Facultad de Educación

MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Estudio de errores en el aprendizaje del concepto de función en la educación secundaria

The study of errors in the concept of function learning in secondary education

Alumno/a: Pilar Chico Valle
Especialidad: Matemáticas
Director/a: Mario Alfredo Fioravanti Villanueva
Curso académico: 2017 - 2018
Fecha: Junio 2018

ÍNDICE

1. RESUMEN

Este trabajo fin de máster está enfocado a detectar las diferentes visiones que muestran los estudiantes de un curso de 3º de ESO de matemáticas académicas, cuando tienen que analizar las propiedades de ubicación y comportamiento de funciones (como el crecimiento y decrecimiento o el signo de la imagen), a través de la observación de sus gráficas. Para ello se ha realizado un cuestionario a una muestra de 23 alumnos del nivel académico indicado con anterioridad y con los que previamente se había trabajado en el aula la unidad didáctica de Funciones correspondiente.

Hemos podido observar que una parte mayoritaria de los participantes opinan erróneamente que una función tiene imágenes positivas si su gráfica está ubicada en una región del plano donde las abscisas son positivas y de forma análoga opinan que una función tiene imágenes negativas si su gráfica está ubicada en una región del plano donde las abscisas tienen signo negativo. Esto evidencia que, por tanto, a la hora de determinar el signo de la imagen de una función priorizan el signo de las abscisas, sin tener en cuenta la información que proporcionan las ordenadas.

Otra de las concepciones erróneas observadas a través del estudio de los resultados obtenidos, es que existe entre los alumnos una tendencia clara a asociar función creciente con función de imágenes positivas y de forma análoga función decreciente a función con imágenes negativas.

PALABRAS – CLAVE: Función, gráficas, concepciones erróneas

ABSTRACT.

This master's thesis is focused on detecting the different views shown by the students in a 3rd year ESO academic mathematics course, when they have to analyze the properties of location and behavior of functions (such as growth and diminishmentor the sign of the image), through the observation of its graphs. For this, a questionnaire was made from a sample of 23 students of the academic level indicated above and to whom the corresponding didactic unit of functions had previously been worked in the classroom.

We have observed that a majority of the participants erroneously think that a function has positive images if its graph is located in a region of the plane where the abscissas are positive and analogous they also think that a function has negative images if its graph is located in a region of the plane where the abscissas have a negative sign. This shows that, therefore, when determining the sign of the image of a function, they prioritize the abscissa sign, without taking into account the information provided by the ordinates.

Another of the misconceptions observed through the study of the results obtained is that there is a clear tendency among students to associate increasing function with the function of positive images and analogously decreasing function with negative images.

2. INTRODUCCIÓN GENERAL

Dentro del campo de las matemáticas el concepto de función es uno de los más importantes y esenciales. Pero al mismo tiempo, es uno de los conceptos que presenta mayor dificultad para los estudiantes, ya que no llegan a asimilarlo de forma correcta en la mayor parte de los casos, debido a su generalidad y a su complejidad, derivadas de las diferentes maneras de introducirlo, de una gran variedad de representaciones y de su alto nivel de abstracción.

Considero que lograr la interiorización y comprensión del concepto de función y de sus propiedades es fundamental para alcanzar un correcto desarrollo académico de los estudiantes. Esto se debe a que ciertamente es uno de los conceptos más útiles dentro de las matemáticas que nos permite, entre otras cosas, representar, describir y analizar fenómenos cotidianos relacionados con la física, la economía, la historia, la medicina, la sociología…..Por tanto un temprano conocimiento y manejo del concepto de función y de sus propiedades mejorará las habilidades del alumno para analizar y comprender muchas de las situaciones problemáticas a las que se enfrente.

Este trabajo fin de Máster tiene como objetivo estudiar la capacidad de los alumnos de un curso de 3º de ESO para identificar algunas propiedades básicas de las funciones a través de sus gráficas.

Por las limitaciones de extensión del TFM me he centrado en analizar las propiedades que a mi parecer es indispensable comprender como base para el aprendizaje de otras propiedades de las funciones: concepto de función, continuidad y discontinuidad de funciones y propiedades de ubicación o comportamiento (signo de la imagen, crecimiento y decrecimiento).

El trabajo se estructura en dos partes:

- En la primera parte se realiza un resumen de la evolución del concepto de función y del estudio de sus propiedades a lo largo de la historia hasta llegar al siglo XX y de la didáctica de las funciones en épocas más recientes. Se concluye este apartado realizando un análisis bastante completo de las dos corrientes educativas existentes dentro del campo de las matemáticas: el formalismo y el realismo matemático.

- En la segunda parte del trabajo se analizan los errores más comunes cometidos por los alumnos a la hora de analizar funciones a través de sus gráficas.

Este análisis estará respaldado, en alguna medida, por los resultados obtenidos en un cuestionario realizado a los alumnos de una clase de 3º de la ESO de matemáticas académicas, teniendo siempre en cuenta las restricciones impuestas por la normativa del centro relativa a la realización de este tipo de estudios e investigaciones en sus aulas.
El trabajo finaliza con una síntesis y unas conclusiones acerca del tema estudiado.

PARTE I: MARCO TEÓRICO

3. EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN HASTA EL SIGLO XX.

Incluimos en este trabajo un repaso de la historia de las matemáticas que nos permitirá adquirir una visión global que nos ayudará a entender los motivos de la dificultad para asimilar la idea de función. Puesto que se trata de una ciencia que nos permite adquirir numerosas habilidades y capacidades muy útiles para resolver problemas de nuestro entorno, su evolución ha estado estrechamente ligada al desarrollo de otras ciencias como la astronomía o la física. La historia puede ser una valiosa herramienta de trabajo con la que motivar el interés de los alumnos.

En la historia de las matemáticas encontramos diversos ejemplos de conceptos matemáticos cuyo uso ha pasado a través de gran cantidad de cambios. No es ajeno a esta situación el concepto de función, que para llegar a la definición actual tuvo que atravesar por un largo proceso. Por este motivo nos podemos encontrar con diferentes adaptaciones del concepto de función, ligados a diferentes necesidades educativas y que por tanto presentan un grado de complejidad muy distinto.
Es en el mundo antiguo donde aparecen las primeras referencias que se tienen sobre la noción de función, asociadas a problemas astronómicos cuyos datos han quedado reflejados en tablas y escritos.
Posteriormente, con el transcurso de los años, la noción de función fue forjándose al servicio de la física y de la geometría, intentando explicar la relación entre dos cantidades variables. Este fue el punto de partida desde el que se empezó a trabajar hasta llegar a la noción de función actual:
Partiendo del hecho de que dados dos conjuntos A y B, una relación definida de A en B es un conjunto de pares ordenados que cumplen una proposición, es decir, es un subconjunto del producto cartesiano A x B, se define una función como una relación a la cual se añade la condición de que a cada valor del conjunto A le corresponde uno y sólo un valor del conjunto B**.**

Veamos a continuación, de forma esquematizada, cual ha sido el recorrido histórico del concepto de función hasta el siglo XX. Para ello me he basado en las publicaciones de Kleiner (1989), las publicaciones de Youschkevitch (1976), las publicaciones de Rüthing (1984) y las publicaciones de Font (2011).
Según Kleiner (1989), el concepto de función se remonta 4000 años atrás, pero la noción de función no aparece de forma clara hasta principios del siglo XVIII.
Posteriormente y basándonos en las publicaciones de Youschkevitch (1976) podemos distinguir que hay varias etapas importantes en el desarrollo del concepto de función hasta llegar a la mitad del siglo XIX: la antigüedad, la edad media y la edad moderna.

La Antigüedad:

En esta época se considera principalmente la Matemática Babilónica (2000 a. c. 600 a. c.) y la Griega. Los astrónomos de la época babilónica utilizaban funciones tabuladas con la finalidad de poder encontrar patrones con los que poder llegar a predecir fenómenos naturales que ocurrían de forma periódica, como el movimiento de los astros del firmamento, que tanto interés suscitaba en aquella época.

Los datos observados fueron recogidos en numerosas tablas que según algunos científicos como Pedersen (1974) reflejaban un claro "carácter de funcionalidad", pero que para otros científicos como Youschkevitch no presentan aun ninguna relación con el concepto de función actual.

``….el simbolismo griego, hasta aproximadamente el siglo III d.C. aparte del uso de dígitos, se confinaba a sí mismo a denotar las cantidades usando las letras del alfabeto. No había fórmulas algebraicas, ni ninguna clase de algoritmo (….) solamente en el alejandrino Diofanto, aparecen algunos signos algebraicos´´. Youschkevitch (1976)

En la época de la **Grecia clásica** los filósofos griegos consideraban que las matemáticas no tenían relación con el movimiento de los objetos (a excepción de los movimientos relacionados con los planetas). Es de destacar el trabajo de Aristóteles en relación con la astronomía. Pese a observar y analizar las relaciones existentes entre los valores que iban tomando las magnitudes involucradas en fenómenos cotidianos, no se llegó a alcanzar aún la noción de función o de variables dependientes.

La Edad Media:

En la Edad Media, el interés de los científicos por analizar el movimiento de los objetos fue tomando relevancia dentro del ámbito matemático y por tanto se dejó atrás aquella visión estática que se tenía en épocas anteriores y que solo se basaba en el lenguaje formal y en el trabajo con figuras geométricas:

``En la ciencia europea del siglo XIV, estas nociones generales fueron primero expresadas en formas geométricas y mecánicas pero (…) como en la antigüedad, cada caso concreto de dependencia entre dos cantidades no fue definido por una fórmula, sino por una descripción verbal, o por un grafo´´ Youschkevitch (1976)

Este período medieval se puede dividir en dos partes, atendiendo a los enfoques dados y avances conseguidos relativos al estudio del concepto de función: una fase no latina, desde el año 500 hasta el 1200 y una fase latina, aproximadamente desde el año 1200 hasta el 1500.

- En el periodo denominado ``no latino´´ hay que destacar las aportaciones de los Hindús y Árabes que trabajaron el álgebra y la trigonometría. A pesar de ser capaces de resolver ecuaciones con una incógnita, no atisbaron aun el concepto de variable y por tanto no fueron capaces de ver que en una ecuación con dos incógnitas quedaba representada la relación existente entre las mismas.
- En el ``período latino´´, a partir del siglo XIII, se trabajó profusamente sobre las proporciones.

Uno de los científicos más relevantes de este periodo que contribuyó al desarrollo del concepto de función con sus investigaciones y trabajos fue Galileo, quien mostró un ferviente interés por conseguir relacionar las diferentes magnitudes involucradas en los experimentos que realizaba, mediante el análisis de los datos recogidos.

<u>Período Moderno</u>:

Este periodo (siglos XVI - XIX) es de vital importancia en el desarrollo del concepto de función. Y esto se debe, en gran medida, tanto al desarrollo del cálculo y la geometría analítica, como a la aparición de la simbología algebraica que permitió empezar a trabajar con cantidades desconocidas representando las mismas con símbolos.

