Generalizaciones de los números: de la aritmética a las variedades diferenciables

por

Fernando Etayo Gordejuela

Resumen. En las enseñanzas secundaria y universitaria se introducen diferentes tipos de números (naturales, enteros, racionales, reales y complejos), se estudian el cálculo diferencial sobre los reales, y acaso sobre los complejos, y las variedades diferenciables sobre los reales.

¿Cómo se pueden generalizar los números citados, respecto de qué se generalizan y qué sentido tiene, si lo tiene, seguir para esas generalizaciones todo el programa que desarrollamos en el caso real con el cálculo diferencial y las variedades diferenciables? Pretendemos dar respuesta a estas preguntas, haciendo hincapié en las implicaciones geométricas.

1. Contar, operar y medir

Nuestros alumnos, de secundaria y de enseñanzas técnicas y científicas universitarias, conocen los diferentes tipos de números (naturales, enteros, racionales, reales y complejos), estudian el cálculo diferencial sobre los reales, y acaso sobre los complejos, y las variedades diferenciables sobre los reales, al menos en el caso de curvas y superficies. Las variedades son espacios *localmente* como abiertos de $\mathbb{R}^n$, con cambios de carta diferenciables. Difícilmente se estudian ya en nuestros grados de Matemáticas las variedades complejas.

Este orden de presentar los conceptos «números» – «cálculo diferencial» – «variedades» no es el que siguió la humanidad en la introducción y estudio de los mismos (como muy bien se puede ver en [17]), pero es el que generalmente se sigue, porque es el más económico en el sentido de las ideas. Nuestra atención se centrará en ver cómo se puede llegar a las variedades diferenciables cuando se parte de otros tipos de números, que habremos de introducir previamente. El artículo pretende dar una visión global, y a la fuerza poco profunda, de todo el tema. No contiene demostraciones y está redactado de la manera más liviana que le ha sido posible al autor.

Históricamente, la aparición de los números de diferente tipo y de los sistemas de numeración tuvo una evolución muy bien explicada en muchos libros (véanse, por ejemplo, [9], [18], [19], [26] y [31]). No es el propósito de esta breve presentación reescribir lo que otros autores han desarrollado de modo tan exhaustivo. Los tipos de números que se estudian en la enseñanza media y en la mayoría de las titulaciones universitarias técnicas son estos cinco:

- Números *naturales*, denotados por $\mathbb{N}$: los de contar, $1, 2, 3, 4, \ldots$

- Números *enteros*, denotados por $\mathbb{Z}$: $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, que con la operación de suma forman un grupo, que tiene al 0 como neutro.
- Números *racionales*, denotados por $\mathbb{Q}$, que son todas las fracciones $\frac{a}{b}$ con a y b enteros (y $b \neq 0$). Los números racionales con las operaciones suma y producto constituyen un cuerpo. Pero no contienen «todos los números», pues, como ya demostraron en la Grecia clásica, el número $\sqrt{2}$ no es racional.
- Números *reales*, denotados por $\mathbb{R}$, que añaden a los racionales todos los límites de sucesiones de Cauchy de números racionales. Por ejemplo e, π y $\sqrt{2}$ son números irracionales: números reales que no son racionales. Los números reales los podemos ver como los puntos de una recta, la recta real, que no tiene «agujeros». Son los que permiten medir cualquier longitud.
- Números *complejos*, denotados por $\mathbb{C}$: añaden a los reales todas las raíces de polinomios de coeficientes reales. Por ejemplo, el polinomio $x^2 + 1 = 0$ tiene dos raíces que no son reales, y que denotamos por $\pm i$. También tienen todas las raíces de cualquier polinomio con coeficientes complejos, por lo que se dice que $\mathbb{C}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado.

En estos conjuntos numéricos se distinguen tres tipos esenciales de conceptos, y cada uno de ellos dará origen a diferentes generalizaciones del concepto de número:

- Contar y ordenar: los naturales cumplen las dos funciones. Cuando pasamos a conjuntos infinitos mayores tenemos la teoría de cardinales y ordinales.
- Medir: los números pueden ponerse como los puntos de una recta. La inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$ significa que no es un número racional y, por tanto, la recta racional no es completa. La noción de completitud se realiza por medio de las sucesiones de Cauchy y hay dos modos de completar los racionales: con los reales y con los p-ádicos (entendiendo que de esta segunda manera hay infinitas completaciones de los racionales, pues hay una para cada primo p).
- Operar: los racionales (y los reales) forman un cuerpo, que en los complejos alcanza el ser algebraicamente cerrado. Pero, ¿existen más estructuras algebraicas interesantes que contengan a los reales?

Así surgen diferentes tipos de números. ¿Tiene sentido desarrollar para cada uno de ellos un cálculo diferencial y una teoría de variedades diferenciables? Más aún, ¿se puede hacer? Como éste es nuestro planteamiento no tiene sentido que nos refiramos a los cardinales y los ordinales.

2. Los números p-ádicos

Los números reales se obtienen completando los racionales mediante sucesiones de Cauchy. Una sucesión de números racionales $\{q_n\}$ es una *sucesión de Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que, $\forall n, m \geq N$, es $|q_n - q_m| < \varepsilon$. Este valor absoluto define la distancia entre dos números racionales. Un *valor absoluto* en $\mathbb{Q}$ es una aplicación sobre $[0, \infty)$ que verifica tres propiedades:

- $|a| = 0 \iff a = 0$;
- $|ab| = |a|\,|b|$;
- $|a+b| \leq |a| + |b|$.

