

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA



**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE
COMUNICACIONES**

TESIS DOCTORAL

**ESTIMACIÓN ÓPTIMA DE SECUENCIAS
CAÓTICAS CON APLICACIÓN EN
COMUNICACIONES**

**Autor : David Luengo García
Directores : Carlos Pantaleón Prieto
Ignacio Santamaría Caballero**

Grupo de Tratamiento Avanzado de Señal

Septiembre de 2006

Capítulo 3

Estimación de Máxima Verosimilitud de Secuencias Caóticas

3.1. Introducción

En los próximos tres capítulos se va a abordar el primero de los dos problemas de estimación considerados: obtener el estimador óptimo de una secuencia caótica a partir de sus observaciones ruidosas cuando se conocen la forma del mapa generador y sus parámetros. En este capítulo se plantea el problema desde el punto de vista de la estimación de máxima verosimilitud (ML), considerándose los estimadores Bayesianos en el Capítulo 4, y estimadores computacionalmente eficientes en el Capítulo 5. Este capítulo considera fundamentalmente la estimación de señales generadas mediante la iteración de mapas PWL unidimensionales, aunque también se discute brevemente la estimación de mapas no PWL.

La organización del capítulo es la siguiente. En primer lugar, en la Sección 3.2 se muestra la formulación general para el problema de la estimación ML de una secuencia caótica: se presenta el modelo matemático considerado, y se plantea el estimador ML de una secuencia obtenida iterando un mapa unidimensional cualquiera. La formulación del estimador ML evidencia la necesidad de disponer de expresiones cerradas para la iteración hacia delante y hacia atrás de los mapas que se pretenden estimar. En la Sección 3.3 se encuentran dichas expresiones para mapas PWL, que resultan ser lineales en la muestra de referencia, $x[n]$, para un itinerario dado. Estas ecuaciones permiten obtener una expresión analítica del estimador ML de secuencias obtenidas iterando un mapa PWL en la Sección 3.4. A continuación, en la Sección 3.5 se discute brevemente el problema de la estimación de secuencias generadas por mapas no PWL, las dificultades a la hora de aplicar la metodología de estimación propuesta para mapas PWL, y posibles soluciones. Por último, el capítulo se cierra con la presentación de los principales resultados obtenidos para mapas PWL en la Sección 3.6, y una discusión de los mismos en la Sección 3.7.

3.2. El Problema de la Estimación ML de Secuencias Caóticas

3.2.1. Modelo Matemático

En el caso de mapas y secuencias unidimensionales, la ecuación general que describe la evolución del estado del sistema, la *ecuación de estado* o *del proceso*, viene dada por

$$x[k] = f(x[k-1]) + v[k], \quad (3.1)$$

siendo $x[k]$ el estado del sistema en la iteración k -ésima, f un mapa caótico cualquiera de los descritos en la Sección 2.3, y $v[k]$ una excitación de entrada o ruido del proceso (también conocido como *ruido dinámico*). Sin embargo, el estado del sistema no suele ser observable directamente, sino a través de un proceso de observación, que viene descrito por la *ecuación de medida*, cuya forma general es

$$y[k] = g(x[k]) + w[k], \quad (3.2)$$

donde $y[k]$ es la observación o medida k -ésima, $w[k]$ el ruido de observación o medida, y g la función de observación, que relaciona el estado del sistema con el observable, y que puede ser lineal o no lineal.

En esta Tesis se va a suponer que no existe ruido en el proceso de generación de la señal caótica, de modo que (3.1) se reduce a (2.6), la ecuación generadora de un mapa unidimensional genérico:

$$x[k] = f(x[k-1]), \quad (3.3)$$

para un cierto valor de $x[0]$ dado y con $1 \leq k \leq N$. En cuanto a la ecuación de observación, se considera que la única distorsión es debida al ruido de medida, obteniéndose entonces (1.4),

$$y[k] = x[k] + w[k], \quad (3.4)$$

para las observaciones del sistema. Como ruido de medida, $w[k]$, se considera ruido aditivo blanco Gaussiano (AWGN) estacionario, de media cero, y varianza σ^2 . Esto es, $w[k] \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. En consecuencia, las ecuaciones (3.3) y (3.4) se pueden resumir en una única ecuación que describe las medidas realizadas del sistema:

$$y[k] = \begin{cases} x[0] + w[0], & k = 0; \\ f(x[k-1]) + w[k], & 1 \leq k \leq N. \end{cases} \quad (3.5)$$

La ecuación (3.5) resume toda la información disponible sobre el sistema que se desea estimar: se conoce de manera exacta la ecuación de su evolución, pero tan sólo se dispone de un conjunto finito de muestras, distorsionadas por el ruido. El objetivo de este capítulo es obtener, a partir de la secuencia de $N + 1$ observaciones, $\{y[k]\}_{k=0}^N$, la estima ML de la secuencia de $N + 1$ muestras generadas realmente por el mapa caótico, $\{x[k]\}_{k=0}^N$.

3.2.2. Estimador ML

Con el fin de plantear el problema de un modo más compacto se van a agrupar las observaciones disponibles en un vector columna, $\mathbf{y} = [y[0], \dots, y[N]]^T$, y los parámetros que se desean estimar en otro vector columna, $\mathbf{x} = [x[0], \dots, x[N]]^T$. En este caso, el estimador ML viene dado por [VanTre1968, Kay1993]

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}} = \arg \max_{\mathbf{x}} p(\mathbf{y}; \mathbf{x}),$$

donde $p(\mathbf{y}; \mathbf{x})$ es la *función de verosimilitud*, esto es, la FDP de las observaciones condicionada por los parámetros que se desean estimar. Puesto que las muestras del ruido son independientes, la FDP de las observaciones viene dada simplemente por el producto de $N + 1$ FDPs:

$$p(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = \prod_{k=0}^N p(y[k]; x[k]).$$

A la vista del modelo matemático de las observaciones, dado por (3.5), cada observación contiene una componente determinista (la muestra real de la secuencia caótica) y una componente aleatoria con FDP Gaussiana (la muestra de ruido). En consecuencia, la FDP asociada a cada observación de la secuencia es Gaussiana con media $x[k]$ y varianza σ^2 ,

$$p(y[k]; x[k]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y[k] - x[k])^2}{2\sigma^2}\right),$$

o de manera sintética, $y[k] \sim \mathcal{N}(x[k], \sigma^2)$. Y por lo tanto la FDP del conjunto de las observaciones es también Gaussiana:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}; \mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{(N+1)/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=0}^N (y[k] - x[k])^2\right) \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-(N+1)/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{y} - \mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{x})\right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

y de manera sintética, $\mathbf{y} \sim \mathcal{N}(\mathbf{x}, \sigma^2 \mathbf{I})$.

La estima ML de la secuencia caótica es aquel valor de \mathbf{x} que maximiza (3.6). Sin embargo, en el caso de FDPs Gaussianas resulta más conveniente trabajar con la *función de log-verosimilitud*, que se obtiene tomando el logaritmo neperiano o natural de (3.6),

$$\begin{aligned} \ln p(\mathbf{y}; \mathbf{x}) &= -\frac{N+1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=0}^N (y[k] - x[k])^2 \\ &= -\frac{N+1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{y} - \mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Y puesto que el logaritmo es una función creciente, y el primer término de la función de log-verosimilitud no depende de los parámetros que se desean estimar, el estimador ML se puede reformular como

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}} = \arg \min_{\mathbf{x}} J(\mathbf{x}),$$

con

$$J(\mathbf{x}) = (\mathbf{y} - \mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \sum_{k=0}^N (y[k] - x[k])^2. \quad (3.7)$$

Es decir, en el caso Gaussiano hallar el estimador ML resulta equivalente a minimizar una función de coste compuesta por el error cuadrático entre las observaciones y las muestras de la secuencia deseada.

No obstante, en el Capítulo 2 se ha mostrado que todas las muestras de la señal caótica se pueden generar a partir de una única muestra de referencia, iterando hacia delante y/o hacia atrás (en cuyo caso es necesario conocer además la secuencia simbólica). Utilizando este determinismo conocido de la secuencia caótica, se puede reescribir la función de coste de (3.7) como

$$J(x[n], \mathbf{s}_{0:n-1}) = \sum_{k=0}^N \left(y[k] - f_{s[k], \dots, s[n-1]}^{k-n}(x[n]) \right)^2, \quad (3.8)$$

con $\mathbf{s}_{0:n-1} = [s[0], \dots, s[n-1]]^T$, y el estimador ML de $x[n]$ resulta

$$\hat{x}_{\text{ML}}[n] = \arg \min_{x[n]} J(x[n], \hat{\mathbf{s}}_{\text{ML}}(1:n)), \quad (3.9)$$

donde $\hat{\mathbf{s}}_{\text{ML}}(1:n) = [\hat{s}_{\text{ML}}[0], \dots, \hat{s}_{\text{ML}}[n-1]]^T$ denota la estima ML de los primeros n símbolos del itinerario, que por el momento se asume obtenida previamente de alguna manera que se detalla posteriormente en la Sección 3.4.4.

Los máximos y mínimos de (3.8) se obtienen derivando con respecto a $x[n]$ e igualando a cero. Para simplificar la notación, se va a introducir el subíndice \mathbf{s} en la iteración de f para indicar la posible dependencia con el itinerario, en lugar de indicar detalladamente las muestras de la secuencia simbólica que intervienen en cada iteración. La ecuación resultante de derivar (3.8) con respecto a $x[n]$ para $\mathbf{s}_{0:n-1} = \hat{\mathbf{s}}_{\text{ML}}(1:n)$ e igualar a cero es:

$$\sum_{k=0}^N y[k] \frac{df_{\hat{\mathbf{s}}_{\text{ML}}}^{k-n}(x[n])}{dx[n]} = \sum_{k=0}^N f_{\hat{\mathbf{s}}_{\text{ML}}}^{k-n}(x[n]) \frac{df_{\hat{\mathbf{s}}_{\text{ML}}}^{k-n}(x[n])}{dx[n]}. \quad (3.10)$$

Las soluciones de esta ecuación proporcionan todos los máximos, mínimos y puntos de inflexión del sistema. El estimador ML de $x[n]$ es el mínimo global de $J(x[n], \hat{\mathbf{s}}_{\text{ML}})$. Es decir, aquel de entre todas las soluciones de (3.10) que sea un mínimo y que proporcione el valor menor de $J(x[n], \hat{\mathbf{s}}_{\text{ML}})$.

La estima ML del resto de las muestras de la secuencia caótica se puede obtener iterando el mapa hacia delante y hacia atrás a partir de la estima ML de $x[k]$, gracias a la propiedad de *invariancia del estimador ML* [Zacks1971, Mendel1987, Kay1993]:

$$\hat{x}_{\text{ML}}[k] = f_{\hat{\mathbf{s}}_{\text{ML}}}^{k-n}(\hat{x}_{\text{ML}}[n]) \quad \text{con } 0 \leq k \leq N,$$

donde el subíndice $\hat{\mathbf{s}}_{\text{ML}}$ recuerda que en las muestras que se obtienen iterando hacia atrás es necesario haber calculado previamente la estima ML del itinerario.

Aunque el planteamiento del estimador ML en principio es muy sencillo, existen tres inconvenientes que dificultan la obtención de una expresión cerrada del mismo:

1. Para plantear una expresión específica de (3.10) para el mapa del que se desea estimar la secuencia es necesario encontrar una ecuación analítica para $f_{\mathbf{s}}^{k-n}(x)$.
2. Aunque se pueda hallar la expresión anterior, si $J(x[n], \mathbf{s})$ no es una función convexa van a existir en general múltiples máximos y mínimos, apareciendo el problema de los mínimos locales.
3. Si la muestra de referencia escogida no es $x[0]$, es necesario conocer cuál de las M preimágenes elegir en cada iteración hacia atrás a partir de $x[n]$. Es decir, se debe obtener la estima ML de la secuencia simbólica $s[0], \dots, s[n-1]$.

Para un mapa genérico estos tres problemas pueden estar presentes en mayor o menor medida. Sin embargo, en la Sección 3.4 se estudia una clase de mapas para la que estos tres problemas se pueden resolver de manera cerrada: los mapas PWL. Para esta clase amplia de mapas se puede encontrar una expresión analítica para la iteración hacia atrás y hacia delante, como se muestra en la Sección 3.3. Además, esta expresión resulta ser lineal en $x[n]$ para una secuencia simbólica dada, lo que da lugar a una función de coste cuadrática, y por lo tanto convexa y con un único mínimo. Por último, el propio mecanismo de obtención de la estima ML de $x[n]$ (hallar el mínimo dentro de la región correspondiente a cada posible itinerario, y luego seleccionar el mínimo global) proporciona de manera natural la secuencia simbólica óptima.

Respecto al resto de mapas no PWL, la metodología seguida para los mapas PWL sigue siendo válida: obtener un estimador ML local para cada posible secuencia simbólica, y seleccionar el mejor de todos los estimadores locales como estimador ML global. El problema en esta ocasión es que en general no se puede obtener una expresión analítica para la iteración k -ésima del mapa, de modo que no se va a poder formular el estimador ML de manera cerrada como en el caso de los mapas PWL. Además, aunque se consiguiera hallar dicha expresión la función de coste en este caso no es cuadrática, de modo que podrían existir mínimos locales para un itinerario dado, y la obtención de cada uno de los estimadores ML locales no resulta inmediata en este caso. Estos problemas se discuten brevemente en la Sección 3.5, dedicándose el resto del capítulo fundamentalmente al estudio del estimador ML de mapas PWL.

3.3. Composición Funcional para Mapas PWL

En general, no es posible obtener una ecuación cerrada para la iteración k -ésima hacia delante o hacia atrás para la mayoría de los mapas caóticos, y la única alternativa para generar el mapa es iterar muestra a muestra. Sin embargo, en el caso de los mapas PWL sí se pueden obtener fórmulas para su iteración tanto hacia delante como hacia atrás. Estas expresiones son las que se presentan en esta sección.

3.3.1. Iteración Hacia Delante

En primer lugar se considera la iteración hacia delante. La función que define un mapa PWL general viene dada por (2.14), y la expresión para la iteración hacia delante a partir de $x[n]$ es

$$x[n+1] = \sum_{i=1}^M (a_i x[n] + b_i) \chi_{E_i}(x[n]). \quad (3.11)$$

Esta ecuación se puede reescribir como

$$x[n+1] = a_{s[n]} x[n] + b_{s[n]}, \quad (3.12)$$

donde $s[n]$ es la muestra n -ésima de la secuencia simbólica asociada al mapa, que nos indica a qué región pertenecen las muestras del mismo en cada iteración. El siguiente teorema muestra la expresión de la iteración k -ésima hacia delante para un mapa PWL cualquiera.

Teorema 3.1 *Sea $f(x)$ un mapa lineal a tramos con M intervalos, cuya forma viene dada por la ecuación (2.14), y sea el mapa iterado asociado a $f(x)$ dado por las ecuaciones (3.11) o (3.12). La iteración k -ésima hacia delante del mapa a partir de una muestra inicial $x[n]$ viene dada por*

$$x[n+k] = f_s^k(x[n]) = A_{s[n], \dots, s[n+k-1]}^{0,k} x[n] + \sum_{m=0}^{k-1} A_{s[n+m+1], \dots, s[n+k-1]}^{m+1,k} b_{s[n+m]}, \quad (3.13)$$

con $0 \leq n \leq N$, $0 \leq k \leq N - n$, siendo $A^{k,k} = 1$ para cualquier k , y

$$A_{s[n+m], \dots, s[n+k-1]}^{m,k} = \prod_{l=m}^{k-1} a_{s[n+l]}, \quad (3.14)$$

con $0 \leq k \leq N$, y $0 \leq m < k$. Por último, $s[n]$ es la muestra simbólica asociada con la muestra n -ésima de la secuencia caótica: $s[n] = i \Leftrightarrow x[n] \in E_i$.

Demostración 3.1 *La demostración de esta expresión se realiza mediante el método de inducción: se prueba la validez de la fórmula propuesta para la primera iteración, se supone que es válida para la iteración k -ésima, se obtiene el valor de $x[n+k+1]$ utilizando esas dos expresiones, y se comprueba su coincidencia con la iteración $(k+1)$ -ésima de la fórmula. Esta demostración se muestra en el Apéndice E. \square*

Por lo tanto, mediante (3.13) resulta posible predecir la iteración k -ésima de una muestra a partir de una condición inicial, si se conoce su secuencia simbólica futura. El subíndice s en (3.13) pretende resaltar el hecho de que la iteración k -ésima de $x[n]$ sólo coincide con la real, obtenida iterando muestra a muestra, si la secuencia simbólica asociada a $x[n], \dots, x[n+k-1]$ coincide con s . El resto de secuencias simbólicas dan lugar a secuencias caóticas inválidas. Esto es, secuencias que resulta imposible generar mediante ese mapa caótico a partir de la condición inicial dada.

En cualquier caso, la ecuación (3.13) se debe aplicar con precaución a la hora de generar muestras de mapas caóticos, puesto que, incluso si se conoce la secuencia simbólica correcta, al cabo de unas iteraciones las muestras generadas mediante uno y otro método divergen, como se muestra en la Figura 3.1.

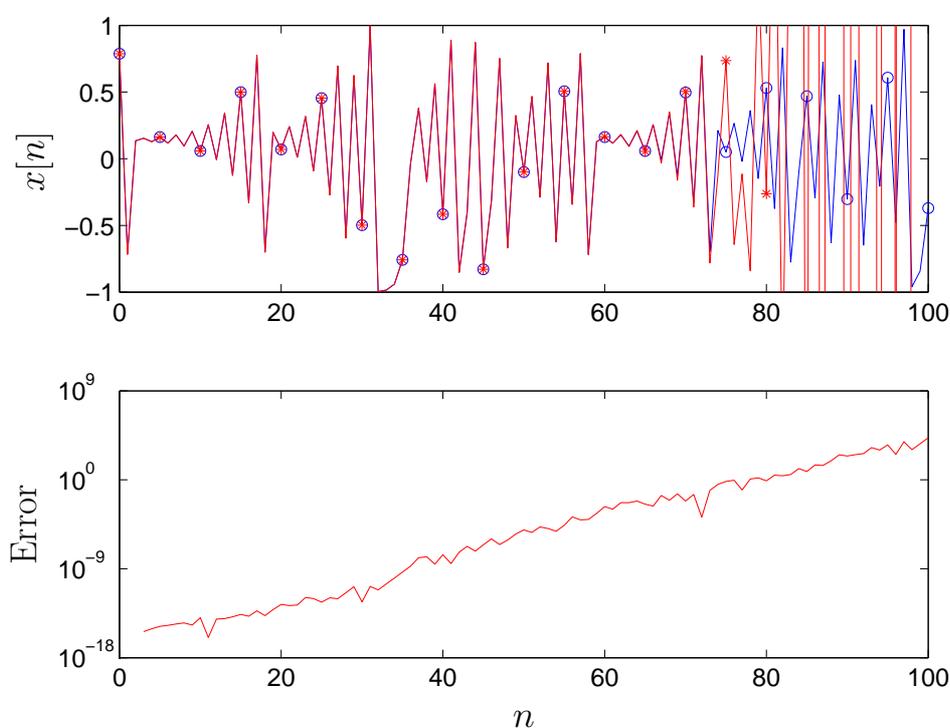


Figura 3.1: Muestra de la inestabilidad numérica en la iteración hacia delante de un mapa caótico. (a) Iteración a partir de $x[0] = 0,78729906182707$ del BSK-TM con $c = -0,5$ usando (3.11) (círculos) y (3.13) (asteriscos). (b) Valor absoluto de la diferencia entre las dos señales (error).

Como se puede apreciar en la Figura 3.1, la diferencia entre la secuencia generada mediante la iteración directa usando (3.11) o (3.12), y la generada usando la expresión analítica dada por (3.13), es mínima durante aproximadamente 70 muestras en este caso. Después, la secuencia obtenida mediante (3.13) se aparta rápidamente de la generada usando (3.11) o (3.12), debido a que el itinerario de $x[0]$ usando (3.13) difiere del real al cabo de un cierto número de iteraciones a causa de los errores numéricos.

Además, como se aprecia en la parte final de la gráfica, la ecuación (3.13) tiende a presentar un comportamiento numéricamente inestable para valores grandes de k , dando lugar a muestras de la secuencia que se encuentran fuera del espacio de fases del mapa.

Esta discordancia entre ambas señales es debida a la sensibilidad propia de los sistemas caóticos, que no sólo se observa en sus condiciones iniciales, sino que también se extiende a sus parámetros e incluso a la forma de llevar a cabo las operaciones para generar la secuencia. Esta inestabilidad numérica extrema presentada por las secuencias caóticas provoca que cualquier cambio en su mecanismo de generación (incluso el cambio del orden de realización de las operaciones) proporcione secuencias completamente diferentes a medio y largo plazo. Como se muestra en la Sección 3.3.2, esta desviación se puede evitar generando las muestras mediante iteración hacia atrás. No obstante, para un conjunto de muestras reducido esta diferencia no es apreciable, y la ecuación (3.13) resulta imprescindible para plantear los estimadores ML y Bayesianos de mapas PWL en secciones posteriores.

En las ecuaciones (3.13) y (3.14), los subíndices en la expresión de A indican la porción de la secuencia simbólica necesaria para generarla. Sin embargo, con el fin de simplificar la notación, en general únicamente se va a escribir el subíndice \mathbf{s} para indicar la dependencia con la secuencia simbólica, y la porción de \mathbf{s} utilizada realmente en el cálculo se puede deducir fácilmente a partir de la ecuación. De este modo, (3.13) se puede reescribir de manera simplificada como

$$x[n+k] = f_{\mathbf{s}}^k(x[n]) = A_{\mathbf{s}}^{0,k}x[n] + \sum_{m=0}^{k-1} A_{\mathbf{s}}^{m+1,k}b_{\mathbf{s}[n+m]}. \quad (3.15)$$

La ecuación (3.14) se puede simplificar del mismo modo. Además, observando su forma se aprecia la posibilidad de encontrar formulaciones recursivas para (3.14). Una primera formulación recursiva de (3.14) podría ser

$$A_{\mathbf{s}}^{m,k} = \begin{cases} a_{\mathbf{s}[n+m]}A_{\mathbf{s}}^{m+1,k}, & 0 \leq m \leq k-1, \quad k > 0; \\ 1, & m = k. \end{cases} \quad (3.16)$$

La ecuación (3.16) muestra la recursividad de $A_{\mathbf{s}}^{m,k}$ en el superíndice m . Sin embargo, va a resultar de mayor utilidad la expresión recursiva en el superíndice k mostrada a continuación:

$$A_{\mathbf{s}}^{m,k} = \begin{cases} a_{\mathbf{s}[n+k-1]}A_{\mathbf{s}}^{m,k-1}, & 0 \leq m \leq k-1, \quad k > 0; \\ 1, & m = k. \end{cases} \quad (3.17)$$

Esta última formulación recursiva de $A_{\mathbf{s}}^{m,k}$ va a resultar muy útil posteriormente a la hora de implementar los diferentes estimadores. Puesto que en este caso resulta necesario conocer $A_{\mathbf{s}}^{m,k}$ para $0 \leq k \leq N$ y $0 \leq m \leq k$, estos valores se pueden precalcular para una determinada secuencia simbólica y almacenar en una matriz \mathbf{A} , de dimensión $(N+1) \times (N+1)$, cuyo elemento $(m+1, k+1)$ -ésimo sea $A_{\mathbf{s}}^{m,k}$. El cálculo

1. Se construye una matriz \mathbf{A}_0 triangular superior (esto es, sus elementos por debajo de la diagonal principal valen cero: $\mathbf{A}_0(i, j) = 0 \forall j < i$) con unos en su diagonal principal.
2. Se obtiene la matriz \mathbf{A}_1 a partir de \mathbf{A}_0 modificando únicamente el elemento (1, 2) mediante la fórmula recursiva en k : $\mathbf{A}_1(1, 2) = a_{s[n]}\mathbf{A}_0(1, 1)$.
3. Se repite la operación anterior para $k = 2, \dots, N$. En general, la matriz \mathbf{A}_k se obtiene a partir de la \mathbf{A}_{k-1} modificando únicamente los elementos de la columna $(k + 1)$ -ésima mediante la fórmula recursiva en k de la siguiente manera:

$$\mathbf{A}_k(i, k + 1) = a_{s[n+k-1]}\mathbf{A}_{k-1}(i, k),$$

con $i = 1, \dots, k$.

