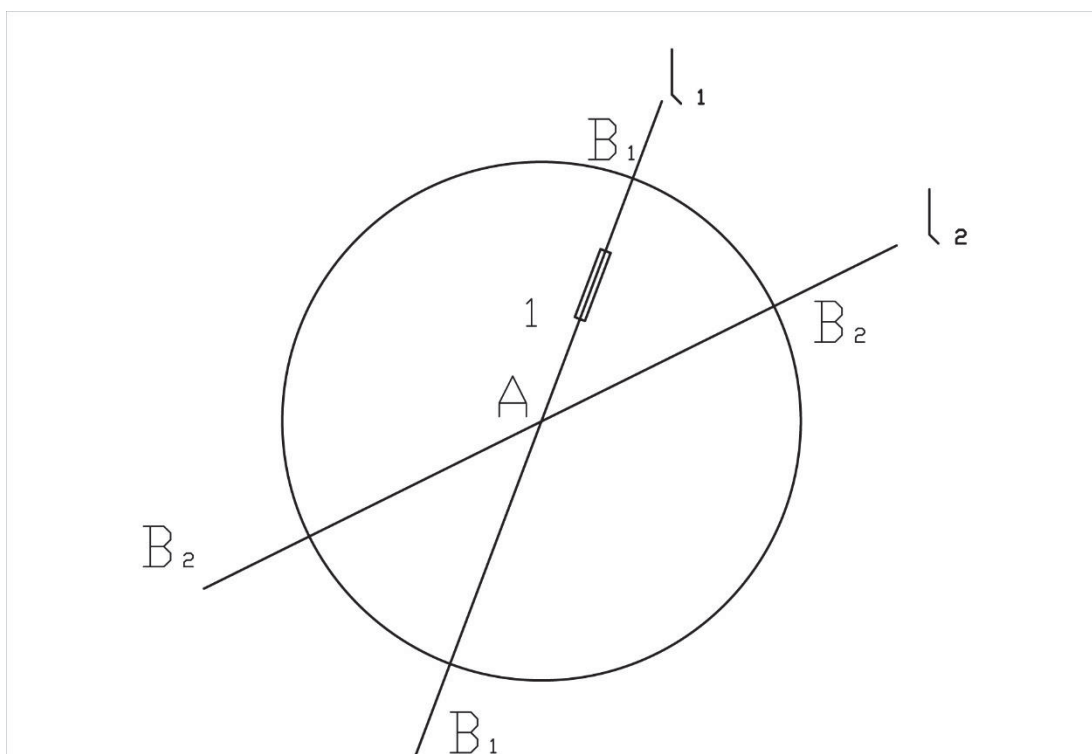


Figura 13. Círculo y rectas. (Fuente: el autor)

Otra aproximación admisible a la cuestión de cómo medir la separación de dos rectas, sería, por ejemplo, con el círculo de radio uno y la misma elección de puntos B_1 y B_2 considerando la longitud $|B_1, B_2|$ como el objeto principal de interés como la figura 14. Así, cuando las rectas están cerca de ser paralelas, con la selección correcta de B_1 y B_2 , $|B_1, B_2|$ está cerca de cero, y cuando las rectas son perpendiculares $|B_1, B_2|$ es $\sqrt{2}$ independientemente de la elección.

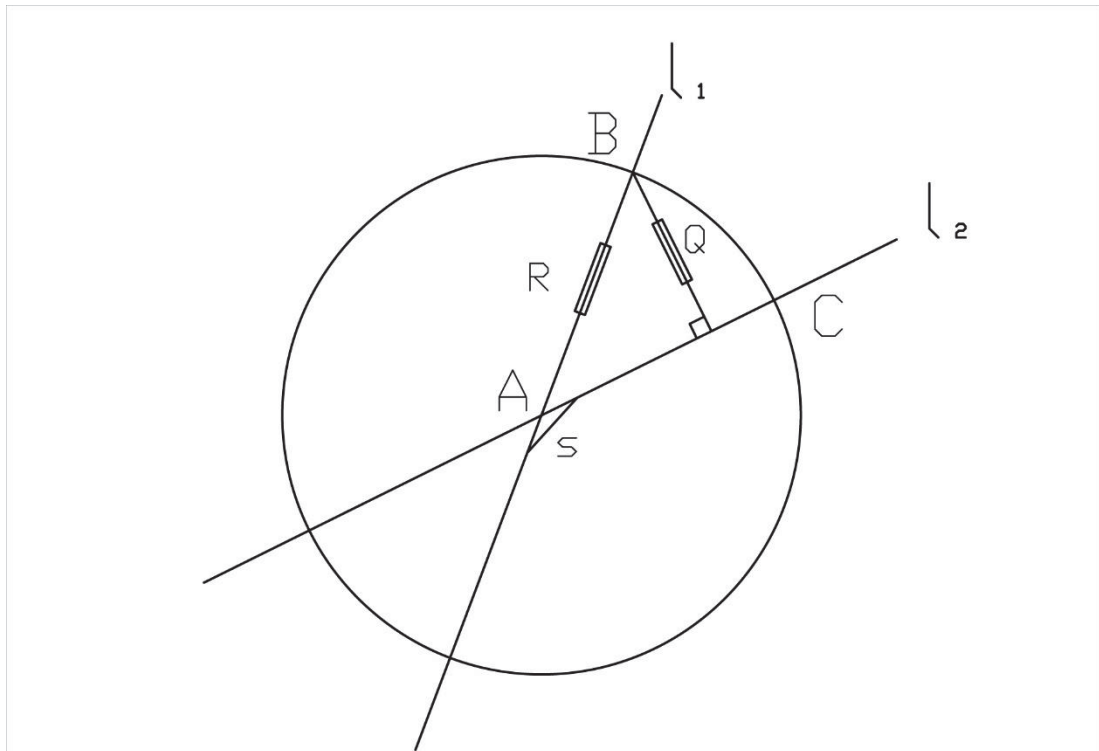


Figura 14. Separación entre dos líneas. aproximación más correcta. (Fuente: el autor)

La idea es relativamente sencilla y se puede descifrar a partir del boceto de la figura 14. Tomando cualquier punto $B \neq A$ en una de las rectas y con C siendo el pie de la altura o perpendicular desde B a la otra recta. Por tanto, definimos provisionalmente el *spread* $s(l_1, l_2)$ entre las dos rectas l_1 y l_2 para que sea la ratio de los *quadrances*

$$s(l_1, l_2) = \frac{Q(B, C)}{Q(A, B)} = \frac{Q}{R}.$$

Este número $s \equiv (l_1, l_2)$ es independiente de si escogemos de la primera recta o de la elección del punto B en ella misma. Es un número único de valor comprendido entre 0 y 1 que mide la separación entre dos rectas sin ambigüedad alguna y que nos da un valor de cuanto es esa apertura o dispersión entre las dos rectas.

Llegado a este punto, con esta idea clarificada podemos obviar el círculo anterior que nos ha ayudado a traer la idea principal, pues a partir de ahora es prácticamente irrelevante.

Es importante destacar el hecho de que durante todo el documento se ha mantenido la nomenclatura original de los textos investigados en inglés, los cuales utilizan como términos fundamentales de las teorías propuestas, conceptos de “*Quadrance*” y “*Spread*”, Si bien es relativamente sencillo y acorde al concepto, encontrar un equivalente en español de la palabra “*spread*”, no es así para el término “*Quadrance*”, razón por la cual, tras varias reflexiones al respecto, se ha optado por la conservación de los términos originales, lo cual no quiere decir, que en subsiguientes publicaciones sobre la materia en español, sea posible encontrar un término equivalente y adecuado.

Se remarca, de igual modo, que vamos a utilizar un esquema particular para referirnos en dibujos y figuras al *spread*, siendo en lugar de arcos circulares, habituales cuando hablamos de ángulos, sustituidos por unos segmentos de línea recta que unen las rectas correspondientes referidas y próximos al vértice tal como se muestra en la figura 15

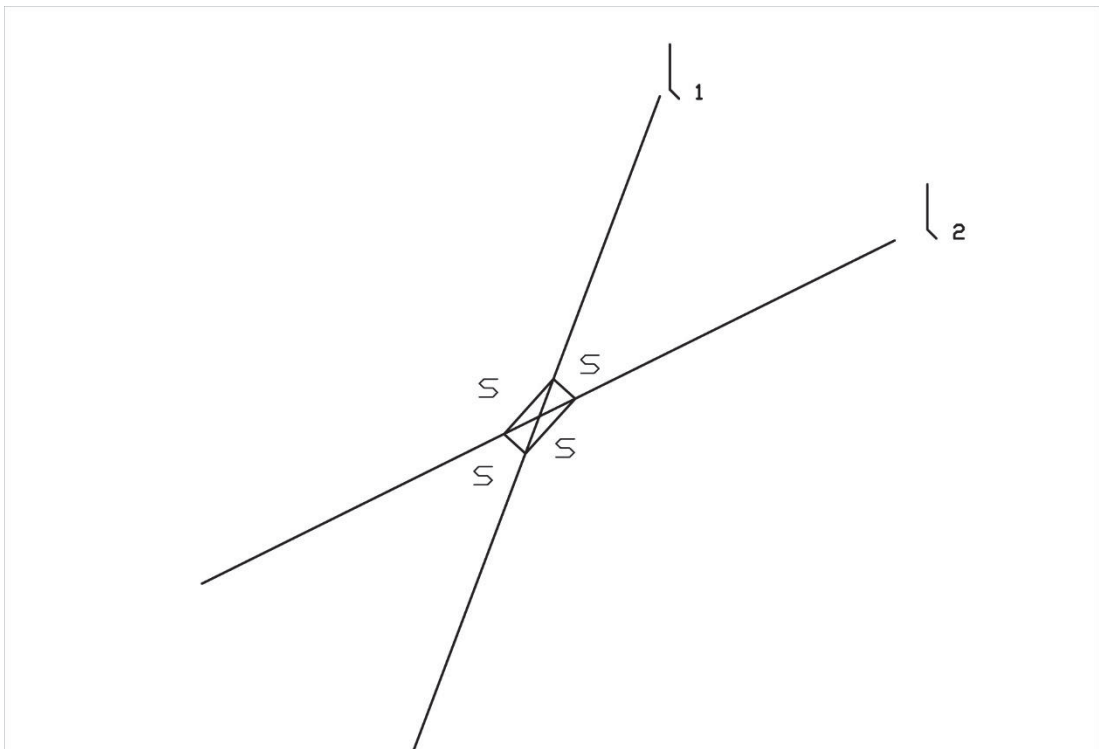


Figura 15. Esquema seguido para la notación de los Spread. (Fuente: el autor)

Spread en términos de coordenadas

Una línea recta en el plano se puede definir por una ecuación en la forma $y = mx + b$ o bien, en modo más genérico como $ax + by + c = 0$.

La ecuación $ax + by + c = 0$ de una recta l no es única, dado que se puede multiplicar por un número arbitrario diferente de cero. Lo interesante aquí es que realmente es la proporción $a : b : c$ la que especifica la recta y más tarde definimos la recta en términos de esta proporción.

Dos rectas l_1 y l_2 definidas por sus respectivas ecuaciones $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ son paralelas precisamente cuando

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

y perpendicular justamente cuando

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

El valor del *spread* no cambia, aunque las rectas cambien de posición o se muevan mientras permanezcan paralelas por lo que se puede asumir que las rectas tienen sus ecuaciones $a_1x + b_1y = 0$ y $a_2x + b_2y = 0$ con intersección en el origen $A \equiv [0,0]$. Calculemos el *spread* entre estas dos rectas.

Un punto B en l_1 es $B \equiv [-b_1, a_1]$. Un punto cualquiera sobre la recta l_2 es de la forma $C \equiv [-\lambda b_2, \lambda a_2]$. Los *quadrances* del triángulo $\overline{ABC}$ serán entonces

$$Q(A, B) = b_1^2 + a_1^2$$

$$Q(A, C) = \lambda^2(b_2^2 + a_2^2)$$

$$Q(B, C) = (b_1 - \lambda b_2)^2 + (\lambda a_2 - a_1)^2.$$

El teorema de Pitágoras afirma que el triángulo $\overline{ABC}$ tiene un vértice recto en C precisamente cuando

$$Q(A, C) + Q(B, C) = Q(A, B)$$

Sustituyendo

$$\lambda^2(b_2^2 + a_2^2) + (b_1 - \lambda b_2)^2 + (\lambda a_2 - a_1)^2 = b_1^2 + a_1^2$$

Y arreglando y simplificando queda

$$2\lambda (a_1a_2 + b_1b_2 - \lambda(a_2^2 + b_2^2)) = 0$$

Haciendo $\lambda = 0$ despejamos λ

$$\lambda = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Pero $\lambda = 0$ precisamente cuando las rectas son perpendiculares entre sí, en cuyo caso la expresión anterior se sigue manteniendo.

Así sustituyendo $\lambda = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$ en $Q(B, C)$ encontramos que

$$Q(B, C) = \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Entonces así

$$s(l_1, l_2) = \frac{Q(B, C)}{Q(A, B)} = \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}.$$

Puede entonces tomarse como válida la idea de que *spread* es una proporción de *quadrances*, una expresión racional de las coordenadas de las dos rectas. Eso sí, evitamos el uso de las raíces cuadradas definiéndolo con el *quadrances*, cosa que no podría ser aceptada si intentáramos definir el *spread* en base a una relación de longitudes. Es importante destacar que de este modo se evita el uso de la raíz cuadrada como operador.

3.2.1.- QUADRANCE

Anteriormente se ha subrayado la importancia del concepto de *quadrance* como uno de los pilares principales de la trigonometría racional, y aunque ya hemos ido avanzando el concepto esencial, se hace indispensable dedicarle un apartado específico, es por esto que vamos a desentrañar con mayor detalle la forma en la que implementa este concepto, su utilidad, bases, así como las subsiguientes

interrelaciones de este elemento en la trigonometría racional y teoremas que nos será de gran utilidad para, en un capítulo posterior, visualizarlo en la resolución de ejercicios y problemas prácticos.

Como se ha comentado anteriormente se define *quadrance*:

$Q(A_1, A_2)$ entre los puntos $A_1 \equiv [x_1, y_1]$ y $A_2 \equiv [x_2, y_2]$ es el número

$$Q(A_1, A_2) \equiv (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Se puede decir también $Q(A_1, A_2)$ para llamar el *quadrance* desde A_1 a A_2 o bien del *quadrance* del lado A_1A_2

$$Q(A_1, A_2) = Q(A_2, A_1).$$

Teorema de la recta nula

Si A_1 y A_2 son puntos distintos, entonces A_1, A_2 es una recta nula precisamente cuando $Q(A_1, A_2) = 0$.

Teorema del punto medio

Si A_1 y A_2 es una recta no nula, así, hay un único punto A que satisface

$$Q(A_1, A_2) = Q(A_2, A_1).$$

Este es el punto medio $M = \left(\frac{1}{2}\right) A_1 + \left(\frac{1}{2}\right) A_2$ del lado $\overline{A_1A_2}$. Además

$$Q(A_1, M) = Q(M, A_2) = Q(A_1, A_2)/4.$$

Triple quad formula

El teorema de triple quad formula supone que A_1, A_2 y A_3 son puntos con $Q \equiv Q_1 \equiv Q(A_2, A_3)$. $Q_2 \equiv Q(A_1, A_3)$ y $Q_3 \equiv Q(A_1, A_2)$. Luego

$$(Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 = 2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2)$$

Precisamente cuando A_1, A_2 y A_3 son colineales.

Teorema de Pitágoras

Suponiendo que el triángulo $\overline{A_1A_2A_3}$ tiene *quadrances* $Q_1 \equiv Q(A_2, A_3)$, $Q_2 \equiv Q(A_1, A_3)$ y $Q_3 \equiv Q(A_1, A_2)$. Luego entonces

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

Precisamente cuando A_1A_3 y A_2A_3 son perpendiculares.