El valor absoluto define una distancia en $\mathbb{Q}$ dada por $d(p,q) = |p-q|$, con la que $\mathbb{Q}$ es un espacio métrico. Estamos acostumbrados a la definición de valor absoluto euclídeo: $|q| = q$, si $q \geq 0$ y $|q| = -q$, si $q \leq 0$. Pero para cada primo p existe el siguiente valor absoluto $|\cdot|_p$:

$$\text{si } q = p^n \, \frac{r}{s}, \text{ entonces } |q|_p = p^{-n},$$

donde $\frac{r}{s}$ es fracción irreducible que no contiene el factor p en numerador ni denominador. Así, para cada primo p se tiene un valor absoluto $|\cdot|_p$, una distancia en $\mathbb{Q}$, y una compleción $\mathbb{Q}_p$ de $\mathbb{Q}$ definida por las sucesiones de Cauchy respecto de dicha distancia. A $\mathbb{Q}_p$ se le denomina cuerpo de los p-ádicos. Las propiedades de $\mathbb{Q}_p$ son muy diferentes de las de $\mathbb{R}$, aunque ambos son cuerpos completos. Y además son las únicas compleciones de los racionales, en el sentido siguiente:

Teorema (de Ostrowski, [23]). *Todo valor absoluto en $\mathbb{Q}$ es equivalente al euclídeo, al trivial o a un p-ádico.*

El valor absoluto trivial es el definido por $|q| = 1, \forall q \neq 0$. La equivalencia significa que dos valores absolutos $|\cdot|$ y $\|\cdot\|$ son equivalentes si existe una constante k no nula de modo que $|q| = \|q\|^k$, $\forall q \in \mathbb{Q}$. Dos valores absolutos equivalentes definen la misma estructura de espacio métrico en $\mathbb{Q}$.

Los p-ádicos fueron introducidos por Hensel a finales del siglo XIX. Son muy relevantes en álgebra, teoría de números y análisis (véanse, por ejemplo [3] y [24]). Tienen aplicaciones en física, en la llamada mecánica cuántica p-ádica. Como espacio topológico, $\mathbb{Q}_p$ es localmente compacto. Pero tiene propiedades bien distintas a la topología usual de la recta real. Por ejemplo, las bolas no tienen centro, en el sentido de que si denotamos $B(a,r) = \{x : |x-a| < r\}$, entonces $B(b,r) = B(a,r)$, $\forall b \in B(a,r)$, esto es, todo punto de una bola es centro de la misma. De hecho, las bolas son abiertas y cerradas simultáneamente y $\mathbb{Q}_p$ es totalmente disconexo. El valor absoluto p-ádico es no-arquimediano, porque verifica una propiedad triangular más fuerte: $|a+b| \leq \text{máx}\{|a|,|b|\}$. Esto hace que $|n| = |1 + \cdots + 1| \leq \text{máx}\{|1|,\ldots,|1|\} = |1|$, con lo que todos los enteros tienen norma menor o igual que uno. La propiedad arquimediana en los reales establece que si $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.

Se define el cuerpo de los *p-ádicos complejos* $\mathbb{C}_p$ como la compleción topológica de la clausura algebraica de $\mathbb{Q}_p$ (véase [24, pág. 10]). Como cuerpo es isomorfo a $\mathbb{C}$. En el caso real, la clausura algebraica de $\mathbb{R}$ es el cuerpo complejo $\mathbb{C}$, que es topológicamente completo. Como se acaba de decir, la clausura algebraica de $\mathbb{Q}_p$ no es un espacio topológico completo, lo que marca otra diferencia entre el caso real y el p-ádico.

Desde el punto de vista del análisis, se estudian las funciones p-ádicas y existe también en dimensiones infinitas el análisis funcional p-ádico. Sin embargo, existe cierta controversia sobre el desarrollo de una teoría de variedades diferenciables sobre los p-ádicos. Así, se pueden encontrar textos que la desarrollan, como [28], junto con otros que señalan la dificultad de desarrollarla, como [25]. En cualquier caso, el concepto básico de función de clase C^1 no es siquiera elemental, pues en $\mathbb{Q}_p$ existen funciones derivables de derivada continua para las que no se cumple el teorema de invertibilidad local.

Desde un punto de vista algebraico, las completaciones p-ádicas juegan un papel muy importante en el álgebra conmutativa, geometría algebraica y aritmética (una introducción a estos conceptos puede verse en el libro clásico de Atiyah y MacDonald [3]).

Los p-ádicos definen un camino para ampliar los racionales totalmente diferente al de los reales. Nos hemos detenido bastante en ellos para que se aprecien las enormes diferencias entre $\mathbb{Q}_p$ y $\mathbb{R}$. Todo lo que sigue a continuación retomará la senda de los reales, salvo lo que mencionemos de cuerpos finitos.

3. Geometría de los números complejos y de un cuerpo cualquiera

Los números complejos son de la forma $a + bi$, siendo i una raíz de -1. Es bien sabido que se puede hacer una biyección entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$, de modo que cada número complejo $a+bi$ se identifica con el par (a, b) de números reales. Así podemos dibujar los números complejos en el plano real. Y podemos ver las operaciones algebraicas como operaciones geométricas: la suma de complejos es la suma de los vectores; el producto se obtiene multiplicando los módulos y sumando los argumentos.

Hay mucha geometría en los números complejos. Por ejemplo, cuatro puntos son concíclicos (esto es, están en una misma circunferencia o recta) si y sólo si su razón doble es un número real. Y, a propósito, los números complejos 0, 1 e i, ¿están alineados o no? Si los vemos como puntos del plano real, obvio es que no, y si los vemos como elementos de $\mathbb{C}$, obvio es que sí: tres puntos p, q, r están alineados si los vectores $\overrightarrow{pq}$ y $\overrightarrow{pr}$ son proporcionales, esto es, si $\overrightarrow{pq} = \lambda\overrightarrow{pr}$, siendo λ un escalar del cuerpo. En nuestro caso, $p = 0$, $q = 1$, $r = i$, con lo que $\overrightarrow{pq} = 1-0 = 1$, $\overrightarrow{pr} = i-0 = i$, para, finalmente $\overrightarrow{pq} = 1 = \lambda i = \lambda\overrightarrow{pr}$, siendo $\lambda = -i$. Así que, en propiedad, a la representación en el plano real de $\mathbb{C}$ la deberíamos llamar la recta compleja, pero nunca el plano complejo.