4. La matriz resultante para $k = N$ es la matriz deseada. Esto es, $\mathbf{A}_N = \mathbf{A}$.

Algoritmo 3.1: Generación recursiva de la matriz \mathbf{A} necesaria para obtener todas las muestras de la secuencia iterando hacia delante.

de esta matriz se puede realizar de manera eficiente haciendo uso de la ecuación (3.17), mediante el Algoritmo 3.1, mostrado en esta misma página.

En el Algoritmo 3.1 se sigue la notación de [Golub1996] (véase el Apéndice B), denotándose el elemento (i, j) -ésimo de la matriz \mathbf{A} mediante $\mathbf{A}(i, j)$. De modo paralelo, en cada iteración del algoritmo se puede ir construyendo el vector \mathbf{b} dado por

$$\mathbf{b} = [x[n], b_{s[n]}, b_{s[n+1]}, \dots, b_{s[n+N-1]}]^T,$$

de manera simultánea a la matriz \mathbf{A} . Una vez que se disponga de \mathbf{A} y \mathbf{b} se genera la secuencia completa de puntos $\{x[n], \dots, x[N]\}$ mediante una simple operación matricial:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}.$$

Por ejemplo, si $N = 3$, la matriz \mathbf{A} buscada es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & A_s^{0,1} & A_s^{0,2} & A_s^{0,3} \\ 0 & 1 & A_s^{1,2} & A_s^{1,3} \\ 0 & 0 & 1 & A_s^{2,3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y el vector $\mathbf{b} = [x[n], b_s[n], b_s[n+1], b_s[n+2]]^T$. Finalmente, el vector \mathbf{x} resultante se generaría como

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x[n] \\ x[n+1] \\ x[n+2] \\ x[n+3] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ A_s^{0,1} & 1 & 0 & 0 \\ A_s^{0,2} & A_s^{1,2} & 1 & 0 \\ A_s^{0,3} & A_s^{1,3} & A_s^{2,3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[n] \\ b_s[n] \\ b_s[n+1] \\ b_s[n+2] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x[n] \\ A_s^{0,1}x[n] + b_s[n] \\ A_s^{0,2}x[n] + A_s^{1,2}b_s[n] + b_s[n+1] \\ A_s^{0,3}x[n] + A_s^{1,3}b_s[n] + A_s^{2,3}b_s[n+1] + b_s[n+2] \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Las distintas fases del procedimiento de generación de la matriz \mathbf{A} de manera recursiva mediante el Algoritmo 3.1 se muestran en la Figura 3.2 para $N = 3$.

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_0} & \Rightarrow & \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & a_s[n] & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_1} \\ & & \Downarrow \\ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & a_s[n] & a_s[n]a_s[n+1] & a_s[n]a_s[n+1]a_s[n+2] \\ 0 & 1 & a_s[n+1] & a_s[n+1]a_s[n+2] \\ 0 & 0 & 1 & a_s[n+2] \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_3=\mathbf{A}} & \Leftarrow & \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & a_s[n] & a_s[n]a_s[n+1] & 0 \\ 0 & 1 & a_s[n+1] & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_2} \end{array}$$

Figura 3.2: Generación recursiva de la matriz \mathbf{A} para $N = 3$.

Para finalizar, nótese que el algoritmo anterior también resulta útil cuando se desea actualizar la matriz \mathbf{A} ante el cambio en alguno de los elementos de la secuencia simbólica. Si en un momento dado varía el elemento r -ésimo ($0 \leq r \leq N$) de la secuencia simbólica, resulta evidente que $A_s^{m,k}$ no se modifica para cualquier $k \leq r$. Esto implica que las $r + 1$ primeras columnas de la matriz \mathbf{A} permanecen inalteradas. Por consiguiente, usando el mismo algoritmo que antes partiendo de la matriz \mathbf{A}_r en lugar de \mathbf{A}_0 se puede obtener la nueva matriz de signos en tan sólo $N - r$ iteraciones en lugar de las N iteraciones requeridas para construir \mathbf{A} desde el inicio. Por supuesto, si el cambio es en el primer elemento de la secuencia simbólica, entonces no queda más remedio que recalcular \mathbf{A} completamente.

3.3.2. Iteración Hacia Atrás

En aquellas ocasiones en que la muestra de referencia elegida del mapa no sea $x[0]$, es necesario conocer igualmente la expresión para la iteración k -ésima hacia atrás. A partir de (3.12), la ecuación inversa para un mapa PWL resulta

$$x[n-1] = \frac{x[n] - b_{s[n-1]}}{a_{s[n-1]}}. \quad (3.18)$$

Donde $s[n-1]$ es la muestra $(n-1)$ -ésima de la secuencia simbólica, que indica la región del espacio de fases a la que va a pertenecer la muestra generada, $x[n-1]$, en contraste con la ecuación de la iteración hacia delante, cuya expresión depende de la región a la que pertenece la muestra generadora, $x[n]$. Nuevamente, a partir de (3.18) se puede obtener la iteración k -ésima hacia atrás a partir de $x[n]$, como muestra el siguiente teorema.

Teorema 3.2 *Sea $f(x)$ un mapa lineal a tramos con M intervalos, cuya forma viene dada por la ecuación (2.14), y sea el mapa iterado asociado a $f(x)$ dado por las ecuaciones (3.11) o (3.12) en su iteración hacia delante, y por (3.18) en su iteración hacia atrás. La iteración k -ésima hacia atrás del mapa a partir de una muestra inicial $x[n]$ viene dada por*

$$x[n-k] = f_s^{-k}(x[n]) = B_{s[n-k], \dots, s[n-1]}^{1,k} x[n] - \sum_{m=1}^k B_{s[n-k], \dots, s[n-m]}^{m,k} b_{s[n-m]}, \quad (3.19)$$

con $0 \leq n \leq N$, $0 \leq k \leq n$, siendo $B_s^{1,0} = 1$, y

$$B_{s[n-k], \dots, s[n-m]}^{m,k} = \left(\prod_{l=m}^k a_{s[n-l]} \right)^{-1} = \prod_{l=m}^k a_{s[n-l]}^{-1}, \quad (3.20)$$

con $1 \leq k \leq N$, y $1 \leq m \leq k$. Por último, $s[n]$ es la muestra simbólica asociada a la muestra n -ésima de la secuencia caótica: $s[n] = i \Leftrightarrow x[n] \in E_i$.

Demostración 3.2 *La demostración de esta expresión se realiza mediante el método de inducción: se prueba la validez de la fórmula propuesta para la primera iteración, se supone que es válida para la iteración k -ésima, se obtiene el valor de $x[n - (k+1)]$ utilizando esas dos expresiones, y se comprueba su coincidencia con la iteración $(k+1)$ -ésima de la fórmula. Esta demostración se muestra en el Apéndice E. \square*

Nótese que, aunque (3.13) y (3.14) guardan una evidente similitud con (3.19) y (3.20), ya que el mapa inverso también es un mapa PWL, existen importantes diferencias entre las expresiones de la iteración hacia delante y hacia atrás. Al igual que ocurre con la expresión de la iteración hacia delante, el valor de $x[n-k]$ obtenido mediante (3.19) únicamente coincide con el obtenido iterando muestra a muestra si la

secuencia simbólica de la señal real coincide con la usada en (3.19). No obstante, existe una diferencia fundamental en este caso. En la iteración hacia delante únicamente existe una secuencia simbólica que genera una secuencia caótica válida. Es decir, dada una condición inicial, $x[0]$, esta tiene asociada una secuencia simbólica única para su iteración hacia delante. Por ejemplo, considérese el TM con $\beta = 2$ y $x[0] = 0,28357$. El vector de longitud cuatro con las tres primeras muestras de la secuencia generada a partir de esta condición inicial es

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [x[0], \beta x[0], \beta(1 - \beta x[0]), \beta(1 - \beta + \beta^2 x[0])]^T \\ &= [0,28357 \quad 0,56714 \quad 0,86752 \quad 0,26856]^T, \end{aligned} \quad (3.21)$$

y su secuencia simbólica asociada es

$$\mathbf{s} = [1, 2, 2, 1]^T. \quad (3.22)$$

Si ahora se intenta generar una secuencia caótica iterando hacia delante mediante el uso de (3.15) con $x[0] = 0,28357$ y una secuencia simbólica distinta de la real, por ejemplo $\mathbf{s}(1:3) = [1, 1, 1]^T$, el resultado es

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [x[0], \beta x[0], \beta^2 x[0], \beta^3 x[0]]^T \\ &= [0,28357 \quad 0,56714 \quad 1,13428 \quad 2,26856]^T, \end{aligned}$$

que obviamente no es una secuencia válida para este mapa.

La situación es distinta en relación con la iteración hacia atrás. En este caso, para cada muestra $x[n]$ pueden existir hasta M muestras que se transforman en ella tras una iteración. Es decir, puede haber hasta M preimágenes correspondientes a cada una de las M regiones en que se divide el espacio de fases del mapa. En consecuencia, en la iteración hacia atrás existen en general múltiples secuencias simbólicas que dan lugar a valores de $x[n - k]$ válidos ($k = 1, \dots, n$), y para una condición inicial $x[n]$ existen un total de $P(n)$ secuencias simbólicas que dan lugar a otras tantas secuencias caóticas admisibles distintas.

Como ejemplo, considérese de nuevo el caso anterior, donde ahora se toma como muestra de referencia el último punto de la secuencia, $x[3] = 0,26856$, y se itera hacia atrás. Puesto que en el TM todas las secuencias simbólicas son válidas, existen un total de 8 itinerarios válidos diferentes de longitud tres, que implican otras tantas secuencias caóticas cuyo cuarto elemento es $x[3]$, como se muestra en la Tabla 3.1. Obviamente, la secuencia caótica generada iterando hacia atrás coincide con (3.21) únicamente cuando la secuencia simbólica usada para iterar hacia atrás coincide con (3.22), esto es, en la cuarta entrada de la Tabla 3.1.

Para corroborar el buen rendimiento de la expresión obtenida para la iteración hacia atrás, en la Figura 3.3 se muestra la misma secuencia de la Figura 3.1, con la diferencia de que la señal se genera ahora iterando hacia atrás mediante la aplicación reiterada de (3.18) por un lado, y usando (3.19) por otro. Como se puede apreciar, en este caso no aparece la inestabilidad numérica propia de la iteración hacia delante, ya que al iterar

| \mathbf{s}^T | \mathbf{x}^T |
|---------------------|--|
| [1, 1, 1, 1] | [0,03357 0,06714 0,13428 0,26856] |
| [1, 1, 2, 1] | [0,21643 0,43286 0,86572 0,26856] |
| [1, 2, 1, 1] | [0,46643 0,93286 0,13428 0,26856] |
| [1, 2, 2, 1] | [0,28357 0,56714 0,86572 0,26856] |
| [2, 1, 1, 1] | [0,96643 0,06714 0,13428 0,26856] |
| [2, 1, 2, 1] | [0,78357 0,43286 0,86572 0,26856] |
| [2, 2, 1, 1] | [0,53357 0,93286 0,13428 0,26856] |
| [2, 2, 2, 1] | [0,71643 0,56714 0,86572 0,26856] |

Tabla 3.1: Conjunto de secuencias simbólicas válidas para la iteración hacia atrás del TM con $\beta = 2$ a partir de $x[3] = 0,26856$ y secuencias caóticas asociadas. En negrita la secuencia correspondiente a (3.21).

hacia atrás se fuerza a la secuencia simbólica de la señal generada a coincidir con la real. En consecuencia, el error permanece siempre dentro del mismo orden de magnitud y no aparecen problemas de divergencia, esto es, todas las muestras generadas siempre pertenecen al espacio de fases del mapa siempre que se utilice una secuencia simbólica válida. Debido a esta circunstancia, para secuencias largas va a ser preferible usar como muestra de referencia la última de la secuencia y estimar el resto iterando hacia atrás. En el caso de que las secuencias utilizadas sean cortas (hasta unas pocas decenas de puntos) el error cometido en la iteración hacia delante no es relevante, y puede ser preferible tomar como muestra de referencia $x[0]$.

De nuevo es posible simplificar la notación, usando como subíndice en la expresión de B únicamente \mathbf{s} , en lugar de utilizar expresamente la porción de la secuencia simbólica requerida. De este modo (3.19) se puede escribir como

$$x[n-k] = f_{\mathbf{s}}^{-k}(x[n]) = B_{\mathbf{s}}^{1,k}x[n] - \sum_{m=1}^k B_{\mathbf{s}}^{m,k}b_{s[n-m]}. \quad (3.23)$$

Además, dada la semejanza entre (3.20) y (3.14), resulta evidente que se van a poder encontrar expresiones recursivas similares a (3.16) y (3.17). La versión recursiva de (3.20) en el superíndice m ahora resulta

$$B_{\mathbf{s}}^{m,k} = \begin{cases} a_{s[n-m]}^{-1}B_{\mathbf{s}}^{m+1,k}, & 1 \leq m \leq k-1, k > 0; \\ a_{s[n-k]}^{-1}, & m = k; \end{cases} \quad (3.24)$$

y la fórmula recursiva en el superíndice k viene dada por:

$$B_{\mathbf{s}}^{m,k} = \begin{cases} a_{s[n-k]}^{-1}B_{\mathbf{s}}^{m,k-1}, & 1 \leq m \leq k-1, k > 0; \\ a_{s[n-k]}^{-1}, & m = k. \end{cases} \quad (3.25)$$

Al igual que en el caso de la iteración hacia delante, resulta necesario conocer $B_{\mathbf{s}}^{m,k}$ para $1 \leq k \leq N$ y $1 \leq m \leq k$ para calcular la secuencia caótica completa mediante

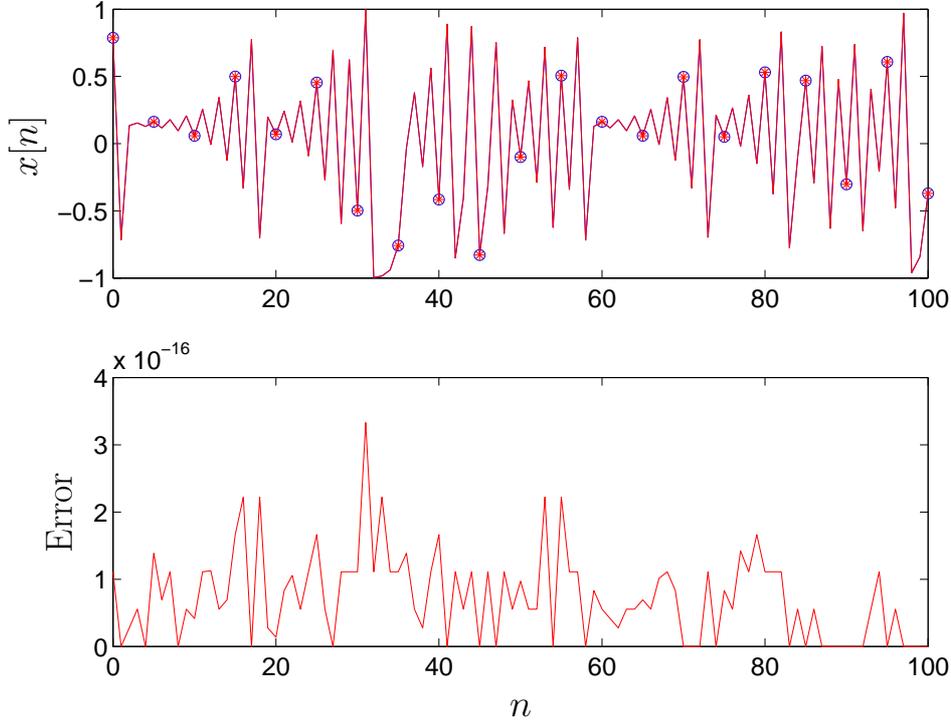


Figura 3.3: Muestra de la estabilidad numérica en la iteración hacia atrás de un mapa caótico. (a) Iteración a partir de $x[N] = -0,37048415591262$ del BSK-TM con $c = -0,5$ usando (3.11) (círculos) y (3.19) (asteriscos). (b) Valor absoluto de la diferencia entre las dos señales (error).

iteración hacia atrás. Asimismo, estos valores se pueden precalcular y almacenar en una matriz \mathbf{B} , cuyo elemento $(m + 1, k + 1)$ -ésimo se corresponda con $B_s^{m,k}$. Y del mismo modo que antes, la formulación recursiva dada por (3.25) se puede usar para calcular los coeficientes de \mathbf{B} de modo eficiente mediante el Algoritmo 3.2.

Nuevamente, a la vez que se genera la matriz \mathbf{B} se puede ir construyendo de forma paralela el vector \mathbf{c} :

$$\mathbf{c} = [x[n], -b_{s[n-1]}, -b_{s[n-2]}, \dots, -b_{s[n-N]}]^T.$$

Y finalmente, el vector completo de muestras de la secuencia caótica iterando hacia atrás a partir de $x[n]$, $\mathbf{x} = [x[n], x[n-1], \dots, x[n-N]]^T$, se puede expresar como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}^T \mathbf{c}.$$

Considerando el mismo ejemplo que en el apartado anterior, en el que $N = 3$, la matriz \mathbf{B} en este caso es

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & B_s^{1,1} & B_s^{1,2} & B_s^{1,3} \\ 0 & B_s^{1,1} & B_s^{1,2} & B_s^{1,3} \\ 0 & 0 & B_s^{2,2} & B_s^{2,3} \\ 0 & 0 & 0 & B_s^{3,3} \end{bmatrix},$$

1. Se construye una matriz \mathbf{B}_0 compuesta totalmente por ceros, excepto por un uno en su primer elemento. Esto es, $\mathbf{B}_0(1,1)=1$ y $\mathbf{B}_0(i,j) = 0 \forall i, j \neq 1$.

2. Se obtiene \mathbf{B}_1 a partir de \mathbf{B}_0 mediante las dos actualizaciones siguientes:

$$\mathbf{B}_1(1,2) = a_{s[n-1]}^{-1} \mathbf{B}_0(1,1),$$

$$\mathbf{B}_1(2,2) = a_{s[n-1]}^{-1}.$$

3. Se repite la operación para $k = 2, \dots, N$. En general, la matriz \mathbf{B}_k se obtiene a partir de \mathbf{B}_{k-1} modificando únicamente los elementos por encima de la diagonal principal de acuerdo con la siguiente regla:

$$\mathbf{B}_k(i, k+1) = a_{s[n-k]}^{-1} \mathbf{B}_{k-1}(i, k),$$

para $i = 1, \dots, k$. Y para el elemento de la diagonal principal:

$$\mathbf{B}_k(k+1, k+1) = a_{s[n-k]}^{-1}.$$

4. La matriz resultante para $k = N$ es la matriz deseada. Esto es, $\mathbf{B}_N = \mathbf{B}$.

Algoritmo 3.2: Generación recursiva de la matriz \mathbf{B} necesaria para obtener todas las muestras de la secuencia iterando hacia atrás.

y el vector $\mathbf{c} = [x[n], b_{s[n-1]}, b_{s[n-2]}, b_{s[n-3]}]^T$. Por último, el vector \mathbf{x} con las muestras de la secuencia caótica se obtiene como

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x[n] \\ x[n-1] \\ x[n-2] \\ x[n-3] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ B_s^{1,1} & B_s^{1,1} & 0 & 0 \\ B_s^{1,2} & B_s^{1,2} & B_s^{2,2} & 0 \\ B_s^{1,3} & B_s^{1,3} & B_s^{2,3} & B_s^{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[n] \\ -b_{s[n-1]} \\ -b_{s[n-2]} \\ -b_{s[n-3]} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x[n] \\ B_s^{1,1}x[n] - B_s^{1,1}b_{s[n-1]} \\ B_s^{1,2}x[n] - B_s^{1,2}b_{s[n-1]} - B_s^{2,2}b_{s[n-2]} \\ B_s^{1,3}x[n] - B_s^{1,3}b_{s[n-1]} - B_s^{2,3}b_{s[n-2]} - B_s^{3,3}b_{s[n-3]} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La matriz \mathbf{B} se genera previamente de manera recursiva mediante el algoritmo anterior en cuatro pasos, como se muestra en la Figura 3.4. Como en el caso de \mathbf{A} , si en algún momento cambia únicamente el elemento r -ésimo de la secuencia simbólica, entonces $B_s^{m,k}$ permanece inalterado para $1 \leq k < r$. En consecuencia, sólo es necesario actualizar la porción correspondiente de \mathbf{B} , lo cual se puede hacer a partir de \mathbf{B}_{r-1} mediante el algoritmo eficiente mostrado anteriormente. Por supuesto, en el caso de que cambie $s[n-1]$ es necesario recalcular la matriz \mathbf{B} completa, al igual que ocurre con \mathbf{A} .

$$\begin{array}{ccc}
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_0} & \Rightarrow & \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & a_{s[n-1]}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{s[n-1]}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_1} \\
& & \Downarrow \\
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & a_{s[n-1]}^{-1} & a_{s[n-1]}^{-1}a_{s[n-2]}^{-1} & a_{s[n-1]}^{-1}a_{s[n-2]}^{-1}a_{s[n-3]}^{-1} \\ 0 & a_{s[n-1]}^{-1} & a_{s[n-1]}^{-1}a_{s[n-2]}^{-1} & a_{s[n-1]}^{-1}a_{s[n-2]}^{-1}a_{s[n-3]}^{-1} \\ 0 & 0 & a_{s[n-2]}^{-1} & a_{s[n-2]}^{-1}a_{s[n-3]}^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & a_{s[n-3]}^{-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_3=\mathbf{B}} & \Leftarrow & \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & a_{s[n-1]}^{-1} & a_{s[n-1]}^{-1}a_{s[n-2]}^{-1} & 0 \\ 0 & a_{s[n-1]}^{-1} & a_{s[n-1]}^{-1}a_{s[n-2]}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & a_{s[n-2]}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_2}
\end{array}$$

Figura 3.4: Generación recursiva de la matriz \mathbf{B} para $N = 3$.

3.3.3. Iteración Hacia Delante y Hacia Atrás

A la hora de plantear un estimador puede resultar ventajoso considerar una muestra de referencia situada en algún punto intermedio de la secuencia caótica. En este caso es necesario iterar tanto hacia delante como hacia atrás para generar la señal completa, lo que implica combinar las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} de manera adecuada (en función de la situación de la muestra de referencia) en una única matriz \mathbf{C} , y también los vectores \mathbf{b} y \mathbf{c} en un único vector \mathbf{d} . La ecuación requerida para generar la secuencia caótica completa a partir de un $x[n]$ arbitrario (con $0 \leq n \leq N$) es

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}^T \mathbf{d},$$

siendo

$$\mathbf{x} = [x[0], \dots, x[n-1], x[n], x[n+1], \dots, x[N]]^T,$$

el vector resultante con la secuencia caótica generada completa,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(n+1 : -1 : 1, n+1 : -1 : 2) & \mathbf{0}_{n \times (N-n+1)} \\ \mathbf{0}_{(N-n) \times n} & \mathbf{A}(1 : N-n+1, 1 : N-n+1) \end{bmatrix},$$

la matriz combinada para realizar parte de la iteración hacia delante y parte hacia atrás, \mathbf{A} y \mathbf{B} las matrices necesarias para generar la secuencia iterando a partir de $x[0]$ y $x[N]$ respectivamente, y

$$\mathbf{d} = [-b_{s[0]}, -b_{s[1]}, \dots, -b_{s[n-1]}, x[n], b_{s[n]}, \dots, b_{s[N-2]}, b_{s[N-1]}]^T.$$

Se sigue una vez más la notación de [Golub1996], de modo que $\mathbf{A}(a : b, c : d)$ denota la porción de \mathbf{A} comprendida entre las filas a y b y las columnas c y d (todas ellas

incluidas), y $\mathbf{B}(a : -1 : b, c : -1 : d)$ denota la misma porción de \mathbf{B} pero tomando los elementos en sentido inverso (esto es, desde el (b, d) hasta el (a, c)). Por último, la notación $\mathbf{0}_{p \times q}$ denota una matriz de ceros de dimensión $p \times q$. Como ejemplo, suponiendo $N = 4$, y tomándose como referencia $x[2]$, la matriz \mathbf{C} resultaría

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} B_s^{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_s^{1,2} & B_s^{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ B_s^{1,2} & B_s^{1,1} & 1 & A_s^{0,1} & A_s^{0,2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & A_s^{1,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Las porciones de la matriz correspondientes a \mathbf{A} y \mathbf{B} se pueden generar usando los algoritmos eficientes descritos en los dos apartados anteriores, teniendo en cuenta que en este caso el número de iteraciones hacia delante es $N - n = 2$, y hacia atrás es $n = 2$. Y el sistema de ecuaciones necesario para generar la secuencia caótica es:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \\ x[4] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_s^{2,2} & B_s^{1,2} & B_s^{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & B_s^{1,1} & B_s^{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_s^{0,1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & A_s^{0,2} & A_s^{1,2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_{s[0]} \\ -b_{s[1]} \\ x[2] \\ b_{s[2]} \\ b_{s[3]} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} B_s^{1,2}x[2] - B_s^{1,2}b_{s[1]} - B_s^{2,2}b_{s[0]} \\ B_s^{1,1}x[2] - B_s^{1,1}b_{s[1]} \\ x[2] \\ A_s^{0,1}x[2] + b_{s[2]} \\ A_s^{0,1}x[2] + A_s^{1,2}b_{s[2]} + b_{s[3]} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En cuanto al comportamiento de esta ecuación combinada, va a ser obviamente una mezcla del de la iteración hacia delante y hacia atrás: estabilidad numérica en las muestras generadas iterando hacia atrás, e inestabilidad en las generadas hacia delante, que da lugar a divergencia con respecto a la señal real a partir de un cierto número de muestras. En la Figura 3.5 se muestra el ejemplo ya discutido en la Sección 3.3.1 y en la Sección 3.3.2, considerando ahora $x[20]$ como muestra de referencia. Se puede observar la preservación del orden de magnitud del error en la iteración hacia atrás, y su crecimiento de manera aproximadamente exponencial en la iteración hacia delante.