En este periodo moderno fueron muchos los científicos que con sus trabajos e investigaciones contribuyeron al desarrollo del concepto de función:

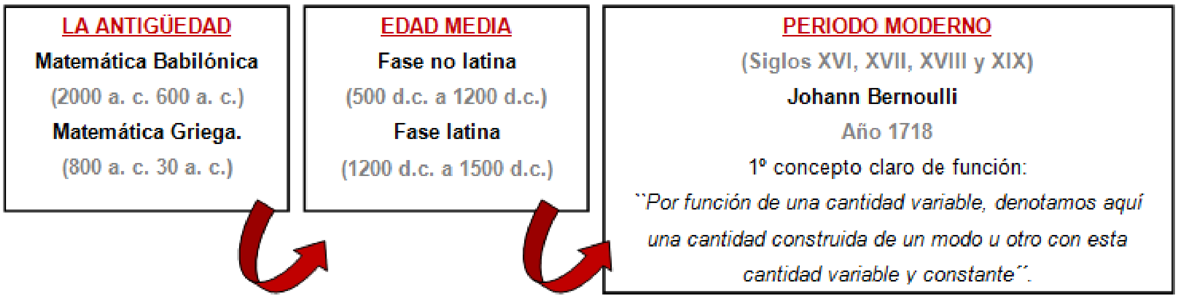
- **René Descartes (1596-1650):**
  Consiguió llegar a obtener la expresión algebraica representativa de todos los puntos que conforman una curva dada, mediante el estudio del movimiento que realiza un punto al describir la trayectoria.
- **Pierre Fermat (1601-1665):**
  Presenta el concepto de variable algebraica y afirma que las propiedades de una curva quedan perfectamente representadas mediante una ecuación algebraica con dos incógnitas.
- **Isaac Barrow (1630 – 1677):**
  Presento por primera vez la relación existente entre el cálculo de áreas y el cálculo de derivadas para ciertos casos concretos.
- **Isaac Newton(1642 – 1727):**
  El movimiento de los elementos geométricos (puntos, rectas o planos) es el que genera las variables, a las que denomina fluente y por primera vez las representa con las letras x e y. Otra de las aportaciones relevantes de Newton fue que dada una función su expresión simbólica se podía expresar en una secuencia o cadena infinita.
- **Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716):**
  La palabra "función" apareció por primera vez en los manuscritos de Leibniz de agosto de 1673, según los artículos de Youschkevitch (1976, pág. 56). ``*Con ella se refería a un objeto geométrico asociado con una curva, v. g. coordenadas de un punto sobre la curva o la pendiente de una curva´´.*

  Tanto **Newton y como Leibniz** presentaron en el siglo XVIII de forma simultánea, la relación entre la derivada de una función y su integral utilizando esta vez el razonamiento infinitesimal.

- **Johann Bernoulli (1667-1748) :**
  La primera definición formal de función, según Rüthing (1984, p.72) fue Johan Bernoulli en un artículo publicado en 1718 "*Por función de una cantidad variable, denotamos aquí una cantidad construida de un modo u otro con esta cantidad variable y constantes*".
- **Brook Taylor (1685 – 1731)**
  Es muy relevante como aportación al desarrollo de las funciones el teorema de Taylor, que afirmaba que una función, en ciertas condiciones concretas, se podía expresar mediante un polinomio.
- **Leonhard Paul Euler (1707 – 1783):**
  Una de sus numerosas aportaciones fue el uso de la notación f(a) como forma de representar el valor que toma dicha función f al aplicarla a un valor concreto ``a´´. Realiza además una clasificación de los distintos tipos de funciones atendiendo a sus propiedades: algebraicas o transcendentes, racionales o irracionales…
- **Joseph-Louis Lagrande (1736 – 1813)**
  Trabajo en el cálculo de variaciones, sistematizo el campo de ecuaciones diferenciales y trabajo en la teoría de números. Es el que empezó a emplear el término de derivada de una función y su representación simbólica f´.
- **Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857)**
  Formulas y teoremas de integración de funciones, cálculo de funciones simétricas….Una de sus grandes aportaciones fueron las ecuaciones diferenciales de Cauchy-Riemann.
- **Bernard Bolzano (1781 – 1848)**
  Una de sus aportaciones más relevantes fue el teorema de Bolzano que permitía buscar fácilmente un punto donde el valor de una función fuese igual a cero o equivalentemente una solución de una ecuación dada.

- **Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897)**
  Aportes a la teoría de la probabilidad y desarrollo de la calculadora mecánica. Trabajó entre otras cosas sobre el concepto de continuidad y convergencia uniforme.

Imagen 1: *Resumen cronológico del concepto de función*



4. ENFOQUES EDUCATIVOS DESDE LOS CUALES SE HA ESTUDIADO EL CONCEPTO DE FUNCIÓN.

Desde el punto de vista educativo, a partir de los años 60, se ha enfocado la enseñanza del concepto de función desde dos perspectivas bien diferenciadas, una formalista (matemáticas modernas) y otra conocida como realista, más cercana a nuestros días (Font, 2011). Veamos a continuación una breve descripción de estas dos perspectivas:

4.1. Perspectiva formalista sobre las funciones

Durante los años 70 y 80 del siglo XX, se introdujo en los programas de secundaria un novedoso enfoque llamado ``matemática moderna´´. Esta nueva corriente se apoyó fundamentalmente en la noción de conjunto, el álgebra vectorial, la idea de transformación en geometría y ciertas estructuras algebraicas.

Se pensaba que de esta manera los alumnos iban a tener una presentación más clara de los conceptos matemáticos, en contraste con las definiciones poco precisas e informales que aparecían en los libros de la época.
La enseñanza se basaba principalmente en el desarrollo de la teoría, definiciones formales y demostraciones. Los conceptos se presentaban de forma descontextualizada y los ejemplos de aplicación eran escasos.
Con respecto a las funciones, se explicaban los conceptos de producto cartesiano, relación, aplicación inyectiva, sobreyectiva y biyectiva….

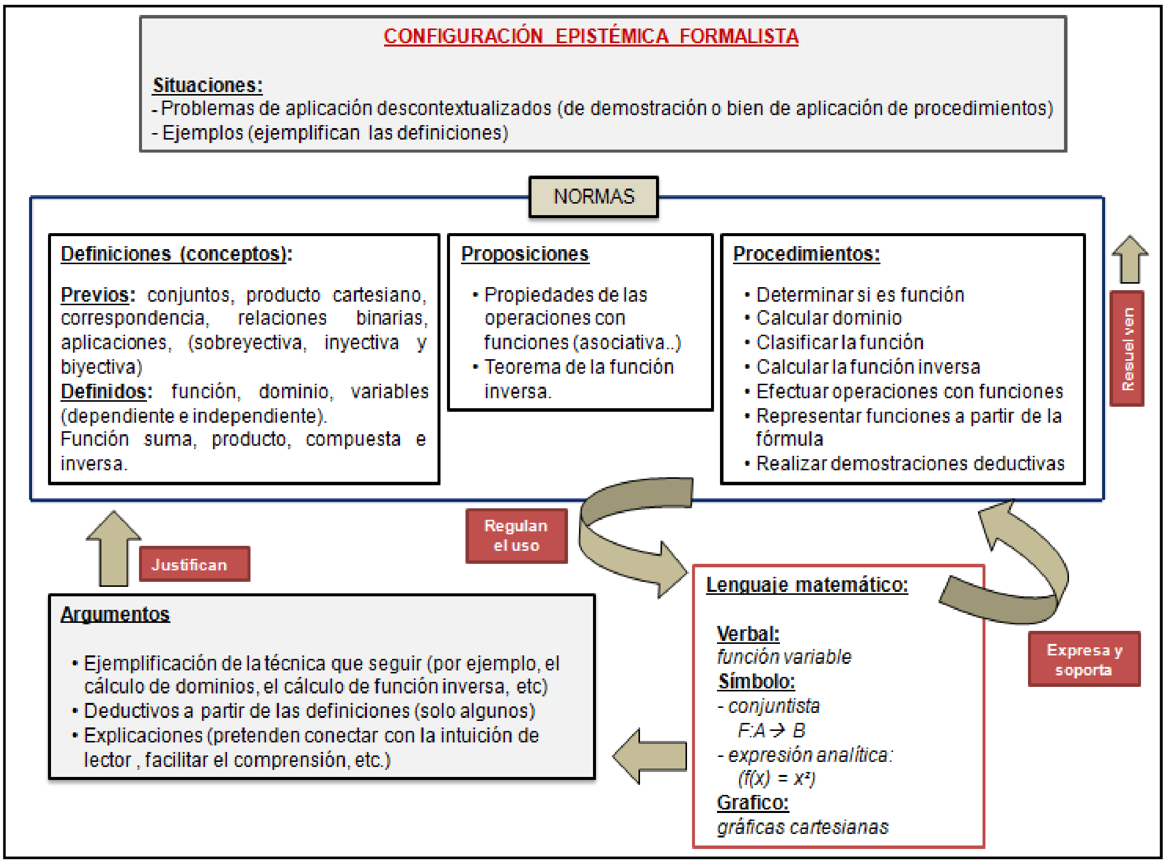
La aplicación de esta ``perspectiva moderna´´ a la enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria y en el bachillerato generó una serie de problemas a los estudiantes que se podrían resumir en:

1. Al presentar a los alumnos las matemáticas como un conjunto de conceptos y conocimientos perfectamente definidos y organizados de forma precisa, se mermó su capacidad e interés por desarrollar y trabajar de forma autónoma sobre nuevas ideas o conjeturas. Los alumnos se conformaban con lo que se les había enseñado y percibían las matemáticas como una ciencia en la que ya estaba todo establecido.
2. Los alumnos aprendían las definiciones de los conceptos matemáticos sin llegar a comprender su verdadera esencia ya que se dio demasiada importancia al lenguaje matemático, utilizando un exceso de simbología que, en la mayoría de los casos, los alumnos manejaban pero no llegaban a comprender. No se prestó el suficiente interés en que los estudiantes llegasen a interiorizar el verdadero sentido de los conceptos sobre los que se trabajaba y esto originaba que no fuesen capaces de relacionar unos conceptos con otros.
3. Al presentar a priori los conceptos de forma tan general, no se permitió a los alumnos poder ejercitar procesos mentales de abstracción, pasando de lo concreto a lo abstracto, lo que dificultaba notablemente su aprendizaje.

No se mostraba a los alumnos ejemplos concretos que pudiesen observar para realizar posteriormente una labor de análisis y reflexión que les ayudaría a entender y asimilar los conceptos que luego aparecerían en casos más generales.

4. Otro de los problemas derivados de la matemática moderna fue que se trabajó de forma totalmente aislada del resto de las ciencias. Esto impedía a los alumnos poder conocer cuál era su verdadera aplicación en la ``vida real´´. Los problemas matemáticos que se planteaban estaban descontextualizados, por lo que los estudiantes no eran capaces de encontrar utilidad alguna en la materia que se les estaba enseñando.

Imagen 2: *Configuración epistémica formalista (Font, 2011)*



4.2. Perspectiva realista sobre las funciones

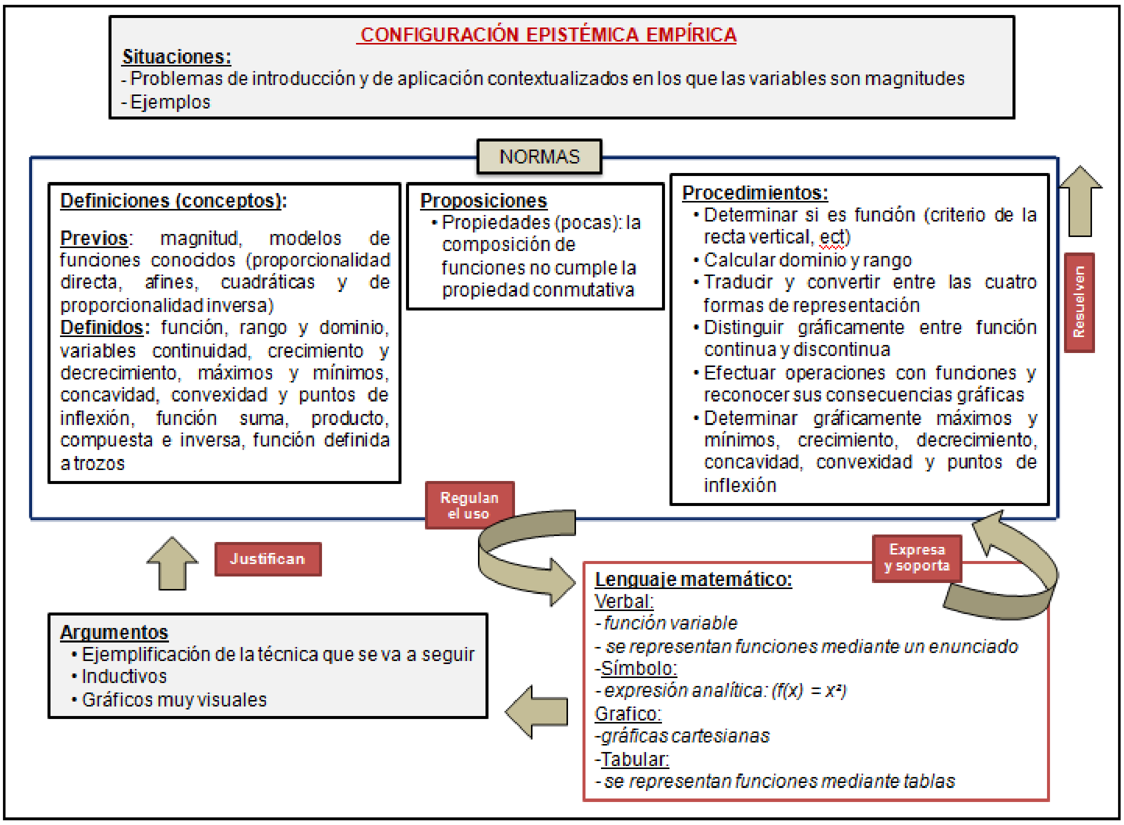
Finalmente, la enseñanza de la matemática moderna en ámbitos académicos no universitarios no dio buenos resultados, suponiendo un gran fracaso educativo. Esta situación generó la necesidad de dar un nuevo enfoque a la enseñanza de las matemáticas muy distinto al anterior.