¿Qué nos trastorna del ejemplo anterior? Que pensamos que toda recta numérica debe tener la propiedad del orden, y que dados tres elementos debe ser uno el que está entre los otros dos. Pero esa es una propiedad de la recta real, que no tiene la recta compleja: $\mathbb{C}$ no es un cuerpo ordenado. Los números complejos aparecen en la resolución de muchos problemas de las matemáticas y la física, y, muchas veces, situaciones planteadas en términos de números reales, con soluciones números reales, son resueltas pasando por los complejos.

Los cuerpos finitos $\mathbb{Z}_p$ (los enteros módulo un primo p) también se pueden representar como rectas. En este caso, realmente la mejor representación es la dada por los vértices de un polígono regular de p lados.

En general, sobre cualquier cuerpo $\mathbb{K}$ se pueden definir su estructura como recta afín y vectorial, los espacios de dimensión mayor $\mathbb{K}^n$, con ambos tipos de estructuras, y los espacios proyectivos $P_n(\mathbb{K})$. Por ejemplo, $P_1(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ y, en particular, $P_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{S}^2$ es la esfera de Riemann.

4. Los números hipercomplejos y las álgebras

Demos un salto y consideremos el plano real con las tres estructuras algebraicas posibles al considerar el elemento i:

- Números *complejos*: $\{a + bi : i^2 = -1\}$. Forman un cuerpo conmutativo.
- Números *duales*: $\{a+bi : i^2 = 0\}$. No forman un cuerpo, porque tienen divisores de cero. Forman un álgebra conmutativa y asociativa. Sus divisores de cero son $\{bi\}$, que son elementos nilpotentes.
- Números *dobles* («split-complex», «semi-complex», «hyperbolic»): $\mathbb{B} = \{a + bi : i^2 = +1\}$. Tampoco forman un cuerpo. Forman un álgebra conmutativa y asociativa. Sus divisores de cero son $\{a + ai\}$. Como álgebra, $\mathbb{B}$ es la suma directa de dos copias de $\mathbb{R}$. Además de su interés matemático que más adelante veremos, se emplean en relatividad (véanse, por ejemplo, [21] y [2]).

Un *álgebra real* es un espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ dotado de un producto interno respecto del que la suma tiene la propiedad distributiva, y para el que $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$, para cualesquiera $\lambda \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^n$. Según las propiedades que tenga este producto, así se denominará el álgebra. Así, por ejemplo, si ese producto tiene elemento neutro, el álgebra se llama unitaria. Los tres anteriores son los tres ejemplos básicos de estructura de álgebra unitaria en el plano real, en el sentido de que todas las demás álgebras dadas por una expresión cuadrática son isomorfas a alguna de éstas. Como veremos más adelante, desde el punto de vista geométrico tienen mucha importancia en la teoría de variedades diferenciables. Estas álgebras se llaman, con carácter general, de *números hipercomplejos*. Más adelante mostraremos que se pueden representar matricialmente.

¿En qué espacios $\mathbb{R}^n$ se pueden definir estructuras de cuerpo o, al menos, de álgebra? De cuerpo solamente en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, y $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$, los cuaterniones definidos por Hamilton. Los *cuaterniones* son las cuaternas $\{a + bi + cj + dk : i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k = -ji, jk = i = -kj, ki = j = -ik\}$. Forman un cuerpo no conmutativo, lo que hace que su geometría sea especialmente complicada. Su utilización para describir los movimientos en el espacio tri y tetradimensional hizo que gozara de gran popularidad en el siglo XIX, que perdió al generalizarse posteriormente el álgebra lineal. Sin embargo, en los últimos años la ha recobrado en ámbitos de computación, visión por ordenador, y diseño 3D, puesto que computacionalmente es más «barato» trabajar con cuaterniones que con matrices.

En $\mathbb{R}^4$ existen otras estructuras de álgebras, introducidas en el siglo XIX (véanse, por ejemplo, [4], [8] y [32]). Denotemos por $\mathbb{A} = \mathbb{R}^4 = \{a + bi + cj + dk : ij = k\}$. Entonces, siendo $i^2 = \pm 1$, $j^2 = \pm 1$, $ij = \pm ji$, se pueden construir cuatro (no ocho, ¡verifíquelo el lector!) álgebras, de acuerdo con las siguientes relaciones:

- *Cuaterniones* (Hamilton, 1843): $-i^2 = -j^2 = -k^2 = 1$. Es cuerpo no conmutativo. Obsérvese que $a+bi+cj+dk = (a+bi)+(c+di)j$, lo que permite definir los cuaterniones como pares de números complejos, igual que los complejos como pares de números reales.
- *Bicomplejos* o «tessarines» (Cockle, 1848; Segre, 1892): $i^2 = -j^2 = -k^2 = 1$. Es álgebra asociativa y conmutativa.
- Biparacomplejos o *cocuaterniones* (Cockle, 1849): $i^2 = j^2 = -k^2 = 1$. Es álgebra asociativa.
- «Hiperproducto»: $i^2 = j^2 = k^2 = 1$. Es álgebra asociativa y conmutativa.

Cada una de ellas tiene mucha importancia desde el punto de vista de la geometría diferencial. Señalaremos algo al final del trabajo.

El proceso se puede continuar en dimensiones mayores. De hecho, la cadena $\mathbb{R} \to \mathbb{C} \to \mathbb{H}$ se obtiene mediante un procedimiento denominado de *duplicación de álgebras* o *construcción de Cayley-Dickson*: Sea $\mathbb{A}$ un *álgebra de conjugación*, que significa que está dotada de una aplicación $* : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ que verifica $a^{**} = a$ y $(ab)^* = b^*a^*$. Se dice que $\mathbb{A}$ es una $*$-álgebra, y se dice que $\mathbb{A}$ es de tipo real si $a = a^*$, para todo $a \in \mathbb{A}$. Se llama duplicación de $\mathbb{A}$ a $\mathbb{A}^{(2)} = (\mathbb{A}^2, \wedge)$, donde $\mathbb{A}^2$ es espacio vectorial con las operaciones interna y externa de la forma habitual en suma directa de espacios vectoriales, y $\wedge$ es el producto interno que hace a $\mathbb{A}^{(2)}$ un álgebra, definido de la manera que sigue: $(a,b)\wedge(c,d) = (ac-db^*, a^*d+cb)$. Además, podemos definir una conjugación en $\mathbb{A}^{(2)}$ dada por $(a,b)^* = (a^*, -b)$.