Con las expresiones desarrolladas en estos tres apartados para la iteración hacia delante y hacia atrás, ahora ya resulta factible plantear estimadores cerrados para la amplia clase de mapas PWL. Nótese finalmente, que las expresiones de la iteración hacia atrás y hacia delante se podrían haber agrupado en una sola similar a (3.15) y (3.23). No obstante, los coeficientes de esta expresión resultan bastante más complicados que (3.14) y (3.20), de modo que resulta preferible mantener dos expresiones separadas a la hora de trabajar. La forma más práctica de juntar ambas expresiones en una sola es mediante la siguiente ecuación:

$$x[n+k] = f_s^k(x[n]) = \alpha_s^n[k]x[n] + \nu_s^n[k]. \quad (3.26)$$

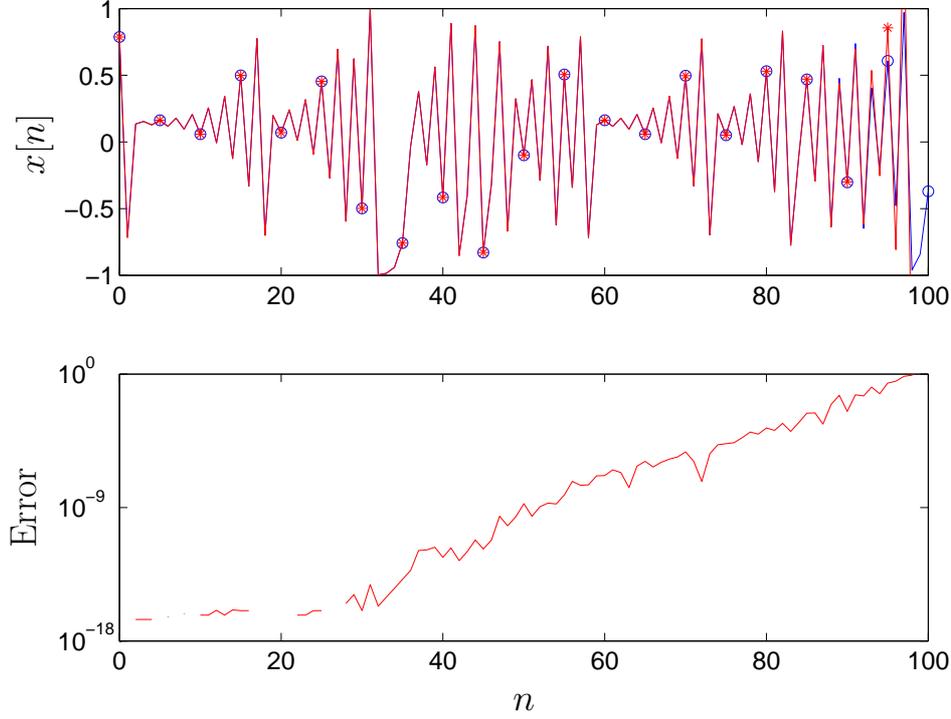


Figura 3.5: Muestra del comportamiento de las expresiones obtenidas para la iteración hacia delante y hacia atrás. (a) Iteración a partir de $x[0] = 0,78729906182707$ del BSK-TM con $c = -0,5$ usando (3.11) (círculos), y (3.13) y (3.19) para generar la secuencia analíticamente a partir de $x[20] = 0,06907341185902$ (asteriscos). (b) Valor absoluto de la diferencia entre las dos señales (error).

Donde las expresiones de $\alpha_s^n[k]$ y $\nu_s^n[k]$, para la muestra de referencia $x[n]$, y el término k -ésimo de la secuencia, dependen de su obtención iterando hacia atrás o hacia delante desde $x[n]$ (esto es, de si k es menor o mayor que cero), y de la secuencia simbólica s . El término $\alpha_s^n[k]$ indica la dependencia de cada muestra de la secuencia caótica con el valor de la muestra de referencia, y su expresión es

$$\alpha_s^n[k] = \begin{cases} B_s^{1,-k}, & -n \leq k \leq -1; \\ A_s^{0,k}, & 0 \leq k \leq N - n. \end{cases} \quad (3.27)$$

El término $\nu_s^n[k]$ denota la parte constante de $x[k]$ respecto a la muestra de referencia (esto es, la parte que no depende de $x[n]$), y su valor es

$$\nu_s^n[k] = \begin{cases} -\sum_{m=1}^{-k} B_s^{m,-k} b_{s[n-m]}, & -n \leq k \leq -1; \\ \sum_{m=0}^{k-1} A_s^{m+1,k} b_{s[n+m]}, & 0 \leq k \leq N - n. \end{cases} \quad (3.28)$$

En ambos casos, cuando $k = 0$ la iteración hacia atrás y hacia delante llegan a los mismos valores: $\alpha_s^n[n] = 1$ y $\nu_s^n[n] = 0$. Estas expresiones van a resultar muy útiles para desarrollar fórmulas explícitas para los estimadores ML y Bayesianos de mapas PWL, así como para obtener su CRLB (véase el Apéndice E).

3.4. Estimador ML de Secuencias Generadas por Mapas PWL

En esta sección se desarrolla el estimador ML, presentado en la Sección 3.2.2, para el caso de mapas PWL, obteniéndose expresiones cerradas para el mismo en función del itinerario. En primer lugar, en la Sección 3.4.1 se analiza la función de coste que se debe minimizar. A continuación, en la Sección 3.4.2 se deriva una fórmula analítica para el estimador ML cuando su secuencia simbólica es conocida. Por último, en la Sección 3.4.4 se extiende dicho estimador al caso en que se debe estimar también el itinerario, tras una discusión de las restricciones impuestas sobre dicha estima por la secuencia simbólica en la Sección 3.4.3.

3.4.1. Función de Coste para Mapas PWL

De acuerdo con lo mostrado en la Sección 3.2.2, hallar el estimador ML de $x[n]$ equivale a minimizar la función de coste dada por (3.8),

$$\begin{aligned} J(x[n], \mathbf{s}_{0:n-1}) &= \sum_{k=-n}^{N-n} (y[n+k] - f_s^k(x[n]))^2 \\ &= \sum_{k=1}^n (y[n-k] - f_{\mathbf{s}_{n-k:n-1}}^{-k}(x[n]))^2 + \sum_{k=0}^{N-n} (y[n+k] - f^k(x[n]))^2, \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde se ha realizado un simple cambio de variable, y se ha descompuesto la función de coste como la suma de dos términos: el primero correspondiente a las muestras obtenidas mediante iteración hacia atrás a partir de $x[n]$, y el segundo correspondiente a las obtenidas iterando hacia delante. El término $\mathbf{s}_{0:n-1} = [s[0], \dots, s[n-1]]^T$ denota explícitamente la dependencia de la función de coste con las n primeras muestras de la secuencia simbólica debido a la iteración hacia atrás. Nótese que, para la iteración hacia delante en principio no es necesario conocer el itinerario, ya que este viene especificado de forma unívoca por el valor de $x[n]$, de modo que no es necesario conocer $\mathbf{s}_{n:N} = [s[n], \dots, s[N]]^T$. De igual modo, $\mathbf{s}_{k:n-1} = [s[k], \dots, s[n-1]]^T$ denota los elementos $(k+1)$ -ésimo hasta el n -ésimo de \mathbf{s} , que son los necesarios para obtener $x[k]$ iterando hacia atrás a partir de $x[n]$. Sustituyendo las fórmulas cerradas obtenidas para la iteración de un mapa PWL en la Sección 3.3, (3.15) y (3.23), en (3.29), la función

de coste para esta clase de mapas resulta

$$\begin{aligned}
J(x[n], \mathbf{s}) &= \sum_{k=-n}^{N-n} (y[n+k] - \alpha_{\mathbf{s}}^n[k]x[n] - \nu_{\mathbf{s}}^n[k])^2 \\
&= \sum_{k=1}^n \left(y[n-k] + \sum_{m=1}^k B_{\mathbf{s}}^{m,k} b_{s[n-m]} - B_{\mathbf{s}}^{1,k} x[n] \right)^2 \\
&\quad + \sum_{k=0}^{N-n} \left(y[n+k] - \sum_{m=0}^{k-1} A_{\mathbf{s}}^{m+1,k} b_{s[n+m]} - A_{\mathbf{s}}^{0,k} x[n] \right)^2. \quad (3.30)
\end{aligned}$$

Nótese que ahora la función de coste depende de la secuencia simbólica completa, $\mathbf{s} = \mathbf{s}_{0:N-1} = [s[0], \dots, s[N-1]]^T$, independientemente de la muestra de referencia, $x[n]$, utilizada. Esto es debido a que las expresiones desarrolladas en la Sección 3.3 requieren el itinerario completo para obtener la composición funcional del mapa de manera cerrada. De este modo se consigue una ecuación cerrada para la función de coste, pero el precio a pagar es la necesidad de conocer toda la secuencia simbólica.

Aunque (3.30) es una función de coste relativamente complicada, su dependencia con respecto al parámetro que se desea estimar, $x[n]$, es extremadamente simple para una secuencia simbólica dada: se trata de una función cuadrática. Este hecho garantiza la existencia de un único mínimo global, que se puede obtener derivando (3.30) con respecto a $x[n]$ e igualando a cero. Para obtener el mínimo en los apartados posteriores resulta ventajoso notacionalmente reescribir los dos sumatorios de (3.30) de manera unificada como

$$J(x[n], \mathbf{s}) = \sum_{k=-n}^{N-n} (\gamma_{\mathbf{s}}^n[k] - \alpha_{\mathbf{s}}^n[k]x[n])^2. \quad (3.31)$$

Donde el término $\alpha_{\mathbf{s}}^n[k]$ viene dado por (3.27), y la expresión de $\gamma_{\mathbf{s}}^n[k]$ para cada muestra depende de $\nu_{\mathbf{s}}^n[k]$ (3.28), y vale

$$\gamma_{\mathbf{s}}^k[n] = y[n+k] - \nu_{\mathbf{s}}^n[k] = \begin{cases} y[n+k] + \sum_{m=1}^{-k} B_{\mathbf{s}}^{m,-k} b_{s[n-m]}, & -n \leq k \leq -1; \\ y[n+k] - \sum_{m=0}^{k-1} A_{\mathbf{s}}^{m+1,k} b_{s[n+m]}, & 0 \leq k \leq N-n. \end{cases} \quad (3.32)$$

Esta formulación de la función de coste o superficie de error permite obtener expresiones muy sencillas para el estimador ML en los dos siguientes apartados. Sin embargo, antes de desarrollar el estimador ML para cualquier mapa PWL, resulta interesante examinar con mayor detalle la función de coste dada por (3.31). A pesar de ser cuadrática en $x[n]$ para una determinada secuencia simbólica (y por lo tanto presentar un único mínimo para esa secuencia), el número de itinerarios válidos crece exponencialmente con la longitud de la señal caótica. En consecuencia, el número total de mínimos y máximos a lo largo de todo el espacio de fases del mapa crece de manera exponencial con N . Además, este efecto está íntimamente asociado a la forma característica de la

función de coste y es independiente del ruido, observándose tanto en funciones de coste muy ruidosas como en aquellas carentes de ruido.

Como ejemplo, en la Figura 3.6 se muestra la función de coste sin ruido para el SK-TM con $c = 0,3$, una condición inicial seleccionada aleatoriamente, y diferentes valores de N desde 5 hasta 100. El hecho de que la función de coste no valga nunca exactamente cero para las gráficas (b)–(d) se debe a que ninguna de las muestras de la rejilla de evaluación coincide exactamente con $x[0]$. Como se puede apreciar, la función de coste es extremadamente rugosa, incluso para valores de N pequeños, presentando características fractales.

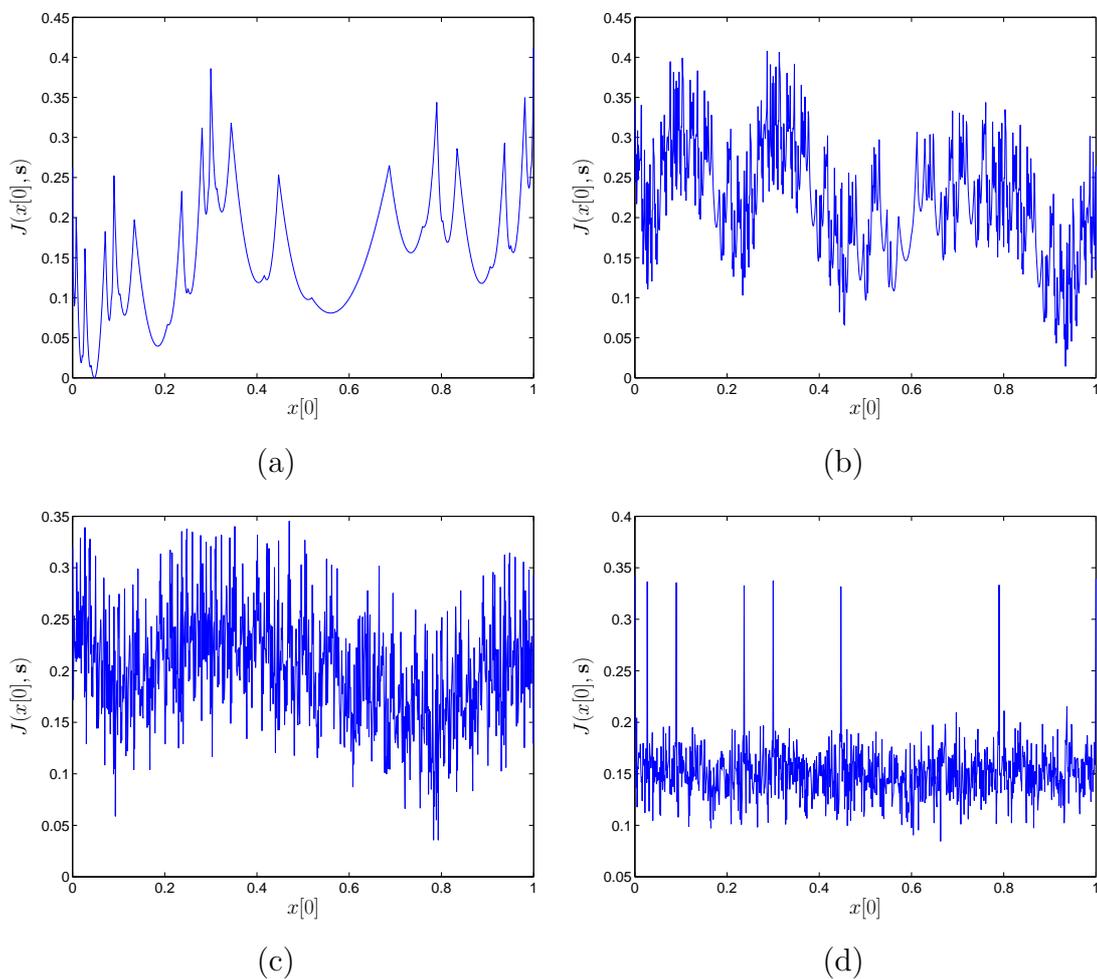


Figura 3.6: Función de coste sin ruido para el TM con $\beta = 2$ y diferentes longitudes de la señal caótica. (a) $x[0] = 0,047302$ y $N = 5$. (b) $x[0] = 0,93843$ y $N = 10$. (c) $x[0] = 0,78923$ y $N = 20$. (d) $x[0] = 0,604$ y $N = 100$.

Para corroborar la naturaleza fractal de la función de coste, en la Figura 3.7 se muestra la misma para $N = 100$ a lo largo de diferentes escalas, constatando que el aspecto de la función es esencialmente independiente de la porción del espacio de fases

escogida, aunque obviamente solo dentro de un cierto rango limitado de escalas, como ocurre con todos los fractales reales, que depende del valor de N . Adicionalmente, se ha calculado la dimensión fractal de la curva [Falcon1990] en los cuatro casos presentados, obteniéndose $d = 1,47$ para la Figura 3.7(a), $d = 1,35$ para la (b), $d = 1,28$ para la (c), y $d = 1,23$ para la (d). La reducción de la dimensión observada en las primeras gráficas se explica por la desaparición de los grandes picos presentes en la Figura 3.7(a), de los que ya sólo queda uno en la región mostrada en (b), y que desaparecen totalmente en (c) y (d). Sin embargo, en estas dos gráficas la dimensión fractal permanece aproximadamente estable, y sensiblemente superior a 1, lo que proporciona indicios relativamente fiables del carácter fractal de la función de coste.

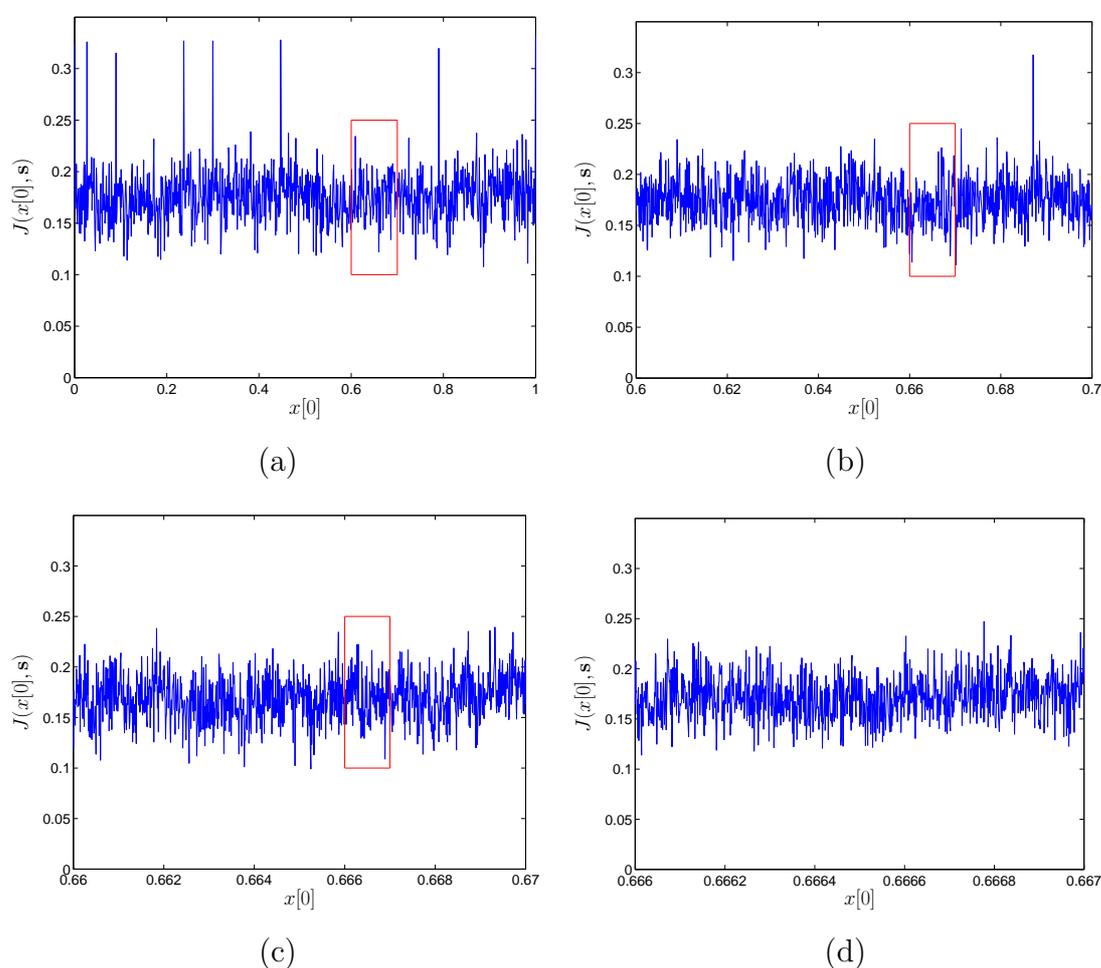


Figura 3.7: Función de coste sin ruido para el TM con $x[0] = 0,1136$, $\beta = 2$, $N = 100$ y diferentes porciones del espacio de fases. (a) $x[0] \in [0, 1]$. (b) $x[0] \in [0,6 0,7]$. (c) $x[0] \in [0,66 0,67]$. (d) $x[0] \in [0,666 0,667]$.

Esta naturaleza fractal de la función de coste va a causar dificultades en el proceso de estimación por diferentes motivos. En primer lugar, van a existir numerosos mínimos,

de modo que no tiene sentido aplicar ningún método de estimación iterativo del tipo descenso de gradiente cuando no se conoce el itinerario (excepto quizás a escala local), ya que casi con total seguridad el algoritmo acabaría en un mínimo local. En segundo lugar, estos mínimos se encuentran presentes a lo largo de un rango amplio de escalas, lo que condiciona también la utilización de algoritmos del tipo de búsqueda en rejilla, ya que seguramente no se van a explorar mínimos importantes de la función de coste. Estas dos consideraciones, debidas a la naturaleza de la función de coste, provocan que, como se va a discutir en las siguientes secciones, cualquier mecanismo de estimación planteado deba trabajar de manera local determinando el itinerario de la señal y posteriormente aplicando algún tipo de estimador local. El estimador global se obtendrá finalmente como el mejor de todos los estimadores locales.

3.4.2. Estimador ML con Secuencia Simbólica Conocida

En el caso de que se conozca la secuencia simbólica \mathbf{s} para toda la secuencia caótica \mathbf{x} , el único parámetro desconocido de (3.31) es $x[n]$. Puesto que (3.31) presenta una dependencia cuadrática con $x[n]$, derivando e igualando a cero se obtiene el valor para el que alcanza su único mínimo:

$$\hat{x}[n] = \frac{\sum_{k=-n}^{N-n} \alpha_{\mathbf{s}}^n[k] \gamma_{\mathbf{s}}^n[k]}{\sum_{k=-n}^{N-n} \alpha_{\mathbf{s}}^n[k]^2}. \quad (3.33)$$

La ecuación (3.33) aún no es el estimador ML de $x[n]$. Debido a la presencia de ruido en las muestras, es posible que (3.33) proporcione una estima cuya secuencia simbólica no coincida con la secuencia simbólica real. En ese caso, el estimador ML se obtiene como el punto más cercano a la estima dada por (3.33) dentro del conjunto de puntos del espacio de fases con el itinerario deseado. En general se debe considerar la secuencia simbólica completa, $\{s[k]\}_{k=0}^{N-1}$, tanto la correspondiente a las muestras anteriores a la de referencia como la relativa a las posteriores. En la Proposición 3.1 se muestra cuál es el estimador ML de la secuencia caótica cuando se conoce su secuencia simbólica. Posteriormente, en la Sección 3.4.3, se discute cómo obtener la región del espacio de fases dentro de la que $x[n]$ presenta el itinerario deseado.

