Facultad de Ciencias

TRANSPORTE PARALELO

(Parallel Transport)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO DE MATEMATICAS

Autor: Sara Ruiz Soto

Director: Fernando Etayo

Febrero - 2018

Índice

1. INTRODUCCIÓN

Las dos principales referencias bibliográficas que vamos a utilizar para este trabajo son [1] y [2]. El libro de J.A Thorpe [1] trata con hipersuperficies de $\mathbb{R}^{n+1}$, que son subconjuntos dados por una única ecuación implícita y los denomina n-superficies porque tienen dimensión una menos que el total, aunque los ejemplos que trata son siempre superficies en $\mathbb{R}^3$. El libro de R.S Millman y G.D Parker [2] ve las superficies con los parches coordenados y utiliza esencialmente que viven en $\mathbb{R}^3$, porque hace uso del producto vectorial. La noción de parche coordenado junto con los cambios diferenciables de cartas, que hemos construido para la esfera como ejercicio ilustrativo, sirve para estudiar variedades abstractas. Debido a que en este caso queremos enfatizar que una superficie está formada por parches, ahora nos referiremos a una superficie simple exclusivamente como un parche coordenado, es decir, consideraremos la superficie como una colección de superficies simples que se superponen, lo cual hemos estudiado en el grado.
En este trabajo tratamos superficies de dimensión 2 inmersas en $\mathbb{R}^3$ con los dos puntos de vista: implícitas y paramétricas. El de implícitas va bien para generalizar a hipersuperficies de $\mathbb{R}^{n+1}$ y el de paramétricas para variedades abstractas.

Es importante aclarar que todos los resultados que vamos a estudiar en este trabajo son locales y además, estas dos formas de definición de superficie son equivalentes localmente, lo cual nos permitirá clarificar y entender mejor algunas propiedades y resultados utilizando ambas definiciones, un resultado muy importante que quedará demostrado más adelante.

Comenzamos con una pequeña motivación sobre el tema, explicando por qué y para qué la necesidad de definir los campos vectoriales paralelos en superficies a lo largo de curvas. En el capítulo 3 estudiaremos las superficies de forma implícita y paramétrica, demostrando la equivalencia entre ambas (Teorema 3.6). En la sección siguiente entramos en el tema central del trabajo, campos vectoriales, correspondiente al capítulo 4. Describimos los campos vectoriales a lo largo de curvas, sus distintas propiedades y tipos, llegando a enlazar con la derivada covariante y campos vectoriales paralelos para introducir el siguiente capítulo correspondiente a el transporte paralelo, en el cual demostramos que es una isometría entre los planos tangentes a dos puntos de la superficie unidos por una curva (Teorema 5.3) y su aplicación con diferentes figuras explicativas. En este mismo capítulo también estudiaremos tanto la aplicación a las curvas geodésicas como la dependencia del camino escogido para dicho transporte paralelo, una aplicación de holonomía y una interpretación geométrica que queda ilustrado con diferentes figuras para su fácil compresión y que nos

permitirá cerrar este trabajo.
Es importante observar que vamos a llevar como ejemplo básico durante todo el trabajo la geometría de la esfera. Además, a lo largo de todo este estudio hemos modificado y simplificado demostraciones, relacionando las diferentes notaciones que consideran las referencias utilizadas y añadiendo diversas figuras explicativas que hacen más interesante y sencillo su aprendizaje.
También hemos resuelto algunos ejercicios propuestos en los libros de referencia, tratando de conseguir que el tema del trabajo quede expuesto de un modo completo y suficientemente autocontenido. El nivel de partida que asumimos es el de las asignaturas obligatorias de Geometría y Topología del grado de Matemáticas que he cursado.

El trabajo tiene como objetivo fundamental la plena comprensión de la noción de transporte paralelo en una superficie y su relación con la noción de geodésica. Estas nociones son básicas en Geometría Diferencial Superior, en la Teoría de Conexiones en Variedades.

Resumen:

Este trabajo de fin de grado contiene una introducción al transporte paralelo de vectores a lo largo de curvas definidas en superficies. Consideramos superficie de dimensión 2 inmersas en $\mathbb{R}^3$ que aparecen definidas tanto en forma implícita como en forma paramétrica, ya que estas dos formas de definición son equivalentes localmente como se prueba en el Teorema 3.6. Se estudian diferentes propiedades, tipos y aplicaciones del transporte paralelo en diferentes situaciones como curvas geodésicas, dependencia del camino escogido, holonomía, entre otros. Además, se prueban diferentes importantes resultados de aplicación de dicho transporte que quedan interpretados e ilustrados con diversas figuras para facilitar el estudio.

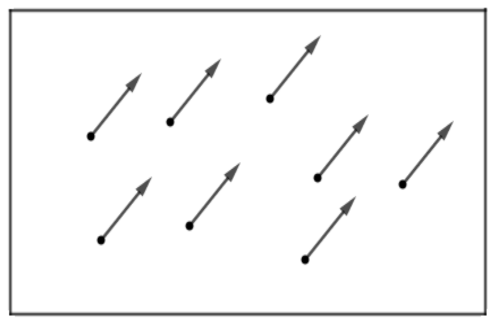
Abstract:

This work contains an introduction to the teory of parallel transport of vectors along curves defined on surfaces. We consider a surface of dimension 2 immersed in $\mathbb{R}^3$ that is defined both implicitly and in parametric form, since these two forms of definition are locally equivalent as tested in Theorem 3.6. Different properties, types and applications of parallel transport are studied in different situations such as geodesic curves, dependence on the chosen path, holonomy, among others. In addition, different important results of application of this transport are tested, interpreted, and illustrated with various figures to facilitate the study.

