

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA



**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE
COMUNICACIONES**

TESIS DOCTORAL

**ESTIMACIÓN ÓPTIMA DE SECUENCIAS
CAÓTICAS CON APLICACIÓN EN
COMUNICACIONES**

**Autor : David Luengo García
Directores : Carlos Pantaleón Prieto
Ignacio Santamaría Caballero**

Grupo de Tratamiento Avanzado de Señal

Septiembre de 2006

Apéndice A

Publicaciones Derivadas de la Realización de la Tesis

La realización de esta Tesis ha dado lugar al siguiente conjunto de publicaciones.

A.1. Revistas Internacionales

- C. Pantaleón, **D. Luengo**, I. Santamaría, “Optimal Estimation of a Class of Chaotic Signals Generated by Piecewise-Linear Maps”, *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 7, no. 8, pp. 235-237, Agosto de 2000.
- C. Pantaleón, L. Vielva, **D. Luengo**, I. Santamaría, “Bayesian Estimation of Chaotic Signals Generated by Piecewise-Linear Maps”, *Signal Processing*, vol. 83, no. 3, pp. 659–664, Marzo de 2003.
- **D. Luengo**, C. Pantaleón, I. Santamaría, L. Vielva, J. Ibáñez, “Multiple Composite Hypothesis Testing: A Competitive Approach”, *The Journal of VLSI Signal Processing*, vol. 37, no. 2/3, pp. 319–331, Junio/Julio de 2004.
- **D. Luengo**, I. Santamaría, “OFDM System with Inverse Chaotic Coding in the Subcarriers”, *IEEE Trans. on Circuits and Systems II: Express Briefs*, Enviado para su publicación en Agosto de 2006 (disponible en <http://www.tsc.uc3m.es/~dluengo/TCas2006.pdf>).

A.2. Congresos Internacionales

- C. Pantaleón, **D. Luengo**, I. Santamaría, “Bayesian Estimation of a Class of Chaotic Signals”, *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, vol. 1, Estambul (Turquía), 5–9 de Junio de 2000, pp. 193–196.

- C. Pantaleón, **D. Luengo**, I. Santamaría, “Optimal Estimation of a Class of Chaotic Signals”, *Proceedings of the 16th World Computer and Communications Conference - International Conference on Signal Processing (WCCC-ICSP)*, vol. 1, Beijing (China), 21–25 de Agosto de 2000, pp. 276–280.
- C. Pantaleón, **D. Luengo**, I. Santamaría, “An Efficient Method for Chaotic Signal Parameter Estimation”, *Proceedings of the European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, vol. III, Tampere (Finlandia), 4–8 de Septiembre de 2000.
- C. Pantaleón, **D. Luengo**, I. Santamaría, “Chaotic AR(1) Model Estimation”, *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, vol. 6, Salt Lake City, Utah (USA), 7–11 de Mayo de 2001, pp. 3477–3480.
- **D. Luengo**, C. Pantaleón, I. Santamaría, “Competitive Chaotic AR(1) Model Estimation”, *Proceedings of the XI IEEE Neural Networks for Signal Processing Workshop (NNSP)*, North Falmouth, Massachusetts (USA), 10–12 de Septiembre de 2001, pp. 83–92.
- C. Pantaleón, L. Vielva, **D. Luengo**, I. Santamaría, “Estimation of a Certain Class of Chaotic Signals: An E-M Based Approach”, *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, vol. 2, Orlando (Florida), 12–17 de Mayo de 2002, pp. 1129–1132.
- **D. Luengo**, C. Pantaleón, I. Santamaría, “Bayesian Estimation of Discrete Chaotic Signals by MCMC”, *Proceedings of the European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, Toulouse, 3–6 de Septiembre de 2002, pp. 333–336.
- **D. Luengo**, I. Santamaría, “Secure Communications Using OFDM with Chaotic Modulation in the Subcarriers”, *Proceedings of the IEEE 61st Semiannual Vehicular Technology Conference (VTC2005-Spring)*, Estocolmo, 30 de Mayo al 1 de Junio de 2005.
- **D. Luengo**, I. Santamaría, “Asymptotically Optimal Maximum-Likelihood Estimation of a Class of Chaotic Signals Using the Viterbi Algorithm”, *Proceedings of the European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, Antalya, 4–8 de Septiembre de 2005.

A.3. Congresos Nacionales

- **D. Luengo**, C. Pantaleón, I. Santamaría, J. Ibáñez, “Modulación de Señales Digitales Usando Mapas Caóticos”, *Actas del XV Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio (URSI)*, Zaragoza, 13–15 de Septiembre de 2000, pp. 131–132.

- **D. Luengo**, C. Pantaleón, I. Santamaría, “Modelado AR(1) Usando Mapas Caóticos Lineales a Tramos”, *Actas del XVI Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio (URSI)*, Villaviciosa de Odón (Madrid), 19–21 de Septiembre de 2001, pp. 173–174.
- C. Pantaleón, L. Vielva, **D. Luengo**, I. Santamaría, “Estimación Bayesiana de Señales Caóticas Generadas por Mapas PWL”, *Actas del XVI Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio (URSI)*, Villaviciosa de Odón (Madrid), 19–21 de Septiembre de 2001, pp. 241–242.
- **D. Luengo**, I. Santamaría, L. Vielva, “Análisis de un Esquema Novedoso de Comunicaciones Caóticas con OFDM y su Aplicación en Comunicaciones Seguras”, *Actas del XX Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio (URSI)*, Gandía (Valencia), 14–16 de Septiembre de 2005.

Apéndice B

Notación y Abreviaturas

En este Apéndice se describe la notación empleada en la Tesis, y se proporciona una lista de los símbolos más frecuentes, así como de las principales abreviaturas utilizadas.

B.1. Notación

En esta sección se presentan, en primer lugar, las reglas notacionales básicas de la Tesis, y en segundo lugar, aspectos específicos relacionados con la notación empleada en la representación de señales y sistemas caóticos.

B.1.1. Reglas Generales

La notación empleada se rige básicamente por las siguientes reglas:

- **Escalares:** Se utilizan letras minúsculas en itálica (x) para los nombres de las variables, y letras mayúsculas también en itálica (N) para las constantes.
- **Vectores:** Se utilizan letras minúsculas en negrita (\mathbf{x}). La operación de transposición se indica con el superíndice T (\mathbf{x}^T). El componente i -ésimo del vector, un escalar, se indica mediante un subíndice, x_i , y la notación $\mathbf{x}_{i:j}$ indica todos los componentes del vector \mathbf{x} entre el i -ésimo y el j -ésimo: $\mathbf{x}_{i:j} = [x_i, x_{i+1}, \dots, x_j]^T$. En ocasiones se usa la notación $\mathbf{x}_{j:-1:i}$, que indica los mismos componentes, pero tomados en orden inverso: $\mathbf{x}_{j:-1:i} = [x_j, x_{j-1}, \dots, x_i]^T$. Por último, también se usa $x(k)$ para denotar el elemento k -ésimo del vector ($k \geq 1$), y $\mathbf{x}(l : k)$ o $\mathbf{x}(k : -1 : l)$ para indicar el conjunto de elementos l -ésimo al k -ésimo ($l, k \geq 1$) en orden ascendente y descendente respectivamente.
- **Matrices:** Se utilizan letras mayúsculas en negrita (\mathbf{A}). Los elementos de \mathbf{A} se denotan indistintamente por $[\mathbf{A}]_{i,j}$, $\mathbf{A}(i, j)$ o a_{ij} . La fila i -ésima de la matriz se indica mediante $\mathbf{A}(i, :)$, y la columna i -ésima mediante $\mathbf{A}(:, i)$. Para seleccionar

un vector o una submatriz dentro de otra matriz se utiliza la misma notación que en el caso de los vectores. Por ejemplo,

$$\mathbf{A}(k : l, m : n) = \begin{bmatrix} a_{km} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{lm} & \cdots & a_{ln} \end{bmatrix}.$$

Por último, $\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, \dots, a_m)$ denota una matriz diagonal con los elementos indicados en la diagonal principal.

- **Parámetros y vectores de parámetros:** Se utilizan letras griegas minúsculas en itálica (θ, ϕ) para los parámetros, y letras griegas mayúsculas en negrita ($\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi}$) para los vectores de parámetros, $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \dots, \theta_p]^T$ y $\boldsymbol{\phi} = [\phi_1, \dots, \phi_p]^T$.

B.1.2. Reglas Específicas

A continuación se muestran los principales aspectos de la notación relacionados de manera específica con el tema de la Tesis: la inferencia estadística de señales caóticas.

- **Funciones densidad de probabilidad:** Se va a utilizar $p(\cdot)$ para denotar las diferentes FDPs necesarias, obviando en general el subíndice que hace referencia a la variable aleatoria en cuestión y que se puede deducir fácilmente a partir del argumento. Las FDPs condicionales se denotan como $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$, y las FDPs condicionadas por el valor de algún parámetro como $p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$. La FDP que aparece con mayor frecuencia es la Gaussiana (o una mezcla de Gaussianas). En este caso, la notación $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C}_{xx})$ significa que el vector aleatorio \mathbf{x} tiene una FDP Gaussiana con media $\boldsymbol{\mu}$, y matriz de autocorrelación \mathbf{C}_{xx} . Una segunda FDP importante es la uniforme, que se denota como $\mathbf{x} \sim \mathcal{U}(\mathbf{x}_{\text{mín}}, \mathbf{x}_{\text{máx}})$, indicando que el rango del componente i -ésimo de \mathbf{x} es $[x_{\text{mín}}(i), x_{\text{máx}}(i)]$.
- **Iteración de mapas caóticos:** Los mapas utilizados a lo largo de la Tesis son fundamentalmente unidimensionales, y se denotan como $f : D \rightarrow D$, indicando que su espacio de definición es $D \subseteq \mathbb{R}$. Se usa D para señalar una región arbitraria de la recta real, mientras que se emplea I para indicar un intervalo (abierto o cerrado, y no necesariamente de longitud finita) de la recta real. El resultado de la composición funcional k -ésima del mapa f , obtenida al aplicarlo de manera reiterada k veces a partir de una condición inicial, $x[n]$, se denota $f^k(x[n])$, y el de la composición funcional k -ésima del mapa inverso f^{-1} como $f^{-k}(x[n])$.

B.2. Abreviaturas

ADC	Conversor Analógico-Digital (<i>Analog to Digital Converter</i>)
AIC	Criterio de Información de Akaike (<i>Akaike's Information Criterion</i>)
AR	Autorregresivo [Modelo]
AWGC	Canal Aditivo Blanco Gaussiano (<i>Additive White Gaussian Channel</i>)
AWGN	Ruido Aditivo Blanco Gaussiano (<i>Additive White Gaussian Noise</i>)
BCLMS	CLMS Hacia Atrás (<i>Backward CLMS</i>) [Algoritmo]
BER	Tasa de Errores Binarios (<i>Binary Error Rate</i>)
BPSK	PSK Binaria [Modulación]
BSK-TM	Mapa de Tienda de Campaña Sesgado Bipolar (<i>Bipolar Skew TM</i>)
BSM	Mapa de Desplazamiento Binario (<i>Binary Shift Map</i>)
CC	Codificación Caótica (<i>Chaotic Coding</i>) [Modulación]
CDMA	Acceso Múltiple por División en el Código (<i>Code Division Multiple Access</i>)
CDSK	<i>Correlation Delay Shift Keying</i> [Modulación]
CLMS	LMS Competitivo (<i>Competitive LMS</i>) [Algoritmo]
CM	Enmascaramiento Caótico (<i>Chaotic Masking</i>) [Modulación]
COOK	<i>Chaos On-Off Keying</i> [Modulación]
CPPM	PPM Caótica (<i>Chaotic PPM</i>) [Modulación]
CPWL	Canónico Lineal a Tramos (<i>Canonical PieceWise Linear</i>) [Modelo]
CRLB	Límite de Crámer-Rao
CS	Conmutación Caótica (<i>Chaotic Switching</i>) [Modulación]
CSK	<i>Chaos Shift Keying</i> [Modulación]
DAC	Conversor Digital-Analógico (<i>Digital to Analog Converter</i>)
DBPSK	BPSK Diferencial [Modulación]
DCSK	CSK Diferencial (<i>Differential CSK</i>) [Modulación]
DEP	Densidad Espectral de Potencia
DFT	Transformada Discreta de Fourier (<i>Discrete Fourier Transform</i>)
DS-SS	SS por Secuencia Directa (<i>Direct Sequence SS</i>) [Modulación]
DST	Desarrollo en Serie de Taylor
DSV	Desarrollo en Serie de Volterra
ECSK	CSK Ergódico (<i>Ergodic CSK</i>)
ED	Ecuación en Diferencias
EDO	Ecuación en Derivadas Ordinarias
EEG	ElectroEncefaloGrama
E-M	Esperanza-Maximización (<i>Expectation-Maximization</i>) [Algoritmo]
FB-ML	<i>Forward-Backward ML</i> [Algoritmo]
FCLMS	CLMS Hacia Delante (<i>Forward CLMS</i>) [Algoritmo]

FDMA	Acceso Múltiple por División en Frecuencia
FDP	Función Densidad de Probabilidad
FFT	Transformada Rápida de Fourier (<i>Fast Fourier Transform</i>)
FH-SS	SS por Salto en Frecuencia (<i>Frequency Hopping SS</i>) [Modulación]
FIR	Respuesta Finita al Impulso [Filtro]
FM	Modulación en Frecuencia (<i>Frequency Modulation</i>)
FM-DCSK	DCSK Modulada en Frecuencia
FP	Frobenius-Perron [Operador de]
FSM	Máquina de Estados Finitos (<i>Finite State Machine</i>)
GA	Algoritmo Genético (<i>Genetic Algorithm</i>)
GCDSK	CDSK Generalizado (<i>Generalized CDSK</i>) [Modulación]
GLRT	<i>Generalized Likelihood Ratio Test</i> [Detector]
HC-MAP	<i>Hard Censoring</i> MAP [Estimador]
HC-ML	<i>Hard Censoring</i> ML [Estimador]
HMM	Modelo Oculto de Markov (<i>Hidden Markov Model</i>)
ICI	Interferencia Entre Portadoras (<i>InterCarrier Interference</i>)
IDFT	DFT Inversa (<i>Inverse Discrete Fourier Transform</i>)
IEEE	<i>Institute of Electrical and Electronic Engineers</i>
IFFT	FFT Inversa (<i>Inverse Fast Fourier Transform</i>)
IID	Independientes Idénticamente Distribuidas [Variables Aleatorias]
IIR	Respuesta Infinita al Impulso [Filtro]
IR	<i>Impulse Radio</i> [Sistemas]
ISI	Interferencia entre Símbolos (<i>InterSymbol Interference</i>)
ISM	<i>Industrial, Scientific and Medical</i> [Bandas Frecuenciales]
LMS	Mínimos Cuadrados (<i>Least Mean Squares</i>) [Algoritmo]
LPD	Baja Probabilidad de Detección (<i>Low Probability of Detection</i>)
LPF	Filtro Paso Bajo (<i>Low Pass Filter</i>)
LPI	Baja Probabilidad de Intercepción (<i>Low Probability of Interception</i>)
LS	Mínimos Cuadrados (<i>Least Squares</i>) [Estimador]
LSB	Bit Menos Significativo (<i>Least Significant Bit</i>)
LTI	Lineal e Invariante con el Tiempo [Sistema]
MAP	Máximo A Posteriori [Detector/Estimador]
MAPSE	Estimador MAP de la Secuencia (<i>MAP Sequence Estimator</i>)
MBE	Estimador Basado en el método de los Momentos (<i>Moment Based Estimator</i>)
MCMC	Métodos de Monte Carlo basados en muestreo sobre Cadenas de Markov (<i>Markov Chain Monte Carlo</i>) [Algoritmos]
MCMC-PF	Filtro de Partículas basado en Métodos MCMC
MDL	Mínima Longitud de la Descripción (<i>Minimum Description Length</i>) [Criterio]
MH	Metropolis-Hastings [Algoritmo]