Proposición 3.1 *Sea una secuencia de muestras desconocida, $\{x[k]\}_{k=0}^N$, generada mediante la iteración, usando (3.11) o (3.12), de un mapa PWL con M intervalos definido por (2.14), sea $\mathbf{s} = [s[0], \dots, s[N-1]]^T$ el vector que contiene el itinerario conocido asociado a la secuencia caótica, y sea $\{y[k]\}_{k=0}^N$ la secuencia de observaciones disponibles, obtenidas sumando ruido blanco Gaussiano a cada muestra $x[k]$. El estimador ML de la muestra n -ésima de la secuencia, $x[n]$, es*

$$\hat{x}_{\text{ML}}[n] = \begin{cases} \kappa_{\mathbf{s}}^n, & \hat{x}[n] > \kappa_{\mathbf{s}}^n; \\ \hat{x}[n], & \hat{x}[n] \in R_{\mathbf{s}}^n; \\ \eta_{\mathbf{s}}^n, & \hat{x}[n] < \eta_{\mathbf{s}}^n. \end{cases} \quad (3.34)$$

Donde $\hat{x}[n]$ es el mínimo de (3.31), obtenido derivando con respecto a $x[n]$ y dado por (3.33),

$$\hat{x}[n] = \frac{\sum_{k=-n}^{N-n} \alpha_s^n[k] \gamma_s^n[k]}{\sum_{k=-n}^{N-n} \alpha_s^n[k]^2},$$

mientras que κ_s^n y η_s^n son los límites inferior y superior respectivamente de la región del espacio de fases R_s^n , que está compuesta por el conjunto de puntos cuya secuencia simbólica coincide con el itinerario conocido dado por \mathbf{s} :

$$R_s^n = \{x : f^{-n}(x) \in E_{s[0]}, \dots, x \in E_{s[n]}, \dots, f^{N-n-1}(x) \in E_{s[N-1]}\} = [\eta_s^n, \kappa_s^n].$$

El estimador ML del resto de muestras de la secuencia caótica se obtiene iterando hacia delante o hacia atrás a partir de $\hat{x}_{\text{ML}}[n]$ utilizando la secuencia simbólica conocida, \mathbf{s} . Es decir,

$$\hat{x}_{\text{ML}}[n+k] = f_s^k(\hat{x}_{\text{ML}}[n]), \quad (3.35)$$

con $k = -n, \dots, -1, 1, \dots, N-n$. En consecuencia, el estimador ML de la secuencia completa, $\mathbf{x} = [x[0], \dots, x[N]]^T$, es

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}} = [f_s^{-n}(\hat{x}_{\text{ML}}[n]), \dots, f_s^{-1}(\hat{x}_{\text{ML}}[n]), \hat{x}_{\text{ML}}[n], f(\hat{x}_{\text{ML}}[n]), \dots, f^{N-n}(\hat{x}_{\text{ML}}[n])]^T.$$

Resumiendo, el estimador ML de $x[n]$ se obtiene aplicando un umbral duro a la estima obtenida derivando la función de coste, de tal modo que se garantice que el itinerario de la estima coincide con la secuencia simbólica real conocida. En la Figura 3.8 se muestran las dos situaciones posibles para $J(x[0])$. Por una parte, en la Figura 3.8(a) el mínimo de la función de coste se encuentra dentro de la región correspondiente al itinerario dado, de modo que $\hat{x}_{\text{ML}}[n] = \hat{x}[n]$. Y por otra parte, en la Figura 3.8(b) el ruido ha causado un desplazamiento del mínimo fuera de R_s^0 , por lo que $\hat{x}_{\text{ML}}[n] \neq \hat{x}[n]$ y el estimador ML coincide con uno de los límites de la región, tal como indica la Proposición 3.1. Nótese que incluso en el primer caso el elevado ruido ha provocado un desplazamiento del mínimo a $x[0] = 0,4469$, cuando su valor real es $x[0] = 0,3108$.

Respecto a la estima ML del resto de la secuencia caótica, esta se puede obtener iterando hacia delante y hacia atrás a partir de $\hat{x}_{\text{ML}}[n]$, gracias a la *propiedad de invariancia* del estimador ML [Zacks1971, Mendel1987, Kay1993]. La única cuestión que queda por resolver es la obtención de la región del espacio de fases dentro de la que $x[n]$ presenta una determinada secuencia simbólica. Para ello, como se muestra en la Sección 3.4.3, se va a dividir la secuencia simbólica en dos conjuntos: el de los símbolos correspondientes a muestras anteriores a $x[n]$, y el de los símbolos asociados a muestras posteriores a $x[n]$. El procedimiento completo para hallar el estimador ML de la secuencia caótica cuando el itinerario es conocido se recoge en el Algoritmo 3.3.

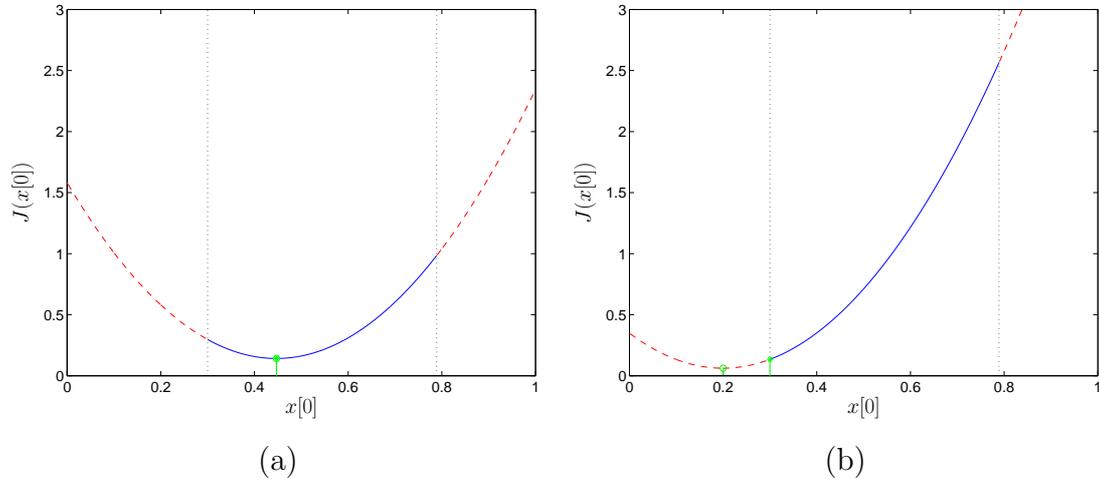


Figura 3.8: Ejemplos de función de coste, $J(x[0])$, cuando el itinerario es conocido para el SK-TM con $x[0] = 0,3108$, $c = 0,3$, $N = 2$ y SNR = 20 dB. (a) Función de coste con el mínimo dentro de R_s^0 : $\hat{x}_{ML}[0] = \hat{x}[0] = 0,4469$. (b) Función de coste con el mínimo fuera de R_s^0 : $\hat{x}[0] = 0,248$ ('o') y $\hat{x}_{ML}[0] = 0,3$ (*').

Por último, se van a considerar dos casos particulares del estimador ML de especial relevancia: elección de la primera muestra de la secuencia como referencia, y elección de la última muestra como referencia. En primer lugar, si se elige como muestra de referencia de la secuencia $x[0]$, todas las muestras restantes se obtienen mediante iteración hacia delante. En este caso la estima de $x[0]$ viene dada por

$$\hat{x}[0] = \frac{\sum_{k=0}^N A_s^{0,k} \left(y[k] - \sum_{m=0}^{k-1} A_s^{m+1,k} b_s[m] \right)}{\sum_{k=0}^N \left(A_s^{0,k} \right)^2}. \quad (3.36)$$

Y la estima ML de $x[0]$ se obtiene limitando el resultado de (3.36), esto es, aplicando un umbral duro de modo que $\hat{x}_{ML}[0]$ permanezca siempre dentro de los límites de R_s^0 . El resto de la secuencia se obtiene iterando hacia delante a partir de $\hat{x}_{ML}[0]$.

El otro caso particular de interés ocurre cuando se elige como muestra de referencia el último punto de la secuencia, $x[N]$. En este caso el resto de las muestras de la secuencia se generan mediante iteración hacia atrás, y la estima inicial de $x[N]$ resulta

$$\hat{x}[N] = \frac{\sum_{k=0}^N B_s^{1,k} \left(y[N-k] + \sum_{m=1}^k B_s^{m,k} b_s[N-m] \right)}{\sum_{k=0}^N \left(B_s^{1,k} \right)^2}. \quad (3.37)$$

Si para cualquier punto del espacio de fases del mapa este dispone de una imagen inversa dentro de cada una de las regiones de la partición natural, entonces todas las

1. Obtener el mínimo de la función de coste dada por (3.31) derivando con respecto a $x[n]$, cuya expresión cerrada es (3.33).
2. Hallar la región del espacio de fases formada por el conjunto de valores de $x[n]$ que pueden generar el itinerario correspondiente a las muestras anteriores, $s[0], \dots, s[n-1]$, mediante el Algoritmo 3.4.
3. Hallar la región del espacio de fases formada por el conjunto de valores de $x[n]$ que pueden generar el itinerario correspondiente a las muestras posteriores, $s[n], \dots, s[N-1]$, mediante el Algoritmo 3.5.
4. Realizar la intersección de estas dos regiones para construir $R_s^n = [\eta_s^n, \kappa_s^n]$.
5. Encontrar el estimador ML de $x[n]$ usando (3.34). Si $x[n] \in R_s^n$, entonces $\hat{x}_{ML}[n] = \hat{x}[n]$. En caso contrario, el estimador ML es el punto más cercano de R_s^n : η_s^n ó κ_s^n .
6. Obtener el estimador ML del resto de la secuencia iterando hacia delante o hacia atrás a partir de $\hat{x}_{ML}[n]$ según corresponda.

Algoritmo 3.3: Estimador ML de una secuencia caótica cuando la secuencia simbólica es conocida.

secuencias simbólicas hacia atrás son válidas, y se cumple que $\hat{x}_{ML}[N] = \hat{x}[N]$. En caso contrario puede ser necesario recortar $\hat{x}[N]$, al igual que en los casos anteriores, para garantizar que $\hat{x}_{ML}[N]$ pertenezca a R_s^N . El resto de la secuencia se obtiene iterando hacia atrás a partir de $x[N]$ usando la secuencia simbólica conocida s .

3.4.3. Partición del Espacio de Fases en Función del Itinerario

Tanto para el planteamiento del estimador ML como de los estimadores Bayesianos se debe realizar una partición del espacio de fases en función del itinerario de la secuencia. Para ello se van a encontrar por separado la región delimitada por las muestras anteriores cuyo itinerario es el deseado, $R_{s_{0:n-1}}^n$, y la definida por los puntos posteriores, $R_{s_{n:N-1}}^n$. La región buscada será la intersección de ambas:

$$R_s^n = R_{s_{0:n-1}}^n \cap R_{s_{n:N-1}}^n.$$

Se van a considerar en primer lugar las muestras anteriores de la secuencia simbólica, y a continuación las muestras posteriores.

3.4.3.1. Regiones del Espacio de Fases Definidas por el Itinerario Anterior

Comencemos considerando las muestras anteriores de la secuencia simbólica, y analizando la región del espacio de fases demarcada por las mismas. Puesto que se trabaja siempre con mapas no invertibles, a partir de un valor estimado $\hat{x}[n]$ existen en general varias posibles secuencias simbólicas válidas. En particular, muchos mapas PWL

mapean cada región de la partición natural del mapa en el espacio de fases completo. El SK-TM, el BSK-TM, el TM y el S-TM con $\beta = 2$, o el mapa de desplazamiento de Bernouilli, son ejemplos de este tipo de mapas. Para esta clase de mapas todas las secuencias simbólicas $\{s[k]\}_{k=0}^{n-1}$ son posibles, y cualquier estima de $x[n]$ no plantea ningún problema en cuanto a su iteración hacia atrás. Es decir, a partir de $\hat{x}[n]$ siempre va a ser posible construir una secuencia caótica $\{\hat{x}[k]\}_{k=0}^{n-1}$ cuyo itinerario coincida con el real. Por lo tanto, para este tipo de mapas las muestras anteriores a la n -ésima no influyen en la determinación de la región del espacio de fases con el itinerario deseado, y se tiene $R_{s_0:n-1}^n = I = [e_0, e_M]$, de modo que $R_s^n = R_{s_n:N-1}^n$.

Sin embargo, en un caso general esto no va a ser cierto. Considérense por ejemplo los tres mapas PWL mostrados en la Sección 2.3.3. En todos ellos existen regiones del espacio de fases inalcanzables desde algunos intervalos. Por ejemplo, para el mapa de Markov con cuatro intervalos mostrado en la Figura 2.4, desde E_1 no se puede alcanzar E_4 , desde E_3 no se puede llegar directamente a E_1 , y desde E_2 únicamente se pueden alcanzar E_2 y E_3 . De igual modo, para el mapa de la Figura 2.5(a) E_1 se mapea en E_2 , y para el de la Figura 2.5(b) desde E_2 sólo se puede llegar a E_3 , mientras que desde el resto de intervalos se pueden alcanzar todas las regiones, aunque no siempre cualquier punto de las mismas.

¿Cómo obtener la región del espacio de fases a la que debe pertenecer $x[n]$ para que pueda tener una secuencia simbólica $s[0], \dots, s[n-1]$? Para empezar, se va a tener en cuenta inicialmente sólo el símbolo anterior, $s[n-1]$. Esta muestra del itinerario delimita una región a la que debe pertenecer $x[n-1]$. Esto es, sabemos que $x[n-1] \in E_{s[n-1]} = [e_{s[n-1]-1}, e_{s[n-1]})$. Por lo tanto, $x[n]$ debe ser la imagen de algún punto de $E_{s[n-1]}$, y en consecuencia tiene que estar comprendida dentro de la región delimitada por la imagen de $E_{s[n-1]}$. Es decir,

$$R_{s[n-1]}^n = f(E_{s[n-1]}).$$

Por ejemplo, considérese nuevamente el mapa de Markov con cuatro intervalos de la Figura 2.4, cuyo espacio de fases es $I = [0, 1]$. En la Tabla 3.2 se muestran los cuatro intervalos de su partición natural, así como sus imágenes, y por tanto las diferentes regiones del espacio de fases definidas con un solo símbolo. En la tabla, \overline{E}_3 denota el *cierre* de E_3 : E_3 más todos sus puntos límite.

| $s[n-1]$ | E_i | $f(E_i)$ |
|----------|--------------|--|
| 1 | $[0, 0,2)$ | $[0, 0,9) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ |
| 2 | $[0,2, 0,7)$ | $(0,2, 0,9) = E_2 \cup \overline{E}_3 - \{0,2\}$ |
| 3 | $[0,7, 0,9)$ | $[0,2, 1,0) = E_2 \cup E_3 \cup E_4 - \{1\}$ |
| 4 | $[0,9, 1,0]$ | $[0, 1] = I$ |

Tabla 3.2: Partición en regiones del espacio de fases en función de $s[n-1]$ para el mapa de Markov de la Figura 2.4.

Veamos ahora qué ocurre si además de $s[n-1]$ se tiene en cuenta $s[n-2]$. Evidentemente, $x[n-2] \in E_{s[n-2]}$, de modo que para $x[n]$ debe cumplirse que $x[n] \in f^2(E_{s[n-2]})$.

Adicionalmente, $x[n-1] \in E_{s[n-1]}$, pero además $s[n-2]$ impone una limitación al conjunto de posibles valores de $x[n-1]$ del mismo modo que $s[n-1]$ la impone sobre $x[n]$, de modo que $x[n-1] \in f(E_{s[n-2]})$. Juntando estas dos restricciones se tiene que $x[n-1] \in E_{s[n-1]} \cap f(E_{s[n-2]})$, e iterando el conjunto de posibles valores de $x[n-1]$ se obtiene la región dentro de la cual tiene que encontrarse $x[n]$:

$$R_{s[n-2],s[n-1]}^n = f(f(E_{s[n-2]}) \cap E_{s[n-1]}).$$

Además, esta condición es claramente más restrictiva que la impuesta únicamente por $s[n-1]$, $x[n] \in f(E_{s[n-1]})$, o por $s[n-2]$, $x[n] \in f^2(E_{s[n-2]})$, de modo que es la única que se debe verificar. Este proceso se puede continuar recursivamente para una secuencia simbólica de longitud n , de modo que la región definida por las muestras anteriores del itinerario para un $x[n]$ cualquiera es el indicado por la Proposición 3.2.

Proposición 3.2 *Sea un mapa PWL con M intervalos y un espacio de fases $I = [e_0, e_M]$, definido por (2.14). Considérese una secuencia caótica obtenida iterando el mapa PWL utilizando (3.11) o (3.12), $\{x[k]\}_{k=0}^n$, y sea $\mathbf{s} = [s[0], \dots, s[n-1]]^T$ el vector que contiene el itinerario conocido asociado a la secuencia caótica. La región del espacio de fases a la que puede pertenecer $x[n]$ viene dada por*

$$R_{\mathbf{s}_{0:n-1}}^n = f(f(\dots f(f(E_{s[0]}) \cap E_{s[1]}) \cap \dots \cap E_{s[n-2]}) \cap E_{s[n-1]}),$$

con $1 \leq n \leq N$.

Esta proposición garantiza que la región del espacio de fases adecuada se puede obtener simplemente iterando hacia delante las regiones de la partición natural del mapa a las que pertenece cada muestra del itinerario. En el Algoritmo 3.4 se muestra cómo obtener estas regiones de manera sencilla de acuerdo con la Proposición 3.2. Nótese también que, si se conoce la región correspondiente a una secuencia simbólica de longitud n , $\mathbf{s} = [s[0], \dots, s[n-1]]^T$, y se incorpora una nueva muestra a la secuencia, la nueva región se puede obtener muy fácilmente a partir de la anterior:

$$R_{\mathbf{s}_{0:n}}^{n+1} = f(R_{\mathbf{s}_{0:n-1}}^n \cap E_{s[n]}). \quad (3.38)$$

Así que, como puede observarse, lo que hace realmente el Algoritmo 3.4 es calcular sucesivamente las diferentes regiones para una secuencia simbólica dada: $R_{\mathbf{s}}^1, R_{\mathbf{s}}^2, \dots, R_{\mathbf{s}}^n$.

Para finalizar este apartado, se van a mostrar a continuación un par de ejemplos en los que se ilustra la forma que presentan estas regiones. En primer lugar, considérese el mapa de Markov dado por la Figura 2.5(a). En este caso, desde E_1 únicamente se puede ir a E_2 , mientras que desde E_2 se puede ir a cualquier región del espacio de fases. En la Tabla 3.3 se muestran las diferentes regiones del mapa para $n=1, 2$, y 3 , denotándose mediante \emptyset el conjunto vacío, que indica que una cierta secuencia simbólica no es válida. Como se puede observar en la Tabla 3.2 y en la Tabla 3.3, todas las regiones obtenidas que se corresponden con secuencias válidas son el resultado de la unión de una o más regiones de la partición natural, con la posible inclusión/exclusión de alguno de los

1. Inicializar el algoritmo con una región inicial $V_0 = E_{s[0]}$.
2. Para $i = 1, \dots, n - 1$, obtener la región i -ésima como $V_i = f(V_{i-1}) \cap E_{s[i]}$.
3. Finalmente, la región buscada es $R_{s_{0:n-1}}^n = f(V_{n-1})$.

Algoritmo 3.4: Obtención de la región del espacio de fases para la muestra n -ésima delimitada por las muestras previas del itinerario: $s[0], \dots, s[n - 1]$.

puntos límite. Esto es debido a la naturaleza de los mapas de Markov, que transforman los extremos de las regiones originales en los extremos de otras, y se va a cumplir para cualquier mapa de Markov. Para mapas PWL no markovianos, como el de la Figura 2.5(b), esta propiedad no se cumple, y en ese caso se pueden tener límites de regiones más interesantes, como se muestra en la Tabla 3.4.

| \mathbf{s}^T | $R_{s[0]}^1$ | $R_{s[0],s[1]}^2$ | $R_{s[0],s[1],s[2]}^3$ |
|----------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| [1, 1, 1] | $[a, 1) = E_2 - \{1\}$ | \emptyset | \emptyset |
| [1, 1, 2] | $[a, 1) = E_2 - \{1\}$ | \emptyset | \emptyset |
| [1, 2, 1] | $[a, 1) = E_2 - \{1\}$ | $[0, 1) = I - \{1\}$ | $[a, 1) = E_2 - \{1\}$ |
| [1, 2, 2] | $[a, 1) = E_2 - \{1\}$ | $[0, 1) = I - \{1\}$ | $(0, 1) = I - \{0\}$ |
| [2, 1, 1] | $[0, 1) = I$ | $[a, 1) = E_2 - \{1\}$ | \emptyset |
| [2, 1, 2] | $[0, 1) = I$ | $[a, 1) = E_2 - \{1\}$ | $(0, 1) = I - \{0\}$ |
| [2, 2, 1] | $[0, 1) = I$ | $[0, 1) = I$ | $[a, 1) = E_2 - \{1\}$ |
| [2, 2, 2] | $[0, 1) = I$ | $[0, 1) = I$ | $[0, 1) = I$ |

Tabla 3.3: Partición en regiones del espacio de fases en función de $\mathbf{s} = [s[0], s[1], s[2]]^T$ para el mapa de Markov de la Figura 2.5(a).

En la Tabla 3.4 se pueden observar las cuatro clases de regiones diferentes que existen:

1. El conjunto vacío cuando el itinerario no es válido (esto es, no se puede dar nunca dicha combinación de símbolos).
2. La unión de una o más regiones de la partición natural del mapa (pudiendo llegar a tenerse el espacio de fases completo, I) con la posible inclusión/exclusión de alguno de los extremos.
3. Una región del espacio de fases que se halla contenida dentro de alguna de las regiones de la partición natural, pudiendo llegar a degenerar en un único punto.
4. Una región del espacio de fases que comprende varias regiones de la partición natural, pero sin incluir completamente al menos una de ellas.

| \mathbf{s}^T | $R_{s[0]}^1$ | $R_{s[0],s[1]}^2$ |
|----------------|------------------------|-------------------------------------|
| [1, 1] | [0,3, 0,9) | [0,66, 0,9) |
| [1, 2] | [0,3, 0,9) | [0,9, 1) $\subset E_3$ |
| [1, 3] | [0,3, 0,9) | (0,5, 1] = $E_2 \cup E_3 - \{0,5\}$ |
| [2, 1] | [0,9, 1) $\subset E_3$ | \emptyset |
| [2, 2] | [0,9, 1) $\subset E_3$ | \emptyset |
| [2, 3] | [0,9, 1) $\subset E_3$ | (0, 0,5] = $E_1 + \{0,5\} - \{0\}$ |
| [3, 1] | [0, 1] = I | [0,3, 0,9) |
| [3, 2] | [0, 1] = I | [0,9, 1) $\subset E_3$ |
| [3, 3] | [0, 1] = I | [0, 1] = I |

Tabla 3.4: Partición en regiones del espacio de fases en función de $\mathbf{s} = [s[0], s[1]]^T$ para el mapa PWL no markoviano de la Figura 2.5(b).

Como ya se ha mencionado, para los mapas de Markov únicamente son posibles los dos primeros tipos de regiones. Además, independientemente del mapa, estas regiones son siempre conexas (es decir, están compuestas por un único intervalo), como demuestra el siguiente lema.

Lema 3.3 *Sea $x[n]$ la muestra n -ésima de una secuencia caótica obtenida iterando un mapa PWL con M intervalos definido por (2.14) de acuerdo con (3.11) o (3.12), y sea $\mathbf{s} = [s[0], \dots, s[n-1]]^T$ el vector con las n primeras muestras del itinerario asociado a dicha señal caótica. La región del espacio de fases a la que puede pertenecer $x[n]$, $R_{\mathbf{s}_{0:n}}$, es conexa, presentando por lo tanto la siguiente forma,*

$$R_{\mathbf{s}_{0:n}} = [\eta_{\mathbf{s}_{0:n}}^n, \kappa_{\mathbf{s}_{0:n}}^n],$$

con la posible exclusión de alguno de los dos puntos extremos, $\eta_{\mathbf{s}_{0:n}}^n$ y/o $\kappa_{\mathbf{s}_{0:n}}^n$.

