

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN.....	2
2. NOCIONES BÁSICAS	5
2.1. Las herramientas TIC y la enseñanza de las matemáticas	5
2.2. Educación Basada en la Indagación	7
2.3. Dificultades en la enseñanza del álgebra	10
3. EL PROYECTO GAUSS.....	12
3.1. El software GeoGebra	12
3.2. Historia del Proyecto Gauss	14
3.2.1 Contenidos	17
3.2.2 Actitudes y Principios	18
3.2.3 Opiniones del profesorado	19
4. EL PROYECTO GAUSS Y LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA	21
4.1. Relación entre el Proyecto Gauss y el álgebra	21
4.2. Uso de los applets de álgebra del PG en el aula	22
5. PLANTEAMIENTO METODOLÓGICO DE LA PROPUESTA.....	26
5.1. Descripción de las actividades	27
5.1.1 Actividad 1: Balanza (naturales).....	27
5.1.2 Actividad 2: Proporcionalidad	27
5.1.3 Actividad 3: Suma por diferencia.....	28

5.1.4 Actividad 4: Cuadrado de una suma	28
5.1.5 Actividad 5: Cuadrado de un binomio	29
5.2. Planteamiento general de las sesiones	29
5.2.1 Sesión 1	33
5.2.2 Sesión 2	35
5.2.3 Sesión 3.....	37
6. EXPERIENCIA EN EL AULA.....	40
6.1. El centro: I.E.S. Santa Clara	40
6.2. Análisis de la experiencia en el aula	43
6.2.1 Resultados Sesión 1. 2º de ESO. Grupo 1	43
6.2.2 Resultados Sesión 1. 2º de ESO. Grupo 2	45
6.2.3 Resultados Sesión 2. 2º de ESO. Grupo 1	47
6.2.4 Resultados Sesión 3. 4º de ESO	48
6.3. Valoración de los alumnos/as	51
7. CONCLUSIONES	52
8. BIBLIOGRAFÍA Y WEBGRAFÍA	56
9. ANEXOS.....	61
Anexo I	61
Anexo II.....	64
Anexo III.....	67
Anexo IV	71

Anexo V	74
Anexo VI	78
Anexo VII	79
Anexo VIII	80
Anexo IX	81

RESUMEN

El presente Trabajo Fin de Máster (TFM) analiza el estado actual del Proyecto Gauss (PG) y describe una experiencia en la que se trabaja en las aulas de ESO, con una serie de actividades del PG relacionadas con el álgebra.

A lo largo de este trabajo se recogen unas nociones básicas relacionadas con: el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) para la enseñanza de las matemáticas, la Enseñanza Basada en la Indagación y con las dificultades teóricas a las que se enfrentan los alumnos al estudiar álgebra. Estas nociones nos sirven de punto de partida para conocer el estado actual del PG y su repercusión en las aulas, además de permitirnos contextualizar las experiencias que desarrollaremos. Se analizan los resultados de dichas experiencias y se presenta la valoración que los alumnos hacen de las mismas y mi valoración personal. Para finalizar, se detallan las conclusiones que se derivan de la realización de este TFM.

Palabras clave: Matemáticas, Álgebra, Proyecto Gauss, IBME

ABSTRACT

This Master Thesis analyses the current state of the Gauss Project (GP) and it describes a pedagogical experience in which activities from the GP related to algebra are conducted during some lessons in the ESO.

Along this work some basic concepts about the use of the TICs in mathematics education, inquiry-based education and the difficulties in algebra learning are provided. These concepts are used as a starting point to review the current state of the Gauss Project and its impact on the ESO, as well as to put into context the developed experience. The results from the experience are analysed together with students and my own assessment. Finally, this document ends with the conclusions arising from this work.

Palabras clave: Mathematics, Algebra, Gauss Project, IBME

1. INTRODUCCIÓN

Las diferentes políticas educativas desarrolladas en los últimos años en España pretenden dar respuesta a los continuos y rápidos cambios que vive la sociedad, ya que, tal y cómo sostiene la UNESCO (2011) “la educación desempeña una función esencial en el desarrollo humano, social y económico” (p.7), y, por lo tanto, el sistema educativo debe adaptarse para poder desarrollar con éxito esa función.

Muchos de los cambios de los que hablamos están asociados con la evolución de la tecnología y el impacto que esta ha tenido y tiene en la sociedad actual. Más concretamente, hoy en día, nos encontramos en las aulas con estudiantes denominados “Nativos Digitales”, término designado por Prensky (2010) para identificar a todos aquellos individuos que han nacido y se han desarrollado utilizando los nuevos avances tecnológicos, lo que ha conducido a que los cerebros de estos chicos y chicas experimenten cambios que los hacen diferentes de los de aquellos que Prensky denomina “Inmigrantes digitales”. Este hecho se traduce en un problema en las aulas, una brecha digital y generacional que ha de ser paliada y solventada (Prensky, 2010). Muchos de los docentes que nos encontramos hoy en día en las escuelas, institutos o incluso en las universidades, son “Inmigrantes Digitales” y tienen que buscar la forma de entenderse con sus alumnos, “Nativos Digitales”, lo que implica un duro trabajo, que, en mi opinión, requiere, entre otros aspectos, adaptar los contenidos y las metodologías utilizados en las aulas de forma que resulten atractivos a los estudiantes.

Este trabajo tiene como finalidad analizar y llevar al aula una de las propuestas pedagógicas encaminadas a introducir el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el ámbito de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO). La propuesta pedagógica de la que hablamos es el Proyecto Gauss, en adelante PG. Este proyecto promueve la utilización del software de geometría dinámica GeoGebra con dos objetivos principales: introducir en el aula el uso de las TIC para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y fomentar la utilización de

metodologías de aprendizaje activas, en las que el alumno sea el protagonista y el docente actúe de guía.

La temática de este Trabajo Fin de Máster (TFM) ya ha sido tratada en otros dos trabajos (véase Saráchaga (2012) y Hernando (2013)). Sin embargo, el tiempo transcurrido desde que se pusiera en marcha el PG, en el año 2009, hasta el momento en el que se desarrollaron los mismos, 2012 y 2013, fue muy breve y por lo tanto, este TFM tiene entre sus finalidades aportar una nueva perspectiva. Esta perspectiva tiene la ventaja de que nos va a permitir analizar como el PG ha evolucionado durante sus nueve años de vida y la repercusión que ha tenido en las aulas.

Como es bien sabido las TIC avanzan a un ritmo vertiginoso, y no resulta extraño encontrarse con software o aplicaciones muy potentes en sus orígenes que, en poco tiempo pasan a ser cosa del pasado, bien sea porque se crean otros con mayor número de funcionalidades o simplemente porque se han quedado obsoletos y, si hablamos de informática, aunque pueda ser de aplicación en muchos otros ámbitos, si no te actualizas, tienes muchas probabilidades de desaparecer. Pues bien, el PG es un ejemplo de supervivencia, ya que, a pesar de los problemas derivados de ciertas actualizaciones a nivel de software, que detallaremos más adelante en el capítulo 3.2, hoy en día sigue activo y disponible para todos aquellos usuarios interesados en trabajar con los recursos que ofrece.

De manera más concreta, los objetivos específicos de TFM son los siguientes:

- Analizar, en el contexto de las TIC, el papel del PG en la enseñanza del álgebra
- Desarrollar experiencias basadas en la Educación Basada en la Indagación
- Analizar el PG: qué es, los objetivos que persigue, los procesos de conversión por los que ha pasado, el impacto que ha tenido, los recursos disponibles y su utilización en las aulas

- Analizar una experiencia de aula basada en el uso de recursos del PG, más concretamente en actividades relacionadas con el álgebra

Como objetivos derivados de la experiencia nos planteamos los siguientes:

- Conocer si al alumno le ha resultado útil la experiencia
- Estudiar si la experiencia promueve la participación de los alumnos
- Conocer cómo se defienden los alumnos con las herramientas informáticas, si les cuesta o no aprender a manejarlas
- Examinar su actitud frente a esta forma de enseñar las matemáticas
- Analizar si fomenta o no la construcción del aprendizaje basado en la indagación
- Obtener una valoración de la experiencia en base a: la información obtenida de los alumnos, la opinión de mi tutora de prácticas y a mis propias reflexiones

Para alcanzar estos objetivos el documento se estructura en 7 capítulos. En el capítulo 2 se desarrollan algunas nociones básicas en las que se enmarca este proyecto. Para ello se analiza, en primer lugar, sección 2.1, la relación entre el uso de las TIC y la enseñanza de las matemáticas; en segundo lugar, en la sección 2.2, se explica de forma breve en qué consiste lo que hoy en día se conoce como Educación Basada en la Indagación y, por último, en la sección 2.3, se estudian cuáles son las dificultades más comunes que encuentran los estudiantes al abordar el estudio del álgebra.

En el capítulo 3 nos centramos en analizar algunos aspectos relacionados con el PG: el software GeoGebra (sección 3.1) en base al cual se desarrolla el proyecto; la historia del PG (sección 3.2), cuándo se crea, con qué finalidades, la evolución que ha tenido, los contenidos que se incluyen y bajo qué principios, así como la valoración que realizan varios docentes sobre la utilización del proyecto en sus clases.

En el capítulo 4 se analiza de manera más concreta cómo el PG trata el tema del álgebra, qué tipo de actividades incluye y para qué niveles. Así mismo,

en este capítulo incluimos los comentarios de varios profesores de ESO que han llevado al aula actividades del PG relacionadas con el estudio del álgebra. Estos comentarios nos sirven de guía para definir en el capítulo 5 la propuesta metodológica que desarrollaremos en el aula durante las prácticas. A continuación, en el capítulo 6, se describe la experiencia llevada a cabo en el I.E.S. Santa Clara. En este capítulo, realizamos, en primer lugar, sección 6.1, una contextualización del centro y de los alumnos con quienes se trabajará; en segundo lugar, en la sección 6.2, se muestran los resultados de las actividades, y en la sección 6.3 se detalla la valoración que los alumnos hacen de las experiencias. Por último, en el capítulo 7 se realiza un análisis global de lo que ha supuesto llevar al aula las actividades del PG y se detallan las conclusiones obtenidas de la elaboración de este trabajo.

2. NOCIONES BÁSICAS

2.1. Las herramientas TIC y la enseñanza de las matemáticas

Decir que hoy en día el uso de las herramientas TIC forma parte de nuestra vida cotidiana no es nada nuevo, tal y como afirman Huertas y Pantoja (2016): “los diferentes desarrollos tecnológicos forman parte de nuestras estructuras económicas, sociales y culturales”. Ante esta perspectiva, parece lógico pensar que las TIC también deben estar presentes en los procesos educativos, ya que son poderosos instrumentos que ayudan a promover el aprendizaje, suprimen barreras espaciales y temporales, de modo que más personas pueden acceder a la formación y la educación, y, además, incrementan los recursos y las posibilidades educativas (Coll, 2008).

Actualmente se dispone de multitud de herramientas tecnológicas que abren nuevas vías de aprendizaje. Bien sea a través de software específico para el estudio de determinadas materias, como GeoGebra, AutoCad, Marble, etc. o bien, a través de herramientas Web 2.0, que facilitan y promueven entornos de trabajo colaborativos, tales como: Google Drive, WordPress, WikiSpaces, etc. Todas estas herramientas generan un contexto idóneo que permite a los estudiantes desarrollar muchas de las competencias clave definidas en el

Decreto 38/2015, tales como el pensamiento crítico, la autonomía, la iniciativa, el trabajo colaborativo y la responsabilidad individual (Esteve, 2009).

Como demuestran diversos estudios (p.ej. Arrieta, 2013; Huertas & Pantoja, 2016) las TIC incrementan el nivel de participación del alumnado, gracias a que pueden interactuar en el proceso de enseñanza-aprendizaje, lo que se traduce en una mayor motivación por aprender y en una mejora del rendimiento académico. Gracias a las TIC las explicaciones resultan más atractivas para el alumnado y facilitan la asimilación de los contenidos, ya que existen multitud de conceptos que mediante una exposición oral pueden resultar difíciles de entender, pero si se visualizan resultan mucho más fáciles de asimilar.

Si atendemos ahora al caso concreto de las matemáticas, tal y como afirma Arrieta (2013): “las TIC ponen a disposición de los estudiantes verdaderos ‘laboratorios matemáticos’ en los que conceptos muy abstractos se materializan y el estudiante experimenta con ellos”. El aprendizaje de las matemáticas aborda en muchas ocasiones conceptos complejos que pueden ser difíciles de asimilar por parte de los estudiantes, sin embargo, el uso de herramientas tecnológicas pone a disposición del docente y del alumno infinidad de recursos que, desde diferentes enfoques, pueden ayudar a la asimilación de determinados conceptos (Macías, 2007). Basándonos en los textos de Macías (2007) y Cabero (2007), recogemos a continuación, algunos de los beneficios que consideramos más importantes en el uso de las TIC en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas:

- Promueve la participación del alumno en la construcción de su conocimiento
- Permite al alumno experimentar y especular
- Permite al docente crear entornos más flexibles para el aprendizaje en función de las necesidades del alumnado
- Facilita información sobre el control del tiempo y el proceso de aprendizaje del alumnado
- Posibilita la visualización de múltiples conceptos matemáticos

- Evita cálculos tediosos
- Facilita la contextualización de los conceptos o procesos

En Internet han proliferado, en los últimos años, los recursos asociados a la enseñanza de las matemáticas, en muchos casos, recursos que no están asociados a ninguna organización institucional y que son de uso libre, y por lo tanto, accesibles tanto para el profesorado, que puede elegir aquellos que le resulten más interesantes o adecuados para trabajar con sus alumnos, o para los estudiantes, que pueden encontrar en estos recursos explicaciones, ejercicios o problemas alternativos a los que utilizan en el aula.

2.2. Educación Basada en la Indagación

Tal y como hemos indicado en el apartado anterior, uno de los beneficios del uso de las TIC en la enseñanza de las matemáticas es promover que el alumno construya su propio conocimiento a través de la experimentación y especulación, y en este sentido, el uso de las nuevas tecnologías puede ser un potente recurso en lo que se conoce hoy en día como Educación Basada en la Indagación y más concretamente, atendiendo al caso que nos ocupa en ese trabajo, a la Educación Matemática Basada en la Indagación (IBME, del inglés Inquiry Based Mathematics Education).

Según Artigue (2017) la educación basada en la indagación la podemos entender como la adquisición de conocimiento o información a partir de una determinada pregunta o un problema, que podemos responder o resolver a través de la observación y la exploración, mediante la realización de experimentos mentales, materiales o virtuales. Mediante este tipo de educación se buscan conexiones con temas ya conocidos y que presentan analogías con lo que queremos saber, lo que puede dar lugar, a su vez, a nuevas preguntas o problemas. Esta definición puede ser de aplicación tanto para la indagación en ciencias, (IBSE, del inglés Inquiry Based Science Education), como para la indagación en matemáticas, sin embargo, a pesar de la existencia de similitudes, tal y como afirma Artigue (2017): “la indagación matemática tiene algunas especificidades, tanto en cuanto al tipo de preguntas que aborda como a los

procesos en que se apoya para responderlas” (p. 594). Algunas de las especificidades que Artigue (2017) define para el caso de la IBME son las siguientes (p.598-599):

- el papel desempeñado por la exploración y su progresiva sistematización a medida que aumenta la familiaridad con el problema;
- el pragmatismo del proceso de indagación y su no linealidad;
- la interacción dialéctica entre la prueba y la refutación, y el papel que desempeñan en ella los contraejemplos;
- la naturaleza concluyente (apodíctica) de los resultados obtenidos y la convicción de que ninguna experiencia adicional los invalidará, además de la satisfacción intelectual que se obtiene al descubrir
- nuevos argumentos sobre los resultados ya probados;
- el hecho de que una vez que se encuentra una solución, se buscan inmediatamente generalizaciones posibles, considerando tanto los resultados como las técnicas utilizadas para obtenerlos;
- el cambio de perspectiva que tales generalizaciones pueden requerir, haciendo intervenir a nuevos ámbitos y técnicas matemáticas, y como pueden contribuir a una nueva comprensión de los resultados iniciales obtenidos

En efecto, tanto la indagación matemática como la indagación en ciencias parten de cuestiones que contribuyen a entender el mundo natural, social y cultural, sin embargo, las matemáticas crean sus propios objetos, los cuales conforman un terreno para la experimentación matemática. Tal y como señala el informe *Learning Through Inquiry* (Artigue, Dillon, Harlen y Léna, 2012, p. 8):

As is the case in the natural sciences, inquiry-based mathematics education refers to an education which does not present mathematics to pupils and students as a ready-built structure to appropriate. Rather it offers them the opportunity to experience:

- how mathematical knowledge is developed through personal and collective attempts at answering questions emerging in a diversity of fields, from observation of nature as well as the mathematics field itself, and,

- how mathematical concepts and structures can emerge from the organisation of the resulting constructions, and then be exploited for answering new and challenging problems.

En general, la educación a través de la indagación presenta muchos defensores, entre ellos, Rocard et al. (2007) destacan entre las virtudes de este tipo de educación las siguientes:

- Aumenta el interés de los alumnos, su nivel académico y la motivación del docente
- Este tipo de educación es efectiva con todo tipo de estudiantes
- Promueve el interés de las mujeres en actividades del ámbito científico
- Incrementa las oportunidades de trabajo colaborativo entre los interesados, pertenezcan o no al ámbito de la educación

A consecuencia de las investigaciones relacionadas con la IBME mencionadas anteriormente, y en base a las teorías del constructivismo cognitivo, desarrolladas por psicólogos y pedagogos, como Piaget, Ausubel, Bandura o Bruner, se desarrollan a nivel europeo varios proyectos basados en este modelo de educación. Detallamos a continuación algunos de estos proyectos:

- PRISMAS: este proyecto, financiado por la Unión Europea, UE, dentro del 7º Programa Marco, pretendía contribuir a la mejora de la enseñanza de las matemáticas y las ciencias a partir de enfoques didácticos basados en la indagación (<https://primas-project.eu/about/>)
- POLLEN: el proyecto POLLEN, desarrollado por la Unión Europea, bajo el 6º Programa Marco, promueve una educación basada en la indagación en las escuelas de educación primaria. Para ello se crea un marco para la educación en ciencias basada en el alumno y que se extiende a toda la comunidad (https://cordis.europa.eu/result/rcn/51592_en.html)
- FIBONACCI: fundado por la Unión Europea, bajo el paraguas del 7º Programa Marco, este proyecto tiene como objetivo principal diseñar, implementar y evaluar un proceso de divulgación en Europa, relacionado

con la enseñanza y aprendizaje de las ciencias a través de la indagación (<http://www.fibonacci-project.eu/>)

Además, existen otros proyectos, desarrollados recientemente, que pueden considerarse próximos a la metodología IBSME, puesto que persiguen alcanzar sus objetivos a través del aprendizaje por proyectos. Los proyectos a los que nos referimos son los siguientes:

- **KIKS**: el proyecto KIKS (Kids Inspiring Kids for STEAM, en español Chicos Motivan Chicos en Science, Technology, Engineering, Art, Mathematics) es un proyecto de la UE, dentro del Marco Erasmus+, que tiene como objetivo promover el interés del alumnado de secundaria por las áreas STEAM, y fomentar su creatividad y motivación por el aprendizaje, participando en una comunidad educativa con otros alumnos a nivel local e internacional (<https://www.kiks.unican.es/que-es/>)
- **STEM for youth**: este proyecto, también de la UE, enmarcado en el programa Horizon 2020, tiene como objetivo promover el interés de los estudiantes de secundaria por las áreas STEM, para lo cual, se desarrollarán una serie de actividades para llevar al aula que empleen metodologías innovadoras, como el aprendizaje colaborativo, la experimentación o la gamificación (<http://www.stem4youth.eu/>)

Teniendo en cuenta estas nociones, como veremos más adelante, el PG va a mostrarse en el capítulo 3 como una herramienta especialmente apropiada para fomentar una educación matemática basada en la indagación.

2.3. Dificultades en la enseñanza del álgebra

Como hemos indicado en la introducción, el TFM tiene como uno de sus objetivos la utilización del PG en una enseñanza del álgebra basada en la indagación en la etapa de la educación secundaria. Por ello creemos que es importante destacar algunos problemas y dificultades que surgen del estudio del álgebra a ese nivel. Esta relación, que constituye el objeto de esta sección, ha sido desarrollada por mí en un trabajo realizado con otros dos compañeros en la asignatura Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas del Máster. Lo que

sigue es, prácticamente, una reproducción literal, de mi contribución a ese trabajo.

En el estudio de la aritmética se usan números, los cuales, aunque se pueden usar de forma abstracta, son cercanos al alumno, se utilizan para contar cosas, medir, comprar, etc. En álgebra, sin embargo, las letras se usan para definir números en general y no números específicos, Rystedt (2015). De acuerdo con Devlin (2005, leído en Rystedt, 2015) la mente humana no está preparada para ese nivel de abstracción y es necesario mucho entrenamiento y esfuerzo. Este motivo es el que hace que muchos alumnos encuentren dificultades al abordar el estudio del álgebra. Atendiendo a las diferencias entre aritmética y álgebra que identifica Devlin y a los estudios realizados por: Rystedt (2015), Castro (2012) y Godino y Font (2003), así como, al amplio desarrollo que de esta problemática podemos encontrar en el libro “Ideas y actividades para enseñar álgebra” (Grupo Azarquiel, 1991), destacamos a continuación las principales dificultades con las que se encuentran los alumnos al estudiar álgebra:

- Dificultad en la comprensión de los diferentes significados que se pueden atribuir a las letras
- Pasar a operar con letras de una forma cualitativa, en vez de con números, de forma cuantitativa.
- La complejidad que supone la abstracción y la generalización, por ejemplo, cuando necesitan expresar el término general de una secuencia numérica no entienden por qué no se puede representar mediante un elemento simple y argumentan que en todos los términos de la secuencia hay un sólo número.
- Dificultad en aceptar expresiones algebraicas como soluciones finales.
- Dificultad en el uso de las notaciones, que con frecuencia se basan en convenios ambiguos:
 - Si analizamos los siguientes términos 27 , $2\frac{1}{7}$, $2x$ observamos que el hecho de yuxtaponer términos tiene un significado distinto en cada uno de los casos:

- Representar $1x$ como x , cuando en el resto de los casos el coeficiente antecede a la x , $2x$, $3x...$
- El orden de las operaciones en las expresiones algebraicas. El hecho de estar acostumbrados a leer y escribir de izquierda a derecha puede crear un conflicto en la resolución de determinadas expresiones algebraicas, por ejemplo, si la expresión es $3x + 2$, el orden de lectura y cálculo es el mismo, sin embargo, si la expresión es $2 + 3x$, atendiendo a la jerarquía de operaciones, hay que operar de derecha a izquierda, primero la multiplicación.