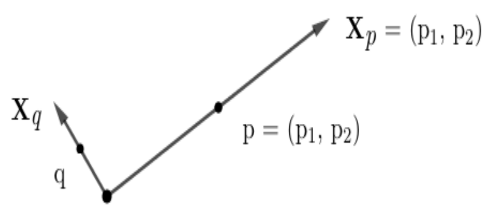
Palabras clave: *superficies, campos vectoriales, transporte paralelo, geodésicas.*

2. MOTIVACIÓN

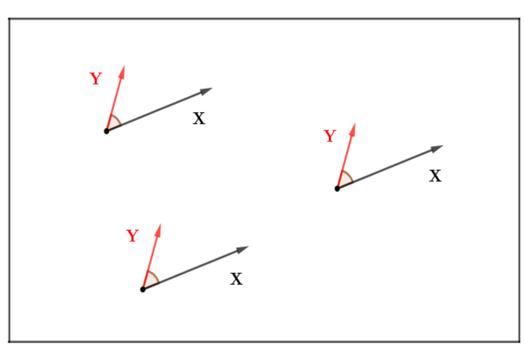
Si tomamos en el plano $\mathbb{R}^2$ el mismo vector en todos los puntos tenemos un campo vectorial, que decimos que es paralelo:



Los campos paralelos en el plano son los que tienen derivada nula. Si tomamos por ejemplo el campo radial en el cual todos los vectores son de la forma $X_{(x,y)}$ = (x,y) para todo punto p = (x,y), tenemos que su derivada es distinta de (0,0) y observamos que no se trata de un campo vectorial paralelo:

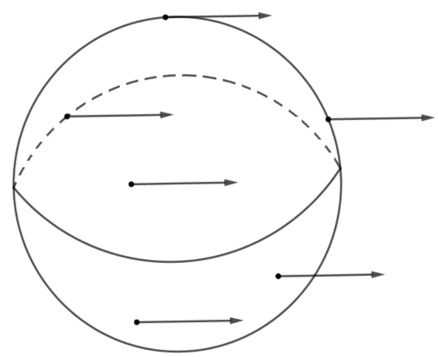


Si tenemos dos campos vectoriales paralelos en $\mathbb{R}^2$:



Observamos que $||\mathbf{X}_p||$, $||\mathbf{Y}_p||$, $\mathbf{X}_p \hat{,} \mathbf{Y}_p$ son independientes del punto p que tomemos.

Si tratamos de hacer esto en superficies y tomamos por ejemplo la esfera S^2, ¿qué sería un campo paralelo? Si actuamos de manera análoga al plano obtenemos la siguiente figura en la cual podemos ver que el campo vectorial obtenido no es tangente a la superficie:



No podemos definir un campo vectorial de norma constante y que además sea tangente a la esfera, ya que todo campo vectorial sobre esta superficie debe tener algún cero. Es por eso que en superficies se debe definir campos paralelos a lo largo de cada curva. Esta es la idea de transporte paralelo a lo largo de una curva, pero ¿dependerá el transporte de la curva escogida para unir dos puntos dados? Sí, como veremos en este trabajo.

3. SUPERFICIES

Vamos a empezar estudiando un ejemplo que nos permita observar la equivalencia local entre una superficie definida de forma implícita y de forma paramétrica. Cogemos el caso concreto de la esfera, que es una superficie conocida lo que nos facilitará el estudio, y el punto p= (0,0,1) para estudiar su geometría local:

Vamos a calcular el plano tangente a dicha superficie en el punto p y observar que, tanto al ser definida como superficie en forma implícita como superficie simple, obtenemos el mismo plano tangente en dicho punto.

Consideramos la esfera escrita de forma implícita S = $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Por lo tanto, podemos escribir S = $f^{-1}(0)$ con f: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido como $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.

Vamos a calcular el plano tangente que pasa por dicho punto p. Calculamos el gradiente de f en dicho punto, que es un vector de la forma:

$$(\nabla f)(\text{p}) = ((\partial f/\partial x)_p,\ (\partial f/\partial y)_p,\ (\partial f/\partial z)_p)$$

$$\nabla f = (\text{2x, 3y, 2z}), \text{ luego } (\nabla f)(\text{p}) = (0{,}0{,}2)$$

y el plano tangente en p, T_p, es de la forma:

$$T_p = \{(\tfrac{\partial f}{\partial x})_p(x - p_1) + (\tfrac{\partial f}{\partial y})_p(y - p_2) + (\tfrac{\partial f}{\partial z})_p(z - p_3) = 0\} =$$
$$= \{0(x - p_1) + 0(y - p_2) + 2(z - p_3) = 0\} = \{z - p_3 = 0\} = \{z = p_3\} =$$
$$\{z = 1\}.$$

Ahora, hallamos la expresión paramétrica de la esfera alrededor del punto p = (0,0,1). Aplicamos el teorema de la función implícita: Sea f: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido como $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Como $(\frac{\partial f}{\partial z})_p \neq 0$, podemos escribir la tercera variable z como función implícita de las otras variables, y por lo tanto, existe U entorno de p $\in f^{-1}(0)$ de modo que $(f^{-1}(0)) \cap$ U = $\{(x, y, h(x, y)\}$ con h: W $\longrightarrow \mathbb{R}$ siendo W un abierto contenido en $\mathbb{R}^2$ tal que h(p_1,p_2) = p_3, es decir, h(0,0) = 1

Y, podemos definir una superficie simple F tal que F: W $\longrightarrow \mathbb{R}^3$ tomando F(x,y) = (x,y, h(x,y)) $\subset f^{-1}(0)$ (Superficie en forma implícita).

Una vez definida la superficie simple, vamos a calcular el plano tangente en p. Calculamos el vector normal N, de la forma N = $\frac{F_x \times F_y}{||F_x \times F_y||}$.

F_x = (1, 0, $\partial h/\partial x$) y F_y = (0, 1, $\partial h/\partial y$), por lo tanto, $F_x \times F_y$ = (-$\partial h/\partial x$, -$\partial h/\partial y$, 1).