MIMO	<i>Multiple Input Multiple Output</i> [Sistema]
MIT	<i>Massachusetts Institute of Technology</i>
ML	Máxima Verosimilitud (<i>Maximum Likelihood</i>) [Detector/Estimador]
MLSE	Estimador ML de la Secuencia (<i>ML Sequence Estimator</i>)
MMSE	Mínimo Error Cuadrático Medio (MS) [Detector/Estimador]
MS	Mínimo Error Cuadrático Medio (MMSE) [Detector/Estimador]
MSB	Bit Más Significativo (<i>Most Significant Bit</i>)
MSE	Error Cuadrático Medio (<i>Mean Square Error</i>)
NLAR	No Lineal Autorregresivo [Modelo]
NN	Red Neuronal (<i>Neural Network</i>)
OFDM	Multiplexación/Modulación por División en Frecuencias Ortogonales (<i>Orthogonal Frequency Division Multiplexing/Modulation</i>)
OOK	<i>On-Off Keying</i> [Modulación]
PAR	Relación de Potencia de Pico a Potencia Media (PAPR)
PAM	Modulación por la Amplitud de los Pulsos (<i>Pulse Amplitude Modulation</i>)
PAPR	Relación de Potencia de Pico a Potencia Media (PAR) (<i>Peak to Average Power Ratio</i>)
PF	Filtro de Partículas (<i>Particle Filter</i>)
PN	Pseudoaleatoria (<i>Pseudonoise</i>) [Secuencia]
PPC	Control Predictivo de Poincaré (<i>Predictive Poincaré Control</i>)
PPM	Modulación por la Posición del Pulso (<i>Pulse Position Modulation</i>)
P/S	Paralelo/Serie [Convertor]
PSK	<i>Phase Shift Keying</i> [Modulación]
PWA	Afín a Tramos (<i>PieceWise Affine</i>) [Función o Mapa]
PWC	Constante a Tramos (<i>PieceWise Constant</i>) [Función o Mapa]
PWL	Lineal a Tramos (<i>PieceWise Linear</i>) [Función o Mapa]
QAM	Modulación de Amplitud en Cuadratura (<i>Quadrature Amplitude Modulation</i>)
QDCSK	Modulación DCSK en Cuadratura (<i>Quadrature DCSK</i>)
QPSK	PDK en Cuadratura (<i>Quadrature PSK</i>) [Modulación]
RF	RadioFrecuencia
RSSD	<i>Reduced-State Sequence Detection</i>
RSSE	<i>Reduced-State Sequence Estimation</i>
SAGE	<i>Space Alternating Generalized E-M</i> [Algoritmo]
SCSK	<i>Symmetric Chaos Shift Keying</i> [Modulación]
SD	Decodificación en Esfera (<i>Sphere Decoding</i>) [Detector/Estimador]
SFN	Red de una Única Frecuencia (<i>Single Frequency Network</i>)
SK-TM	Mapa de Tienda de Campaña Sesgado (<i>Skew TM</i>)
SNL	Sistema No Lineal
SNR	Relación Señal a Ruido (<i>Signal to Noise Ratio</i>)

S/P	Serie/Paralelo [Conversor]
SS	Espectro Ensanchado (<i>Spread Spectrum</i>) [Modulación]
S-TM	Mapa de Tienda de Campaña Simétrico (<i>Symmetric TM</i>)
TDMA	Acceso Múltiple por División en el Tiempo
TH-SS	SS por Salto en el Tiempo (<i>Time Hopping SS</i>) [Modulación]
TM	Mapa de Tienda de Campaña (<i>Tent-Map</i>)
TLMS	Mínimos Cuadrados Totales (<i>Total Least Mean Squares</i>) [Algoritmo]
TLS	Mínimos Cuadrados Totales (<i>Total Least Squares</i>) [Estimador]
TWT	Tubo de Onda Progresiva (<i>Travelling Wave Tube</i>)
UWB	Banda Ultra Ancha (<i>Ultra Wide Band</i>) [Sistemas]
VA	Algoritmo de Viterbi
VEQ	Igualador de Viterbi
WLAN	Red de Área Local Inalámbrica (<i>Wireless Local Area Network</i>)

Apéndice C

FDPs Invariantes y Exponentes de Lyapunov

En este Apéndice se muestran las FDPs invariantes y los exponentes de Lyapunov de los principales mapas caóticos utilizados a lo largo de la Tesis. Siempre que es posible se procede a su cálculo teórico, mostrándose valores estimados mediante simulación únicamente en caso contrario. En primer lugar se analiza la familia de mapas de tienda de campaña, a continuación se consideran otra clase de mapas PWL (en especial los mapas de Markov), y por último se estudia el principal mapa no PWL usado: el mapa logístico.

C.1. La Familia de Mapas de Tienda de Campaña

C.1.1. FDPs Invariantes

En primer lugar, recuérdese que la ecuación que debe cumplirse para una FDP invariante es la siguiente (2.28):

$$\int_B p(x)dx = \sum_{i=1}^M \int_{f_{s_i}^{-1}(B)} p(x)dx,$$

siendo B una región cualquiera del espacio de fases del mapa, y M el número de preimágenes de cualquier punto. Puesto que para cualquier mapa de la familia de “tent-maps” existen dos preimágenes (salvo para la moda, $x = 0,5$, en cuyo caso ambas coinciden) y seleccionando una región igual a un intervalo, $B = I = [\eta, \kappa]$, sin pérdida de generalidad, la ecuación a resolver para hallar una FDP invariante resulta

$$\int_{\eta}^{\kappa} p(x)dx = \int_{f_1^{-1}(\eta)}^{f_1^{-1}(\kappa)} p(x)dx + \int_{f_2^{-1}(\kappa)}^{f_2^{-1}(\eta)} p(x)dx,$$

donde f_1^{-1} y f_2^{-1} son las funciones inversas correspondientes a la región 1 y a la región 2 respectivamente, y en la última integral se han invertido los límites de integración debido a que, a causa de la pendiente negativa del mapa en E_2 , $f_2^{-1}(\kappa) \leq f_2^{-1}(\eta)$.

A continuación, considérese el TM y calcúlense los intervalos correspondientes a las preimágenes de $[\eta, \kappa]$ para un valor de β arbitrario. En este caso, la función inversa es

$$f_s^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{\beta}, & s = 1; \\ \frac{\beta-x}{\beta}, & s = 2. \end{cases}$$

En consecuencia, la primera preimagen es

$$f_1^{-1}([\eta, \kappa]) = \left[\frac{\eta}{\beta}, \frac{\kappa}{\beta} \right],$$

y la segunda,

$$f_2^{-1}([\eta, \kappa]) = \left[\frac{\beta-\kappa}{\beta}, \frac{\beta-\eta}{\beta} \right].$$

Estos tres intervalos (el original y sus dos preimágenes) se muestran en la Figura C.1 para un valor de β cualquiera.

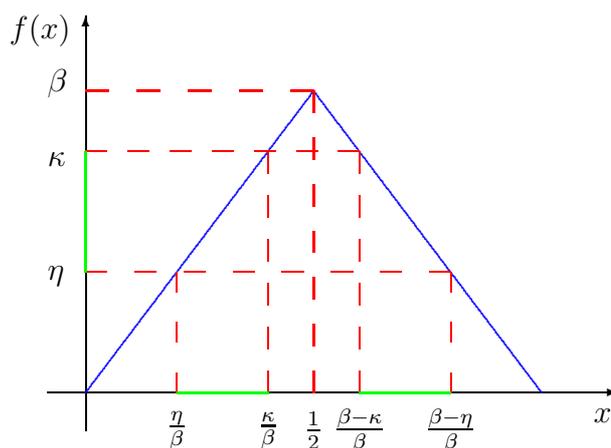


Figura C.1: Preimágenes de un intervalo arbitrario para el TM.

Y por lo tanto, finalmente la ecuación que se debe resolver para encontrar una FDP invariante para el TM queda como

$$\int_{\eta}^{\kappa} p(x)dx = \int_{\frac{\eta}{\beta}}^{\frac{\kappa}{\beta}} p(x)dx + \int_{\frac{\beta-\kappa}{\beta}}^{\frac{\beta-\eta}{\beta}} p(x)dx.$$

Esta ecuación no se puede solventar en un caso general, pero sí en el caso particular en que $\beta = 2$. Para verlo, nótese que la longitud del intervalo correspondiente a cada una de las dos preimágenes es $(\kappa - \eta)/\beta$, y en consecuencia la longitud total de los intervalos asociados a las preimágenes es $2(\kappa - \eta)/\beta$. Por lo tanto, si $\beta = 2$ esta longitud total es igual a la longitud del intervalo original, $\kappa - \eta$, y se puede comprobar fácilmente que una solución válida para la FDP invariante es simplemente una FDP uniforme

en $[0, 1]$. Además, esta es la FDP invariante natural. En la Figura C.2 se muestran cuatro ejemplos de la FDP invariante del TM estimada empíricamente para diferentes valores de β , donde se puede apreciar claramente su desviación con respecto a la FDP uniforme para $\beta \neq 2$.

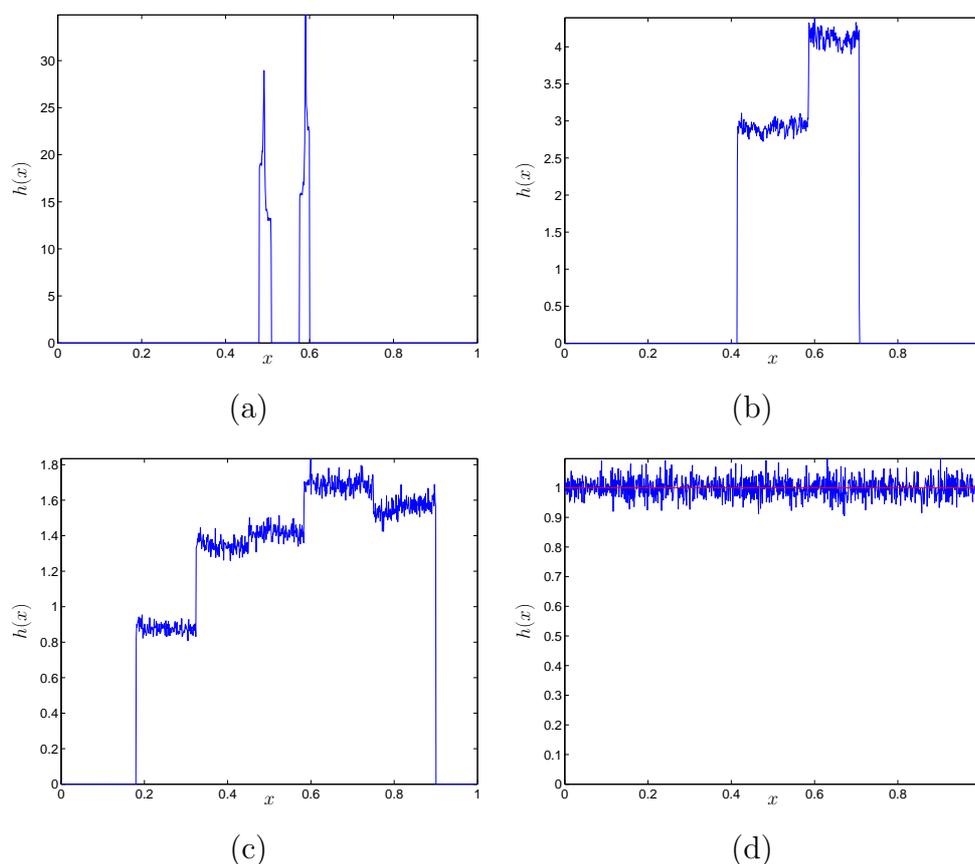


Figura C.2: FDP invariante natural del TM para diferentes valores de β estimada con 1000 intervalos del histograma a partir de una única secuencia de longitud $N = 10^6$. (a) $\beta = 1,2$. (b) $\beta = \sqrt{2}$. (c) $\beta = 1,8$. (d) $\beta = 2$: FDP uniforme.

En cuanto al segundo mapa de la familia, el S-TM, su FDP invariante natural se puede obtener fácilmente a partir de la del TM gracias a la conjugación topológica [Devan1989, Peit1992]. El hecho de que el S-TM sea conjugado con el TM implica que el uno se obtiene simplemente mediante una transformación de coordenadas, en este caso lineal, del otro. Por lo tanto, debido al teorema de la conservación de la probabilidad se deduce que

$$p_{\text{S-TM}}(x) = \left| \frac{dh^{-1}(x)}{dx} \right| p_{\text{TM}}(h^{-1}(x)),$$

donde $h^{-1}(x)$ es la función que transforma un punto del espacio de fases del S-TM

en el equivalente del espacio de fases del TM. En este caso, $h^{-1}(x) = (1+x)/2$, de modo que $|dh^{-1}(x)/dx| = 1/2$, y por consiguiente la FDP invariante natural del S-TM es la misma que la del TM escalada por un factor $1/2$ debido al cambio de soporte (de $[0, 1]$ a $[-1, 1]$ en este caso). Y puesto que la FDP del TM únicamente se puede hallar de forma cerrada para $\beta = 2$, lo mismo ocurre en el caso del S-TM, para el que la FDP invariante natural es uniforme en $[-1, 1]$ cuando $\beta = 2$, no pudiéndose hallar una expresión analítica en caso contrario.

Respecto al SK-TM y el BSK-TM, sus FDPs invariantes se obtienen del mismo modo. La función inversa del SK-TM es

$$f_s^{-1}(x) = \begin{cases} cx, & s = 1; \\ 1 - (1-c)x, & s = 2. \end{cases}$$

En consecuencia, la primera preimagen del intervalo $[\eta, \kappa]$ es

$$f_1^{-1}([\eta, \kappa]) = [c\eta, c\kappa],$$

y la segunda preimagen es

$$f_2^{-1}([\eta, \kappa]) = [1 - (1-c)\kappa, 1 - (1-c)\eta].$$

La longitud del primero de estos dos intervalos es $c(\kappa - \eta)$, y la del segundo $(1-c)(\kappa - \eta)$. Por lo tanto, la longitud total es igual a la del intervalo original, $\kappa - \eta$, de lo que se deduce que una FDP invariante válida para el SK-TM con cualquier valor del parámetro c es la FDP uniforme en $[0, 1]$, que además es su FDP invariante natural. Y puesto que el BSK-TM es conjugado topológicamente con el SK-TM, su FDP invariante natural también debe ser uniforme, aunque en este caso en $[-1, 1]$.

C.1.2. Exponentes de Lyapunov

Cuando se conoce la FDP invariante de un mapa unidimensional, su exponente de Lyapunov se puede obtener directamente integrando:

$$l = \int_D p(x) \ln |f'(x)| dx. \quad (\text{C.1})$$

Por lo tanto, en el caso del TM con $\beta = 2$ se obtiene

$$l_{\text{TM}} = \int_0^1 \ln 2 \, dx = \ln 2,$$

que es el mismo exponente que el del S-TM con $\beta = 2$, debido a la conjugación topológica, confirmando que ambos mapas son caóticos en este caso particular. Para el resto de valores de β , en principio parece que no se podría obtener una expresión analítica para el exponente de Lyapunov, ya que no se conoce una expresión cerrada

para la FDP invariante. No obstante, el módulo de la derivada de $f(x)$, tanto para el TM como para el S-TM, es constante e igual a β , de modo que

$$l_{\text{TM}} = \int_0^1 \ln \beta p(x) dx = \ln \beta \int_0^1 p(x) dx = \ln \beta,$$

y curiosamente, aunque no se puede obtener la FDP invariante del TM ni del S-TM de manera cerrada para un caso general, sí se conoce su exponente de Lyapunov. Este exponente es positivo para $\beta > 1$, de modo que se puede asegurar que el TM (al igual que el S-TM) es caótico dentro de este rango de su parámetro de bifurcación, aunque para $1 < \beta < \sqrt{2}$ presenta una estructura peculiar, con dos bandas caóticas entre las que salta alternativamente, como se ha discutido en la Sección 2.3.4.1.

En el caso del SK-TM, su FDP invariante natural es uniforme para cualquier valor de c , de modo que se puede calcular fácilmente su exponente de Lyapunov,

$$\begin{aligned} l &= \int_0^c \ln \frac{1}{c} dx + \int_c^1 \ln \frac{1}{1-c} dx \\ &= c \ln \left(\frac{1}{c} \right) + (1-c) \ln \left(\frac{1}{1-c} \right). \end{aligned}$$

Y, puesto que $0 < c < 1$, se cumple que $\ln(1/c) > 0$ y $\ln(1/(1-c)) > 0$, y el exponente de Lyapunov del SK-TM es siempre positivo, corroborando la afirmación realizada en la Sección 2.3.4.1 de que el SK-TM genera secuencias caóticas para cualquier valor de c , aunque su grado de “caoticidad” puede variar en gran medida en función de c , como se muestra en la Figura C.3. Nótese que la gráfica del exponente de Lyapunov del SK-TM en función de c es idéntica a la de la entropía de una fuente binaria [Cover1991], de modo que el mapa es más caótico cuando c se encuentra cercano a la mitad de su espacio de fases (el máximo lo alcanza cuando $c = 0,5$, en cuyo caso el SK-TM coincide con el TM para $\beta = 2$), disminuyendo su “caoticidad” conforme se desplaza c hacia alguno de los extremos.

En cuanto al BSK-TM, su FDP invariante también es uniforme, y su exponente de Lyapunov vale

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{2} \int_{-1}^c \ln \frac{2}{1+c} dx + \frac{1}{2} \int_c^1 \ln \frac{2}{1-c} dx \\ &= \frac{1+c}{2} \ln \left(\frac{2}{1+c} \right) + \frac{1-c}{2} \ln \left(\frac{2}{1-c} \right). \end{aligned}$$

Nuevamente el exponente de Lyapunov es siempre mayor que cero (el máximo en este caso se alcanza para $c = 0$), confirmando que el BSK-TM es caótico para cualquier valor de c , como resulta natural, ya que es conjugado topológicamente con el SK-TM.