Este cambio metodológico consistió en:

- Presentar a los alumnos las teorías matemáticas terminadas, obviando sus demostraciones deductivas. Con ello se buscó que el trabajo de los alumnos se centrase en aprender a aplicar correctamente los algoritmos derivados de dichas teorías.
- Intentar resolver los problemas de asimilación de conocimientos, derivados de la abstracción y de la generalización de conceptos y teorías. Se centraron en poder dar sentido a los conceptos matemáticos mediante la contextualización de situaciones diversas, haciendo de este modo más fácil su asimilación e interiorización por parte de los alumnos.

Poco a poco, de forma progresiva, esta nueva forma de enseñar las matemáticas en los ámbitos no universitarios fue adquiriendo fuerza hasta llegar a ser predominante sobre cualquier otro posible enfoque en los currículos oficiales. Actualmente sigue gozando de gran aceptación y sigue por tanto estando presente en muchos de los libros de texto que son utilizados por los centros educativos.
La contextualización se convierte en una herramienta fundamental de trabajo que facilita enormemente a los alumnos relacionar las funciones con situaciones reales e ir construyendo y asimilando durante ese proceso los nuevos conceptos que está planificado dar en la unidad didáctica correspondiente.

Imagen 3: *Configuración epistémica empírica (Font, 2011)*



Veamos una comparación de cómo se plantea la enseñanza de las funciones entre dos libros pertenecientes a estas dos etapas que hemos descrito, uno editado por la editorial Luis Vives (Matemáticas, 1978) y otro editado por la editorial Anaya (Matemáticas, 2011):

Ejemplos modelo formalista:

1. *Demostrar que la función definida por :*

$$x \longrightarrow |x|$$

Es continua para todo x_0.

2. *Ponemos* $f(x)=\frac{|x|+x}{2}$ *y* $g(x)=\frac{|x|-x}{2}$

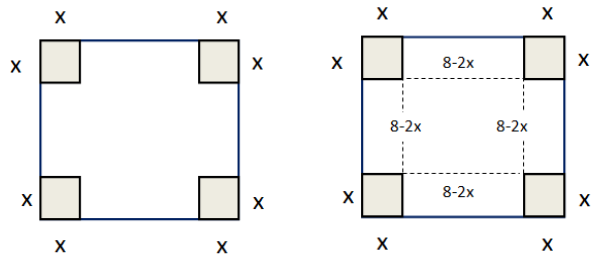
Estudiar la continuidad de las funciones f, g, $g \circ f$, $f \circ g$ *y f.g*

Ejemplos modelo realista

Disponemos de una cartulina cuadrada de 8 dm de lado. Cortamos cuadraditos de lado x en las etiquetas, tal y como se indica en la figura y queremos saber la superficie de la figura que queda.

Para obtener la expresión analítica de la superficie, S, resta al área del cuadrado el área de los cuadraditos cortados.

a) *¿Cuál es la expresión de la superficie S?*
b) *¿Cuál es el dominio de definición?*
c) *¿Y el volumen de la caja que se puede formar?*



5. CONCEPTO DE FUNCIÓN EN EL CURRÍCULO ACTUAL

El currículo vigente reconoce la importancia del concepto de función para la competencia matemática. Veamos a continuación cuales son los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables determinados por el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, en lo referente al curso de 3º de ESO de matemáticas académicas:

Contenidos

- ✓ *Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias.*
- ✓ *Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente.*
- ✓ *Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.*

- ✓ *Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.*
- ✓ *Expresiones de la ecuación de la recta.*
- ✓ *Funciones cuadráticas. Representación gráfica. Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana*

Criterio de evaluación *1. Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica.*
Estándares de aprendizaje evaluables *1.1. Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas.* *1.2. Identifica las características más relevantes de una gráfica interpretándolas dentro de su contexto.* *1.3. Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto.* *1.4. Asocia razonadamente expresiones analíticas a funciones dadas gráficamente.*

Criterio de evaluación *2. Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo y de sus parámetros para describir el fenómeno analizado.*
Estándares de aprendizaje evaluables *2.1. Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (Ecuación punto pendiente, general, explícita y por dos puntos), identifica puntos de corte y pendiente, y la representa gráficamente.*

2.2. Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa. *2.3. Formula conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica.*

Criterio de evaluación 3 *3. Reconocer situaciones de relación funcional que necesitan ser descritas mediante funciones cuadráticas, calculando sus parámetros y características.*
Estándares de aprendizaje evaluables *5.1. Calcula los elementos característicos de una función polinómica de grado dos y la representa gráficamente.* *5.2. Identifica y describe situaciones de la vida cotidiana que puedan ser modelizadas mediante funciones cuadráticas, las estudia y las representa utilizando medios tecnológicos cuando sea necesario.*

Como podemos ver, si analizamos los contenidos expuestos con anterioridad, actualmente se da mucha importancia, entre otros aspectos, a que el alumno sea capaz de interpretar el comportamiento de una función, para lo que necesita saber analizar de forma precisa sus propiedades, es decir, saber identificar si una representación dada se corresponde o no con una función, determinar donde es creciente o decreciente o determinar el signo de la imagen, que son precisamente los aspectos que vamos a analizar en nuestra investigación.

Del mismo modo podemos observar que también se trabaja a fondo en que los alumnos conozcan las diferentes formas de representar las funciones y sepan analizarlas y relacionarlas entre sí, priorizando el uso de ejemplos contextualizados.

Consecuentemente, si observamos cualquiera de los libros que se están usando en los centros a día de hoy, todas las editoriales hacen especial hincapié en esta cuestión, planteando numerosos ejercicios con los que trabajar y mejorar la capacidad de los alumnos de determinar cuándo una función es creciente o decreciente, cuándo es continua o discontinua o aprender a utilizar indistintamente las diferentes representaciones de las funciones (expresión analítica, tabla, gráfica y expresión verbal) haciendo conversiones con facilidad de unas a otras.

Veamos algunos ejemplos de ejercicios recogidos en varios libros de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3 de la ESO:

Imagen 4: *Libro editorial Anaya, 2015*

1. La gráfica de abajo da la temperatura en Jaca a lo largo de un día.

a) Indica los intervalos de tiempo en los que crece la temperatura y aquellos en los que decrece.

b) ¿Por qué crees que se producen esos aumentos y disminuciones de temperatura en esos tramos?

c) ¿Crees que en la ciudad es verano o invierno? Justifícalo.

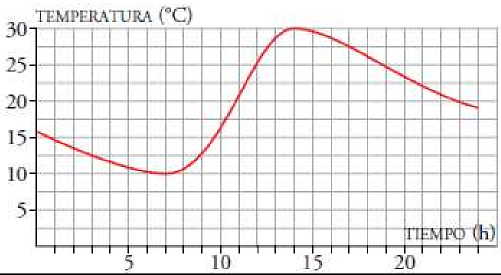


Imagen 5: *Libro editorial Anaya, 2015*

2. La gráfica de abajo muestra el sueldo mensual de un trabajador en una empresa a lo largo de su vida.

a) ¿Cuánto tiempo lleva el trabajador en la empresa cuando le suben el sueldo por primera vez?

b) ¿Cuánto gana a los 12 años de entrar? ¿Y a los 20?

c) ¿Es una función continua?

Imagen 6: *Ejercicio editorial Anaya, 2015*

1. La entrada al parque de atracciones vale 5 €, y por cada atracción hay que pagar 1 €.

a) Representa esta función:

atracciones en las que se monta → coste

b) ¿Se pueden unir los puntos de la gráfica?

c) ¿Cuánto costará subir a 12 atracciones? ¿Y a 20?

Imagen 7: *Ejercicio editorial Anaya, 2015*

7. Relaciona cada gráfica con una de las expresiones analíticas siguientes:

i) $y = x + 1$

ii) $y = x^3$

iii) $y = x^2 - 1$

iv) $y = -x + 1$

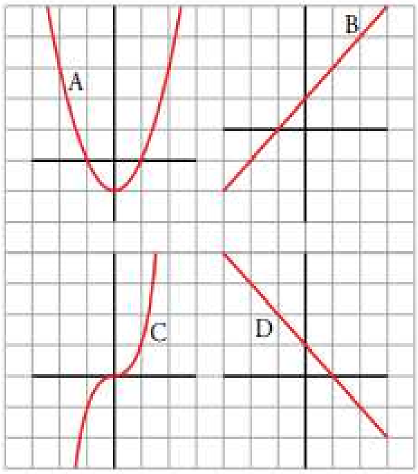


Imagen 8: *Ejercicio editorial Anaya, 2015*

9. a) Sabiendo que la libra es una unidad de peso que equivale a 0,45 kg, copia y completa esta tabla:

x (LIBRAS)	0,5	1	1,5	2	3	4
y (KILOS)		0,45				

b) Representa la función que convierte libras en kilos.

c) Obtén la expresión analítica que relaciona estas dos variables.

Imagen 9: *Ejercicio editorial Anaya, 2015*

2. **Representa en unos ejes cartesianos los 30 minutos que ha estado en inmersión un buceador: sale del barco; baja hasta 36 m; se queda un rato recreándose con los corales; sube un poco y juega con unos delfines; vuelve a bajar porque ha visto una morena y, por último, se queda 2 min a 10 m de profundidad, antes de volver al barco, para realizar la descompresión.**

En el eje horizontal, da 2 min a cada cuadradito. En el vertical (solo la parte negativa), 5 m por cuadradito.

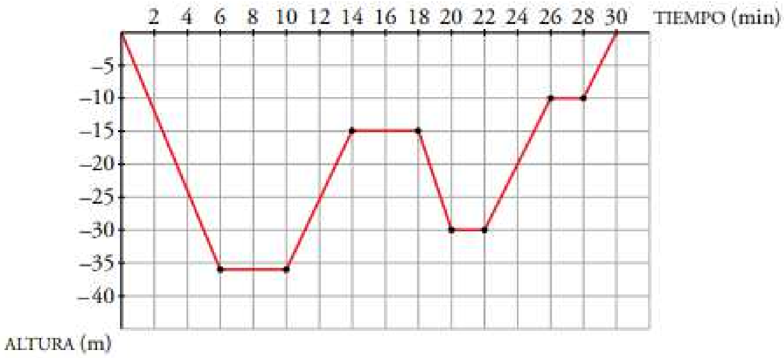


Imagen 10: *Ejercicio editorial Anaya, 2015*

1. **La entrada al parque de atracciones vale 5 €, y por cada atracción hay que pagar 1 €.**

a) Representa esta función:

atracciones en las que se monta → coste

b) ¿Se pueden unir los puntos de la gráfica?

c) ¿Cuánto costará subir a 12 atracciones? ¿Y a 20?

PARTE II: ANÁLISIS DE ERRORES

6. DIFICULTADES Y ERRORES PREVISIBLES EN EL APRENDIZAJE DE LAS PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES.

Como ya hemos indicado con anterioridad, llegar a asimilar el concepto de función y saber analizar correctamente sus características y propiedades es uno de los objetivos más difíciles de conseguir para los estudiantes.

Esta situación ha llamado la atención de los investigadores en numerosas ocasiones y como consecuencia se han elaborado gran cantidad de estudios en torno a la misma, motivados todos por el afán de mejorar los problemas asociados a la enseñanza y al aprendizaje de este concepto. Se han analizado temas diversos como:

- Estudio de las dificultades que muestran los alumnos a la hora de relacionar la definición e imagen de una función.
- Estudio del grado de comprensión que muestran los alumnos acerca del concepto de función y de sus propiedades.
- Análisis de cuáles son los errores conceptuales más habituales entre los estudiantes.