3. EL PROYECTO GAUSS

Como se ha comentado en la introducción, el Proyecto Gauss ya ha sido tratado en otros trabajos, concretamente el TFM de Saráchaga (2012) analiza el estado del PG en el año 2012 y lleva a cabo una experiencia con alumnos de 2º de ESO, con los que realiza actividades del PG relacionadas con la proporcionalidad geométrica.

Nuestra contribución aquí es estudiar cómo ha evolucionado el PG a lo largo del tiempo: a nivel técnico, en el número de recursos disponibles, en su utilización en la ESO, y teniendo en cuenta la opinión del profesorado que ya ha podido llevarlo al aula con diversos grupos de alumnos. Además, al igual que hizo Saráchaga (2012), se llevan al aula actividades del PG, en esta ocasión relacionadas con el álgebra y fomentando entre los alumnos un aprendizaje basado en la indagación.

3.1. El software GeoGebra

GeoGebra es un software de matemáticas dinámico diseñado con el fin de facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos (GeoGebra, s.f.). Tal y como se puede leer en la página web de GeoGebra: “GeoGebra se ha convertido en el proveedor líder de software de matemática dinámica, apoyando la educación en ciencias, tecnología, y matemáticas (STEM: Science Technology Engineering and

Mathematics) y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje en todo el mundo” Creado por Markus Hohenwarter, como parte de su tesis de máster en la Universidad de Salzburgo en 2002, se diseñó con el objetivo de combinar las características de los software de geometría dinámica con los de álgebra computacional en un único sistema que fuese sencillo de manejar para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Hohenwarter & Lavicza, s.f)

Según, Hohenwarter y Jones (2007) una de las principales características de GeoGebra es que es un software libre e independiente y está disponible en múltiples plataformas, no sólo en versiones para escritorio sino también en aplicaciones para dispositivos móviles. Actualmente, está disponible la versión 6. Además, mediante este software, es posible la creación de páginas web interactivas con applets embebidos, basados en JavaScript, que permiten la utilización de los materiales sin la necesidad de descargarse el software. Profesores de matemáticas y colaboradores ofrecen todos estos materiales de manera gratuita a través de plataformas en línea, como por ejemplo GeoGebraWiki (www.geogebra.org/wiki).

El éxito de este software se debe a su capacidad para conectar dinámicamente, geometría, álgebra y hoja de cálculo, además de presentar un entorno de trabajo intuitivo, lo que se traduce en una herramienta fácil de usar. Otra característica que ha contribuido a su éxito es que se trata de un software de código abierto, disponible gratuitamente, y por la existencia de una amplísima comunidad de usuarios dispuestos a compartir experiencias y materiales educativos (Álvarez & Losada, 2011A).

En la actualidad podemos encontrar una cantidad enorme de recursos desarrollados con GeoGebra, más de un millón, según afirma la organización de GeoGebra (s.f), todos ellos accesibles a través de GeoGebraTube (<https://www.geogebra.org/?lang=es>).

Todas estas virtudes han contribuido a que GeoGebra sea el eje entorno al cual se hayan desarrollado varios proyectos, como por ejemplo la Aplicación Sensores de GeoGebra, desarrollada por Laura del Río, que lo que hace es

conectar un dispositivo móvil con la aplicación Web de GeoGebra y recolectar datos reales utilizando los sensores del dispositivo. También cabe mencionar aquí el proyecto GeoMatech, desarrollado en Hungría y cuyo principal objetivo era el de desarrollar materiales de calidad para la enseñanza y aprendizaje en todos los niveles de la educación primaria y secundaria en Hungría. Con este mismo propósito surge en España el PG, del que hablaremos a continuación.

3.2. Historia del Proyecto Gauss

El Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado (INTEF), es el encargado de integrar las TIC en las etapas educativas no universitarias. Entre sus objetivos, leídos en la página web del INTEF, (INTEF, s.f) encontramos, entre otros, el de elaborar y difundir materiales curriculares y otros documentos en soporte digital y audiovisual con el objetivo de que estos materiales sean un instrumento ordinario de trabajo en el aula.

En base a este objetivo el INTEF desarrolla el Proyecto Gauss, en el marco del Programa Escuela 2.0 iniciado en 2009.

El PG fue impulsado por José Luis Álvarez García y Rafael Losada Liste, ambos profesores de matemáticas en Asturias, José Luis Álvarez, actualmente jubilado, en el I.E.S. nº 5 de Avilés y Rafael Losada en el I.E.S. de Pravia (Saráchaga, 2012). José Luis Álvarez además ha sido fundador de la Sociedad Asturiana de Educación Matemática Agustín de Pedrayes, ocupando varios cargos en la junta directiva. También ha sido secretario general de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Muñoz, s.f.) y, por último, ha trabajado como Asesor Técnico del ITE, encargado del desarrollo del PG, (INTEF, 2010). Por su parte, Rafael Losada destaca por sus trabajos en el ámbito de la geometría dinámica, ha trabajado como formador del Instituto de Tecnologías Educativas y es formador de GeoGebra (I.E.S.Pravia, s.f).

El PG proyecto tenía como principal objetivo integrar las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los últimos cursos de Educación Primaria Obligatoria (EPO) y en la primera etapa de la ESO (MECD, 2011). Para alcanzar dicho objetivo se crearon recursos didácticos formados por:

una introducción, un applet desarrollado con GeoGebra y un cuestionario. La introducción explica en que consiste la actividad y cómo manejar el applet y, el cuestionario, pieza clave, está diseñado para guiar al alumno en el manejo del applet y graduar su exploración (Álvarez & Losada, 2011B).

El PG culminó en el año 2017 un proceso de actualización. Este proceso fue documentado y difundido por los autores mediante un correo electrónico enviado a una serie de miembros de los distintos institutos GeoGebra de España, que uno de los directores de este TFM tuvo la suerte de recibir y poner a nuestra disposición. Dicho correo incluía un documento en el que narraba la historia del proceso de conversión del PG durante el período 2014-2107, lo que sigue reproduce la descripción que los autores han hecho de este complejo proceso.

Cuando Oracle compró Java los applets de GeoGebra embebidos en páginas web ya no se ejecutaban correctamente. Al parecer, por motivos de seguridad Oracle adoptó tantas medidas restrictivas que desde la organización de GeoGebra se decidió abandonar los applets desarrollados en Java y sustituirlos por otros nuevos basados en JavaScript.

La conversión de los applets llevaría bastante tiempo, ya que la interpretación de JavaScript no era tan veloz como la de Java, algo que apenas se notaba en construcciones sencillas pero que se advertía alarmantemente en construcciones con cálculos más pesados (especialmente cuando se usan listas extensas creadas con el **comando Secuencia** o bien recorridos paramétricos creados con la herramienta **Lugar Geométrico**). Esto hizo que en ocasiones no bastara con cambiar el código de la página HTML, sino que previamente había que retocar o adaptar el archivo de GeoGebra original para que volviera a ejecutarse con suficiente ligereza.

Dado el elevado número de applets del PG, la organización de GeoGebra, encabezada por Markus Hohenwarter y Michael Borchards, intentó ayudar en este proceso. Para ello, pidieron a Zoltán Kovács que idease un método automático para traducir el código de los antiguos applets al nuevo código HTML5. El resultado fue la página [Project Gauss HTML5 conversion](#), creada en

enero de 2014. En ella se recogen las dificultades especiales encontradas en muchas de las actividades.

En el verano de 2016, el INTEF (antes ITE) emprende por su cuenta la tarea de convertir los applets. Una vez convertida, cada actividad se etiqueta e incorpora a los recursos de aprendizaje del programa [Procomún](#). El resultado se puede resumir en los siguientes puntos:

- Alrededor de la cuarta parte de las actividades, tal vez un poco más, no funcionan correctamente en HTML5. Esto es debido, principalmente, a dos razones. Por un lado, la conversión de Java a JavaScript no siempre garantiza el mismo resultado original, especialmente en lo que se refiere a tiempos de ejecución y visualización de las vistas y herramientas. Por otro lado, la actualización de la versión 3.2 de GeoGebra, que emplean la mayoría de las actividades del Proyecto Gauss, a la versión 5 produce desajustes que a menudo impiden al usuario manipular la construcción.
- La organización de las actividades por etapas, niveles, bloques y secciones se pierde.
- Aunque se permite la descarga de las actividades, realmente no pueden utilizarse en modo local puesto que necesitan la conexión a la página de GeoGebraTube para la ejecución de los applets.
- Las soluciones de las actividades están fácilmente al alcance del alumnado.
- No se han integrado en Procomún todas las construcciones GeoGebra complementarias, realizadas por Daniel Mentrard y traducidas del francés por Bernat Ancochea.

Para subsanar estos problemas, los autores de las actividades realizaron por su cuenta, despacio, pero con esmero, la conversión y revisión de todo el Proyecto Gauss a HTML5. El resultado final mantiene la misma estructura que el original, en lo que se refiere a la organización de las actividades, al formato de las mismas y al acceso a las soluciones. También se mantiene la posibilidad de descargar todas o parte de las actividades (en bloques por etapas) para poder utilizarlas en modo local.

Actualmente, estos ítems didácticos están accesibles a todos aquellos usuarios interesados a través del siguiente enlace: <http://geogebra.es/gauss/>. Tanto alumnos como profesores pueden usarlos, bien sea mediante la pizarra digital, el ordenador o el teléfono móvil.

“Los materiales están sujetos a la licencia Creative Commons, “Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 3.0”. Esto significa que somos libres de copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra y crear obras derivadas, siempre que las compartamos bajo la misma licencia, reconozcamos los créditos y no sea con fines comerciales” (Álvarez & Losada, 2011B, p. 26)

3.2.1. Contenidos

El PG dispone actualmente de 590 ítems, clasificados por etapas educativas y áreas. Los contenidos abordan todos los niveles de la educación no universitaria, es decir, encontramos ítems dirigidos a estudiantes de EPO, ESO y Bachillerato. Para cada uno de los ítems se indica: la sección en la que se enmarca, el nivel que se le asigna (desde la página web se señala que el nivel que indican para cada actividad es orientativo), una imagen en miniatura del applet, el título del ítem y por último las observaciones, en este caso se indica si se trata de una actividad que pueda usarse de autoevaluación “Autoevalúa” o en diferentes contextos (Multiusos). Bajo este epígrafe de observaciones también se señala si el ítem enlaza con otro de nivel superior , inferior  o similar  atendiendo a lo que indican Álvarez y Losada (2011B) “estos enlaces ayudan a tratar la diversidad, ya sea hacia un nivel superior (de primaria a ESO) o inferior (de ESO a primaria)” (p. 26).

Las actividades de la EPO que se presentan en el PG son 168 y están clasificadas en tres bloques temáticos: Aritmética, Geometría y Estadística y probabilidad. Cada una de las actividades de este nivel enlaza con una actividad de un nivel superior o de un nivel similar. En la ESO es donde podemos encontrar un mayor número de actividades, un total de 372; en este caso, las actividades se clasifican en 5 bloques, Aritmética, Álgebra, Funciones, Geometría y

Estadística y probabilidad, siendo en el bloque de Geometría donde encontramos el mayor número de actividades, lo cual parece lógico, ya que la principal característica de GeoGebra es la representación visual que se puede hacer de los elementos geométricos y las facilidades que ofrece para manipular dichos elementos (Saráchaga, 2012). Por último, en el nivel de Bachillerato nos encontramos únicamente con 50 ítems, aparentemente distribuidos en cuatro bloques, ahora el bloque de Aritmética y Álgebra aparece unido y se mantienen los otros tres que encontrábamos en la ESO: el de Geometría, Funciones y Estadística y probabilidad. En este nivel, el mayor número de ítems se presentan en el bloque de Funciones.

Para cada una de las etapas educativas se pueden descargar, desde la página web del PG archivos comprimidos con todas las actividades. Si se desea modificar alguna construcción basta con abrirla con GeoGebra y hacer los cambios que queramos, no hace falta crear un nuevo applet, este se actualiza automáticamente en la página web que corresponda (Álvarez & Losada, 2011B).

El tipo de actividades que nos encontramos en el PG son de una gran diversidad: se pueden crear construcciones, diseñar estrategias para determinados juegos, dibujar, analizar mosaicos, frisos y rosetones, realizar comparaciones de diferentes representaciones matemáticas, incluso averiguar qué hay detrás de un truco de magia, realizar experimentos aleatorios, simular trasvases de líquidos, interpretar planos y mapas, practicar en el cálculo mental, etc.

3.2.2. Actitudes y Principios

Desde la página web del proyecto, <http://geogebra.es/gauss/>, se recomienda que sean los estudiantes quienes intenten comprender por sí mismos las actividades, que se sientan “protagonistas de su aprendizaje”, y que el profesor les ayude en lo estrictamente imprescindible.

El espíritu del Proyecto Gauss es el de orientar las actividades a la adquisición y práctica de competencias matemáticas generales más que al adiestramiento en algoritmos particulares a la vez que se mantiene el objetivo de

mostrar la pluralidad y la interconexión de ideas y métodos matemáticos. (Álvarez & Losada, 2011B, p. 27).

Todo esto hace que el PG proporcione un elevado número de recursos para trabajar en el aula que favorecen un aprendizaje basado en la indagación, ya que no se plantean actividades para resolver de forma mecánica, sino que buscan que el alumno investigue, de hecho, los cuestionarios que se incluyen en las fichas de actividades proporcionan, en la mayoría de los casos, pautas dirigidas a que el alumno experimente con los applets y que sea el mismo quien establezca sus propias conclusiones y encuentre las respuestas a las preguntas que se le plantean.

3.2.3. Opiniones del profesorado

Para este TFM he tenido la suerte de contar con la colaboración de varios profesores de secundaria que han aportado información muy valiosa relacionada con su experiencia en el aula usando algunos de los applets del PG. Esta información se solicitó a varios profesores de matemáticas de ESO mediante correo electrónico. En algunos casos la información facilitada hace referencia al PG de forma general, esta información es la que se detalla en esta sección, mientras que, en otros, los docentes aportan datos relacionados con su experiencia en el aula usando los mismos applets que se han usado en este TFM, dichos datos se recogen en la sección 4.2. La información ha sido proporcionada vía e-mail, en la mayoría de los casos, pero también, a través de una plataforma a la que he podido acceder gracias al permiso de Manuel Sada, quien me ha proporcionado las credenciales necesarias. En esta plataforma se recogen los diarios de los docentes que trabajaron en una experiencia conjunta en torno al PG. En esta experiencia los profesores se comprometían a llevar a sus grupos de alumnos de la ESO al aula de ordenadores, al menos una vez a la semana, a trabajar actividades del PG y, posteriormente compartir sus reflexiones y conclusiones con el resto de los profesores implicados en la experiencia (Sada, 2012).

Relacionado con la información facilitada en relación con el PG en general, mencionar las conclusiones que se obtienen de la experiencia descrita anteriormente, que, según Sada (2012), son las siguientes:

- El alumnado prefiere este tipo de clases a las convencionales
- El alumno aprende más significativamente
- Sus mayores dificultades tienen que ver con la lectura comprensiva y la capacidad de expresión
- Hay condicionantes técnicos determinantes
- La calidad de los recursos del PG es excepcional
- Los cuestionarios son útiles también sin ordenadores
- Cómo actividad de formación el formato es muy interesante

A estas conclusiones me gustaría añadir lo que comenta Bernat Ancochea, profesor jubilado desde hace dos años y buen conocedor del PG, ya que trabajó en la traducción de las actividades desarrolladas por otro profesor, Daniel Mentrard. Según Bernat: “las actividades son técnicamente inmejorables, pero considera que se tienen que adaptar a la situación de cada centro porque son de un nivel un poco elevado”. Este comentario se puede relacionar con el del profesor Manuel Sada, quien afirma estar enamorado de las actividades del PG por su excelente calidad.

4. EL PROYECTO GAUSS Y LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA

4.1. Relación entre el Proyecto Gauss y el álgebra

El PG incluye ítems didácticos relacionados con el estudio del álgebra, principalmente para los niveles de la ESO.

En el caso del Bachillerato, al entrar en la aplicación vemos que hay una sección denominada Aritmética y Álgebra, que a su vez se subdivide en otras tres secciones: Números y ecuaciones, Matrices y determinantes y Programación lineal, sin embargo, al acceder a cada una de estas secciones vemos que todas están vacías salvo la de Programación lineal, en la que hay un ítem dirigido a los alumnos de 2º de Bachillerato de la especialidad de Ciencias Sociales. Este ítem está relacionado con problemas de optimización de funciones y programación lineal.

En el caso de la ESO las actividades se dividen en cuatro secciones, a continuación, se enumeran cada una de estas secciones y se detalla el tipo de contenidos que se trabajan:

- Pautas y fórmulas: en esta sección se incluyen un total de 9 ítems, la mayoría de estos ítems van dirigidos a provocar en el alumnado un razonamiento inductivo. Este razonamiento se basa en particularizar determinados casos para posteriormente poder generalizar, reflexionando en cada situación, si la generalización es correcta o no. Para poder generalizar es necesario que los alumnos hagan uso de expresiones algebraicas. Estas actividades se podrían realizar en cualquier curso de la ESO.
- Progresiones: en esta sección se incluyen un total de 5 ítems en los que se guía al alumno en la obtención de los términos generales de determinadas progresiones aritméticas. En este caso, la dificultad de los ítems es mayor que en el de la sección anterior y, aunque hay una actividad que se podría realizar con los alumnos de 1º de ESO la mayoría están orientadas para realizarlas con grupos de 3º o 4º de ESO.

- Identidades notables: aquí se incluyen 4 actividades, 3 de ellas permiten a los alumnos verificar gráficamente las identidades notables. En este caso, aunque el nivel que se le asigna a estas actividades se corresponde con los cursos entre 1º y 3º de ESO, considero que es mejor realizarla en los últimos cursos, 3º o 4º ESO.
- Ecuaciones y sistemas: esta sección incluye un total de 7 ítems relacionados con: la tarea de traducir al álgebra y con la resolución de ecuaciones de primer grado, dirigidos a los dos primeros cursos de la ESO, y los otros, dos de sistemas lineales de ecuaciones y uno de resolución de ecuaciones de segundo grado, dirigidos a los dos últimos cursos de la ESO.

4.2. Uso de los applets de álgebra del PG en el aula

Como ya he comentado anteriormente, para realizar este trabajo he contado con información proporcionada por varios profesores de matemáticas de educación secundaria que han trabajado con los applets del PG. En esta sección detallo las experiencias llevadas a cabo por cuatro docentes que tuvieron la oportunidad de trabajar con sus alumnos los mismos applets que yo he llevado al aula y que se detallan en la sección 5.1 Descripción de las actividades.

Experiencia en el I.E.S. Salvador Dalí (Madrid)

Esta experiencia fue desarrollada por el profesor Antonio Pérez, actualmente jubilado. Antonio Pérez ha tenido una intensa vida profesional; además de ejercer su labor como docente de matemáticas, ha trabajado en promover el uso de las nuevas tecnologías en la educación. Ha sido autor de numerosas publicaciones escritas, digitales y audiovisuales y también coordinador en diferentes secciones en las revistas SUMA y la Gaceta de la RSME (Real Sociedad Matemática Española). Ha ocupado varios cargos de relevancia en el ámbito de la educación, entre ellos destacaremos el de director del INTEF y creador del plan Escuela 2.0, además fue uno de los promotores de PG.

Relacionado con la experiencia en el aula con el PG Antonio nos comenta que: en los cursos 2012-2013 y 2013-2014 con alumnos de 2º de ESO trabajó con la actividad de La Balanza (Naturales) y La Balanza (Enteros).

En el curso 2012-2013 el grupo en el que se desarrollaron las actividades era un desdoble de un grupo de 2º de ESO con dificultades de aprendizaje y, tal y como comenta Antonio, dieron muy buenos resultados en dos aspectos:

- 1) Como elemento de motivación. Los alumnos no tenían un alto nivel de aprecio a las matemáticas, por las dificultades intrínsecas, y el uso de aplicaciones del PG ya era un acicate para ponerse a trabajar en clase.
- 2) Como facilitador del aprendizaje. La visualización de la idea de ecuación y de los métodos dinámicos para resolverla utilizando las aplicaciones de Gauss sirvió para que muchos de ellos adquiriesen la noción de ecuación y las técnicas para su resolución, incluso utilizando lápiz y papel.

En el curso 2013-2014 estos mismos applets los utilizó en el marco de un aula virtual con un grupo de 2º de ESO. Antonio señala que todas las aulas del I.E.S. Dalí cuentan con ordenadores conectados en red a Internet y en cada grupo y para cada asignatura se creó un aula virtual en la que los alumnos utilizaban recursos digitales tanto en clase como fuera de ella. Según Antonio, los resultados de ese curso fueron muy positivos a pesar de ser un grupo bastante movido y un tanto rebelde.

Experiencia en el I.E.S. Bernardino del Campo (Albacete)

En este caso la experiencia ha sido desarrollada por los profesores María del Carmen Descalzo y Rafael Pérez en el curso 2017-2018. Las actividades del PG que desarrollaron fueron: La Balanza (naturales) y las relacionadas con las igualdades notables, Suma por diferencia, Cuadrado de una suma y Cuadrado de un binomio. La experiencia se realizó con un grupo de 2º de ESO formado por 30 alumnos y en una sesión de 1 hora de duración.

La experiencia la desarrollaron en un aula de ordenadores, en la que se disponía de un ordenador conectado a un proyector para el profesor y ordenadores para los alumnos, uno por cada dos alumnos. Los profesores colgaron las actividades a realizar en un aula virtual que tiene el centro para que los alumnos las localizaran rápidamente. En el momento de realizar las actividades se les indicó a los alumnos que debían contestar a las preguntas que se les proponían en la actividad y posteriormente realizarían una puesta en común con el profesor para aclarar posibles dudas. Al terminar los alumnos recibieron una hoja donde se les hacían preguntas para saber en qué forma las actividades les habían ayudado a entender mejor los conceptos.

Las respuestas de los alumnos fueron muy favorables, afirmaron que sí les habían ayudado a entender mejor los conceptos, además muchos repitieron las actividades en sus casas.

En general, la mayoría afirma haber entendido muy bien el ejercicio de las balanzas, pero los de las igualdades notables les cuesta más en especial el de suma por diferencia, por el tema de los trapecios, que los controlan menos.

Los profesores implicados encuentran las respuestas graciosas y favorables, porque incluso les agradecen el trabajo realizado.

Desde el punto de vista de los profesores, consideran que las actividades con las que han trabajado son muy buenas, aunque creen que el tiempo dedicado, 1 hora, fue escaso.