C.2. Otros Mapas PWL

Para otros mapas PWL que no pertenecen a la familia de mapas de tienda de campaña, tales como los mapas de Bernoulli o los mapas de las figuras 2.4 y 2.5, en

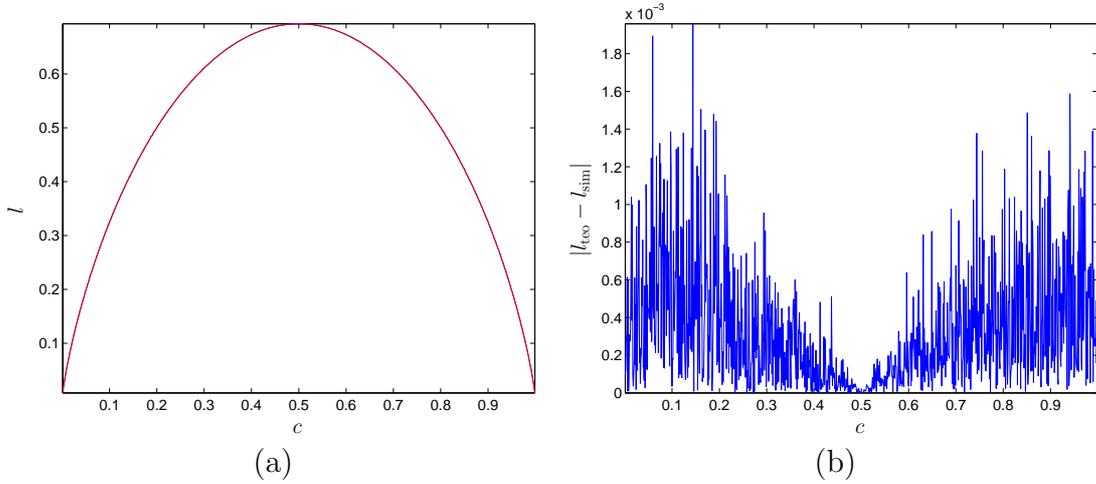


Figura C.3: Exponente de Lyapunov para el SK-TM en función de c . (a) Exponente de Lyapunov estimado a partir de 10^6 muestras (azul) y teórico (rojo). (b) Error (en valor absoluto) de la estimación.

general puede resultar muy difícil hallar la FDP invariante natural y el exponente de Lyapunov de forma cerrada. Sin embargo, existe una clase importante de mapas PWL cuya FDP es constante a tramos (PWC), con intervalos que coinciden con su partición natural [Isabel1997, Isabel1998]: los mapas PWL de Markov. Esto es, para esta clase de mapas su FDP invariante es

$$p(x) = \sum_{i=1}^M p_i \chi_{E_i}(x), \quad (\text{C.2})$$

siendo p_i la densidad de probabilidad dentro de la región i -ésima, $E_i = [e_{i-1}, e_i]$ con $1 \leq i \leq M-1$ y $E_M = [e_{M-1}, e_M]$, y debiendo cumplirse que

$$\sum_{i=1}^M p_i (e_i - e_{i-1}) = 1.$$

Nótese además que para un mapa PWL con una FDP invariante dada por (C.2) resulta muy sencillo obtener su exponente de Lyapunov aplicando (C.1):

$$l = \sum_{i=1}^M p_i (e_i - e_{i-1}) \ln a_i. \quad (\text{C.3})$$

Por lo tanto, para los mapas de Markov el problema se reduce a encontrar el valor de p_i para $i = 1, \dots, M$. A continuación se va a mostrar como resolver este problema para los mapas de Bernoulli, cuya FDP es uniforme en todo su espacio de fases, y

los mapas Markov 1 de la Figura 2.4 y Markov 2 de la Figura 2.5(a), cuyas FDPs invariantes no son uniformes. Para la clase de los mapas no markovianos, como el de la Figura 2.5(b), su FDP invariante natural no suele ser constante dentro de los intervalos de la partición natural y resulta mucho más complicada de hallar. En este caso habitualmente no queda más remedio que recurrir a su cálculo de manera empírica mediante simulación, como se muestra en la Sección 4.3.1.1.

C.2.1. Mapas de Bernouilli

El método usado para calcular una FDP invariante para esta familia de mapas, que además va a ser su FDP invariante natural, es idéntico al empleado para el TM y el SK-TM. Considérese un intervalo arbitrario $J = [\eta, \kappa]$. Puesto que para los mapas de Bernouilli la función en cada región E_i transforma la propia región en el espacio de fases completo, $I = [e_0, e_M]$, cualquier intervalo J tiene exactamente M preimágenes. Para un mapa PWL las preimágenes de un punto cualquiera se pueden obtener mediante la fórmula

$$f_s^{-1}(x) = \frac{x - b_s}{a_s},$$

con $s \in \{1, \dots, M\}$. En consecuencia, la preimagen i -ésima de J resulta

$$f_i^{-1}([\eta, \kappa]) = \left[\frac{\eta - b_i}{a_i}, \frac{\kappa - b_i}{a_i} \right].$$

Ahora considérese la longitud total de los intervalos correspondientes a todas las preimágenes:

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^M \frac{\kappa - b_i - (\eta - b_i)}{a_i} \\ &= (\kappa - \eta) \sum_{i=1}^M a_i^{-1} \\ &= \frac{\kappa - \eta}{e_M - e_0} \sum_{i=1}^M (e_i - e_{i-1}) = \kappa - \eta, \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que $a_i = (e_M - e_0)/(e_i - e_{i-1})$ para un mapa de Bernouilli. Así pues, la longitud de las preimágenes es igual a la del intervalo J , de modo que la FDP invariante natural del mapa es la uniforme en todo su espacio de fases, $I = [e_0, e_M]$, siendo $p_i = 1/(e_M - e_0)$ para $i = 1, \dots, M$.

C.2.2. Mapa de Markov 1

La FDP invariante del mapa de Markov 1 se puede obtener planteando un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Por definición, para un intervalo cualquiera

del espacio de fases del mapa, $J = [\eta, \kappa]$, toda FDP invariante debe cumplir

$$\int_{\eta}^{\kappa} p(x)dx = \sum_{i=1}^M \left| \int_{f_i^{-1}(\eta)}^{f_i^{-1}(\kappa)} p(x)dx \right|.$$

En este caso, seleccionando el intervalo $I_1 = [0, 1]$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^1 p(x)dx = 1 &= \int_0^{2/9} p_1 \chi_{E_1}(x)dx + \int_{9/70}^{59/70} p_2 \chi_{E_2}(x)dx \\ &+ \int_{0,65}^{0,9} p_3 \chi_{E_2}(x)dx + \int_{0,9}^1 p_4 \chi_{E_2}(x)dx \\ &= p_1(e_1 - e_0) + p_2(e_2 - e_1) + p_3(e_3 - e_2) + p_4(e_4 - e_3) \\ &= 0,2 \cdot p_1 + 0,5 \cdot p_2 + 0,2 \cdot p_3 + 0,1 \cdot p_4, \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que $e_0 = 0$, $e_1 = 0,2$, $e_2 = 0,7$, $e_3 = 0,9$ y $e_4 = 1$. Para este mapa se pueden encontrar otras tres ecuaciones linealmente independientes usando por ejemplo los intervalos $I_2 = [0, 0,2]$, $I_3 = [0,9, 1]$ e $I_4 = [0,2, 0,7]$, obteniéndose el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & 1 \\ 70 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & 18 \\ 280 & -360 & 315 & 126 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Y finalmente, se resuelve el sistema invirtiendo la matriz, hallándose fácilmente la densidad de probabilidad en cada intervalo,

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 45/926 \\ 630/463 \\ 630/463 \\ 175/463 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0,0486 \\ 1,3607 \\ 1,3607 \\ 0,3780 \end{bmatrix},$$

donde $\mathbf{p} = [p_1, p_2, p_3, p_4]^T$. Resulta evidente que para este mapa los intervalos E_2 y E_3 son mucho más densos que el E_4 y especialmente que el E_1 , presentando exactamente la misma densidad. Igualmente, se puede obtener la probabilidad de que x pertenezca a cada uno de los intervalos de la partición natural (esto es, la probabilidad de la aparición de cada símbolo del itinerario),

$$\mathbf{P} = \mathbf{\Delta} \cdot \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 9/926 \\ 315/463 \\ 126/463 \\ 35/926 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0,0097 \\ 0,6803 \\ 0,2721 \\ 0,0378 \end{bmatrix},$$

siendo $\mathbf{P} = [\Pr(x \in E_1), \Pr(x \in E_2), \Pr(x \in E_3), \Pr(x \in E_4)]^T$ y $\mathbf{\Delta} = \text{diag}(e_1 - e_0, e_2 - e_1, e_3 - e_2, e_4 - e_3)$. A la vista de este resultado se aprecia por ejemplo que más

del 95 % de las muestras de una secuencia caótica típica van a estar concentradas en E_2 y E_3 , mientras que por el contrario, menos del 1 % se encontrarán dentro del intervalo E_1 . Por último, utilizando (C.1), el exponente de Lyapunov del mapa de Markov 1 es $l = 0,7078$, confirmando que las secuencias generadas por el mismo son caóticas y en un grado superior a las generadas por ejemplo usando la familia de mapas de tienda de campaña o el mapa logístico.

C.2.3. Mapa de Markov 2

La FDP del mapa de Markov 2 se obtiene de manera idéntica a la del mapa de Markov 1. En primer lugar, para el intervalo $I = [0, 1]$ se tiene la ecuación

$$cp_1 + (1 - c)p_2 = 1,$$

mientras que para el intervalo $J = [0, c]$ se tiene una segunda ecuación independiente,

$$cp_1 = (f_2^{-1}(0) - f_2^{-1}(c))p_2,$$

siendo la función inversa para este mapa

$$f_s^{-1}(x) = \begin{cases} c(x - c)/(1 - c), & s = 1; \\ 1 - (1 - c)x, & s = 2. \end{cases}$$

En consecuencia, $f_2^{-1}(0) = 1$ y $f_2^{-1}(c) = 1 - (1 - c)c$, y simplificando la segunda ecuación el sistema resultante es

$$\begin{bmatrix} c & 1 - c \\ 1 & -(1 - c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que se puede resolver fácilmente, obteniéndose $p_1 = 1/(1 + c)$ y $p_2 = 1/(1 - c^2)$. Por lo tanto, la probabilidad de que una muestra de la secuencia caótica se encuentre en E_1 es $\Pr(x \in E_1) = c/(1 + c)$, y la de que se encuentre en E_2 es $\Pr(x \in E_2) = 1/(1 + c)$. Por último, utilizando (C.1) y simplificando la expresión resultante su exponente de Lyapunov se puede escribir como

$$l = \frac{1}{1 + c} \left[c \ln \frac{1}{c} + (1 - c) \ln \frac{1}{1 - c} \right].$$

Nótese que este exponente de Lyapunov es idéntico al del SK-TM, con un término adicional, $1/(1 + c) > 0$, que multiplica a toda la expresión, de modo que el mapa genera secuencias caóticas para cualquier valor de c , como se muestra en la Figura C.4. El valor máximo del exponente ahora es $l \simeq 0,4812$, que se alcanza para $l = (3 - \sqrt{5})/2$.

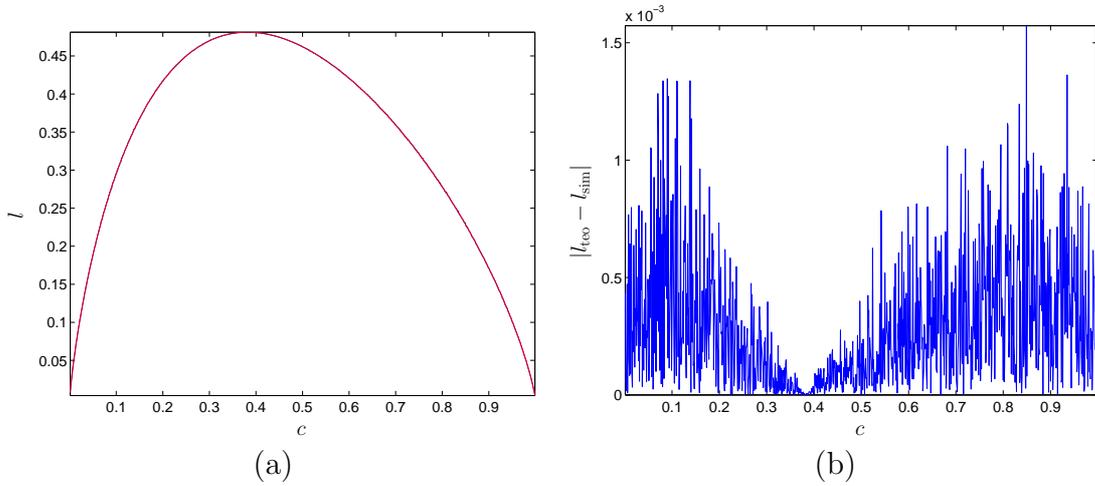


Figura C.4: Exponente de Lyapunov para el mapa de Markov 2 en función de c . (a) Exponente de Lyapunov estimado a partir de 10^6 muestras (azul) y teórico (rojo). (b) Error (en valor absoluto) de la estimación.

C.3. El Mapa Logístico

C.3.1. FDP Invariante

Para el mapa logístico no se conoce ninguna expresión de su FDP invariante en general. Sin embargo, cuando $\lambda = 4$ el mapa logístico es conjugado con el TM con $\beta = 2$, de modo que se puede obtener su FDP invariante en este caso particular a partir de esta de la misma manera que para el S-TM:

$$p_\lambda(x) = \left| \frac{dh^{-1}(x)}{dx} \right| p_{\text{TM}}(h^{-1}(x)).$$

En este caso, $h(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\pi x))$, y la función inversa es por tanto $h^{-1}(x) = \frac{1}{\pi} \arccos(1 - 2x)$, obteniéndose la siguiente FDP invariante para el mapa logístico cuando $\lambda = 4$:

$$p_\lambda(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}, \quad (\text{C.4})$$

con $0 < x < 1$. Para otros valores de λ la FDP del mapa logístico puede tomar formas bastante complicadas, y con características fractales, como se muestra en la Figura C.5.

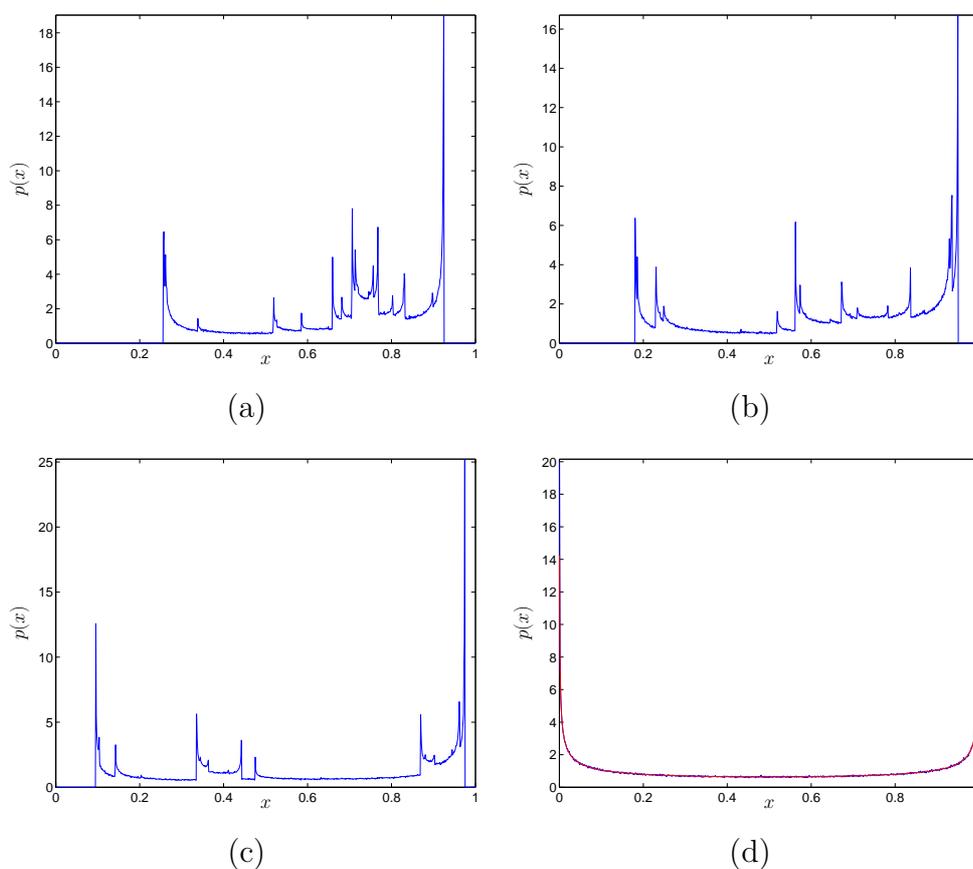


Figura C.5: FDP invariante del mapa logístico para diferentes valores de λ . (a) $\lambda = 3,7$. (b) $\lambda = 3,8$. (c) $\lambda = 3,9$. (d) $\lambda = 4$ (FDP estimada en rojo y teórica en azul).