Así, $\mathbb{R}^{(2)} = \mathbb{C}$, $\mathbb{C}^{(2)} = \mathbb{H}$ y $\mathbb{H}^{(2)} = \mathbb{O}$, los octoniones, pudiéndose continuar la secuencia, pero perdiendo propiedades en cada duplicación: $\mathbb{R}$ es de tipo real, no siéndolo $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ no es conmutativa y $\mathbb{O}$ ni tan siquiera es asociativa, tan solo alternativa. $\mathbb{O}^{(2)}$ (los sedeniones) pierde también alternatividad. Véanse, por ejemplo, [4] y [8].

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial real dotado de un producto escalar. El *álgebra de Clifford* $\mathrm{Cliff}(V)$ es (véase, por ejemplo, [4]) el álgebra asociativa libremente generada por V módulo la relación $v^2 = -\|v\|^2$, para todo $v \in V$. Esta relación es equivalente a $vw + wv = -2\langle v, w\rangle$, para cualesquiera $v, w \in V$. En el caso de que $V = \mathbb{R}^n$ con el producto escalar estándar, la correspondiente álgebra de Clifford se denota por $\mathrm{Cliff}(n)$. En concreto, $\mathrm{Cliff}(0) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Cliff}(1) = \mathbb{C}$ y $\mathrm{Cliff}(2) = \mathbb{H}$, pero $\mathbb{O}$ no es álgebra de Clifford, porque no es asociativa. Las álgebras de Clifford tienen grandísima aplicación en muchas partes de la física (mecánica, electromagnetismo, relatividad). Véase, por ejemplo, [1].

Otro tipo especial de álgebras son las denominadas *álgebras de Lie*, en las que el producto es anticonmutativo y verifica una cierta relación, denominada identidad de Jacobi: $a\times(b\times c)+b\times(c\times a)+c\times(a\times b) = 0$. No son unitarias. El caso más sencillo es el de $\mathbb{R}^3$ dotado de estructura de producto vectorial. El producto vectorial en $\mathbb{R}^3$ está dado por $i^2 = j^2 = k^2 = 0$, $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$, $ki = j = -ik$, que son las relaciones de la parte imaginaria de los cuaterniones. El producto vectorial en $\mathbb{R}^7$ está dado en la siguiente tabla:

$\times$	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7
E_1	0	E_4	E_7	$-E_2$	E_6	$-E_5$	$-E_3$
E_2	$-E_4$	0	E_5	E_1	$-E_3$	E_7	$-E_6$
E_3	$-E_7$	$-E_5$	0	E_6	E_2	$-E_4$	E_1
E_4	E_2	E_1	$-E_6$	0	E_7	E_3	$-E_5$
E_5	$-E_6$	E_3	$-E_2$	$-E_7$	0	E_1	E_4
E_6	E_5	$-E_7$	E_4	$-E_3$	E_1	0	E_2
E_7	E_3	E_6	E_1	E_5	$-E_4$	$-E_2$	0

Si trasladamos ese producto a la parte imaginaria de $\mathbb{R}^8$ construimos los *octoniones* u *octavas de Cayley*. La tabla de multiplicación de los octoniones y del producto vectorial de $\mathbb{R}^7$ se puede recuperar a partir del *plano de Fano*, el plano proyectivo más pequeño que existe, que es $P_2(\mathbb{Z}_2)$. ¡Podemos ver lo grande, siete y ocho dimensiones, a partir de lo pequeño! El producto de dos números es el tercero de la recta que los contiene con signo positivo o negativo según sea el recorrido en el plano igual u opuesto al sentido dado sobre él (véase [4]).

Los espacios $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^7$ son los únicos dotados de un producto vectorial, en el sentido de que el producto de dos vectores sea perpendicular a los vectores que se multiplican y de que el producto sea anticomutativo.

¿Hay más álgebras esencialmente buenas? La pregunta es totalmente ingenua, pues depende de a qué llamemos «buena». En el sentido de que las álgebras sean lo más parecido a un cuerpo, los límites los ponen los *teoremas de Frobenius* (las únicas álgebras reales de división asociativas son los reales, los complejos y los cuaterniones) y de *Hurwitz* (las únicas álgebras reales normadas asociativas son los reales, los complejos, los cuaterniones y los octoniones). No existen, en particular, más cuerpos que los tres que ya hemos mencionado repetidamente: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{H}$. Por supuesto que existen muchos más tipos de álgebras interesantes, como las ya mencionadas de Clifford o de Lie, o las de Jordan, que están además muy ligadas a la geometría diferencial y a la física.

5. Las esferas y las rectas proyectivas

Antes de abordar el estudio de la diferenciabilidad respecto de un álgebra de números hipercomplejos y de la construcción de variedades diferenciables sobre ellos, vamos a hacer una «parada» para mostrar lo que todas las estructuras que hemos definido determinan en la geometría de las esferas inmersas en los espacios $\mathbb{R}^n$. Escogemos este tema como ejemplo del significado geométrico inherente a toda la construcción algebraica realizada. Muchos de los objetos introducidos tienen una geometría muy rica, pero que resulta de presentación más sofisticada.

Las propiedades geométricas de la esfera unidad $\mathbb{S}^n$ contenida en $\mathbb{R}^{n+1}$ dependen esencialmente de las propiedades de álgebra que tiene el espacio euclídeo (véase [10]). Todo lo que acabamos de comentar en el epígrafe anterior revierte directamente en la geometría de las esferas. Por ello, las esferas más ricas son $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^3$ y $\mathbb{S}^7$, que viven en los complejos, cuaterniones y octoniones. Las dos primeras son *grupos de Lie* (esto es, grupos algebraicos con respecto a la multiplicación, siendo las operaciones de multiplicar y de inverso diferenciables). Las tres esferas son *paralelizables* (¡las únicas paralelizables!, como demostró Adams en 1958), esto es, admiten tantos campos vectoriales tangentes linealmente independientes en todo punto como la dimensión de la esfera.