Demostración 3.3 *La demostración se realiza por inducción. Nótese en primer lugar que para $n = 1$ la región asociada únicamente a $s[0]$,*

$$R_{s[0]}^1 = f(E_{s[0]}),$$

es necesariamente conexa, debido a que f es lineal dentro de cada E_i ($1 \leq i \leq M$) y por lo tanto continua. A continuación, se supone que $R_{\mathbf{s}_{0:n-1}}^n$ es conexa, y se debe demostrar que $R_{\mathbf{s}_{0:n}}^{n+1}$, dada por (3.38), es conexa. Esto es equivalente a demostrar que $V_n = R_{\mathbf{s}_{0:n-1}}^n \cap E_{s[n]}$ se encuentra contenido dentro de algún E_i , ya que entonces se encuentra garantizada la continuidad de f para cualquier punto de V_n . Y puesto que $R_{\mathbf{s}_{0:n-1}}^n = [\eta_{\mathbf{s}_{0:n-1}}^n, \kappa_{\mathbf{s}_{0:n-1}}^n]$ y $E_{s[n]} = [e_{s[n]-1}, e_{s[n]}]$, su intersección resulta

$$V_n = [\max\{\eta_{\mathbf{s}_{0:n-1}}^n, e_{s[n]-1}\}, \min\{\kappa_{\mathbf{s}_{0:n-1}}^n, e_{s[n]}\}] \subseteq E_{s[n]},$$

de modo que $R_{\mathbf{s}_{0:n}}^{n+1}$ es obligatoriamente conexa. En consecuencia, dado que $R_{s[0]}^1$ es conexa, y supuesto que $R_{\mathbf{s}_{0:n}}^n$ es conexa, $R_{\mathbf{s}_{0:n}}^{n+1}$ también lo es, por inducción se puede afirmar que esto se va a cumplir para cualquier número natural.

Por último, nótese que en general existe un solapamiento entre dichas regiones, de modo que realmente no forman una partición del espacio de fases del mapa caótico en el sentido descrito en la Sección 2.4.1. No obstante, este no es un detalle relevante, ya que dichas regiones son necesarias únicamente para garantizar que la estima de $x[n]$ obtenida puede dar lugar al itinerario deseado.

3.4.3.2. Regiones del Espacio de Fases Definidas por el Itinerario Posterior

La situación es bastante distinta en el caso de la iteración hacia delante: todos los puntos de cualquier mapa caótico tienen asociada una única secuencia simbólica hacia delante. En consecuencia, si la secuencia simbólica que generaría $\hat{x}[n]$ mediante iteración directa no coincide con la secuencia simbólica “real” conocida, \mathbf{s} , la secuencia caótica dada por $\{\hat{x}[n], f_{\mathbf{s}}(\hat{x}[n]), \dots, f_{\mathbf{s}}^{N-n}(\hat{x}[n])\}$ no es válida, y el estimador ML de $x[n]$ no coincide con $\hat{x}[n]$.

En cualquier caso, las regiones del espacio de fases asociadas a las diferentes secuencias simbólicas se obtienen de forma similar a las correspondientes al itinerario anterior. En primer lugar, $s[n]$ impone la restricción de que $x[n]$ pertenezca a $E_{s[n]}$, es decir, $R_{s[n]}^n = E_{s[n]}$. Si se considera el siguiente símbolo de la secuencia, $s[n+1]$, se tiene que $x[n+1] \in E_{s[n+1]}$, de modo que $x[n]$ tiene que pertenecer a la iteración hacia atrás de $E_{s[n+1]}$ utilizando como símbolo para calcular la inversa $s[n]$. Es decir, la región correspondiente es

$$R_{s[n],s[n+1]}^n = E_{s[n]} \cap f_{s[n]}^{-1}(E_{s[n+1]}).$$

Al iterar hacia atrás utilizando $s[n]$ se fuerza a que $x[n]$ pertenezca a $E_{s[n]}$, de modo que en teoría $f_{s[n]}^{-1}(E_{s[n+1]}) \subseteq E_{s[n]}$, siempre que la iteración hacia atrás sea posible, y por lo tanto aparentemente no sería necesaria la intersección. Sin embargo, puede ocurrir que una porción de $E_{s[n+1]}$ no sea alcanzable desde $E_{s[n]}$, y en consecuencia su iteración hacia atrás usando $s[n]$ no sea válida. En este caso, dicha porción de $E_{s[n+1]}$ va a dar lugar a valores de $x[n]$ fuera de $E_{s[n]}$, de modo que se debe mantener la intersección para garantizar la validez de las regiones obtenidas. Continuando con este proceso recursivo se puede obtener fácilmente la región delimitada por la secuencia simbólica asociada a las muestras posteriores a $x[n]$, como se muestra en la Proposición 3.3.

Proposición 3.3 *Sea un mapa PWL con M intervalos y un espacio de fases $I = [e_0, e_M]$, definido por (2.14). Considérese una secuencia caótica obtenida iterando el mapa PWL utilizando (3.11) o (3.12), $\{x[k]\}_{k=0}^N$, y sea $\mathbf{s} = [s[n], \dots, s[N-1]]^T$ el vector que contiene el itinerario conocido asociado a la secuencia caótica. La región del espacio de fases a la que puede pertenecer $x[n]$, viene dada por*

$$R_{\mathbf{s}_{n:N-1}}^n = f_{s[n]}^{-1}(f_{s[n+1]}^{-1}(\dots f_{s[N-3]}^{-1}(f_{s[N-2]}^{-1}(E_{s[N-1]}) \cap E_{s[N-2]}) \cap E_{s[N-3]} \dots) \cap E_{s[n+1]}) \cap E_{s[n]},$$

con $0 \leq n \leq N-1$.

Esta proposición garantiza que la región del espacio de fases adecuada se puede obtener simplemente iterando hacia atrás la región de la partición natural del mapa a la que pertenece la muestra $(N - 1)$ -ésima de la secuencia, utilizando el itinerario de todas las muestras anteriores hasta la n -ésima: $s[n], \dots, s[N - 2]$. Por ejemplo, para $n = 0$ y $N = 4$, la región correspondiente al itinerario $\mathbf{s} = [s[0], s[1], s[2], s[3]]^T$ sería

$$R_{\mathbf{s}}^{0,4} = f_{s[0]}^{-1}(f_{s[1]}^{-1}(f_{s[2]}^{-1}(E_{s[3]} \cap E_{s[2]}) \cap E_{s[1]}) \cap E_{s[0]}).$$

En el Algoritmo 3.5 se muestra cómo obtener estas regiones aplicando directamente la Proposición 3.3. Aunque la forma de calcular las regiones es similar a la del Algoritmo 3.4 (iterando hacia atrás en este caso), existen dos diferencias importantes:

1. El Algoritmo 3.4 acaba con una iteración hacia delante, mientras que el Algoritmo 3.5 finaliza con una intersección.
2. Las regiones obtenidas por el Algoritmo 3.4 no constituyen una partición del espacio de fases, mientras que las obtenidas por el Algoritmo 3.5 sí van a formar una partición del mismo de acuerdo con la Definición 2.13.

1. Inicializar el algoritmo con una región inicial $W_0 = E_{s[N-1]}$.

2. Para $i = 1, \dots, N - n - 1$, obtener la región i -ésima como

$$W_i = f_{s[N-i-1]}^{-1}(W_{i-1}) \cap E_{s[N-i-1]}.$$

3. Finalmente, la región buscada es $R_{\mathbf{s}_{n:N-1}}^n = W_{N-n-1}$.

Algoritmo 3.5: Obtención de la región del espacio de fases para la muestra n -ésima delimitada por las muestras posteriores del itinerario: $s[n], \dots, s[N - 1]$.

Nótese que para la forma de las regiones definidas por el itinerario posterior también existe una relación similar a (3.38),

$$R_{\mathbf{s}_{n-1:N-1}}^{n-1} = f_{s[n-1]}^{-1}(R_{\mathbf{s}_{n:N-1}}^n) \cap E_{s[n-1]}, \quad (3.39)$$

y se puede apreciar claramente que el Algoritmo 3.5 procede aplicando reiteradamente (3.39) y calculando sucesivamente las distintas regiones: $R_{\mathbf{s}}^{N-1}, R_{\mathbf{s}}^{N-2}, \dots, R_{\mathbf{s}}^n$.

Para ver cómo son estas regiones, su número, y corroborar el hecho de que forman una partición del espacio de fases, se van a considerar varios ejemplos. Considérese en primer lugar un caso sencillo: el TM con $n = 0$, $N = 2$, y un valor de β arbitrario. En este caso, las regiones correspondientes a los diferentes itinerarios vienen dadas simplemente por $f_{s[0]}^{-1}(E_{s[1]}) \cap E_{s[0]}$. En la Tabla 3.5 se muestran los límites de las regiones para un valor de β cualquiera, y para tres ejemplos: $\beta = 1$, $\beta = 1,5$ y $\beta = 2$.

Se puede observar que no existe solapamiento entre las regiones obtenidas, que son conexas y que cubren la totalidad del espacio de fases, formando en consecuencia una

| \mathbf{s}^T | $R_{s[0],s[1]}^0$ | | | |
|----------------|-------------------------|--------------------------|---------------|--------------|
| | General | $\beta = 1$ | $\beta = 1,5$ | $\beta = 2$ |
| [1, 1] | $[0, 1/(2\beta))$ | $[0, 1/2)$ | $[0, 1/3)$ | $[0, 1/4)$ |
| [1, 2] | $[1/(2\beta), 1/2)$ | $[1/2, 1/2) = \emptyset$ | $[1/3, 1/2)$ | $[1/4, 1/2)$ |
| [2, 1] | $(1 - 1/(2\beta), 1]$ | $(1/2, 1]$ | $(2/3, 1]$ | $(3/4, 1]$ |
| [2, 2] | $[1/2, 1 - 1/(2\beta)]$ | $[1/2, 1/2] = \{1/2\}$ | $[1/2, 2/3]$ | $[1/2, 3/4]$ |

Tabla 3.5: Partición en regiones del espacio de fases del TM en función de β y $\mathbf{s} = [s[0], s[1]]^T$.

partición del mismo. El caso $\beta = 1$ es patológico y poco interesante, ya que todos los puntos de $[0, 0,5]$ son fijos, y los puntos de $(0,5, 1]$ eventualmente fijos tras una sola iteración. En los otros dos casos, se aprecia una distribución irregular de las regiones para $\beta = 1,5$, y uniforme para $\beta = 2$. En realidad, para $\beta = 2$ todas las regiones son distintas del conjunto vacío para cualquier longitud de la secuencia. Esto es, existen 2^N regiones para una secuencia de longitud $N + 1$ [Beck1993], y se encuentran distribuidas de manera uniforme, estando sus límites situados en $i \cdot 2^{-N}$ con $i = 0, \dots, 2^N$. Esto no es cierto en general para cualquier otro valor de β . A modo de ejemplo, en la Tabla 3.6 se muestra el número de regiones distintas del conjunto vacío, $P(N)$, del TM en función de N para distintos valores de β .

| N | $P(N)$ | | | | | | | | | |
|---------------|--------|---|---|----|----|----|-----|-----|-----|-------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $\beta = 1,5$ | 2 | 4 | 8 | 14 | 24 | 38 | 60 | 92 | 142 | 216 |
| $\beta = 1,6$ | 2 | 4 | 8 | 14 | 24 | 40 | 66 | 108 | 176 | 286 |
| $\beta = 1,7$ | 2 | 4 | 8 | 16 | 30 | 54 | 96 | 168 | 290 | 500 |
| $\beta = 1,8$ | 2 | 4 | 8 | 16 | 30 | 56 | 104 | 190 | 346 | 628 |
| $\beta = 1,9$ | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 62 | 120 | 230 | 440 | 838 |
| $\beta = 2,0$ | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1.024 |

Tabla 3.6: Número de regiones de la partición del espacio de fases del TM, $P(N)$, en función del itinerario para distintos valores de β y N .

Nótese que el número de regiones que aparecen en la Tabla 3.6 puede ser superior al presentado en otras referencias, como por ejemplo [Panta2000a] para $\beta = 1,5$. Esto es debido a que para la construcción de la tabla no se ha tenido en cuenta la FDP invariante del mapa caótico, y para $\beta < 2$ el atractor del TM únicamente ocupa una porción reducida del espacio de fases: $A = [\beta(2 - \beta)/2, \beta/2]$. Con el fin de observar la reducción en el número de regiones, en la Sección 4.3.1.2 se muestra una tabla equivalente con el número de regiones válidas contenidas dentro del atractor.

Resulta asimismo destacable el hecho de que, aunque para valores de N bajos (hasta $N = 3$) todas las combinaciones de símbolos sean válidas, al aumentar N empiecen a aparecer combinaciones imposibles. Estas secuencias simbólicas inválidas aparecen antes cuanto menor es β , de modo que en general conforme β y N aumentan mayor es

el número de itinerarios posibles, hasta llegarse al valor $\beta = 2$, para el que todos los itinerarios son válidos.

Como un segundo ejemplo, considérese el mapa de Markov mostrado en la Figura 2.5(a). Para este mapa resulta evidente que si $x[n]$ pertenece a E_1 , $x[n + 1]$ no puede pertenecer a E_1 , por lo que todas las secuencias simbólicas que contengan la combinación $[1, 1]$ son inválidas, como se apreciar en la Tabla 3.7, donde se muestran las regiones asociadas a todos los itinerarios válidos desde $N = 1$ hasta $N = 4$.

| \mathbf{s}^T | $R_{s[0]}^0$ | $R_{s[0],s[1]}^0$ | $R_{s[0],s[1],s[2]}^0$ | $R_{\mathbf{s}}^{0,4}$ |
|----------------|--------------|-------------------|------------------------|------------------------|
| [1, 2, 1, 2] | [0, 0,75) | [0, 0,75) | (3/16, 0,75) | (3/16, 0,75) |
| [1, 2, 2, 1] | [0, 0,75) | [0, 0,75) | [0, 3/16] | [0, 9/64) |
| [1, 2, 2, 2] | [0, 0,75) | [0, 0,75) | [0, 3/16] | [9/64, 3/16] |
| [2, 1, 2, 1] | [0,75, 1] | (13/16, 1] | (13/16, 1] | (13/16, 61/64] |
| [2, 1, 2, 2] | [0,75, 1] | (13/16, 1] | (13/16, 1] | (61/64, 1] |
| [2, 2, 1, 2] | [0,75, 1] | [0,75, 13/16] | [0,75, 51/64) | [0,75, 51/64) |
| [2, 2, 2, 1] | [0,75, 1] | [0,75, 13/16] | [51/64, 13/16] | (205/256, 13/16] |
| [2, 2, 2, 2] | [0,75, 1] | [0,75, 13/16] | [51/64, 13/16] | [51/64, 205/256] |

Tabla 3.7: Partición en regiones del espacio de fases del mapa de Markov de la Figura 2.5(a) en función de N y $\mathbf{s} = [s[0], s[1], s[2], s[3]]^T$.

Además, este mapa presenta la peculiaridad de poderse obtener una fórmula cerrada para el número de regiones en función de la longitud de la secuencia, N [Panta2003]. Para cada itinerario de longitud $N - 1$, se puede obtener un nuevo itinerario de longitud N haciendo $s[N] = 2$, ya que a E_2 se puede llegar tanto desde E_1 como desde E_2 . Esto da lugar a un total de $P(N - 1)$ secuencias simbólicas válidas de longitud N . Adicionalmente, a partir de todas las secuencias de longitud $N - 1$ tales que $s[N - 1] = 2$, se puede construir otro itinerario válido haciendo $s[N] = 1$. Y como, por el razonamiento anterior, el número de secuencias de longitud $N - 1$ cuyo último símbolo es 2 viene dado por $P(N - 2)$, la fórmula de recursión resultante es

$$P(N) = P(N - 1) + P(N - 2).$$

Esta es la misma relación de recurrencia que para los números de Fibonacci [Apost1967], y se puede sumar fácilmente usando como condiciones iniciales $P(1) = 2$ y $P(2) = 3$, dando lugar a la siguiente fórmula cerrada para el número de regiones en función de la longitud de la secuencia [Panta2003]:

$$P(N) = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^N + \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^N.$$

En general, para cualquier mapa de Markov se puede obtener una relación de recurrencia para el número de regiones teniendo en cuenta desde cuántas regiones se puede llegar a cada región de la partición natural. Considérese como ejemplo el mapa

de Markov con cuatro intervalos de la Figura 2.4. Llamemos $P_i(N)$ al número de regiones cuyo último símbolo del itinerario es i (con $i = 1, \dots, M$), y tratemos de hallar ahora una fórmula recursiva para cada una. A E_1 se puede llegar desde E_4 o desde la propia E_1 , a E_2 y E_3 se puede llegar desde todas las regiones de la partición natural, y a E_4 sólo se puede llegar desde E_3 y desde la misma E_4 . En consecuencia, las relaciones de recursión para este mapa son:

$$\begin{aligned} P_1(N) &= P_1(N-1) + P_4(N-1), \\ P_2(N) &= P_1(N-1) + P_2(N-1) + P_3(N-1) + P_4(N-1) = P(N-1), \\ P_3(N) &= P_1(N-1) + P_2(N-1) + P_3(N-1) + P_4(N-1) = P(N-1), \\ P_4(N) &= P_3(N-1) + P_4(N-1) = P(N-2) + P_4(N-1). \end{aligned}$$

Y el número de regiones total será la suma de todas las posibles secuencias simbólicas que acaben en cada uno de los símbolos. Es decir,

$$P(N) = \sum_{i=1}^M P_i(N) = P(N-2) + 2P(N-1) + 2P_4(N-1) + P_1(N-1),$$

válida para $N \geq 3$. Desafortunadamente, la relación de recurrencia en este caso depende de $P_1(N-1)$ y de $P_4(N-1)$, y por lo tanto va a ser difícil simplificar más esta ecuación para intentar obtener una fórmula cerrada como en el caso del otro mapa de Markov. No obstante, inicializando la recursión con $P_1(1) = P_2(1) = P_3(1) = P_4(1) = 1$, $P(1) = M = 4$, y $P(2) = 12$, se puede obtener el número de regiones para cualquier valor de N .

Por último, para mapas PWL no markovianos no es posible obtener una relación de recurrencia para el número de regiones, e incluso para mapas de Markov esta puede ser muy complicada. En estos casos la mejor alternativa es obtenerlas numéricamente mediante la aplicación del Algoritmo 3.5. En la Tabla 3.8 se muestra el número de regiones para los tres mapas de la Sección 2.3.3: los markovianos de las figura 2.4 (M1) y 2.5(a) (M2), y el no markoviano de la Figura 2.5(b) (P1).

| N | $P(N)$ | | | | | | | | | |
|-------|--------|----|----|-----|-------|-------|--------|--------|---------|-----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| M1 | 4 | 12 | 34 | 96 | 272 | 772 | 2.192 | 6.224 | 17.672 | 50.176 |
| 4^N | 4 | 16 | 64 | 256 | 1.024 | 4.096 | 16.384 | 65.536 | 262.144 | 1.048.576 |
| M2 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 | 144 |
| 2^N | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1.024 |
| P1 | 3 | 7 | 13 | 24 | 45 | 84 | 156 | 289 | 536 | 994 |
| 3^N | 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 | 2.187 | 6.561 | 19.683 | 59.049 |

Tabla 3.8: Número de regiones de la partición del espacio de fases, $P(N)$, para tres mapas PWL distintos en función del itinerario para distintos valores de N .

Como se puede apreciar, el número real de secuencias simbólicas válidas es mucho menor que el de secuencias simbólicas posibles (4^N para el primer mapa, 2^N para el

segundo, y 3^N para el tercero), también mostrado en la tabla. Esto permite reducir en gran medida el coste computacional del estimador ML cuando el itinerario es desconocido, al igual que el de los estimadores Bayesianos. Sin embargo, aunque este ritmo de crecimiento limitado suponga una ventaja para valores de N medios/bajos, el número de secuencias simbólicas válidas para un mapa caótico siempre crece exponencialmente, de modo que para valores altos de N el número de regiones asociadas, $P(N)$, es siempre excesivo en la práctica, como se discute en la Sección 5.2.

3.4.4. Estimador ML con Secuencia Simbólica Desconocida

Las ecuaciones (3.34) y (3.35) nos proporcionan el estimador ML de la secuencia caótica, \mathbf{x} , cuando la secuencia simbólica, $\{s[k]\}_{k=0}^N$, es conocida. Sin embargo, en un caso general se desconoce la secuencia simbólica verdadera, y se debe estimar a partir de la única información disponible: las observaciones ruidosas. En esta sección se plantea el problema de la estimación ML de la señal caótica cuando no se conoce la secuencia simbólica, haciendo énfasis en su semejanza con otro problema ampliamente abordado en la literatura: la detección multiusuario.

3.4.4.1. Planteamiento del Problema y Relación con la Detección Multiusuario

Analizando la función de coste para un mapa PWL, dada por (3.30), resulta evidente que es discontinua con respecto a la secuencia simbólica, \mathbf{s} . En consecuencia, cuando se desconocen los símbolos del itinerario no se puede derivar $J(x[n], \mathbf{s})$ con respecto a cada $s[k]$, $0 \leq k \leq N - 1$, e igualar a cero para obtener un conjunto de ecuaciones que nos permitan encontrar sus estimas ML, $\hat{s}_{\text{ML}}[k]$.

Este problema guarda una estrecha relación con el de la *detección multiusuario*, que consiste en inferir los datos enviados por cada usuario de un sistema de comunicaciones digitales observados en un entorno multiusuario, en el que el resto de usuarios actúan como interferencias, indeseadas pero inevitables. Como ejemplo de un problema de detección multiusuario, considérese un sistema CDMA en el que se dispone de N usuarios transmitiendo de manera síncrona símbolos M -arios. El modelo para las señales disponibles a la salida del filtro adaptado en cada instante de tiempo es [Nelson1996]

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{w}, \quad (3.40)$$

siendo $\mathbf{y} = [y[0], \dots, y[N - 1]]^T$ la información recibida por cada usuario, $\mathbf{w} = [w[0], \dots, w[N - 1]]^T$ AWGN, \mathbf{R} la matriz de correlación entre las formas de onda transmitidas por cada usuario (es decir, en un sistema CDMA la correlación entre sus respectivas secuencias de ensanche), $\mathbf{s} = [s[0], \dots, s[N - 1]]^T$ la información de cada usuario, y $\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, \dots, a_N)$ una matriz diagonal con la amplitud de la señal recibida de cada usuario.

De acuerdo con el modelo dado por (3.40), la señal recibida para el usuario k -ésimo, $0 \leq k \leq N - 1$, resulta

$$y[k] = \sum_{i=0}^{N-1} a_{i+1} \cdot r_{k+1,i+1} \cdot s[i] + w[k],$$

donde $r_{k+1,i+1}$ es el elemento $(k+1, i+1)$ -ésimo de la matriz \mathbf{R} . Puesto que el ruido es blanco y Gaussiano, encontrar el estimador ML equivale a minimizar una cierta función de coste, al igual que en el caso de la señal caótica, que ahora viene dada por

$$\begin{aligned} J(\mathbf{s}) &= (\mathbf{y} - \mathbf{RAs})^T (\mathbf{y} - \mathbf{RAs}) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(y[k] - \sum_{i=0}^{N-1} a_{i+1} \cdot r_{k+1,i+1} \cdot s[i] \right)^2. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Comparando las funciones de coste (3.41) y (3.30) resulta evidente su similitud en dos aspectos fundamentales:

1. En las dos interviene una secuencia discreta de N muestras, \mathbf{s} , que se debe estimar dentro de un espacio de hasta M^N posibles secuencias.
2. Ambas dependen asimismo de otros parámetros externos que es necesario hallar: $x[n]$ en la estimación de la señal caótica, y los a_i (suponiendo \mathbf{R} perfectamente conocida) en la detección multiusuario.

No obstante, a pesar de esta semejanza entre ambos problemas, también existen diferencias importantes:

1. En el caso del caos la estimación de la secuencia simbólica es únicamente un paso intermedio para obtener la señal final deseada, la secuencia caótica, mientras que en el caso de la detección multiusuario la secuencia con los símbolos transmitidos por cada usuario es la señal buscada.
2. En la detección multiusuario generalmente todas las combinaciones de símbolos transmitidos por los usuarios son posibles, de modo que siempre existen M^N secuencias válidas. Para las señales caóticas con frecuencia muchos itinerarios son inválidos, de modo que el número de secuencias posibles suele ser muy inferior a M^N , aunque siempre crece exponencialmente con N .
3. La dependencia con la secuencia simbólica es lineal en el problema de la detección multiusuario, mientras que para las señales caóticas existe una dependencia fuertemente no lineal a través de los a_i y b_i . Además, en función de la muestra de referencia elegida, algunos símbolos pueden no influir en el valor de determinadas observaciones.