Más concretamente, la actividad de la balanza considera que fue muy aceptada por los alumnos porque vieron cómo se quitaban los cubos y cómo la balanza cambiaba de posición, lo que les sirvió para recordar los métodos de despeje en una ecuación. Observaron que resolvían bien las ecuaciones. Sin embargo, comentan que muchos no sabían lo que era una balanza, ya que actualmente no se ven en las tiendas, y que por lo tanto tuvo que explicarlo. Desde su punto de vista indican que sería bueno buscar una alternativa a la balanza.

Por otro lado, para María del Carmen y Rafael, las actividades de las igualdades notables son más confusas, consideran que, en general, no es fácil entender este tipo de demostraciones visuales. En este caso los alumnos necesitan más ayuda para entenderlas ya que se ven muchas letras que no saben cómo utilizar y no se ven números por ningún sitio. Proponen que la actividad permitiera conocer lo que miden los lados de las figuras, en ese caso sólo se deberían permitir usar números naturales.

La conclusión de estos dos profesores es que: “las actividades son muy interesantes y contribuyen a la mejora de la enseñanza y aprendizaje de los conceptos que trabajamos”. Aunque por otro lado indican: “hay que tener en cuenta los problemas técnicos que pueden surgir cuando trabajas con ordenadores y que se necesita bastante tiempo para hacer las actividades en la clase”.

Experiencia en el I.E.S. Zizur BHI (Zizur Mayor. Navarra)

Manuel Sada nos comenta que él ha usado los materiales del PG de dos maneras muy diferentes:

- 1) En el aula ordinaria, con proyector, como apoyo o recurso a las explicaciones
- 2) En el aula de ordenadores, para que sean los alumnos quienes trabajen las actividades siguiendo los cuestionarios (por lo general, previamente modificados y facilitados en fotocopias) y entreguen informes o los cuadernos con sus respuestas

Manuel recuerda (hace 3 años que no está dando clase) que utilizó las actividades relacionadas con las igualdades notables sólo de la primera de las maneras en un curso de 3º de ESO, con el propósito de hacer comprender el significado de las igualdades o enriquecerlas con las visualizaciones, que, desde su punto de vista, “las cargan de sentido y aportan mucho a quien sólo ve unas fórmulas desprovistas de significado”. Para Manuel, la visualización en Matemáticas es un recurso excepcional que hay que aprovechar siempre que se pueda.

Experiencia en el Colegio Santa Teresa de Jesús (Pamplona)

M^a Puy Vizcay trabajó con los applets del PG en 2012 y comenta que al comenzar el tema de ecuaciones hicieron uso del applet de la Balanza para ir deduciendo y resolviendo ecuaciones sencillas, gracias a la actividad del PG los alumnos podían comprobar las soluciones. Además, destaca que le resultó interesante ver cómo los alumnos deducían ellos mismos las propiedades de las ecuaciones y cómo obtenían ecuaciones equivalentes. Considera que las actividades ayudaron a los alumnos a comprender mejor porqué se transponen los términos de un miembro a otro.

5. PLANTEAMIENTO METODOLÓGICO DE LA PROPUESTA

Este trabajo quiere llevar al aula alguna de las actividades, enmarcadas en el PG, para la enseñanza del álgebra y las ecuaciones de primer grado. En este caso, y en base a las experiencias descritas en la sección anterior, se decidió desarrollar las actividades con alumnos de 2º de ESO y 4º de ESO, aunque se podrían desarrollar en cualquiera de los niveles de la ESO.

Los objetivos generales que se persiguen mediante la introducción en el aula de este recurso son los siguientes:

- Apoyar el aprendizaje del álgebra mediante la utilización de recursos informáticos
- Fomentar un aprendizaje del álgebra basado en la indagación
- Evaluar el impacto que tiene el uso de algunas de las actividades del PG para el estudio del álgebra sobre alumnos de educación secundaria
- Analizar la viabilidad de desarrollar las actividades del PG en el I.E.S. Santa Clara
- Comparar los resultados que se obtengan con los resultados obtenidos por otros profesores que hayan usado las mismas actividades del PG
- Informar y mostrar a los alumnos recursos que pueden usar para aprender matemáticas y más concretamente, mostrarles herramientas que les permitan aprender y trabajar el álgebra de forma autónoma.

Además, con estas actividades se pretende contribuir a que los alumnos adquieran algunas de las competencias clave establecidas en la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE). Principalmente, las competencias que se trabajan son: la competencia matemática y la competencia digital, aunque, de forma transversal también se trabajan otras competencias, cómo pueden ser: la de comunicación lingüística, la de aprender a aprender, la social y cívica e incluso la de conciencia y expresiones culturales.

En la sección 5.2 se detalla de forma precisa cómo cada una de las sesiones de trabajo contribuyen al desarrollo de las competencias mencionadas.

5.1. Descripción de las actividades

En las siguientes subsecciones se detalla en qué consisten cada una de las actividades que se desean desarrollar en el aula. Todas ellas se basan en el uso de applets del PG.

5.1.1. Actividad 1: Balanza (naturales)

Esta actividad versa sobre el uso del applet denominado Balanza (naturales)¹. Haciendo uso del concepto de equilibrio, el alumno maneja la balanza que aparece en el applet y tiene como misión encontrar la solución a las ecuaciones de primer grado que se le plantean en la actividad. En el Anexo I se puede encontrar una descripción más detallada de esta actividad.

5.1.2. Actividad 2: Proporcionalidad

En esta actividad, Proporcionalidad², se plantea un problema matemático en el que intervienen conceptos como el de cálculo de áreas, traducción del

¹

http://geogebra.es/gauss/materiales_didacticos/eso/actividades/algebra/ecuaciones/balanza_naturales/ctividad.html

²

http://geogebra.es/gauss/materiales_didacticos/eso/actividades/algebra/ecuaciones/proporcionalidad/actividad.html

lenguaje ordinario al lenguaje algebraico y la resolución de ecuaciones de primer grado, ver Anexo II.

5.1.3. Actividad 3: Suma por diferencia

Esta actividad, Suma por diferencia³, junto con las dos que se describen en los siguientes apartados, lo que hace es verificar gráficamente las identidades notables. Las identidades notables son unas expresiones algebraicas que por su utilidad a la hora de trabajar en álgebra es importante conocer, ya que ayudan a resolver operaciones que pueden ser muy laboriosas y a simplificar expresiones algebraicas.

En esta primera actividad la identidad notable que se verifica es la de suma por diferencia, que es igual a la diferencia de los cuadrados:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

En el Anexo III se puede leer una descripción más detallada de la actividad.

5.1.4. Actividad 4: Cuadrado de una suma

El objetivo principal de esta actividad, Cuadrado de una suma⁴, es verificar la identidad notable “cuadrado de una suma”:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

En el Anexo IV se realiza una descripción más detallada de esta actividad.

3

http://geogebra.es/gauss/materiales_didacticos/eso/actividades/algebra/identidades/suma_por_diferencia/actividad.html

4

http://geogebra.es/gauss/materiales_didacticos/eso/actividades/algebra/identidades/cuadrado_de_una_suma/actividad.html

5.1.5. Actividad 5: Cuadrado de un binomio

Por último, la actividad 5, Cuadrado de un binomio⁵, comprueba gráficamente el cuadrado de una suma, y, también, el cuadrado de una diferencia:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

El Anexo V describe en profundidad en qué consiste esta actividad.

5.2. Planteamiento general de las sesiones

Se plantea desarrollar las actividades descritas en el apartado anterior en tres sesiones de 50 minutos cada una. Atendiendo a las diferentes técnicas que describe Drijvers (2011), relacionadas con el uso de la tecnología para enseñar matemáticas, las sesiones se pueden realizar siguiendo cualquiera de las técnicas que se describen a continuación o bien mediante la combinación de varias de ellas:

- 1) “Work-and-walk-by”: mediante esta práctica los estudiantes trabajan con el ordenador, de manera individual o por parejas, mientras que el profesor se pasea por las mesas y monitoriza su progreso.
- 2) “Technical demo”: en este caso el profesor muestra a los alumnos como un determinado proceso se puede llevar a cabo haciendo uso del software que se esté manejando, posteriormente los alumnos podrían trabajar de manera individual.
- 3) “Sherpa-at-work”: en esta técnica el profesor invita al estudiante a usar la tecnología, bien colocándose detrás del ordenador o delante

5

http://geogebra.es/gauss/materiales_didacticos/eso/actividades/algebra/identidades/cuadrado_de_un_binomio/actividad.html

de la pizarra digital, de forma que el resto de los alumnos puedan ver las acciones que se llevan a cabo.

Desde nuestro punto de vista, lo ideal sería poder desarrollar las sesiones usando la técnica “Work-and-walk-by”, pero puede que en función de los recursos disponibles esto no sea posible, por lo que en ese caso se plantearán las sesiones mediante una combinación de las otras dos técnicas.

Como se ha comentado anteriormente las actividades del PG son recursos que permiten una enseñanza de las matemáticas basada en la indagación y con esta intención llevaremos al aula las actividades descritas con anterioridad. Más concretamente indicaremos a continuación cómo cada una de las actividades contribuyen a un aprendizaje basado en la indagación. En el caso de la Actividad 1: La Balanza (naturales) se busca: a través de la manipulación autónoma del alumno del applet que el alumno comprenda el concepto de igualdad y de ecuación (gracias al símil de una balanza en equilibrio), y, por otro lado, que establezca una relación entre lo que hace cuando maneja el applet, al quitar y poner cajas, con lo que se hace al resolver ecuaciones con lápiz y papel, es decir que sea capaz de relacionarlo con la transposición de términos. En el caso de la Actividad 2: Proporcionalidad la finalidad es que el alumno analice el enunciado del problema y sea capaz de encontrar la solución siguiendo una serie de pautas que le darán idea de: cómo se puede enfrentar a los problemas, la importancia de leer bien los enunciados y métodos que le ayuden a comprender dichos enunciados, como, por ejemplo, buscar casos particulares, para posteriormente generalizar. Así mismo debería descubrir cómo un problema de la vida real se puede resolver gracias a las matemáticas, más concretamente en este caso, gracias al álgebra. La visualización de los pasos le ayudará a comprender mejor el problema. Por último, las Actividades 3, 4 y 5, relacionadas con las verificaciones geométricas de las identidades notables, persiguen que sean los alumnos quienes lleguen a comprobar, con ayuda del applet, si dichas identidades son ciertas, mediante la manipulación del applet y, así, modificando distancias y moviendo figuras, ellos tienen que llegar a deducir las igualdades.

Antes de empezar las sesiones, debido a que lo más probable es que los alumnos sea la primera vez que oyen hablar sobre GeoGebra, se les mostrará

qué es el programa GeoGebra, se les explicará que se trata de un software libre específico para el estudio y la enseñanza de las matemáticas y que pueden descargárselo en su ordenador, tableta o móvil. Se les indicará que permite trabajar diferentes áreas de matemáticas, bien sea cálculo, álgebra, geometría o estadística. A continuación, se proyectarán en el aula algunos ejemplos de las cosas que se pueden hacer, cómo realizar cálculos, dibujar figuras, etc. Lo siguiente será explicar qué es el PG, se les dirá que es un proyecto que fue creado con el objetivo de proporcionar a los docentes y estudiantes una serie de recursos para el estudio y aprendizaje de las matemáticas mediante el uso del software GeoGebra. Estos recursos están diseñados en forma de applets a los que cualquiera puede acceder y manejar desde internet sin necesidad de tener GeoGebra instalado. Se les facilitará el enlace al proyecto y se les explicará cómo las actividades están organizadas según el nivel académico al que correspondan y según los contenidos que trabajen. Todo esto se contará de forma muy resumida, ya que el objetivo principal en este momento es llevar a cabo las actividades y si nos extendemos mucho en este tipo de explicaciones no daría tiempo a realizarlas.

En los apartados siguientes se describe de forma detallada cada una de las sesiones, indicando los objetivos didácticos que se desean alcanzar, las competencias clave que se trabajan y el protocolo de actuación a seguir en el aula.

Parece lógico pensar que las actividades que proponemos utilizar en el marco de este TFM son claves para trabajar la competencia matemática, la competencia matemática “consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral”.[...] (Decreto 57/2007. BOC Núm. 101, de 25 de mayo de 2007; 7504).

Para cada una de las sesiones, se realiza un análisis concreto sobre cómo y por qué dichas actividades pueden contribuir al desarrollo de la competencia matemática a través de las competencias generales definidas en el proyecto OCDE/PISA, que son: Pensar y razonar, Argumentación, Comunicación, Construcción de modelos, Formulación y resolución de problemas, Representación, Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico, Empleo de soportes y herramientas (OCDE, 2004).

Sin embargo, sí que consideramos que transversalmente la propuesta contribuye a desarrollar algunas de las otras competencias definidas en el Decreto 57/2007, de 10 de mayo, donde se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Cantabria, tales como: la competencia digital, la competencia de aprender a aprender o la de sentido de iniciativa y espíritu emprendedor. De manera general se detalla a continuación, cómo desde nuestro punto de vista, se trabajan dichas competencias a través de las actividades que llevamos al aula:

- Competencia digital: los alumnos conocerán y se familiarizarán con los applets del PG, para lo cual harán uso del ordenador y de internet, lo que les permitirá disponer de una herramienta TIC que contribuya a su proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.
- Competencia de aprender a aprender: se les dará la oportunidad de participar en las sesiones de trabajo, mostrándoles ejemplos de la vida cotidiana, como por ejemplo, con el problema de la sesión 2, que les permite relacionar las matemáticas con la vida real, además de fomentar el razonamiento deductivo e inductivo durante las sesiones (principalmente con la sesión 3).
- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor: se animará a los alumnos a que trabajen de forma autónoma durante las sesiones, adquiriendo seguridad y fomentando la confianza en sí mismos y su capacidad de iniciativa.

Consideramos importante resaltar que las competencias que se trabajan están entremezcladas, y por lo tanto, resulta imposible evaluarlas de forma

aislada. Además, el desarrollo de las competencias es algo que depende altamente del individuo y por lo tanto el grado en el que los alumnos las desarrollen puede variar enormemente (OCDE, 2004)

5.2.1. Sesión 1

En esta sesión de trabajo se desarrollará la actividad 1 “La Balanza (naturales)”.

Los **objetivos didácticos** que se pretenden alcanzar con el desarrollo de esta actividad son los siguientes:

- Trabajar los conceptos de igualdad y ecuación
- Mostrar y aprender diferentes estrategias para la resolución de ecuaciones de primer grado
- Conocer y familiarizarse con el uso de herramientas TIC como medio que permite enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones de primer grado

Esta sesión contribuirá a desarrollar la **competencia matemática** a través de las siguientes competencias generales:

- Pensar y razonar: el alumno debe reflexionar sobre los conceptos de igualdad algebraica y ecuación, así como analizar el proceso de resolución de ecuaciones de primer grado que se le muestra.
- Argumentar: el alumno debe argumentar qué es lo que ocurre al manipular los mandos de la balanza, cuáles son los pasos que hay seguir y porqué.
- Comunicar: se plantearán a los alumnos preguntas sobre la actividad que se esté desarrollando con el objetivo de que sean capaces de expresar de forma oral sus razonamientos o argumentos.
- Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones: esta actividad muestra el lenguaje que se utiliza para representar ecuaciones de primer grado y cómo se puede operar para poder llegar a la solución, por un lado la actividad de La Balanza ejemplifica cómo se puede relacionar un hecho de la vida real con el lenguaje matemático y, por otro

lado, el desarrollo de la sesión mostrará las diferentes formas que se pueden utilizar para poder resolver una ecuación de primer grado usando lápiz y papel.

- Uso de herramientas y recursos: esta actividad incluye el uso del ordenador y de Internet para poder acceder y trabajar con el applet de GeoGebra.

Se describe a continuación el **protocolo de actuación** de la sesión 1:

Como actividad inicial se les pedirá a los alumnos que busquen y lean, bien sea de su libro de texto, si es que lo tienen, de apuntes de años anteriores, o de internet, información sobre el tema de Ecuaciones de primer grado y segundo grado, más concretamente se les indicará que se centren en los conceptos de igualdad algebraica, ecuación, cuáles son los elementos de una ecuación y cómo se define una ecuación de primer grado. Todos estos conceptos ya los estudiaron en el curso anterior, por lo que este repaso servirá para ver si los alumnos se acuerdan o no de dichos conceptos y para conocer el punto de partida en el que nos encontramos en el momento de realizar la actividad. Al comienzo de la clase se les pedirá que hagan un resumen de lo que han leído. Se irá preguntando por cada uno de los conceptos y se resolverán las dudas que plateen. Finalmente, se les mostrará la actividad propuesta. Para ello, se les entregará la ficha con la presentación de la actividad, ver Anexo I, y se les pedirá que hagan desde el ordenador distintos casos. Se les indicará que anoten las ecuaciones que vayan planteando con el applet junto con los resultados en la tabla que aparece en la ficha de la actividad. Esta ficha se recogerá al final de la clase para poder evaluar si, al menos, han seguido la actividad.

Seguidamente, se resolverán algunas de las ecuaciones que se han ejecutado con el applet en la pizarra, para lo cual, se seguirán diferentes métodos de resolución. Por un lado, el mismo que han desarrollado con el applet y, por otro lado, siguiendo los pasos habituales en la resolución de ecuaciones de primer grado, es decir, usando la transposición de términos, de modo que los alumnos vean la relación que existe entre los dos métodos de resolución y que comprueben que el resultado es el mismo.

Esta actividad se desarrollará en una sesión de 50 minutos de duración.

5.2.2. Sesión 2

En la sesión 2 se desarrolla la actividad 2 “Proporcionalidad”.

Los **objetivos didácticos** que se pretenden alcanzar con el desarrollo de esta actividad son los siguientes:

- Trabajar los conceptos de proporcionalidad y área
- Relacionar información
- Planificar la resolución de un problema
- Identificar diferentes estrategias para la resolución de un problema
- Distinguir entre particularizar y generalizar
- Expresar algebraicamente una situación de la vida real
- Trabajar los conceptos de igualdad y ecuación
- Resolver ecuaciones
- Reflexionar y verificar los resultados que se obtienen
- Conocer y familiarizarse con el uso de herramientas TIC que permiten guiar al alumno en la resolución de problemas

Esta sesión contribuirá a desarrollar la **competencia matemática** a través de las siguientes competencias generales:

- Pensar y razonar: mediante este problema el alumno relacionará un problema de la vida real con un problema matemático y deberá analizar el enunciado minuciosamente para poder interpretar los datos, identificar que hay dos condiciones que se tienen que cumplir y saber qué es lo que le están pidiendo. Por otro lado, deberá averiguar qué conceptos matemáticos están asociados al problema que se le plantea y una vez obtenido el resultado verificar que es correcto.
- Comunicar: el alumno trabajará la competencia de comunicar gracias a que deberá: entender el enunciado del problema, expresar lo que ha entendido y la forma de resolverlo.

- Modelar: el alumno deberá traducir el enunciado del problema al lenguaje matemático, primero deberá generalizar, posteriormente buscar casos particulares y, por último, llegar a la expresión matemática que verifique las dos condiciones que establece el problema.
- Plantear y resolver problemas: mediante este problema el alumno deberá formular el problema matemático que se esconde tras el enunciado que se le indica, para lo cual, deberá traducir del lenguaje ordinario al lenguaje matemático y llegar a una ecuación de primer grado que deberá resolver. En este caso, podrá resolverla tanto con la ayuda del applet de GeoGebra como con lápiz y papel, utilizando la transposición de términos.
- Representar: el alumno trabajará esta competencia al visualizar en el applet cómo se traduce el enunciado del problema en una representación gráfica, verá cómo al variar el valor de la "x" (variable que define el applet para modificar el tamaño del rectángulo), el rectángulo se hace más grande o más pequeño, pero siempre respetando la condición de proporcionalidad que se indica.
- Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones: el alumno, como se ha comentado anteriormente, deberá traducir del lenguaje natural al lenguaje matemático, para lo cual deberá definir variables (la x en este caso), conocer fórmulas (la del área de un rectángulo), utilizar los símbolos matemáticos para plantear la ecuación de primer grado y realizar las operaciones necesarias para resolverla.
- Uso de herramientas y recursos: esta actividad incluye el uso del ordenador y de Internet para poder acceder y trabajar con el applet de GeoGebra.

Se describe a continuación el **protocolo de actuación** de la sesión 2:

Como trabajo previo, el día antes de la sesión se entregará a los alumnos la ficha de la actividad, ver Anexo II, y se les pedirá que lean el enunciado y traten de responder a las cuatro primeras cuestiones que se plantean. Para resolver estas cuestiones no es necesario el uso del applet de GeoGebra.

El día de la sesión se comenzará preguntando a los alumnos si han hecho las cuestiones, las dificultades que han encontrado y si les ha resultado sencillo o complicado resolverlo. A continuación, se pasará a comentar las soluciones en alto para comprobar si han sido capaces de resolverlo correctamente o no.

Seguidamente se permitirá a los alumnos que vayan resolviendo el resto de las cuestiones que se plantean, para lo que podrán ayudarse del applet de la actividad, al que accederán desde el ordenador. A medida que avance la sesión, se verá si los alumnos son capaces de contestar a las preguntas o no y se proyectará la actividad para mostrarles cómo ir resolviendo las diferentes cuestiones, y ayudar de este modo a aquellos que no hayan sabido responder.

Una vez finalizadas las cuestiones se les planteará un problema similar para que ellos lo resuelvan en su cuaderno, y posteriormente, se corregirá en la pizarra, esto permitirá evaluar si realmente los chicos han entendido el problema, son capaces de resolverlo por ellos mismos y si son capaces de relacionar el problema con la actividad del PG.

5.2.3. Sesión 3

En la sesión 3 se desarrollarán las actividades: 3 “Suma por diferencia”, 4 “Cuadrado de una suma” y 5 “Cuadrado de un binomio”. Estas actividades se realizarán en una sesión de 50 minutos.