Calculamos h. Sea (x,y, h(x,y)) $\in f^{-1}(0)$; Como f(x,y,h(x,y)) = 0 entonces $x^2 + y^2 + h^2(x,y) - 1 = 0$, y por lo tanto, h^2(x,y) = $1 - x^2 - y^2$ y h(x,y) = $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, ya que estamos en el punto p y por lo tanto tiene que ser positiva.
Una vez calculada h, podemos obtener N = (-$\frac{\partial h}{\partial x}$, -$\frac{\partial h}{\partial y}$, 1)

$\frac{\partial h}{\partial x}$ = -$\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$
$\frac{\partial h}{\partial y}$ = -$\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

Ahora, conocemos el valor de h = h(x,y) en el punto (p_1, p_2) = (0,0), y por lo tanto, $\partial h(p_1, p_2)/\partial x = 0$ y $\partial h(p_1, p_2)/\partial y = 0$, por lo que el valor del vector normal en el punto p es:

$$\text{N(p)} = \frac{(0,0,1)}{||(0,0,1)||} = (0,\ 0,\ 1)$$

y el plano tangente en p, T_p, viene dado de la siguiente forma:

$$T_p = \{\overrightarrow{N} \cdot (\overrightarrow{X} \text{ - p}) = 0\ \}, \text{ por lo tanto,}$$

$$T_p = \{(0,0,1) \cdot ((x,y,z) - (0,0,1)) = 0\}$$

$$T_p = \{(0,0,1) \cdot (x,y,z-1) = 0\}$$

$$T_p = \{z - 1 = 0\} = \{z = 1\}$$

como habíamos obtenido en el caso de superficie definida de forma implícita.

Una vez estudiado un ejemplo concreto para observar esta equivalencia local, vamos a tratarlo de forma general aplicable a toda superficie y utilizarlo para estudiar los diferentes resultados locales de los que consta este trabajo.

Además, es importante aclarar que vamos a trabajar con funciones y campos vectoriales que son de clase C^∞, es decir, funciones f: U $\longrightarrow \mathbb{R}$ (U conjunto abierto en $\mathbb{R}^3$) cuyas derivadas parciales de todos los órdenes existen y son continuas. Una función f: U $\longrightarrow \mathbb{R}^k$ es C^∞ si cada componente de la función f_i: U $\longrightarrow \mathbb{R}$ (f(p)=(f_1(p), ... ,f_k(p)) para p$\in$ U) es de clase C^∞, y un campo vectorial es de clase C^∞ en U si la función asociada X: U $\longrightarrow \mathbb{R}^3$ es de clase C^∞. También trataremos con funciones f: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que son de clase C^k si todas sus derivadas parciales hasta el orden k existen y son continuas.

La notación que vamos a considerar a lo largo de todo el trabajo será la siguiente:
Las derivadas ordinarias se denotarán $\dot{\alpha}$, $\ddot{\alpha}$, $\dot{\mathbf{X}}$, $\ddot{\mathbf{X}}$, ... , para indicar $\mathrm{d}\alpha/\mathrm{dt}$, $\mathrm{d}^2\alpha/\mathrm{dt}^2$, $\mathrm{d}\mathbf{X}/\mathrm{dt}$, $\mathrm{d}^2\mathbf{X}/\mathrm{dt}^2$, ...
Las derivadas parciales se denotarán con subíndices $\boldsymbol{x}_{ij} = \partial^2 \boldsymbol{x}/\partial \boldsymbol{x}^i \partial \boldsymbol{x}^j$, ...
Y además todas las funciones, campos vectoriales, etc., se entenderán de clase C^∞.

3.1. Superficie en forma implícita

Definición 3.1. *Una* ***superficie definida de forma implícita*** *en* $\mathbb{R}^3$ *es un conjunto no vacío* $\mathrm{S} \subset \mathbb{R}^3$ *de la forma* $\mathrm{S} = f^{-1}(c)$ *donde* f: $\mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, *siendo* U *un abierto en* $\mathbb{R}^3$, *es una función* C^∞ *con la propiedad de que* $\nabla f(p) \neq 0$ *para todo* $p \in S$, *con* $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$.

La inclusión de la propiedad anterior, $\nabla f(\mathrm{p}) \neq 0$ para todo $\mathrm{p} \in \mathrm{S}$, se explica a partir del siguiente lema:

Lema 3.2. *El gradiente de* f *en un punto* $\mathrm{p} \in f^{-1}(c)$ *es ortogonal a todos los vectores tangentes a* $f^{-1}(c)$ *en* p.

Demostración:

Cada vector tangente a f^{-1}(c) en p es de la forma $\dot{\alpha}(t_0)$ para cada curva parametrizada α: I $\longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $\alpha(t_0) = \mathrm{p}$, donde $\dot{\alpha}$ denota la derivada, e Imagen(α) $\subset f^{-1}$(c). Como Imagen(α) $\subset f^{-1}$(c) resulta que f(α(t)) = c para todo t $\in$ I, así que, por la regla de la cadena, tenemos:

$$0 = \frac{d}{dt}\,(f \circ \alpha)(t_0) = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z \end{pmatrix} (\alpha(t_0)) \begin{pmatrix} d\alpha_1/dt \\ d\alpha_2/dt \\ d\alpha_3/dt \end{pmatrix} (t_0) =$$
$$(\nabla f)(\alpha(t_0)) \cdot \dot{\alpha}(t_0) = (\nabla f)(\mathrm{p}) \cdot \dot{\alpha}(t_0)$$

donde $\cdot$ hace referencia al producto escalar en $\mathbb{R}^3$ y $\dot{\alpha}(t_0)$ está expresado como vector fila. $\square$

Si ∇f(p) = 0, este lema no nos dirá nada; sin embargo como ∇f(p) $\neq$ 0,

el lema nos asegura que el conjunto de todos los vectores tangentes a S en p está contenido en el subespacio vectorial bidimensional $[\nabla f(p)]^{\perp}$ de $\mathbb{R}^3_p$ que consta de todos los vectores ortogonales a ∇f(p), y donde $\mathbb{R}^3_p$ hace referencia al espacio vectorial tridimensional de vectores en p. En consecuencia, la anterior propiedad asegura la existencia del plano tangente en cada punto de la superficie dada en implícitas.
Un punto p $\in \mathbb{R}^3$ tal que ∇f(p) $\neq 0$ se llama punto regular de f.