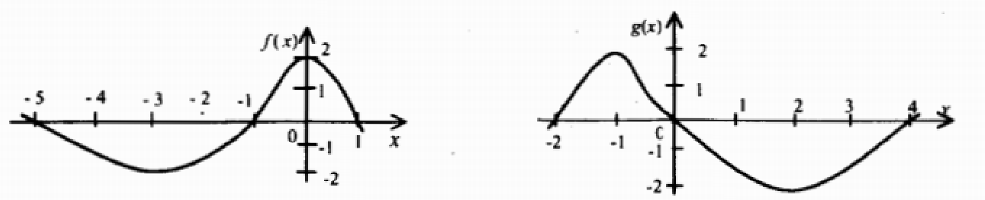
Las limitaciones de este trabajo no permiten comentar estos estudios y solo se mencionará alguna de sus conclusiones. El lector interesado puede consultar Akkoc y Tall (2002), Ruiz-Higueras (1993) y Díaz Gómez (2013) y las publicaciones citadas en las respectivas bibliografías.

Los resultados de todos los estudios e investigaciones realizados, determinaron de forma inequívoca la existencia entre los estudiantes de concepciones equivocadas y muy interiorizadas, adquiridas por estos a lo largo de sus años de aprendizaje. Una de las principales conclusiones a las que se llegó fue:

"*El concepto de función es inherentemente difícil para los alumnos cualquiera que sea el método de enseñanza."* (Ruiz, 1993).

En concreto, para la elaboración de este trabajo, me he basado en el artículo "Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato" (Dolores Flores, 2004), investigación de exploración en una muestra de 40 estudiantes de bachillerato, cuyo objetivo es recopilar las diferentes concepciones que muestran cuando analizan las propiedades de ubicación y de comportamiento de gráficas de funciones.

Imagen 11: *Ejemplo de test del artículo de Dolores Flores, (2004)*



Gráfica 1A **Gráfica 1B**

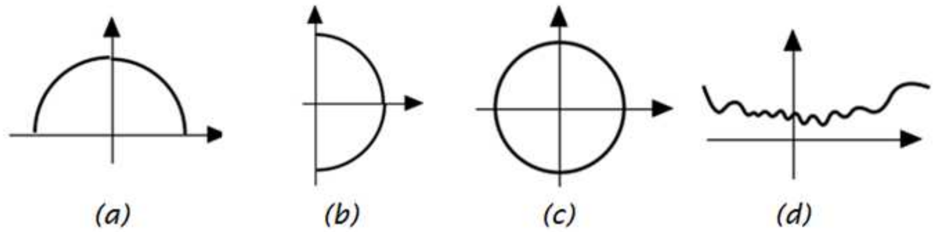
Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

TABLA 1

PREGUNTAS	OPCIONES	RESPUESTAS	PORCENTAJE
¿Para qué x las imágenes de la función $f(x)$ son positivas?	De 0 a 1	25	62.5
	De −3 a 0	0	0
	De −1 a 1	8	20
	De −5 a 0	1	2.5
	De −5 a −1	3	7.5
	Otras	1	2.5
	No contestó	2	5
¿Para qué x las imágenes de la función $g(x)$ son positivas?	De −2 a 0	15	37.5
	De 0 a 4	19	47.5
	De 2 a 4	2	5
	De −1 a 2	2	5
	De −2 a −1	1	2.5
	Otras	0	0
	No contestó	1	2.5

Otro de los estudios de similares características que el anterior que he tenido en cuenta a la hora de elaborar mi trabajo ha sido "Students' Mental Prototypesfor Functions and Graphs" (Bakar y Tall, 1992) en el que se lleva a cabo un análisis del grado de comprensión del concepto matemático y sus propiedades en un grupo de 36 estudiantes de segundo de bachillerato y 109 de primer año universitario.

Imagen 12: *Ejemplo de test articulo Bakar y Tall, (1992)*



(a)

	% yes	% no
school	**61**	36
univ.	**91**	9

(b)

	% yes	% no
school	43	**57**
univ.	70	**28**

(c)

	% yes	% no
school	64	**29**
univ.	65	**35**

(d)

	% yes	% no
school	**14**	79
univ.	**72**	26

Figure 10.2. Which of the sketches could represent functions? Give an explanation.

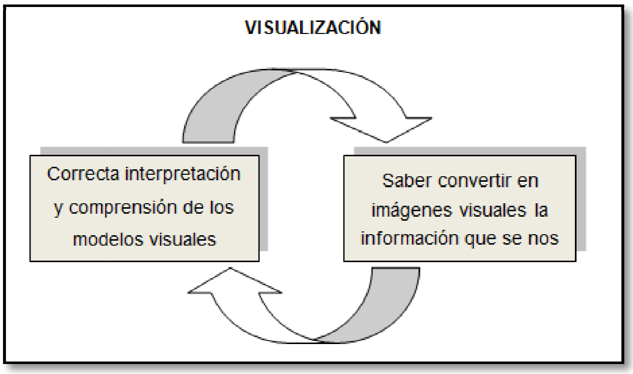
Si bien, como acabo de señalar, en estos artículos y en la mayoría de los que he podido encontrar relacionados, se analiza la problemática planteada en alumnos de bachillerato mediante la realización de un test y el posterior estudio de los resultados obtenidos, mi trabajo estará enfocado a analizar está situación en un curso de 3º de ESO.

Esta decisión la he tomado con el fin de ser original y basándome en la opinión personal de que este problema tiene su origen en los primeros cursos de nuestra etapa educativa. Considero necesario por tanto, analizar la capacidad que tienen los alumnos de un curso de 3º de ESO de matemáticas académicas de identificar las propiedades de ubicación y comportamiento de funciones, así como también si tienen o no asimilados conceptos básicos como el de continuidad o el propio concepto de función.

La interpretación de cómo se comportan las funciones mediante la observación de sus gráficas genera en los estudiantes gran cantidad conflictos cognitivos que desembocan en errores de interpretación. Una correcta visualización tiene un doble sentido:

- Por un lado saber realizar una buena interpretación y una correcta comprensión de los modelos visuales
- Por otro, convertir en imágenes visuales esa información que se nos ha dado de forma simbólica (Dreyfus, 1993).

Imagen 13:



En el estudio en el que he basado mi trabajo y que he citado con anterioridad, quedaron reflejados los errores cometidos por los alumnos derivados de las concepciones erróneas o alternativas que formaban parte de su conocimiento matemático.

Algunos de los errores más comunes que quedaron reflejados en los cuestionarios realizados en este estudio fueron:

- Asociar el intervalo donde las imágenes de una función son positivas con el intervalo donde las abscisas (x) y ordenadas (y) son positivas al mismo tiempo.
- Una función tiene imágenes positivas si su gráfica está ubicada en la región del plano donde las abscisas (x) son positivas.
- Una función solo es creciente si su gráfica está en una región del plano donde tenga imágenes positivas.
- En la abscisa x=0 la función no decrece ni crece.
- En los puntos donde la función vale 0, no decrece ni crece.
- Una función solo puede tener imágenes positivas y ser creciente al mismo tiempo en el primer cuadrante.
- Una función solo puede tener imágenes negativas y ser decreciente si está en el tercer cuadrante.
- Una función no crece ni decrece solo en aquellos puntos donde su gráfica corta al eje de abscisas o de ordenadas.

Por lo tanto, quedó comprobado que los alumnos objeto de estudio, a la hora de analizar las gráficas propuestas en el cuestionario, daban más relevancia al signo que presentaba la variable independiente (abscisas) que al que presentaba la variable dependiente (ordenadas). Es decir, a la hora de determinar cuál era el signo de la imagen de una función, en la mayor parte de los casos, solo se fijaban en el signo de la variable independiente.

7. EL PROCESO DE ESTUDIO

Para poder llevar a cabo el estudio planteado con anterioridad, consistente en averiguar cuál es el conocimiento y manejo de los estudiantes de un curso de 3º de ESO de las propiedades más relevantes de las funciones (continuidad, ubicación, comportamiento…), pedí a mi tutor de prácticas del máster poder impartir en la clase de 3º de ESO de matemáticas académicas la unidad didáctica correspondiente a Funciones. Posteriormente solicité realizar un cuestionario a dichos alumnos, en el que quedarían reflejados cuales eran los conocimientos que habían adquirido durante dicha unidad didáctica y si habían asimilado o no correctamente los mismos.

La planificación de la unidad didáctica me llevó cinco sesiones de trabajo, durante las cuales pude explicar a los alumnos los diferentes conceptos y propiedades características de las funciones:

Sesión 1	Definición de función y de variable dependiente e independiente
Sesión 2	Formas de representación de funciones
Sesión 3	Dominio y recorrido. Operaciones con funciones.
Sesión 4	Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos
Sesión 5	Continuidad. Discontinuidades.

8. EXPERIMENTACIÓN

En este apartado se analizan cuáles son las características de la muestra tomada para realizar la investigación, cuál es la estructura del cuestionario realizado y que se ha tenido en cuenta para su elaboración y cuáles han sido los resultados obtenidos tras la realización de dicho cuestionario. Finalmente se presentan las conclusiones extraídas tras el análisis de los datos tomados.

8.1. Muestra y diseño de la experimentación

El cuestionario ha sido realizado en una clase con 23 alumnos de 3º de ESO de matemáticas académicas. Se trata de un grupo de estudiantes sin dificultades de aprendizaje ni retraso curricular y que en ningún caso necesitan apoyo o facilidades concretas para alcanzar los objetivos curriculares.
La clase se compone de estudiantes cuyas edades se sitúan en los 14-15 años.
La predisposición de la clase en general es bastante positiva, se prestan voluntarios a hacer ejercicios en la pizarra habitualmente y preguntan dudas. No se trata por lo tanto de perfiles conflictivos, pero sí tienen una falta importante de estudio autónomo y la base matemática de cursos anteriores no está consolidada.
Como se explica en el apartado sobre el proceso de estudio, la unidad didáctica se llevó a cabo mediante clases magistrales, dialógicas, un par de sesiones didácticas con Geogebra, y una vez terminada la teoría, un cuestionario a modo de evaluación formativa con un pequeño peso en la nota final del tema.

8.2. El cuestionario

Debido a un retraso en el desarrollo de las clases durante el periodo de prácticas, se ha producido una alteración en la planificación prevista para la realización del cuestionario del TFM.

Si bien hemos podido dar la totalidad de la materia prevista referente a la unidad didáctica de Funciones, no hemos tenido tiempo de realizar el cuestionario en la clase tal y como se había planificado en un principio.

Por este motivo, ha sido necesario aplazar la realización de esta prueba a días posteriores al día de mi marcha del centro. Pero hemos de señalar que esta circunstancia no ha alterado en ningún caso los resultados obtenidos. Se informa a los alumnos que este cuestionario es de carácter anónimo y que en ningún momento influirá en la nota.

La naturaleza de esta prueba es teórico-práctica. Se presentan varias cuestiones, algunas similares a las presentadas en clase, y otras menos similares que requieren haber entendido los conceptos teóricos dados en el aula.

Las preguntas se han elaborado bajo la modalidad de opción múltiple y las opciones son representaciones graficas que el alumno debe de asociar a las preguntas planteadas. No se han empleado en el cuestionario expresiones analíticas, con el fin de minimizar los errores derivados de la falta de comprensión, por parte de los alumnos, del significado de los símbolos matemáticos.

Se ha utilizado lenguaje verbal escrito y trozos de gráficas de funciones para averiguar cuáles son las interpretaciones y cuál es el grado de comprensión que los alumnos tienen en lo referente a las propiedades de ubicación y comportamiento de las funciones.