En consecuencia, parece razonable suponer que algunas de las técnicas utilizadas para resolver el problema de la detección multiusuario puedan ser aplicadas al problema de la estimación de señales caóticas, aunque probablemente con importantes modificaciones. En concreto, en el Capítulo 5 se explota esta afinidad entre ambas cuestiones para plantear un algoritmo computacionalmente eficiente aunque subóptimo basado en los algoritmos E-M y SAGE. Adicionalmente, en las líneas futuras se resalta otro método ampliamente utilizado en detección multiusuario y cuya aplicación puede resultar interesante en el problema considerado: los algoritmos genéticos.

3.4.4.2. Implementación Exacta del Estimador ML

En este caso, la solución obvia que garantiza la obtención del estimador ML de la secuencia caótica (e igualmente del itinerario) consiste en probar todas las secuencias simbólicas válidas, calcular el estimador ML local para cada una de ellas, y elegir como estimador ML global aquel que proporcione un menor valor de la función de coste. Aunque existen técnicas más eficientes que permiten obtener el estimador ML para algunos mapas concretos como el TM, este algoritmo de “búsqueda exhaustiva” o “fuerza bruta” es el único que asegura la consecución de la estima ML de la señal caótica para un mapa PWL cualquiera.

En primer lugar, puesto que se desconoce la secuencia simbólica, se va a reescribir la función de coste global para incluir esta incertidumbre. Esta función de coste se puede expresar ahora como una suma de las funciones de coste locales para cada posible itinerario. Utilizando la función característica definida por (2.12) y la función de coste para un itinerario concreto dada por (3.31), la función de coste global resulta

$$J(x[n], \mathbf{s}) = \sum_{i=1}^{P(N)} J(x[n], \mathbf{s}_i) \chi_{R_{\mathbf{s}_i}^n}(x[n]) \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_i), \quad (3.42)$$

donde $P(N)$ indica el número de secuencias simbólicas válidas de longitud N del mapa caótico, \mathbf{s}_i denota cada una de dichas secuencias, $J(x[n], \mathbf{s}_i)$ representa la función de coste local i -ésima,

$$J(x[n], \mathbf{s}_i) = \sum_{k=-n}^{N-n} (\gamma_{\mathbf{s}_i}^n[k] - \alpha_{\mathbf{s}_i}^n[k] x[n])^2, \quad (3.43)$$

con $1 \leq i \leq P(N)$, $R_{\mathbf{s}_i}^n = [\eta_{\mathbf{s}_i}^n, \kappa_{\mathbf{s}_i}^n]$ hace referencia a la región del espacio de fases de $x[n]$ que puede dar lugar al itinerario i -ésimo, \mathbf{s}_i , y $\delta(\cdot)$ es la función impulso o delta de Dirac N -dimensional:

$$\delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_i) = \begin{cases} 1, & \mathbf{s} = \mathbf{s}_i; \\ 0, & \mathbf{s} \neq \mathbf{s}_i. \end{cases}$$

Nótese que $s[N]$ no aparece en (3.42) ni en (3.43), ya que no interviene en la generación de la secuencia con independencia de la muestra de referencia seleccionada. La estima ML de $s[N]$, $\hat{s}_{\text{ML}}[N]$, viene dada a posteriori por la región a la que pertenezca $\hat{x}_{\text{ML}}[N]$.

Una vez más, se observa que la dependencia con la muestra n -ésima de la secuencia para cada una de las funciones de coste locales es cuadrática, lo que garantiza la existencia de un único mínimo, al igual que ocurría con (3.31). Como ejemplo, en la Figura 3.9 se muestra la función de coste global para el SK-TM con $c = 0,3$, apreciándose claramente su composición como concatenación de funciones de coste locales cuadráticas truncadas. Para el itinerario i -ésimo, dicho mínimo se halla derivando e igualando a cero la función de coste correspondiente, obteniéndose una estima de $x[n]$ cuya expresión es

$$\hat{x}_i[n] = \frac{\sum_{k=0}^N \alpha_{\mathbf{s}_i}^n[k] \gamma_{\mathbf{s}_i}^n[k]}{\sum_{k=0}^N \alpha_{\mathbf{s}_i}^n[k]^2}, \quad (3.44)$$

que resulta idéntica a (3.33) para cada itinerario en particular. Y de acuerdo con la Proposición 3.1, el estimador ML local para la región i -ésima viene dado por

$$\hat{x}_{\text{ML}}^i[n] = \begin{cases} \kappa_{\mathbf{s}_i}^n, & \hat{x}[n] > \kappa_{\mathbf{s}_i}^n; \\ \hat{x}_i[n], & \hat{x}_i[n] \in R_{\mathbf{s}_i}^n; \\ \eta_{\mathbf{s}_i}^n, & \hat{x}_i[n] < \eta_{\mathbf{s}_i}^n. \end{cases} \quad (3.45)$$

Finalmente, el estimador ML global es simplemente la estima ML local de entre todas las dadas por (3.45) que minimiza (3.42), como indica la Proposición 3.4.

Proposición 3.4 *Sea una secuencia de muestras desconocida, $\{x[k]\}_{k=0}^N$, generada mediante la iteración, usando (3.11) o (3.12), de un mapa PWL con M intervalos definido por (2.14), y sea $\{y[k]\}_{k=0}^N$ la secuencia de observaciones disponibles, obtenidas sumando ruido blanco Gaussiano a cada muestra $x[k]$. El estimador ML de la muestra n -ésima de la secuencia, $x[n]$, cuando la secuencia simbólica es desconocida, viene dado por*

$$\hat{x}_{\text{ML}}[n] = \hat{x}_{\text{ML}}^r[n]. \quad (3.46)$$

Donde $\hat{x}_{\text{ML}}^r[n]$ es el estimador ML local dado por (3.45) para la región r -ésima, que es el que minimiza la función de coste global, dada por (3.42), de entre todos los estimadores ML posibles, y se obtiene mediante la siguiente ecuación:

$$r = \arg \min_i J(\hat{x}_{\text{ML}}^i[n], \mathbf{s}_i), \quad (3.47)$$

con $i = 1, \dots, P(N)$. El resto de muestras de la secuencia caótica se obtienen, gracias a la propiedad de invariancia del estimador ML, iterando a partir de $\hat{x}_{\text{ML}}[n]$ utilizando el estimador ML de la secuencia simbólica: $\hat{\mathbf{s}}_{\text{ML}} = \mathbf{s}_r$. Es decir,

$$\hat{x}_{\text{ML}}[n+k] = f_{\hat{\mathbf{s}}_{\text{ML}}}^k(\hat{x}_{\text{ML}}[n]), \quad (3.48)$$

con $k = -n, \dots, -1, 1, \dots, N-n$. Y por consiguiente, la estima ML del vector completo que contiene la secuencia caótica es:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}} = [f_{\hat{\mathbf{s}}_{\text{ML}}}^{-n}(\hat{x}_{\text{ML}}[n]), \dots, f_{\hat{\mathbf{s}}_{\text{ML}}[n-1]}^{-1}(\hat{x}_{\text{ML}}[n]), \hat{x}_{\text{ML}}[n], f(\hat{x}_{\text{ML}}[n]), \dots, f^{N-n}(\hat{x}_{\text{ML}}[n])]^T.$$

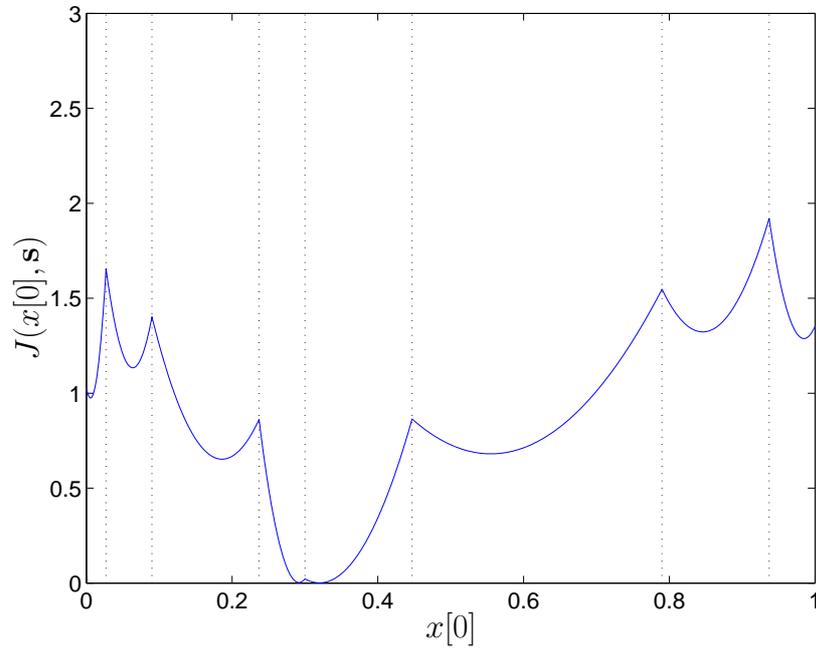


Figura 3.9: Función de coste para el estimador ML del SK-TM con $x[0] = 0,3108$, $c = 0,3$, $N = 3$ y $\text{SNR} = 20$ dB cuando el itinerario es desconocido: límites de las regiones y naturaleza cuadrática de las funciones de coste locales.

Al igual que ocurría en la Sección 3.4.2, las afirmaciones de la Proposición 3.4 se pueden trasladar fácilmente a un algoritmo similar al Algoritmo 3.3. El Algoritmo 3.6 resume los pasos necesarios para calcular el estimador ML de una secuencia caótica cuando la secuencia simbólica es desconocida. La única diferencia entre el Algoritmo 3.6 y el Algoritmo 3.3 es que ahora se tienen que calcular $P(N)$ estimadores ML locales y seleccionar a posteriori el mejor de todos ellos.

Aunque en el Algoritmo 3.6 se calcule la región correspondiente a cada itinerario “on-line”, en un caso real es más práctico precalcular las regiones antes de aplicar el algoritmo de la siguiente manera. Se obtienen las $P(n)$ regiones correspondientes al itinerario asociado a las muestras anteriores a la n -ésima mediante el Algoritmo 3.4, y las $P(N-n)$ regiones correspondientes al itinerario asociado a la muestra n -ésima y las posteriores mediante el Algoritmo 3.5, por separado. Se almacenan estas regiones (un total de $P(n) + P(N-n)$) y para cada secuencia simbólica se obtiene la región $R_{s_i}^n$ como la intersección de la región hacia atrás y hacia delante correspondiente. Nótese además que, si se exploran las secuencias simbólicas de manera adecuada (esto es, cambiando los símbolos más lejanos a $x[n]$ tanto para la iteración hacia delante como hacia atrás) se pueden aprovechar las fórmulas recursivas para $A_s^{m,k}$ y $B_s^{m,k}$ mostradas en la Sección 3.3, reduciéndose sensiblemente el coste computacional.

De nuevo existen dos casos de especial interés: elección de $x[0]$ como muestra de referencia, y elección de $x[N]$. En ambos casos, los estimadores ML locales de $x[0]$ y $x[N]$

Para cada secuencia simbólica válida, \mathbf{s}_i ($i = 1, \dots, P(N)$), se realizan los pasos siguientes:

1. Obtener el mínimo de la función de coste local, dada por (3.42), derivando con respecto a $x[n]$, y cuyo valor exacto viene dado por (3.44).
2. Hallar la región del espacio de fases formada por el conjunto de valores de $x[n]$ que pueden generar el itinerario correspondiente a las muestras anteriores, $\mathbf{s}_i(1:n) = [s_i[0], \dots, s_i[n-1]]^T$, mediante el Algoritmo 3.4.
3. Hallar la región del espacio de fases formada por el conjunto de valores de $x[n]$ que pueden generar el itinerario correspondiente a la muestra n -ésima y las posteriores, $\mathbf{s}_i(n+1:N) = [s_i[n], \dots, s_i[N-1]]^T$, usando el Algoritmo 3.5.
4. Realizar la intersección de estas dos regiones para construir $R_{\mathbf{s}_i}^n = [\eta_{\mathbf{s}_i}^n, \kappa_{\mathbf{s}_i}^n]$.
5. Encontrar el estimador ML local de $x[n]$ usando (3.45). Si $x[n] \in R_{\mathbf{s}_i}^n$, entonces $\hat{x}_{\text{ML}}^i[n] = \hat{x}_i[n]$. En caso contrario, el estimador ML es el punto más cercano de $R_{\mathbf{s}_i}^n$: $\eta_{\mathbf{s}_i}^n$ o $\kappa_{\mathbf{s}_i}^n$.
6. Obtener el estimador ML del resto de la secuencia iterando hacia delante o hacia atrás a partir de $\hat{x}_{\text{ML}}^i[n]$ según corresponda.
7. Determinar el error cometido por esta estima ML local evaluando la función de coste con la estima ML de $x[n]$ obtenida para el itinerario i -ésimo: $\xi_i = J(\hat{x}_{\text{ML}}^i[n], \mathbf{s}_i)$.

Una vez obtenidas todas las estimas ML locales, seleccionar como estima ML global aquella cuyo error, ξ_i , sea menor.

Algoritmo 3.6: Estimador ML de una secuencia caótica cuando la secuencia simbólica es desconocida.

se obtienen limitando el valor de las estimas obtenidas mediante (3.36) y (3.37) respectivamente para cada posible secuencia simbólica, de modo que sus itinerarios coincidan con los especificados. El estimador ML global es simplemente el que proporcione un menor error de todos ellos.

El primer caso (utilización de $x[0]$ como muestra de referencia) es el que ha recibido una mayor atención, tanto por nuestra parte como en la literatura, donde la mayor parte de los algoritmos propuestos (subóptimos en general) consideran la generación del mapa únicamente mediante iteración hacia delante. En [Panta2000a] se ha propuesto una expresión cerrada para el estimador ML de secuencias generadas por el S-TM, y en [Panta2000d] se muestra el equivalente para el SK-TM, tomando siempre $x[0]$ como muestra de referencia. Posteriormente, en [Panta2000b] se ha obtenido la expresión general para el estimador ML de secuencias generadas mediante cualquier mapa PWL, de nuevo cuando la muestra de referencia es $x[0]$.

El segundo caso (selección de $x[N]$ como muestra de referencia) no se suele considerar en la literatura, a causa de la dificultad que supone iterar hacia atrás utilizando un mapa no invertible. Sin embargo, debido a que la iteración hacia delante de mapas caóticos es inestable numéricamente, en ocasiones puede resultar ventajoso reconstruir el mapa iterando hacia atrás. Esta aproximación se ha considerado en [Panta2001a] y

[Luengo2004a] dentro del marco de la estimación conjunta de los parámetros del mapa caótico y la secuencia generada. En ambos casos, para el mapa considerado (el BSK-TM) cualquier secuencia simbólica es válida, de modo que las estimas locales obtenidas mediante (3.37) coinciden con las estimas ML locales siempre que se encuentren dentro del espacio de fases del mapa, $I = [-1, 1]$. La selección de muestras intermedias de la secuencia como punto de referencia no se había considerado hasta el momento. Su uso se estudia en las secciones 3.6 y 3.7, durante la presentación y discusión de los resultados obtenidos respectivamente.

3.5. Estimador ML de Secuencias Generadas por Mapas No PWL

En la Sección 3.4 se ha obtenido una expresión cerrada para el estimador ML de secuencias caóticas generadas por mapas PWL. Aunque la metodología general desarrollada en dicha sección es perfectamente válida para secuencias generadas por mapas no PWL, existen dos inconvenientes para su aplicación:

1. La obtención de ecuaciones cerradas para el estimador ML de \mathbf{x} requiere encontrar una expresión analítica de $f_s^{k-n}(x[n])$ (con $0 \leq k, n \leq N$), lo que para la mayoría de los mapas no PWL parece una tarea muy complicada, si no imposible.
2. Para los mapas PWL la dependencia de $f_s^{k-n}(x[n])$ con $x[n]$ es lineal para una cierta secuencia simbólica. Esto da lugar a una función de coste cuadrática dentro de la región asociada a cada itinerario, que por lo tanto tiene un único mínimo, cuya expresión se puede obtener de manera explícita derivando. En el caso de mapas no PWL la función de coste en cada región no es cuadrática, de modo que en teoría pueden existir varios mínimos dentro de la misma, complicándose en gran medida la obtención de los estimadores ML locales.

Debido a estas dos dificultades, este problema no se ha estudiado detalladamente. No obstante, a continuación se indica como aplicar la metodología de estimación desarrollada en la Sección 3.4 a esta clase de mapas. En primer lugar, nótese que para hallar las regiones asociadas a cada itinerario se pueden usar los algoritmos 3.4 y 3.5 descritos en la Sección 3.4.3, ya que se dan las condiciones necesarias para su correcto funcionamiento (esto es, siempre se puede realizar una partición del mapa en intervalos dentro de los cuales es monótono y continuo) y únicamente requieren el conocimiento de $f(x)$. Así pues, en ambas ocasiones el problema principal consiste en encontrar el mínimo global dentro de R_s^n , al igual que en el caso de los mapas PWL.

Por desgracia, como ya se ha mencionado anteriormente, no se puede encontrar una ecuación cerrada de los mínimos en cada región ni siquiera para los mapas no PWL más sencillos. Además, debido a la posible presencia de múltiples mínimos locales, la opción más segura para encontrar el mínimo en R_s^n es recurrir a *métodos de rejilla*. Estos consisten básicamente en trazar una rejilla (habitualmente uniforme) a lo largo

de todo el espacio de fases en el que se desee realizar la búsqueda, evaluar la función en cada punto de la rejilla, y seleccionar finalmente el punto máximo o mínimo.

En la Figura 3.10 se muestra un ejemplo de la función de coste, junto con la aplicación de un método de rejilla, cuando el itinerario es desconocido. Se ha utilizado una rejilla uniforme dentro de cada una de las $P(N)$ regiones en que se divide el espacio de fases en función del itinerario, de modo que los puntos de la rejilla son

$$x^{i,j}[0] = \eta_{s_i}^n + j \frac{\kappa_{s_i}^n - \eta_{s_i}^n}{N_r}, \quad (3.49)$$

donde $1 \leq i \leq P(N)$ indica la región, y $0 \leq j \leq N_r - 1$ el punto de la rejilla dentro de dicha región. La función de coste se muestra en negro, los puntos de la rejilla en azul, y los límites de las regiones (que coinciden con muestras de la rejilla salvo en el caso de $x[0] = 1$) en rojo. Para poder apreciar claramente la función de coste y la rejilla, se utiliza el mapa logístico con $\lambda = 4$, $N = 2$, muestra de referencia $x[0]$, y únicamente $N_r = 5$ puntos de la rejilla en cada región. El valor real de $x[0]$ se indica mediante el símbolo '*', y el valor estimado mediante 'o'.

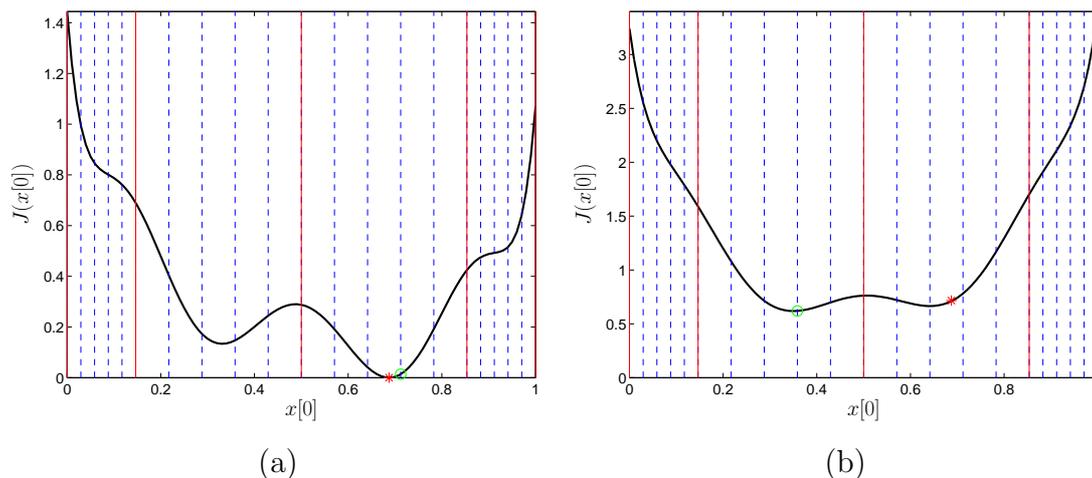


Figura 3.10: Ejemplo de función de coste para el mapa logístico, $J(x[0])$, con $\lambda = 4$ y $N = 2$. (a) Función de coste sin ruido. (b) Función de coste con ruido ($\sigma^2 = 0,25$).

Nótese que el elevado nivel del ruido en la Figura 3.10(b) ($\sigma^2 = 0,25$) no altera la forma general de la función de coste, aunque puede modificar significativamente los valores de sus mínimos locales, desplazando en consecuencia la posición de su mínimo global. Por ejemplo, en este caso provoca que el valor de $x[0]$ estimado difiera mucho del caso sin ruido, aunque en ambos casos el método es capaz de encontrar un valor muy cercano al mínimo real de la función con una rejilla formada por muy pocos puntos. Además, el ruido tiende a difuminar la estructura de la señal caótica y a hacer desaparecer sus detalles. El efecto que esto causa en general es el de suavizar la forma de la función de coste, que puede perder parte de sus rasgos distintivos, como se aprecia comparando la Figura 3.10(b) con la Figura 3.10(a).

Uno de los principales problemas de los métodos de rejilla es que su precisión es muy dependiente del número de puntos de la rejilla, que debe ser relativamente elevado para no introducir un sesgo apreciable y garantizar un error reducido. Para incrementar la precisión del método, manteniendo a la vez el coste computacional reducido, se puede usar una rejilla inicial gruesa, y posteriormente depurar la estima inicial utilizando rejillas sucesivamente más finas entorno al punto óptimo estimado con la rejilla anterior.

Una segunda alternativa para hallar el mínimo de la función de coste consiste en recurrir a algún *método de minimización iterativo local* dentro de la región correspondiente a cada itinerario. A pesar de que este tipo de técnicas son muy sensibles a la presencia de mínimos locales, se ha observado empíricamente que para muchos mapas no PWL únicamente existe, como mucho, un mínimo dentro de cada región. Esta característica de la función de coste se ha observado para numerosos mapas caóticos, como por ejemplo el mapa logístico o el mapa del seno mostrado en la Tabla 2.2, con independencia de la longitud de la secuencia y de la presencia o no de ruido.

Para corroborar esta afirmación, en la Figura 3.11 se muestra la función de coste para el mapa del seno sin ruido y con él. En las figuras 3.11(b) y 3.11(d) se aprecian los cuatro tipos de funciones de coste que pueden existir en cada región: sin máximos ni mínimos (cuarta región de 3.11(d)), convexa (esto es, únicamente con un mínimo, sexta región de 3.11(d)), con un mínimo y un máximo (quinta región de 3.11(b)), o con un mínimo y dos máximos (tercera región de 3.11(b)). Nótese además que, aunque los valores concretos de la función de coste pueden variar mucho debido al ruido, su aspecto general no se modifica en gran medida.

Esta observación sugiere un método que garantiza la obtención del mínimo global de la región: si la función de coste es decreciente en el límite inferior de la región, η_s^n , o creciente en su límite superior, κ_s^n , cualquier algoritmo de minimización iterativa (descenso de gradiente, algoritmo de Newton-Raphson, método de “scoring”, etc.) permite alcanzar su único mínimo. En caso contrario, usando un método de maximización iterativa, inicializado con $\hat{x}_s^0[n] = \eta_s^n$ o $\hat{x}_s^0[n] = \kappa_s^n$, seguido de un algoritmo de minimización, se obtiene el valor de $x[n]$ buscado. En cualquier caso, el rendimiento de los estimadores propuestos en esta sección no se ha analizado de manera detallada, de modo que no se presentan resultados para los mismos, quedando su estudio relegado al ámbito de posibles líneas futuras.

3.6. Resultados

En esta sección se presentan los principales resultados obtenidos para el estimador ML de secuencias generadas usando mapas PWL. En la Sección 3.6.1 se muestra la manera en que se han realizado las simulaciones y se ha llevado a cabo la evaluación del estimador ML. Y en la Sección 3.6.2 se presentan numerosos resultados para distintos mapas PWL, que demuestran el buen rendimiento de la metodología de estimación propuesta.