3.2. Superficie en forma paramétrica

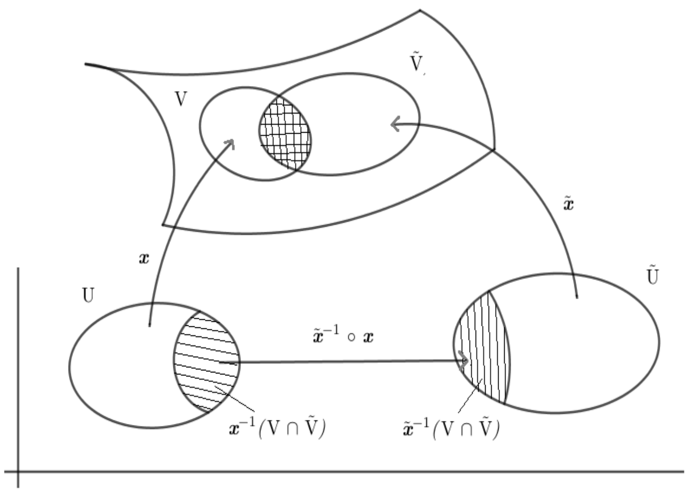
Definimos la superficie de forma paramétrica como una colección de superficies simples que se superponen. Nos referimos a una superficie simple también como un parche coordenado:

Definición 3.3. *Un* ***parche coordenado*** *de clase C^k, o* ***superficie simple****, es una función inyectiva de clase C^k de la forma $\boldsymbol{x}$: U $\longrightarrow \mathbb{R}^3$ para algún k $\geq$ 1, donde* U *es un subconjuto abierto de $\mathbb{R}^2$ (es decir, que sobre cada punto de* U *hay un pequeño disco que está contenido en* U*) con coordenadas u^1 y u^2 tal que $(\partial \boldsymbol{x}/\partial u^1) \times (\partial \boldsymbol{x}/\partial u^2) \neq 0$ en* U *y $\boldsymbol{x}$: $U \longrightarrow \boldsymbol{x}$(*U*) es homeomorfismo.*

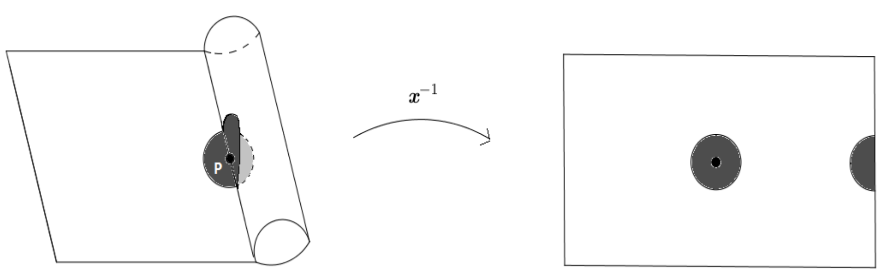
Sea $f(u^1, u^2)$ una función de clase C^k definida en un conjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$, f: U $\longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $\boldsymbol{x}(u^1, u^2) = (u^1, u^2, f(u^1, u^2))$.
Como $f_i = \partial f/\partial u^i$, $(\partial \boldsymbol{x}/\partial u^1) \times (\partial \boldsymbol{x}/\partial u^2) = (1, 0, f_1) \times (0, 1, f_2) = (-f_1, -f_2, 1) \neq 0$, entonces $\boldsymbol{x}$ es una superficie simple ó parche coordenado de clase C^k. Se trata concretamente del grafo de una función y es frecuentemente llamado **superficie de Monge** o **grafo de la función**.

Definición 3.4. *Una* ***superficie regular*** M $\subset \mathbb{R}^3$ *de clase C^k es un subconjunto tal que para cada punto* p $\in$ M *existe una superficie simple $\boldsymbol{x}$:* U $\longrightarrow$ $\boldsymbol{x}$(U) $\subset$ V $\subset$ M *siendo* V *un entorno de* p *en* M*. Además, si $\boldsymbol{x}$:* U $\longrightarrow$ V $\subset$ M*, $\tilde{\boldsymbol{x}}$:* $\tilde{\text{U}} \longrightarrow \tilde{\text{V}} \subset$ M *son superficies simples tales que* V $\cap \tilde{\text{V}} \neq \emptyset$*, entonces $\tilde{\boldsymbol{x}}^{-1} \circ \boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{x}$(V $\cap \tilde{\text{V}}$) $\longrightarrow \tilde{\boldsymbol{x}}$(V $\cap \tilde{\text{V}}$) es un difeomorfismo.*

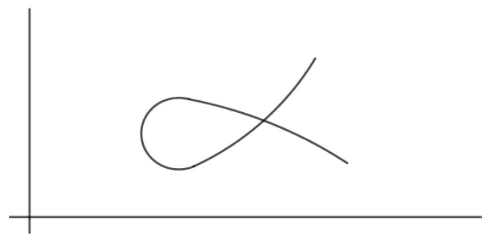
En el caso de superficies en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ la segunda condición se puede deducir de la primera. Así se hace en el libro de do Carmo ([3]), en el cual en la definición de superficie regular correspondiente a las páginas 64-65 no aparece explícitamente la segunda condición, pero se demuestra que las condiciones de la definición de superficie regular prueban que los cambios de carta son diferenciables más adelante en las páginas 80, 81 y 82 en la sección 2.3. De hecho, para definir variedades diferenciables abstractas de cualquier dimensión se toma una familia de cartas cuyos dominios recubran todo el conjunto y cuyos cambios de carta sean diferenciables. En este caso es necesario imponer esa segunda condición, porque inicialmente el conjunto al que se le dota de estructura de variedad diferenciable no tiene ninguna estructura, y por lo tanto no está inmerso en ningún espacio ni tiene la topología heredada.