C.3.2. Exponente de Lyapunov

En cuanto a su exponente de Lyapunov, cuando $\lambda = 4$ este se determina a partir de la siguiente ecuación:

$$l = \int_0^1 \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}} \ln |4(1-2x)| dx.$$

Haciendo el cambio de variable $y = 1 - 2x$, la integral anterior se transforma en

$$l = \int_{-1}^1 \frac{1}{\pi \sqrt{1-y^2}} \ln |4y| dx,$$

que es la expresión del exponente de Lyapunov del mapa cuadrático $f(x) = 1 - 2x^2$, cuya FDP invariante es $p(x) = 1/(\pi\sqrt{1-x^2})$, que es conjugado topológicamente con el mapa logístico, y cuyo valor es $l = \ln 2$ [Beck1993], como era de esperar ya que ese es el valor del exponente de Lyapunov para el TM con $\beta = 2$.

Para el resto de valores de λ no es posible determinar analíticamente el exponente de Lyapunov, y debe recurrirse a su cálculo mediante métodos numéricos aplicando (2.36) sobre una secuencia suficientemente larga. En la Figura C.6 se muestra el exponente de Lyapunov para el mapa logístico en función de λ , confirmando que el mapa es caótico en general para $\lambda > 3,57$, aunque con ventanas de regularidad intercaladas (valores de λ para los que $l \leq 0$).

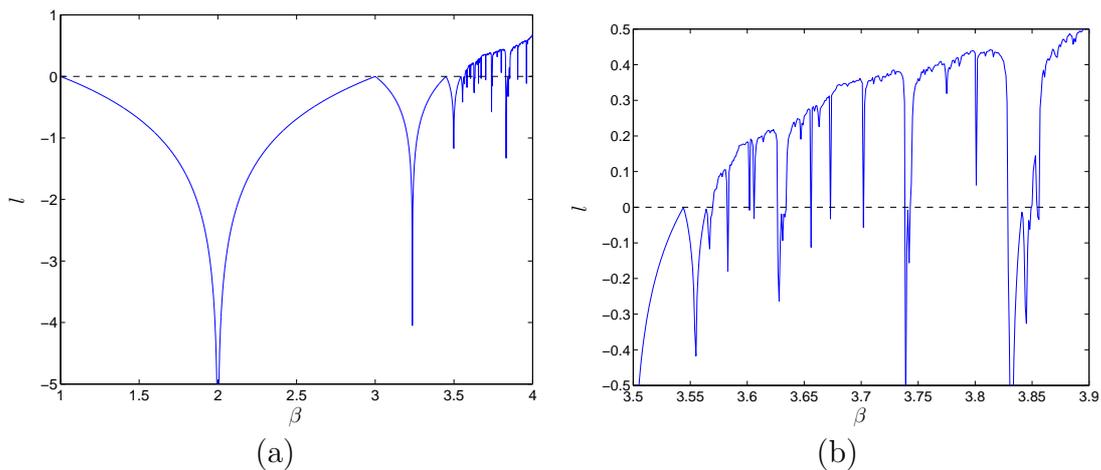


Figura C.6: Exponente de Lyapunov para el mapa logístico en función de λ . (a) Exponente para el rango completo del parámetro de bifurcación ($1 \leq \lambda \leq 4$). (b) Ampliación de la región caótica, $3,57 < \lambda \leq 4$, con la aparición de las ventanas periódicas ($l \leq 0$).

Apéndice D

Iteración k -ésima de Mapas PWL

En este apéndice se demuestran las fórmulas que aparecen en el Capítulo 3 para la iteración hacia delante y hacia atrás de un mapa PWL unidimensional.

D.1. Iteración Hacia Delante

La demostración de (3.15) se realiza por inducción. Para $k = 1$ (3.15) se reduce a

$$f(x[n]) = A_{s[n]}^{0,1}x[n] + A_{s[n]}^{1,1}b_{s[n]}.$$

Y puesto que, a partir de la definición, $A_{s[n]}^{0,1} = a_{s[n]}$ y $A^{1,1} = 1$, se tiene que

$$f(x[n]) = a_{s[n]}x[n] + b_{s[n]} = x[n + 1]. \quad (\text{D.1})$$

Ahora, se supone que (3.15) es cierta válida para un cierto valor de k , es decir, que

$$f_s^k(x[n]) = A_s^{0,k}x[n] + \sum_{m=0}^{k-1} A_s^{m+1,k}b_{s[n+m]} = x[n + k]. \quad (\text{D.2})$$

Y se debe demostrar que $f^{k+1}(x[n]) = x[n + k + 1]$, utilizando la expresión de $f(x)$ y la suposición anterior. En primer lugar, usando (D.1) y (D.2),

$$\begin{aligned} x[n + k + 1] &= f(x[n + k]) \\ &= a_{s[n+k]}f_s^k(x[n]) + b_{s[n+k]} \\ &= a_{s[n+k]}A_s^{0,k}x[n] + a_{s[n+k]} \sum_{m=0}^{k-1} A_s^{m+1,k}b_{s[n+m]} + b_{s[n+k]}. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

A continuación se va a estudiar el valor de cada uno de los términos que aparecen en (D.3). Por un lado, se tiene que

$$\begin{aligned} a_{s[n+k]}A_s^{0,k} &= a_{s[n+k]} \prod_{l=0}^{k-1} a_{s[n+l]} \\ &= \prod_{l=0}^k a_{s[n+l]} = A_s^{0,k+1}, \end{aligned}$$

para el primer término de (D.3). Introduciendo $a_{s[n+k]}$ dentro del sumatorio en (D.3), los términos de este se pueden escribir como

$$\begin{aligned} b_{s[n+m]}a_{s[n+k]}A_s^{m+1,k} &= b_{s[n+m]}a_{s[n+k]} \prod_{l=m+1}^{k-1} a_{s[n+l]} \\ &= b_{s[n+m]} \prod_{l=m+1}^k a_{s[n+l]} = A_s^{m+1,k+1}b_{s[n+m]}. \end{aligned}$$

Y puesto que, por definición, $A_s^{k+1,k+1} = 1$, se puede introducir el último término de (D.3) en el sumatorio, obteniéndose la expresión definitiva de $x[n+k+1]$:

$$x[n+k+1] = A_s^{0,k+1}x[n] + \sum_{m=0}^k A_s^{m+1,k+1}b_{s[n+m]} = f_s^{k+1}(x[n]).$$

Por consiguiente, ya que (3.15) es válida para $k = 1$, y suponiendo su validez para un $k > 1$, también resulta ser válida para $k + 1$, por inducción se concluye que (3.15) es válida para cualquier número natural, como se quería demostrar.

Nótese que, en el caso particular en que sólo existe un intervalo del mapa PWL (mapa lineal), $A_s^{0,k} = a^k$, $A_s^{m+1,k} = a^{k-m-1}$, $b_{s[n+m]} = b$, y sustituyendo estos valores en (D.1), se obtiene que

$$\begin{aligned} f^k(x[n]) = x[n+k] &= a^k x[n] + b \sum_{m=0}^{k-1} a^{k-m-1} \\ &= a^k x[n] + b \frac{1-a^k}{1-a}. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

donde se ha utilizado la fórmula de la suma de una serie geométrica para llegar a la última ecuación [Abramo1965].

D.2. Iteración Hacia Atrás

La demostración de (3.23) se hace, al igual que la de (3.15), por inducción. Para $k = 1$, (3.23) se reduce a

$$f_{s[n-1]}^{-1}(x[n]) = B_{s[n-1]}^{1,1}x[n] - B_{s[n-1]}^{1,1}b_{s[n-1]}.$$

Y como $B_{s[n-1]}^{1,1} = a_{s[n-1]}^{-1}$, se tiene que

$$f_{s[n-1]}^{-1}(x[n]) = a_{s[n-1]}^{-1}x[n] - a_{s[n-1]}^{-1}b_{s[n-1]} = x[n-1]. \quad (\text{D.5})$$

Nuevamente se supone que (3.23) se cumple para un $k > 1$ dado, de modo que

$$f_s^{-k}(x[n]) = B_s^{1,k}x[n] - \sum_{m=1}^k B_s^{m,k}b_{s[n-m]} = x[n-k], \quad (\text{D.6})$$

y el objetivo es demostrar que $f_s^{-(k+1)}(x[n]) = x[n-(k+1)]$. Haciendo uso de (D.5) y (D.6), se tiene que

$$\begin{aligned} x[n-(k+1)] &= f_{s[n-1]}^{-1} \\ &= a_{s[n-(k+1)]}^{-1}f_s^{-k}(x[n]) - a_{s[n-(k+1)]}^{-1}b_{s[n-(k+1)]} \\ &= \frac{B_s^{1,k}}{a_{s[n-(k+1)]}}x[n] - a_{s[n-(k+1)]}^{-1} \sum_{m=1}^k B_s^{m,k}b_{s[n-m]} - \frac{b_{s[n-(k+1)]}}{a_{s[n-(k+1)]}}. \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Al igual que antes, se estudia el valor de cada uno de los términos que aparecen en (D.7) por separado. En primer lugar,

$$\begin{aligned} a_{s[n-(k+1)]}^{-1}B_s^{1,k} &= a_{s[n-(k+1)]}^{-1} \prod_{l=1}^k a_{s[n-l]}^{-1} \\ &= \prod_{l=1}^{k+1} a_{s[n-l]}^{-1} = B_s^{1,k+1}. \end{aligned}$$

Los términos dentro del sumatorio se pueden escribir como

$$\begin{aligned} a_{s[n-(k+1)]}^{-1}b_{s[n-m]}B_s^{m,k} &= a_{s[n-(k+1)]}^{-1}b_{s[n-m]} \prod_{l=m}^k a_{s[n-l]}^{-1} \\ &= b_{s[n-m]} \prod_{l=m}^{k+1} a_{s[n-l]}^{-1} \\ &= b_{s[n-m]}B_s^{m,k+1}. \end{aligned}$$

Por último, se tiene que

$$a_{s[n-(k+1)]}^{-1} = \prod_{l=k+1}^{k+1} a_{s[n-l]}^{-1} = B_s^{k+1,k+1},$$

que se puede introducir en el sumatorio como el último término. Sustituyendo estas tres expresiones en (D.7) se obtiene la expresión definitiva de $x[n-(k+1)]$:

$$x[n-(k+1)] = B_s^{1,k+1}x[n] - \sum_{m=1}^{k+1} B_s^{m,k+1}b_{s[n-m]} = f_s^{-(k+1)}(x[n]).$$

En consecuencia, dado que (3.23) es válida para $k = 1$, y suponiendo su validez para un $k > 1$, resulta ser válida también para $k + 1$, por inducción se concluye que (3.23) resulta válida para cualquier número natural, como se quería demostrar.

De nuevo (D.5) permite encontrar la expresión para la iteración hacia atrás de un mapa lineal simplemente tomando $B_s^{1,k} = a^{-k}$, $B_s^{m,k} = a^{-k+m-1}$, $b_{s[n-m]} = -b/a$, llevando a cabo el sumatorio de la serie geométrica resultante, y reorganizando términos:

$$\begin{aligned} f^{-k}(x[n]) = x[n-k] &= a^{-k}x[n] + \frac{b}{a} \sum_{m=1}^k a^{-k+m-1} \\ &= a^{-k}x[n] - b \frac{a^{-k} - 1}{1 - a}. \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Por último, nótese además que la iteración del mapa PWL hacia atrás se puede obtener también como un caso particular de la iteración del mapa PWL hacia delante sustituyendo $a_{s[n]}$ por $a_{s[n-1]}^{-1}$ y $b_{s[n]}$ por $-b_{s[n-1]}/a_{s[n-1]}$, ya que para cualquier mapa PWL $f^{-1}(x)$ es también un mapa PWL.

Apéndice E

Límites de Estimación para Secuencias Caóticas

E.1. El Límite de Cramer-Rao (CRLB)

El límite de Cramer-Rao (CRLB) indica la varianza mínima que se puede conseguir en un problema de estimación usando un estimador insesgado [VanTre1968, Kay1993]. Aunque en general no se trata de un límite fuerte (en muchos problemas no es posible plantear ningún estimador que alcance el CRLB), si se encuentra un estimador que lo alcance se puede estar seguro de que es el óptimo. En caso contrario, siempre puede servir como referencia para evaluar la calidad de los estimadores propuestos.

En el Capítulo 3 se ha visto que el problema de la estimación ML de la secuencia caótica se puede reformular en función de un único parámetro: una muestra de referencia del mapa caótico, $x[n]$. En este caso el CRLB resulta muy sencillo, y el límite para la varianza del estimador viene dado simplemente por

$$\text{Var}(\hat{x}[n]) \geq \frac{1}{-\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{y}; x[n], \mathbf{s}_{0:n-1})}{\partial x[n]^2}\right)},$$

donde $p(\mathbf{y}; x[n], \mathbf{s}_{0:n-1})$ es la función de verosimilitud mostrada en la Sección 3.2.2, $p(\mathbf{y}; \mathbf{x})$, haciéndose el cambio de notación para resaltar que en realidad dicha FDP únicamente depende de la muestra de referencia elegida, así como de las n primeras muestras del itinerario: $\mathbf{s}_{0:n-1} = [s[0], \dots, s[n-1]]^T$. La función de log-verosimilitud, eligiendo como muestra de referencia $x[n]$, es

$$\ln p(\mathbf{y}; x[n], \mathbf{s}_{0:n-1}) = -\frac{N+1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=0}^N \left(y[k] - f_{\mathbf{s}_{k:n-1}}^{k-n}(x[n])\right)^2. \quad (\text{E.1})$$

Para simplificar las ecuaciones obtenidas, se va a utilizar a partir de ahora la notación $x_{\mathbf{s}}[r; n] = f_{\mathbf{s}}^r(x[n])$, de modo que valores de $r < 0$ indican iteración hacia atrás, valores de $r > 0$ indican iteración hacia delante, y $x_{\mathbf{s}}[0; n] = x[n]$. Y para las derivadas

se combina esta notación con la introducida en la Sección 2.2: $df_s^r(x[n])/dx[n] = \dot{x}_s[r; n]$ y $d^2 f_s^r(x[n])/dx[n]^2 = \ddot{x}_s[r; n]$. Derivando la función de log-verosimilitud dos veces con respecto a $x[n]$ y usando estas expresiones, el CRLB se puede poner como

$$\text{Var}(\hat{x}[n]) \geq \frac{\sigma^2}{\sum_{k=0}^N \text{E}(\dot{x}_s[k-n; n]^2) - \sum_{k=0}^N \text{E}((y[k] - x_s[k-n; n])\ddot{x}_s[k-n; n])}. \quad (\text{E.2})$$

Pero, dado que la esperanza matemática se evalúa con respecto a $p(\mathbf{y}; x[n], \mathbf{s})$, las muestras reales de la secuencia caótica y sus derivadas se pueden sacar fuera. Y puesto que la esperanza de $y[k]$ es igual a $x_s[k-n; n]$, el segundo término de (E.2) se anula, de modo que el CRLB del problema es finalmente

$$\text{Var}(\hat{x}[n]) \geq \frac{\sigma^2}{\sum_{k=0}^N \dot{x}_s[k-n; n]^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{k=1}^n \dot{x}_s[-k; n]^2 + \sum_{k=0}^{N-n} \dot{x}_s[k; n]^2}. \quad (\text{E.3})$$

Utilizando (E.3) y las expresiones para la iteración de un mapa PWL obtenidas en la Sección 3.3, en la Sección E.2 se desarrolla el CRLB para los principales mapas PWL usados en esta Tesis. Sin embargo, para otro tipo de mapas puede resultar más útil una formulación alternativa de (E.3). Utilizando la regla de la cadena y la notación abreviada introducida anteriormente, la derivada de la iteración r -ésima del mapa se puede escribir como

$$\dot{x}_s[r; n] = \begin{cases} \prod_{l=0}^{r-1} \dot{x}[1; n+l], & r > 0; \\ 1, & r = 1; \\ \prod_{l=0}^{|r|-1} \dot{x}_{s[n-l-1]}[-1; n-l], & r < 0. \end{cases}$$

Y utilizando esta expresión, la ecuación del CRLB se transforma en

$$\text{Var}(\hat{x}[n]) \geq \frac{\sigma^2}{\sum_{k=1}^n \prod_{l=0}^{k-1} \dot{x}_{s[n-l-1]}[-1; n-l]^2 + 1 + \sum_{k=1}^{N-n} \prod_{l=0}^{k-1} \dot{x}[1; n+l]^2}. \quad (\text{E.4})$$

Esta formulación es, por ejemplo, la que permite obtener una expresión cerrada para el CRLB del mapa logístico en la Sección E.4.