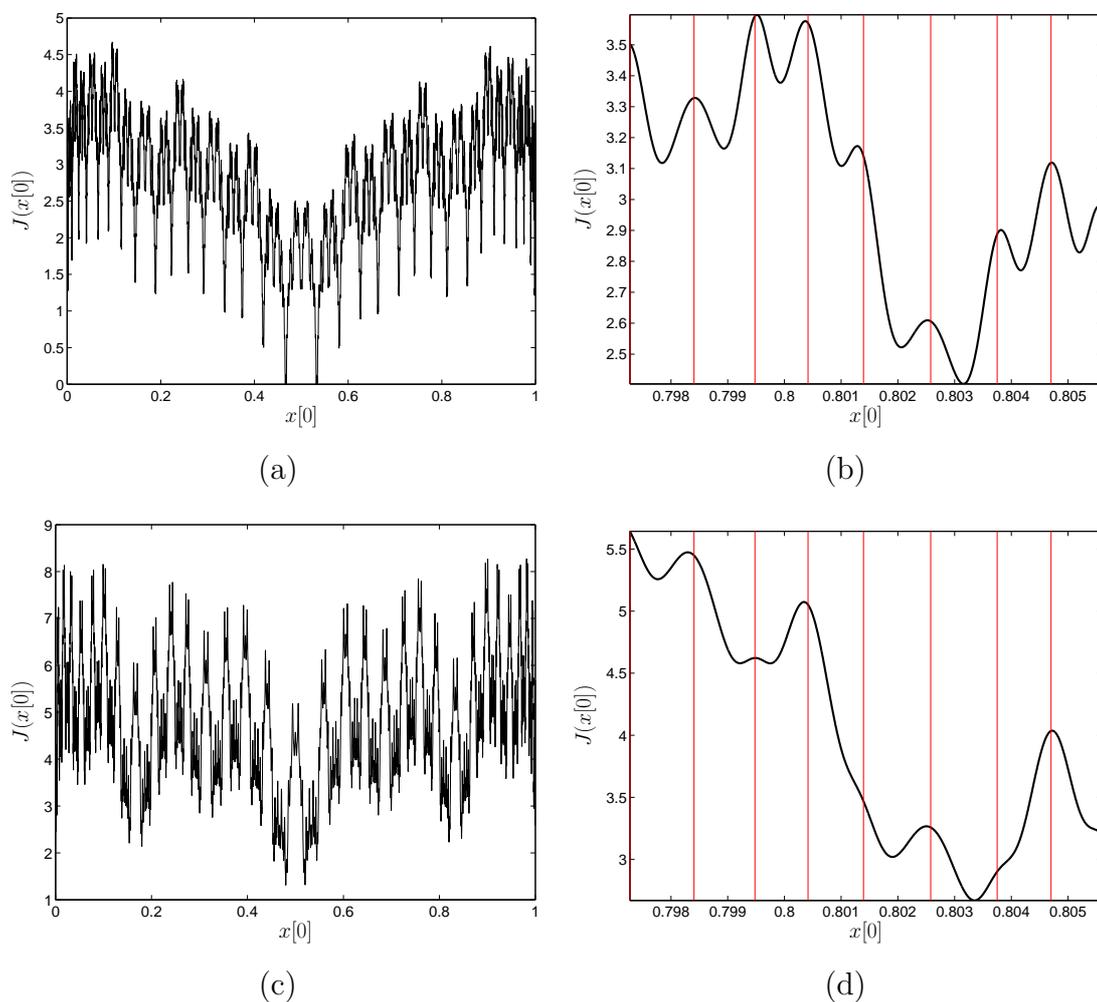


Figura 3.11: Ejemplo de función de coste para el mapa del seno, $J(x[0])$, con $c = 1$ y $N = 10$. (a) Función de coste sin ruido para todo el espacio de fases. (b) Ampliación de un segmento de la función de coste sin ruido (límites de las regiones en rojo). (c) Función de coste con ruido ($\sigma^2 = 0,25$) para todo el espacio de fases. (d) Ampliación de un segmento de la función de coste ruidosa (límites de las regiones en rojo).

3.6.1. Evaluación del estimador ML

El criterio habitual para evaluar un estimador y compararlo con otras alternativas de estimación es el error cuadrático medio (MSE), que se puede expresar en función del sesgo y la varianza del estimador. Suponiendo que se ha elegido como muestra de referencia la n -ésima, el sesgo de un estimador cualquiera de la muestra k -ésima ($0 \leq k \leq N$), denotado como $\hat{x}_{\hat{s}}[k - n; n] = f_{\hat{s}}^{k-n}(\hat{x}[n])$, viene dado por

$$b(\hat{x}_{\hat{s}}[k - n; n]) = |x[k] - E(\hat{x}_{\hat{s}}[k - n; n])|, \quad (3.50)$$

y la varianza por

$$\text{Var}(\hat{x}_{\hat{s}}[k-n; n]) = \text{E}((x[k] - \hat{x}_{\hat{s}}[k-n; n])^2). \quad (3.51)$$

Y a partir de (3.50) y (3.51) el MSE se puede poner simplemente como [Kay1993]:

$$\text{MSE}(\hat{x}_{\hat{s}}[k-n; n]) = \text{Var}(\hat{x}_{\hat{s}}[k-n; n]) + \text{b}(\hat{x}_{\hat{s}}[k-n; n])^2. \quad (3.52)$$

Desafortunadamente, el estimador ML es fuertemente no lineal. En consecuencia, resulta muy complicada la determinación de su rendimiento de manera analítica, y en general se recurre a la realización de simulaciones de Monte Carlo para su evaluación. En este caso, la esperanza matemática se sustituye por la *media muestral*, de modo que para un número de simulaciones de Monte Carlo, N_m , suficientemente alto, el sesgo del estimador se puede aproximar por

$$\hat{\text{b}}(\hat{x}_{\hat{s}}[k-n; n]) = \left| x[k] - \frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} \hat{x}_{\hat{s}}^{(i)}[k-n; n] \right| \simeq \text{b}(\hat{x}_{\hat{s}}[k-n; n]),$$

la varianza por

$$\hat{\text{V}}(\hat{x}_{\hat{s}}[k-n; n]) = \frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} \left(x[k] - \hat{x}_{\hat{s}}^{(i)}[k-n; n] \right)^2 \simeq \text{Var}(\hat{x}_{\hat{s}}[k-n; n]),$$

y el MSE por

$$\hat{\text{M}}(\hat{x}_{\hat{s}}[k-n; n]) = \hat{\text{V}}(\hat{x}_{\hat{s}}[k-n; n]) + \hat{\text{b}}(\hat{x}_{\hat{s}}[k-n; n])^2 \simeq \text{MSE}(\hat{x}_{\hat{s}}[k-n; n]),$$

siendo $\hat{x}_{\hat{s}}^{(i)}[k-n; n]$ la estima de la muestra k -ésima de la secuencia obtenida en la simulación i -ésima de Monte Carlo.

En cuanto a la determinación del valor de N_m para el que las aproximaciones anteriores proporcionan buenos resultados, en general no existe ninguna fórmula para hallar su valor. Por consiguiente, el valor adecuado de N_m no se puede calcular de manera analítica, sino que se debe obtener experimentalmente observando el valor a partir del cual los resultados no sufren cambios significativos. En nuestro caso, se ha encontrado que para una cierta muestra de referencia y relación señal a ruido un valor de $N_m = 1.000$ proporciona buenos resultados normalmente, presentando además un compromiso apropiado entre precisión y rapidez de las simulaciones. En consecuencia la mayor parte de las simulaciones presentadas han sido realizadas con $N_m = 1.000$, aunque en algunos casos se han utilizado 2.000, 5.000 o incluso 10.000 simulaciones de Monte Carlo para obtener curvas más suaves.

Nótese además, que en las figuras mostradas en este capítulo y los posteriores no se suelen representar directamente el sesgo, la varianza y el MSE. En su lugar, se representan estas cantidades en decibelios (es decir, en escala logarítmica) para apreciar mejor su valor, y con el signo cambiado, puesto que en general van a ser menores que

la unidad. Por ejemplo, tomando como referencia el MSE, que es la medida habitual del rendimiento de un estimador, la cantidad representada usualmente es

$$\hat{M}_k(\text{dB}) = -10 \log_{10}(\hat{M}(\hat{x}_s[k-n; n])),$$

que se corresponde con una mejor estimación cuanto mayor sea su valor. Adicionalmente, en algunas gráficas se utiliza el MSE total, cuya estima se obtiene promediando el MSE en dB para la estima de cada muestra de la secuencia:

$$\hat{M}_T(\text{dB}) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \hat{M}_k(\text{dB}). \quad (3.53)$$

De idéntica manera se puede desarrollar la expresión en dB para la varianza de cada muestra de la secuencia,

$$\hat{V}_k(\text{dB}) = -10 \log_{10}(\hat{V}(\hat{x}_s[k-n; n])),$$

para el sesgo,

$$\hat{b}_k(\text{dB}) = -20 \log_{10}(\hat{b}(\hat{x}_s[k-n; n])),$$

donde se multiplica por 20 el logaritmo en lugar de por 10 para tener ya en cuenta que en la expresión del MSE aparece elevado al cuadrado, y de la varianza y sesgo totales:

$$\hat{V}_T(\text{dB}) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \hat{V}_k(\text{dB}), \quad (3.54)$$

$$\hat{b}_T(\text{dB}) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \hat{b}_k(\text{dB}). \quad (3.55)$$

Por último, cabe destacar el modo en que se ha obtenido la varianza del ruido para las simulaciones. Aunque se puede calcular de manera cerrada la potencia media de una señal caótica característica generada por un determinado mapa si se conoce (o estima) su FDP invariante, la potencia media real para una secuencia corta puede diferir significativamente de la de una secuencia típica, que es la proporcionada por la FDP invariante. En consecuencia, con el fin de poder realizar comparaciones justas entre diferentes mapas, parámetros y condiciones iniciales, en las simulaciones se calcula la potencia media de la secuencia generada como

$$P_x = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N x[k]^2,$$

y a partir de P_x se obtiene la varianza requerida para una cierta SNR mediante

$$\sigma^2 = P_x \cdot 10^{-\text{SNR}(\text{dB})/10}.$$

3.6.2. Resultados para Mapas PWL

En primer lugar, se va a estudiar el efecto de la elección de la muestra de referencia, $x[n]$, sobre los resultados del estimador ML. En principio, la independencia del rendimiento del estimador con respecto al punto de referencia escogido parece evidente debido a la *propiedad de invariancia del estimador ML* [Zacks1971, Mendel1987, Kay1993]: si se dispone de la estima ML de un parámetro θ , $\hat{\theta}_{ML}$, la estima ML de una función de θ , $g(\theta)$, viene dada simplemente por $g(\hat{\theta}_{ML})$. No obstante, la inestabilidad numérica inherente a toda señal caótica podría dar lugar a resultados drásticamente distintos de lo esperado, de modo que resulta prudente comprobarlo.

Afortunadamente, en esta ocasión los resultados de las simulaciones confirman las expectativas teóricas, y no se observa una dependencia significativa del rendimiento del estimador con respecto al punto de referencia. Como prueba de esta afirmación, en la Figura 3.12 se muestra el MSE total de la estima de la secuencia, dado por (3.53), para una señal caótica generada usando el BSK-TM con $N = 4$, $c = -0,5$, $x[0] = 0,6546$ y todos los posibles puntos de referencia ($n = 0, \dots, 4$).

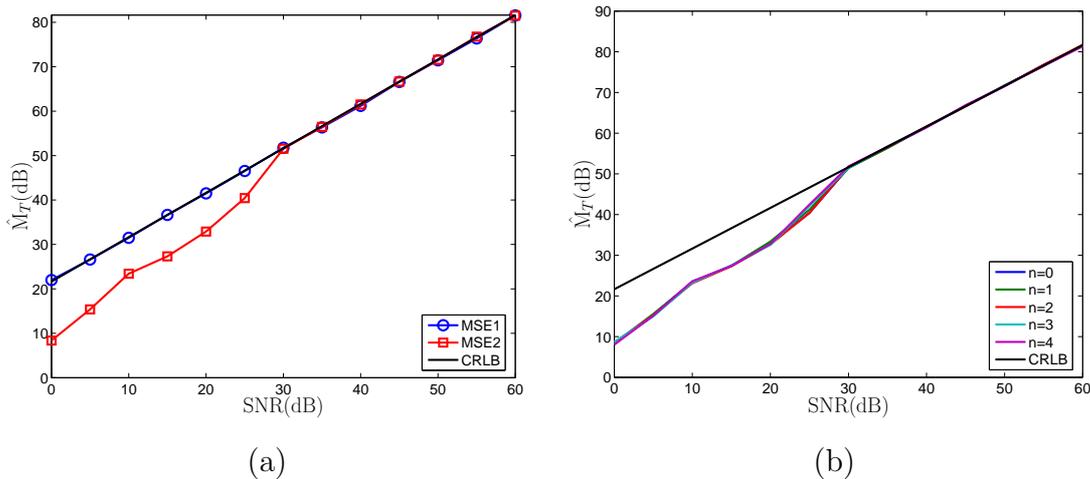


Figura 3.12: Rendimiento del estimador ML de una secuencia generada usando el BSK-TM con $x[0] = 0,6546$, $N = 4$ y $c = -0,5$ para distintos puntos de referencia. (a) Referencia en $n = 0$. (b) Comparación de los resultados para $n = 0, \dots, 4$.

Se puede apreciar como los resultados de la Figura 3.12 son independientes de n en la práctica, tanto en el caso en que la secuencia simbólica es conocida (estimador 1, en azul) como en el caso en que es desconocida (estimador 2, en rojo). También se observa cómo, cuando la secuencia simbólica es conocida, el estimador alcanza el CRLB para cualquier SNR (es decir, se trata de un estimador estadísticamente eficiente, que aprovecha de manera óptima los datos disponibles), mientras que si el itinerario es desconocido es necesario disponer de una SNR de al menos 30 dB para alcanzar el CRLB.

Este resultado se cumple en general para cualquier mapa caótico independientemente de sus parámetros, la condición inicial, y el número de puntos. Como muestra, en la Figura 3.13 se presenta el MSE total obtenido para otros dos mapas caóticos: el BSM con $x[0] = 0,2845$ y $N = 4$, y el TM con $x[0] = 0,4635$, $\beta = 1,9$ y $N = 4$. En el primer caso se alcanza el CRLB a partir de una SNR=20 dB con independencia de la muestra de referencia seleccionada, mientras que en el segundo es necesaria una SNR de aproximadamente 35 dB. En consecuencia, dada la invariancia de los resultados con la muestra de referencia, a partir de este instante se utiliza $x[0]$ para todas las simulaciones.

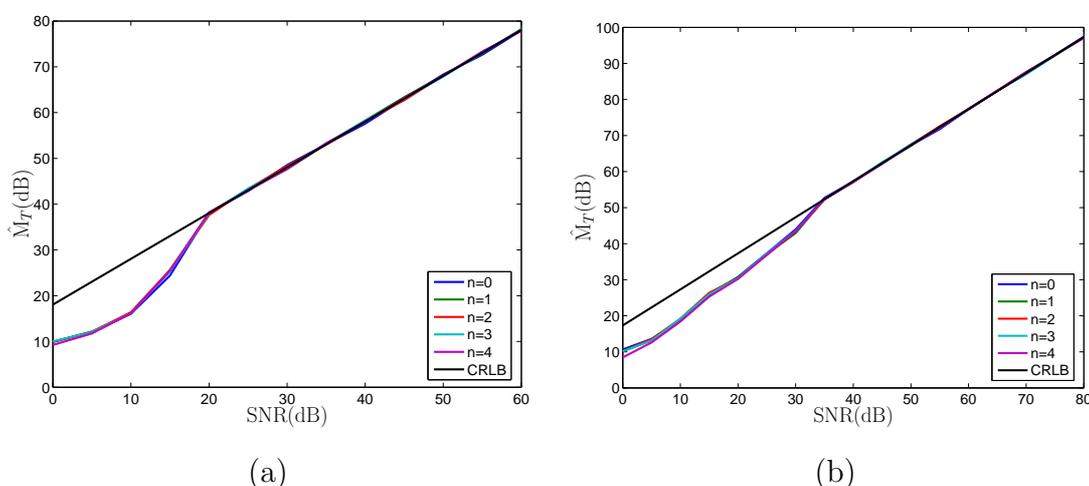
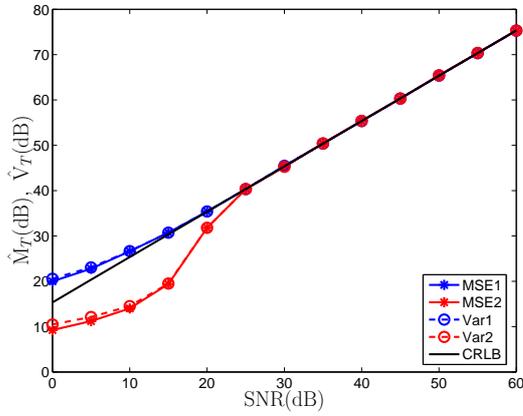


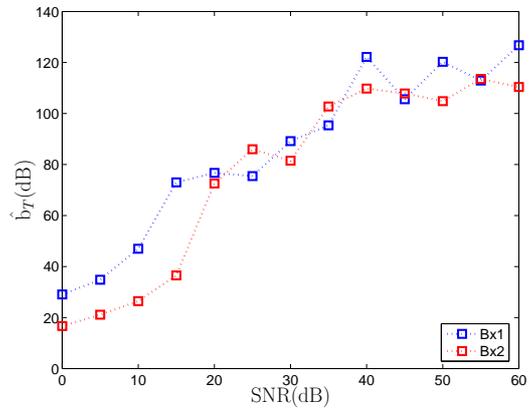
Figura 3.13: Comparación del rendimiento del estimador ML de una secuencia generada usando el BSM y el TM para distintos puntos de referencia. (a) BSM con $x[0] = 0,2845$ y $N = 4$. (b) TM con $x[0] = 0,4635$, $\beta = 1,9$ y $N = 4$.

En las figuras 3.12 y 3.13 se ha mostrado el MSE de los estimadores, que se compone de un término debido al sesgo más otro debido a la varianza. En la Figura 3.14 se muestran, para la secuencia completa, por un lado el MSE y la varianza, y por el otro el sesgo, para señales generadas por los tres mapas anteriores (BSM, BSK-TM y TM), pero con distintos parámetros y condiciones iniciales. A la vista de los resultados, que son válidos para un mapa PWL cualquiera, resulta evidente que la varianza predomina sobre el sesgo para todos los estimadores. En consecuencia, los estimadores se pueden considerar insesgados en la práctica, y en lo sucesivo se representa únicamente su MSE.

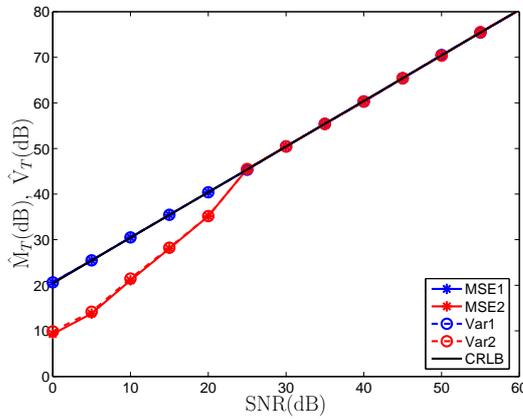
Un segundo aspecto que resulta interesante estudiar es el rendimiento del estimador ML para cada punto de la secuencia. En la Figura 3.15 se muestra el MSE de cada muestra de la señal caótica estimada para un ejemplo llevado a cabo usando el SK-TM con $x[0] = 0,2145$, $c = 0,3$ y $N = 4$. Este ejemplo es representativo del comportamiento típico del estimador: conforme se avanza en la secuencia el CRLB es mayor en escala natural (esto es, se puede lograr una menor precisión en la estimación de la muestra), pero el estimador ML se halla más cercano al CRLB y lo alcanza para una SNR inferior.



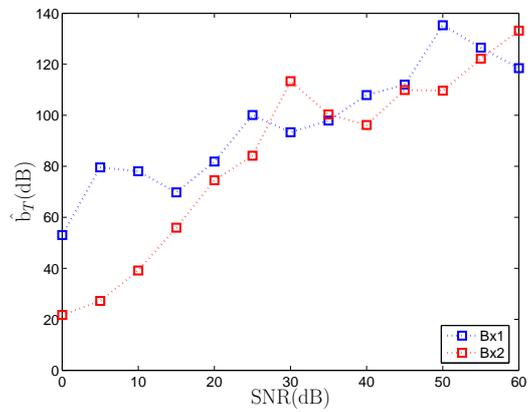
(a)



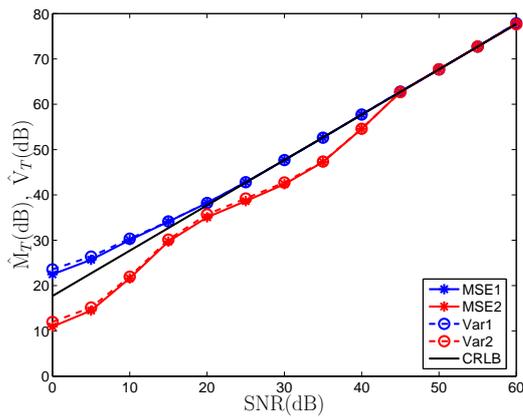
(b)



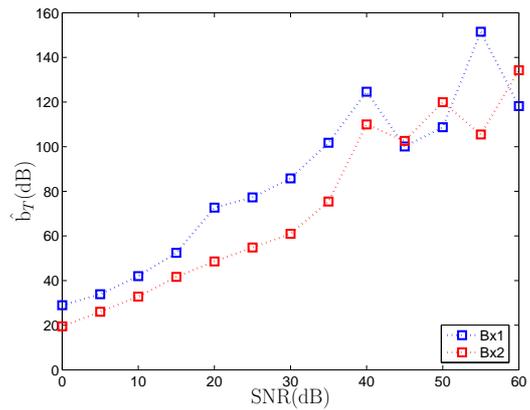
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 3.14: MSE, varianza y sesgo del estimador ML para secuencias generadas usando el BSM, el BSK-TM y el TM con $N = 4$ y referencia en $x[0]$. (a) Varianza y MSE para el BSM con $x[0] = 0,7373$. (b) Sesgo para el BSM con $x[0] = 0,7373$. (c) Varianza y MSE para el BSK-TM con $c = 0,7$ y $x[0] = 0,3229$. (d) Sesgo para el BSK-TM con $c = 0,7$ y $x[0] = 0,3229$. (e) Varianza y MSE para el TM con $\beta = 1,8$ y $x[0] = 0,2714$. (f) Sesgo para el TM con $\beta = 1,8$ y $x[0] = 0,2714$.