Observación 3.5. *La función que envía el rectángulo abierto a la superficie en la figura siguiente no define una superficie regular, ya que la inversa de dicho parche coordenado no es continua en todo punto de la superficie como podemos observar. Cualquier entorno del punto p se transforma de forma discontinua por $\boldsymbol{x}^{-1}$:*



Sin embargo, en teoría de curvas diferenciables la siguiente figura es considerada una curva regular, ya que no se exige la inyectividad de la función:



En la práctica se suele dar una colección de superficies simples o parches coordenados de manera que cada p $\in$ M esté en al menos uno de los parches. Estos parches cubren a toda la superficie regular M.

Podemos observar el siguiente ejemplo de la esfera como superficie regular recubierta por seis superficies simples. Basta coger en todos los casos U = $\left\{x^2 + y^2 \leq 1\right\}$. Tomamos cada **superficie simple** $\boldsymbol{x}$: U $\longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{V} = \boldsymbol{x}$(U) y su **inversa** en cada uno de los casos:

$\boldsymbol{x}_1(u^1,u^2)=(u^1,\ u^2,\ \sqrt{1-(u^1)^2-(u^2)^2})$, $V_1 = \mathbb{S}^2 \cap \{z > 0\}$: hemisferio superior, $(\boldsymbol{x}_1)^{-1}$(x,y,z)=(x,y)

$\boldsymbol{x}_2(u^1,u^2)=(u^1,\ u^2,\ -\sqrt{1-(u^1)^2-(u^2)^2})$, $V_2 = \mathbb{S}^2 \cap \{z < 0\}$: hemisferio inferior, $(\boldsymbol{x}_2)^{-1}$(x,y,z)=(x,y)

$\boldsymbol{x}_3(u^1,u^2)=(u^1,\ \sqrt{1-(u^1)^2-(u^2)^2},\ u^2)$, $V_3 = \mathbb{S}^2 \cap \{y > 0\}$: hemisferio derecho, $(\boldsymbol{x}_3)^{-1}$(x,y,z)=(x,z)

$\boldsymbol{x}_4(u^1,u^2)=(u^1,\ -\sqrt{1-(u^1)^2-(u^2)^2},\ u^2)$, $V_4 = \mathbb{S}^2 \cap \{y < 0\}$: hemisferio izquierdo, $(\boldsymbol{x}_4)^{-1}$(x,y,z)=(x,z)

$\boldsymbol{x}_5(u^1,u^2)=(\sqrt{1-(u^1)^2-(u^2)^2},\ u^1,\ u^2)$, $V_5 = \mathbb{S}^2 \cap \{x > 0\}$: hemisferio anterior, $(\boldsymbol{x}_5)^{-1}$(x,y,z)=(y,z)

$\boldsymbol{x}_6(u^1,u^2)=(-\sqrt{1-(u^1)^2-(u^2)^2},\ u^1,\ u^2)$, $V_6 = \mathbb{S}^2 \cap \{x < 0\}$: hemisferio posterior, $(\boldsymbol{x}_6)^{-1}$(x,y,z)=(y,z)

Podemos comprobar que los cambios de carta son ciertamente difeomorfismos.

Por ejemplo, veámoslo con $V_1 \cap V_3 = \mathbb{S}^2 \cap \{y > 0, z > 0\}$. Entonces resulta que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1^{-1}(V_1 \cap V_3) = \{(x,y) \in U : y > 0\} = \big\{(u^1,u^2) \in U : u^2 > 0\big\} \\ \boldsymbol{x}_3^{-1}(V_1 \cap V_3) = \{(x,z) \in U : y > 0\} = \big\{(u^1,u^2) \in U : u^2 > 0\big\} \end{aligned}$$

Los cambios de carta son

$$\alpha(u^1,u^2) = (\boldsymbol{x}_3^{-1} \circ \boldsymbol{x}_1)(u^1,u^2) = \boldsymbol{x}_3^{-1}(u^1,u^2,\sqrt{1-(u^1)^2-(u^2)^2}) = \\ (u^1,\sqrt{1-(u^1)^2-(u^2)^2})$$

$$\beta(u^1,u^2) = (\boldsymbol{x}_1^{-1} \circ \boldsymbol{x}_3)(u^1,u^2) = \boldsymbol{x}_1^{-1}(u^1,\sqrt{1-(u^1)^2-(u^2)^2},\, u^2) = \\ (u^1,\sqrt{1-(u^1)^2-(u^2)^2})$$

Las aplicaciones α y β son diferenciables e inversas entre sí. En efecto, resulta

$$(\beta \circ \alpha)(u^1,u^2) = \beta(u^1,\sqrt{1-(u^1)^2-(u^2)^2}) = \\ (u^1,\sqrt{1-(u^1)^2-(\sqrt{1-(u^1)^2-(u^2)^2})^2}) = (u^1,u^2)$$

y análogamente en el otro caso.

Vemos que el primer parche coordenado definido $\boldsymbol{x}_1$ corresponde en efecto al ejemplo utilizado al principio de la sección para la obtención del plano tangente.
Una de las razones principales por las cuales definimos la superficie de esta forma es porque así podemos estudiar las propiedades locales de las superficies, que son las que vamos a tratar en este trabajo. Además, debemos entenderlas antes de considerar las propiedades globales.
Por esta razón normalmente vamos a suponer que estamos en un parche coordenado, que es equivalente a mirar sólo una pequeña parte de una superficie. Un problema que se plantea al quedarse en un parche de coordenadas es que cualquier definición que parezca depender de las coordenadas tendrá que ser verificada en cuanto a su forma en otro parche de coordenadas para determinar si el concepto es realmente geométrico (es decir, independiente del parche de coordenadas). Por ejemplo, en el caso del plano tangente en un punto es igual para cualquier parche de coordenadas que se tome, es decir que el plano tangente es un concepto invariante intrínseco, mientras que para el vector normal en un punto es igual exceptuando que posiblemente puedan tener signo opuesto.