Dos casos particulares de especial interés ocurren cuando se elige como muestra de referencia $x[N]$, en cuyo caso la secuencia completa se obtiene iterando hacia atrás, y el CRLB resulta

$$\text{Var}(\hat{x}[N]) \geq \frac{\sigma^2}{1 + \sum_{k=1}^N \dot{x}_s[-k; N]^2} = \frac{\sigma^2}{1 + \sum_{k=1}^N \prod_{l=0}^{k-1} \dot{x}_{s[N-l-1]}[-1; N-l]^2}, \quad (\text{E.5})$$

y cuando se escoge como muestra de referencia $x[0]$, de modo que toda la secuencia se genera iterando hacia delante, y se tiene un CRLB

$$\text{Var}(\hat{x}[0]) \geq \frac{\sigma^2}{1 + \sum_{k=1}^N \dot{x}[k; 0]^2} = \frac{\sigma^2}{1 + \sum_{k=1}^N \prod_{l=0}^{k-1} \dot{x}[1; l]^2}. \quad (\text{E.6})$$

Por último, para evaluar la calidad de la estima de la señal completa obtenida se debe tener en cuenta la varianza promedio de toda la secuencia,

$$\frac{1}{N+1} \text{Var}(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \text{Var}(\hat{x}[n]),$$

para la que se puede obtener un límite de modo sencillo simplemente sumando cada una de las varianzas dadas por (E.3) o (E.4).

E.2. CRLB para Mapas PWL Arbitrarios

En la Sección 3.3 se ha visto que la iteración k -ésima de un mapa PWL, hacia atrás o hacia delante, a partir de una muestra de referencia $x[n]$ se puede escribir de manera compacta como (3.26)

$$x_s[n+k] = x_s[k; n] = f_s^k(x[n]) = \alpha_s^n[k]x[n] + \nu_s^n[k],$$

donde $\alpha_s^n[k]$ y $\nu_s^n[k]$ vienen dados por (3.27) y (3.28) respectivamente. Resulta evidente que la derivada con respecto a $x[n]$ de cada muestra de la secuencia es simplemente su pendiente, $\alpha_s^n[k]$, y por consiguiente, aplicando (E.3) el CRLB resulta

$$\text{Var}(\hat{x}[n]) \geq \frac{\sigma^2}{\sum_{k=-n}^{N-n} \alpha_s^n[k]^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{k=1}^n (B_s^{1,k})^2 + \sum_{k=0}^{N-n} (A_s^{0,k})^2}. \quad (\text{E.7})$$

Al igual que para el resto de los mapas, resultan interesantes los casos particulares en que $n = 0$, siendo entonces el CRLB

$$\text{Var}(\hat{x}[0]) \geq \frac{\sigma^2}{\sum_{k=0}^N (A_s^{0,k})^2}, \quad (\text{E.8})$$

y el caso en que $n = N$, valiendo ahora el CRLB

$$\text{Var}(\hat{x}[N]) \geq \frac{\sigma^2}{\sum_{k=0}^N (B_s^{1,k})^2}. \quad (\text{E.9})$$

Analizando las expresiones anteriores y las ecuaciones de $A_s^{m,k}$ y $B_s^{m,k}$, resulta evidente que, cuando la pendiente de todos los intervalos es mayor que uno, el CRLB se incrementa conforme se avanza en la secuencia. Es decir, se pueden estimar mucho mejor los primeros puntos de la misma que los últimos. En el caso en que existen intervalos del mapa con pendiente menor que uno, esto no se puede garantizar, aunque en general también se va a cumplir para cualquier mapa PWL caótico y una secuencia típica (esto es, una secuencia cuyas muestras sigan la FDP invariante del mapa).

Por último, respecto a la varianza promedio de la secuencia, no es posible obtener en general una expresión cerrada compacta de la misma para un mapa PWL cualquiera, y no queda más remedio que recurrir a la aplicación de (E.7) para cada muestra de la secuencia y realizar un promedio de todos los límites:

$$\frac{1}{N} \text{Var}(\hat{\mathbf{x}}) \geq \frac{\sigma^2}{N} \sum_{n=0}^N \left[\sum_{k=1}^n (B_s^{1,k})^2 + \sum_{k=0}^{N-n} (A_s^{0,k})^2 \right]^{-1}.$$

E.3. CRLB para los Principales Mapas PWL Utilizados

En esta sección se obtiene el CRLB de manera explícita para los principales mapas PWL usados en la Tesis. En algunos casos, como el TM, S-TM o BSM, es posible obtener expresiones sencillas para el CRLB. En otros casos, como el SK-TM o el BSK-TM, estas expresiones deben ponerse en función del número de muestras de la secuencia que se encuentran en cada intervalo de la partición natural del mapa, y resultan mucho más complicadas. En estos casos, aunque se proporcionan expresiones explícitas para los mismos en esta sección, puede ser preferible utilizar las ecuaciones de la Sección E.2 para evaluar el CRLB.

E.3.1. Familia de Mapas de Tienda de Campaña

Todos los mapas de la familia de “tent-maps” tienen únicamente dos regiones, dentro de las cuales el mapa es lineal, lo que significa que su pendiente (que es la que determina el valor del CRLB) es constante. En consecuencia, para una muestra de referencia $x[n]$ su CRLB va a depender del número de muestras de la secuencia caótica que pertenezcan a cada región, y de si se generan iterando hacia atrás o hacia delante.

E.3.1.1. El TM y el S-TM

Tanto para el TM como para el S-TM, su pendiente es β en E_1 y $-\beta$ en E_2 . Por lo tanto, los términos que aparecen en el CRLB, dado por (E.4), son: $\dot{x}[1; n+l]^2 = \beta^2$, y $\dot{x}[-1; n-l]^2 = 1/\beta^2$ con $l \geq 0$. En consecuencia, puesto que eligiendo la muestra

n -ésima de la secuencia como referencia son necesarias $N - n$ iteraciones hacia delante y n iteraciones hacia atrás, aplicando (E.4) el CRLB para el TM y el S-TM resulta

$$\text{Var}(\hat{x}[n]) \geq \frac{\sigma^2}{\sum_{k=1}^n \prod_{l=0}^{k-1} \beta^{-2} + 1 + \sum_{k=1}^{N-n} \prod_{l=0}^{k-1} \beta^2} = \frac{\sigma^2}{\frac{1-\beta^{-2(n+1)}}{1-\beta^{-2}} + \frac{1-\beta^{2(N-n+1)}}{1-\beta^2} - 1},$$

donde para obtener la expresión final se ha aplicado la fórmula para la suma de una serie geométrica [Abramo1965]. Reorganizando y simplificando los términos de la ecuación anterior, el CRLB para una muestra arbitraria del TM o el S-TM se puede poner como

$$\text{Var}(\hat{x}[n]) \geq \frac{\beta^{2n}(\beta^2 - 1)\sigma^2}{\beta^{2(N+1)} - 1}. \quad (\text{E.10})$$

Como siempre, existen dos casos de especial relevancia respecto a la elección de la muestra de referencia: $x[0]$ y $x[N]$. En el primer caso todas las muestras se obtienen iterando hacia delante, y el CRLB vale

$$\text{Var}(\hat{x}[0]) \geq \frac{(\beta^2 - 1)\sigma^2}{\beta^{2(N+1)} - 1}.$$

En el segundo caso todas las muestras de la secuencia se obtienen mediante iteración hacia atrás, y el CRLB es

$$\text{Var}(\hat{x}[N]) \geq \frac{\beta^{2N}(\beta^2 - 1)\sigma^2}{\beta^{2(N+1)} - 1}.$$

Resulta evidente que, para $\beta > 1$, $\text{CRLB}(\hat{x}[N]) > \text{CRLB}(\hat{x}[0])$. Es decir, que es posible estimar mejor el primer punto de la secuencia que el último. Y se puede afirmar que $\text{CRLB}(\hat{x}[l]) > \text{CRLB}(\hat{x}[k])$ para todo $l > k$, hecho extensible en general a cualquier mapa caótico. Nótese también que la varianza de $x[0]$ es inversamente proporcional a β^{2N} , de modo que tiende a cero cuando N tiende a infinito, y si se puede encontrar algún estimador que alcance el CRLB este será consistente. No se puede decir lo mismo respecto a todos los puntos de la secuencia. En concreto, resulta trivial demostrar que, conforme N tiende a infinito, la varianza de $x[N]$ tiende a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\beta^{2N}(\beta^2 - 1)\sigma^2}{\beta^{2(N+1)} - 1} = \beta^{-2}(\beta^2 - 1)\sigma^2.$$

Esta expresión no depende de N , de modo que no tiende a cero conforme N tiende a infinito (salvo cuando $\sigma^2 \rightarrow 0$), y por lo tanto no es posible encontrar ningún estimador consistente de $x[N]$.

Por último, en este caso se pueden promediar las expresiones correspondientes a cada muestra de la señal caótica para obtener fácilmente un límite superior para la varianza total de la secuencia:

$$\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \text{Var}(\hat{x}[n]) \geq \frac{1}{N+1} \frac{(\beta^2 - 1)\sigma^2}{\beta^{2(N+1)} - 1} \sum_{n=0}^N \beta^{2n} = \frac{\sigma^2}{N+1}.$$

Sorprendentemente este límite no depende de β , de modo que en teoría cualquier secuencia es susceptible de ser estimada con la misma calidad sin importar el valor del parámetro de bifurcación. Además, se observa que la varianza promedio es inversamente proporcional a la longitud de la secuencia, de modo que, aunque no exista un estimador consistente para alguna de las muestras de la secuencia, el estimador de la secuencia completa sí es consistente. La explicación es sencilla: aunque no se puedan hallar estimadores consistentes para los últimos valores de la señal, conforme N aumenta estas muestras cada vez influyen menos en la varianza promedio de la secuencia, que tiende a cero conforme N tiende a infinito.

E.3.1.2. El SK-TM

El SK-TM es bastante más interesante que el TM y el S-TM, ya que presenta una pendiente diferente en sus dos intervalos. La ecuación del SK-TM es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{c}, & 0 \leq x < c; \\ \frac{1-x}{1-c}, & c \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Y la ecuación inversa queda como

$$y = f^{-1}(x) = \begin{cases} cx, & 0 \leq y < c; \\ 1 - (1-c)x, & c \leq y \leq 1. \end{cases}$$

De modo que para la iteración hacia delante la pendiente en E_1 es $1/c$, y en E_2 es $-1/(1-c)$, mientras que para la iteración hacia atrás la pendiente en E_1 es c , y en E_2 es $-(1-c)$.

Empecemos considerando el CRLB de la primera muestra de la secuencia, $x[0]$. Para ello es necesario definir previamente

$$S_f^{n,k} = \sum_{l=0}^{k-1} (s[n+l] - 1), \quad \text{con } 0 \leq k \leq N - n,$$

donde $s[n+l]$ es la muestra $(n+l)$ -ésima de la secuencia simbólica, y $S_f^{n,k}$ es simplemente la cuenta del número de muestras de $x[n], \dots, x[n+k-1]$ que pertenecen a E_2 . Es decir, la cardinalidad del conjunto $X_2 = \{x[n+l] \in E_2, 0 \leq l \leq k-1\}$. Obviamente, para un cierto k el número de muestras que pertenecen a E_1 es $k - S_f^{n,k}$. Puesto que el CRLB depende únicamente de cuantas muestras de la secuencia pertenezcan a cada una de las dos regiones, usando la segunda forma de (E.6), resulta evidente que

$$\text{Var}(\hat{x}[0]) \geq \frac{\sigma^2}{1 + \sum_{k=1}^N c^{-2(k-S_f^{0,k})} (1-c)^{-2S_f^{0,k}}}.$$

Respecto a la última muestra de la secuencia, se puede seguir un proceso similar. Se define

$$S_b^{n,k} = \sum_{l=1}^k (s[n-l] - 1), \quad \text{con } 1 \leq k \leq n,$$

que es simplemente la cuenta del número de muestras de $x[n-1], \dots, x[n-k]$ que pertenecen a E_2 . Es decir, la cardinalidad del conjunto $X_2^{-1} = \{x[n-l] \in E_2, 1 \leq l \leq k\}$. Nuevamente, para un cierto k el número de muestras que pertenecen a E_1 es $k - S_b^{n,k}$, y usando la segunda expresión de (E.5) el CRLB resulta

$$\text{Var}(\hat{x}[N]) \geq \frac{\sigma^2}{1 + \sum_{k=1}^N c^{2(k-S_b^{N,k})} (1-c)^{2S_b^{N,k}}}.$$

Finalmente, combinando las dos ecuaciones anteriores se obtiene el CRLB para un punto cualquiera de la secuencia caótica:

$$\text{Var}(\hat{x}[n]) \geq \frac{\sigma^2}{\sum_{k=1}^n c^{2(k-S_b^{n,k})} (1-c)^{2S_b^{n,k}} + 1 + \sum_{k=1}^{N-n} c^{-2(k-S_f^{n,k})} (1-c)^{-2S_f^{n,k}}}.$$

Nótese que, puesto que tanto c como $1-c$ se hallan comprendidas entre cero y uno (y por tanto $1/c > 1$ y $1/(1-c) > 1$), el CRLB de $x[0]$ es menor que el de $x[N]$, y en general para cualquier otro par de puntos de la secuencia siempre se cumple que el CRLB de $x[l]$ es menor que el de $x[k]$ para $l < k$.

Las ecuaciones del CRLB obtenidas anteriormente no se pueden simplificar más en un caso general. No obstante, resulta especialmente interesante ver cual es el CRLB de una secuencia típica o el CRLB promedio. Las muestras de una secuencia típica o promedio van a estar distribuidas de acuerdo con la FDP invariante del mapa, que en este caso es uniforme. En consecuencia, la probabilidad de que una secuencia se encuentre en E_1 es c , y la de que se encuentre en E_2 es $1-c$, de modo que $E(S_b^{n,k}) = E(S_f^{n,k}) = (1-c)k$, $E(k - S_b^{n,k}) = E(k - S_f^{n,k}) = ck$, y las ecuaciones para el CRLB de una secuencia típica se pueden simplificar enormemente. En concreto, para $x[0]$

$$\text{Var}(\hat{x}[0]) \geq \frac{\sigma^2}{1 + \sum_{k=1}^N c^{-2ck} (1-c)^{-2(1-c)k}} = \frac{c^{2cN} (1-c)^{2(1-c)N} (c^{2c} (1-c)^{2(1-c)} - 1) \sigma^2}{c^{2c(N+1)} (1-c)^{2(1-c)(N+1)} - 1}.$$

Y puesto que $c^N \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \infty$, el CRLB de $x[0]$ tiende a cero conforme aumenta el número de puntos de la secuencia, al igual que ocurría en el caso del TM y el S-TM. De manera similar se puede obtener el CRLB para $x[N]$, que vale

$$\text{Var}(\hat{x}[N]) \geq \frac{\sigma^2}{1 + \sum_{k=1}^N c^{2ck} (1-c)^{2(1-c)k}} = \frac{(1 - c^{2c} (1-c)^{2(1-c)}) \sigma^2}{1 - c^{2c(N+1)} (1-c)^{2(1-c)(N+1)}}.$$

Y se puede apreciar un efecto similar al que ocurría en el TM: conforme aumenta N el CRLB de $x[N]$ tiende a $(1 - c^{2c}(1 - c)^{2(1-c)})\sigma^2$. Este límite es distinto de cero, y por lo tanto no es posible encontrar un estimador consistente para la última muestra de la secuencia caótica. Resulta fácil comprobar, por ejemplo, que para $c = 0,5$ el CRLB de $x[N]$ tiende a $3\sigma^2/4$ cuando $N \rightarrow \infty$, que obviamente coincide con el límite del TM para $\beta = 2$, ya que ambos mapas son idénticos, y también con el del S-TM para $\beta = 2$.

Juntando las expresiones obtenidas para el CRLB de $x[0]$ y de $x[N]$, y reorganizando y simplificando términos, el CRLB para una muestra arbitraria de la secuencia, $x[n]$, queda como

$$\text{Var}(\hat{x}[n]) \geq \frac{c^{2c(N-n)}(1-c)^{2(1-c)(N-n)}(1-c^{2c}(1-c)^{2(1-c)})\sigma^2}{1-c^{2c(N+1)}(1-c)^{2(1-c)(N+1)}}.$$

Y dado que el índice con la muestra de la secuencia, n , aparece únicamente en el numerador en el exponente de ciertos términos, se va a poder realizar la suma y obtener un límite superior para la varianza promedio:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \text{Var}(\hat{x}[n]) &\geq \frac{1}{N+1} \frac{c^{2cN}(1-c)^{2(1-c)N}(1-c^{2c}(1-c)^{2(1-c)})\sigma^2}{1-c^{2c(N+1)}(1-c)^{2(1-c)(N+1)}} \\ &\cdot \sum_{n=0}^N [c^{-2c}(1-c)^{-2(1-c)}]^n = \frac{\sigma^2}{N+1}. \end{aligned}$$

Este límite es exactamente el mismo que el obtenido para el TM y el S-TM, es independiente del valor del parámetro c , y tiende a cero cuando $N \rightarrow \infty$, de modo que si se halla un estimador de la secuencia que alcance el CRLB para todos sus puntos, entonces va a tratarse de un estimador consistente.