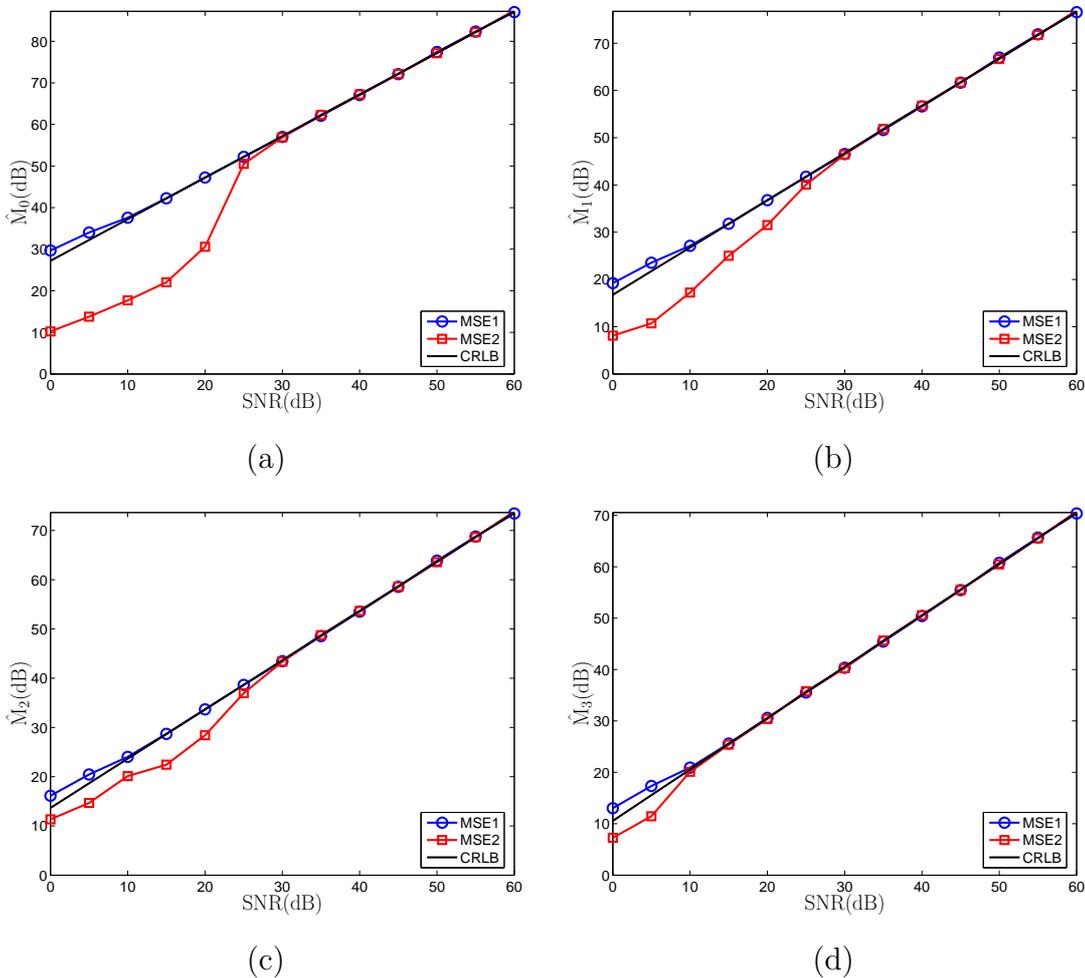


Figura 3.15: Comparación del MSE del estimador ML en función de la muestra de la secuencia usando como referencia la muestra inicial para el SK-TM con $x[0] = 0,2145$, $c = 0,3$ y $N = 4$. (a) MSE de $\hat{x}[0]$, \hat{M}_0 (dB). (b) MSE de $\hat{x}[1]$, \hat{M}_1 (dB). (c) MSE de $\hat{x}[2]$, \hat{M}_2 (dB). (d) MSE de $\hat{x}[3]$, \hat{M}_3 (dB).

El primer resultado es consecuencia de la aparición de los $\alpha_s^n[k]$ en el denominador de (E.7), que se puede descomponer como dos sumatorios en función de los términos de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} . Puesto que en general las pendientes de los intervalos del mapa son mayores que uno, normalmente se cumple que $A_s^{0,k} \geq 1$ y $B_s^{0,-k} \leq 1$. Por tanto, cuanto mayor sea n menor va a ser el denominador (aparecen más términos del estilo $B_s^{0,-k}$ en el sumatorio) y mayor el CRLB en escala natural (menor en la representación logarítmica invertida utilizada).

El segundo resultado es consecuencia de la menor dependencia de la región a la que pertenece $x[n]$ con respecto a la secuencia simbólica conforme se avanza en la secuencia. Por ejemplo, para muchos mapas $x[N]$ puede pertenecer a cualquier región del espacio de fases del mapa, de modo que un error en la secuencia simbólica no va

a afectar significativamente a su estimación. En consecuencia, para la última muestra de la secuencia (caso no mostrado en la Figura 3.15) se ha observado que en general su estimador ML alcanza el CRLB para cualquier valor de SNR.

Nótese que el MSE del estimador ML cuando la secuencia simbólica es conocida alcanza siempre el CRLB e incluso lo supera para SNRs bajas. Esto es debido a que el CRLB presentado se ha calculado para el caso en que el itinerario es desconocido, y no refleja el conocimiento adicional disponible para dicho estimador. Además, el estimador ML limita el rango de valores posibles de $x[n]$ de tal modo que su itinerario coincida con el real, lo que supone una reducción del MSE más allá de lo que es factible en la práctica, marcado por el CRLB. En realidad, este estimador se presenta únicamente a efectos de comparación, y para demostrar que la obtención de una buena estima de una señal caótica se reduce básicamente a estimar correctamente su itinerario, pero representa una situación irreal, ya que para bajas SNRs resulta imposible estimar correctamente la secuencia simbólica.

La Figura 3.15(a) muestra una curva típica del rendimiento del estimador ML de $x[0]$: el estimador ML proporciona malos resultados para bajas SNRs, pero alcanza el CRLB asintóticamente cuando la SNR tiende a infinito. No obstante, el valor concreto de SNR en el que se alcanza el CRLB depende en gran medida del mapa caótico, sus parámetros y la condición inicial. Como ejemplo, en la Figura 3.16 se muestra el MSE de $x[0]$ para la estima ML de las señales generadas por cuatro mapas caóticos distintos con $N = 4$: el BSM con $x[0] = 0,5143$, el BSK-TM con $x[0] = 0,0627$ y $c = -0,1$, el SK-TM con $x[0] = 0,8333$ y $c = 0,9$, y el TM con $x[0] = 0,2435$ y $\beta = 1,7$. La primera secuencia es la que resulta más fácil de estimar, alcanzándose el CRLB para una SNR de tan sólo 20 dB, mientras que el resto siguen un orden creciente de dificultad: para la segunda se requiere una SNR de 25 dB, en el tercer caso son necesarios 40 dB, y en el último hace falta una SNR de al menos 55 dB.

Sin embargo, a pesar de los resultados de la Figura 3.16, no debe llegarse a la conclusión (errónea) de que un mapa como el SK-TM es más fácil de estimar que el TM por ejemplo. Aunque en algunos casos esto sea cierto (por ejemplo para el BSM se obtienen buenos resultados en general para cualquier condición inicial y longitud de la secuencia), por lo común el que una secuencia generada por un mapa sea más o menos fácil de estimar que la generada por otro depende en gran medida de sus parámetros y condición inicial. Como prueba de esta afirmación, en la Figura 3.17 se muestran los resultados obtenidos para dos secuencias generadas por el TM con $\beta = 1,5$, $N = 4$ y dos condiciones iniciales diferentes: $x[0] = 0,8964$ y $x[0] = 0,4987$. En el primer caso se alcanza el CRLB para una SNR de tan sólo 20 dB, una SNR mucho menor que los 40 dB requeridos por la secuencia generada con el SK-TM en la Figura 3.16(c), mientras que en el segundo caso resulta necesaria una SNR de 65 dB para alcanzar el SNR, siendo mucho peor que los ejemplos presentados en la Figura 3.16(c) y (d).

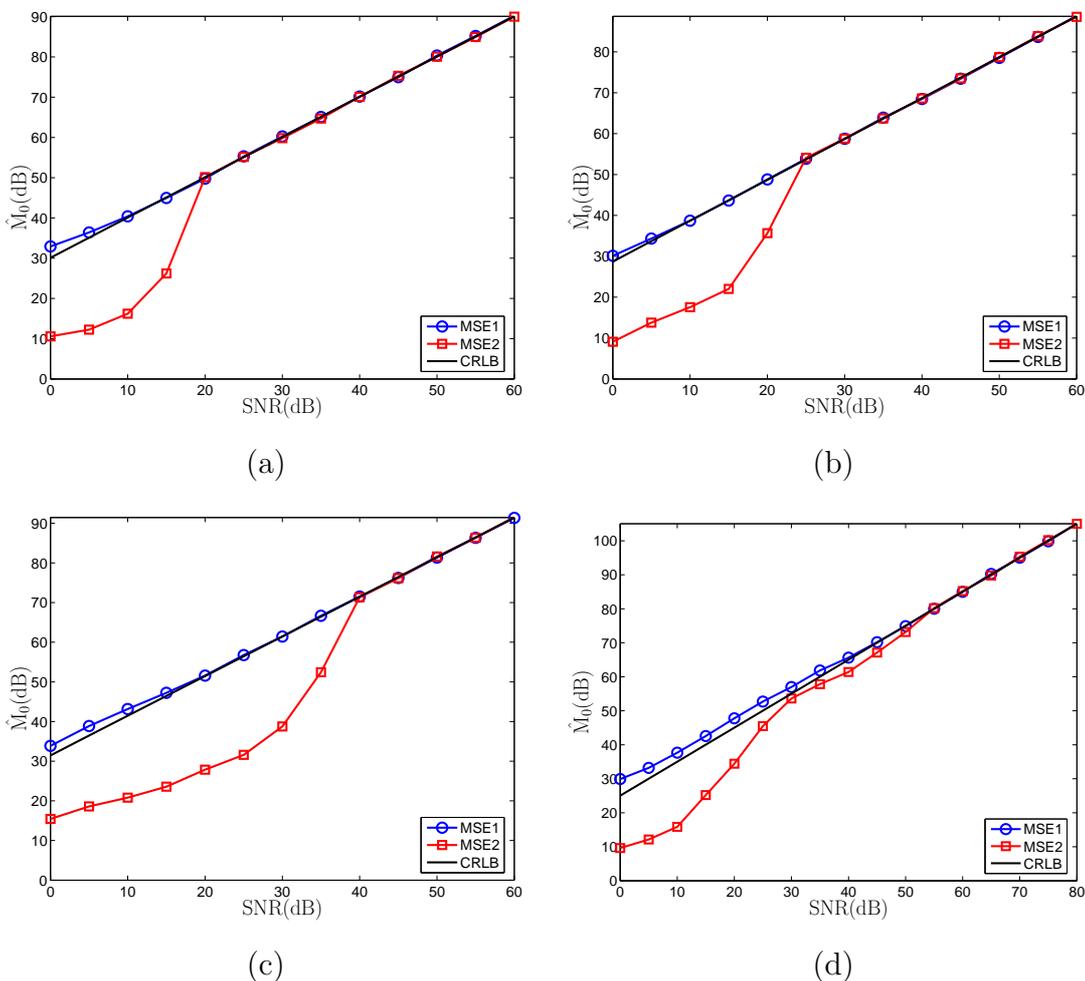


Figura 3.16: MSE del estimador ML de $x[0]$ para secuencias generadas por diversos mapas caóticos unidimensionales con $N = 4$. (a) BSM con $x[0] = 0,5143$. (b) BSK-TM con $x[0] = 0,0627$ y $c = -0,1$. (c) SK-TM con $x[0] = 0,8333$ y $c = 0,9$. (d) TM con $x[0] = 0,2435$ y $\beta = 1,7$.

Todos los resultados presentados hasta el momento son para secuencias generadas usando mapas unimodales (TM, BSM, SK-TM y BSK-TM). Otros ejemplos para estos y otros mapas pueden verse en [Panta2000a, Panta2000b, Panta2000d, Panta2001b, Panta2003, Luengo2005b]. Los resultados y las conclusiones para mapas multimodales resultan similares a los de mapas unimodales: se alcanza el CRLB a partir de una SNR que depende del mapa, la condición inicial y el valor del parámetro de bifurcación. Como ejemplo, en la Figura 3.18 se muestra el MSE obtenido para el mapa PWL1 de la Figura 2.5(b) con $x[0] = 0,88131$ y $N = 6$, y para el mapa de Markov1 de la Figura 2.4 con $x[0] = 0,2285$ y $N = 4$. Para el primero se alcanza el CRLB con una SNR de 30 dB, mientras que para el segundo son necesarios 45 dB de SNR.

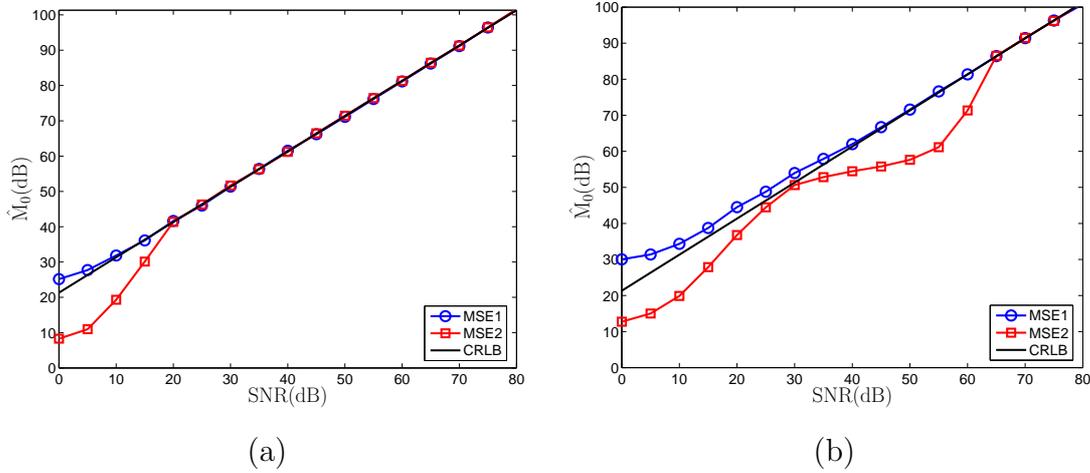


Figura 3.17: MSE del estimador ML de $x[0]$ de una secuencia generada usando el TM con $\beta = 1,5$ y $N = 4$ para dos condiciones iniciales distintas. (a) $x[0] = 0,8964$. (b) $x[0] = 0,4987$.

Por último, se va a confirmar mediante simulaciones un resultado ya conocido [Kay1995a]: la *inconsistencia* del estimador ML para una SNR finita. En la Figura 3.19 se muestra el MSE del estimador ML de $x[0]$ para una secuencia generada iterando el SK-TM con $x[0] = 0,833$ y $c = 0,9$. Se puede apreciar cómo para $N = 3$ y $N = 6$ se alcanza el CRLB a partir de una SNR=35 dB. Para valores de N mayores casi se alcanza el CRLB para dicha SNR, pero a partir de entonces se observa una saturación del MSE, que sólo empieza a mejorar nuevamente cuando la SNR asciende hasta 60 dB. Además, nótese que el incremento del CRLB es cada vez menor conforme aumenta N , estando el CRLB para $N = 9$ muy cercano al CRLB para $N = 12$. Esto es, en resumen, en la Figura 3.19 se aprecian claramente dos efectos:

1. Para un valor de SNR dado, a partir de una cierta longitud de la secuencia se produce una saturación en el rendimiento del estimador. El valor de N para el que se observa este resultado depende de la SNR.
2. Aparece un *efecto umbral*: para un número de muestras prefijado sólo se consigue una buena estimación de la secuencia a partir de un cierto umbral de SNR. Cuanto mayor sea N , mayor va a ser este umbral, e incluso pueden aparecer varios umbrales de SNR en los que el MSE del estimador ML presenta un salto cualitativo. Esto ocurre por ejemplo para $N = 9$ y $N = 12$ en que aparece un primer umbral en una SNR de aproximadamente 35 dB, y un segundo situado alrededor de una SNR igual a 75 dB tras el que se alcanza finalmente el CRLB.

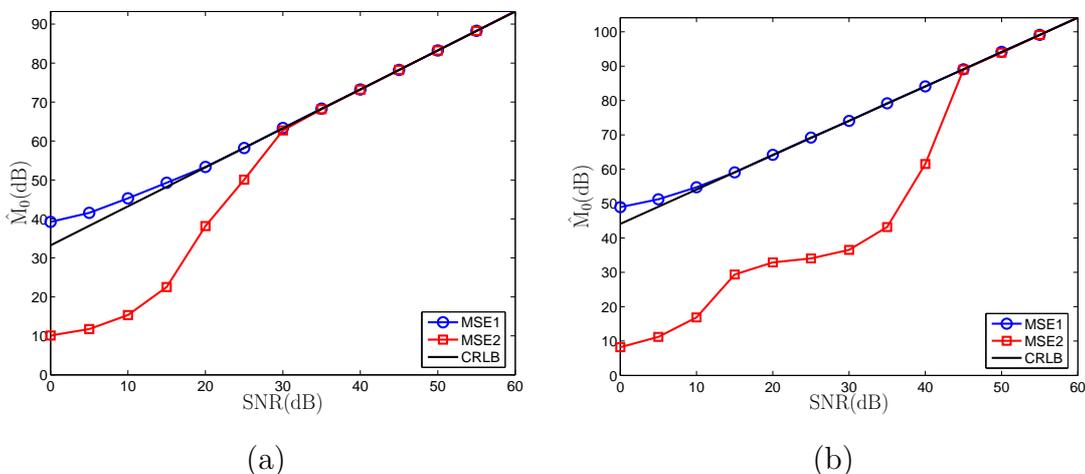


Figura 3.18: MSE del estimador ML de una secuencia caótica generada usando dos mapas multimodales distintos: el mapa PWL1 y el mapa Markov1. (a) Mapa PWL1 de la Figura 2.5(b) con $x[0] = 0,4710$ y $N = 7$. (b) Mapa Markov1 de la Figura 2.4 con $x[0] = 0,2285$ y $N = 4$.

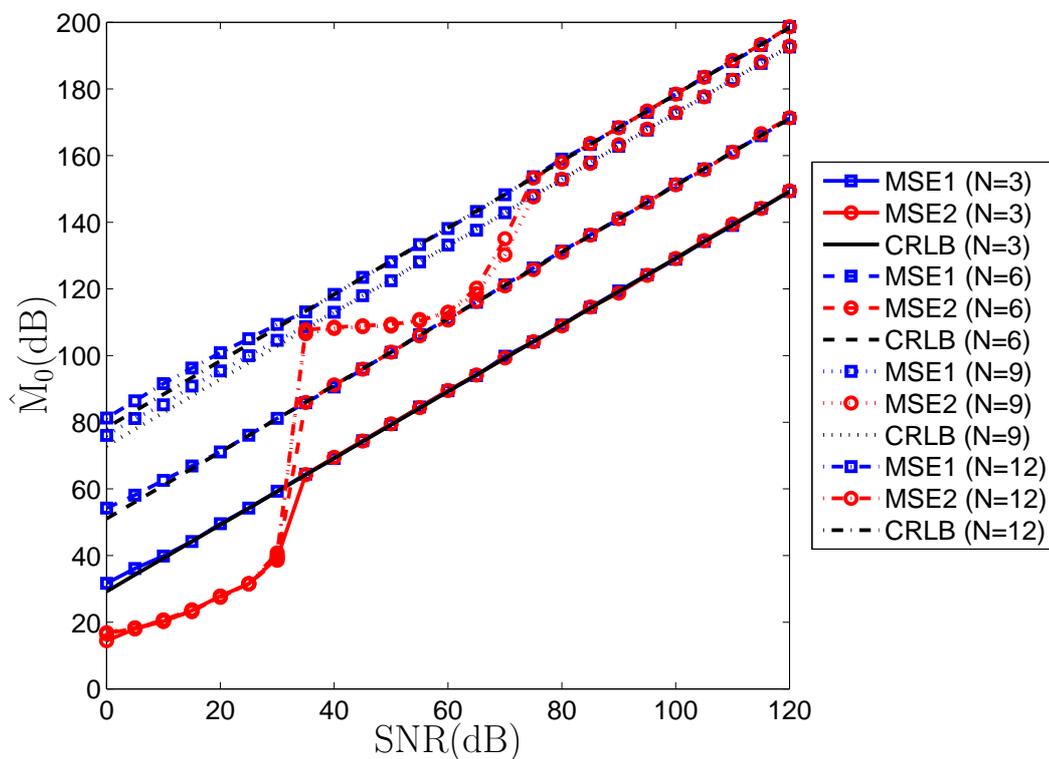


Figura 3.19: Demostración de la inconsistencia del estimador ML: MSE del estimador ML de una secuencia caótica generada usando el SK-TM con $x[0] = 0,833$ y $c = 0,9$ para un número de iteraciones variable ($N = 3, 6, 9, 12$).

3.7. Discusión

A lo largo de este capítulo se ha estudiado el problema de la estimación ML de secuencias generadas por mapas caóticos. En el caso de mapas PWL se han obtenido fórmulas cerradas para la iteración hacia delante y hacia atrás del mapa en la Sección 3.3, de modo que se ha conseguido encontrar una expresión analítica para el estimador ML en la Sección 3.4. En el caso de mapas no PWL no se puede encontrar una ecuación exacta para el estimador ML, pero este se puede hallar de manera aproximada combinando la metodología de estimación descrita en la Sección 3.4 con métodos de rejilla o iterativos para encontrar los mínimos locales, tal como se discute en la Sección 3.5.

Para validar los estimadores propuestos a lo largo del capítulo, se han realizado numerosas simulaciones de Monte Carlo, utilizándose como medida del rendimiento el MSE, tanto de cada muestra de la secuencia como del promedio de la secuencia completa, y obteniéndose las siguientes conclusiones:

1. La calidad de las estimas obtenidas es independiente de la muestra de referencia utilizada, tal y como garantiza la propiedad de invariancia del estimador ML.
2. El estimador ML de $x[0]$ proporciona malos resultados para SNRs muy bajas, pero alcanza el CRLB asintóticamente cuando la SNR tiende a infinito.
3. El valor concreto de SNR a partir del cual se puede considerar que el estimador ML es estadísticamente eficiente (es decir, que alcanza el CRLB y por lo tanto utiliza de manera eficiente toda la información contenida en las observaciones) depende en gran medida del mapa caótico, sus parámetros, la longitud de la secuencia generada, e incluso la condición inicial.
4. Conforme se consideran muestras más avanzadas de la secuencia caótica ($x[1]$, $x[2]$, \dots , $x[N]$) el CRLB tiende a aumentar, lo que implica que la estima óptima de dichos puntos se puede realizar con menor precisión. Sin embargo, el estimador ML se encuentra más próximo al límite y en general lo alcanza para un valor de SNR cada vez menor, siendo $x[N]$ el caso extremo en que, para muchos mapas, se alcanza el CRLB para cualquier valor de SNR.
5. El rendimiento promedio de la secuencia se encuentra fuertemente condicionado por el de $x[0]$, que es habitualmente la muestra que peor se estima para bajas SNRs, y que determina el valor de SNR para el cual se alcanza el CRLB.
6. Para SNRs medias/altas el estimador ML se puede considerar insesgado, y su rendimiento se encuentra limitado fundamentalmente por la varianza. Para bajas SNRs el sesgo influye ligeramente en el empeoramiento del rendimiento del estimador, en general significativamente inferior al del óptimo, dado por el CRLB.
7. El estimador ML de $x[0]$ es inconsistente para una SNR finita en el sentido de que, para una SNR fija, al aumentar la longitud de la secuencia caótica se llega a

un punto de saturación a partir del cual su rendimiento apenas aumenta con N . Intuitivamente esto equivale a decir que la señal caótica olvida rápidamente la condición inicial y los puntos adicionales cada vez aportan una menor información respecto al valor real de $x[0]$.

8. La longitud de la secuencia para la que se alcanza esta saturación depende del mapa, sus parámetros, la condición inicial y el valor de SNR: cuanto mayor sea la relación de señal a ruido mayor será este valor de N . En el caso extremo, este efecto de saturación no se produce en ausencia de ruido. Alternativamente, esto sugiere que cuanto menor sea el ruido mayores beneficios se pueden obtener, desde el punto de vista del rendimiento, trabajando con secuencias más largas.
9. El coste computacional del estimador ML crece exponencialmente con la longitud de la secuencia. Esta dificultad justifica que en este capítulo sólo se hayan incluido simulaciones para secuencias cortas (hasta $N = 12$), y que se busquen estimadores eficientes computacionalmente en el Capítulo 5.
10. Las conclusiones anteriores son generales e independientes de que el mapa sea PWL o no, y de su carácter markoviano o no markoviano.

Por último, nótese que únicamente se han considerado estimadores de mapas unidimensionales. Conceptualmente no existe ninguna dificultad en la extensión de las técnicas descritas para la obtención del estimador ML a mapas y señales multidimensionales: las fórmulas para la iteración de mapas PWL unidimensionales y el marco de estimación propuesto son directamente extensibles a dimensiones mayores que uno.

Las principales dificultades en este caso son de carácter notacional (para el caso general, d -dimensional, las expresiones del capítulo se complican considerablemente) y fundamentalmente computacional. En este sentido, nótese que en el caso de mapas PWL el número de regiones puede crecer significativamente. Por ejemplo, un mapa d -dimensional con M intervalos en cada dirección del espacio de fases tendría un total de M^d regiones, que darían lugar a un total de hasta $M^{N \cdot d}$ posibles itinerarios para una secuencia de longitud N . En consecuencia, el coste computacional del estimador ML sería, a grandes rasgos, del orden del coste computacional de un mapa PWL con M^d intervalos. Por consiguiente, para este tipo de mapas podría resultar interesante considerar representaciones alternativas más compactas, tales como el *modelo lineal a tramos canónico* de Chua y Kang [Chua1977, Kang1978], que obligarían a reformular los estimadores propuestos. El análisis de dichos mapas multidimensionales no se considera en esta Tesis, aunque se mantiene como una posible línea futura de investigación.