Demostración. -

Se suponen los puntos $A_1 \equiv [x_1, y_1]$, $A_2 \equiv [x_2, y_2]$ y $A_3 \equiv [x_3, y_3]$.

$$A_1A_3 = \langle y_1 - y_3 : x_3 - x_1 : x_1y_3 - x_3y_1 \rangle$$

y

$$A_2A_3 = \langle y_2 - y_3 : x_3 - x_2 : x_2y_3 - x_3y_2 \rangle.$$

rectas que son perpendiculares precisamente cuando

$$(y_1 - y_3)(y_2 - y_3) + (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = 0$$

Ahora

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 - Q_3 &= (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 - (x_2 - x_1)^2 \\ &\quad - (y_2 - y_1)^2 \\ &= 2(x_3^2 - x_2x_3 - x_1x_3 + x_2x_1 + y_1y_2 - y_1y_3 - y_2y_3 + y_3^2) \\ &= 2((y_1 - y_3)(y_2 - y_3) + (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)). \end{aligned}$$

Como $2 \neq 0$, A_1A_3 y A_2A_3 son perpendiculares precisamente cuando $Q_1 + Q_2 = Q_3$

Quadrance a una recta:

Igual *quadrance* a dos puntos. Suponemos que p es la bisectriz perpendicular del lado $\overline{A_1, A_2}$. Entonces cada punto A sobre p satisface

$$Q(A, A_1) = Q(A, A_2)$$

y por el contrario cada punto A que satisface esta ecuación se encuentra en p .

3.2.2-EL SPREAD (DISPERSIÓN)

Del mismo modo que se ha denotado la relevancia del concepto de *quadrance*, se hace mención específica en este apartado del *spread*, al objeto de desarrollar adecuadamente las implicaciones y efectos que produce en los diferentes tipos de cálculos y cómo influye en la aplicación de la trigonometría racional tanto en figuras triangulares como en cuadrangulares.

Definición

El *spread* $s(l_1, l_2)$ entre dos rectas no nulas $l_1 \equiv \langle a_1 : b_1 : c_1 \rangle$ es el número

$$s(l_1, l_2) \equiv \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}$$

Si los coeficientes de una de las dos proporciones son multiplicados por un número distinto de cero, entonces el *spread* no cambia.

Se define como dado un triángulo $\overline{A_1 A_2 A_3}$, los números $s_1 \equiv s(A_1 A_2, A_1 A_3)$, $s_2 \equiv s(A_2 A_1, A_2 A_3)$ y $s_3 \equiv s(A_3 A_1, A_3 A_2)$ son los *spread* del triángulo, con s_1 el *spread* del vértice $\overline{l_2 l_3}$ o el *spread* opuesto al lado $\overline{A_2 A_3}$, y de modo similar para los otros *spreads*.

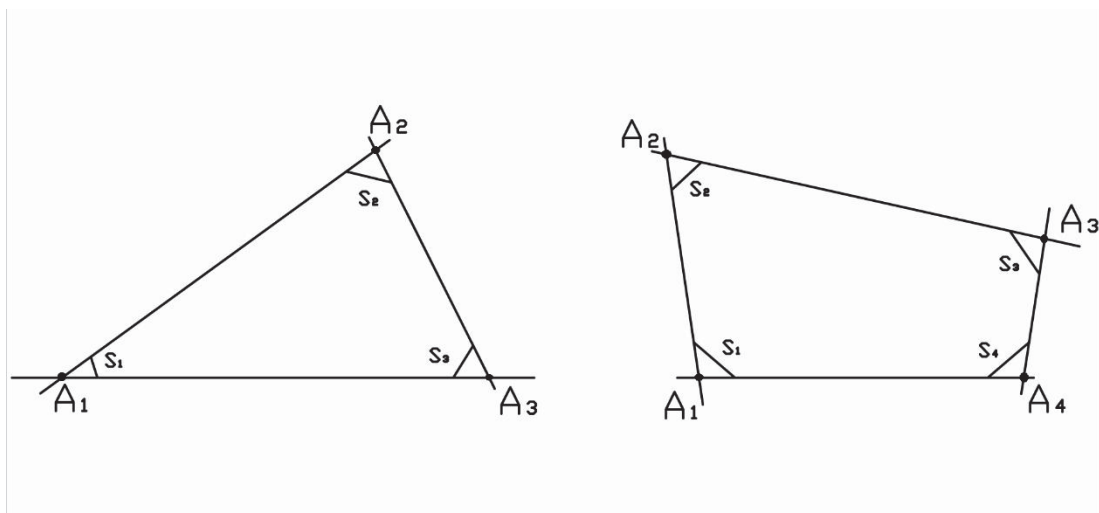


Figura 16. Spreads en un triángulo y en un cuadrilátero. (Fuente: el autor)

Se define igualmente dado un cuadrilátero $\overline{A_1A_2A_3A_4}$ los números $s_1 \equiv s(A_1A_2, A_1A_4)$, $s_2 \equiv s(A_2A_1, A_2A_3)$, $s_3 \equiv s(A_3A_2, A_3A_4)$ y $s_4 \equiv s(A_4A_1, A_4A_3)$ son los *spreads* del cuadrilátero.

Intersección o cruce (Cross)

Definimos la intersección $c(l_1, l_2)$ entre rectas no nulas $l_1 \equiv \langle a_1 : b_1 : c_1 \rangle$ y $l_2 \equiv \langle a_2 : b_2 : c_2 \rangle$ es el número

$$c(l_1, l_2) \equiv \frac{(a_1a_2 + b_1b_2)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}.$$

Para comprender adecuadamente la idea de *spread*, utilizaremos un esquema que presentamos en la figura observando y pensando en la inclinación de una recta.

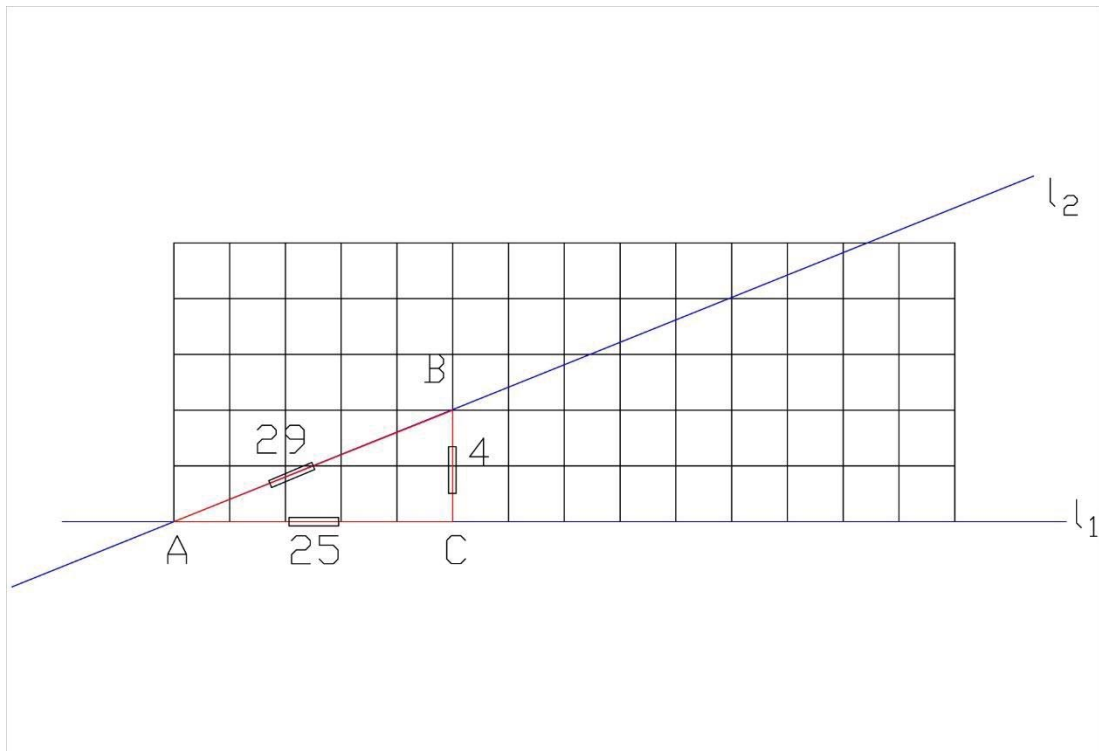


Figura 17. Retícula de representación. (Fuente: el autor)

La forma de describir la inclinación de la recta, es decir, la relación o ratio entre lo que se eleva sobre la línea base quedaría en forma de $\frac{2}{5}$. Es lo que comúnmente se denomina como pendiente de una recta, nosotros vamos a tomarlo, pero de forma contraria, es decir sería $\frac{5}{2}$. Ambos conceptos generan ciertos problemas en geometría

pues cuando las dos rectas son perpendiculares, la separación llega a ser cero y entonces la relación, la ratio es indefinido.

La otra relación indefinida es en el caso de cuando dos rectas son paralelas, aquí el problema es que tenemos un denominador cero.

Una forma de evitar esta situación sería con una nueva alternativa que esquivara estos dos casos particulares dando una solución computable.

Siguiendo con el ejemplo de la figura denotamos el *spread*

$$s(l_1, l_2) = \text{spread} \equiv \frac{4}{29}$$

Ahora en el triángulo de la figura 18 que se muestra a continuación hay tres cantidades a ser consideradas el cateto menor, cateto mayor e hipotenusa como, respectivamente lado pequeño, lado mediano y lado más largo

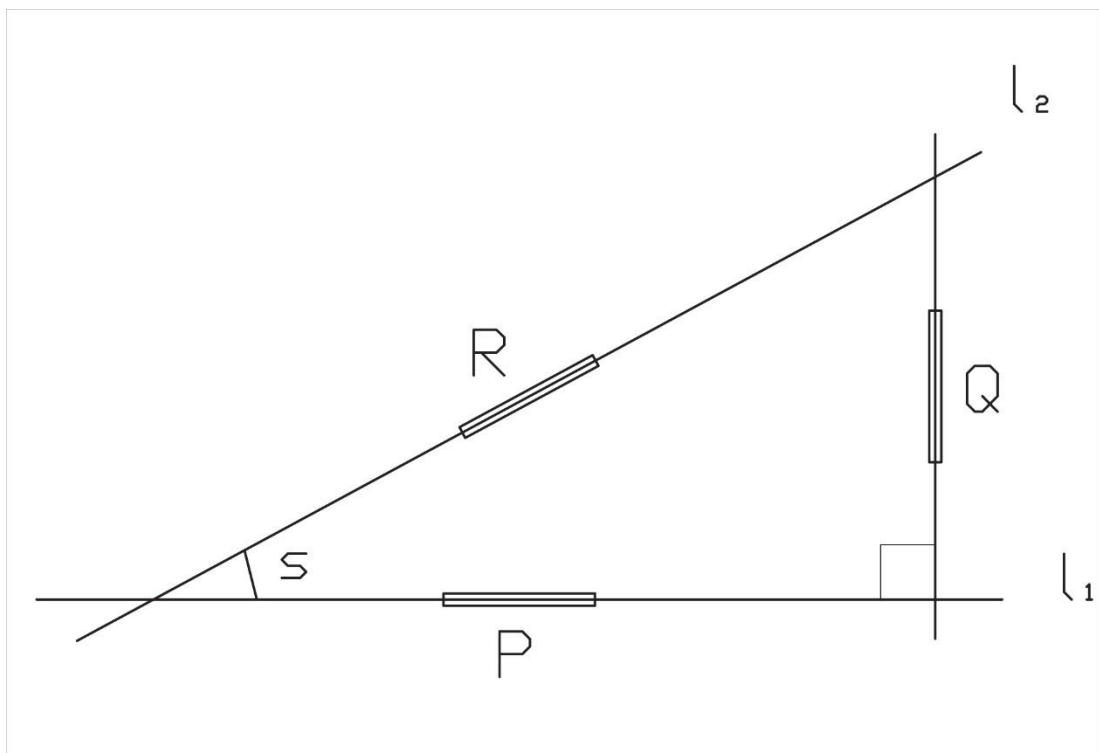


Figura 18. Se muestran tres quadrances P, Q y R. (Fuente: el autor)

$$s = s(l_1, l_2) = \frac{Q}{R}$$

La utilización del valor relacionado con la hipotenusa R tiene la ventaja de que nunca es cero, lo cual quiere decir que sería interesante utilizarlo como denominador, entonces, si consideramos la ratio del opuesto sobre el relacionado con la hipotenusa, esto es $\frac{Q}{R}$, en consecuencia, tendremos una ratio que nunca va a ser infinito.

La solución sería operar con *quadrances*, es decir el cuadrado de las distancias en sí mismas.

Entonces lo que hacemos es definir el *spread* con la relación entre *quadrances*, para el ejemplo dado, el *quadrance* de valor 4 y el *quadrance* de valor 29.

Entonces definimos como

$$s(l_1, l_2) = \text{spread} \equiv \frac{4}{29}$$

Como se dijo anteriormente el valor del *spread* está siempre comprendido entre 0 y 1, y esos valores son respectivamente para los casos de rectas paralelas y perpendiculares

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow s(l_1, l_2) = 0$$

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow s(l_1, l_2) = 1$$

Es importante destacar que la noción de *spread* no es lineal como lo es un ángulo.

Podemos analizar los *spreads* con los conocidos triángulos de ángulos 90 45 45 y 90 60 30.

Como se puede ver en la figura 19

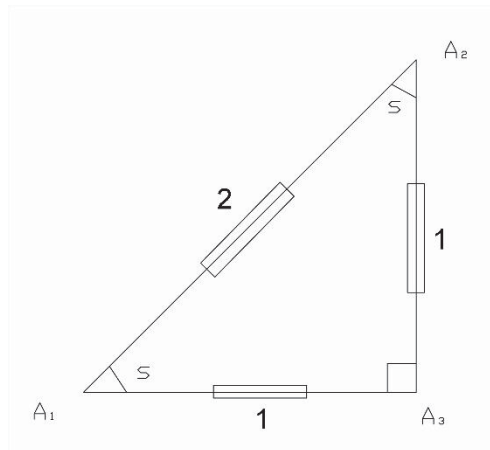


Figura 19. Triángulo recto 90 45 45. (Fuente: el autor)

$$s = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = 45^\circ \text{ ó } 135^\circ$$

Y ahora en la figura siguiente

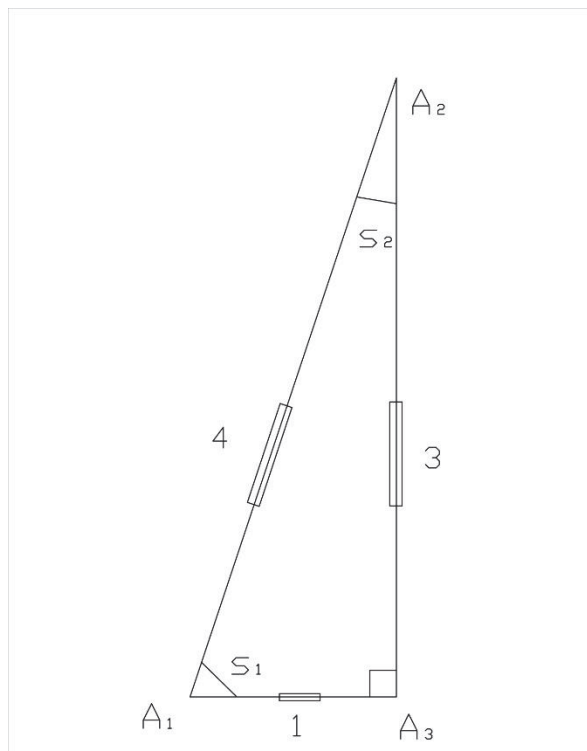


Figura 20. Triángulo 90 60 30. (Fuente: el autor)

$$s_1 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \theta = 60^\circ \text{ ó } 120^\circ$$

$$s_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \theta = 30^\circ \text{ ó } 150^\circ$$

$$s_3 = 1$$

Se puede demostrar estos conceptos con un objeto de uso cotidiano como puede ser una hoja de papel DIN A4, en cuanto a lo que el estudio de sus proporciones concierne.