Una vez explicadas las dos formas de definición de superficie que consideraremos en este trabajo, vamos a demostrar un importante resultado que nos permite trabajar de manera equivalente para estudiar las diferentes definiciones y resultados en los que queremos centrarnos para toda superficie:

Teorema 3.6. *Sea f:* $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *una aplicación diferenciable tal que para todo punto p* $\in f^{-1}$*(0) es rango* $(f_x(p)\ f_y(p),\ f_z(p)) = 1$*. Entonces* $f^{-1}(0)$ *es una superficie regular.*

Demostración

Por el teorema de la función implícita, para cada punto p $\in f^{-1}(0)$ existen un abierto U del plano y una función g: U $\longrightarrow \mathbb{R}$ de modo que g(p_1, p_2) = p_3 y que f(u,v,g(u,v)) = 0. Entonces se puede definir F: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ como F(u,v) = (u,v,g(u,v)), que es una función inyectiva y con inversa (la proyección). Además F(U) $\subset f^{-1}(0)$ y F_u x $F_v \neq 0$. Así, F: U $\longrightarrow$ F(U) = V es una superficie simple. Como esto se puede hacer en todo punto, $f^{-1}(0)$ es una superficie regular. □

La esfera $\mathbb{S}^2 = \left\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$ es una superficie regular porque la podemos escribir como $f^{-1}(0)$ siendo f(x,y,z) = $x^2 + y^2 + z^2 - 1$, y aplicamos el teorema previo; Sin embargo, si tenemos S = $\left\{z^2 = 0\right\} = f^{-1}(0)$, con $f(x,y,z)$ = z^2, resulta que rango (f_x(p), f_y(p), f_z(p)) = rango (0,0,2z(p)) = 0, para todo p $\in$ S, con lo que el teorema no nos aclara si es superficie regular o no. El teorema establece sólo una condición suficiente (de hecho se trata de una superficie regular, ya que S = $\left\{z^2 = 0\right\} = \{z = 0\}$ es un plano).

4. CAMPOS VECTORIALES

4.1. Campos vectoriales en superficies

Ahora que ya sabemos cuales son las dos formas de definición de superficie que vamos a tratar, entramos en el contenido del trabajo, **campos vectoriales en superficies**. Definimos primero tres conceptos importantes y su respectiva notación:

Definición 4.1. *Un vector en un punto* $\mathrm{p} \in \mathbb{R}^3$ *es un par* $\boldsymbol{v}$*=(*p*,*v*) donde* $v \in \mathbb{R}^3$.

Definición 4.2. *Un campo vectorial* $\mathbf{X}$ *en un abierto* $\mathrm{U} \subset \mathbb{R}^3$ *es una función la cual asigna a cada punto* p *de* U *un vector en ese punto. Por lo tanto:*

$$\mathbf{X}(\mathrm{p}) = (\mathrm{p},\mathrm{X}(\mathrm{p})) \text{ para alguna función } \mathrm{X}\colon \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

Definición 4.3. *Un campo vectorial* $\mathbf{X}$ *definido en una superficie regular* $S \subset \mathbb{R}^3$ *es una función la cual asigna a cada punto* p *en* S *un vector* $\mathbf{X}(\mathrm{p}) \in \mathbb{R}^3_p$ *en* p*, donde* $\mathbb{R}^3_p$ *denota el espacio vectorial de dimensión 3 de vectores en* p.

Si $\mathbf{X}(\mathrm{p})$ es tangente a S (esto es, $\mathbf{X}(\mathrm{p}) \in S_p$) para cada p ∈ S, $\mathbf{X}$ se denomina **campo vectorial tangente** en S, donde S_p denota el plano tangente en S que pasa por el punto p.
Si $\mathbf{X}(\mathrm{p})$ es ortogonal a S (esto es, $\mathbf{X}(\mathrm{p}) \in S_p^{\perp}$) para cada p ∈ S, $\mathbf{X}$ se denomina **campo vectorial normal** en S, donde $S_p^{\perp}$ denota la recta ortogonal en S que pasa por el punto p.

Sean $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ dos campos vectoriales C^∞ definidos en S y f una función de clase C^∞ f: S $\longrightarrow \mathbb{R}$, definimos las siguientes operaciones:

(1) $(\mathbf{X}+\mathbf{Y})_p = \mathbf{X}_p + \mathbf{Y}_p$
(2) $(f\mathbf{X})_p = f(\mathrm{p})\mathbf{X}_p$
(3) $(\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y})_p = \mathbf{X}_p \cdot \mathbf{Y}_p$ para todo punto p en S.

Así, el conjunto de campos vectoriales C^∞ en S tiene estructura de módulo sobre el anillo de funciones C^∞ de S.

4.2. Campos vectoriales a lo largo de una curva

Primero, damos la definición de lo que es una curva parametrizada en $\mathbb{R}^3$ y una curva regular:

Definición 4.4. *Una curva parametrizada α en $\mathbb{R}^3$ es una función de clase C^∞, α: $\mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, donde I es un intervalo abierto en $\mathbb{R}$. Por ser una función C^∞, se entiende que α es de la forma $\alpha(t) = (\alpha_1(t),\ \alpha_2(t),\ \alpha_3(t))$ donde cada α_i es una función C^∞ de valor real en I (con i=1,2 y 3).*

Definición 4.5. *Una **curva regular** en $\mathbb{R}^3$ es una función α: $(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^k para algún $k \geq 1$ tal que $d\alpha/dt \neq 0$ para todo $t \in (a,b)$.*

Nuestro estudio de curvas estará restringido a una cierta clase de curvas en $\mathbb{R}^3$. Además de que queremos que la curva descrita sea una función diferenciable para el cálculo de descripción de su geometría, también queremos evitar ciertas patologías y tecnicismos. Es por eso que normalmente consideraremos curvas regulares.
Si se tiene que $\mathrm{d}\alpha/\mathrm{dt} = 0$ en un intervalo, se tiene que $\alpha(\mathrm{t})$ es una constante en el intervalo, lo cual no es muy interesante geométricamente. Además si $\mathrm{d}\alpha/\mathrm{dt} = 0$ para algún punto, entonces el grafo de α puede tener un punto crítico, lo cual impide utilizar ciertas técnicas que utilizaremos a lo largo de este trabajo. Estas son las razones por las cuales trataremos con curvas regulares.