Todas las esferas de dimensión impar son hipersuperficies de $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$. Esto hace que todas ellas sean variedades sasakianas ([5]). En el espacio $\mathbb{C}^n$ se puede definir un endomorfismo vectorial J de cuadrado menos la identidad, que generaliza la multiplicación por i en el caso de $\mathbb{C}$. Con ese endomorfismo, el vector normal a la esfera en un punto (que es el mismo que el radio en ese punto) se transforma en un vector tangente a la esfera. Es decir, en toda esfera de dimensión impar se puede definir un campo vectorial no nulo globalmente, inducido por la estructura compleja $\mathbb{C}^n$ del espacio en que vive. Este campo es el que se necesita para alcanzar la estructura de variedad sasakiana.

Las esferas de dimensión par no admiten ningún campo vectorial sin ceros, como consecuencia del *teorema de Poincaré-Hopf*.

Respecto de las esferas de dimensión par, las mejores son $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{S}^6$, pues viven en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^7$, que son espacios dotados de producto vectorial. Como el vector normal en cada punto es el radio en el punto, multiplicándolo vectorialmente por un vector tangente se obtiene otro vector tangente. Repitiendo la operación, se obtiene un vector opuesto al de partida, por lo que denominando por J el endomorfismo del plano tangente consistente en multiplicar vectorialmente por el vector normal resulta que $J^2 = -1$, el opuesto de la aplicación identidad. (De hecho, $\mathbb{S}^2$ es una variedad kähleriana, que viene a ser el análogo en dimensión par de la propiedad sasakiana en dimensión impar; mientras que todas las esferas de dimensión impar son sasakianas, de las de dimensión par sólo $\mathbb{S}^2$ es kähleriana.)

Un endomorfismo como el que acabamos de definir se denomina una *estructura polinómica en una variedad diferenciable*. Así, se estudia cómo es la geometría de las variedades diferenciables dotadas de estructuras polinómicas. Otro ejemplo es el de las variedades casi-producto, dotadas de J tal que $J^2 = +1$. Como veremos más adelante, no sólo existe una similitud entre álgebras reales y estructuras polinómicas en variedades diferenciables, sino que éstas se pueden interpretar como variedades modeladas sobre aquéllas.

La recta proyectiva sobre un cuerpo se obtiene añadiendo un único punto del infinito. Mediante la proyección estereográfica, podemos identificar las rectas proyectivas sobre reales, complejos, cuaterniones y octoniones con las esferas $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}^4$ y $\mathbb{S}^8$, y definir las fibraciones de Hopf sobre ellas. En efecto, las esferas $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}^4$, $\mathbb{S}^8$ son las rectas proyectivas sobre $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$, pues tomando $\mathbb{A} = \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ resulta que la recta proyectiva sobre $\mathbb{A}$ es $P_1(\mathbb{A}) = \mathbb{R}^{2n} \cup \{\infty\} = \mathbb{S}^{2n}$ con $n = 1, 2, 4$, según corresponda (véase, por ejemplo, [11] para una descripción del espacio proyectivo). Se puede definir entonces la proyección de $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ sobre $P_1(\mathbb{A})$ que a cada vector no nulo le hace corresponder la recta vectorial que genera, esto es, el punto proyectivo que define. Esta aplicación se puede restringir a la esfera unidad en $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$, y así se obtienen tres fibraciones, llamadas *fibraciones de Hopf*:

- $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to P_1(\mathbb{C}) = \mathbb{S}^2$, con fibra $\mathbb{S}^1$;
- $\mathbb{S}^7 \subset \mathbb{R}^8 \setminus \{0\} = \mathbb{H}^2 \setminus \{0\} \to P_1(\mathbb{H}) = \mathbb{S}^4$, con fibra $\mathbb{S}^3$;
- $\mathbb{S}^{15} \subset \mathbb{R}^{16} \setminus \{0\} = \mathbb{O}^2 \setminus \{0\} \to P_1(\mathbb{O}) = \mathbb{S}^8$, con fibra $\mathbb{S}^7$.

Las fibraciones de Hopf tienen mucho interés. Por ejemplo, en topología algebraica para la determinación de grupos de homotopía de orden superior de esferas, pues se tiene (véase [30]):

- $\pi_i(\mathbb{S}^2) \approx \pi_{i-1}(\mathbb{S}^1) \oplus \pi_i(\mathbb{S}^3)$, $i \geq 2$;
- $\pi_i(\mathbb{S}^4) \approx \pi_{i-1}(\mathbb{S}^3) \oplus \pi_i(\mathbb{S}^7)$, $i \geq 2$;
- $\pi_i(\mathbb{S}^8) \approx \pi_{i-1}(\mathbb{S}^7) \oplus \pi_i(\mathbb{S}^{15})$, $i \geq 2$.

6. Representación matricial de los números hipercomplejos

Dar una representación real de un álgebra significa establecer un isomorfismo φ de álgebras del álgebra real $\mathbb{A} = \mathbb{R}^n$ en una subálgebra del álgebra de matrices $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Que sea isomorfismo de álgebras significa, en particular, que $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ y $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$, cualesquiera que sean $a, b \in \mathbb{A}$. El siguiente resultado (ver, por ejemplo, [6]) establece una condición para que un álgebra sea representable.