E.3.1.3. El BSK-TM

La obtención del CRLB para el BSK-TM es paralela a la del SK-TM. En este caso la ecuación del mapa es

$$f(x) = \begin{cases} 2\frac{1+x}{1+c} - 1, & -1 \leq x < c; \\ 2\frac{1-x}{1-c} - 1, & c \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Y la función inversa resulta

$$y = f^{-1}(x) \begin{cases} \frac{(1+c)(1+x)}{2} - 1, & -1 \leq y < c; \\ 1 - \frac{(1-c)(1+x)}{2}, & c \leq y \leq 1. \end{cases}$$

En consecuencia, la pendiente de la iteración hacia delante es $2/(1+c)$ para E_1 y $-2/(1-c)$ para E_2 , mientras que la pendiente de la iteración hacia atrás es la inversa:

$(1+c)/2$ en E_1 y $-(1-c)/2$ en E_2 . Usando las funciones definidas en la Sección E.3.1.2, $S_b^{n,k}$ y $S_f^{n,k}$, el CRLB de $x[0]$ para el BSK-TM es

$$\text{Var}(\hat{x}[0]) \geq \frac{\sigma^2}{1 + \sum_{k=1}^N \left(\frac{2}{1+c}\right)^{2(k-S_f^{0,k})} \left(\frac{2}{1-c}\right)^{2S_f^{0,k}}},$$

y el de $x[N]$ es

$$\text{Var}(\hat{x}[N]) \geq \frac{\sigma^2}{1 + \sum_{k=1}^N \left(\frac{1+c}{2}\right)^{2(k-S_b^{N,k})} \left(\frac{1-c}{2}\right)^{2S_b^{N,k}}}.$$

Como siempre, el CRLB de una muestra intermedia de la secuencia, $x[n]$, es una combinación de los dos límites anteriores:

$$\text{Var}(\hat{x}[n]) \geq \frac{\sigma^2}{\sum_{k=1}^n \left(\frac{1+c}{2}\right)^{2(k-S_b^{n,k})} \left(\frac{1-c}{2}\right)^{2S_b^{n,k}} + 1 + \sum_{k=1}^{N-n} \left(\frac{2}{1+c}\right)^{2(k-S_f^{n,k})} \left(\frac{2}{1-c}\right)^{2S_f^{n,k}}}.$$

De nuevo en un caso general estas expresiones no se pueden desarrollar más, pero resulta interesante obtener el CRLB para una secuencia promedio. Al igual que en el caso del SK-TM, la FDP invariante del BSK-TM es uniforme, de modo que $E(S_b^{n,k}) = E(S_f^{n,k}) = (1-c)k/2$ y $E(k - S_b^{n,k}) = E(k - S_f^{n,k}) = (1+c)k/2$. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones anteriores y operando un poco, el CRLB de la muestra inicial, $x[0]$, para una secuencia típica se convierte en

$$\text{Var}(\hat{x}[0]) \geq \frac{(1+c)^{(1+c)N} (1-c)^{(1-c)N} (4 - (1+c)^{1+c} (1-c)^{1-c}) \sigma^2}{2^{2(N+1)} - (1+c)^{(1+c)(N+1)} (1-c)^{(1-c)(N+1)}}.$$

De manera similar, el CRLB para la última muestra de una secuencia típica, $x[N]$, es

$$\text{Var}(\hat{x}[N]) \geq \frac{2^{2N} (4 - (1+c)^{1+c} (1-c)^{1-c}) \sigma^2}{2^{2(N+1)} - (1+c)^{(1+c)(N+1)} (1-c)^{(1-c)(N+1)}}.$$

Sin embargo, aunque los límites de $x[0]$ y $x[N]$ son similares, al igual que en el caso del SK-TM existe una diferencia fundamental entre ambos: el CRLB de $x[0]$ tiende a cero cuando $N \rightarrow \infty$, y el de $x[N]$ no. Se puede ver fácilmente que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{x}[N]) \geq \left(1 - \frac{(1+c)^{1+c} (1-c)^{1-c}}{4}\right) \sigma^2.$$

De modo que, al igual que ocurría en el caso del TM, el S-TM y el SK-TM, para la primera muestra de la secuencia es posible en teoría hallar un estimador eficiente, mientras que para la última muestra va a resultar imposible. Para una muestra intermedia de la secuencia, se puede demostrar que el CRLB es

$$\text{Var}(\hat{x}[n]) \geq \frac{2^{2n} (1+c)^{(1+c)(N-n)} (1-c)^{(1-c)(N-n)} (4 - (1+c)^{1+c} (1-c)^{1-c}) \sigma^2}{2^{2(N+1)} - (1+c)^{(1+c)(N+1)} (1-c)^{(1-c)(N+1)}}.$$

Y observando que n únicamente aparece en el numerador, se puede realizar el sumatorio de manera similar al SK-TM, obteniéndose una expresión idéntica para la varianza promedio,

$$\text{Var}(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \text{Var}(\hat{x}[n]) \geq \frac{\sigma^2}{N+1},$$

que una vez más indica la posibilidad de obtener estimadores consistentes de la secuencia completa (a pesar de no ser posible encontrarlos de $x[N]$), y no depende del parámetro c .

E.3.2. Mapas de Bernouilli

En general resulta complicado plantear una expresión cerrada para el CRLB de un mapa de Bernouilli, y lo más práctico es usar las ecuaciones del CRLB para un mapa PWL cualquiera proporcionadas en la Sección E.2. Sin embargo, en el caso particular en que existen un total de M intervalos equiespaciados, la pendiente en los mismos es constante e igual a M , como se ha visto en la Sección 2.3.3. En este caso, la expresión del CRLB es la misma que la del TM o el S-TM con un parámetro $\beta = M$:

$$\text{Var}(\hat{x}[n]) \geq \frac{M^{2n}(M^2 - 1)\sigma^2}{M^{2(N+1)} - 1}.$$

En el caso particular en que $n = 0$ esta expresión se reduce a

$$\text{Var}(\hat{x}[0]) \geq \frac{(M^2 - 1)\sigma^2}{M^{2(N+1)} - 1},$$

y cuando $n = N$ se tiene que

$$\text{Var}(\hat{x}[N]) \geq \frac{M^{2N}(M^2 - 1)\sigma^2}{M^{2(N+1)} - 1}.$$

El límite para la varianza promedio total es exactamente el mismo que en el caso del TM, de modo que no depende realmente del número de intervalos del mapa.

El mapa de Bernouilli que más se va a utilizar es el mapa de desplazamiento binario (BSM). En este caso el número de intervalos es dos, la pendiente dentro de los mismos también es 2, y su CRLB es el mismo que el del TM y el S-TM para $\beta = 2$:

$$\text{Var}(\hat{x}[n]) \geq \frac{3 \cdot 2^{2n}\sigma^2}{2^{2(N+1)} - 1}.$$

En este caso, el límite de Cramer-Rao para la primera muestra de la secuencia es

$$\text{Var}(\hat{x}[0]) \geq \frac{3\sigma^2}{2^{2(N+1)} - 1},$$

que tiende a cero conforme $N \rightarrow \infty$, y para la última muestra de la secuencia,

$$\text{Var}(\hat{x}[N]) \geq \frac{3\sigma^2}{4 - 2^{-2N}},$$

que tiende a $3\sigma^2/4$ cuando $N \rightarrow \infty$.

E.4. CRLB para el Mapa Logístico

El CRLB del mapa logístico se puede obtener de manera similar a los mapas PWL anteriores, utilizando la ecuación (E.4). Para el mapa logístico, $f'(x[k]) = \dot{x}[1; k] = \lambda(1 - 2x[k])$, de modo que el CRLB de $x[0]$ es

$$\text{Var}(\hat{x}[0]) \geq \frac{\sigma^2}{1 + \sum_{k=1}^N \lambda^{2k} \prod_{l=0}^{k-1} (1 - 2x[l])^2}.$$

Concentrémonos por el momento en el sumatorio que aparece en el denominador:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \lambda^{2k} \prod_{l=0}^{k-1} (1 - 2x[l])^2 &= \sum_{k=1}^N \lambda^{2k} \prod_{l=0}^{k-1} (1 - 4x[l] + 4x[l]^2) \\ &= \sum_{k=1}^N \lambda^{2k} \prod_{l=0}^{k-1} (1 - 4x[l](1 - x[l])) \\ &= \sum_{k=1}^N \lambda^{2k} \prod_{l=0}^{k-1} \left(1 - \frac{4}{\lambda} x[l+1]\right) \\ &= \sum_{k=1}^N \lambda^k \prod_{l=0}^{k-1} (\lambda - 4x[l+1]). \end{aligned}$$

En consecuencia, el CRLB de $x[0]$ resulta

$$\text{Var}(\hat{x}[0]) \geq \frac{\sigma^2}{1 + \sum_{k=1}^N \lambda^k \prod_{l=0}^{k-1} (\lambda - 4x[l+1])}. \quad (\text{E.11})$$

Para un valor de λ arbitrario no se puede obtener una expresión más compacta. Sin embargo, para $\lambda = 4$,

$$\sum_{k=1}^N \lambda^k \prod_{l=0}^{k-1} (\lambda - 4x[l+1]) = \sum_{k=1}^N 4^k \prod_{l=0}^{k-1} 4(1 - x[l+1]),$$

y puesto que $x[l+2] = 4x[l+1](1 - x[l+1])$, el sumatorio que aparece en el denominador del CRLB de $x[0]$ queda finalmente como

$$\sum_{k=1}^N 4^k \prod_{l=0}^{k-1} 4(1 - x[l+1]) = \sum_{k=1}^N 4^k \prod_{l=0}^{k-1} \frac{x[l+2]}{x[l+1]} = \sum_{k=1}^N 4^k \frac{x[k+1]}{x[1]},$$

y la expresión para el CRLB es [Kay1995a, Kay1995b]:

$$\text{Var}(\hat{x}[0]) \geq \frac{x[1]\sigma^2}{\sum_{k=0}^N 4^k x[k+1]}. \quad (\text{E.12})$$

La ecuación del CRLB para la última muestra de la secuencia caótica, $x[N]$, se puede escribir de manera similar a (E.11):

$$\text{Var}(\hat{x}[N]) \geq \frac{\sigma^2}{1 + \sum_{k=1}^N \lambda^{-k} \prod_{l=1}^k (\lambda - 4x[N-l+1])^{-1}}.$$

De nuevo no se puede encontrar una expresión más compacta que sea válida para cualquier valor de λ , pero para $\lambda = 4$ este límite se puede poner de un modo análogo a (E.12):

$$\text{Var}(\hat{x}[N]) \geq \frac{x[N+1]\sigma^2}{\sum_{k=0}^N 4^{-k} x[N-k+1]},$$

siguiendo un razonamiento paralelo al realizado para $x[0]$. Como siempre, el CRLB para un $x[n]$ arbitrario es una mezcla de los límites de $x[0]$ y $x[N]$. Para un valor de λ genérico el CRLB viene dado por

$$\text{Var}(\hat{x}[n]) \geq \frac{\sigma^2}{\sum_{k=1}^n \lambda^{-k} \prod_{l=1}^k (\lambda - 4x[n-l+1])^{-1} + 1 + \sum_{k=1}^{N-n} \lambda^k \prod_{l=0}^{k-1} (\lambda - 4x[n+l+1])},$$

y para $\lambda = 4$ se puede escribir de manera simplificada como

$$\text{Var}(\hat{x}[n]) \geq \frac{x[1]x[n+1]\sigma^2}{x[1] \sum_{k=1}^n 4^{-k} x[n-k+1] + x[1]x[n+1] + x[n+1] \sum_{k=1}^{N-n} 4^k x[k+1]}.$$

En este caso aparecen términos en $x[n]$ tanto en el numerador como en el denominador, de modo que no se puede encontrar una expresión analítica de la varianza promedio. Resulta igualmente imposible obtener el CRLB para una secuencia típica, ya que para la mayoría de los valores del parámetro de bifurcación no se conoce una ecuación analítica para su FDP invariante, y en el caso en que se conoce ($\lambda = 4$), esta presenta una expresión complicada. Por consiguiente estos límites se deben obtener utilizando las ecuaciones anteriores y promediando.

Apéndice F

Límites de Estimación para Mapas Caóticos

F.1. Demostración de la Ecuación (6.7)

En primer lugar, nótese que la ecuación (6.7) está compuesta por dos expresiones. Para demostrar la primera de ellas se aplica la regla de la cadena, obteniéndose que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f^k(x[0]; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial f(f^{k-1}(x[0]; \boldsymbol{\theta}))}{\partial \theta_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta_i} \{ \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{g}(f^{k-1}(x[0]; \boldsymbol{\theta})) + c \} \\ &= g_i(f^{k-1}(x[0]; \boldsymbol{\theta})) + \boldsymbol{\theta}^T \frac{\partial \mathbf{g}(f^{k-1}(x[0]; \boldsymbol{\theta}))}{\partial \theta_i}.\end{aligned}\quad (\text{F.1})$$

A continuación, se vuelve a aplicar la regla de la cadena para obtener la derivada de \mathbf{g} , resultando

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{g}(f^{k-1}(x[0]; \boldsymbol{\theta}))}{\partial \theta_i} &= \left. \frac{d\mathbf{g}(x)}{dx} \right|_{x=f^{k-1}(x[0]; \boldsymbol{\theta})} \frac{\partial f^{k-1}(x[0]; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \\ &= \dot{\mathbf{g}}(f^{k-1}(x[0]; \boldsymbol{\theta})) \frac{\partial f^{k-1}(x[0]; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}.\end{aligned}\quad (\text{F.2})$$

Y por último, sustituyendo (F.2) en (F.1) se obtiene la ecuación buscada:

$$\frac{\partial f^k(x[0]; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = g_i(f^{k-1}(x[0]; \boldsymbol{\theta})) + \boldsymbol{\theta}^T \dot{\mathbf{g}}(f^{k-1}(x[0]; \boldsymbol{\theta})) \frac{\partial f^{k-1}(x[0]; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}.\quad (\text{F.3})$$

La demostración de la segunda expresión de (6.7) se realiza por inducción. Para $k = 1$, (6.7) se reduce a

$$\frac{\partial f(x[0]; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = g_i(x[0]),$$

que obviamente coincide con la derivada de (6.3) con respecto a θ_i para $x = x[0]$. Ahora, se va a suponer que (6.7) es válida para un valor de k arbitrario, es decir, que

$$\frac{\partial f^k(x[0]; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = g_i(x[k-1]) + \sum_{m=1}^{k-1} g_i(x[k-m-1]) \prod_{l=1}^m \boldsymbol{\theta}^T \dot{\mathbf{g}}(x[k-l]), \quad (\text{F.4})$$

y se debe demostrar que la derivada de la iteración $(k+1)$ -ésima de f coincide con (F.4) sustituyendo k por $k+1$. Para ello, se va a hacer uso de la ecuación (F.3), que se acaba de demostrar, y que para $k+1$ resulta

$$\frac{\partial f^{k+1}(x[0]; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = g_i(f^k(x[0]; \boldsymbol{\theta})) + \boldsymbol{\theta}^T \dot{\mathbf{g}}(f^k(x[0]; \boldsymbol{\theta})) \frac{\partial f^k(x[0]; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}.$$

Sustituyendo a continuación la derivada k -ésima de f por (F.4) y teniendo en cuenta que $f^k(x[0]; \boldsymbol{\theta}) = x[k]$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{k+1}(x[0]; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} &= g_i(x[k]) + g_i(x[k-1]) \boldsymbol{\theta}^T \dot{\mathbf{g}}(x[k]) \\ &\quad + \boldsymbol{\theta}^T \dot{\mathbf{g}}(x[k]) \sum_{m=1}^{k-1} g_i(x[k-m-1]) \prod_{l=1}^m \boldsymbol{\theta}^T \dot{\mathbf{g}}(x[k-l]) \\ &= g_i(x[k]) + \sum_{m=0}^{k-1} g_i(x[k-m-1]) \prod_{l=0}^m \boldsymbol{\theta}^T \dot{\mathbf{g}}(x[k-l]) \\ &= g_i(x[k]) + \sum_{n=1}^k g_i(x[k-n]) \prod_{r=1}^n \boldsymbol{\theta}^T \dot{\mathbf{g}}(x[k+1-r]), \end{aligned}$$

donde en el segundo paso simplemente se han agrupado términos dentro del sumatorio, y en el tercer paso se han hecho los cambios de variable $n = m+1$ y $r = l+1$. Se puede apreciar claramente que esta ecuación es idéntica a (F.4) sustituyendo k por $k+1$. En consecuencia, puesto que (6.7) se cumple para $k=1$ y, al suponer su validez para un $k > 1$ cualquiera, resulta válida también para $k+1$, por inducción se puede afirmar que (6.7) es cierta para cualquier número natural.