Los **objetivos didácticos** que se pretenden alcanzar con el desarrollo de estas actividades son los siguientes:

- Aplicar las propiedades de los números
- Trabajar los conceptos de longitud y área
- Usar representaciones gráficas para verificar las identidades notables
- Trabajar los conceptos de igualdad
- Reflexionar sobre la bidireccionalidad de las igualdades
- Reflexionar sobre los resultados
- Dotar al alumno de estrategias para la resolución de ecuaciones de primer o segundo grado

- Adquirir conocimiento gracias a la indagación y deducción.
- Deducir a qué es igual el cuadrado de una suma de n término
- Conocer y familiarizarse con el uso de herramientas TIC que ayudan al alumno en el proceso de enseñanza-aprendizaje gracias a las representaciones gráficas

Esta sesión contribuirá a desarrollar la competencia matemática a través de las siguientes competencias generales:

- Pensar y razonar: el alumno deberá entender el concepto de identidad notable y lo que se quiere conseguir con las actividades que se proponen. Además de pensar sobre las limitaciones de la demostración.
- Argumentar: esta competencia se trabaja desde el punto de vista de que el alumno debe argumentar que es lo que ocurre al realizar las diferentes acciones que propone el applet y porqué. También le permite deducir lo que va a ocurrir al realizar una determinada acción y verificar si su hipótesis era correcta o no.
- Comunicar: esta competencia se desarrolló gracias al hecho de que el alumno debe interpretar que es lo que se quiere conseguir con la actividad y ser capaz de expresar los resultados que obtiene y porqué los obtiene.
- Plantear y resolver problemas: en este caso se muestra al alumno que existen otro tipo de problemas matemáticos, que son las demostraciones. En concreto se les ofrece una herramienta que permite verificar expresiones algebraicas que utilizarán habitualmente.
- Representar: estas actividades pueden favorecer enormemente el desarrollo de esta competencia, ya que la forma de verificar las identidades notables se realiza de forma gráfica a través de los diferentes applets. Además, no sólo el alumno ve la demostración, sino que es él mismo quien, modificando las representaciones que el applet ofrece, llega a verificar las identidades notables.
- Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones: el alumno utilizará los símbolos y las operaciones matemáticas para representar las identidades notables.

- Uso de herramientas y recursos: esta actividad incluye el uso del ordenador y de Internet para poder acceder y trabajar con los diversos applets de GeoGebra.

A continuación, se describe el **protocolo de actuación** de la sesión 3:

Se les entregará a los alumnos las fichas de las actividades que se van a realizar en esa sesión, Anexos III, IV y V.

Inicialmente se les preguntará a los estudiantes si recuerdan qué son las identidades notables y cómo se definen, posteriormente se pasará a realizar las actividades del PG. Los alumnos accederán al applet de GeoGebra y podrán ir actuando conforme a las fichas de actividades y resolviendo las preguntas que se plantean. Además, se permitirá a los alumnos que deduzcan ellos mismos los resultados y, posteriormente, mediante el uso del proyector el profesor irá siguiendo los pasos que se indican en las fichas y resolviendo las preguntas, de este modo los alumnos podrán comprobar si sus respuestas son correctas o no.

Los resultados que vayan obteniendo los deberán de anotar en las fichas de actividades para posteriormente entregárselas al profesor y que este las pueda evaluar.

6. EXPERIENCIA EN EL AULA

6.1. El centro: I.E.S. Santa Clara

El I.E.S. Santa Clara es un instituto público situado en el centro de Santander en un edificio emblemático, se trata, como señala la página web del instituto, de un referente de la ciudad, considerado por muchos como el instituto “de toda la vida” (I.E.S. Santa Clara, s.f.).



Figura 1: I.E.S. Santa Clara

Atendiendo a la información mencionada por el director del centro durante la reunión de la Comisión de Coordinación Pedagógica, a la que tuve oportunidad de asistir en mi periodo de prácticas, actualmente forman parte de la comunidad educativa 120 profesores y alrededor de 1.600 alumnos, de los cuales 400 cursan estudios a distancia. En él se imparten enseñanzas de ESO, Ciclos formativos (de grado medio y superior), Bachilleratos (diurno y nocturno) con modalidades de Ciencias, Sociales, Artes y Bachillerato Internacional.

El contexto socioeconómico en el que se enmarca el centro es muy heterogéneo, debido, en gran medida, a la amplia oferta educativa que imparte, tal y cómo afirma el Jefe de Estudios del I.E.S. Santa Clara: “en las enseñanzas obligatorias es más habitual encontrarse con más alumnos procedentes de clases medias-bajas o bajas, por las características del entorno y la obligatoriedad de la etapa, por el contrario, en los estudios superiores se da una mayor variedad, en este caso, predomina la clase media y media-alta, que acuden al centro una vez finalizadas las etapas que se imparten en los centros

concertados y en este caso no tienen por qué pertenecer al entorno más próximo al centro”.

Durante las prácticas observé que es frecuente encontrarse casos de familias desestructuradas, y no resulta extraño que existan alumnos que viven situaciones personales dramáticas, que necesitan apoyo para solucionar sus problemas y que buscan ayuda en el profesorado (estos datos han sido confirmados por Belén Rodríguez, especialista en pedagogía terapéutica e integrante del Departamento de Orientación del I.E.S. Santa Clara)

El desarrollo de las actividades se ha llevado a cabo en diferentes grupos de educación secundaria. Por un lado, la actividad 1 se ha desarrollado en dos grupos de 2º de ESO, la actividad 2 únicamente se ha desarrollado en uno de los grupos de 2º de ESO, y, por otro lado, las actividades 3, 4 y 5 se han llevado a cabo en un grupo de 4º de ESO.

A continuación, se describen las principales características de cada uno de los grupos donde se han desarrollado las actividades del PG.

2º de ESO (Grupo 1)

Este grupo fue mi principal grupo de trabajo durante las prácticas y el elegido para el desarrollo e impartición de la Unidad Didáctica, Expresiones algebraicas y ecuaciones de primer grado. Las actividades 1 y 2 descritas en el apartado 5.1 Descripción de las actividades, se enmarcan en esta Unidad Didáctica.

Se trata de un grupo muy numeroso, 27 alumnos concretamente, 12 chicos y 15 chicas. La mayoría de los profesores de este grupo están de acuerdo en afirmar que es una clase complicada, en la que tienen que estar constantemente mandando callar, la mayoría ni atienden, ni hacen los ejercicios que se les propone, hay que estar llamando la atención a los alumnos reiteradamente y cuesta mucho mantener el orden y dar las clases. El grupo cuenta con 4 repetidores, 2 chicos y 2 chicas, y un alumno que el año anterior había terminado el curso con adaptación curricular, pero que este año sigue la

clase sin grandes problemas y no requiere ningún tipo de adaptación. Hay varios alumnos a los que les cuesta seguir las clases, de hecho, con el objetivo de ayudar a ciertos estudiantes se decide, junto con el Departamento de Orientación, que una profesora, especialista en Pedagogía Terapéutica, entre en el aula un día a la semana para dar apoyo a la profesora titular y atender a aquellos alumnos que lo necesiten. Además, otro día a la semana hay dos profesores de matemáticas en el aula, la profesora titular y un profesor de apoyo. Esta medida de apoyo, con dos profesores de matemáticas en la clase un día a la semana, se lleva a cabo este año en el instituto en los grupos de ESO del centro.

2º de ESO (Grupo 2)

Se trata de un curso con 25 alumnos. En general, tal y cómo afirma su profesor de matemáticas, Andrés de Lucio, es un curso con buenos resultados académicos. En el grupo encontrados 1 alumno que repite 2º de ESO y tiene adaptación curricular significativa en matemáticas, 1 alumno que ha repetido 1º y 2º de ESO, 1 alumno que repite 2º de ESO y 1 alumno que sale del aula dos días a la semana para recibir clases de apoyo de matemáticas con una profesora del Departamento de Orientación, especialista en Pedagogía Terapéutica. El ambiente de trabajo en el aula es agradable, según la opinión del profesor, esto es debido a que la mayor parte de los alumnos estuvieron con él también en el curso anterior y por lo tanto se conocen bastante bien, lo que favorece el trabajo y el aprendizaje en el aula.

Atendiendo a lo que observé el día de la experiencia, los estudiantes parecen más interesados en la materia que el otro grupo de 2º de ESO, respetan los turnos de palabra y es posible debatir y trabajar con ellos de una forma ordenada.

4º de ESO

En este grupo son 24 alumnos, 10 chicos y 14 chicas. Es un grupo de alumnos bastante heterogéneo, hay 7 repetidores, 2 chicos y 5 chicas. Hay 2 alumnas, una de ellas repetidora, que tienen pendientes las matemáticas del

curso anterior. Observo que hay alumnos que siguen la clase sin problemas, otros copian sin entender nada y otros directamente no hacen nada, sólo hablar entre ellos e interrumpir constantemente el ritmo de la clase.

Relacionado con los recursos TIC del centro, el I.E.S. Santa Clara cuenta con proyector en prácticamente todas las clases y tres aulas de informática, además de ordenadores portátiles en el aula de Educación Infantil. Tal y como nos comentó el jefe del Departamento de Informática, las aulas de informática se usan durante prácticamente el 100% de las horas de apertura del centro. Para poder desarrollar la experiencia que se describe en este trabajo se accedió con antelación a los horarios de las aulas de informática, sin embargo, ninguna de las horas en las que las aulas estaban libres coincidía con las horas de clase de matemáticas de los grupos con los que se iba a realizar la experiencia, por lo que decidimos que, en todos los casos, las actividades se proyectarían en el aula de referencia, dada la imposibilidad de realizarlas en un aula de informática y que fuesen los propios alumnos quienes las desarrollaran, es decir, se usaron las técnicas “Technical-demo” y “Sherpa-at-work”, descritas anteriormente. Lo que se hizo fue proporcionar a los alumnos la ficha de la actividad que se correspondía e ir siguiendo las pautas que se indicaban, mientras ellos veían lo que ocurría en la pantalla podían resolver las preguntas que planteaba la actividad, además se invitó a los alumnos que quisieran a acercarse hasta el ordenador y manejar ellos mismos el applet correspondiente.

6.2. Análisis de la experiencia en el aula

6.2.1. Resultados Sesión 1. 2º de ESO. Grupo 1

El día en el que se desarrolló la sesión había 23 alumnos en el aula. Como era habitual con este grupo resultó complicado mantener el orden y explicarles lo que se iba a hacer, inicialmente muchos de los alumnos hacían comentarios sobre el ordenador que utilicé para hacer las prácticas, sin mostrar mucho interés en lo que realmente se les iba a mostrar. Otros, por el contrario, parecían muy interesados y pedían a sus compañeros que se mantuvieran en silencio porque deseaban atender a las explicaciones.

Ninguno había oído hablar con anterioridad del Programa GeoGebra ni del PG, cuando se lo conté y vieron que se podía hacer, la cantidad de actividades que podrían desarrollar, etc. hubo alumnos que hacían comentarios del tipo, “que guay”, “que pasada”, etc.

Atendiendo al protocolo de actuación descrito anteriormente, lo primero que se hizo fue realizar un análisis previo de lo que sabían sobre las igualdades, ecuaciones y resolución de ecuaciones, algunos se acordaban de algo, pero la mayoría no tenían muy claro lo que era y cómo resolvían las ecuaciones. Al explicarles la dinámica de la actividad y tras ver algún ejemplo, los alumnos, por lo general, sabían lo que tenían que hacer y participaban cuando se les preguntaba sobre cómo resolver las ecuaciones que iban apareciendo. Hubo tres alumnos que se ofrecieron voluntarios para salir al ordenador a manejar ellos mismos el applet, todos supieron manejar los mandos de la balanza sin problemas y salvo un alumno, todos dieron los pasos correctos para resolver las ecuaciones.



Figura 2: PG llevado al aula. Sesión 1

Relacionado con los resultados de las fichas, la mayoría de los alumnos, 20 concretamente, tenían anotadas las 6 ecuaciones que se resolvieron con el applet, una alumna tenía escritas 5, otro alumno tenía escritas 3, pero en ninguna estaba escrito el resultado y hay un chico que entregó la ficha en blanco.

De los 23 alumnos, 4 tenían escritas las soluciones correctas de todas las ecuaciones.

Igualdad	Solución
$8x + 8 = 9x + 3$	$x = 5$
$4x + 1 = 9x$	$x = \frac{1}{5}$
$5x + 3 = 4$	$x = \frac{1}{5}$
$4x + 2 = 6x + 1$	$x = \frac{1}{2}$
$2x + 4 = 6$	$x = 1$
$8x + 8 = 7x + 9$	$x = 1$

Figura 3: Ficha actividad 1 “La Balanza”. Ecuaciones correctas

Del resto de alumnos, 10, anotaban como solución la ecuación simplificada que se obtiene con el applet, es decir, no despejaban la x , y el resto han cometido fallos al escribir la solución o la han dejado en blanco.

Igualdad	Solución
$8x + 4 = 5x + 6$	$2x = 2$
$8 = x + 2$	$8 = x$
$3x + 1 = 8x$	$1 = 5x$
$7x$	

Figura 4: Ficha Actividad 1 “La Balanza”. Ecuaciones simplificadas, pero sin resolver

Podemos concluir que los alumnos de este grupo entendieron el símil que se les presentaba para profundizar en el concepto de ecuación y sabían lo que había que hacer en la actividad. Sin embargo, me dio la impresión de que no veían la relación entre cómo se resolvían las ecuaciones con ayuda del applet y cómo ellos lo hacen con lápiz y papel, hecho que contrasta de manera significativa con los comentarios de varios de los profesores que llevaron a cabo esta misma actividad, que destacaban cómo los alumnos deducían ellos mismos las propiedades de las ecuaciones y que les ayudó a comprender mejor la transposición de términos.

6.2.2. Resultados Sesión 1. 2º de ESO. Grupo 2

El día en el que se realizó la sesión había 21 alumnos en el aula. En este otro grupo los alumnos atendieron interesados las explicaciones sobre lo qué es el programa GeoGebra y el PG, en este caso una alumna comentó que su hermano mayor le había hablado de GeoGebra y tenía una vaga idea de lo que era y para que se utilizaba.

Se les preguntó sobre el concepto de igualdad, ecuación y cómo se resuelven ecuaciones y, aunque las palabras utilizadas no eran quizá las más apropiadas, sí que parecía que se acordaban de estos conceptos y de cómo se resolvían las ecuaciones.

Al igual que ocurrió con el grupo anterior, tras las explicaciones, todos entendieron, aparentemente, la dinámica de la actividad. Salieron un total de 5 alumnos a manejar la balanza, dos de ellos, salieron por su propia iniciativa, pero ante la falta de más voluntarios, fue necesario animar un poco a otros tres para que salieran, había alguno que directamente se negó. Los alumnos desarrollaban correctamente la actividad, aunque a unos les costaba más que a otros, básicamente necesitaban más tiempo para pensar los pasos que tenían que dar. También se dio el caso de una alumna que no daba los pasos correctos, sin embargo, se le volvió a explicar el concepto de que la balanza siempre tiene que estar en equilibrio, y que se tenía que fijar en la varilla que aparece en el medio, que indica, si está o no en equilibrio. Después de decirle cual era el primer paso que tenía que dar supo seguir por si misma.

Atendiendo a los resultados de las fichas, indicar que de las 7 ecuaciones que se resolvieron, sólo 3 alumnos tienen anotados los resultados de las 7, 12 alumnos tienen anotadas 6, 1 alumno tiene 5, 2 alumnos 4 y 3 alumnos 3, y no todos los alumnos tienen anotadas las mismas ecuaciones.

Del total de alumnos, 8 tienen anotados los resultados correctos de todas las ecuaciones que habían anotado.

En las fichas nos encontramos los siguientes errores:

- Tal y como ocurrió en el otro grupo, no indican el resultado final, es decir, únicamente escriben el resultado que da el applet, sin despejar la x . Este error lo comenten dos alumnos y se corresponde con alumnos que sólo han escrito 3 y 4 ecuaciones en la ficha de resultados.
- Escriben como solución igualdades incorrectas ($1=5$ y $x=5X$). Esto lo hacen 3 alumnos.

Igualdad	Solución
$8x+4=6x+6$	$x = \frac{2}{2} = 1$
$5=x+2$	$3=x$
$3x+1=8x$	$1=5$
$8x+2=7x+5$	$x=3$

Igualdad	Solución
$8x+4=6x+6$	$x = \frac{2}{2} = 1$
$5=x+2$	$x=7$
$7x+7=8x+1$	$x=5x$
$8x+2=7x+5$	$x=3$
$6x+4=8x+1$	$x = \frac{3}{2}$

Figura 5: Ficha Actividad 1 "La Balanza". Igualdades erróneas

- Indican la solución de forma incorrecta, ya que ponen el signo igual sin atender a su significado. Este error lo comenten 3 alumnos.

Igualdad	Solución
$8x+4=6x+6$	$x=1$
$5=x+2$	$3=x$
$3x+1=8x$	$1=5x = \frac{1}{5}$
$7x+7=8x+2$	$x=5$
$8x+2=7x+5$	$x=3$
$6x+4=8x+1$	$3=2x = \frac{3}{2}$

Figura 6: Ficha Actividad 1 "La Balanza". Error en la utilización del signo "="

De la misma forma que pasó con el otro grupo considero que los alumnos sí comprendieron el símil que se hace entre una balanza en equilibrio y una ecuación. Del mismo modo, salvo el caso de la chica que no sabía inicialmente que era lo que tenía que hacer, el resto lo hizo correctamente. En este caso tampoco puedo afirmar que los alumnos vieran la relación entre lo que hacían al manejar la balanza y como resuelven ellos las ecuaciones.

6.2.3. Resultados Sesión 2. 2º de ESO. Grupo 1

Así como ocurrió en la sesión anterior, el clima del aula no era favorable, los alumnos hablaban entre ellos sin atender a las explicaciones y no respetaban los turnos de palabra, por lo que aquellos alumnos que planteaban sus dudas no eran capaces de entender las explicaciones porque alguien interrumpía para comentar algo o para plantear sus propias dudas, aunque fuesen las mismas que se estaban tratando de resolver.

Siguiendo el protocolo de actuación descrito, al comenzar la clase se pregunta a los alumnos si han resuelto o no las primeras cuestiones que planteaba la actividad, y, entre aquellos que lo habían intentado, únicamente 6 alumnos, ninguno lo había hecho porque no entendían el significado de la frase: “La proporción entre el largo y el ancho de un rectángulo es de 4 a 3”. Algunos alumnos, el día que les entregó la ficha ya me preguntaron qué significaba eso, y se lo expliqué, pero aun así, no habían sabido responder a las preguntas. El día de la sesión les expliqué con ayuda del applet de GeoGebra y en la pizarra, con diferentes ejemplos, el concepto de proporcionalidad y la expresión “la proporción es de 4 a 3”, pero costaba mucho que lo entendieran.

A continuación, se pasó a resolver las cuestiones que planteaba la actividad, se intentó que fuesen ellos quienes debatieran sobre las soluciones, pero no eran capaces de interpretar los enunciados ni responder correctamente a las preguntas que se les formulaban; en algún caso particular, con mi ayuda, encontraban la solución, pero por lo general, era yo quien se la tenía que dar.

En mi opinión el nivel de esta actividad no es apropiada para 2º ESO, los alumnos de esa edad no están familiarizados con el vocabulario que se emplea y considero que se debería realizar en 3º o 4º.

6.2.4. Resultados Sesión 3. 4º de ESO

El día de la sesión había 15 alumnos en el aula, aparentemente se muestran interesados por saber qué es lo que se va a hacer con el ordenador. Al hablarles sobre GeoGebra y el PG ninguno parece conocerlo.

Se les explica cómo se va a desarrollar la sesión y se empieza a trabajar en las actividades. Inicialmente, soy yo la que maneja el applet, para que ellos vean cómo funciona. Después de responder a las cinco primeras preguntas de la Actividad 3, son los alumnos quienes salen a manejar el ordenador, en total salieron tres alumnos. Ninguno tuvo problemas para seguir las pautas que indicaba la actividad con el ordenador.



Figura 7: PG llevado al aula. Sesión 3. Actividades 4 y 5

Relacionado con las preguntas que se planteaban en la actividad, las respuestas se debatían entre todos, en la mayoría de los casos, los alumnos que seguían las explicaciones y la dinámica de la clase eran capaces de encontrar las soluciones correctas a las preguntas, aunque no a todas. Cabe destacar el caso de un chico que era capaz de visualizar la solución gráficamente de manera muy rápida, mientras que al resto les costaba bastante más tiempo, cuando se lo decían lo veían claramente, pero inicialmente no.

Atendiendo a las respuestas que los chicos escribieron en las fichas de las actividades cabe destacar que: 5 alumnos apenas escribieron nada en las fichas, dos de ellos las entregaron completamente en blanco y los otros respondieron a casi todas las preguntas de la actividad 3, pero a ninguna más. El resto de los alumnos sí que iban anotando los resultados, aunque considero importante resaltar que ninguno de ellos ha respondido a todas las preguntas y muchas de las preguntas las han respondido parcialmente, a pesar de haber respondido a todo en voz alta durante la clase. Por lo general han dejado de responder a las preguntas del tipo: ¿por qué crees que sucede eso?, ¿qué puedes deducir de eso? Por último, mencionar que, ningún alumno ha llegado a deducir cómo se calcularía el cuadrado de una suma de n términos, que era, entre otras cosas, uno de los objetivos de la Actividad 4.

En cuanto a los fallos cometidos en esta actividad, destacar que, no se ven en las fichas errores en las respuestas, únicamente el caso que se ve en la Figura 8, en la que la alumna escribe $(a + b) = (a - b)$.

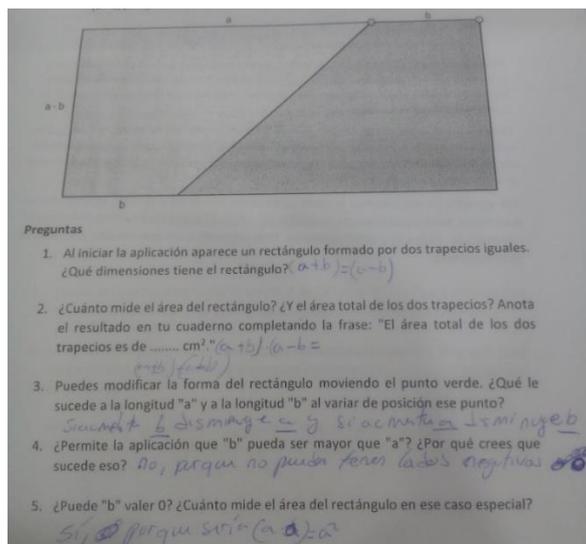


Figura 8: Ficha Actividad 3 “Suma por diferencia”. Error pregunta 1

En este caso, atendiendo a lo observado durante la sesión y a las respuestas escritas en las fichas de las actividades, considero que muchos alumnos, guiados por los pasos que se indican en la actividad, veían como se cumplían las identidades notables, mientras que otros no, creo que no encontraban sentido a esas demostraciones. Este dato está en relación con lo que comentaban los profesores M^a del Carmen y Rafel, que como ya hemos indicado llevaron al aula estas mismas actividades con alumnos de 2º ESO, ellos afirmaban que los alumnos necesitaban más ayuda para entender este tipo de demostraciones. Desde mi punto de vista, al igual que comentaba Manuel Sada, “la visualización en matemáticas es un recurso que hay que aprovechar”, porque, aunque para muchos estudiantes resulte difícil relacionar lo que ven gráficamente con las fórmulas que escriben, es esencial que los alumnos encuentren el significado a esas fórmulas algebraicas, ya que será lo que le dé sentido a las matemáticas.