Como sabemos una hoja de papel tiene la particularidad de que, si nosotros la doblamos o cortamos exactamente por la mitad, se conservan las proporciones con respecto al original. Desde un punto de vista de las matemáticas esto implica que la longitud de los lados está en una ratio de 1 a $\sqrt{2}$, así por Pitágoras, podemos saber que la hipotenusa se corresponde con el valor $\sqrt{3}$, y posteriormente, utilizando la trigonometría convencional tenemos que el ángulo agudo se corresponde con un valor de unos 35,26...°

La perspectiva de la trigonometría racional para este caso de estudio es la siguiente

Como se puede apreciar claramente en la figura 21, los *quadrances* del triángulo que conforma la mitad de un folio son respectivamente de menor a mayor.

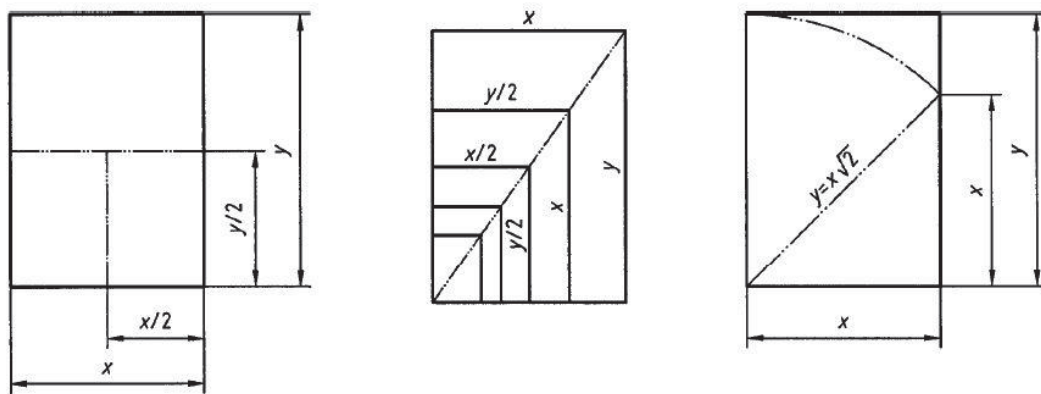


Figura 21. Relación tamaño folio. (Fuente: Norma UNE-EN ISO 216)

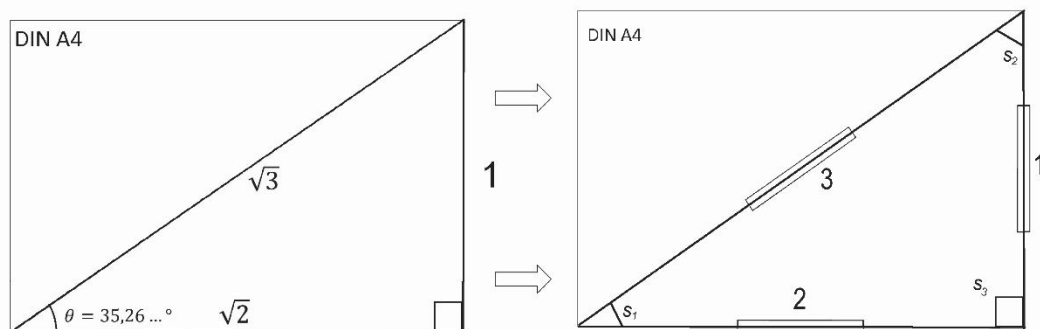


Figura 22. Paso a trabajar con quadrance. (Fuente: el autor)

Para la trigonometría racional solo tenemos que averiguar el *spread* del ángulo más pequeño, el cual sería $\frac{1}{3}$ y para el grande sería $\frac{2}{3}$.

Inmediatamente se puede apreciar que la suma de todos los *spreads* en un triángulo recto es 2.

$$s_1 + s_2 + s_3 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 = 2$$

3.2.3-INSTRUMENTOS Y MEDICIÓN

Cuando trabajamos sobre figuras planas con *spread* de forma gráfica podemos utilizar un transportador creado específicamente al efecto como se puede ver en las siguientes ilustraciones

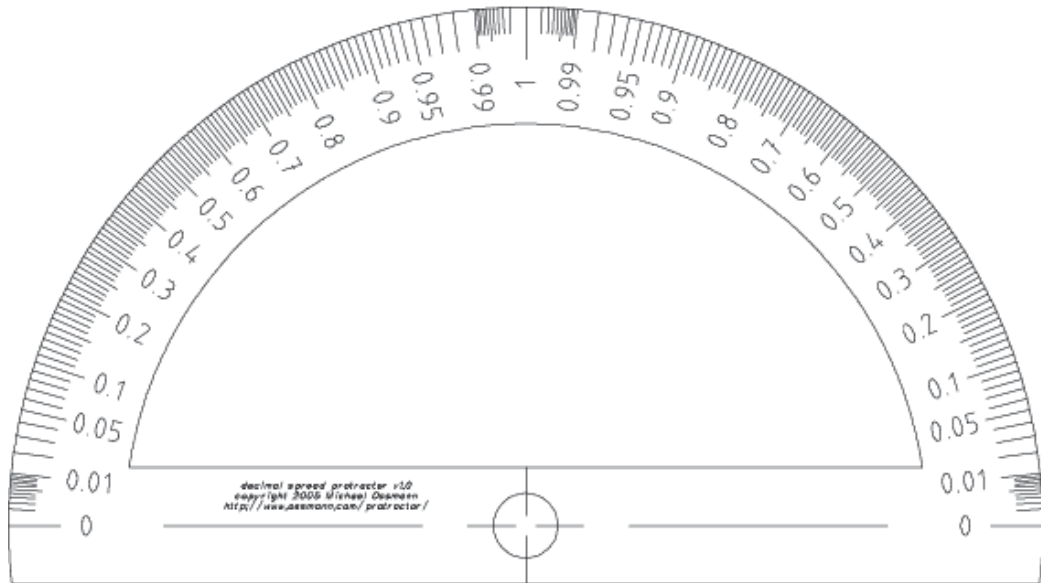


Ilustración 5. Spread protractor. Transportador de spreads escala decimal (Fuente: https://www.researchgate.net/figure/A-spread-protractor_fig4_284572258)

Como se puede observar, éste instrumento tiene impreso valores desde 0 hasta 1 en sentido ascendente y en el otro lado de forma simétrica desde 1 hasta 0. Así, encontraremos que a mayor *spread* mayor es el valor y más próximo al valor máximo que es 1. Igualmente, a menor *spread*, el valor es menor y más próximo a 0. Es interesante destacar también, como inmediatamente se puede observar, el hecho de que la escala numerada no guarda las mismas proporciones entre división de segmentos, por lo que de forma clara nos da una idea de la caracterización no lineal de los valores, elemento claramente diferenciador sobre un transportador de ángulos convencional ya conocido por todos.

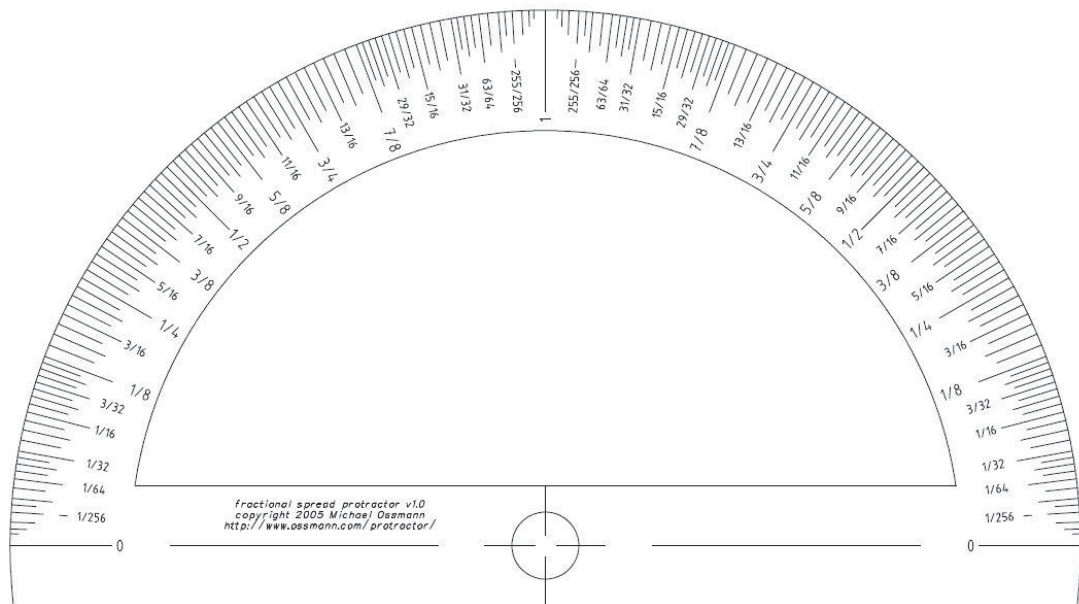


Ilustración 6. Spread protractor, transportador de spreads escala fraccional (Fuente: <http://www.ossmann.com/protractor/>)

3.3-LEYES Y TEOREMAS DE LA TRIGONOMETRIA RACIONAL

En este apartado se pasará a describir las principales fórmulas de la trigonometría racional. Los esquemas y dibujos nos ayudaran a comprender mejor el origen de estas, sus fundamentos, así como la subsiguiente aplicabilidad en ejercicios prácticos. Del mismo modo, las siguientes leyes y teoremas nos ofrecerán una visión más concreta y amplia de los apartados anteriormente desgranados, poniendo al alcance un abanico de herramientas de cálculo dignas de tener presente como alternativa a la resolución de planteamientos matemáticos específicos.

La naturaleza algebraica del *quadrance* y del *spread* tienen como consecuencia que las definiciones y leyes básicas se pueden formular manteniéndose con coeficientes en un campo arbitrario. Esto implica repensar la discusión previa sobre no hacer mención de la distancia y/o el ángulo.

Este planteamiento hace posible investigar la geometría euclidiana en campos generales pues las siguientes definiciones se mantienen en un campo general.

El punto A es un par ordenado de números $[x, y]$. El *quadrance* $Q = (A_1, A_2)$ entre los puntos $A_1 \equiv [x_1, y_1]$ y $A_2 \equiv [x_2, y_2]$ es el número

$$Q(A_1, A_2) \equiv (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Una recta l es una proporción ordenada $(a:b:c)$ representada en la ecuación $ax + by + c = 0$. El *spread* $s(l_1, l_2)$ entre las rectas $l_1 \equiv (a_1:b_1:c_1)$ y $l_2 \equiv (a_2:b_2:c_2)$ es el número

$$s(l_1, l_2) \equiv \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}.$$

Para los inequívocos puntos A_1 y A_2 la única recta que pasa a través de ambos se denota como $A_1 A_2$. Dados tres puntos distintos A_1, A_2 y A_3 define los *quadrances* tal que

$$Q_1 \equiv Q(A_2, A_3)$$

$$Q_2 \equiv Q(A_1, A_3)$$

$$Q_3 \equiv Q(A_1, A_2)$$

y los *spreads*

$$s_1 \equiv s(A_1 A_2, A_1 A_3)$$

$$s_2 \equiv s(A_2 A_1, A_2 A_3)$$

$$s_3 \equiv s(A_3 A_1, A_3 A_2).$$

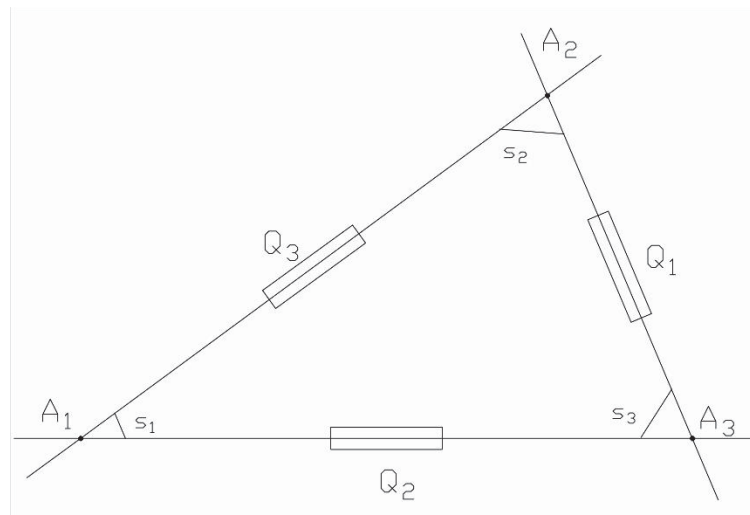


Figura 23. Triángulo spreads y quadrances. (Fuente: el autor)

Comenzaremos haciendo mención de algo que ya conocemos como podemos ver en la figura 24

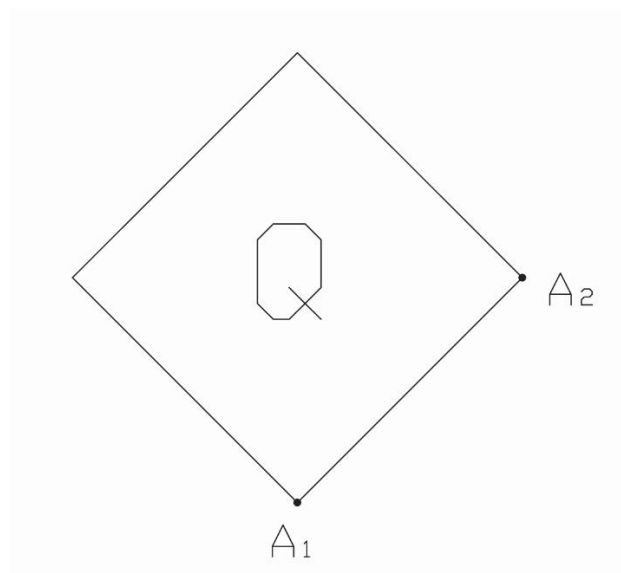


Figura 24. Quadrance. (Fuente: el autor)

Si tenemos dos puntos A_1A_2 donde el *quadrance* entre ambos es por definición el área del cuadrado constituido por ese lado, el cuadrado de una distancia, $Q(A_1, A_2)$

Si tenemos dos rectas como se muestra en la figura 25, el *spread* entre éstas es la ratio de los *quadrances*, el opuesto dividido entre el *quadrance* superior en cualquier triángulo rectángulo que contenga estas rectas, $s = \frac{Q}{R}$

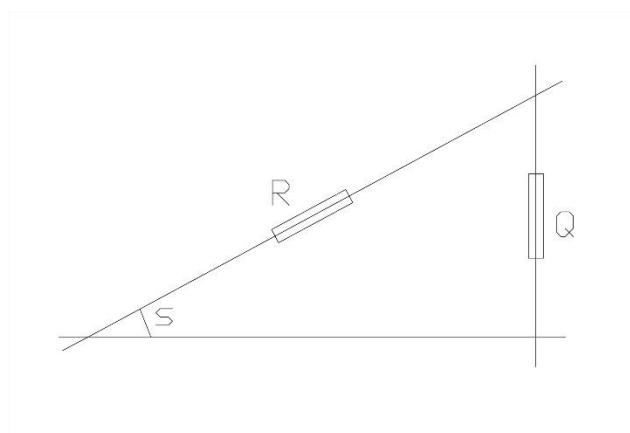


Figura 25. Quadrances afectos al spread. (Fuente: el autor)

3.3.1-PRIMERA LEY.DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

La primera de las leyes de la Trigonometría Racional viene del Teorema de Pitágoras y se puede visualizar con la siguiente figura 26

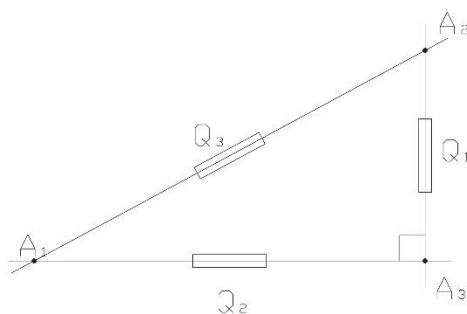


Figura 26. Pitágoras. (Fuente: el autor)

donde tenemos un ángulo recto en A_3 precisamente cuando la suma de los *quadrances* 1 y 2 son igual al *quadrance* 3

$$A_1A_3 \perp A_2A_3$$

luego

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

3.3.2-LEY DE TRIPLE QUAD

Fórmula del triple *quadrance*, o en su denominación original, Triple Quad Formula, la cual trata de tres puntos que se caracterizan por ser colineales.