Nuestro cuestionario se compone de cuatro bloques diferenciados con los que podremos analizar, de forma individualizada, las propiedades elegidas:

BLOQUE I	*Cuestionario para determinar si tienen asimilado el **concepto de función***	*Ver imagen 14*
BLOQUE II	*Cuestionario para determinar si tienen asimilados los conceptos de **continuidad y discontinuidad***	*Ver imagen 16*

BLOQUE III	*Cuestionario para determinar si tienen asimilados el concepto de función* ***creciente con imágenes positivas***	*Ver imagen 18*
BLOQUE IV	*Cuestionario para determinar si tienen asimilados el concepto de función* ***creciente con imágenes negativas***	*Ver imagen 20*
BLOQUE V	*Cuestionario para determinar si tienen asimilados el concepto de función* ***decreciente con imágenes positivas***	*Ver imagen 22*
BLOQUE VII	*Cuestionario para determinar si tienen asimilados el concepto de función* ***decreciente con imágenes negativas***	*Ver imagen 24*

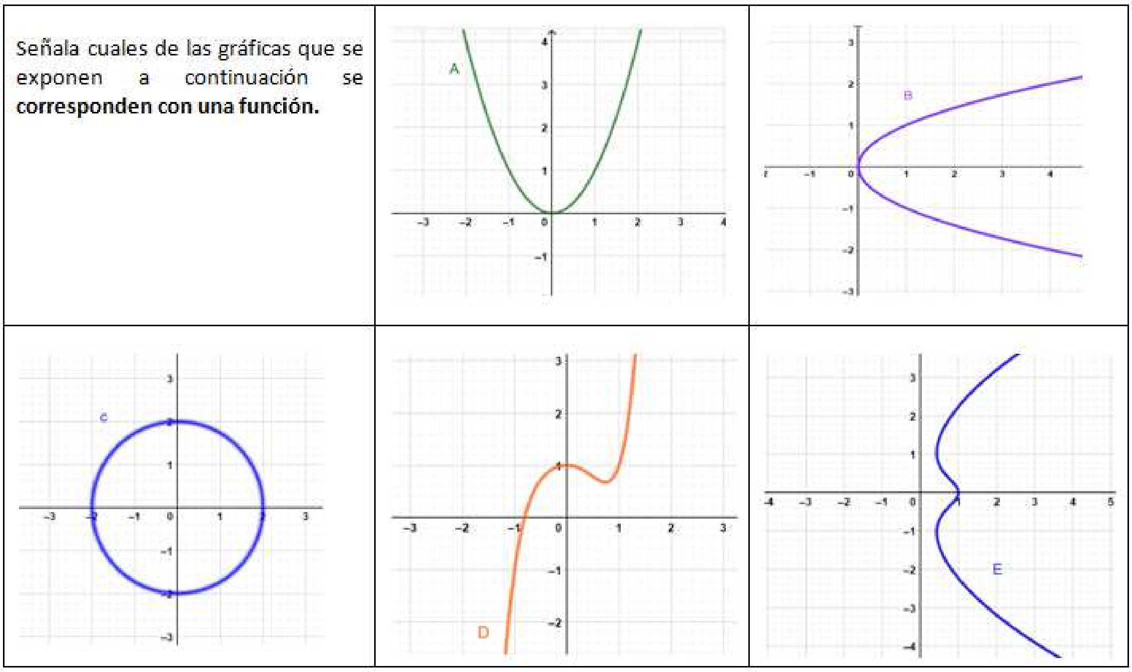
Hagamos a continuación un análisis exhaustivo de los resultados obtenidos en nuestra investigación. He de señalar que estos son extraordinariamente similares a los que se obtuvieron en el estudio de Crisólogo Dolores Flores, por lo que evidentemente podemos corroborar las conclusiones a las que se llegaron en dicho estudio:

8.3. <u>Análisis de los resultados.</u>

8.3.1. <u>Concepto de función.</u>

Una de los aspectos que hemos querido analizar en nuestra investigación ha sido la capacidad de los alumnos de distinguir si una gráfica dada se corresponde o no con una función. Para ello se les planteó un conjunto de 5 imágenes de entre las cuales debían de señalar las que, bajo su criterio, se correspondían con funciones.

<u>Imagen 14:</u> *<u>Cuestionario concepto de función</u>*



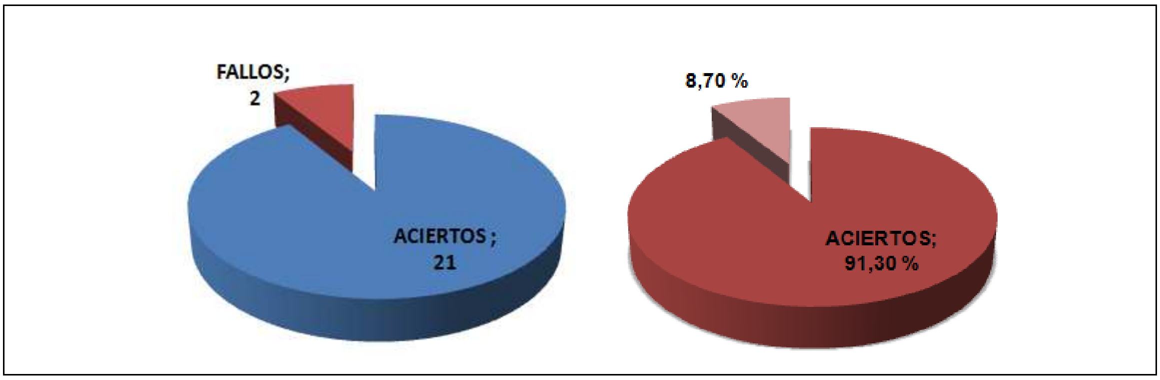
Partiendo de que las respuestas correctas son la graficas A y D, realizaremos a continuación un análisis de los resultados obtenidos:

- *La mayor parte de los alumnos, exactamente 21 de los 23 encuestados, eligieron las respuestas correctas (A y D). Esto representa un 91,30% del total.*
- *Dos de los alumnos seleccionaron la respuestas B y E, que son erróneas. Esto representa un 8,70% de los alumnos encuestados.*

De estos resultados obtenidos podemos sacar la conclusión de que prácticamente la totalidad de los alumnos de la muestra objeto de estudio tienen interiorizada adecuadamente la idea de que una gráfica se corresponde con una función si y solo si cada elemento del dominio tiene a lo sumo una imagen.

Los dos casos que han elegido las opciones incorrectas (B y E) está claro que no han llegado a comprender los contenidos dados en clase.

Imagen 15: *Resultados obtenidos*



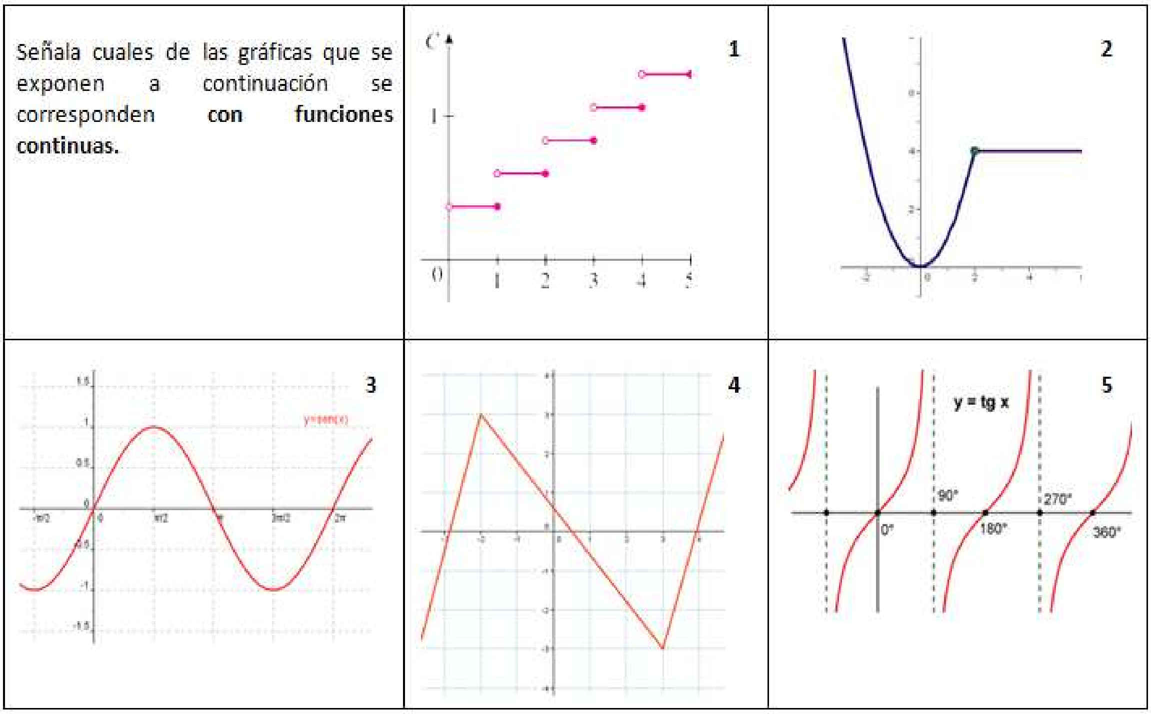
Conclusión:

Como conclusión podemos decir que la mayor parte de los alumnos encuestados son capaces de distinguir sin problemas cual es la gráfica de una función, lo que significa que han asimilado correctamente la definición de función, entendiendo tal, como una relación entre dos conjuntos, uno inicial llamado dominio y otro final llamado codominio, que presenta la peculiaridad de que a cada punto del dominio solo le puede corresponder un punto del codominio.

8.3.2. Continuidad / discontinuidad de una función.

Para poder analizar la capacidad de los alumnos encuestados de identificar si una función en continua o discontinua atendiendo a su gráfica, se les planteó un conjunto de cinco imágenes en las que se presentaban funciones tanto continuas como discontinuas.

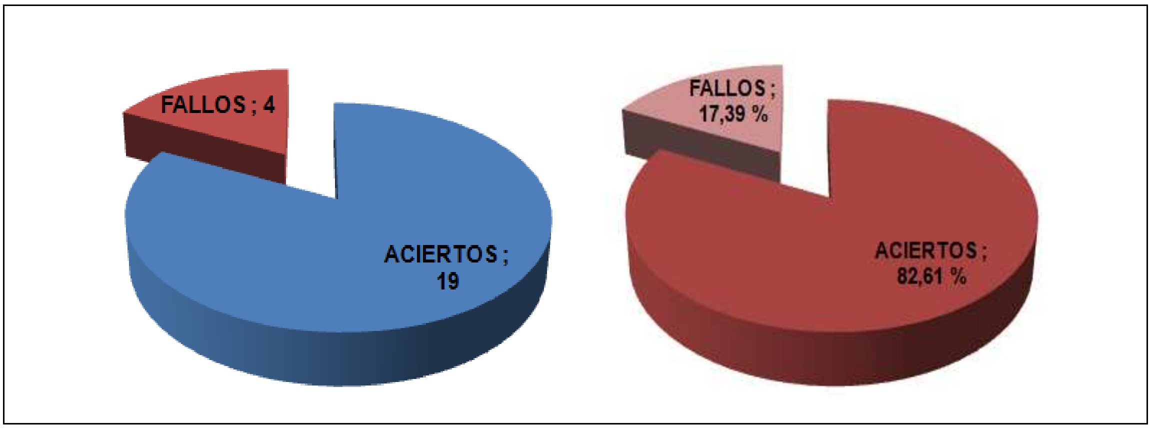
Imagen 16: *Cuestionario continuidad de funciones*



Analizando los resultados obtenidos hemos podido observar que:

- Un total de 19 de los 23 alumnos encuestados seleccionaron las tres respuestas correctas (imagen 2, imagen 3 e imagen4).
- Solamente 4 de los alumnos encuestados seleccionaron respuestas erróneas. La gráfica numero 1 fue seleccionada por dos alumnos y la grafica numero 5 fue seleccionada por otros dos alumnos. Esto muestra que ninguno de estos cuatro alumnos tenían interiorizado el concepto de continuidad de funciones.