María del Carmen y Rafael opinan que las actividades de las igualdades notables son más confusas, consideran que, en general, no es fácil entender este tipo de demostraciones visuales. En este caso los alumnos necesitan más ayuda para entenderlas ya que se ven muchas letras que no saben cómo utilizar y no se ven números por ningún sitio. Proponen que la actividad permitiera conocer lo que miden los lados de las figuras, en ese caso sólo se deberían permitir usar números naturales

6.3. Valoración de los alumnos/as

Tal y cómo se comentó en el apartado 5 uno de los objetivos de llevar al aula las actividades del PG era evaluar el impacto que estas actividades tienen sobre los alumnos. Por este motivo resultaba esencial diseñar un instrumento que permitiera conocer cómo han visto los alumnos las experiencias desarrolladas en el aula. En este caso el instrumento elegido ha sido un cuestionario cerrado formado por siete preguntas y un apartado de observaciones al final, en el que el alumno puede escribir libremente aquellos aspectos relacionados con las actividades que considere relevantes. En este cuestionario se solicita al alumno que valore cada una de las actividades del PG que ha tenido la oportunidad de desarrollar, además de una valoración sobre la utilización de GeoGebra en la clase de matemáticas. La primera pregunta que se les hace es si han leído las instrucciones de la actividad. En este caso las posibles respuestas son “Sí” y “No”; las otras seis preguntas atienden a cómo valoran ellos las actividades que han realizado. En este caso el alumno debe responder “Nada”, “Poco”, “Bastante” o “Mucho”.

Se han llevado a cabo encuestas en todos los grupos en los que se han realizado actividades del PG. Sin embargo, para cada grupo el cuestionario que se les presenta varía en función de las sesiones de trabajo que hayan realizado con los applets del PG. De este modo, en el Anexo VI se muestra la encuesta realizada por el grupo 1 de 2º de ESO, en este caso se les pregunta por cada una de las actividades que han realizado, la Actividad 1 y la Actividad 2, por separado. En el Anexo VII se puede ver el cuestionario realizado por el grupo 2 de 2º de ESO, que al haber realizado únicamente la Actividad 1: La Balanza, sólo se les pregunta por dicha actividad. Por último, en el Anexo VIII se presenta la encuesta realizada por el grupo de 4º de ESO, este grupo realizó las actividades relacionadas con las igualdades notables, Actividades 3, 4 y 5, y se les pide que las valoren de forma conjunta, ya que en este caso la temática y tipo de actividades que se realizan son similares.

En el Anexo IX se muestran en detalle los resultados obtenidos de las encuestas realizadas. Quiero indicar aquí, a modo de resumen, que más del 60%

de los alumnos manifiestan que les ha gustado “Mucho” o “Bastante” usar GeoGebra para aprender matemáticas y que un porcentaje elevado, más de la mitad, considera que las actividades les han ayudado a entender mejor los conceptos que en ellas se trabajaban. Relacionado con el resto de las cuestiones notamos que existe una gran diversidad en las respuestas, lo que no nos permite establecer unas conclusiones generales que podamos aplicar a todos los grupos en los que se han desarrollado las actividades.

7. CONCLUSIONES

Tal y como se expuso en la sección 1 de este TFM uno de los objetivos era analizar la relación existente entre el uso de las TIC y la enseñanza de las matemáticas. Después de investigar sobre esta temática estamos en condiciones de afirmar que las TIC son una poderosa herramienta que el docente debería de usar en el aula. Las matemáticas son una ciencia deductiva y mediante deducciones lógicas es posible encontrar las soluciones a los problemas, pero esto no se opone con dotarles de una dimensión experimental, la cual está cada vez más desarrollada gracias al avance de las tecnologías (Artigue et al., 2012).

Desde diversos organismos y organizaciones europeos (Orden ECD/65/2015, de 21 de enero) se incide sobre la importancia de educar a la ciudadanía en lo que se ha denominado competencias clave, la cuales integran conocimientos con base conceptual, conocimientos procedimentales y un conocimiento basado en actitudes y valores. Este hecho se traduce en un nuevo enfoque metodológico con importantes cambios asociados al proceso de enseñanza-aprendizaje y en este sentido, la Educación Basada en la Indagación juega un papel fundamental y prueba de ello son los diversos proyectos que se han puesto en práctica para promover este tipo de aprendizaje y que hemos comentado previamente, sección 2.2.

Relacionado con el Proyecto Gauss, considero que es un recurso con un elevado potencial, que a pesar de las dificultades a las que ha tenido que enfrentarse, relacionadas con actualizaciones a nivel de software (descritas en

la sección 3.2) ha sido capaz de adaptarse y seguir al alcance de la comunidad educativa, ofreciendo materiales de alta calidad. El PG es algo más que un conjunto de ejercicios de matemáticas interactivos, en los que el alumno resuelve manejando el ordenador los mismos ejercicios que se encuentra en su libro de texto. Las actividades del PG permiten al alumno manipular y experimentar con applets de diversas temáticas, lo que le ayudará a comprender mejor determinados conceptos o propiedades, le guiará en la búsqueda de estrategias para la resolución de problemas o incluso para encontrar la respuesta a un juego.

El PG incluye casi 600 actividades de todos los niveles de educación no universitaria, sin embargo, es en la ESO donde podemos encontrar la mayor cantidad de recursos. Esta diferencia es más notable si nos centramos en el ámbito del álgebra, donde vemos que para el nivel de ESO hay 27 actividades y sólo 1 para Bachillerato. Considero que el nivel de las actividades parece un poco elevado y en bastantes ocasiones no se corresponde con el nivel que indican desde la página web, ejemplo de ello son las actividades relacionadas con las identidades notables, que están dirigidas a los tres primeros cursos de la ESO pero que, sin embargo, creo que son actividades que cuesta mucho ver a los alumnos de esos cursos, incluso a los de cursos superiores. Prueba de esto lo vemos en la experiencia llevada a cabo en el I.E.S. Bernardino del Campo (véase sección 4.2) y en la experiencia realizada en el marco de este TFM.

Relacionado con nuestra propia experiencia en el aula con las actividades del PG podemos afirmar, de manera general, gracias a la información obtenida a través de las encuestas, que a los alumnos les ha gustado realizar este tipo de actividades y que la experiencia les ha parecido útil. También hemos podido comprobar que los alumnos se defienden perfectamente con el ordenador cuando se les pide que sean ellos quienes manejen los applets. Además, en la mayoría de los casos, los alumnos se mostraban bastante participativos, respondían cuando se les preguntaba y querían salir a manejar los applets.

Sin embargo, a pesar de las altas expectativas con las que partíamos, los resultados de llevar al aula algunas de las actividades del PG relacionadas con el álgebra no han sido tan buenos como hubiera cabido esperar, hecho que

difiere de otras experiencias desarrolladas con las mismas actividades en otros centros (descritas en la sección 4.2).

En relación con la actividad de La Balanza, como ya se ha comentado previamente, los alumnos de ambos grupos parecían entender el símil entre balanza y ecuación y sabían lo que se les pedía hacer en la actividad, pero, no veían la relación entre la forma de resolver las ecuaciones con la balanza y como ellos lo hacían con papel y lápiz, por lo que creo que muchos no le encontraban sentido a lo que estábamos haciendo, no le veían la utilidad. Prueba de esto son los resultados de las fichas que entregaron con las ecuaciones resueltas, en el grupo 1 sólo 4 alumnos tenían anotadas todas las ecuaciones con la solución correcta, y del grupo 2 sólo 3. Aparte de esto es habitual encontrarse como respuestas las ecuaciones simplificadas que se obtiene con el applet, así como igualdades incorrectas, lo que demuestra que en la mayoría de los casos los alumnos no entendían bien lo que debían hacer, simplemente copiaban lo que veían en la pantalla.

Por otro lado, la actividad de Proporcionalidad resultó ser demasiado compleja, principalmente, por el vocabulario utilizado, los alumnos no entendieron el significado de: “*la proporción es de 4 a 3*”. A pesar de explicar de diferentes formas el enunciado del problema y de las preguntas que se planteaban, los chicos no sabían responder y en la mayoría de las ocasiones era yo quien se las tenía que contestar.

Por último, relacionado con la experiencia desarrollada con el grupo de 4º de ESO, de identidades notables, he de destacar el caso de un alumno que respondía con facilidad y rapidez las preguntas que se planteaban y mostraba un gran interés por ver lo que iba pasando a medida que avanzábamos en las preguntas. Sin embargo, a la mayoría les costaba verlo, únicamente lo entendían después de explicárselo detalladamente y no creo que le sacaran provecho a la actividad. Es decir, parece que esta actividad le iba muy bien a un alumno, pero no a la mayoría.

A mi modo de ver, resulta difícil valorar el potencial de estas actividades en base únicamente a experiencias puntuales, ya que, aunque en este caso los resultados no han sido del todo satisfactorios, sí que lo habían sido, al menos en el caso de la actividad de “La Balanza”, en las experiencias descritas en la sección 4.2.

Para concluir, me gustaría indicar que, independientemente de los resultados, el PG es una buena herramienta para usar en el aula ya que permite, no sólo aprender matemáticas, sino que, gracias a la diversidad de actividades que ofrece, promueve una educación basada en la indagación y en el uso de las TIC, aspectos clave si queremos, tal y como indica la legislación, educar en competencias. Por lo tanto, si los objetivos de la educación van cambiando o evolucionando, al igual que lo hace la sociedad, la economía o la tecnología, ¿por qué no cambiar también el modo en el que enseñamos?, al fin y al cabo, tal y como dijo Heráclito: “Lo único constante es el cambio”.

8. BIBLIOGRAFÍA Y WEBGRAFÍA

- Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática Análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.
- Álvarez, J.L. y Losada, R. (2011A). El Proyecto Gauss en la Escuela 2.0. *Boletín de RIATE*, 2, 21-25.
- Alvarez, J.L. y Losada, R. (2011B). Los applets de funciones en el Proyecto Gauss. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*. 58, 25-37.
- Arrieta, J.E. (2013). *Las TIC y las matemáticas, avanzando hacia el futuro*. Trabajo Fin de Grado Maestro en Educación Primaria. Universidad de Cantabria. Cantabria.
- Artigue, M., Dillon, J., Harlen, W. & Léna, P. (2012). Learning through inquiry. The Fibonacci Project Resources. Recuperado de <http://www.fibonacci-project.eu/>
- Artigue, M. (2017). Educación matemática basada en la indagación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 20 (3), 593-609.
- BOC (25 de mayo de 2007). Decreto 57/2007, de 10 de mayo, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Cantabria
- BOC (5 de junio de 2015). Decreto 38/2015, de 22 de mayo, que establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria.
- Cabero, J. (2007). Las necesidades de las TIC en el ámbito educativo: oportunidades, riesgos y necesidades. *Tecnología y Comunicación Educativas Año 21*, 45.
- Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. M^a M. Paradea. XVI Simposio SEIEM. Baeza. Recuperado de http://fgm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/XVISeiem_Castro.pdf
- Coll, C. (2008). Aprender y enseñar con las TIC: expectativas, realidad y potencialidades. *Boletín de la Institución Libre de Enseñanza*, 72, 113-126.

- Drijvers, P. (2011). From 'Work-and-work-by' to 'Sherpa-at-work'. *Mathematics Teaching* 222, 22-26. Recuperado de <https://www.atm.org.uk/write/MediaUploads/Journals/MT222/Non-Member/ATM-MT222-22-26.pdf>
- Esteve, F. (2009). Bolonia y las TIC: de la docencia 1.0 al aprendizaje 2.0. *La Cuestión Universitaria*, 5, 58-67.
- Godino, J.D., Font, V (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. *Matemáticas y su Didáctica para Maestros. Manual para el Estudiante*.
- Grupo Azarquel (1991). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid, España: Síntesis.
- Hernando, R. (2013). El uso de las applets de GeoGebra en Educación Primaria. Trabajo Fin de Grado. Universidad de Cantabria, Cantabria
- Hohenwarter, M. y Lavicza, Z. (s.f). GeoGebra, its community and future. Recuperado de [Lavicza-GeoGebra-ATCM-Final.pdf](#)
- Hohenwarter, M. y Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: the case of GeoGebra. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* 27(3), 126-131, Universidad de Northampton, UK: BSRLM
- Huertas, A. y Pantoja, A. (2016). Efectos de un programa educativo basado en el uso de las TIC sobre el rendimiento académico y la motivación del alumnado en la asignatura de tecnología de educación secundaria. *Educación XX1*, 19 (2), 229-250.
- I.E.S. Pravia (s.f.). Bienvenido a las presentaciones de Rafael Losada. Recuperado de <http://www.iespravia.com/rafa/rafa.htm>
- INTEF, (s.f). ¿Qué es el INTEF? Recuperado de: <http://www.ite.educacion.es/eu/descripcion>
- INTEF, (2010). Proyecto Gauss. Una forma diferente y creativa de enseñar y aprender Matemáticas. Recuperado de: <http://www.ite.educacion.es/ca/icongreso/comunicaciones/experiencias-en-primaria/51-proyecto-gauss-una-forma-diferente-y-creativa-de-ensenar-y-aprender-matematicas-por-jose-luis-alvarez-garcia>

- Macías, D. (2007). Las nuevas tecnologías y el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, 42(4).
- MECD (2011). Proyecto Gauss. Red de Buenas Prácticas 2.0. Recuperado de <http://recursostic.educacion.es/heda/web/ca/difundiendo-buenas-practicas/224-proyecto-gauss>
- Muñoz, J.L. (s.f). José Luis Álvarez. Recuperado de: https://www.smpm.es/index.php?option=com_content&view=article&id=219:jose-luis-alvarez&catid=83&Itemid=30
- OCDE (2004). Marcos teóricos de PISA 2003 Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas. Madrid. Ministerio de Educación y Ciencia, Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo, 2004.
- Pérez, J.I. (2014). Errores algebraicos más comunes que cometen los alumnos de bachillerato. *Con-Ciencia*, 1 (2).
- Prensky, M. (2010). Nativos e Inmigrantes Digitales. Adaptación al castellano del texto original “Digital Natives, Digital Immigrants”. Cuadernos SEK 2.0.
- Rocard, M., Csermely P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H., Hemmo, V. (2007). Science Education Now: a renewed pedagogy for the future of Europe. Recuperado de https://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_en.pdf
- Rystedt, E. (2015). Encountering algebraic letters, expressions and equations: A study of small group discussions in a Grade 6 classroom. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Gotemburgo.
- Sada, M. (2012). El Proyecto Gauss en las aulas: compartiendo las experiencias entre compañeros. Segovia. Día GeoGebra. Recuperado de <https://prezi.com/qdzpzx8lfyka/el-proyecto-gauss-en-las-aulas-compartiendo-las-experiencias-entre-companeros/>
- Saráchaga, A. (2012). El Proyecto Gauss en el aula. Trabajo Final de Máster. Universidad de Cantabria, Cantabria
- UNESCO (2011). La UNESCO y la EDUCACIÓN. “Toda persona tiene derecho a la educación”. París. Recuperado de: <http://unesdoc.unesco.org/images/0021/002127/212715s.pdf>

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: IES Santa Clara	40
Figura 2: PG llevado al aula. Sesión 1	44
Figura 3: Ficha actividad 1 “La Balanza”. Ecuaciones correctas	45
Figura 4: Ficha Actividad 1 “La Balanza”. Ecuaciones simplificadas, pero sin resolver	45
Figura 5: Ficha Actividad 1 “La Balanza”. Igualdades erróneas	47
Figura 6: Ficha Actividad 1 “La Balanza”. Error en la utilización del signo “=” ..	47
Figura 7: PG llevado al aula. Sesión 3. Actividades 4 y 5	49
Figura 8: Ficha Actividad 3 “Suma por diferencia”. Error pregunta 1	50
Figura 9: Actividad 1: La Balanza	62
Figura 10: Actividad 2: Proporcionalidad	64
Figura 11: Actividad 3: Suma por diferencia	67
Figura 12: Actividad 4: Cuadrado de una suma	71
Figura 13: Actividad 5: Cuadrado de un binomio	74
Figura 14: Respuestas a la pregunta: ¿Te ha gustado usar GeoGebra para aprender Matemáticas?	81
Figura 15: Actividad 1. Respuesta a la pregunta: ¿Has leído las instrucciones de la actividad?	82
Figura 16: Actividad 1. Respuesta a la pregunta: ¿Has entendido lo que había que hacer en la actividad?	83
Figura 17: Actividad 1. Respuesta a la pregunta: ¿Has preguntado las dudas a la profesora?	84
Figura 18: Actividad 1. Respuesta a la pregunta: ¿Has usado el cuaderno de trabajo para tomar apuntes o realizar cálculos?	84
Figura 19: Actividad 1. Respuesta a la pregunta: ¿Te ha gustado realizar esta actividad?	85

Figura 20: Actividad 1. Respuesta a la pregunta: ¿Te han ayudado las actividades a entender mejor los conceptos que has trabajado? 85

Figura 21: Actividad 2. Respuestas a la pregunta: ¿Has leído las instrucciones de la actividad? 86

Figura 22: Actividad 2. Respuestas a la pregunta: ¿Has entendido lo que había que hacer en la actividad? 87

Figura 23: Actividad 2. Respuestas a la pregunta: ¿Has preguntado las dudas a la profesora? 87

Figura 24: Actividad 2: Respuestas a la pregunta: ¿Has usado el cuaderno de trabajo para tomar apuntes o realizar cálculos? 88

Figura 25: Actividad 2: Respuestas a la pregunta: ¿Te ha gustado realizar esta actividad? 88

Figura 26: Actividad 2. Respuestas a la pregunta: ¿Te han ayudado las actividades a entender mejor los conceptos que has trabajado? 89

Figura 27: Actividad 3, 4 y 5. Respuestas a la pregunta: ¿Has leído las instrucciones de la actividad? 90

Figura 28: Actividades 3, 4 y 5. Respuestas a la pregunta: ¿Has entendido lo que había que hacer en la actividad? 91

Figura 29: Actividades 3, 4 y 5. Respuestas a la pregunta: ¿Has preguntado las dudas a la profesora? 91

Figura 30: Actividades 3, 4 y 5: Respuestas a la pregunta: ¿Has usado el cuaderno de trabajo para tomar apuntes o realizar cálculos? 92

Figura 31: Actividades 3, 4 y 5: Respuestas a la pregunta: ¿Te ha gustado realizar esta actividad? 92

Figura 32: Actividades 3, 4 y 5. Respuestas a la pregunta: ¿Te han ayudado las actividades a entender mejor los conceptos que has trabajado? 93

9. ANEXOS

Anexo I

Actividad del Proyecto Gauss “La Balanza (naturales)”

Esta actividad versa sobre el uso del applet denominado: “Balanza (naturales)”. Al acceder al applet aparece un texto introductorio de la actividad y una balanza, Figura 9a. En la introducción se explica cómo una ecuación se puede asemejar a una balanza en equilibrio. Haciendo uso de este concepto de equilibrio el alumno debe encontrar la solución de las ecuaciones que propone el applet. Después de la introducción, se describe cómo hay que usar la aplicación para poder resolver las ecuaciones que se proponen. Si nos fijamos en la imagen de la Figura 9a se pueden ver los dos platillos de la balanza vacíos y debajo de cada uno de los platillos dos mandos, cada uno de un color, un mando sirve para colocar o retirar sobre el platillo cajas de valor “x” y el otro para colocar o retirar cajas de valor “1”. El alumno debe usar los mandos de la balanza para colocar sobre los platillos las cajas que representen la ecuación que aparece arriba a la izquierda, ver Figura 9b, a continuación, retirar todas las cajas de “x” y de “1” que se pueden, siempre manteniendo el equilibrio, hasta llegar a una expresión que permita deducir fácilmente cuál es el valor de “x” que verifica la ecuación, Figura 9c. Por último, en la parte de abajo de la aplicación se puede ver una hoja de cálculo, en esta hoja de cálculo, en la casilla B1 el alumno debe escribir el valor que ha obtenido de “x”, y, en la casilla C1, la aplicación indicará si es correcto o no, ver Figura 9d.

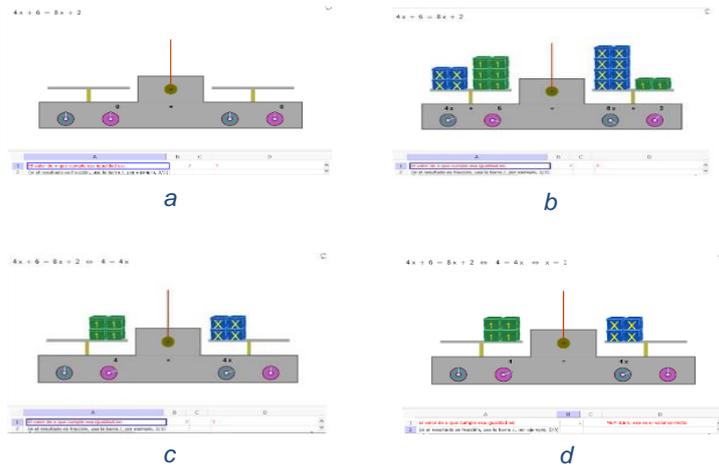


Figura 9: Actividad 1: La Balanza

Ficha de la actividad 1

Puedes imaginar una ecuación como un equilibrio entre dos expresiones que se produce para cierto valor desconocido. En la aplicación, hay un valor desconocido "x" que equilibra los dos platillos de la balanza.

Primero, usa los mandos de la balanza para colocar sobre ella las mismas expresiones que aparecen en la ecuación.

Después, reduce todo lo que puedas el contenido de los platillos (a no ser que ya no se pueda reducir más).

Para lograrlo, retira todas las cajas "x" y "1" que puedas, pero atención, siempre **la misma cantidad (de x o de 1) en ambos platillos**, para no desequilibrar la balanza: si giras un mando debes realizar el mismo giro en el otro mando del mismo color. Con esto conseguirás que en un platillo solo haya cajas "x".

Una vez reducida la ecuación, basta comparar los dos platillos para deducir fácilmente cuál es el valor desconocido de "x". Por ejemplo, si nos queda $5=3x$, cada caja "x" pesará $5/3$.