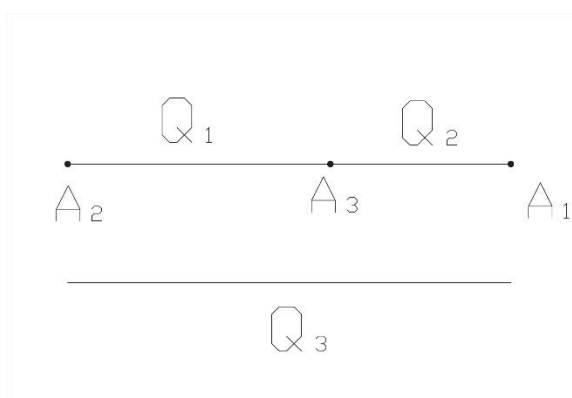


Figura 27. Colinealidad. (Fuente: el autor)

Tenemos entonces tres puntos A_2, A_3, A_1 y tres *quadrances* Q_1, Q_2, Q_3

La relación entre éstos *quadrances* es la siguiente

$$A_1 A_2 A_3 \text{ colineales} \Rightarrow (Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 = 4Q_1 Q_2$$

Ahora con estos dos resultados vamos a utilizarlos como punto de partida para continuar con la construcción de las otras tres leyes de la trigonometría racional.

Nos ayudaremos de la construcción de la figura 28 adjunta

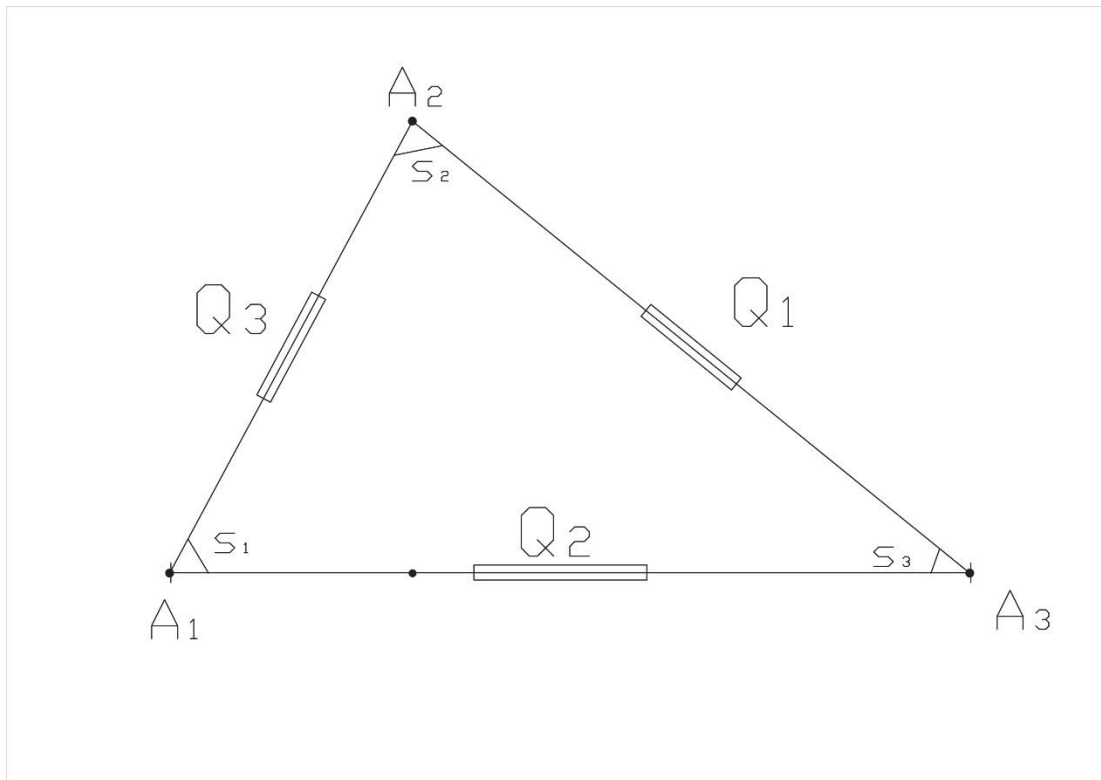


Figura 28. Triángulo no rectángulo. (Fuente: el autor)

En el triángulo se puede observar que tenemos como elementos principales los puntos A_1, A_2, A_3 con tres *quadrances* opuestos a esos puntos respectivamente Q_1, Q_2, Q_3 . Tenemos también representados tres *spreads* s_1, s_2, s_3 . Ahora con estos elementos esenciales vamos a poder encontrar las siguientes relaciones donde estos

elementos intervienen directamente para formar las expresiones que darán lugar a las restantes tres fórmulas de la trigonometría racional.

A partir de la construcción secundaria representada por la recta vertical a trazos, desde el s_2 perpendicular a la recta de la base, muestra el *quadrance* denotado con la letra H

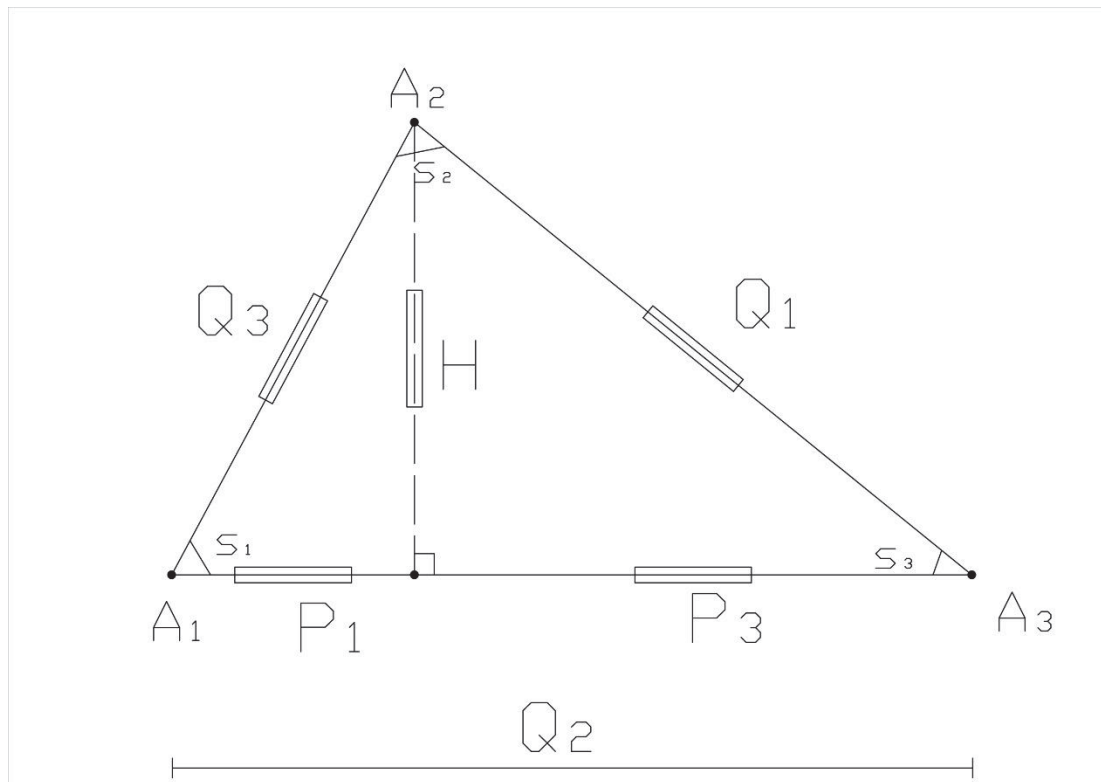


Figura 29. Representación quadrance perpendicular. (Fuente: el autor)

así podemos tener la recta base del triángulo inicial dividida en dos segmentos que denotamos como P_1 y P_2 .

Con ayuda de la figura 29, pasamos a observar más en detalle el triángulo secundario de la izquierda donde encontramos que

$$s_1 = \frac{H}{Q_3}$$

Y de manera similar encontramos en el triángulo secundario de la derecha que

$$s_3 = \frac{H}{Q_1}$$

Entonces tomando ambas ecuaciones y despejando tenemos

$$H = s_1 Q_3$$

$$H = s_3 Q_1$$

Luego

$$s_1 Q_3 = s_3 Q_1$$

$$\frac{s_1}{Q_1} = \frac{s_3}{Q_3}$$

Así con estas relaciones entre *spreads* y *quadrances*, que se pueden hacer extensivas para todos los elementos básicos del triángulo, por tanto, estamos en condiciones de obtener la tercera fórmula

3.3.3-LEY DE DISPERSION, LEY DE SPREAD

Para cualquier triángulo $\overline{A_1 A_2 A_3}$ con *quadrances* no nulos

$$\boxed{\frac{s_1}{Q_1} = \frac{s_2}{Q_2} = \frac{s_3}{Q_3}}$$

Siguiendo el esquema de la figura 29 para la obtención de esta fórmula podría darse el caso de que la recta auxiliar perpendicular mostrada denominada con el *quadrance* H se ubique fuera del triángulo. El argumento se mantiene tanto si está dentro como fuera pues no juega ningún papel importante para la trigonometría racional el hecho de que se encuentre dentro o fuera del triángulo principal objeto de estudio.

Continuando con el análisis de la figura 27, por Pitágoras sabemos que sobre el triángulo secundario de la izquierda

$$P_1 = Q_3 - H$$

Anteriormente dijimos que

$$H = s_3 Q_1$$

luego

$$P_1 = Q_3 - s_3 Q_1$$

Igualmente, si procedemos con el triángulo secundario de la derecha sobre la misma figura 29 obtenemos

$$P_3 = Q_1 - H$$

Y como anteriormente se dijo

$$H = s_3 Q_1$$

Luego

$$P_3 = Q_1 - s_3 Q_1$$

Ahora bien, conocemos como se desprende de la figura 27, ampliada en detalle sobre la figura 30, se observa que los puntos de la base del triángulo principal son colineales.

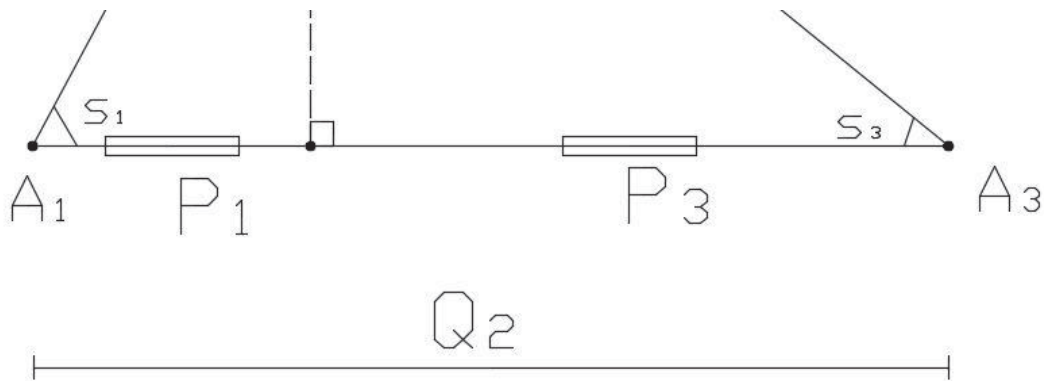


Figura 30. Representación puntos colineales. (Fuente: el autor)

Así, estos tres *quadrances* P_1 , P_3 y Q_2 deben satisfacer la triple quad formula

$$(Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 = 4Q_1Q_2$$

y que aquí escribimos en la forma

$$(P_3 + Q_2 - P_1)^2 = 4P_3Q_2$$

donde P_1 y P_3 aparecen como $P_1 = Q_3 - s_3Q_1$ y $P_3 = Q_1 - s_3Q_1$

quedando entonces

$$[(Q_1 - s_3Q_1) + Q_2 - (Q_3 - s_3Q_1)]^2 = 4[(Q_1 - s_3Q_1) Q_2]$$

Arreglando y agrupando

$$(Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 = 4Q_1Q_2(1 - s_3)$$

Y esta es la ley de intersección (cross law), la cuarta de las principales leyes de la trigonometría racional.

3.3.4-LEY DE INTERSECCIÓN

Para cualquier triángulo $\overline{A_1A_2A_3}$ define intersección $c_3 \equiv 1 - s_3$

$$(Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 = 4Q_1Q_2c_3$$

Finalmente, para llegar a la última de las leyes de la trigonometría racional debemos previamente utilizar las dos últimas que acabamos de obtener, es decir la Ley de dispersión (*spread law*) y la Ley de intersección (cross law) para conseguir la demostración de la última expresión importante.

Comenzamos con la Ley de dispersión reescribiéndola como sigue en la forma

$$\frac{s_1}{Q_1} = \frac{s_2}{Q_2} = \frac{s_3}{Q_3} = \frac{1}{D}$$

donde D es cualquier número

pudiendo expresarse también como

$$Q_1 = s_1D \quad Q_2 = s_2D \quad Q_3 = s_3D$$

y ahora lo podemos llevar e implementar en la fórmula de la Ley de intersección (Cross law) como sigue cancelando D pues aparecen a ambos lados de la igualdad y reagrupando

$$(s_1 + s_2 - s_3)^2 = 4s_1s_2(1 - s_3)$$

Lo que se denomina la fórmula de triple dispersión (Triple *spread* formula)

Donde más simétricamente podemos reordenar como

3.3.5-LEY DE TRIPLE DISPERSIÓN

Para cualquier triángulo $\overline{A_1A_2A_3}$

$$(s_1 + s_2 + s_3)^2 = 2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) + 4s_1s_2s_3$$

Fórmula que se parece bastante a la expresión de triple quad si eliminamos la última parte.

3.3.6- ESQUEMA DE FÓRMULAS PRINCIPALES

Estas son las cinco principales leyes de la trigonometría racional agrupadas del siguiente modo

Primera) Desde el Teorema de Pitágoras. Las rectas A_1A_3 y A_2A_3 son perpendiculares precisamente cuando

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

Segunda) Fórmula del triple quad. Los tres puntos A_1, A_2 y A_3 son colineales precisamente cuando

$$(Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 = 4Q_1Q_2$$

Tercera) Fórmula de dispersión. Para cualquier triángulo $\overline{A_1A_2A_3}$ con *quadrances* no nulos

$$\frac{s_1}{Q_1} = \frac{s_2}{Q_2} = \frac{s_3}{Q_3}$$

Cuarta) Fórmula de intersección. Para cualquier triángulo $\overline{A_1A_2A_3}$ define la intersección $c_3 \equiv 1 - s_3$

$$(Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 = 4Q_1Q_2c_3$$

Quinta) Fórmula de triple dispersión. Para cualquier triángulo $\overline{A_1A_2A_3}$

$$(s_1 + s_2 + s_3)^2 = 2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) + 4s_1s_2s_3$$

3.3.7-CUADRO GENERAL COMPARATIVO

En el cuadro siguiente se presenta un breve resumen en el que se recoge los factores fundamentales de ambos sistemas de trigonometría a fin de ilustrar su cometido.

En la columna de la izquierda se observa los elementos habituales de la trigonometría clásica convencional y en la columna de la derecha sus equivalentes en la trigonometría racional correspondiente.

Trigonometría convencional clásica	Trigonometría racional
Distancia al cuadrado	<i>Quadrance</i>
Seno cuadrado	<i>Spread</i>
Coseno cuadrado	Intersección
Ley del seno	Ley de <i>Spread</i>
Ley del coseno	Ley de intersección

Tabla 4. Cuadro general comparativo (Fuente: El autor)

4.-APLICACIONES PRÁCTICAS EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DE CALCULO DE NAVEGACIÓN

4.1-DISTANCIA A FARO

Supuesto práctico:

Un barco observa el faro de la Torre de la Polacra y toma ángulo sextantal vertical de valor igual a $1^{\circ}-24,0'8''$. Se desea saber la distancia a la que se encuentra un buque.

El faro se encuentra a una altura sobre el mar de 281^9 metros.