Imagen 17: *Concepto de función*



Conclusión:

Como conclusión podemos decir que un alto porcentaje de los alumnos encuestados (82,61%) son capaces de identificar sin problemas cuando una grafica dada presenta discontinuidades. No obstante he decir que un pequeño porcentaje de la muestra (17,39%) selecciona como funciones continuas gráficas claramente discontinuas, como la número 1 o la número 5. Esto pone de manifiesto que estos alumnos no han comprendido el concepto de continuidad expuesto durante las clases: ``una grafica es continua si no presenta saltos en su trazo´´

A continuación vamos a analizar los resultados de las encuestas dirigidas a identificar los problemas que presentan los alumnos a la hora de identificar las propiedades de ubicación y comportamiento de las gráficas de funciones:

8.3.3. <u>Función creciente de imágenes positivas.</u>

Para ello hemos presentado a los alumnos cinco gráficas con el fin de que identifiquen de entre ellas las que sean crecientes y tengan imágenes positivas:

Imagen 18: *Cuestionario función creciente con imágenes positivas*

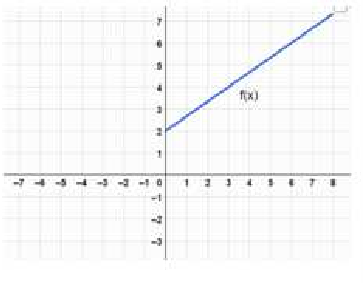
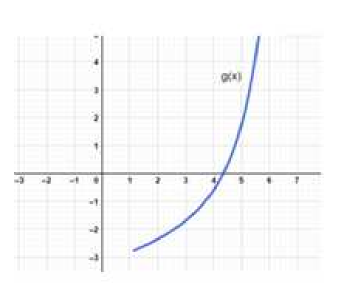
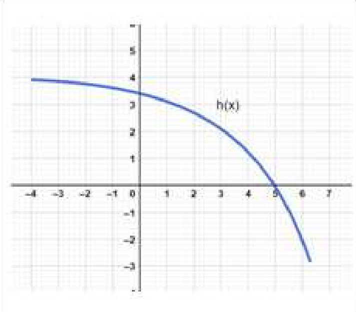
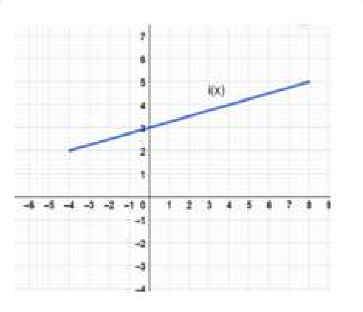
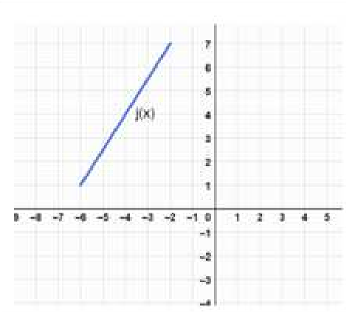
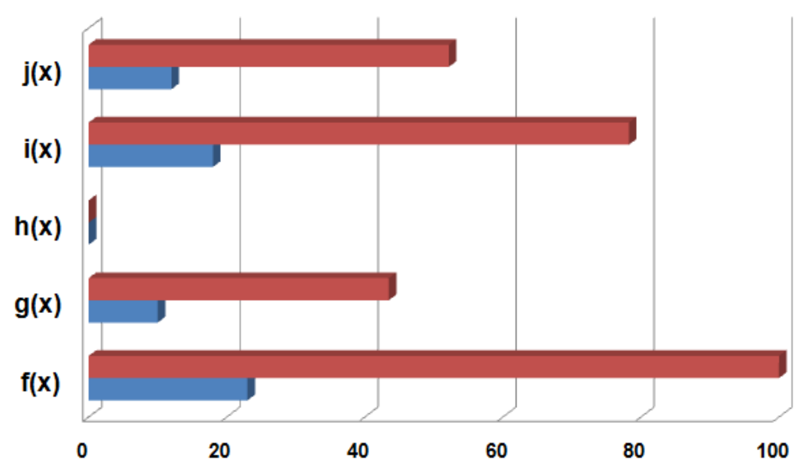
Señala cuales de los tramos de gráficas que se exponen a continuación se corresponden con **funciones crecientes de imágenes positivas**		
		

Imagen 19: *Resultados y porcentajes*



	f(x)	g(x)	h(x)	i(x)	j(x)
PORCENTAJE	100,00	43,48	0,00	78,26	52,17
RESPUESTAS	23	10	0	18	12

- Solamente 11 alumnos de los 23 encuestados (47,82%) han sido capaces de seleccionar las tres opciones correctas, f(x), i(x) y j(x). Así un 52,18% ha errado de alguna manera en su selección.
- La totalidad de los alumnos (100,00%) consideran que una función es creciente y tiene imágenes positivas si ambas coordenadas son positivas (primer cuadrante).
- Este porcentaje disminuye cuando la gráfica es creciente, con ordenadas positivas pero con abscisas tanto positivas como negativas. Este es el caso de la gráfica i(x) que fue seleccionada por un 78,26% de los encuestados (primer y segundo cuadrante). Esto significa que un 21,74% de alumnos consideran que cuando las abscisas son negativas la función no puede tener imágenes positivas
- Aun es menor el porcentaje de los alumnos que seleccionan la grafica que solo presenta abscisas negativas, la j(x), reduciéndose hasta un 52,17% (segundo cuadrante). El 47,83% cree que una función creciente con imágenes positivas no puede tener abscisas negativas.
- Un porcentaje elevado (43,48%) han seleccionado la gráfica g(x) que únicamente presenta abscisas positivas. Esto les sirve para asegurar que la función cumple las condiciones pedidas en el cuestionario.

Conclusiones.

- ✓ La tendencia más marcada es asociar función creciente con imágenes positivas a la región del plano en la que ambas coordenadas son positivas.
- ✓ También apreciamos una concepción menos acentuada de que esto pueda suceder cuando las ordenadas son positivas y las abscisas son negativas.
- ✓ Los alumnos a la hora de determinar el signo de la imagen de una función dan mucho mayor peso al signo que presentan las abscisas:

  Una función creciente con imágenes positivas no puede tener abscisas negativas
- ✓ Casi la mitad de los alumnos encuestados opinan que una función creciente con imágenes positivas no puede tener abscisas negativas y ordenadas positivas.

8.3.4. Función creciente de imágenes negativas

Para estudiar este caso se ha planteado a los alumnos que seleccionen de entre 5 graficas propuestas las que sean crecientes con imágenes negativas.

Imagen 20: *Cuestionario función creciente con imágenes negativas*

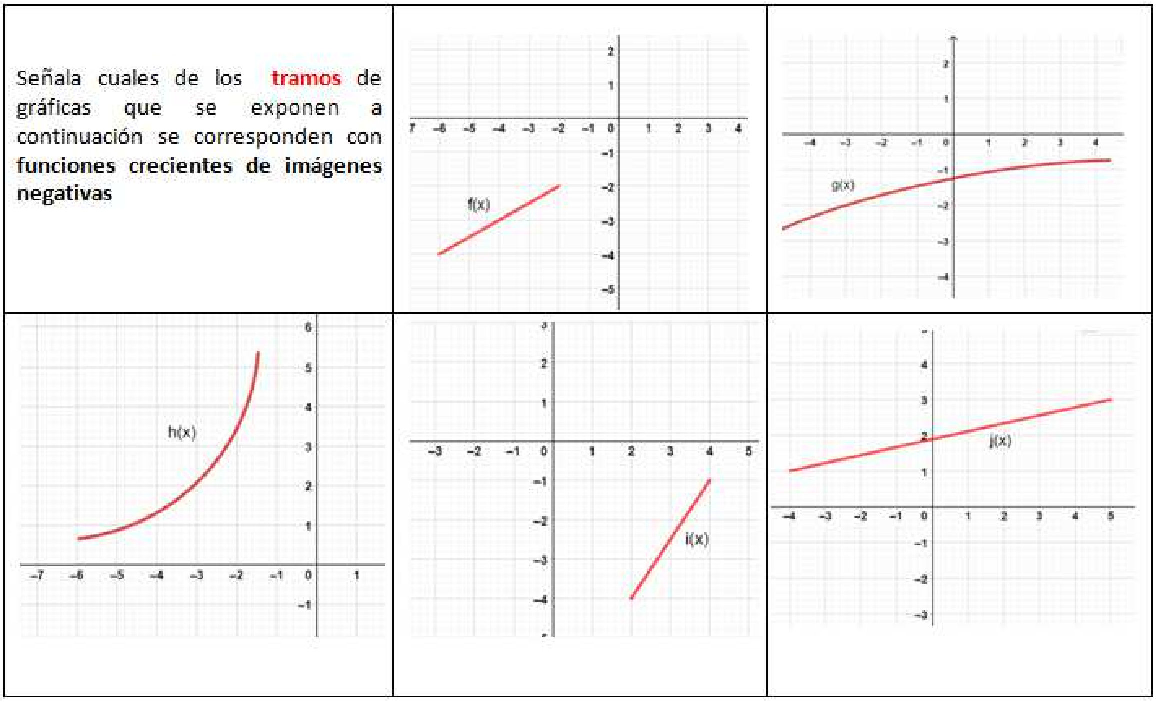
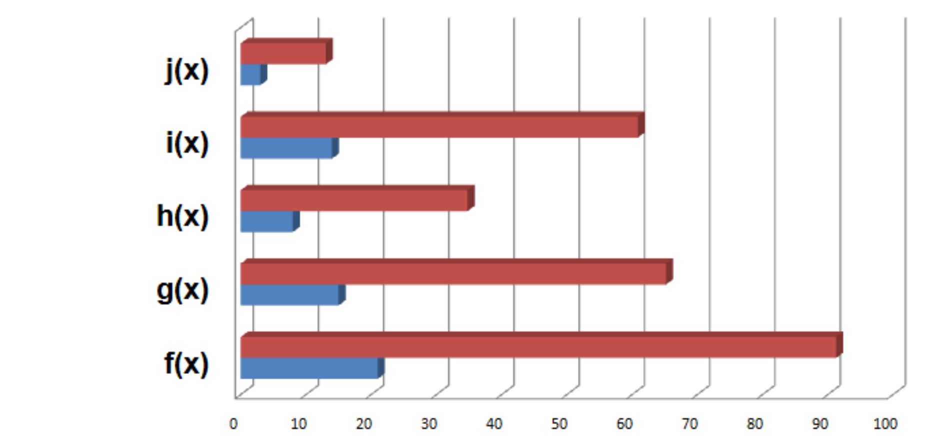


Imagen 21*: Resultados y porcentajes*



	f(x)	g(x)	h(x)	i(x)	j(x)
PORCENTAJE	91,30	65,22	34,78	60,87	13,04
RESPUESTAS	21	15	8	14	3

- Únicamente 10 alumnos de los 23 encuestados seleccionaron las tres opciones que cumplen las condiciones pedidas en el cuestionario, f(x), g(x) e i(x), siendo un 43,47% del total. Esto supone que el otro 56,52% han errado en las respuestas mostrando la mala asimilación de los conceptos de ubicación y comportamiento.
- La gráfica f(x) es la más seleccionada, en un 91,30%. Esta grafica tiene ambas coordenadas negativas (tercer cuadrante).
- Las funciones g(x) e i(x) también cumplen las condiciones exigidas en el enunciado. Estas no son seleccionadas en igual grado que la anterior.
- La función g(x) tiene ordenadas estrictamente negativas aunque sus abscisas son tanto positivas como negativas (tercer y cuarto cuadrante). Esta opción fue seleccionada en un 65,22%.La opción i(x) se corresponde con un tramo de función en el que las abscisas son positivas y las ordenadas son negativas (cuarto cuadrante). Esta fue elegida por un 60,87% de los encuestados.
- La opción h(x) fue seleccionada por no un despreciable 34,78 % de los participantes en el estudio.

<u>Conclusiones</u>

- ✓ Los alumnos asocian en un alto porcentaje función creciente con imágenes negativas a la región del plano en la que ambas coordenadas son negativas.
- ✓ Es menor el porcentaje de los que opinan que esto pueda suceder cuando las ordenadas son negativas y las abscisas son positivas.
- ✓ Los alumnos, a la hora de determinar el signo de la imagen de una función, dan preferencia al signo de las abscisas sobre el signo de las ordenadas:
  Una función con imágenes negativas no puede tener abscisas positivas
- ✓ Un número importante de alumnos asocian funciones crecientes con imágenes negativas con aquellas que en efecto crecen pero solo tienen abscisas negativas.