F.2. Expresión Genérica del CRLB de los Parámetros de un Mapa Caótico

Cuando existen múltiples parámetros para obtener el CRLB del vector de parámetros hay que seguir siempre tres pasos [VanTre1968, Kay1993]. En primer lugar, se calcula la *matriz de información de Fisher*, $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$, de dimensión $p \times p$, cuyo elemento (i, j) -ésimo es

$$[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{i,j} = -\text{E} \left(\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right).$$

A continuación, la varianza mínima del parámetro i -ésimo (esto es, su CRLB) viene dada por el elemento correspondiente de la diagonal principal de $\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$:

$$\text{Var}(\hat{\theta}_i) \geq [\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})]_{i,i}.$$

Por último, para evaluar la calidad global de la estima obtenida se suele utilizar la varianza promedio de todos los parámetros estimados:

$$\frac{1}{p} \text{Var}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \text{Var}(\hat{\theta}_i) \geq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p [\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})]_{i,i} = \frac{1}{p} \text{Tr}(\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})).$$

Para obtener los elementos de la matriz de información de Fisher es necesario conocer la función de log-verosimilitud de las observaciones. Para el problema considerado, esta función de log-verosimilitud viene dada por (E.1),

$$\ln p(\mathbf{y}; x[0], \boldsymbol{\theta}) = -\frac{N+1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^N (y[k] - f^k(x[0]; \boldsymbol{\theta}))^2, \quad (\text{F.5})$$

donde se usa como muestra de referencia $x[0]$, y se ha incluido de manera explícita la dependencia de f^k con el vector de parámetros. Derivando dos veces, con respecto a θ_i y θ_j , se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{y}; x[0], \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} &= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^N \frac{\partial f^k(x[0]; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \frac{\partial f^k(x[0]; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \\ &\quad + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^N (y[k] - f^k(x[0]; \boldsymbol{\theta})) \frac{\partial^2 f^k(x[0]; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

y al aplicar la esperanza matemática con respecto a $p(\mathbf{y}; x[0], \boldsymbol{\theta})$ el segundo término de (F.6) se cancela, obteniéndose una matriz de información de Fisher cuyos elementos vienen dados por

$$[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{i,j} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^N \frac{\partial f^k(x[0]; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \frac{\partial f^k(x[0]; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j}. \quad (\text{F.7})$$

Para un mapa caótico cualquiera no se puede desarrollar más (F.7), ya que la derivada de f^k depende de la forma del mapa, y el CRLB debe encontrarse analizando cada caso particular. Sin embargo, para mapas con dependencia lineal en los parámetros las derivadas que aparecen en (F.7) se pueden calcular explícitamente gracias a las ecuaciones (6.7) y (6.8), hallándose entonces fórmulas cerradas para los elementos de la matriz de información de Fisher. Invertiendo dicha matriz se consiguen las ecuaciones finales del CRLB para cada uno de los parámetros, como se muestra a continuación en la Sección F.3.

F.3. CRLB para Mapas con Dependencia Lineal en sus Parámetros

En esta sección se obtienen ecuaciones explícitas para el CRLB de los principales mapas con dependencia lineal en sus parámetros utilizados en la Tesis. En primer lugar, se desarrolla la expresión del CRLB para un mapa PWL cualquiera. Puesto que no es posible obtener una fórmula cerrada para esta clase de funciones, a continuación se particulariza el CRLB para mapas PWL más simples con un único parámetro: el TM y el S-TM. Por último, se estudian dos mapas no PWL pero con dependencia lineal en su parámetro de bifurcación: el mapa logístico y el del seno.

F.3.1. Mapas PWL Arbitrarios

En el caso de un mapa PWL cuyos límites de la partición son conocidos existen dos tipos de parámetros distintos: la pendiente y el “offset” en cada intervalo. Aplicando (6.7), la derivada de f^k con respecto a la pendiente en el intervalo i -ésimo, a_i , es

$$\frac{\partial f^k(x[0]; \boldsymbol{\theta})}{\partial a_i} = x[k-1]\chi_{E_i}(x[k-1]) + \sum_{m=1}^{k-1} x[k-m-1]\chi_{E_i}(x[k-m-1])A_{s[k-m], \dots, s[k-1]}^{k-m,k}, \quad (\text{F.8})$$

y con respecto a b_i resulta

$$\frac{\partial f^k(x[0]; \boldsymbol{\theta})}{\partial b_i} = \chi_{E_i}(x[k-1]) + \sum_{m=1}^{k-1} \chi_{E_i}(x[k-m-1])A_{s[k-m], \dots, s[k-1]}^{k-m,k}, \quad (\text{F.9})$$

donde $A_{s[k-m], \dots, s[k-1]}^{k-m,k}$ viene dado por (3.14). Combinando estas dos ecuaciones tenemos las cuatro posibilidades para los elementos de $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$:

$$[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{i,j} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^N c_{i,j}[k],$$

con

$$c_{i,j}[k] = \begin{cases} \frac{\partial f^k(x[0]; \boldsymbol{\theta})}{\partial a_i} \frac{\partial f^k(x[0]; \boldsymbol{\theta})}{\partial a_j}, & 1 \leq i, j \leq M; \\ \frac{\partial f^k(x[0]; \boldsymbol{\theta})}{\partial a_i} \frac{\partial f^k(x[0]; \boldsymbol{\theta})}{\partial b_{j-M}}, & 1 \leq i \leq M, M+1 \leq j \leq 2M; \\ \frac{\partial f^k(x[0]; \boldsymbol{\theta})}{\partial b_{i-M}} \frac{\partial f^k(x[0]; \boldsymbol{\theta})}{\partial a_j}, & M+1 \leq i \leq 2M, 1 \leq j \leq M; \\ \frac{\partial f^k(x[0]; \boldsymbol{\theta})}{\partial b_{i-M}} \frac{\partial f^k(x[0]; \boldsymbol{\theta})}{\partial b_{j-M}}, & M+1 \leq i, j \leq 2M. \end{cases} \quad (\text{F.10})$$

Utilizando (F.8) y (F.9) se puede obtener la expresión general de (F.10), de modo que sólo restaría invertir $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$ para hallar el CRLB de cada parámetro. Sin embargo, aunque (F.10) es fácilmente evaluable, no parece que se vaya a poder obtener una

expresión sencilla y compacta de $\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$ para un mapa genérico. Por lo tanto, resulta más razonable obtener límites individuales para cada uno de los mapas más sencillos con los que se va a trabajar, y recurrir a (F.10) únicamente para evaluar el CRLB de aquellos mapas más complicados con múltiples parámetros.

F.3.2. Mapas PWL Unimodales: TM y S-TM

En el caso de mapas con un único parámetro las ecuaciones del CRLB se simplifican mucho. Ahora la matriz de Fisher se reduce a un escalar, y es posible mostrar una expresión cerrada y simple para el CRLB del único parámetro, θ :

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \frac{\sigma^2}{\sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial f^k(x[0]; \theta)}{\partial \theta} \right)^2}, \quad (\text{F.11})$$

donde la derivada de f^k viene dada por (6.8),

$$\frac{\partial f^k(x[0]; \theta)}{\partial \theta} = \sum_{m=0}^{k-1} \theta^m g_1(x[k-m-1]) \prod_{l=1}^m \dot{g}_1(x[k-l]). \quad (\text{F.12})$$

En consecuencia, obtener el CRLB para mapas con dependencia lineal en su parámetro de bifurcación se reduce a determinar $g_1(x)$, hallar su derivada, $\dot{g}_1(x)$, y sustituir en (F.12). Por ejemplo, a la vista de (2.18) resulta evidente que para el TM

$$g_1(x) = \frac{1}{2}(1 - 2|x - 0,5|),$$

cuya derivada es $\dot{g}_1(x) = -s(x - 0,5)$, donde $s(\cdot)$ es la función signo, como de costumbre. Sustituyendo estas dos ecuaciones en (F.12), la derivada k -ésima para el TM es

$$\frac{\partial f^k(x[0]; \beta)}{\partial \beta} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \beta^m (1 - 2|x[k-m-1] - 0,5|) \prod_{l=1}^m s(x[k-l] - 0,5). \quad (\text{F.13})$$

e introduciendo (F.13) en (F.11) se obtendría la ecuación explícita del CRLB para el parámetro de bifurcación del TM.

El CRLB para el S-TM se puede obtener de una manera muy similar. En esta ocasión de (2.22) se deduce que $g_1(x) = 1 - |x|$, y que $\dot{g}_1(x) = -s(x)$, de modo que la derivada k -ésima para el S-TM resulta

$$\frac{\partial f^k(x[0]; \beta)}{\partial \beta} = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \beta^m (1 - |x[k-m-1]|) \prod_{l=1}^m s(x[k-l]). \quad (\text{F.14})$$

Y de nuevo introduciendo (F.14) en (F.11) se tiene la fórmula para el CRLB del parámetro de bifurcación del S-TM.

F.3.3. Mapas No PWL: Mapa Logístico y Mapa del Seno

El CRLB para mapas no PWL pero cuya dependencia con el parámetro de bifurcación sea lineal se obtiene de manera idéntica al del TM y S-TM mostrado en la Sección F.3.2. Como ejemplo, en esta sección se calcula el CRLB para el mapa logístico, el mapa del seno y el mapa de Singer.

Analizando (2.26) se observa que, para el mapa logístico, $g_1(x) = x(1-x)$ y $\dot{g}_1(x) = 1 - 2x$, de modo que su derivada k -ésima viene dada por

$$\frac{\partial f^k(x[0]; \lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{m=0}^{k-1} \lambda^m x[k-m-1](1-x[k-m-1]) \prod_{l=1}^m (1-2x[k-l]).$$

De igual modo, para el mapa sinusoidal 1 de la Tabla 2.2, $g_1(x) = \sin(\pi x)$ y $\dot{g}_1(x) = \pi \cos(\pi x)$, y por lo tanto su derivada k -ésima resulta

$$\frac{\partial f^k(x[0]; c)}{\partial c} = \sum_{m=0}^{k-1} \pi^m c^m \sin(\pi x[k-m-1]) \prod_{l=1}^m \cos(\pi x[k-l]).$$

Por último, para el mapa de Singer

$$g_1(x) = p_s(x) = 7,86x - 23,31x^2 + 28,75x^3 - 13,3x^4,$$

y, derivando,

$$\dot{g}_1(x) = \dot{p}_s(x) = 7,86 - 46,62x + 86,25x^2 - 53,2x^3,$$

de modo que

$$\frac{\partial f^k(x[0]; c)}{\partial c} = \sum_{m=0}^{k-1} c^m p_s(x[k-m-1]) \prod_{l=1}^m \dot{p}_s(x[k-l]).$$

En las tres ocasiones, sustituyendo la expresión de la derivada parcial de f^k con respecto al parámetro de bifurcación en (F.11) se obtiene una ecuación cerrada para el CRLB, que, al igual que en el caso del TM y del S-TM, depende tanto del parámetro del mapa como de la secuencia caótica.

Apéndice G

Convergencia del Algoritmo de Estimación Competitivo

En este apéndice se sigue un razonamiento paralelo al de [Kohon1991] para demostrar que (6.62) es el gradiente exacto con respecto a θ de (6.61), y que por lo tanto (6.60) es el algoritmo de gradiente estocástico que resuelve de manera exacta el problema siempre que se cumplan las condiciones de convergencia con respecto a μ [Luengo2004a]. Para ello es necesario enunciar previamente los dos lemas que se muestran a continuación [Kohon1991, Luengo2004a]. El primero va a permitir sustituir el proceso de búsqueda del mínimo error (altamente no lineal y no diferenciable), necesario para encontrar los vectores ganadores, por un límite diferenciable. El segundo permite el intercambio del límite y la derivada parcial, garantizando que el resultado obtenido es idéntico en ambos casos.

Lema G.1 *Sea a_i un conjunto de números reales positivos con $i = 0, \dots, M - 1$. Entonces, se cumple que*

$$\min_i a_i = \lim_{r \rightarrow -\infty} \left(\sum_{i=0}^{M-1} a_i^r \right)^{1/r}.$$

Lema G.2 *Sea un funcional de la forma*

$$f(x, r) = (1 + x^{2r})^{1/r},$$

con $x, r \in \mathbb{R}$ en general. Entonces, exceptuando aquellos valores en los que $f(x, r)$ o $\lim_{r \rightarrow -\infty} f(x, r)$ no son diferenciables (como $x = 0$ ó $x = \pm 1$), se cumple que

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} \frac{\partial f(x, r)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lim_{r \rightarrow -\infty} f(x, r) \right).$$

Ahora ya se está en disposición de comenzar la demostración. En primer lugar, considérese el error de predicción de la muestra k -ésima para la mejor hipótesis, que aparece tanto en la función de coste determinista (6.57) como en la estocástica (6.61), y nótese que, aplicando el Lema G.1, se puede poner como

$$\begin{aligned}\varepsilon_c[k]^2 &= (y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_c[k])^2 \\ &= \min_i \{(y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_i[k])^2\} \\ &= \lim_{r \rightarrow -\infty} \left[\sum_{i=0}^{M-1} (y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_i[k])^{2r} \right]^{1/r}.\end{aligned}\quad (\text{G.1})$$

A continuación, téngase en cuenta que la última función cuyo límite se evalúa en (G.1),

$$f(\boldsymbol{\theta}, r) = \left[\sum_{i=0}^{M-1} (y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_i[k])^{2r} \right]^{1/r},$$

está bien definida, presenta un único valor y es continua y diferenciable en sus argumentos excepto cuando $\varepsilon_c[k] = 0$ o cuando $\varepsilon_j[k] = \sum_{i \neq j} \varepsilon_i[k]^2$. Afortunadamente estas condiciones presentan una probabilidad de ocurrencia nula debido a que las observaciones tienen una FDP continua. En consecuencia, usando el Lema G.2 se puede calcular el gradiente exacto de la esperanza matemática de (G.1) en casi todos los casos:

$$\begin{aligned}\nabla_{\boldsymbol{\theta}}(J_e(\boldsymbol{\theta})) &= \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \left\{ \mathbb{E} \left(\lim_{r \rightarrow -\infty} \left[\sum_{i=0}^{M-1} (y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_i[k])^{2r} \right]^{1/r} \right) \right\} \\ &= \mathbb{E} \left(\lim_{r \rightarrow -\infty} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \left[\sum_{i=0}^{M-1} (y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_i[k])^{2r} \right]^{1/r} \right).\end{aligned}\quad (\text{G.2})$$

Denotando

$$A = \sum_{i=0}^{M-1} (y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_i[k])^{2r},$$

(G.2) se convierte en

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}}(J_e(\boldsymbol{\theta})) = \mathbb{E} \left(\lim_{r \rightarrow -\infty} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} A^{1/r} \right),$$

siendo

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}} A^{1/r} = \frac{1}{r} A^{1/r-1} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} A, \quad (\text{G.3})$$

y el gradiente de A :

$$\begin{aligned}\nabla_{\boldsymbol{\theta}} A &= r \sum_{i=0}^{M-1} [(y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_i[k])^2]^{r-1} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} (y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_i[k])^2 \\ &= -2r \sum_{i=0}^{M-1} [(y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_i[k])^2]^{r-1} (y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_i[k]) \mathbf{u}_i[k],\end{aligned}\quad (\text{G.4})$$

con $\mathbf{u}_i[k] = [v_1[k], \dots, v_p[k]]^T$. Ahora, sustituyendo (G.4) en (G.3) se tiene que

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}} A^{1/r} = -2A^{1/r} \frac{\sum_{i=0}^{M-1} [(y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_i[k])^{2r-1} (y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_i[k]) \mathbf{u}_i[k]]}{A},$$

y en consecuencia

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}} (J_e(\boldsymbol{\theta})) = \mathbb{E} \left(\lim_{r \rightarrow -\infty} -2A^{1/r} B \right) = -2 \mathbb{E} \left(\lim_{r \rightarrow -\infty} A^{1/r} \cdot \lim_{r \rightarrow -\infty} B \right), \quad (\text{G.5})$$

válido siempre que el producto de los límites no resulte en una indeterminación, y con

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sum_{i=0}^{M-1} [(y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_i[k])^{2r-1} (y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_i[k]) \mathbf{u}_i[k]]}{A} \\ &= \sum_{i=0}^{M-1} \frac{(y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_i[k])^{2r} (y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_i[k])^{-1} \mathbf{u}_i[k]}{\sum_{j=0}^{M-1} (y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_j[k])^{2r}} \\ &= \sum_{i=0}^{M-1} \left(\sum_{j=0}^{M-1} \frac{(y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_j[k])^{2r}}{(y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_i[k])^{2r}} \right)^{-1} (y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_i[k])^{-1} \mathbf{u}_i[k]. \end{aligned}$$

Para completar la demostración ya sólo resta calcular los dos límites que aparecen en (G.5). De (G.1) se tiene que

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} A^{1/r} = \varepsilon_c[k]^2 = (y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_c[k])^2, \quad (\text{G.6})$$

y para obtener el límite de B nótese que

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow -\infty} \left(\sum_{j=0}^{M-1} \frac{(y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_j[k])^{2r}}{(y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_i[k])^{2r}} \right)^{-1} &= \frac{1}{\lim_{r \rightarrow -\infty} \sum_{j=0}^{M-1} \left(\frac{(y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_i[k])^2}{(y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_j[k])^2} \right)^r} \\ &= \lim_{r \rightarrow -\infty} \left(\frac{(y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_c[k])^{2r}}{(y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_i[k])^{2r}} \right), \quad (\text{G.7}) \end{aligned}$$

debido a que, cuando $r \rightarrow \infty$ el término que predomina en el sumatorio es el mayor, esto es, aquel cuyo denominador (el error de aproximación) es menor: $\varepsilon_c[k]$. Notando que en (G.7) el numerador va a ser siempre menor que el denominador excepto cuando $\mathbf{v}_i[k] = \mathbf{v}_c[k]$ (esto es, se tiene $\lim_{r \rightarrow \infty} x^r$, con $0 \leq x \leq 1$), (G.7) queda como