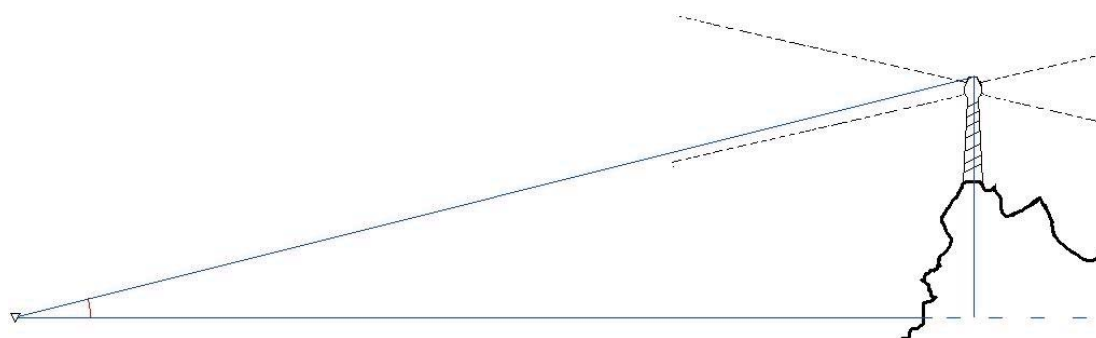


Ilustración 7. Esquema del supuesto práctico 4.4. (Fuente: el autor)

Resolución por el método convencional

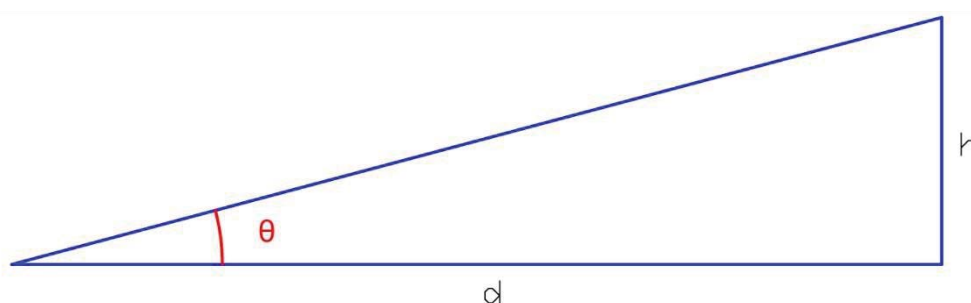


Figura 31. Esquema de cálculo convencional. (Fuente: el autor)

⁸ Se considera ya añadido el error de índice del sextante el cual debe tenerse en cuenta del mismo modo que se tiene para obtener la posición a través de la observación de cuerpos celestes.

⁹ Fuente: Libro de faros y señales de niebla, Instituto Hidrográfico de la Marina. Cádiz 2007

De la figura, se deduce por trigonometría plana la siguiente expresión¹⁰

$$d = h \cdot \cotg \theta$$

De donde sustituyendo los términos

$$d = 281 \cdot \cotg (1^\circ - 24')$$

$$d = 11497,79266 \approx 11497,8 \text{ metros} \approx 6,2 \text{ millas}$$

Resolución por Trigonometría Racional

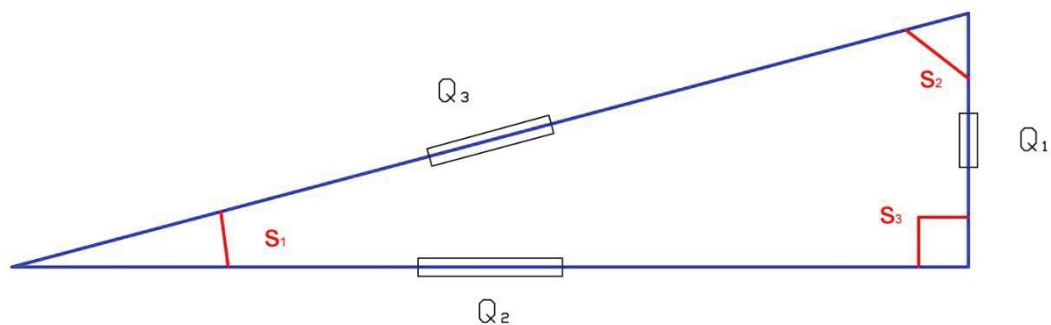


Figura 32. Esquema de cálculo con Trigonometría Racional. (Fuente: el autor)

En primer lugar, convertimos los valores de ángulos y distancias a *Spreads* y *Quadrances* respectivamente.

Ya conocemos que para obtener *spreads* a partir de un ángulo operamos como sigue

$$s_1 = \sen^2 \theta = \sen^2 (1^\circ - 24') = 0,000596931$$

Dado que, para el caso, tenemos un triángulo rectángulo, entonces podemos deducir fácilmente lo siguiente:

$$s_1 + s_2 + s_3 = 2$$

$$0,000596931 + s_2 + 1 = 2$$

¹⁰ Por lo general, el error causado por estos supuestos es insignificante cuando la distancia entre el barco y la orilla es mucho mayor que la distancia desde la orilla del punto debajo del objeto. Admiralty Manual of Navigation Vol.I (pp 90)

$$s_2 = 0,9994030687$$

Respecto a los valores de los *quadrances* podemos obtener al relacionado con el lado correspondiente a la altura del faro

$$Q_1 = 281^2$$

$$Q_1 = 78961$$

Con estos valores estamos en condiciones de aplicar la trigonometría racional

Con *Spread Law* formula que relaciona

$$\frac{s_1}{Q_1} = \frac{s_2}{Q_2}$$

Despejando Q_2

$$Q_2 = \frac{s_2 Q_1}{s_1}$$

$$Q_2 = \frac{0,9994030687 \cdot 78961}{0,000596931}$$

$$Q_2 = 132199236$$

$$d = 11497,79266 \approx 11497,8 \text{ metros} \approx 6,2 \text{ millas}^2$$

4.2-CINEMÁTICA

4.2.1-PROBLEMA CINEMÁTICO DIRECTO

De la observación de un buque se deduce un rumbo relativo de 217° y una velocidad relativa de 10,5 nudos. El buque propio navega con rumbo de 330° y velocidad de 16 nudos. Se precisa saber el rumbo y la velocidad del otro buque.

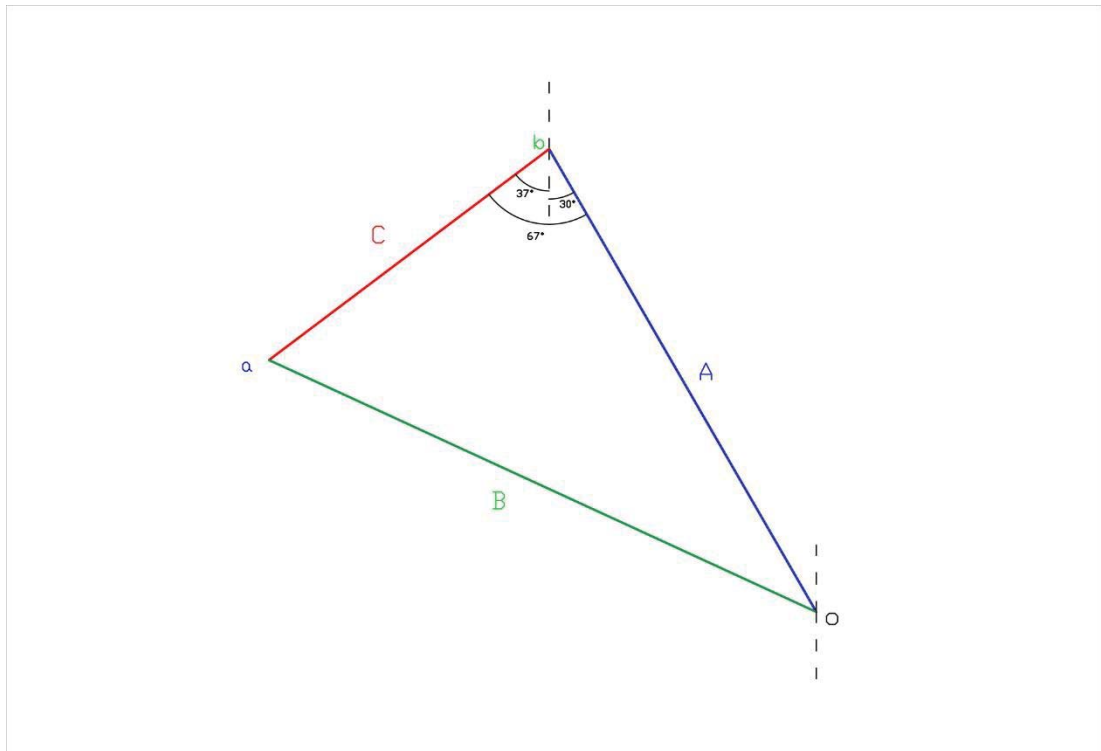


Figura 33. Esquema de cálculo convencional. (Fuente: el autor)

Resolución por el método convencional analítico

En el triángulo son conocidos los valores de los lados A y C.

El ángulo a se puede deducir de la figura ya que por semejanza $360^\circ - 330^\circ = 30^\circ$ y $217^\circ - 180^\circ = 37^\circ$, lo que sumamos al anterior como describe la figura $30^\circ + 37^\circ = 67^\circ$

Por adaptación al caso desde el teorema del coseno, podemos aplicar la expresión siguiente

$$B^2 = C^2 + A^2 - 2CA \cdot \cos b$$

o lo que es lo mismo

$$B = \sqrt{C^2 + A^2 - 2CA \cdot \cos b}$$

$$B = \sqrt{10,5^2 + 16^2 - 2 \cdot 10,5 \cdot 16 \cdot \cos 67^\circ}$$

$$B = V_B = 15,32 \text{ nudos}$$

Ahora con el teorema del seno podemos averiguar el otro ángulo de interés

$$\frac{\text{sen } c}{C} = \frac{\text{sen } b}{B}$$

$$c = \text{asen} \left(\frac{C \cdot \text{sen } b}{B} \right)$$

$$c = \text{asen} \left(\frac{10,5 \cdot \text{sen}(67)}{15,32} \right)$$

$$c = 39,1^\circ$$

Y para obtener el ángulo desde el norte podemos operar así

$$360^\circ - (30^\circ + 39,1^\circ) = 290,9^\circ \approx 291^\circ$$

Resolución por Trigonometría Racional

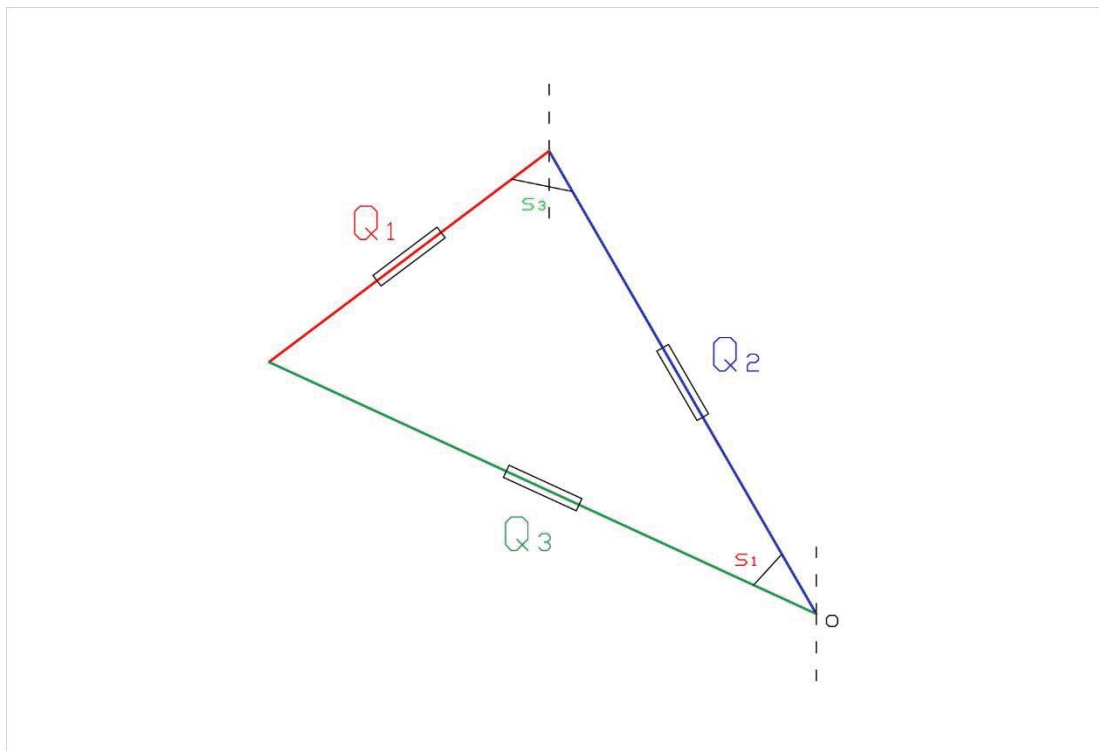


Figura 34. Cinemática. Esquema de cálculo con Trigonometría Racional. (Fuente: el autor)

Como es habitual obtendremos los *quadrance* y *spread* de los valores aportados en el enunciado

$$s_3 = \text{sen}^2 \theta = \text{sen}^2(67^\circ)$$

$$s_3 = 0,84732918$$

$$Q_1 = 110,25$$

$$Q_2 = 256$$

Entonces ya nos encontramos en situación de poder aplicar la trigonometría racional

Podemos averiguar el *quadrance* que falta Q_3 con la Ley de intersección o Cross Law

$$(Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 = 4Q_1Q_2(1 - s_3)$$

$$(110,25 + 256 - Q_3)^2 = 4 \cdot 110,25 \cdot 256 \cdot (1 - 0,84732918)$$

$$\left(\frac{1465}{4} - Q_3\right)^2 = 17235,92489$$

$$134139,0625 + Q_3^2 - 732,5Q_3 - 17235,92489 = 0$$

$$Q_3^2 - 732,5Q_3 + 116903,1376 = 0$$

Es importante destacar en este punto, que surge una ambigüedad inherente al hecho de que es una ecuación cuadrática y por tanto puede dar dos posibles soluciones, ambas de hecho válidas ya que se obtiene

$$Q_{3_1} = 234,96 \text{ que nos lleva a } B = 15,32$$

y

$$Q_{3_2} = 497,53 \text{ que nos da un } B = 22,3$$

Ambas soluciones posibles, dado que son valores que bien pudieran ser la velocidad de un blanco en el radar. Luego existe esta ambigüedad.

Vamos a tomar el valor menor correspondiente con el Q_{3_1}

Ahora con el *spread* Law o fórmula de dispersión tenemos que

$$\frac{s_1}{Q_1} = \frac{s_3}{Q_3}$$

Despejando s_1

$$s_1 = \frac{s_3 Q_1}{Q_3}$$

$$s_1 = \frac{0,84732918 \cdot 110,25}{256}$$

$$s_1 = 0,36491422$$

Que podemos proceder a convertirlo en grados operando de manera inversa

$$\theta^\circ = \text{asen}(\sqrt{0,36491422})$$

$$\theta = 37,16276^\circ \approx 37,1^\circ$$

Y para obtener el ángulo desde el norte podemos operar así

$$360^\circ - (30^\circ + 37,1^\circ) = 292,9^\circ \approx 293^\circ$$

4.2.2-PROBLEMA CINEMÁTICO DE ALCANCE A UN BUQUE (RENDEZVOUS)

Se observa un buque con una demora de 030° y distancia de 8 millas. Se desea interceptar a un buque lo más pronto posible sabiendo que la velocidad máxima del buque propio es de 16 nudos. El buque por interceptar navega con rumbo de 110° y una velocidad de 8 nudos. Se necesita saber rumbo que debemos poner para interceptarlo.