8.3.5. Función decreciente de imágenes positivas.

Esta parte del cuestionario presenta a los alumnos nuevamente un conjunto de cinco gráficas entre las cuales deben de seleccionar aquellas que se correspondan con funciones decrecientes con imágenes positivas.

Imagen 22: *Cuestionario función decreciente con imágenes positivas*

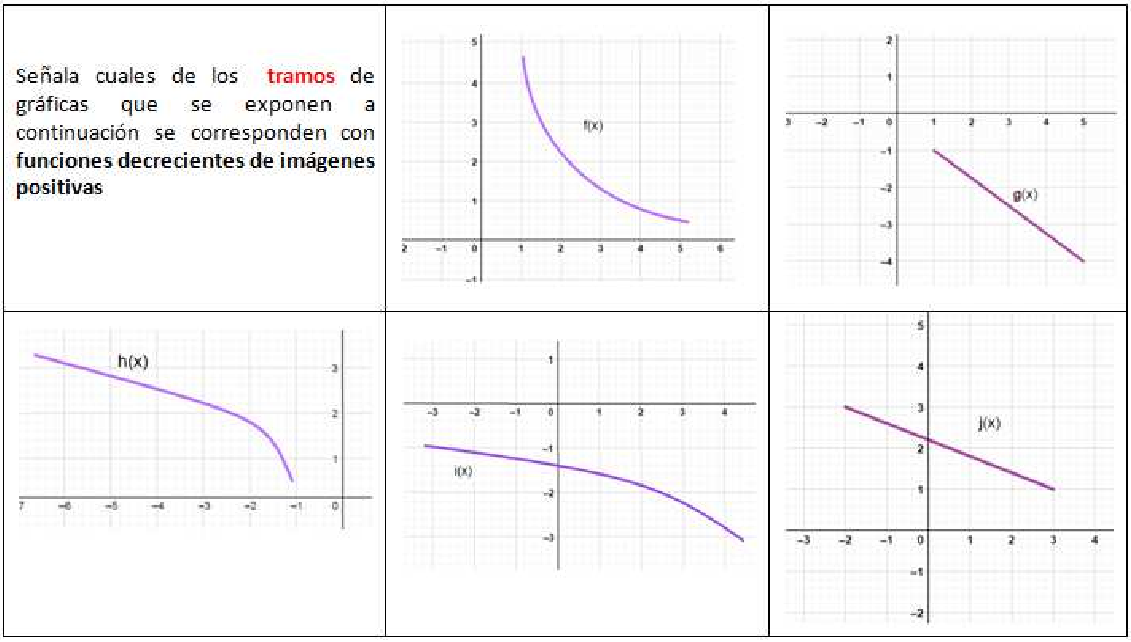
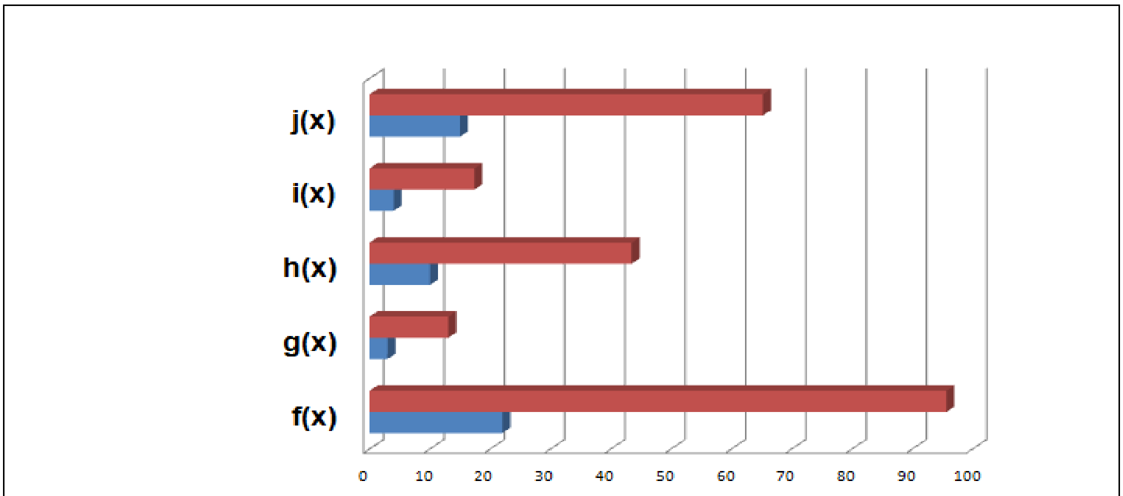


Imagen 23: *Resultados y porcentajes*



	f(x)	g(x)	h(x)	i(x)	j(x)
PORCENTAJE	95,65	13,04	43,48	17,39	65,22
RESPUESTAS	22	3	10	4	15

- Analizando los datos afirmamos que únicamente 8 de los alumnos encuestados fueron capaces de seleccionar las tres graficas que cumplían las condiciones solicitadas, la gráfica f(x), la gráfica h(x) y la gráfica j(x). Esto representa un porcentaje del 34,78%. Consecuentemente el porcentaje de los alumnos que cometieron algún error es muy elevado, un 65,21%.
- La gráfica f(x) fue seleccionada por un 95,65% de los alumnos encuestados. Esta gráfica se ubica en el primer cuadrante, por lo que ambas coordenadas son positivas. Las otras dos gráficas que también son correctas, la h(x) y la j(x) muestran un porcentaje de selección mucho menor que la anterior.
- Así la grafica j(x), ubicada en el primer y segundo cuadrante**,** fue seleccionada en un porcentaje del 65,22% siendo con ello la segunda opción más seleccionada por los alumnos.
- La gráfica h(x), segundo cuadrante**,** presenta un porcentaje del 43,48% Esto significa que son más de la mitad de los alumnos (56,52%) los que opinan que una grafica con abscisas negativas no puede tener imagen positiva.
- Es relevante que la gráfica g(x), ubicada en el cuarto cuadrante, fue elegida por el 13,04% de los encuestados.

<u>Conclusiones</u>

✓ Asocian mayoritariamente función decreciente con imágenes positivas a la región del plano en la que ambas coordenadas son positivas.

✓ Es menor la concepción de que esto pueda suceder cuando las ordenadas son positivas y las abscisas son negativas.

✓ Los alumnos, a la hora de determinar el signo de la imagen de una función, dan mucho mayor peso al signo que presentan las abscisas:

Una función con imágenes positivas no puede tener abscisas negativas

8.3.6. Función decreciente de imágenes negativas.

En este apartado se les planteo un cuestionario formado por cinco gráficas entre las que tenían que señalar las que fuesen decrecientes con imágenes negativas:

Imagen 24: *Cuestionario función decreciente con imágenes negativas*

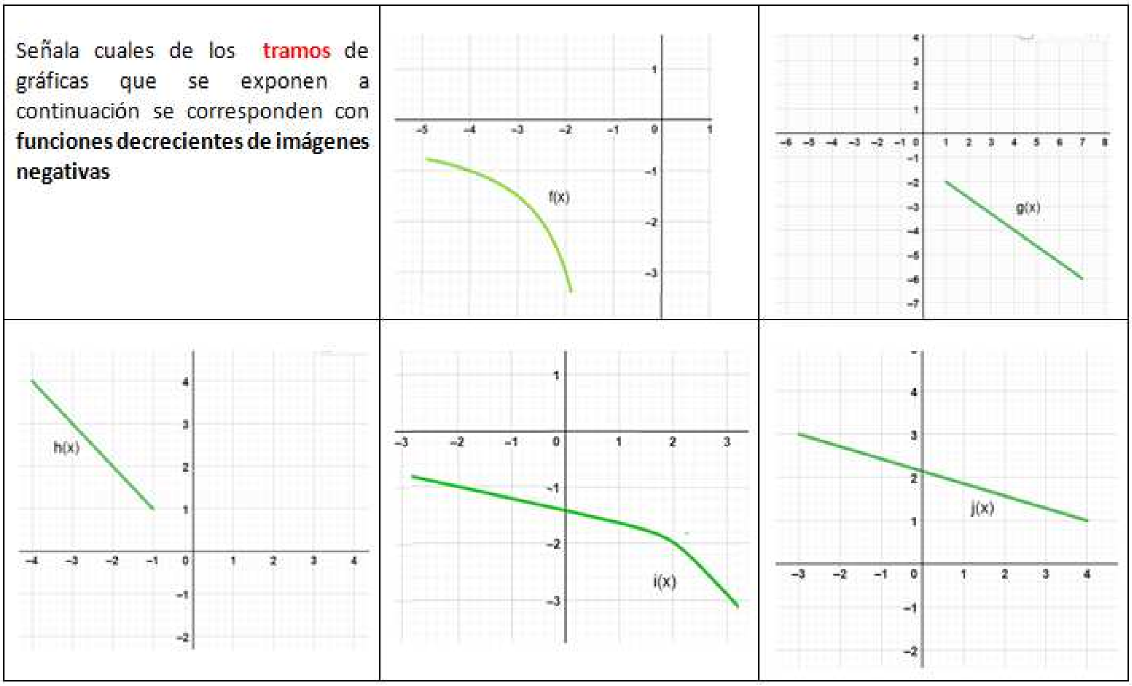
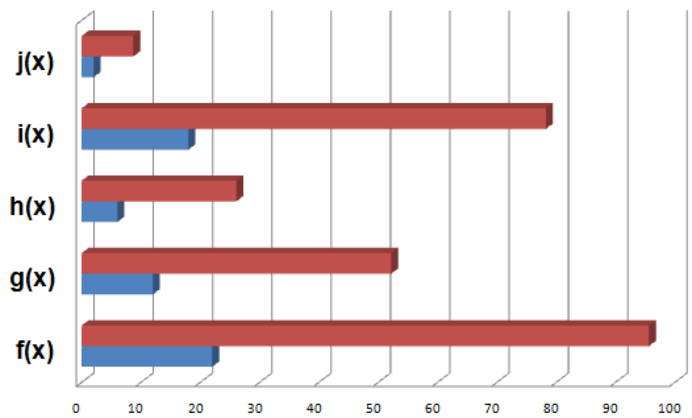


Imagen 25: *Resultados y porcentajes*



	f(x)	g(x)	h(x)	i(x)	j(x)
PORCENTAJE	95,65	52,17	26,09	78,26	8,70
RESPUESTAS	22	12	6	18	2

- Únicamente 10 de los 23 alumnos seleccionaron las tres opciones que cumplían las condiciones exigidas en el enunciado. Estas son las gráficas f(x), la g(x) y la i(x). Esto representa un 43,47%, lo que significa que un 56,52% ha cometido errores en sus elecciones.
- La grafica f(x)**,** tercer cuadrante**,** ha sido la más seleccionada con un 95,65%. Esta función es decreciente y tiene imágenes negativas (tanto ordenadas como abscisas son negativas).
- La grafica i(x), tercer y cuarto cuadrante**,** también cumple las condiciones pedidas pero presenta, a diferencia de la anterior, abscisas tanto negativas como positivas. Esto despista a algunos alumnos, que asocian el signo de la imagen con el signo de las abscisas. Por este motivo es bastante menor el numero de encuestados que la seleccionan bajando el porcentaje a un 78,26%.
- La grafica de la función g(x), cuarto cuadrante, es la tercera gráfica que cumple ser decreciente y tener al mismo tiempo imágenes negativas. Únicamente un 52,17% la han seleccionado. Considero que les ha despistado que las abscisas sean positivas.
- Resulta interesante que un 26,09% selecciono la gráfica h(x) como función decreciente de imágenes negativas. Se aprecia que han tomado esta decisión atendiendo al signo de las abscisas exclusivamente.
- Muy pocos han sido los estudiantes que seleccionaron la gráfica j(x), gráfica decreciente con imágenes positivas