Teorema. *$\mathbb{A}$ tiene una representación real si y sólo si es asociativa.*

Si el álgebra es de la forma $\mathbb{R}^4 = \{a + bi + cj + dk : ij = k\}$, la representación se obtiene multiplicando la primera columna $(a, b, c, d)^t$ sucesivamente por 1, i, j, k (véanse, por ejemplo, [6] y [7]). Así se obtienen, para las tres álgebras del plano, las siguientes expresiones:

- Complejos: $(a, b)i = (a + bi)i = -b + ai = (-b, a)$, que constituirá la segunda columna de la matriz (la primera se obtiene muliplicando $(a, b)^t$ por 1, y queda como está), con lo que la representación matricial es
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$
- Paracomplejos: $(a, b)i = (a+bi)i = b+ai = (b, a)$, con lo que la representación matricial es
$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$
- Duales: $(a, b)i = (a + bi)i = ai = (0, a)$, con lo que la representación matricial es
$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Las representaciones matriciales de las cuatro álgebras de $\mathbb{R}^4$ que hemos mencionado pueden verse, por ejemplo, en [7]. En particular, para los cuaterniones la representación real está dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}.$$

El interés de dar representaciones reales de las álgebras está en que podemos operar con ellas de modo sencillo, matricialmente, sin necesidad de tener que considerar las relaciones que ligan los generadores i, j, k. Más adelante veremos que no es sólo esto, sino que es clave para entender el cálculo diferencial sobre estas álgebras.

7. Cálculo diferencial y variedades diferenciables

Una variedad diferenciable real está dotada de un atlas cuyos cambios de carta son aplicaciones diferenciables. Dicho con rigor:

DEFINICIÓN. Sea M un conjunto.[1]

a) Una aplicación $x : U \subset M \to \mathbb{R}^n$ inyectiva y con imagen un subespacio abierto de $\mathbb{R}^n$ se llama *carta*. A la imagen de cada elemento de M, $x(m) = (x^1(m), \ldots, x^n(m)) \in \mathbb{R}^n$ se le llama el conjunto de *coordenadas* de m (respecto de la carta dada). A U se le llama *dominio* de la carta.

b) Se llama *atlas* sobre M a una colección $\mathcal{A}$ de cartas sobre $\mathbb{R}^n$ cuyos dominios recubran todo M.

c) Se llama *atlas* C^∞ a un atlas $\mathcal{A}$ tal que, para cualesquiera dos cartas $x, y \in \mathcal{A}$ cuyos dominios U, V tengan intersección no vacía, resulta que $x(U \cap V)$, $y(U \cap V)$ son abiertos de $\mathbb{R}^n$ y la composición $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n \to y(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo C^∞. La composición $y \circ x^{-1}$ se denomina *cambio de coordenadas.*

d) Se dice que dos atlas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ son *atlas equivalentes* si su unión $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ es también un atlas sobre M.

e) Se dice que un atlas $\mathcal{A}$ es un *atlas maximal* o *atlas completo* si no puede incluirse en ningún otro.

Se tiene el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN. Todo atlas C^∞ está contenido en un único atlas maximal.

[1] Es muy frecuente encontrar en la definición de variedad diferenciable la condición de que el conjunto M sea un espacio topológico y que las cartas sean homeomorfismos sobre su imagen. No es necesario exigirlo *a priori* porque con la definición se dota a M de una estructura de espacio topológico respecto de la cual las cartas son homemorfismos.

Esto permite dar la definición de variedad: una *variedad diferenciable* es un conjunto M dotado de un atlas maximal. Se llama *dimensión* de la variedad M a la dimensión n del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ donde toman valores las cartas. Como atlas equivalentes están contenidos en el mismo atlas maximal y atlas no equivalentes lo están en diferentes maximales, se puede decir que una variedad diferenciable es una clase de equivalencia de atlas.

En el caso complejo, se definen las *variedades holomorfas* de igual modo que como acabamos de hacer con las reales, cambiando $\mathbb{R}^n$ por $\mathbb{C}^n$, difeomorfismo C^∞ por difeomorfismo holomorfo. De hecho, como las funciones complejas son también reales, y como podemos identificar $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{R}^{2n}$, resulta que toda variedad holomorfa M es una variedad real, orientable y con dimensión real doble: $\dim_{\mathbb{R}} M = 2\dim_{\mathbb{C}} M$. En toda variedad holomorfa se puede definir un endomorfismo J de cuadrado menos la identidad, que aplica campos vectoriales tangentes en campos vectoriales tangentes. Una tal variedad (M, J) se denomina *casi-compleja* y resulta que toda variedad holomorfa lo es. El recíproco viene dado por el *teorema de Nirenberg-Newlander* [22], que establece que una variedad casi-compleja (M, J) es holomorfa si y sólo si el tensor de Nijenhuis N_J se anula. Este tensor es el operador que a cada par de campos X, Y les hace corresponder

$$N_J(X,Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] + J^2[X, Y],$$

donde el corchete $[\cdot,\cdot]$ denota el corchete de Lie de campos vectoriales. Así las variedades holomorfas son variedades reales casi-complejas, dotadas de un operador N_J que satisface la relación que acabamos de establecer. Dicho de otro modo, ¡nos podemos olvidar de los números complejos!

El problema que queremos presentar (en el mismo sentido que [29], aunque sin que allí aparezca la última cuestión de las tres que nos vamos a plantear) es el de si se pueden introducir variedades diferenciables sobre un conjunto numérico $\mathbb{A}$, de los presentados en las secciones anteriores. Una $\mathbb{A}$-variedad estaría dada por un atlas en el que los dominios de las cartas fueran abiertos $U \subset \mathbb{A}^n$ y los cambios de carta $\mathbb{A}$-difeomorfismos. Con mayor concreción, sea $\mathbb{A}$ un álgebra real asociativa. ¿Tiene sentido hacer cálculo diferencial respecto de $\mathbb{A}$? ¿Y variedades diferenciables? Para ello debemos responder las siguientes cuestiones:

- ¿Qué significa que una función f es $\mathbb{A}$-holomorfa respecto un álgebra $\mathbb{A}$?
- ¿Qué son las variedades modeladas sobre un álgebra?
- ¿Existe un teorema de Nirenberg-Newlander para cualquier álgebra?