Una vez definida lo que es una curva, nos va a interesar estudiar la longitud de arco de esta. La justificación de calcular esta longitud es la siguiente: Si se ve $\alpha(\mathrm{t})$ como el camino de una partícula que se mueve en el espacio, entonces $|\mathrm{d}\alpha/\mathrm{dt}|$ es la velocidad de dicha partícula en función del tiempo, y la integral de dicha velocidad debe ser la distancia recorrida por la partícula tal como está en una dimensión, es decir:

Definición 4.6. *La longitud de arco de una curva regular α: $(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es*

$$\int_a^b |\tfrac{d\alpha}{dt}| dt$$

Por lo tanto, la siguiente fórmula es realmente la longitud de una curva en $\mathbb{R}^3$: Sea $\alpha(\mathrm{t}) = (\alpha_1(\mathrm{t}),\ \alpha_2(\mathrm{t})\ ,\alpha_3(\mathrm{t}))$, entonces $|\mathrm{d}\alpha/\mathrm{dt}| = \sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}$, esto es, la longitud de una curva viene dada por $\int_a^b \sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}$ dt.

La longitud de arco nos permite hablar de la reparametrización de curvas, que es una propiedad geométrica que no depende de la parametrización que escojamos de la curva. Además no requiere que α sea una curva regular para que la definición tenga sentido, es suficiente que α sea de clase C^1, sin embargo puede generar problemas respecto al cálculo de la fórmula de la longitud.

Usando el concepto de longitud de arco de una curva, podemos definir un importante camino para la reparametrización de una curva:

Sea α: $(a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular y sea $t_0 \in (a, b)$, tenemos que h(t) $= \int_{t_0}^{t}$ |dα/dt| dt, y s = h(t) es la longitud de arco de la curva α. h es una función biyectiva de (a,b) a algún intervalo (c,d) y es una reparametrización. Una vez hemos hecho este cálculo, decimos que la curva ha sido parametrizada por longitud de arco.

Además, un resultado importante es que cualquier curva puede ser reparametrizada en términos de longitud de arco desde un punto, esto es llamado, reparametrización por longitud de arco. Además, cuando una curva está parametrizada por su longitud de arco se dice que la curva es de velocidad unitaria, es decir, |dα/ds| = 1. Para el siguiente resultado, supondremos que el 0 está en el dominio de α(t) y que la longitud de arco se mide a partir de él:

Corolario 4.7. *Si $\alpha(t)$ es una curva regular y $s = s(t)$ es su longitud de arco, tenemos:*

$$(a)\ s = s(t) = \int_0^t |d\alpha/dt|\,dt$$

$$(b)\ ds/dt = |d\alpha/dt|$$

$$(c)\ d\alpha/dt = (ds/dt)\mathbf{t}$$

$$(d)\ \mathbf{t} = d\alpha/ds$$

donde $\mathbf{t}(s)$ hace referencia al campo vectorial tangente de la curva.

La importancia de que una curva sea parametrizada por la longitud del arco se lleva a cabo en la observación de que su campo vectorial de velocidad es su campo vectorial tangente. Este sentido de reparametrización es una técnica muy útil para configurar el aparato Frenet Serret de una curva velocidad unitaria α(s): {**k**(s), τ(s) **t**(s), **n**(s), **b**(s)}, donde tenemos la siguiente definición:

Definición 4.8. *Sea $\alpha(s)$ una curva de velocidad unitaria:*
*El **campo vectorial normal** de $\alpha(s)$ es el campo vectorial (unitario) definido por: $\mathbf{n}(s) = d\mathbf{t}(s)/ds\ /\mathbf{k}(s)$, siendo $\mathbf{k}(s) = |d\mathbf{t}(s)/ds|$ y $\mathbf{t}(s) = \dot{\alpha}(s)$.*
*El **campo vectorial binormal** de $\alpha(s)$ es $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$.*
*La **torsión** de α es la función de valor real $\tau(s) = - < d\mathbf{b}(s)/ds, \mathbf{n}(s) >$.*

donde $\dot{}$ denota la derivación ordinaria del campo vectorial definido.

Definición 4.9. *Un campo vectorial* $\mathbf{X}$ *a lo largo de una curva parametrizada* α*:* $\mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *es una función que asigna a cada* $\mathrm{t} \in \mathrm{I}$ *un vector* $\mathbf{X}(t)$ *en* $\alpha(t)$*, esto es,* $\mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}^3_{\alpha(t)}$ *para todo* $t \in \mathrm{I}$*, donde* $\mathbb{R}^3_{\alpha(t)}$ *denota el espacio vectorial tridimensional de vectores en* $\alpha(t)$*.*

Nosotros vamos a tratar concretamente con curvas definidas en una cierta superficie S.