<u>Conclusiones</u>

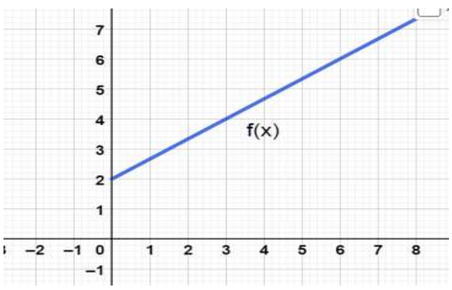
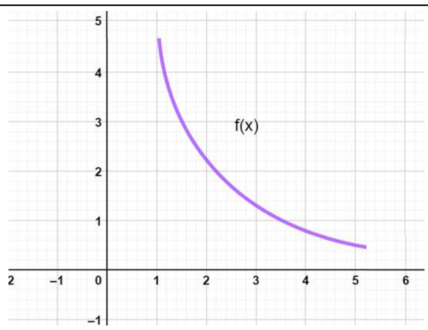
- ✓ Asocian mayoritariamente función decreciente con imágenes negativas a la región del plano en la que ambas coordenadas son negativas.
- ✓ Es menor la concepción de que esto pueda suceder cuando las ordenadas son negativas y las abscisas son positivas.
- ✓ Nuevamente como los casos anteriores los alumnos, a la hora de determinar el signo de la imagen de una función, dan mucho mayor peso al signo que presentan las abscisas. ``***Una función con imágenes negativas no puede tener abscisas positivas***´´

9. SÍNTESIS Y CONCLUSIONES FINALES DEL ESTUDIO EN TODO SU CONJUNTO.

IMÁGENES POSITIVAS

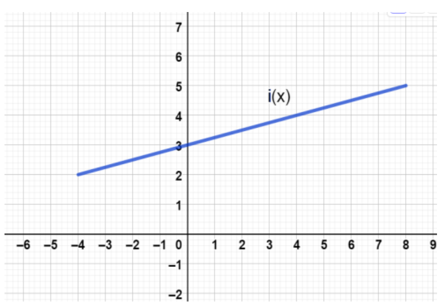
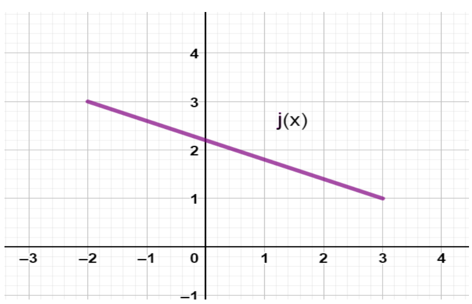
Primer cuadrante

La mayor parte de los alumnos encuestados han mostrado una tendencia clara a pensar que si las graficas están ubicadas en el primer cuadrante pueden ser crecientes o decrecientes, pero sus imágenes son positivas. Opino que esto ha venido determinado por el signo de las abscisas que asocian con el signo de la propia función.

	
Seleccionada en un 100%	*Seleccionada en un95,65%*

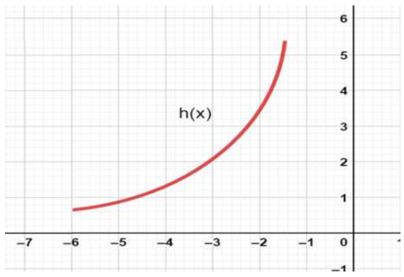
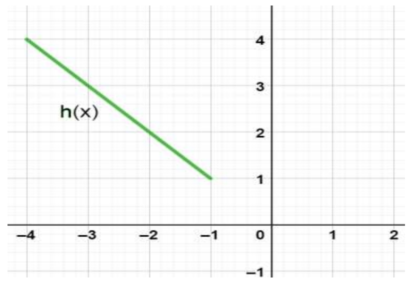
Primer y segundo cuadrante

Cuando se pregunta a los alumnos por funciones crecientes o decrecientes con imágenes positivas son menos los alumnos que seleccionan estas opciones, correspondientes a graficas ubicadas en el primer y segundo cuadrante. Creo que esto se produce porque ambas presentan tanto abscisas positivas como negativas, lo que genera confusión entre los estudiantes.

	
Seleccionada en un 78,26%	*Seleccionada en un 65,22%*

Segundo cuadrante

En cuanto a las gráficas ubicadas en el segundo cuadrante, una gran parte de los alumnos tienen asumido que pueden ser crecientes o decrecientes pero no tener imágenes positivas. A igual que en los casos anteriores opino que los alumnos se han basado estrictamente en el signo de las abscisas para tomar su decisión. Como estas gráficas tienen estrictamente abscisas negativas, deducen que las imágenes de la gráfica son también negativas y por ello muchos no las seleccionan como gráficas con imágenes positivas.

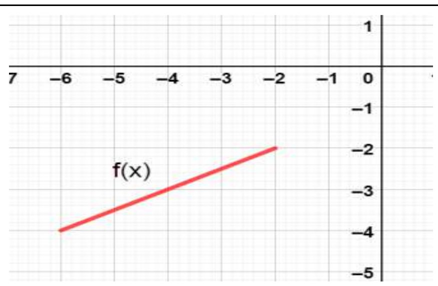
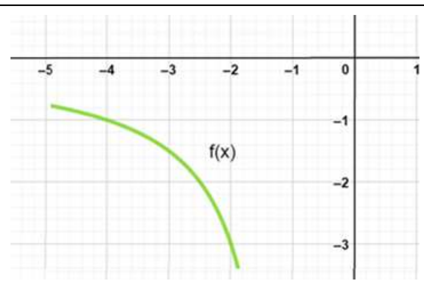
	
Seleccionada en un 34,78%	*Seleccionada en un26,09%*

También podemos apreciar, atendiendo a los porcentajes, una ligera predisposición a relacionar imágenes positivas con crecimiento.

IMAGNES NEGATIVAS

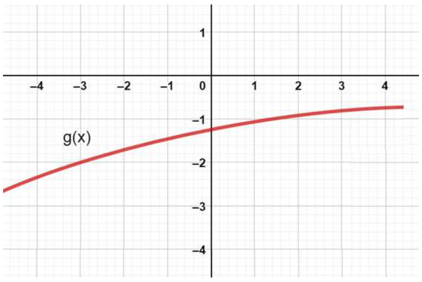
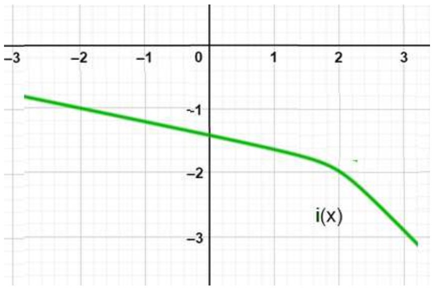
Tercer cuadrante

La mayor parte de los alumnos piensan que si las graficas estaban ubicadas en el tercer cuadrante pueden ser crecientes o decrecientes pero sus imágenes son negativas. Opino que esto ha venido determinado por el signo de las abscisas que asocian con el signo de la propia función.

	
Seleccionada en un 91,30%	*Seleccionada en un 95,05%*

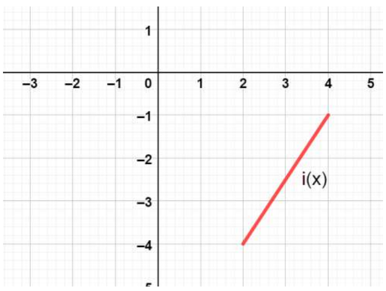
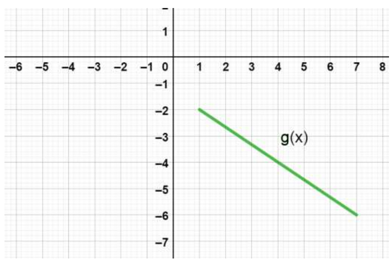
Tercer y cuarto cuadrante

Cuando se pregunta a los alumnos por funciones crecientes o decrecientes con imágenes negativas son menos los alumnos que seleccionan las gráficas que presentan graficas ubicadas en el tercer y cuarto cuadrante. Opino que esto se debe a que al existir abscisas tanto positivas como negativas se generan dudas entre los estudiantes.

	
Seleccionada en un 65,22%	*Seleccionada en un 78,26%*

Cuarto cuadrante

Si las gráficas están ubicadas en el cuarto cuadrante, una importante parte de los encuestados opinan que pueden ser crecientes o decrecientes pero no tener imágenes negativas. A igual que en el caso anterior opino que los alumnos se han basado en el signo de las abscisas para tomar su decisión. En el cuarto cuadrante las abscisas son positivas, lo que les lleva a pensar que las imágenes de la gráfica son también positivas.

	
Seleccionada en un 60,87%	*Seleccionada en un 52,17%*

Podemos apreciar, si atendemos a los porcentajes, una pequeña tendencia a relacionar imágenes negativas con decrecimiento.

Conclusiones

Podemos concluir analizando en conjunto todos los resultados obtenidos en cada uno de los apartados anteriores que los alumnos, cuando tienen que determinar las propiedades de una grafica dada como son el crecimiento o el signo de sus imágenes, se basan fundamentalmente en el signo que presentan las abscisas sin prestar la suficiente atención al signo que presentan las ordenadas de dicha gráfica. Como hemos visto al analizar los resultados, esta es una pauta de actuación que se repite en los distintos apartados que conforman nuestro cuestionario.
Considero que esta situación tiene su origen en que los alumnos no han adquirido las capacidades necesarias que les permitan analizar las gráficas atendiendo al signo de las dos coordenadas de forma coordinada. Para ellos existe una única variable significativa, que es la del eje de abscisas y se muestran incapaces de analizar la información que esta variable aporta de forma conjunta a la información que aportan las ordenadas y los ejes cartesianos. No presentan ningún tipo de coordinación a la hora de analizar las propiedades de ubicación y comportamiento de las funciones que se les presentan.

Como consideraciones generales opino que es esencial, para lograr que los alumnos alcancen una correcta asimilación de los contenidos relativos a las funciones y sean capaces de interpretar correctamente sus propiedades, que estos se enfrenten a problemas variados, en los que tengan que:

- Trabajar con las diferentes formas de representación de las funciones, relacionándolas entre si y extrayendo información de los datos observados para poder pasar de un tipo de representación a otro.
- Identificar correctamente las propiedades de comportamiento, como crecimiento o decrecimiento, y propiedades de ubicación, como el signo de la imagen y de las coordenadas.
- Interpretar representaciones visuales e interpretar modelos simbólicos.

Bibliografía.

- Akkoc, H. y Tall, D.O. (2002). The simplicity, complexity and complication of the function concept. In Anne D. Cockburn & Elena Nardi (Eds), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Norwich, UK), 2, 25–32.
- Bakar, M.N. y Tall, D.O. (1992). Students' mental prototypes for functions and graphs. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol.23 (No.1).* pp. 39-50.
- Cercós Pérez, R., Sánchez Sánchez, J. M. y Delineó: Antonio Salazar Guillén (1978). *Matemáticas.* Barcelona: Editorial Luis Vives.
- Colera, J., Gaztelu, I. y Oliveira, Mª.J. (2011). *Matemáticas.* Madrid: Editorial Anaya
- Colera Jiménez, J., Gaztelu Albero, I., Olivera González, M. J. y Colera Cañas, R. (2015). *Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3´´.*Madrid: Editorial Anaya
- Díaz Gómez, J. L. (2013). El Concepto de Función: Ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones. *El Cálculo y su Enseñanza*, Volumen 4.
- Dolores Flores, C. (2004). *Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: Concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, noviembre, año / vol.7 número 003, comité latinoamericano de matemática educativa distrito federal, México pp.195-218.*
- Dreyfus, T. y Vinner, S. (1989). *Images and definitions for the concept of function*. Journal for Research in Mathematics Education, 20. 356-366
- Fernández Fernández, S., Barragués, J. I., Fernández Domínguez, J., Font, V., Muñoz, Romà, J., Germán Torregrosa, P. y Callejo, M. L. (2011). *Matemáticas. Complementos de formación disciplinar, Barcelona: Editorial Graó, de IRIF, S.L.*

- Kleiner, I. (1989). *Evolution of the function concept: A brief survey. The college Mathematics Journal,* 20(4), 282-300.
- Pedersen, O. (1974). Logistics and the Theory of Functions. Arch. Intern & Hist. d. Sciences. 24. N.94. 29-50.
- Rüting, Dieter. (1984). *Some definitions of the Concept of Function from John. Bernoulli to N. Bourbaki. The Mathematical Intelligencer,* Vol. 6, No. 4.
- Ruiz-Higueras, L. (1993). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico*. (Tesis Doctoral). Recuperado de….
- Youschkevitch, A. P. (1976). *The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century. Arch. Hist. Ex. Sci.* 16, 37-85.