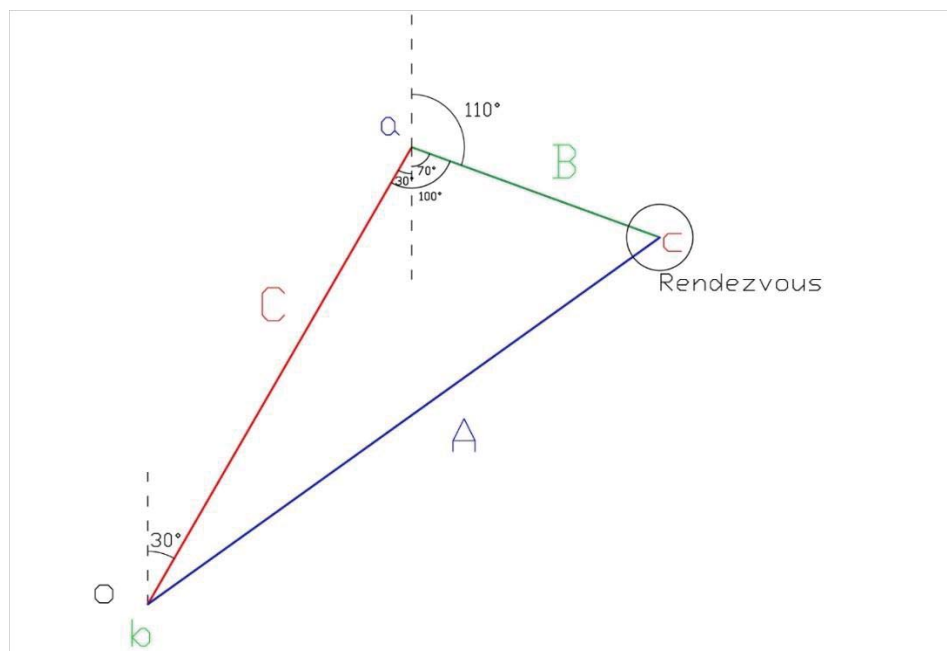


Figura 35. Esquema de cálculo convencional. (Fuente: el autor)

Resolución por el método convencional analítico (la resolución gráfica no es objeto de estudio en este ejemplo)

En el triángulo son conocidos los valores de los lados A y B.

El ángulo a se puede deducir de la figura ya que $180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$ y 30° por semejanza tenemos, como describe la figura $30^\circ + 70^\circ = 100^\circ$

Entonces $a = 100^\circ$

Con el teorema del seno

$$\frac{\text{sen } b}{B} = \frac{\text{sen } a}{A}$$

$$b = a \text{sen} \left(\frac{B \text{sen } a}{A} \right)$$

$$b = a \text{sen} \left(\frac{8 \cdot \text{sen}(100)}{16} \right)$$

$$\boxed{b = 29,4987 \approx 29,5^\circ}$$

Solo queda sumar a la demora

$$b = 29,5^\circ$$

$$\underline{\text{demora} = 30^\circ}$$

$$\text{Rumbo} = 059,5^\circ$$

Resolución por Trigonometría Racional

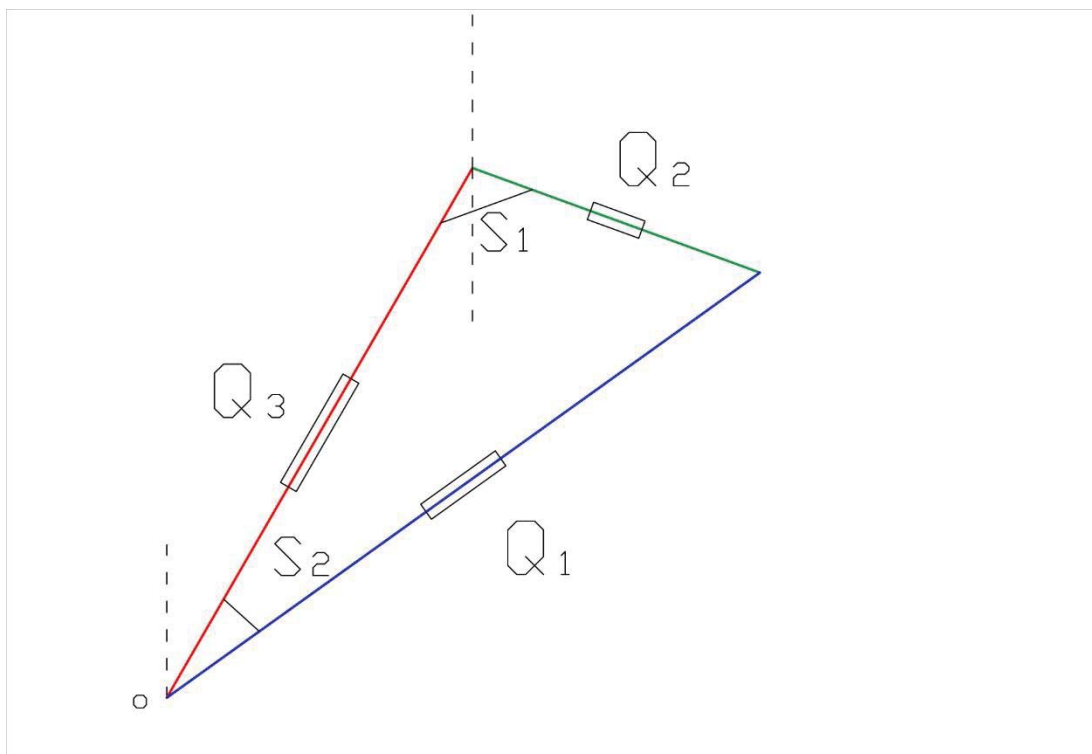


Figura 36. Cinemática. Esquema de cálculo con Trigonometría Racional. (Fuente: el autor)

Del mismo modo que en el ejemplo precedente, en primer lugar, convertimos los valores de ángulos y distancias a *Spreads* y *Quadrances* respectivamente.

$$s_1 = \text{sen}^2 \theta = \text{sen}^2(100^\circ)$$

$$s_1 = 0,96984631$$

$$Q_1 = 256$$

$$Q_2 = 64$$

Ahora con *Spread Law Formula* se relaciona *spreads* y *quadrances* del siguiente modo

$$\frac{s_1}{Q_1} = \frac{s_2}{Q_2}$$

$$s_2 = \frac{s_1 Q_2}{Q_1}$$

$$s_2 = \frac{0,96984631 \cdot 64}{256}$$

$$s_2 = 0,24246157$$

Y para obtener el ángulo

$$\theta_{s_1} = \text{asen}(\sqrt{0,24246157})$$

$$\boxed{\theta_{s_1} = 29,5^\circ}$$

Lo cual se corresponde con el obtenido por el procedimiento analítico convencional.

4.3-NAVEGACIÓN

Un buque navega con una velocidad de máquina de 13 nudos y rumbo de 104° , sin embargo, tras navegar durante 2 horas comprueba que ha cubierto 34 millas y que se desplaza sobre un rumbo efectivo de 121° . Se pide averiguar por procedimiento analítico la velocidad de la corriente.

Resolución por el método analítico convencional

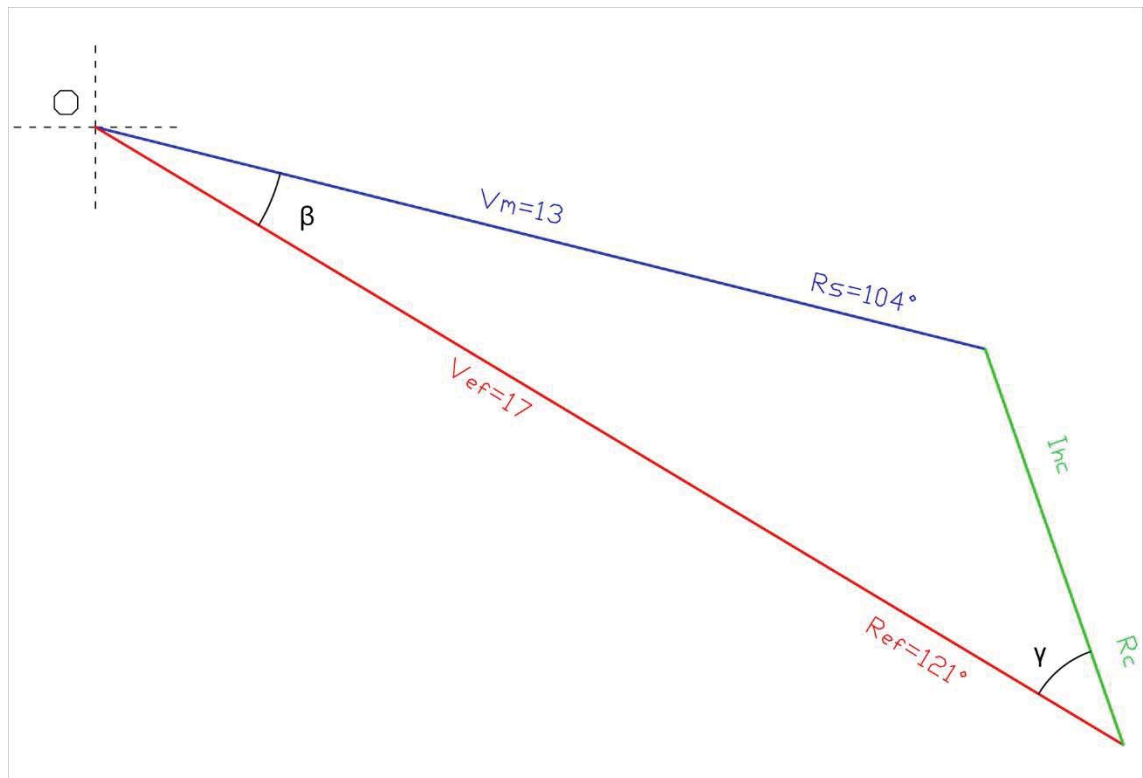


Figura 37. Navegación corriente desconocida, esquema de cálculo convencional analítico. (Fuente: el autor)

Ihc es referido a la Intensidad horaria de la corriente, lo que podemos describir como la velocidad de una corriente (V_c).

$$\text{Hallado el ángulo } \beta = R_{ef} - R_s = 121^\circ - 104^\circ = 17^\circ$$

Desde el teorema del coseno y adaptándolo al caso podemos obtener

$$Ihc = V_c = \sqrt{V_{ef}^2 + V_m^2 - 2V_{ef}V_m\cos\beta}$$

$$V_c = \sqrt{17^2 + 13^2 - 2 \cdot 17 \cdot 13 \cdot \cos 17}$$

$$\boxed{V_c = 5,94 \approx 6 \text{ nudos}}$$

Ahora podemos hallar también el ángulo que hace la corriente con el rumbo efectivo, es decir, siguiendo el esquema, el ángulo γ

$$\gamma = \arccos\left(\frac{V_c^2 + V_{ef}^2 - V_m^2}{2V_cV_{ef}}\right)$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{5,9424^2 + 17^2 - 13^2}{2 \cdot 5,9424 \cdot 17}\right)$$

$$\boxed{\gamma = 39,76^\circ \approx 40^\circ}$$

Ya podemos averiguar el rumbo de la corriente sumándolo al del conocido del rumbo efectivo

$$R_{ef} = 121^\circ$$

$$\gamma = 39,76^\circ$$

$$\boxed{R_c = 160,76^\circ}$$

Resolución por Trigonometría Racional

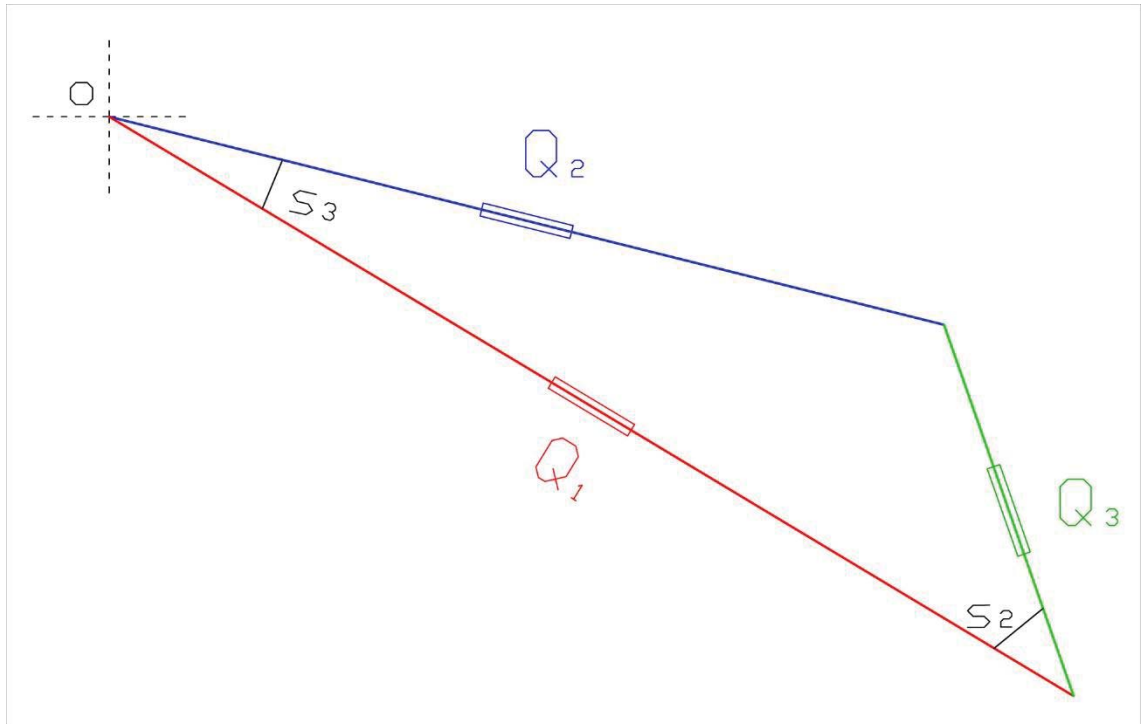


Figura 38. Navegación con corriente. Esquema Trigonometría Racional. (Fuente: el autor)

Primero como siempre transformaremos los valores para trabajar con la trigonometría racional.

$$s_3 = \text{sen}^2 \theta = \text{sen}^2(17^\circ)$$

$$s_3 = 0,0854816825 = \frac{63}{737}$$

$$Q_1 = 289$$

$$Q_2 = 169$$

Podemos hallar primeramente el *quadrance* que falta Q_3 con la Ley de intersección o Cross Law

$$(Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 = 4Q_1Q_2(1 - s_3)$$

$$(289 + 169 - Q_3)^2 = 4 \cdot 289 \cdot 169 \cdot \left(1 - \frac{63}{737}\right)$$

$$(458 - Q_3)^2 = \frac{131675336}{737} = 0$$

$$Q_3^2 - 916Q_3 - \frac{131675336}{737} = 0$$

Como ecuación cuadrática tenemos dos posibles soluciones que son

$$Q_{3_1} = 948,7790169$$

$$Q_{3_2} = 32,77901689$$

Lo que nos genera respectivamente los siguientes valores

$$Ihc_1 = 30,8 \text{ nudos}$$

$$Ihc_2 = 5,7 \text{ nudos}$$

De lo cual se desprende que deberíamos despreciar la primera solución, dado que es altamente improbable la existencia de una corriente de esas dimensiones de velocidad¹¹

Tomamos entonces $Q_3 = 32,77901689$

$$Ihc_2 = 5,7 \text{ nudos}$$

Ahora también estamos en condiciones de poder averiguar la dirección (Rumbo) de esta corriente desconocida con el *Spread Law*

$$\frac{s_2}{Q_2} = \frac{s_3}{Q_3}$$

$$s_2 = \frac{Q_2 s_3}{Q_3}$$

$$s_2 = \frac{\frac{63}{737} \cdot 169}{32,77901689}$$

$$s_2 = 0,4407210988$$

¹¹ Por comparación, una de las corrientes más fuertes bien documentadas, derivado del efecto de las mareas, se producen en Saltstraumen (Noruega) con unos valores habituales de 8,5 nudos, aunque hay datados registros próximos a los 13 nudos. (Pub.182 Sailing Directions. North and West coast of Norway, pp.165)