La respuesta a la primera pregunta es que la función es $\mathbb{A}$-holomorfa respecto un álgebra $\mathbb{A}$, conmutativa, si la matriz jacobiana es una matriz de las de la representación real del álgebra. En el caso complejo esto conduce directamente a las famosas *condiciones de Cauchy-Riemann*: Sea $f(z) = (f_1(u,v), f_2(u,v))$ una función de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$; entonces la matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix}$$

es una matriz de las de la representación real, esto es, de la forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

si y sólo si $\frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{\partial f_2}{\partial v}$, $\frac{\partial f_2}{\partial u} = -\frac{\partial f_1}{\partial v}$, esto es, si y sólo si se verifican las condiciones de Cauchy-Riemann. En [14] se estudian las aplicaciones $\mathbb{A}$-diferenciables y $\mathbb{A}$-analíticas.

De modo similar a las variedades casi-complejas se introducen otras variedades dadas por una estructura polinómica. En particular se tienen:

- *Variedad casi-producto* como la dotada de un endomorfismo J tal que $J^2 = 1$, y *casi-paracompleja* si $\dim J_+ = \dim J_-$, siendo J_+ y J_- los autoespacios asociados a los autovalores $+1$ y -1 respectivamente. Se dice que la variedad es *localmente producto* (resp., *paracompleja*) si $N_J = 0$ y es casi-producto (resp., casi-paracompleja). La condición $N_J = 0$ significa que las distribuciones dadas por los autoespacios de ± 1 son integrables, como fácilmente se demuestra a partir del *teorema de Frobenius*. Las variedades paracomplejas están dotadas de dos distribuciones transversas. Respecto a la existencia de un *teorema à la Nirenberg-Newlander* hay que señalar que, en 2003, Gadea, Grifone, y Muñoz Masqué probaron en [13] que una variedad casi-paracompleja es $\mathbb{B}$-holomorfa si y sólo si $N_J = 0$, siendo $\mathbb{B}$ el álgebra de los números dobles. Del mismo modo que en el caso complejo, existen las condiciones de para-Cauchy-Riemann, establecidas por Kaneyuki y Kozai en 1985 (véase [20]), y que podemos ver sencillamente con la condición de que la matriz jacobiana es de las de la representación real del álgebra de los números dobles.
- *Variedad casi-tangente* como la dotada de un endomorfismo J tal que $J^2 = 0$. Tienen una distribución globalmente definida dada por la imagen de J que coincide con su núcleo, que es de dimensión igual a la mitad de la variedad. El fibrado tangente de toda variedad real es una variedad casi-tangente, lo que justifica el nombre que reciben (véanse [15] y [16]).

Llamaríamos *variedades modeladas sobre un álgebra* a aquéllas en que los cambios de carta son $\mathbb{A}$-difeomorfismos. Respecto a la existencia de un teorema de Nirenberg-Newlander para cualquier álgebra, la respuesta es negativa, hasta la fecha. El propio teorema en el caso complejo es de muy difícil demostración.

Entre las álgebras que hemos presentado y las estructuras polinómicas en variedades no sólo existe un paralelismo formal. Por poner un ejemplo célebre, tomemos el de las variedades dotadas de tres distribuciones; se denominan variedades dotadas de un 3-*web*. Fueron introducidas por Blaschke en los años veinte del pasado siglo. Tales variedades admiten una estructura de tipo biparacomplejo, es decir, tres endomorfismos I, J, K con relaciones $K = IJ$, $I^2 = J^2 = -K^2 = 1$, esto es, con las mismas relaciones que los cocuaterniones (véanse, por ejemplo, [12] y [27]). Por la última relación son orientables. Así, por ejemplo, resulta inmediato que la banda de Möbius no puede dotarse de tres distribuciones, aunque sí de dos. Existe una literatura muy activa en variedades con diferentes tipos de estructuras que semejan las álgebras numéricas que hemos presentado: en vez de $\mathbb{A} = \mathbb{R}^n$ con una estructura de álgebra que define diferentes relaciones entre los elementos de la base, se tiene el conjunto de campos tensoriales de tipo $(1, 1)$, esto es, de endomorfismos del fibrado tangente, que a campos vectoriales asocian campos vectoriales, con idénticas relaciones a las dadas en el álgebra $\mathbb{A}$.

8. Conclusiones

Quizá la primera conclusión que podamos sacar sea un tanto desalentadora. Después de este vistazo, ¿qué es un número? El Diccionario de la Real Academia, en sus primeras acepciones, dice:

1. m. *Mat.* Expresión de una cantidad con relación a su unidad.
2. m. Cantidad de personas o cosas de determinada especie.

El número como cardinal y como medida de una magnitud parece ser la noción común. Los números naturales responden primeramente a la idea de cardinal. Los reales satisfacen la condición de medida de la magnitud, cosa que ya no cumplen los complejos, que, como hemos indicado, no tienen la relación de orden, ni los p-ádicos, que no tienen la propiedad arquimediana. A los complejos, que tienen las mejores propiedades algebraicas, al constituir un cuerpo conmutativo algebraicamente cerrado, también los denominamos números. A las extensiones que vamos haciendo de los reales, mediante álgebras de las que los reales son subálgebra, podríamos también llamarlas de números. Por ejemplo, los propios complejos o los cuaterniones, o los números dobles y los duales, que cuando restringen su suma y su producto a los números reales coinciden con los que éstos tienen. Pero no deberíamos decir que son números los de otras álgebras que no extienden al cuerpo real. Por ejemplo, el espacio tridimensional con el producto vectorial es un álgebra, de la que el cuerpo real no es subálgebra, porque el producto vectorial restringido a la recta real es idénticamente nulo.

Una segunda conclusión es que números y geometría van estrechamente unidos. Las propiedades algebraicas de los espacios, las de «sus números», deciden las propiedades geométricas de los propios espacios. Así, por ejemplo, una variedad modelada sobre los números dobles tiene una estructura casi-producto, esto es, está dotada de dos distribuciones transversas en todo punto. También determinan las propiedades geométricas de algunos de sus subconjuntos especiales, como les pasaba a las esferas, cuyas propiedades geométricas dependen esencialmente de las algebraicas del espacio euclídeo del que son hipersuperficies. Además, trabajar con números distintos de los reales sirve también para entender mejor los conceptos geométricos, aclarando cuáles son propios del cuerpo con el que se trabaja y cuáles son puramente geométricos.