Escribe las igualdades con la solución correspondiente en la siguiente tabla:

Igualdad	Solución

Anexo II

Actividad 2: Proporcionalidad. Actividad Proyecto Gauss

En esta actividad se plantea un problema matemático con los siguientes datos: la proporción entre el largo y ancho de un rectángulo es de 4 a 3 y el área de este es de 362 cm^2 . Con estos datos se pide al alumno que averigüe cuánto miden los lados del rectángulo que cumple esas dos condiciones. La actividad incluye un total de nueve preguntas o pautas que sirven de guía al alumno y le ayudan a analizar el enunciado, a particularizar y generalizar en base a los datos que dan, a traducir del lenguaje cotidiano al algebraico y a encontrar la solución al problema. Con ayuda del applet, ver Figura 10, el alumno puede ir resolviendo las preguntas que se le plantean hasta llegar al resultado final. El applet lo que permite es variar el valor del deslizador “x” y, de este modo, modificar el tamaño del rectángulo. Si “x” es menor que 1 el rectángulo se hace más pequeño y si “x” es mayor que 1 el rectángulo se hace más grande, sin embargo, siempre se mantiene la relación de 4 a 3 entre los lados. Además, el applet muestra en todo momento el área del rectángulo que se forma en cada caso.

Problema: La proporción entre el largo y el ancho de un rectángulo es de 4 a 3. El área es de 363 cm^2 .

¿Cuánto mide cada lado?

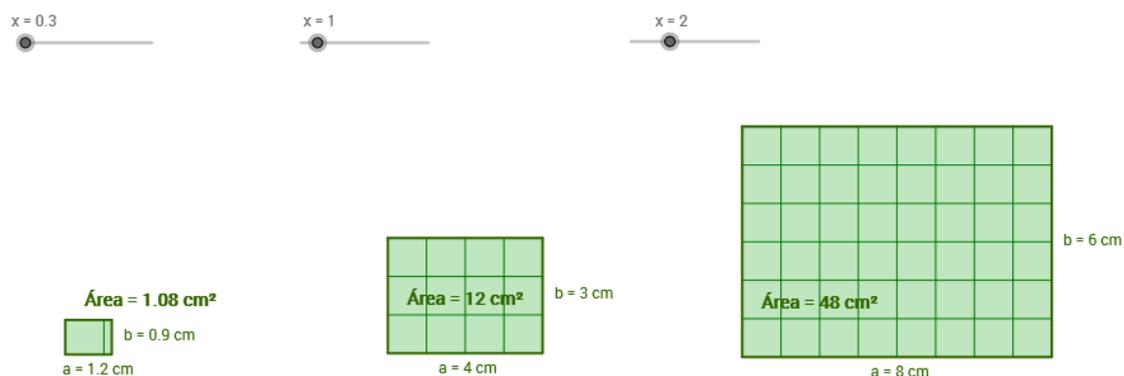


Figura 10: Actividad 2: Proporcionalidad

Ficha de la actividad 2

Vamos a resolver el siguiente problema:

La proporción entre el largo y el ancho de un rectángulo es de 4 a 3. El área es de 363 cm^2 . ¿Cuánto mide cada lado?

Como pasa muchas veces, sobre todo en Matemáticas, lo más importante no es encontrar la solución sino practicar el uso de un método general, algo así como "una serie de pasos", para resolverlo. Esto es debido a que un mismo método general se puede aplicar a una gran variedad de situaciones, así que si disponemos de una buena colección de "herramientas para atacar los problemas" estaremos bien preparados para resolverlos.

En las siguientes preguntas hemos marcado en negrita en qué consiste cada paso que te pedimos dar. En cada uno, te guiamos hacia una posible forma de resolver el problema, pero debes saber que habitualmente existen distintas maneras de resolver el mismo problema.

Preguntas

- 1. Analiza el enunciado.** Observa que hay dos condiciones que deben cumplirse a la vez: la proporción entre los lados y el área. Empezaremos con la proporción, olvidándonos por el momento de la otra condición. ¿Qué medidas, en cm, tiene el rectángulo más sencillo que cumple esa condición de que el largo entre el ancho es $4/3$?
- 2. Busca casos particulares.** Escribe en tu cuaderno las medidas de otros cinco rectángulos que cumplan esa condición. Comprueba en cada caso que la proporción se mantiene en $4:3$.
- 3. Generaliza.** ¿Es cierto que si los lados son $4x$ y $3x$ entonces para cualquier valor de x (distinto de 0) la proporción se mantiene en $4:3$? ¿Por qué? ¿Cuál sería el valor de x en cada uno de los rectángulos cuyas medidas has escrito en la pregunta anterior?
- 4. Comprueba.** Mueve el deslizador " x ". Para cada valor de x , ¿cuánto vale el lado " a "? ¿Y el lado " b "?

5. **Traduce al lenguaje matemático.** Para cada valor de x , ¿cuánto vale el área del rectángulo, es decir, ¿cómo se expresa en función de " x " el valor del producto " $a \cdot b$ "?
6. **Plantea.** Ese valor es el otro dato que nos dan (363 cm^2). Plantea la ecuación que hay que resolver igualando a 363 la expresión en " x " de la pregunta anterior.
7. **Soluciona.** Resuelve la ecuación (simplifícala primero y luego despeja x). ¿Cuántos valores posibles de x encuentras? ¿Son válidos todos?
8. **Escribe tus conclusiones.** ¿Es el valor de x lo que pide el enunciado? ¿Aparece x en el enunciado? Contesta a la pregunta del enunciado, a partir del valor de x que has encontrado, usando los mismos términos ("lados del rectángulo" en vez de " a " y " b ", las mismas unidades...) que aparecen en él.
9. **Verifica.** Siempre que puedas, debes verificar la solución que has encontrado. Esas medidas de los lados, ¿cumplen todas las condiciones del enunciado? Compruébalo también con la aplicación

Anexo III

Actividad 3: Suma por diferencia

Esta actividad, junto con las dos que se describen en los Anexos IV y V, lo que hace es verificar gráficamente las identidades notables.

Al igual que en el caso anterior la actividad propone una serie de acciones que el alumno deberá ejecutar sobre el applet, y una serie de cuestiones que le guiarán a descubrir que, efectivamente, la identidad notable que se quiere verificar se cumple. El applet consiste en un rectángulo sobre el que se pueden hacer modificaciones de los lados o intercambiar la posición de las figuras que en el aparecen.

En esta primera actividad la identidad notable que se verifica es la de suma por diferencia, que es igual a la diferencia de los cuadrados:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

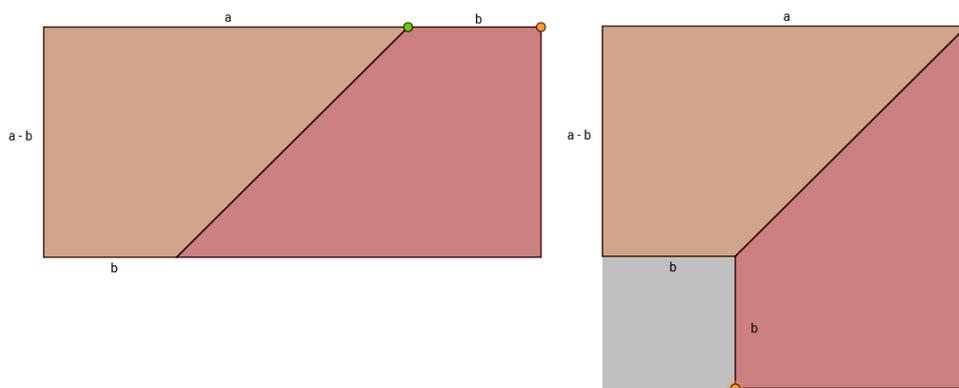


Figura 11: Actividad 3: Suma por diferencia

Las acciones y cuestiones que se plantean se basan en analizar y calcular el área de las diferentes figuras: cuadrados, rectángulos o trapecios, que se presentan, gracias a las cuales se puede comprobar que el área en todos los casos se mantiene constante.

Ficha de la Actividad 3

Aplicando algunas propiedades básicas de los números, es muy fácil demostrar que:

"suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados".

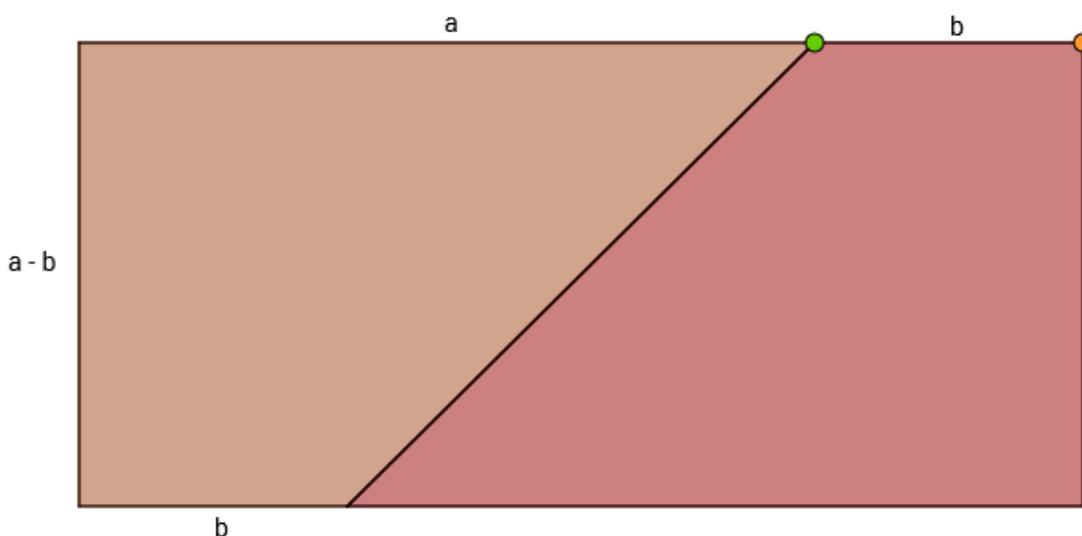
Es decir, que el resultado de multiplicar la suma de dos números por su diferencia es el mismo que si restamos los cuadrados de ambos números.

Llamando a esos números "a" y "b", una demostración sería:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Ahora vamos a comprobar geoméricamente esa misma identidad notable:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$



Preguntas

1. Al iniciar la aplicación aparece un rectángulo formado por dos trapecios iguales. ¿Qué dimensiones tiene el rectángulo?
2. ¿Cuánto mide el área del rectángulo? ¿Y el área total de los dos trapecios? Anota el resultado en tu cuaderno completando la frase: "El área total de los dos trapecios es de cm²."

3. Puedes modificar la forma del rectángulo moviendo el punto verde. ¿Qué le sucede a la longitud "a" y a la longitud "b" al variar de posición ese punto?
4. ¿Permite la aplicación que "b" pueda ser mayor que "a"? ¿Por qué crees que sucede eso?
5. ¿Puede "b" valer 0? ¿Cuánto mide el área del rectángulo en ese caso especial?
6. Reinicia la aplicación (). Mueve ahora el punto naranja hasta que aparezca un cuadrado gris. ¿Qué área tiene este cuadrado gris? Anótala en tu cuaderno así: "El área del cuadrado gris es de cm²."
7. Toda la figura es ahora un gran cuadrado. ¿Cuál es su área? Anótala en tu cuaderno así: "El área del cuadrado grande es de cm²."
8. Teniendo en cuenta las dos respuestas anteriores, ¿cuánto vale entonces el área total de los trapecios dentro de ese cuadrado grande? Completa la frase: "El área total de los dos trapecios es de cm²."
9. Compara ahora los textos anotados como respuesta a las preguntas 2 y 8. ¿Qué se deduce?
10. Ahora intenta ver la igualdad "al revés". Es decir:
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$
11. Para ello, comienza ahora en el cuadrado grande, correspondiente al 1er miembro de la ecuación: $a^2 - b^2$ y mueve a distintas posiciones el punto verde, observando lo que pasa. Después, mueve el punto naranja para volver al 2º miembro de la ecuación, es decir, al rectángulo de área:
 $(a + b)(a - b)$.

Observa que cualquier identidad funciona siempre en los dos sentidos, lo cual puede sernos muy útil. En este caso, por ejemplo, puede servirnos para quitar rápidamente los paréntesis de $(a + b)(a - b)$, pero también puede servirnos para factorizar rápidamente $a^2 - b^2$ como producto de $(a+b)$ por $(a-b)$.

Por ejemplo, si nos interesa resolver la ecuación $(x - 2)(x + 2) = 45$, quitaremos los paréntesis, pero si nos interesa simplificar $(x^2 - 4)/(x-2)$ entonces descompondremos $(x^2 - 4)$ como $(x - 2)(x + 2)$ y simplificaremos. Todo depende de lo que nos interese hacer en cada momento.

Anexo IV

Actividad 4: Cuadrado de una suma

El objetivo principal de esta actividad es verificar, inicialmente, la identidad notable “cuadrado de una suma”, que es igual al cuadrado del primero más dos veces el primero por el segundo más el cuadrado del segundo:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

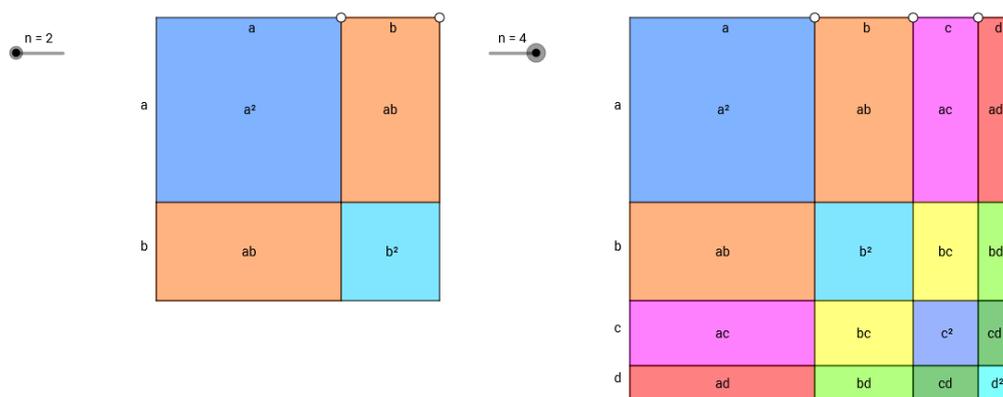


Figura 12: Actividad 4: Cuadrado de una suma

La forma de trabajar en esta actividad es similar al caso anterior. Sin embargo, a medida que se avanza en el desarrollo de las cuestiones que se plantean se llega a deducir como se podría calcular el valor de cualquier suma de n términos elevada al cuadrado. Mediante el deslizador “ n ” se puede variar el número de términos que forman la suma y encontrar el resultado de la operación.

En la Figura 12 se muestra la actividad para dos valores diferentes de “ n ”. Cuando “ n ” toma el valor 2 la identidad que se verifica es:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Cuando “ n ” toma el valor 4 la identidad que se verifica es:

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

Ficha de la actividad 4

Aplicando algunas propiedades básicas de los números, es muy fácil demostrar que:

"El cuadrado de una suma es la suma de los cuadrados MÁS el doble del producto."

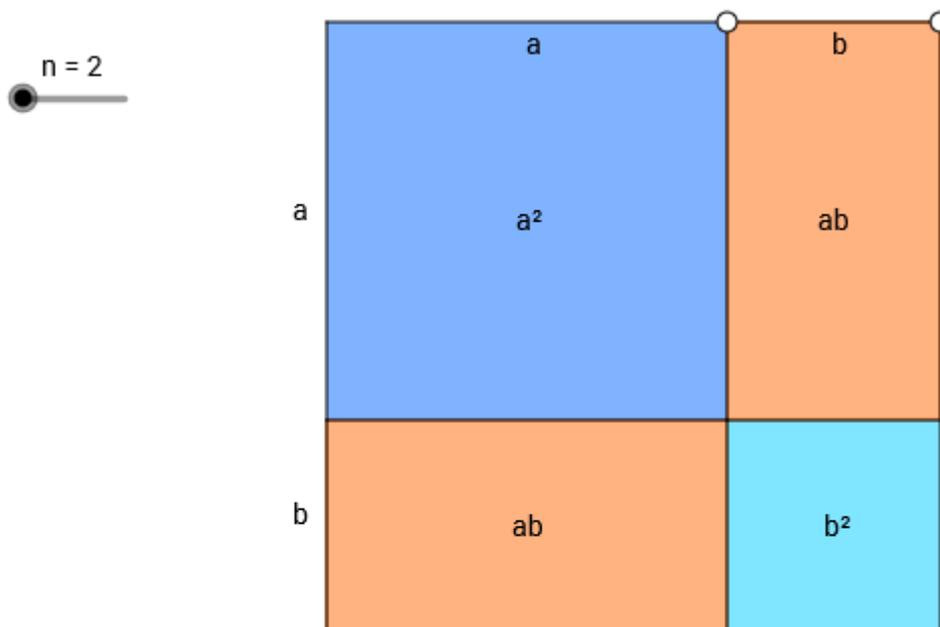
Es decir, que el resultado de elevar al cuadrado la suma de dos números es el mismo que si sumamos los cuadrados de ambos números y añadimos el doble de su producto.

Llamando a esos números "a" y "b", una demostración sería:

$$(a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$$

Ahora vamos a comprobar geoméricamente esa misma identidad notable:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$



Preguntas

1. Mueve los puntos para variar la longitud de "a" y de "b". La figura completa es siempre un cuadrado. ¿Por qué? ¿Cuánto mide cada lado de ese cuadrado?
2. Considerando el lado de ese cuadrado (tu respuesta a la pregunta anterior), ¿cuál será entonces el área de la figura completa? Anota en tu cuaderno: "El área total es cm^2 ".
3. Ahora fíjate en las 4 partes en que está dividida la figura. Expresa la suma de sus cuatro áreas de la forma más reducida que puedas. Anota en tu cuaderno: "El área total también es la suma cm^2 ".
4. ¿Qué puedes deducir de las respuestas a las dos preguntas anteriores?
5. Mueve el deslizador hasta que tome el valor 3. ¿Cuánto mide ahora el lado del cuadrado que forma la figura completa?
6. Considerando el lado de ese cuadrado, ¿cuál será entonces el área de la figura completa? Anota en tu cuaderno: "El área total es cm^2 ".
7. Ahora fíjate en las 9 partes en que está dividida la figura. Expresa la suma de sus nueve áreas de la forma más reducida que puedas. Anota en tu cuaderno: "El área total también es la suma cm^2 ".
8. ¿Qué puedes deducir de las respuestas a las dos preguntas anteriores?
9. Mueve el deslizador hasta que tome el valor 4. ¿Cuánto mide ahora el lado del cuadrado que forma la figura completa?
10. Considerando el lado de ese cuadrado, ¿cuál será entonces el área de la figura completa? Anota en tu cuaderno: "El área total es cm^2 ".
11. Ahora fíjate en las 16 partes en que está dividida la figura. Expresa la suma de sus dieciséis áreas de la forma más reducida que puedas. Anota en tu cuaderno: "El área total también es la suma cm^2 ".
12. ¿Qué puedes deducir de las respuestas a las dos preguntas anteriores?

Anexo V

Actividad 5: Cuadrado de un binomio

Por último, la actividad 5 comprueba gráficamente el cuadrado de una suma, y, también, el cuadrado de una diferencia, que es igual al cuadrado del primero menos el doble del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

La primera de las identidades, el cuadrado de una suma, ya se había comprobado con la actividad anterior, sin embargo, esa actividad no permitía comprobar de forma gráfica el cuadrado de una diferencia, que en este caso si es posible verificar.

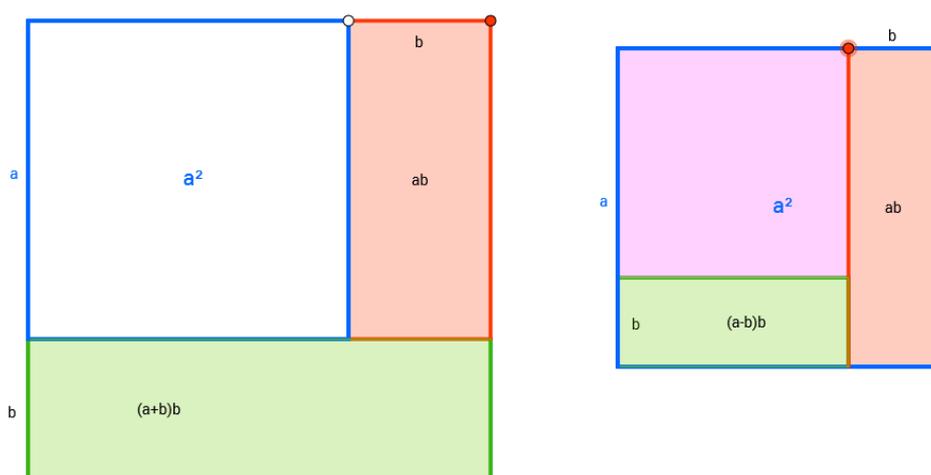


Figura 13: Actividad 5: Cuadrado de un binomio

Ficha de la Actividad 5

Un binomio es una suma o una diferencia de dos números (o expresiones numéricas). Aplicando algunas propiedades básicas de los números, es muy fácil demostrar que:

"El cuadrado de la suma es la suma de los cuadrados MÁS el doble del producto"

"El cuadrado de la diferencia es la suma de los cuadrados MENOS el doble del producto"

Llamando a esos números "a" y "b", una demostración sería:

$$(a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$$

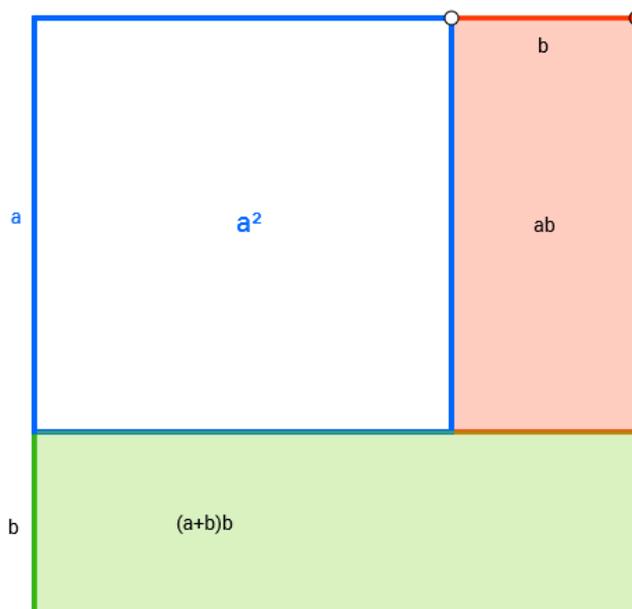
y la otra demostración sería:

$$(a - b)(a - b) = aa - ab - ba + bb = a^2 - 2ab + b^2$$

Observa que la segunda identidad puede verse como un caso particular de la primera, cuando "b" sea un número negativo:

$$(a - b)^2 = a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ahora vamos a comprobar geoméricamente estas dos identidades notables.