Lo que nos produce un ángulo de la forma siguiente

$$\gamma = (\text{asen}\sqrt{0,4407210988})$$

$$\boxed{\gamma \approx 41,6^\circ}$$

Con lo que podemos averiguar el rumbo de la corriente sumándolo al del conocido del rumbo efectivo

$$R_{ef} = 121^\circ$$

$$\gamma = 41,6^\circ$$

$$\boxed{R_c = 162,6^\circ}$$

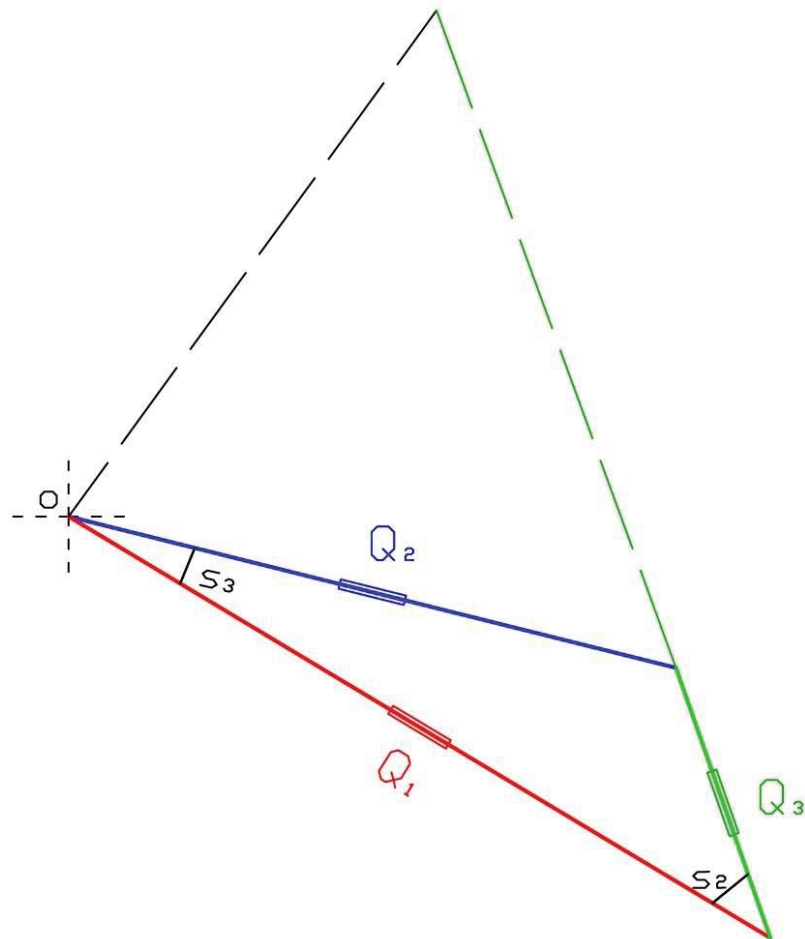


Figura 39. Otra posible solución con la corriente de 30,8 descartada. (Fuente: el autor)

4.4-ESTIMA DIRECTA

Un buque que sale del puerto de Gijón, latitud $43^{\circ}-33,0'$ Norte y Longitud $005^{\circ}-40,0'$ Oeste¹², se dispone a navegar una distancia de 222 millas náuticas a un Rumbo verdadero de 057° sin viento ni corriente.

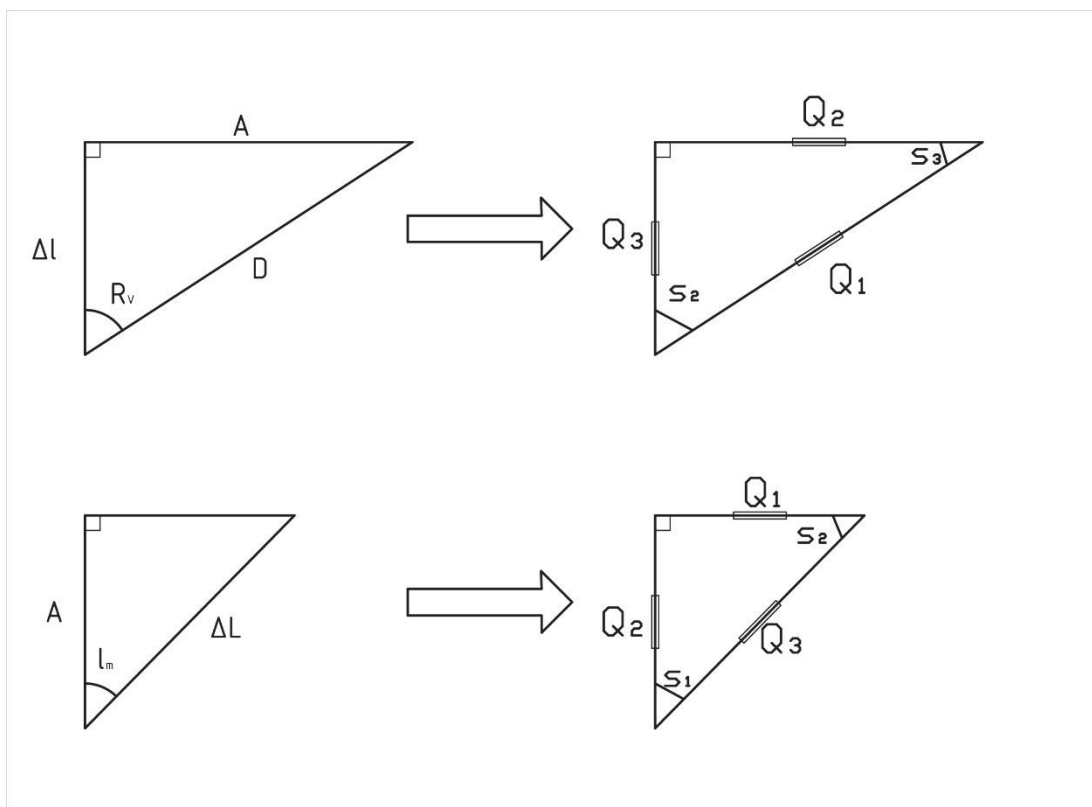


Figura 40. Esquema triángulos de la estima y equivalentes en trigonometría racional. (Fuente: el autor)

Procedimiento de resolución convencional

Aunque en la práctica habitual de las estimas no se exige el grado de precisión más allá de la décima de minuto mostrado, se toma el número máximo de decimales a fin de poder analizar con toda la precisión suficiente los resultados.

¹² Fuente: Lloyd's Maritime Atlas.

$$\begin{array}{l|ll}
 R_v = N57E & \varphi = 43^\circ - 33,0'N & \lambda = 005^\circ - 40,0'W \\
 D = 222' & \Delta\varphi = 02^\circ - 00,9'N & \Delta\lambda = 004^\circ - 21,3'E^{13} \\
 & \varphi' = 45^\circ - 33,9'N & \lambda' = 001^\circ - 18,7'W \\
 A = 186,18^{14} & &
 \end{array}$$

$$\Delta\varphi = D \cdot \cos R_v = 222' \cdot \cos 57 = 120,91$$

$$\varphi_m = 44^\circ - 33,4'N$$

$$A = D \cdot \sin R_v = 222' \cdot \sin 57 = 186,18$$

$$\Delta\lambda = \frac{A}{\cos \varphi_m} = \frac{186,18}{\cos(44^\circ - 33,4')} = 261,3 = 4^\circ - 21,3'$$

Procedimiento de resolución por trigonometría racional

Consideramos como un triángulo rectángulo, cometiendo un error asumible para los fines de la navegación marítima por ser una distancia inferior a las 300 millas náutica y además siendo una latitud intermedia, ésta distancia puede ser de un valor mayor si la navegación se produce en las inmediaciones del ecuador sin que por ello se cometa un error apreciable¹⁵.

Observando la figura 40, en cuya parte superior encontramos dos triángulos, conociendo lo que se ha descrito sobre la trigonometría racional, se obtiene fácilmente los siguientes valores:

$$s_1 = L = 1$$

$$s_2 = \sin^2(57) = 0,7033678756 = \frac{543}{772}$$

Se puede encontrar fácilmente s_3 al ser un triángulo rectángulo pues ya conocemos la relación $s_1 + s_2 + s_3 = 2$

¹³ A los efectos de hacer un análisis más exhaustivo los resultados exactos son: $\Delta\varphi = 02^\circ - 00,9098657733'N$; $\Delta\lambda = 004^\circ - 21,29534207'E$; $\varphi' = 45^\circ - 33,90986577'N$; $\lambda' = 001^\circ - 18,70465793'W$

¹⁴ $A = 186,1848661$; $\Delta\varphi = 120,9098658 N$; $\varphi_m = 44^\circ - 33,45493289'N$

¹⁵ Véase Fernández, I.I. & Leicea, R.G. 2002, Fundamentos de navegación marítima, (pp.161)

$$1 + s_2 + s_3 = 2$$

Luego

$$1 + \frac{543}{772} + s_2 = 2$$

$$s_3 = 0,29663168 = \frac{229}{772}$$

$$Q_1 = 49284$$

Ahora con la fórmula del *spread law* encontramos primero la $\Delta\varphi$

$$\frac{s_3}{Q_3} = \frac{s_1}{Q_1}$$

$$s_3 Q_1 = s_1 Q_3$$

Recordemos que $s_1 = L = 1$

$$Q_3 = s_3 Q_1$$

$$Q_3 = \frac{229}{772} \cdot 49284$$

$$Q_3 = 14619,21762$$

$$\Delta\varphi = 120,9099556$$

$$\Delta\varphi = 02^\circ - 00' - 54,6''N$$

Ahora podemos hallar el apartamiento también con el *spread law*

$$\frac{s_1}{Q_1} = \frac{s_2}{Q_2}$$

$$s_1 Q_2 = s_2 Q_1$$

El mismo caso, $s_1 = 1$

$$Q_2 = s_2 Q_1$$

$$Q_2 = \frac{543}{772} \cdot 49284$$

$$Q_2 = 34664,78238$$

$$A = 186,1848071$$

Finalmente podemos hallar la diferencia de longitud ayudados por el modelo de la figura 40 en la pareja de triángulos inferiores de donde se deduce

$$s_1 = \operatorname{sen}^2(44^\circ - 33,45') = \operatorname{sen}^2\left(\frac{17823}{400}\right)$$

$$s_1 = 0,4922772252$$

$$s_1 + s_2 + s_3 = 2$$

$$0,4922772252 + s_2 + 1 = 2$$

$$s_2 = 0,5077227748$$

Y ahora de nuevo con la *Spread law*

$$\frac{s_3}{Q_3} = \frac{s_2}{Q_2}$$

$$Q_3 = \frac{Q_2 s_3}{s_2} = \frac{Q_2}{s_2}$$

$$Q_3 = \frac{34664,78238}{0,5077227748} = 68275,01955$$

$$\Delta\lambda = 261,29489 = 4^\circ - 21,29489'$$

Quedando entonces

$$\varphi = 43^\circ - 33,0'N$$

$$\lambda = 005^\circ - 40,0'W$$

$$\underline{\Delta\varphi = 02^\circ - 00,91'N}$$

$$\underline{\Delta\lambda = 004^\circ - 21,29489'E}$$

$$\varphi' = 45^\circ - 33,91'N$$

$$\lambda' = 001^\circ - 18,70511'W$$

4.5-ESTIMA INVERSA

Un buque desea navegar desde Aberdeen latitud $57^{\circ}-09,0'$ Norte y Longitud $002^{\circ}-04,0'$ Oeste hasta Stavanger latitud $58^{\circ}-58,0'$ Norte y Longitud $005^{\circ}-44,0'$ Este¹⁶. Se precisa conocer el rumbo para llegar a Stavanger, así como la distancia.

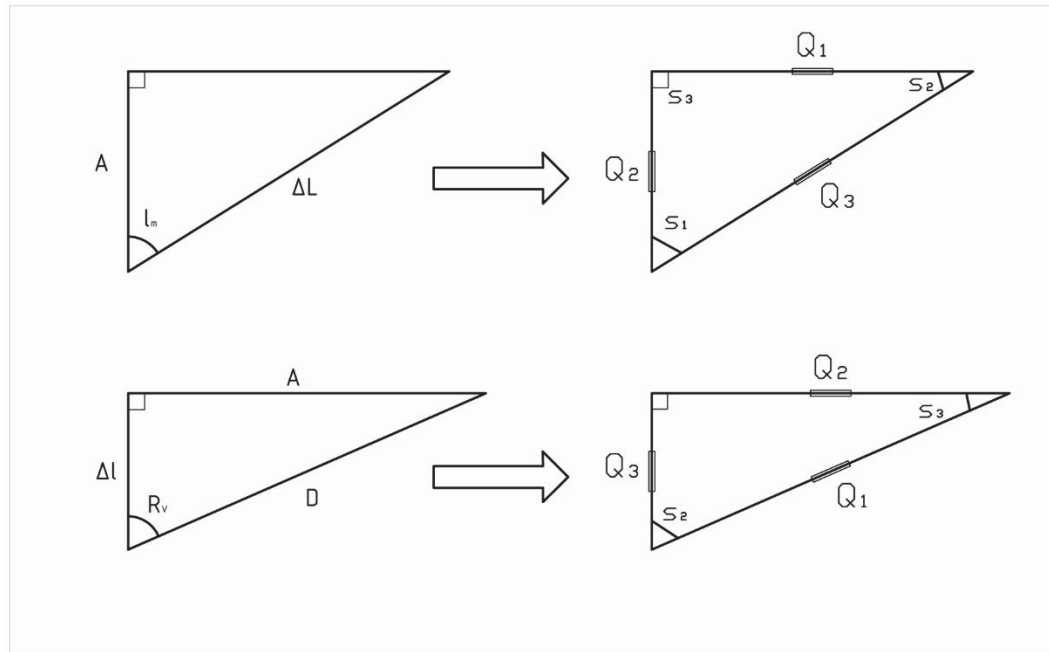


Figura 41. Triángulos Estima inversa. Notación convencional y trigonometría racional. (Fuente: el autor)

Procedimiento de resolución convencional

$$\begin{array}{lcl}
 \varphi' = 58^{\circ} - 58'N & \lambda' = 005^{\circ} - 44'E & \varphi_m = 58^{\circ} - 03,5'N = \frac{6967}{120} \\
 \varphi = 57^{\circ} - 09'N & \lambda = 002^{\circ} - 04'W & \\
 \Delta\varphi = 01^{\circ} - 49'N & \Delta\lambda = 007^{\circ} - 48'E & A = 247,6 \\
 (109) & (468) & R_v = 066,24^{\circ} \\
 & & D = 270,52'
 \end{array}$$

$$A = \Delta\lambda \cdot \cos \varphi_m; A = 468 \cdot \cos (58^{\circ} - 03,5') = 468 \cdot \cos \left(\frac{6967}{120} \right) = 247,6^{17}$$

$$\tan R_v = \frac{A}{\Delta\varphi} \quad R_v = \text{atan} \left(\frac{A}{\Delta\varphi} \right) = \frac{247,5980136}{109} = 66,3^{\circ 18}$$

¹⁶ Fuente: Lloyd's Maritime Atlas.