La tercera conclusión es muy común a las matemáticas: cuando en matemáticas se generaliza un concepto se pueden tomar diferentes opciones, según qué propiedad se quiera generalizar. Podemos resumir las diferentes extensiones que hemos indicado en el texto mediante este diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{cardinales} & & & & & & \text{hipercomplejos} & & \\ \uparrow & & & & & & \uparrow & & \\ \mathbb{N} & \subset & \mathbb{Z} & \subset & \mathbb{Q} & \subset & \mathbb{R} & \subset & \mathbb{C} \\ & & \downarrow & & \cap & & \downarrow & & \\ & & \text{cuerpos finitos} & & \mathbb{Q}_p & & \text{otras álgebras} & & \\ & & & & \cap & & & & \\ & & & & \mathbb{C}_p & & & & \end{array}$$

Como observación final, indiquemos que no hemos mencionado nada de variedades de dimensión infinita ni de la geometría diferencial discreta, ámbitos que exceden del propósito de esta nota.

El autor desea destacar la muy cuidadosa lectura del artículo por parte del revisor, y desea asimismo agradecerle todas sus sugerencias.

Referencias

[1] R. Abłamowicz y G. Sobczyk (editores), *Lectures on Clifford (geometric) algebras and applications*, Birkhäuser, 2004.

[2] F. Antonuccio, Semi-complex analysis and mathematical physics, *arXiv:gr-qc/9311032v2*.

[3] M. F. Atiyah e I. G. MacDonald, *Introducción al álgebra conmutativa*, Editorial Reverté, Barcelona, 1980.

[4] J. Baez, The octonions, *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)* **39** (2002), no. 2, 145–205.

[5] D. E. Blair, *Contact manifolds in Riemannian geometry*, Lecture Notes in Mathematics **509**, Springer, Berlín, 1976.

[6] R. Camarero, *Álgebras reales. Endomorfismos sobre el fibrado tangente*, Trabajo dirigido, Matemáticas, Universidad de Cantabria, 2006.

[7] R. Camarero, F. Etayo, C. G. Rovira y R. Santamaría, From algebras to manifolds, *International Congress of Mathematicians* (Madrid, 2006), Abstracts, 42–43, Eur. Math. Soc., Zurich, 2007.

[8] J. H. Conway y D. A. Smith, *On quaternions and octonions: their geometry, arithmetic, and symmetry*, A K Peters, 2003.

[9] A. Córdoba, *La saga de los números*, Editorial Crítica, 2006.

[10] F. Etayo, Geometría de las esferas, *Un paseo por la Geometría. Curso 2003-2004*, pp. 65–80, Departamento de Matemáticas de la Universidad del País Vasco.

[11] F. Etayo, La geometría de la representación visual, *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. (Esp.)* **103** (2009), no. 2, 297–303.

[12] F. Etayo y R. Santamaría, Connections functorially attached to almost complex product structures, *Houston J. Math.* **35** (2009), no. 2, 411–434.

[13] P. M. Gadea, J. Grifone y J. Muñoz Masqué, Manifolds modelled over free modules over the double numbers, *Acta Math. Hungar.* **100** (2003), no. 3, 187–203.

[14] P. M. Gadea y J. Muñoz Masqué, A-differentiability and A-analyticity, *Proc. Amer. Math. Soc.* **124** (1996), no. 5, 1437–1443.

[15] J. Grifone, Structure presque-tangente et connexions. I, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **22** (1972), no. 1, 287–334.

[16] J. Grifone, Structure presque-tangente et connexions. II, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **22** (1972), no. 3, 291–338.

[17] E. Hairer y G. Wanner, *Analysis by its history*, Springer, 1996.

[18] G. Ifrah, *Las cifras: historia de una gran invención*, Alianza Editorial, 1987.

[19] G. Ifrah, *Historia universal de las cifras*, Espasa Calpe, 1997.

[20] S. Kaneyuki y M. Kozai, Paracomplex structures and affine symmetric spaces, *Tokyo J. Math.* **8** (1985), no. 1, 81–98.

[21] A. E. Motter y M. A. F. Rosa, Hyperbolic calculus, *Adv. Appl. Clifford Algebras* **8** (1998), no. 1, 109–128.

[22] A. Newlander y L. Nirenberg, Complex analytic coordinates in almost complex manifolds, *Ann. of Math. (2)* **65** (1957), 391–404.

[23] A. Ostrowski, Über einige Lösungen der Funktionalgleichung $\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(xy)$, *Acta Math.* **41** (1916), no. 1, 271–284.

[24] C. Pérez-García y W. H. Schikhof, *Locally convex spaces over non-Archimedean valued fields*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 119, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[25] M. Pitkänen, What p-adic icosahedron could mean? And what about p-adic manifold?, *viXra:1302.0110* (2013).

[26] L. S. Pontriaguin, *Generalizaciones de los números*, Editorial URSS, 2005.

[27] R. Santamaría, *Invariantes diferenciales de las estructuras casi-biparacomplejas y el problema de equivalencia*, Tesis Doctoral, Universidad de Cantabria, 2002.

[28] P. Schneider, *p-adic analysis and Lie groups*, Course in Münster, winter term 2007/08.

[29] V. V. Shurygin, Manifolds over algebras and their application in the geometry of jet bundles, *Uspekhi Mat. Nauk* **48** (1993), no. 2 (290), 75–106; traducción al inglés en *Russian Math. Surveys* **48** (1993), no. 2, 75–104.

[30] N. Steenrod, *The topology of fibre bundles*, Reprint of the 1957 edition, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, 1999.

[31] F. J. Swetz, *From five fingers to infinity: a journey through the history of mathematics*, Open Court, 1994.

[32] J. P. Ward, *Quaternions and Cayley numbers*, Kluwer Ac. Publ., Dordrecht, 1997.

Fernando Etayo Gordejuela, Dpto. de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria

Correo electrónico: `etayof@unican.es`