Preguntas

1. Mueve los puntos para variar la longitud de "a" y de "b", de forma que el punto rojo se encuentre siempre a la derecha del punto blanco. La figura completa es siempre un cuadrado. ¿Por qué? ¿Cuánto mide cada lado de ese cuadrado?
2. Considerando el lado de ese cuadrado (tu respuesta a la pregunta anterior), ¿cuál será entonces el área de la figura completa? Anota en tu cuaderno: "El área total es cm²".
3. Ahora fíjate en las 3 partes en que está dividida la figura. Expresa la suma de sus tres áreas de la forma más reducida que puedas, sin usar paréntesis. Anota en tu cuaderno: "El área total también es la suma cm²".
4. ¿Qué puedes deducir de las respuestas a las dos preguntas anteriores?
5. Ahora mueve el punto rojo hasta que quede a la izquierda del punto blanco, de forma que entonces "b" le resta su longitud al segmento "a". ¿Cuánto mide cada lado del cuadrado violeta? Anota en tu cuaderno: "El área del cuadrado violeta es cm²".
6. Observa que el área violeta también es igual al cuadrado completo, de lado "a" (y por tanto de área a^2), menos la parte recortada roja y verde.

¿Cuál es el área de la parte recortada? Según esto, "el área del cuadrado violeta es también cm^2 ".

7. ¿Qué puedes deducir de las respuestas a las dos preguntas anteriores?

Anexo VI

ENCUESTA SOBRE LA EXPERIENCIA DE LLEVAR AL AULA LAS ACTIVIDADES “LA BALANZA (ENTEROS)” Y “PROPORCIONALIDAD”, ENMARCADAS EN EL PROYECTO GAUSS Y DESARROLLADAS MEDIANTE EL SOFTWARE GEOGEBRA

Valoración de alumnos de 2º de ESO.

Pon una X en el apartado correspondiente.

1. VALORACIÓN DE LA ACTIVIDAD “LA BALANZA (ENTEROS)”

¿Has leído las instrucciones de la actividad?	SÍ		NO	
	NADA	POCO	BASTANTE	MUCHO
¿Has entendido lo que había que hacer en la actividad?				
¿Has preguntado las dudas a la profesora?				
¿Has usado el cuaderno de trabajo para tomar apuntes o realizar cálculos?				
¿Te ha gustado realizar esta actividad?				
¿Te han ayudado las actividades a entender mejor los conceptos que has trabajado?				

2. VALORACIÓN DE LA ACTIVIDAD “PROPORCIONALIDAD”

¿Has leído las instrucciones de la actividad?	SÍ		NO	
	NADA	POCO	BASTANTE	MUCHO
¿Has entendido lo que había que hacer en la actividad?				
¿Has preguntado las dudas a la profesora?				
¿Has usado el cuaderno de trabajo para tomar apuntes o realizar cálculos?				
¿Te ha gustado realizar esta actividad?				
¿Te han ayudado las actividades a entender mejor los conceptos que has trabajado?				

3. VALORACIÓN DE LA UTILIZACIÓN DE GEOGEBRA EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS

	NADA	POCO	BASTANTE	MUCHO
¿Te ha gustado usar GeoGebra para aprender matemáticas?				

ESCRIBE AQUÍ LAS OBSERVACIONES QUE CONSIDERES RELEVANTES

Anexo VII

ENCUESTA SOBRE LA EXPERIENCIA DE LLEVAR AL AULA LA ACTIVIDAD “LA BALANZA (ENTEROS)”, ENMARCADA EN EL PROYECTO GAUSS Y DESARROLLADA MEDIANTE EL SOFTWARE GEOGEBRA

Valoración de alumnos de 2º de ESO.

Pon una X en el apartado correspondiente.

1. VALORACIÓN DE LA ACTIVIDAD “LA BALANZA (ENTEROS)”

¿Has leído las instrucciones de la actividad?	SÍ		NO	
	NADA	POCO	BASTANTE	MUCHO
¿Has entendido lo que había que hacer en la actividad?				
¿Has preguntado las dudas a la profesora?				
¿Has usado el cuaderno de trabajo para tomar apuntes o realizar cálculos?				
¿Te ha gustado realizar esta actividad?				
¿Te han ayudado las actividades a entender mejor los conceptos que has trabajado?				

2. VALORACIÓN DE LA UTILIZACIÓN DE GEOGEBRA EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS

	NADA	POCO	BASTANTE	MUCHO
¿Te ha gustado usar GeoGebra para aprender matemáticas?				

ESCRIBE AQUÍ LAS OBSERVACIONES QUE CONSIDERES RELEVANTES

--

Anexo VIII

ENCUESTA SOBRE LA EXPERIENCIA DE LLEVAR AL AULA LAS ACTIVIDADES “SUMA POR DIFERENCIA”, “CUADRADO DE UNA SUMA” Y “CUADRADO DE UN BINOMIO”, ENMARCADAS EN EL PROYECTO GAUSS Y DESARROLLADAS MEDIANTE EL SOFTWARE GEOGEBRA

Valoración de alumnos de 4º de ESO.

Pon una X en el apartado correspondiente.

1. VALORACIÓN DE LAS ACTIVIDADES

¿Has leído las instrucciones de las actividades?	SÍ		NO	
	NADA	POCO	BASTANTE	MUCHO
¿Has entendido lo que había que hacer en las actividades?				
¿Has preguntado las dudas a la profesora?				
¿Has usado el cuaderno de trabajo para tomar apuntes o realizar cálculos?				
¿Te ha gustado realizar estas actividades?				
¿Te han ayudado las actividades a entender mejor los conceptos que has trabajado?				

2. VALORACIÓN DE LA UTILIZACIÓN DE GEOGEBRA EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS

	NADA	POCO	BASTANTE	MUCHO
¿Te ha gustado usar GeoGebra para aprender matemáticas?				

ESCRIBE AQUÍ LAS OBSERVACIONES QUE CONSIDERES RELEVANTES

Anexo IX

Resultados de las encuestas

En primer lugar, vamos a presentar los datos obtenidos de la respuesta a la pregunta: **¿Te ha gustado usar GeoGebra para aprender matemáticas?**, por ser esta pregunta común a todos los grupos.

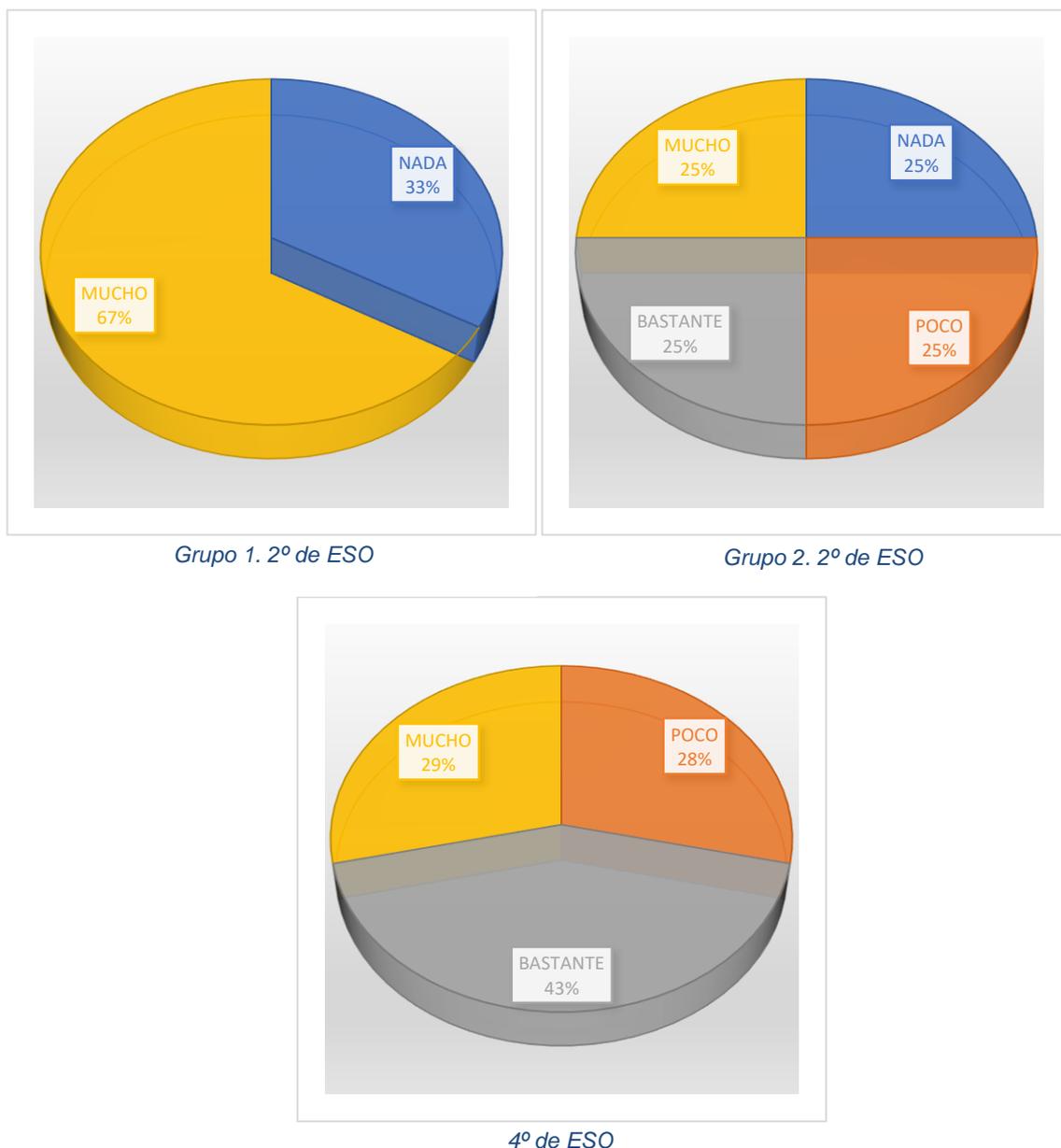


Figura 14: Respuestas a la pregunta: ¿Te ha gustado usar GeoGebra para aprender Matemáticas?

A la pregunta de si les ha gustado usar GeoGebra para aprender matemáticas, destacan los datos obtenidos en el grupo 1 de 2º de ESO, en el

que únicamente se han dado las dos de las respuestas posibles, que se corresponden con los dos extremos, un 67% considera que le ha gustado “Mucho” y un 33% que no le ha gustado “Nada”. Por el contrario, en el grupo 2 de 2º de ESO aparecen todas las opciones posibles, todas ellas elegidas en la misma proporción, un 25%. Por último, en el grupo de 4º de ESO, ningún alumno ha elegido la opción de “Nada”, un 43% señala que le ha gustado “Bastante”, un 29% “Mucho” y un 28% “Poco”.

A continuación, se van a presentar y analizar los resultados obtenidos en función de la actividad realizada.

1. Valoración de la Actividad 1: La Balanza

En este apartado se muestran los resultados de la encuesta realizada a los dos grupos de 2º de ESO en los que se llevó a cabo la Actividad 1: La Balanza. Para cada uno de los grupos se muestran los diagramas de sectores que representan los datos obtenidos de forma independiente, posteriormente se realiza el análisis de los datos, señalando aquello que resulte más significativo en cada caso.

- ¿Has leído las instrucciones de la actividad?

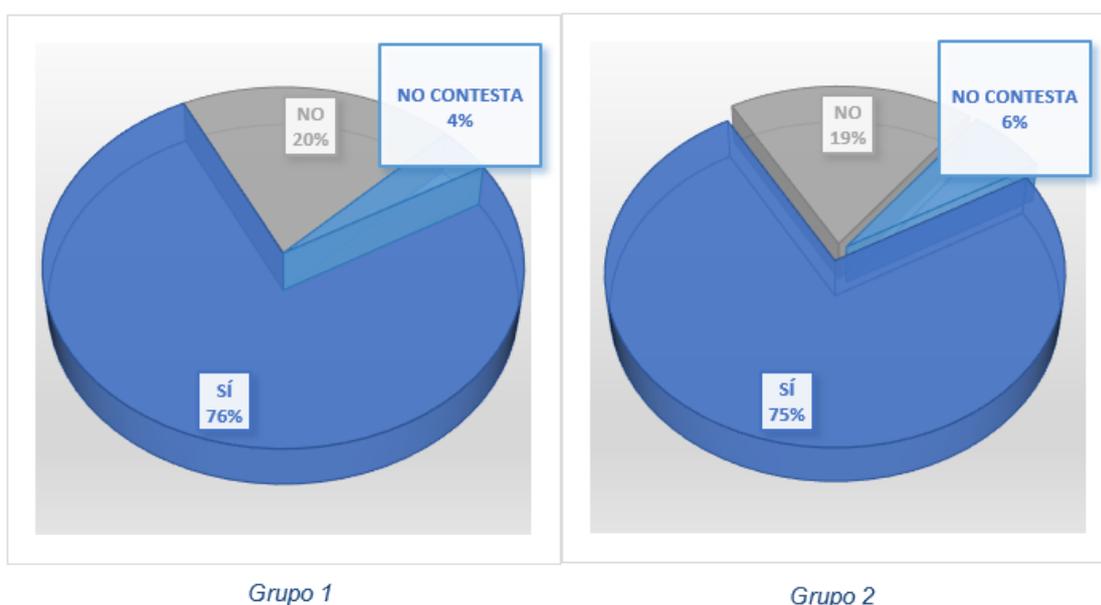


Figura 15: Actividad 1. Respuesta a la pregunta: ¿Has leído las instrucciones de la actividad?

Relacionado con la pregunta de si han leído o no las instrucciones de la actividad, las respuestas obtenidas en ambos grupos fueron similares, al menos el 75 % de los alumnos afirmaron haber leído las instrucciones.

- **¿Has entendido lo que había que hacer en la actividad?**

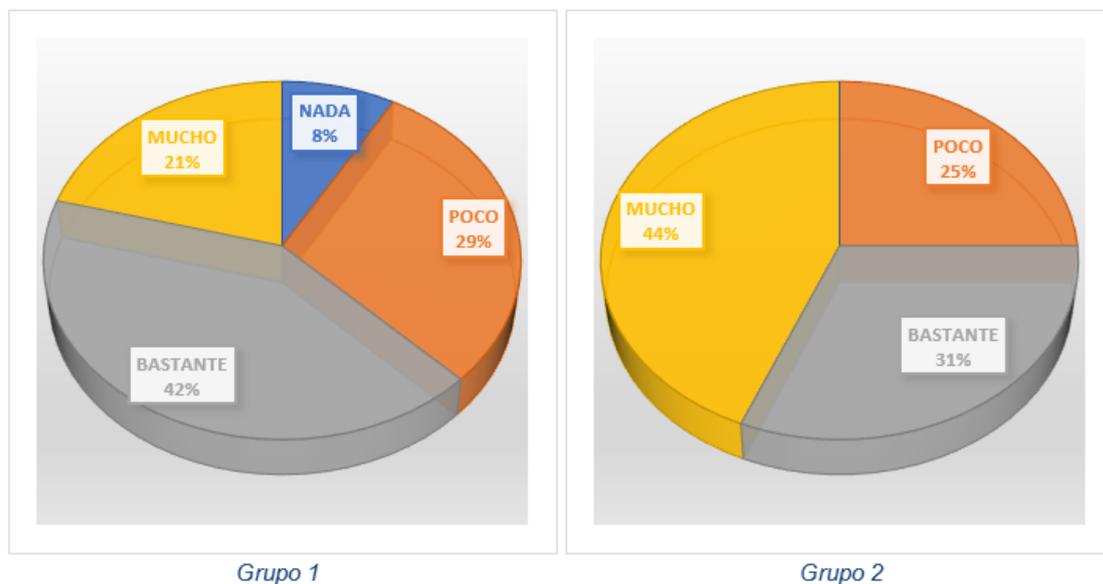


Figura 16: Actividad 1. Respuesta a la pregunta: ¿Has entendido lo que había que hacer en la actividad?

En las respuestas a esta pregunta existen bastantes diferencias, ya que, aunque en ambos grupos más de la mitad considera haber entendido, “Mucho” o “Bastante”, lo que había que hacer en la actividad, destaca que en el grupo 2 son más los que consideran haber entendido “Mucho” la actividad y no hay ninguno que considera no haberla entendido, mientras que en el grupo 1 hay un 8% de los alumnos que manifiesta no haber entendido “Nada”.

- **¿Has preguntado las dudas a la profesora?**

He de destacar que en el caso del grupo 2 más de la mitad indica que no ha preguntado “Nada” a la profesora, mientras que en el grupo 1 casi la mitad manifiesta haber preguntado las dudas.

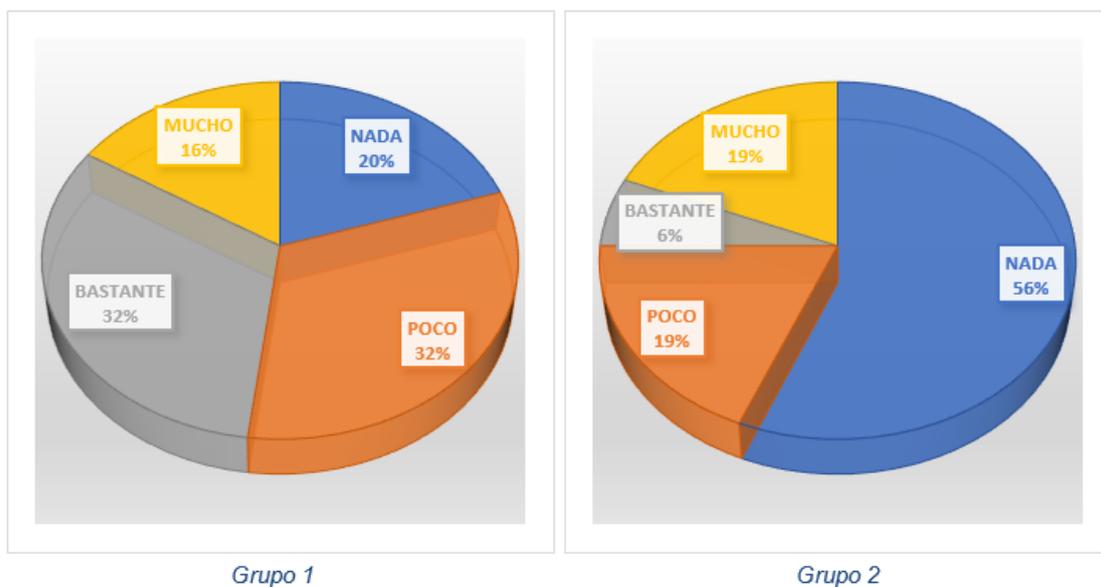


Figura 17: Actividad 1. Respuesta a la pregunta: ¿Has preguntado las dudas a la profesora?

- ¿Has usado el cuaderno de trabajo para tomar apuntes o realizar cálculos?

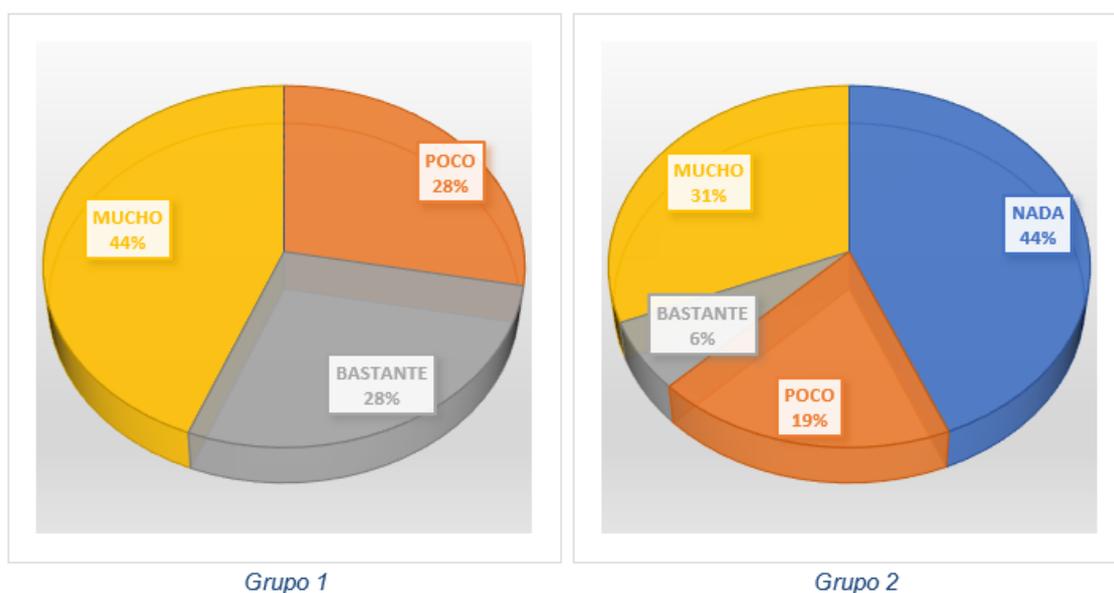


Figura 18: Actividad 1. Respuesta a la pregunta: ¿Has usado el cuaderno de trabajo para tomar apuntes o realizar cálculos?

En el grupo 1 la mayoría de los alumnos manifiesta haber utilizado el cuaderno de trabajo “Mucho” o “Bastante” y destaca que ninguno ha dicho que no lo ha usado “Nada”. En el grupo 2, sin embargo, un alto porcentaje de los alumnos afirma no haber usado “Nada” el cuaderno.

- ¿Te ha gustado realizar esta actividad?