¹⁷ $A = 247,5980136$;

¹⁸ $R_v = 66,23948012$

$$D = \frac{\Delta\varphi}{\cos R_v} \quad D = \frac{109}{\cos 66,3^\circ} = 270,5'^{19}$$

Resolución por trigonometría racional

Ayudados por el esquema de la figura 41, de los dos triángulos superiores tenemos

$$Q_3 = 219024$$

$$s_1 = \operatorname{sen}^2\left(\frac{6967}{120}\right)$$

$$s_1 = 0,7201001884$$

Dado que es un triángulo rectángulo podemos averiguar el *spread* faltante

$$s_1 + s_2 + s_3 = 2$$

$$0,7201001884 + s_2 + 1 = 2$$

$$s_2 = 0,2798998116$$

Y ahora con el *spread law*

$$\frac{s_2}{Q_2} = \frac{s_3}{Q_3}$$

$$Q_3 s_2 = Q_2 s_3$$

$$s_3 = 1$$

$$Q_2 = Q_3 s_2$$

$$Q_2 = 219024 \cdot 0,2798998116$$

$$Q_2 = 61304,77633$$

$$A = 247,5980136$$

Ahora podemos continuar con el segundo grupo de triángulos de la figura 41 donde tenemos

$$Q_2 = 61304,77633$$

¹⁹ $D = 270,5286978$ millas

$$Q_3 = 11881$$

Podemos averiguar primeramente la distancia, relacionada con Q_1 por medio de la fórmula de trigonometría racional Pitágoras

$$Q_2 + Q_3 = Q_1$$

$$61304,77633 + 11881 = 73185,77633$$

$$D = 270,5286978 \text{ millas}$$

$$s_3 = \frac{Q_3}{Q_1}$$

$$s_3 = \frac{11881}{73185,77633}$$

$$s_3 = 0,1623402879$$

Como es un triángulo rectángulo se cumple también

$$s_1 + s_2 + s_3 = 2$$

De donde

$$1 + s_2 + 0,162340 = 2$$

$$s_2 = 0,8376597121$$

$$\theta_{R_v} = \text{asen}\left(\sqrt{0,83765972}\right)$$

$$\theta_{R_v} = 066,23948012^\circ \approx 066,3^\circ$$

4.6-TABLA ANÁLISIS RESULTADOS DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio tipo	Trigonometría convencional clásica	Trigonometría racional
Distancia a faro	11497,79266 metros	11497,79266
Cinemática 1	$V_B=15,3285466$ $C=39,09016273^\circ$	$V_B=15,3285466$ $C=37,16276^\circ$
Cinemática 2	$B=29,4987$	$B=29,4987$
Navegación con corriente	$V_c=5,942499$	$V_c=5,725296$
Estima directa	$\varphi'=45^\circ-33,90986577'N$ $\lambda'=001^\circ-18,70465793'W$	$\varphi'=45^\circ-33,91'N$ $\lambda'=001^\circ-18,70511'W$
Estima inversa	$R_v=066,24^\circ$ $D=270,52'$	$R_v=066,24^\circ$ $D=270,52'$

Tabla 5. Análisis de resultados (Fuente: El autor)

4.7- HOJA DE CÁLCULO Y TRIGONOMETRÍA RACIONAL.

TABLA DE CONVERSIONES.

GRADOS	SPREAD	GRADOS	SPREAD	GRADOS	SPREAD
1	0	16	37/487	31	126/475
2	1/821	17	63/737	32	262/933
3	1/365	18	36/377	33	229/772
4	2/411	19	23/217	34	298/953
5	3/395	20	113/966	35	101/307
6	2/183	21	89/693	36	341/987
7	3/202	22	119/848	37	113/312
8	8/413	23	20/131	38	47/124
9	22/899	24	112/677	39	40/101
10	6/199	25	5/28	40	69/167
11	15/412	26	54/281	41	167/388
12	15/347	27	27/131	42	257/574
13	21/415	28	175/794	43	20/43
14	58/991	29	55/234	44	318/659
15	14/209	30	1/4	45	1/2
GRADOS	SPREAD	GRADOS	SPREAD	GRADOS	SPREAD
46	341/659	61	179/234	76	933/991
47	23/43	62	619/794	77	394/415
48	317/574	63	104/131	78	332/347
49	221/388	64	227/281	79	397/412
50	98/167	65	23/28	80	193/199
51	61/101	66	565/677	81	877/899
52	77/124	67	111/131	82	405/413
53	199/312	68	729/848	83	199/202
54	646/987	69	604/693	84	181/183
55	206/307	70	853/966	85	392/395
56	655/953	71	194/217	86	409/411
57	543/772	72	341/377	87	364/365
58	671/933	73	674/737	88	820/821
59	349/475	74	450/487	89	1
60	3/4	75	195/209	90	1

Tabla 6. Spreads en forma fraccional. (Fuente: el autor)

GRADOS	SPREAD	GRADOS	SPREAD	GRADOS	SPREAD
1	0.000305	16	0.075976	31	0.265264
2	0.001218	17	0.085481	32	0.280814
3	0.002739	18	0.095492	33	0.296632
4	0.004866	19	0.105995	34	0.312697
5	0.007596	20	0.116978	35	0.328990
6	0.010926	21	0.128428	36	0.345492
7	0.014852	22	0.140330	37	0.362181
8	0.019369	23	0.152671	38	0.379039
9	0.024472	24	0.165435	39	0.396044
10	0.030154	25	0.178606	40	0.413176
11	0.036408	26	0.192169	41	0.430413
12	0.043227	27	0.206107	42	0.447736
13	0.050603	28	0.220404	43	0.465122
14	0.058526	29	0.235040	44	0.482550
15	0.066987	30	0.25	45	0.5
GRADOS	SPREAD	GRADOS	SPREAD	GRADOS	SPREAD
46	0.517450	61	0.764960	76	0.94147
47	0.534878	62	0.779596	77	0.94940
48	0.552264	63	0.793893	78	0.95677
49	0.569587	64	0.807831	79	0.96359
50	0.586824	65	0.821394	80	0.96985
51	0.603956	66	0.834565	81	0.97553
52	0.620961	67	0.847329	82	0.98063
53	0.637819	68	0.859670	83	0.98515
54	0.654508	69	0.871572	84	0.98907
55	0.671010	70	0.883022	85	0.99240
56	0.687303	71	0.894005	86	0.99513
57	0.703368	72	0.904508	87	0.99726
58	0.719186	73	0.914519	88	0.99878
59	0.734736	74	0.924024	89	0.99970
60	0.75	75	0.933013	90	1

Tabla 7. Spreads en forma decimal. (Fuente: el autor)

5.-BREVE INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA RACIONAL

No son ni pocas ni menos importantes las implicaciones de la trigonometría esférica en la resolución de problemas de cálculo de navegación, por ello es necesario cuando menos, hacer un bosquejo inicial de las posibles aplicaciones de la trigonometría racional en este campo de estudio.

Los problemas para resolver en los que está implicada directamente la trigonometría esférica son, particularizando para cada caso, especialmente aquellos que conducen a la resolución de derrotas de navegación por círculo máximo, también denominadas ortodrómicas u ortodromas²⁰, válidas en su caso tanto para los conceptos esenciales de la navegación aérea como la navegación marítima.

Del mismo modo, la obtención de la posición por la resolución de triángulos esféricos proyectados en la bóveda celeste son las que nos encaminan a poder despejar las correspondientes coordenadas involucradas en estos cálculos e inherentes a la naturaleza propia del movimiento de los cuerpos celestes, con la finalidad así, de poder resolver los correspondientes ángulos y lados de los triángulos esféricos generados por los propios elementos que los conforman, como son las coordenadas horarias²¹, las coordenadas horizontales o azimutales²² así como las coordenadas uranográficas²³ y sus diferentes correlaciones.

Las fórmulas generales básicas de la trigonometría esférica racional se detallan a continuación en la forma siguiente y relacionan los seis valores que componen un triángulo esférico en la trigonometría racional. Estos valores son por un lado tres *quadrances* y por otros tres *spreads*.

²⁰ Ortodrómica u Ortodroma: Línea de trazado de la derrota entre dos puntos de la superficie de una esfera, en su caso de la tierra, y que se efectúa por el menor arco de círculo máximo que pasa por los puntos de origen y destino.

²¹ Declinación y horario

²² Altura y azimut

²³ Coordenadas uranográficas ecuatoriales: declinación y ascensión recta, ésta última sustituida por el ángulo sidéreo (parámetro angular que, a diferencia de la ascensión recta, es medido hacia el oeste y se presenta más habitual en su uso en la náutica)

Primera) Fórmula de los *spreads* esféricos (*Spread spherical law*)

$$\boxed{\frac{S_1}{q_1} = \frac{S_2}{q_2} = \frac{S_3}{q_3}}$$

Segunda) Fórmula de intersección de triángulos esféricos (*Cross spherical law*)

$$\boxed{(S_1 q_2 q_3 - q_1 - q_2 - q_3 + 2)^2 = 4(1 - q_1)(1 - q_2)(1 - q_3)}$$

$$(S_2 q_1 q_3 - q_1 - q_2 - q_3 + 2)^2 = 4(1 - q_1)(1 - q_2)(1 - q_3)$$

$$(S_3 q_1 q_2 - q_1 - q_2 - q_3 + 2)^2 = 4(1 - q_1)(1 - q_2)(1 - q_3)$$

Tercera) Fórmula de dual intersección de triángulos esféricos (*Dual Cross Law*)

$$\boxed{(q_1 S_2 S_3 - S_1 - S_2 - S_3 + 2)^2 = 4(1 - S_1)(1 - S_2)(1 - S_3)}$$

$$(q_2 S_1 S_3 - S_1 - S_2 - S_3 + 2)^2 = 4(1 - S_1)(1 - S_2)(1 - S_3)$$

$$(q_3 S_1 S_2 - S_1 - S_2 - S_3 + 2)^2 = 4(1 - S_1)(1 - S_2)(1 - S_3)$$

Fórmulas de casos especiales

Caso de tres puntos colineales

Cuarta) Fórmula de Triple *quadrance* esférico (*Triple quad spherical fórmula*)

$$\boxed{(q_1 + q_2 + q_3)^2 = 2(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + 4q_1 q_2 q_3}$$

Caso de ángulo recto ($S_1 = 1$)

$$Thales: \boxed{S_3 = \frac{q_3}{q_1}} \boxed{S_2 = \frac{q_2}{q_1}}$$

Quinta)

$$Pitágoras: \boxed{q_1 = q_2 + q_3 - q_2 q_3}$$

De la disposición presentada en los términos de las fórmulas descritas, así como su morfología en las diferentes variaciones en función de las analogías propuestas a las que da lugar, se desprende que podría ser un medio eficaz para la resolución efectiva de cálculos donde los triángulos esféricos tenga una presencia prevalente.

No obstante, para su conveniente comprensión, descripción y desarrollo se llevará a cabo oportunamente en su caso, con los correspondientes esquemas figuras y bocetos, al objeto de facilitar su visualización.

Por tanto, del análisis preliminar del conjunto de fórmulas propuestas, es posible constatar que puede haber lugar a una solución equivalente a la trigonometría esférica clásica para la resolución de cálculos, sin embargo, con las implicaciones tan importantes en la resolución de problemas prácticos de navegación y más específicamente para los citados de índole relativa al posicionamiento por la observación de cuerpos celestes y el trazado de derrotas ortodrómicas, bien sería merecedor la elaboración de un trabajo ulterior específico y propio, con el fin de averiguar los detalles y las implicaciones directas así como la afectación en los procedimientos de resolución, pudiendo, con este análisis más exhaustivo, dar cuenta de este modo, de la capacidad de éstos procedimientos de cálculos como medio para la producción de soluciones concretas que impliquen triángulos esféricos en la navegación.

6.-CONCLUSIONES

1.-Se constata que la trigonometría racional puede ser una alternativa viable para la resolución de problemas que involucran triángulos. Esta resolución se puede llevar a cabo con una única tabla, sin tablas trigonométricas ni funciones trascendentales o bien con medio de una pequeña calculadora no necesariamente científica para agilizar los cálculos.

2.- Se verifica que la trigonometría racional puede producir resultados aceptables y de una calidad comparable a los de la trigonometría clásica, por lo que puede resultar en un medio fiable y sólido para los cálculos.

3.- Se evidencia la existencia de ciertas ambigüedades que pudieran surgir dependiendo de las figuras presentadas y fórmulas aplicadas, además de que queda manifestado que su ejercicio y empleo requiere de un cierto grado mínimo de manejo correcto de las reglas fundamentales del álgebra y aritmética.

4.- Se revela la trigonometría racional como medio con posibilidades de ser un buen recurso para el entrenamiento, ejercicio y ejecución ágil de problemas y cálculos para los estudiantes de ciencias náuticas y navegación en aplicaciones específicas y objetivas.

5.- Se manifiesta que, tras una observación inicial, las posibilidades de la trigonometría racional pueden verse ampliadas al campo de la trigonometría esférica, aportando, por lo tanto, una nueva visión al proceso de resolución de cálculos de esta índole. Se enfatiza la idea de que bien es posible llevar a cabo un trabajo académico propio y específico para revelar y aclarar, a través del subsiguiente análisis del cálculo y de los resultados obtenidos, con el suficiente celo como para

determinar de manera pormenorizada la viabilidad, eficacia y solidez de la trigonometría esférica racional.

BIBLIOGRAFÍA

- Aldworth, P. 1997, *Lloyd's Maritime Atlas*, Lloyd's of London Press.
- Bowditch, N. & Estados Unidos. National Imagery and Mapping Agency 2002, *The American practical navigator*, Lighthouse Press, Deerfield Beach (Florida).
- Cheers, G. 2008, *Mitología: todos los mitos y leyendas del mundo*, RBA.
- De Miguel, P. 1989, *Problemas de trigonometría aplicados a la navegación*, Eusko Jaurlaritza = Gobierno Vasco.
- Fernández, I.I. & Leicea, R.G. 2002, *Fundamentos de navegación marítima*.
- García Melón, E., Poleo Mora, A.J. & Bermejo Díaz, A.C. 1994, *Cinemática náutica*, Colegio de Oficiales de la Marina Mercante Española.
- Gayá, R.S. 2007, "Libro de Faros y Señales de Niebla", *Instituto Hidrográfico de la Marina*, vol. 2008.
- Gilsdorf, M. 2006, *A comparison of rational and classical trigonometry*,
- Ibáñez Fernández, I. 2016, *Navegación astronómica: compendio y cálculos*, Universidad del País Vasco.
- Ibáñez, I. & Gaztelu-Iturri, R. 2002, "Fundamentos de navegación marítima. [sl]: Universidad del País Vasco", *Servicio editorial*.
- Iglesias Martín, M.A. 1996, *Trigonometría esférica : (breve introducción a la navegación)*, Universidad del País Vasco.
- Kjerstad, N. 2002, *Elektroniske og akustiske navigasjonssystemer: for maritime studier*, Tapir.
- Mansfield, D.F. & Wildberger, N. 2017, "Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry", *Historia Mathematica*, vol. 44, no. 4, pp. 395-419.
- Navy, R. 2008, "Admiralty Manual of Navigation: The Principles of Navigation, Volume 1".
- PUIG ADAM, P. 1977, "GEOMETRÍA MÉTRICA, tomo I", *Biblioteca Matemática. Madrid*,
- Wildberger, N. 2006, "Survivor: The Trigonometry Challenge".
- Wildberger, N. 2005, "The Wrong Trigonometry",
- Wildberger, N.J. 2005, *Divine Proportions: Rational trigonometry to universal geometry*, Wild Egg.

WEBGRAFÍA

Consultada de enero a junio de 2018

<https://www.etymonline.com/>

https://www.researchgate.net/publication/284572258_An_Introduction_to_Rational_Trigonometry_and_Chromogeometry

<http://www.sci-news.com/archaeology/babylonian-clay-tablet-plimpton-322-05163.html>

<http://www.agenciasinc.es/Noticias/Una-tablilla-babilonica-esconde-la-tabla-trigonometrica-mas-antigua-del-mundo>

<http://www.ossmann.com/protractor/>

http://www.armada.mde.es/ihm/XML/LF/LF_ESPANA_COSTA%20SE.xml

<https://www.britannica.com/biography/>

http://www.storyofmathematics.com/indian_madhava.html

<https://www.barentswatch.no/en/>

AVISO:

Este documento es el resultado del Trabajo Fin de Grado de un alumno, siendo su autor responsable de su contenido.

Se trata por tanto de un trabajo académico que puede contener errores detectados por el tribunal y que pueden no haber sido corregidos por el autor en la presente edición.

Debido a dicha orientación académica no debe hacerse un uso profesional de su contenido.

Este tipo de trabajos, junto con su defensa, pueden haber obtenido una nota que oscila entre 5 y 10 puntos, por lo que la calidad y el número de errores que puedan contener difieren en gran medida entre unos trabajos y otros,

La Universidad de Cantabria, la Escuela Técnica Superior de Náutica, los miembros del Tribunal de Trabajos Fin de Grado así como el profesor tutor/director no son responsables del contenido último de este Trabajo.”

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE NÁUTICA

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Trabajo Fin de Grado

**APLICACIÓN DE LA TRIGONOMETRÍA
RACIONAL EN LA NÁUTICA**

**Rational trigonometry application in nautical
studies**

Para acceder al Título de Grado en

INGENIERÍA NÁUTICA Y TRANSPORTE MARÍTIMO

Junio – 2018