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{(y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_c[k])^{2r}}{(y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_i[k])^{2r}} \right) = \delta[c - i] = \begin{cases} 1, & i = c; \\ 0, & i \neq c; \end{cases}$$

y en consecuencia el límite de B resulta

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} B = (y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_c[k])^{-1} \mathbf{u}_c[k]. \quad (\text{G.8})$$

Finalmente, sustituyendo (G.6) y (G.8) en (G.5) se obtiene la expresión del gradiente exacto de (6.61) buscada,

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}}(J_e(\boldsymbol{\theta})) = -2\text{E}((y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_c^n[k])\mathbf{u}_c^n[k]) = -2\text{E}(\varepsilon_c^n[k]\mathbf{u}_c^n[k]),$$

que efectivamente coincide con (6.62). La aproximación muestral de este gradiente es

$$[\nabla_{\boldsymbol{\theta}}(J_e(\boldsymbol{\theta}))]_1 = -2(y[k] - \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{v}_c[k])\mathbf{u}_c[k] = -2\varepsilon_c^n[k]\mathbf{u}_c[k], \quad (\text{G.9})$$

y dado que la mayor pendiente de J_e con respecto a $\boldsymbol{\theta}$ se produce siguiendo la dirección de $-\nabla_{\boldsymbol{\theta}}(J_e(\boldsymbol{\theta}))_1$, introduciendo (G.9) en la expresión estándar del algoritmo LMS se obtiene el algoritmo CLMS (6.60):

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^n = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{n-1} + \mu^n \varepsilon_c^n[k]\mathbf{u}_c^n[k].$$

Lista de Figuras

1.1.	Comparación entre la visión científica del mundo antes y después del descubrimiento del caos determinista	5
1.2.	Número de artículos de la base de datos del IEEE que contienen la palabra “chaos” o “chaotic” en el “abstract” entre 1988 y 2005.	8
2.1.	Iteración gráfica para el mapa logístico con distintos valores de λ	34
2.2.	Diferencias entre las secuencias caóticas generadas mediante la iteración hacia atrás con distintas secuencias simbólicas.	35
2.3.	Ejemplo de mapa PWL: Mapa de desplazamiento de Bernouilli	37
2.4.	Ejemplo de mapa PWL de Markov con cuatro intervalos	40
2.5.	Ejemplo de mapa PWL de Markov con dos intervalos y mapa no markoviano con tres intervalos	41
2.6.	Comportamiento dinámico del “tent-map” para distintos valores de β	43
2.7.	Diagrama de bifurcación para el mapa de tienda de campaña (TM).	44
2.8.	Ejemplos de las cuatro familias de mapas de tienda de campaña.	46
2.9.	Diagrama de bifurcación del mapa logístico	49
2.10.	Representación de las secuencias posibles para un mapa de Markov	53
2.11.	Partición generadora para el TM con $\beta = 2$	54
2.12.	Ejemplo de ergodicidad para el S-TM	60
2.13.	Divergencia de trayectorias debido a las diferentes resoluciones usadas en las simulaciones.	65
2.14.	Interpretación gráfica del teorema del “shadowing”	67
3.1.	Muestra de la inestabilidad numérica en la iteración hacia delante de un mapa caótico.	75
3.2.	Generación recursiva de la matriz A para $N = 3$	78
3.3.	Muestra de la estabilidad numérica en la iteración hacia atrás de un mapa caótico.	82
3.4.	Generación recursiva de la matriz B para $N = 3$	84
3.5.	Muestra del comportamiento de las expresiones obtenidas para la iteración hacia delante y hacia atrás.	86
3.6.	Función de coste sin ruido para el TM y diferentes longitudes de la señal caótica.	89

3.7.	Función de coste sin ruido para el TM y diferentes porciones del espacio de fases.	90
3.8.	Ejemplos de función de coste cuando el itinerario es conocido	93
3.9.	Función de coste del estimador ML cuando el itinerario es desconocido.	108
3.10.	Ejemplo de aplicación del método de búsqueda en una rejilla	111
3.11.	Ejemplo del carácter cuadrático de la función de coste para mapas no PWL.	113
3.12.	Comparación del rendimiento del estimador ML de una secuencia generada usando el BSK-TM para distintos puntos de referencia.	116
3.13.	Comparación del rendimiento del estimador ML de una secuencia generada usando el BSM y el TM para distintos puntos de referencia.	117
3.14.	MSE, varianza y sesgo del estimador ML para secuencias generadas usando el BSM, el BSK-TM y el TM.	118
3.15.	Comparación del MSE del estimador ML en función de la muestra de la secuencia usando como referencia la muestra inicial para el SK-TM.	119
3.16.	MSE del estimador ML para secuencias generadas por diversos mapas caóticos unidimensionales.	121
3.17.	MSE del estimador ML de una secuencia generada usando el TM para dos condiciones iniciales distintas.	122
3.18.	MSE del estimador ML de una secuencia caótica generada usando dos mapas multimodales distintos: el mapa PWL1 y el mapa Markov2.	123
3.19.	MSE del estimador ML de una secuencia caótica generada usando el SK-TM para diferente número de iteraciones.	123
4.1.	Comparación de la FDP invariante para un mapa de Markov (Markov1) y un mapa no markoviano (PWL1).	137
4.2.	FDP a posteriori de la condición inicial del mapa cuando el itinerario es conocido	145
4.3.	FDP a posteriori de la condición inicial del mapa cuando el itinerario es desconocido	148
4.4.	Comparación de la función de verosimilitud (estimador ML) y la FDP a posteriori (estimador MAP)	149
4.5.	Funciones de corrección para el estimador MS con secuencia simbólica conocida	155
4.6.	Desviación del estimador MS de la condición inicial con respecto al punto central de la región en función de la desviación de las observaciones con un itinerario conocido	158
4.7.	Comparación del MSE de los estimadores ML, MAP y MS para dos secuencias caóticas generadas usando el S-TM y el mapa Markov2.	172
4.8.	Comparación del rendimiento de los estimadores ML, MAP y MS para secuencias generadas usando diferentes mapas caóticos y condiciones iniciales.	174

4.9. Relación entre el rendimiento de los estimadores Bayesianos y la región a la que pertenece $x[0]$	175
4.10. Sesgo, Varianza y MSE de los estimadores MAP, MS y ML de una secuencia caótica generada usando los mapas PWL1 y Markov1.	177
4.11. Tasa de aciertos en los símbolos del itinerario de los estimadores ML, MAP y MS para diferentes mapas caóticos y condiciones iniciales.	178
4.12. MSE de los distintos estimadores MCMC en función del número de muestras usadas para estimar la condición inicial.	180
4.13. Comparación del rendimiento de los estimadores MCMC para secuencias generadas usando diferentes condiciones iniciales y valores del parámetro de bifurcación.	181
4.14. Comparación del MSE de la condición inicial de los estimadores MCMC para secuencias generadas usando diferentes condiciones iniciales con $\lambda = 4$	182
4.15. Comparación de la SNR de la secuencia estimada completa de los estimadores MCMC para secuencias generadas usando diferentes condiciones iniciales con $\lambda = 4$	183
4.16. Comparación del MSE y la SNR de la señal caótica estimada para los estimadores MCMC con secuencias “largas”.	183
5.1. Diagrama de bloques del equivalente discreto en banda base de un sistema de comunicaciones digitales PAM.	208
5.2. Lazo básico del VA en decodificación para un mapa de Markov en el que todas las transiciones entre estados son válidas, $r = 1$ y $M = 2$	216
5.3. Lazo básico del VA para diversos mapas PWL cuando $r = 1$	217
5.4. Lazo básico del VA para diversos mapas PWL cuando $r = 2$	218
5.5. Diagrama de “trellis” de decodificación para un ejemplo de estimación de una señal caótica generada usando el mapa PWL1.	219
5.6. Comparación del rendimiento de los estimadores FB-ML y HC-ML(k) para secuencias generadas por distintos mapas caóticos.	221
5.7. Tasa de aciertos en los símbolos del itinerario de los estimadores FB-ML y HC-ML(k) para los mismos ejemplos de la Figura 5.6.	223
5.8. MSE total de la señal estimada para secuencias “largas” generadas usando el SK-TM.	224
5.9. Comparación del MSE de los algoritmos SAGE1 y SAGE2 con el del HC-ML(0) para el SK-TM.	225
5.10. Comparación del MSE del algoritmo de Viterbi con el ML y el HC-ML(0) para el SK-TM y el BSM.	226
5.11. Comparación del MSE de los algoritmos SAGE2, de Viterbi y HC-ML(0) para el SK-TM con secuencias cortas.	227
5.12. Comparación del MSE de los algoritmos SAGE2, de Viterbi y HC-ML(0) para el SK-TM con secuencias “largas”.	228

6.1.	Monotonía de $f^N(x[0]; \beta)$ dentro de las regiones de la partición $(N - 1)$ -ésima y convexidad de $J(x[0]; \beta)$ para el TM y el S-TM.	241
6.2.	Monotonía de $f^k(x[0]; \beta)$ y convexidad de $J(x[0]; \beta)$ para el S-TM con $x[0] = -0,7223$, $\beta = 2$ y $N = 10$	242
6.3.	Interpretación geométrica del error de predicción para los estimadores LS y TLS con el mapa logístico.	251
6.4.	Comparación del rendimiento del estimador HC-ML con el de búsqueda en una rejilla (ML aproximado) para el S-TM.	268
6.5.	MSE del estimador HC-ML en función de la longitud de la secuencia y distintos valores de SNR para el S-TM.	268
6.6.	Comparación del rendimiento de los estimadores MBE, LS y TLS para secuencias generadas por distintos mapas caóticos unimodales.	269
6.7.	Convergencia del algoritmo BCLMS con una inicialización aleatoria.	270
6.8.	Convergencia del algoritmo FCLMS con una inicialización aleatoria.	271
6.9.	Convergencia del algoritmo BCLMS con una inicialización fija para un mapa de Bernouilli con cuatro intervalos.	272
6.10.	Convergencia del algoritmo BCLMS con una inicialización fija para otro mapa de Bernouilli con cuatro intervalos.	273
6.11.	MSE de la estima del parámetro para los algoritmos BCLMS y FCLMS en función de la SNR para el SK-TM.	273
6.12.	Comparación del MSE del algoritmo HCLS con el de los algoritmos BCLMS y FCLMS para el SK-TM.	274
6.13.	MSE de la secuencia caótica completa para los algoritmos BCLMS y FCLMS con distintos valores de SNR en función del parámetro de bifurcación para el SK-TM y el BSK-TM.	275
7.1.	Transmisor y receptor para un sistema de sincronización del tipo “master-slave” o “drive-response”.	282
7.2.	Transmisor y receptor para un sistema de sincronización del tipo “error-feedback” u “observer-based”.	284
7.3.	Transmisor y receptor para un sistema de enmascaramiento caótico.	285
7.4.	Diagrama de bloques del transmisor para diversos sistemas de conmutación caótica binarios.	287
7.5.	Diagrama de bloques del transmisor para un sistema de conmutación caótica binario basado en dos mapas unidimensionales.	294
7.6.	Diagrama de bloques del transmisor para un sistema de conmutación caótica binario basado en un único mapa unidimensional.	295
7.7.	Diagrama de bloques del canal y del receptor para un sistema de conmutación caótica cualquiera.	296
7.8.	BER para el esquema de conmutación caótica unipodal usando el BSK-TM con dos parámetros de bifurcación distintos.	299
7.9.	BER para el esquema de conmutación caótica antipodal usando el BSK-TM con un único parámetro de bifurcación.	300

7.10. Diagrama de bloques del transmisor para el sistema de codificación simbólica propuesto.	301
7.11. Ejemplo de señal caótica generada mediante iteración hacia atrás. . . .	303
7.12. Mapas caóticos considerados para el esquema de codificación simbólica propuesto.	304
7.13. Diagramas de estados para los mapas de las figuras 7.12(c) y (d). . . .	306
7.14. Diagramas de “scattering” para los cuatro mapas de la Figura 7.12. . .	307
7.15. BER para el esquema de codificación caótica usando los dos últimos mapas de la Figura 7.12.	308
7.16. Comparación del rendimiento de los mapas 2 y 4 de la Figura 7.12. . .	309
7.17. Diagrama de bloques del esquema de comunicación basado en OFDM con codificación caótica de las subportadoras: transmisor y canal. . . .	310
7.18. Diagrama de bloques del receptor del esquema de comunicación basado en OFDM con codificación caótica de las subportadoras.	311
7.19. Respuesta en frecuencia (módulo y fase) de los distintos canales usados. .	312
7.20. Comparación del rendimiento del sistema OFDM con codificación caótica para el canal Gaussiano y tres canales multitrayecto.	313
8.1. Interpretación de la conjugación topológica desde el punto de vista de la transformación entre aplicaciones matemáticas.	323
8.2. Relaciones de equivalencia entre las órbitas hacia delante de dos mapas topológicamente conjugados.	323
C.1. Preimágenes de un intervalo arbitrario para el TM.	344
C.2. FDP invariante natural del TM para diferentes valores de β	345
C.3. Exponente de Lyapunov para el SK-TM en función de c	348
C.4. Exponente de Lyapunov para el mapa de Markov 2 en función de c . . .	352
C.5. FDP invariante del mapa logístico para diferentes valores de λ	353
C.6. Exponente de Lyapunov para el mapa logístico en función de λ	354

Lista de Tablas

1.1. Ejemplos de áreas de conocimiento y sistemas en los que se han encontrado indicios de comportamiento caótico.	6
2.1. Diferentes tipos de señales en función de sus variables independientes y dependientes.	22
2.2. Recopilación de diversos mapas caóticos unidimensionales.	48
3.1. Conjunto de secuencias simbólicas válidas para la iteración hacia atrás del TM con $\beta = 2$ a partir de $x[3] = 0,26856$	81
3.2. Partición en regiones del espacio de fases en función de $s[n - 1]$ para el mapa de Markov de la Figura 2.4.	95
3.3. Partición en regiones del espacio de fases en función de $\mathbf{s} = [s[0], s[1], s[2]]^T$ para el mapa de Markov de la Figura 2.5(a).	97
3.4. Partición en regiones del espacio de fases en función de $\mathbf{s} = [s[0], s[1]]^T$ para el mapa PWL no markoviano de la Figura 2.5(b).	98
3.5. Partición en regiones del espacio de fases del TM en función de β y $\mathbf{s} = [s[0], s[1]]^T$	101
3.6. Número de regiones de la partición del espacio de fases del TM en función del itinerario para distintos valores de β y N	101
3.7. Partición en regiones del espacio de fases del mapa de Markov de la Figura 2.5(a) en función de N y $\mathbf{s} = [s[0], s[1], s[2], s[3]]^T$	102
3.8. Número de regiones de la partición del espacio de fases para tres mapas PWL distintos en función del itinerario para distintos valores de N . . .	103
4.1. Número de regiones típicas de la partición del espacio de fases del TM en función del itinerario para distintos valores de β y N	138
4.2. Ganancia mínima, máxima y media de los estimadores MAP y MS con respecto al estimador ML para los ejemplos de las Figuras 4.7 y 4.8. . .	176
4.3. Rendimiento (MSE) promedio de los estimadores ML, MAP y MS para el S-TM con $\beta = 1,5$	179
4.4. MSE promedio del HC-ML y de los distintos estimadores basados en el algoritmo MH para el mapa logístico.	184
5.1. Índice de crecimiento del número de regiones del TM, $k(N)$, para distintos valores de β y N	190

5.2.	Conjunto de valores de la señal caótica posibles cuando $n = 2$ para el ejemplo de aplicación del VA propuesto con el mapa PWL1.	219
5.3.	Valor de la señal caótica estimado en cada estado en función de la iteración del algoritmo para el ejemplo de aplicación del VA propuesto con el mapa PWL1.	220
5.4.	Coste de cada estado en función de la iteración del algoritmo para el ejemplo de aplicación del VA propuesto con el mapa PWL1.	220
5.5.	Comparación del MSE promedio de los estimadores HC-ML(0), SAGE1, SAGE2 y ML para el SK-TM con $c = 0,9$ y $N = 6$	226
5.6.	Comparación del MSE promedio de los estimadores HC-ML(0), VA ($r = 1, 2, \text{ y } 3$) y ML para el BSM con $N = 4$	227
6.1.	Funciones necesarias para construir los distintos estimadores subóptimos de los seis mapas caóticos utilizados en las simulaciones.	246
6.2.	Forma de los estimadores MBE y LS para los seis mapas caóticos de la Tabla 6.1 utilizados en las simulaciones.	250
6.3.	Errores de aproximación para el algoritmo FCLMS del SK-TM, del BSK-TM y de un mapa de Bernouilli genérico.	267
6.4.	Vectores de referencia para el algoritmo FCLMS del SK-TM, del BSK-TM y de un mapa de Bernouilli genérico.	267
7.1.	Parámetros (pendiente y “offset”) de los cuatro mapas propuestos para el esquema de codificación de la Figura 7.10 en los intervalos útiles. . .	305