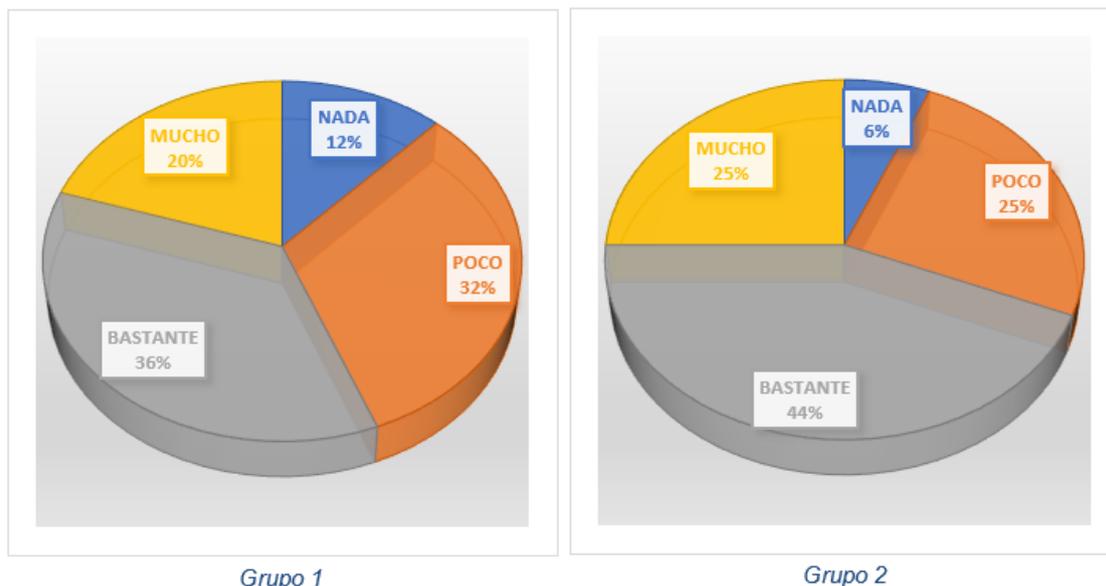


Figura 19: Actividad 1. Respuesta a la pregunta: ¿Te ha gustado realizar esta actividad?

En ambos grupos los alumnos indican que les ha gustado “Mucho” o “Bastante” la actividad, aunque también hay un porcentaje considerable de alumnos a los que les ha gustado “Poco” o “Nada”.

- ¿Te han ayudado las actividades a entender mejor los conceptos que has trabajado?

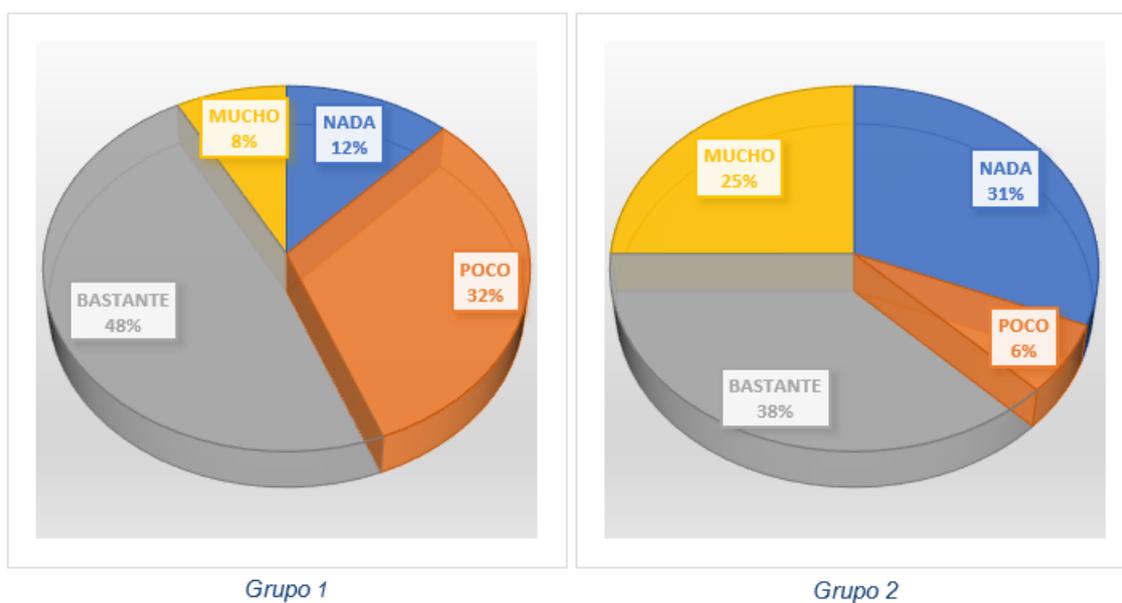


Figura 20: Actividad 1. Respuesta a la pregunta: ¿Te han ayudado las actividades a entender mejor los conceptos que has trabajado?

En ambos grupos la mayoría de los alumnos consideran que la actividad les ha ayudado a entender mejor los conceptos trabajados, aunque existe un porcentaje elevado de alumnos que considera que les ha ayudado “Poco” o “Nada”.

Para finalizar esta valoración de los alumnos me gustaría incluir algunos de los comentarios que escribieron:

“Que este tipo de actividades se deven poner en el aula porque yo creo que así se va a llevar el aprendizaje más rápido”

“Me ha parecido una clase de 5º primaria”

“Me ha parecido entretenido y he entendido mejor de donde vienen las ecuaciones”

2. Valoración de la Actividad 2: Proporcionalidad

En este apartado se muestran los resultados de la encuesta realizada al grupo de 2º de ESO en el que se desarrolló la Actividad 2: Proporcionalidad. Para cada una de las preguntas se muestran los diagramas de sectores que representan los datos obtenidos y el análisis de estos.

- **¿Has leído las instrucciones de la actividad?**

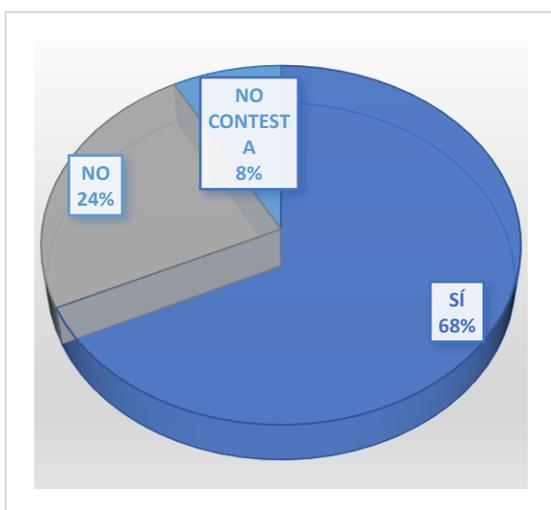


Figura 21: Actividad 2. Respuestas a la pregunta: ¿Has leído las instrucciones de la actividad?

Casi un 70% de los alumnos afirma haber leído las instrucciones de la actividad, destaca que en este caso los alumnos que han leído la actividad son menos que en el caso de la actividad de La Balanza.

- **¿Has entendido lo que había que hacer en la actividad?**

En este caso, casi el 75% de los encuestados afirma haber entendido “Bastante” o “Mucho” la actividad. Este dato contrasta con lo observado durante la sesión, en la que se detectó que los alumnos no sabían lo que tenían que hacer.

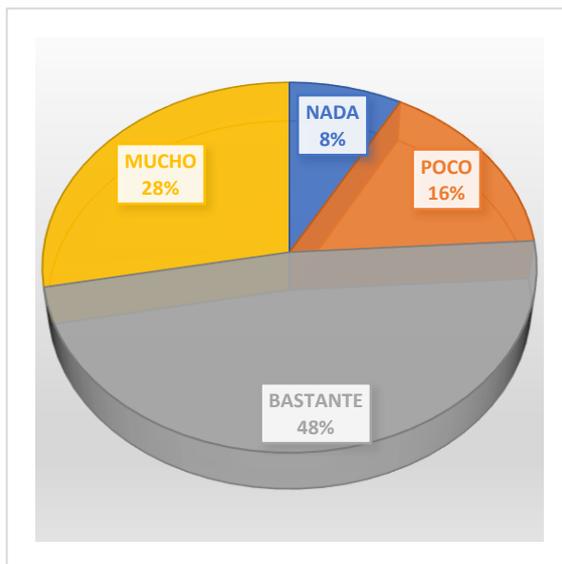


Figura 22: Actividad 2. Respuestas a la pregunta: ¿Has entendido lo que había que hacer en la actividad?

- **¿Has preguntado las dudas a la profesora?**

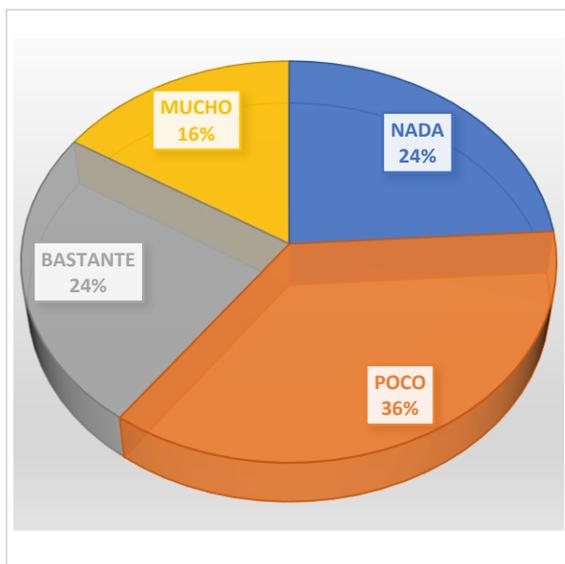


Figura 23: Actividad 2. Respuestas a la pregunta: ¿Has preguntado las dudas a la profesora?

Las respuestas a esta pregunta están bastante equitativamente distribuidas, aunque un porcentaje mayor de alumnos considera haber preguntado “Poco”.

- ¿Has usado el cuaderno de trabajo para tomar apuntes o realizar cálculos?

La mayoría de los alumnos sí que manifiestan haber tomados apuntes en su cuaderno.

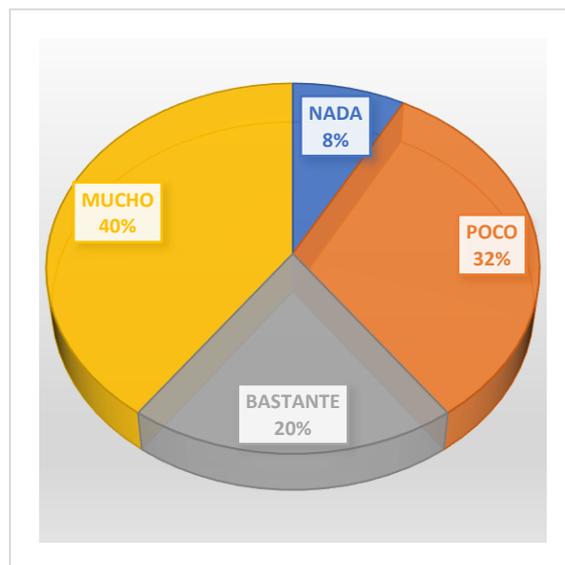


Figura 24: Actividad 2: Respuestas a la pregunta: ¿Has usado el cuaderno de trabajo para tomar apuntes o realizar cálculos?

- ¿Te ha gustado realizar esta actividad?

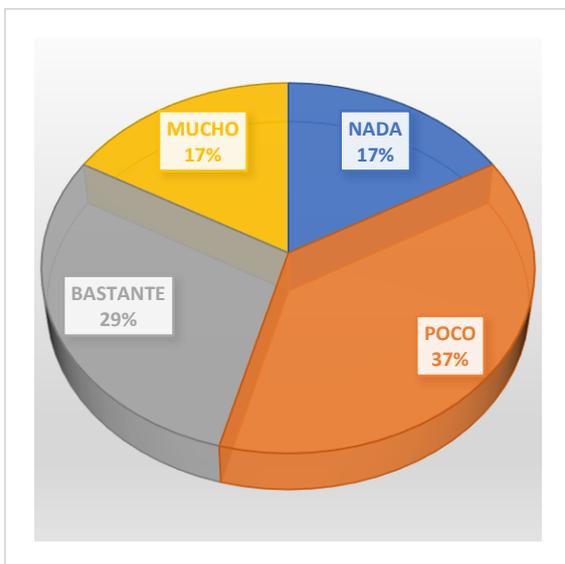


Figura 25: Actividad 2: Respuestas a la pregunta: ¿Te ha gustado realizar esta actividad?

Un mayor número de alumnos, un 54%, dice que la actividad le ha gustado “Poco” o “Nada”.

- **¿Te han ayudado las actividades a entender mejor los conceptos que has trabajado?**

Más de la mitad de los alumnos considera que la actividad les ha ayudado bastante a entender mejor los conceptos, el resto de las opciones han sido seleccionadas en igual proporción.

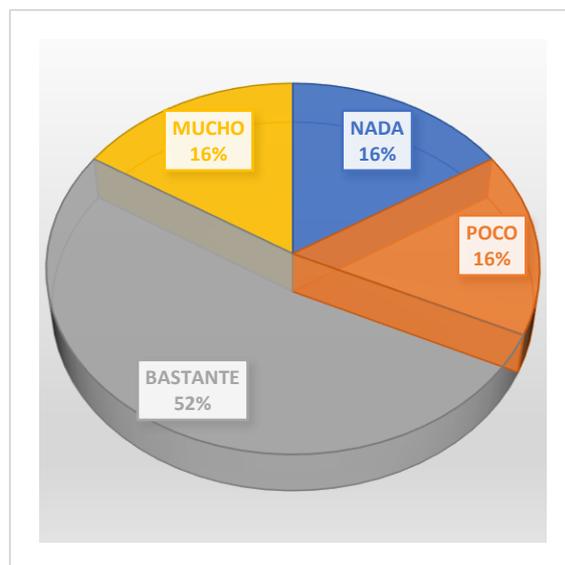
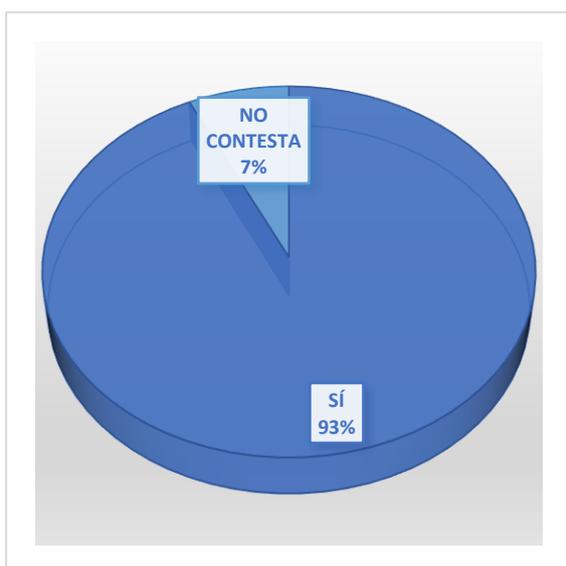


Figura 26: Actividad 2. Respuestas a la pregunta: ¿Te han ayudado las actividades a entender mejor los conceptos que has trabajado?

3. Valoración de las Actividades 3, 4 y 5: Suma por diferencia, Cuadrado de una suma y Suma de un binomio

Al igual que se ha hecho con el resto de las actividades se presentan a continuación los resultados de la encuesta realizada al grupo de 4º de ESO en el que se desarrollaron las Actividades 3, 4 y 5. En este caso la valoración de las actividades se realiza de forma conjunta, por ser todas actividades relacionadas con las identidades notables.

- ¿Has leído las instrucciones de la actividad?



Un 93% de los alumnos afirma haber leído las instrucciones de la actividad.

Figura 27: Actividad 3, 4 y 5. Respuestas a la pregunta: ¿Has leído las instrucciones de la actividad?

- **¿Has entendido lo que había que hacer en la actividad?**

La mitad de los alumnos considera haber entendido “Bastante” las actividades, mientras que de la otra mitad hay un 7% que manifiesta no haber entendido “Nada” y el resto haber entendido entre “Poco” y “Mucho”.

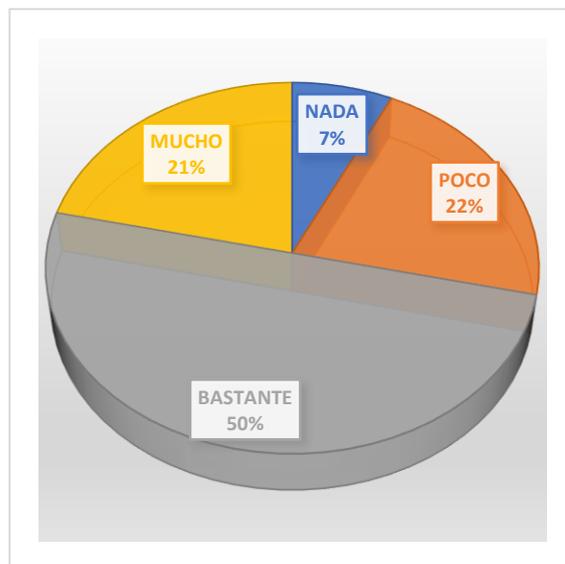


Figura 28: Actividades 3, 4 y 5. Respuestas a la pregunta: ¿Has entendido lo que había que hacer en la actividad?

- **¿Has preguntado las dudas a la profesora?**

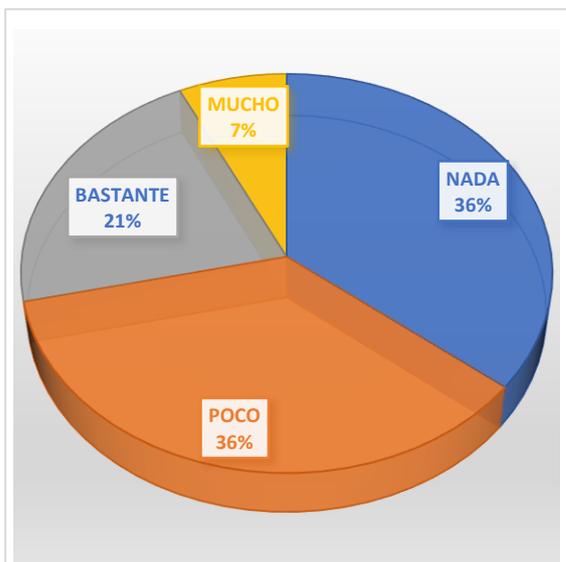


Figura 29: Actividades 3, 4 y 5. Respuestas a la pregunta: ¿Has preguntado las dudas a la profesora?

Cabe destacar en esta pregunta que sólo un 7% considera haber preguntado “Mucho” a la profesora, las opciones “Nada” y “Poco” han sido seleccionadas en la misma proporción, un 36%, mientras que un 21% considera haber preguntado “Bastante”.

- **¿Has usado el cuaderno de trabajo para tomar apuntes o realizar cálculos?**

La mayoría de los alumnos han usado, en mayor o menor medida, su cuaderno de trabajo durante la actividad. Un 22% indica no haberlo utilizado.

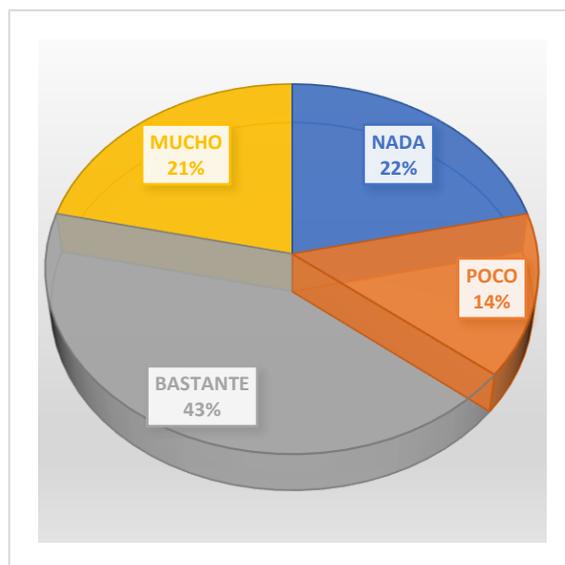


Figura 30: Actividades 3, 4 y 5: Respuestas a la pregunta: ¿Has usado el cuaderno de trabajo para tomar apuntes o realizar cálculos?

- **¿Te ha gustado realizar esta actividad?**

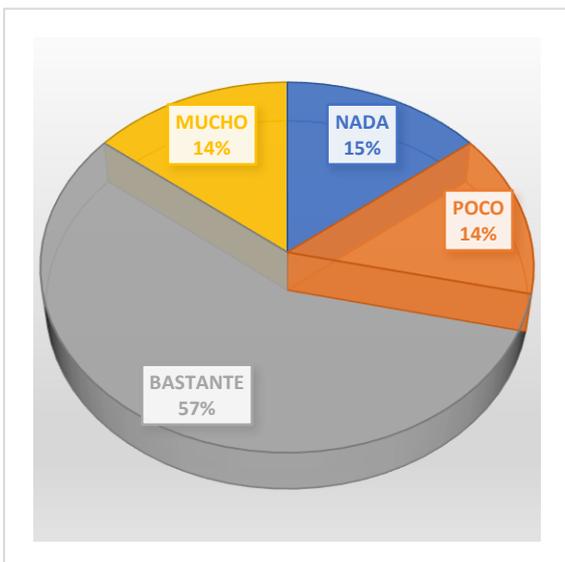


Figura 31: Actividades 3, 4 y 5: Respuestas a la pregunta: ¿Te ha gustado realizar esta actividad?

En este caso, la mayoría de los alumnos, un 71%, manifiesta que las actividades les han gustado “Bastante” o “Mucho”, un 15% dice no haberles gustado “Nada” y un 14% haberles gustado “Poco”.

- **¿Te han ayudado las actividades a entender mejor los conceptos que has trabajado?**

Destacar que en esta actividad un alto porcentaje de alumnos, un 46%, considera que las actividades le han ayudado mucho a entender mejor los conceptos trabajados, este porcentaje, sumado al 18% que considera haberles ayudado “Bastante” ya representa más de la mitad de los alumnos. Es importante señalar que un 27% considera no haberles ayudado “Nada”.

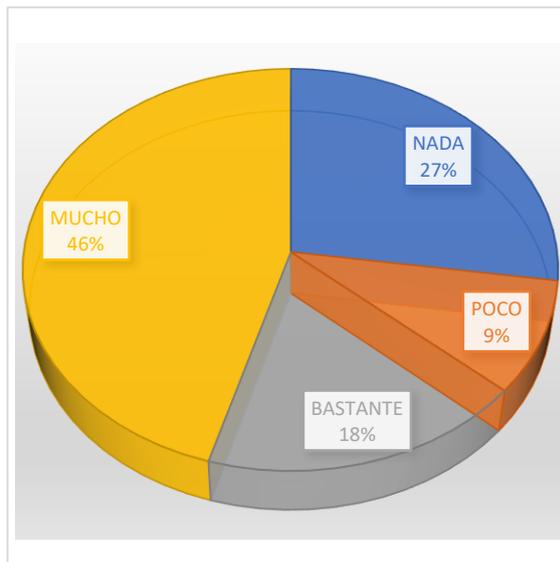


Figura 32: Actividades 3, 4 y 5. Respuestas a la pregunta: ¿Te han ayudado las actividades a entender mejor los conceptos que has trabajado?

Por último, señalar dos de las observaciones que escribieron los alumnos de 4º de ESO:

- “Me parece que ha estado muy bien y no tengo observaciones negativas”
- “Me ha parecido un ejercicio muy entretenido. Espero que se hagan más frecuentemente”