Definición 4.10. *Una campo vectorial a lo largo de una curva* α *definida en una superficie* S*,* α*:* $\mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{S}$*, es una función* $\mathbf{X}$ *la cual asigna a cada* $t \in \mathrm{I}$ *un vector tangente* $\mathbf{X}(t)$ *a* S *en* $\alpha(t)$*, siendo* I *un intervalo abierto en* $\mathbb{R}$*.*

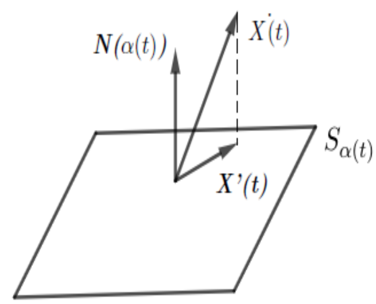
Por ejemplo, sea α(s) una curva de velocidad unitaria en una superficie S:
El campo vectorial $\mathbf{t}$(s) es un campo vectorial a lo largo de α, más concretamente se trata de el **campo vectorial tangente** $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}(\mathrm{s}) = \mathbf{t}(\mathrm{s})$.
Si α(s) es una curva de velocidad unitaria en un parche coordenado $\boldsymbol{x}$ en una superficie M, entonces $\mathbf{S}(\mathrm{s}) = \mathbf{N}(\mathrm{s}) \times \mathbf{t}(\mathrm{s})$ es otro campo vectorial a lo largo de α, donde $\mathbf{N}$ es el vector normal al parche coordenado $\boldsymbol{x}$ en M y $\mathbf{t}$ el tangente a la curva. $\mathbf{S}$ se denomina **vector normal intrínseco**, porque siendo tangente a la superficie es perpendicular a la curva.

Además, como $\mathbf{t}$ y $\mathbf{S}$ son linealmente independientes, cualquier campo vectorial $\mathbf{X}$ a lo largo de α tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{X}(\mathrm{s}) = \mathrm{a}(\mathrm{s})\mathbf{t}(\mathrm{s}) + \mathrm{b}(\mathrm{s})\mathbf{S}(\mathrm{s})$$

4.3. Diferenciación covariante

Sea un campo vectorial $\mathbf{X}$ a lo largo de una curva parametrizada α: $\mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{S}$ en una superficie regular S, se tiene que la derivada $\dot{\mathbf{X}}$ de dicho campo vectorial no es generalmente tangente a S. Sin embargo, se puede obtener un campo vectorial tangente a S proyectando $\dot{\mathbf{X}}(t)$ ortogonalmente sobre $S_{\alpha(t)}$ para cada $\mathrm{t} \in \mathrm{I}$, como podemos ver en la siguiente figura:



Este proceso de diferenciación y luego proyección sobre el espacio tangente a S define una operación con las mismas propiedades que las de diferenciación, excepto que ahora la diferenciación de campos vectoriales tangentes a S produce campos vectoriales tangentes a S.
Esta operación es llamada **diferenciación covariante**.

Definición 4.11. *Sea S una superficie en $\mathbb{R}^3$, sea α: $I \longrightarrow S$ una curva parametrizada en S, y sea* **X** *un campo vectorial tangente a S a lo largo de α de clase C^∞. La derivada covariante de* **X** *es el campo vectorial* **X'** *tangente a S a lo largo de α definido por:*

$$\mathbf{X'}(t) = \dot{\mathbf{X}}(t) - [\dot{\mathbf{X}}(t) \cdot \mathbf{N}(\alpha(t))]\ \mathbf{N}(\alpha(t)),$$

donde **N** *es el campo de vectores normales a S.*

X'(t) *es independiente de la elección de* **N** *o* **-N**, *es decir, dicha elección de la orientación no afecta a la fórmula anterior. Si cambiamos* **N** *por* **-N**, *cambia de signo tanto el vector final como el del producto escalar, y por lo tanto, los dos cambios de signo se compensan entre sí y la expresión es la misma.*

La diferenciación covariante tiene las siguientes propiedades:
Para **X** e **Y** campos vectoriales de clase C^∞ tangentes a S a lo largo de una curva parametrizada α: I $\longrightarrow$ S y f una función de clase C^∞ a lo largo de α,

(1) $(\mathbf{X} + \mathbf{Y})\textbf{'} = \mathbf{X'} + \mathbf{Y'}$
(2) $(f\mathbf{X})\textbf{'} = df/dt\ \mathbf{X} + f\mathbf{X'}$
(3) $d(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})/dt = \mathbf{X'} \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y'}$

Estas propiedades se siguen a partir de las propiedades correspondientes de la diferenciación ordinaria. Los siguientes cálculos verifican las 3 propiedades:

$$\begin{aligned}(\mathbf{X}+\mathbf{Y})\text{'} &= d(\mathbf{X}+\mathbf{Y})/dt - [d(\mathbf{X}+\mathbf{Y})/dt \cdot \mathbf{N}]\mathbf{N} \\ &= d\mathbf{X}/dt + d\mathbf{Y}/dt - [d\mathbf{X}/dt \cdot \mathbf{N} + d\mathbf{Y}/dt \cdot \mathbf{N}]\mathbf{N} \\ &= \mathbf{X}\text{'} + \mathbf{Y}\text{'}\end{aligned}$$

donde d$\mathbf{X}$/dt $\equiv \dot{\mathbf{X}}$ y df/dt es la derivada ordinaria.

$$\begin{aligned}(f\mathbf{X})\text{'} &= d(f\mathbf{X})/dt - [d(f\mathbf{X})/dt \cdot \mathbf{N}]\mathbf{N} \\ &= (df/dt)\mathbf{X} + f(d\mathbf{X}/dt) - [((df/dt)\mathbf{X} + f(d\mathbf{X}/dt)) \cdot \mathbf{N}]\mathbf{N} \\ &= (df/dt)\mathbf{X} + f[d\mathbf{X}/dt - [f(d\mathbf{X}/dt)) \cdot \mathbf{N}]\mathbf{N}] \\ &= (df/dt)\mathbf{X} + f\mathbf{X}\text{'}\end{aligned}$$

ya que $(df/dt)\mathbf{X} \cdot \mathbf{N} = 0$ por ser $\mathbf{X}$ y $\mathbf{N}$ perpendiculares.

$$\begin{aligned}d(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})/dt &= \dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{X} \cdot \dot{\mathbf{Y}} \\ &= [\mathbf{X}\text{'} + (\dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N}] \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{X} \cdot [\mathbf{Y}\text{'} + (\dot{\mathbf{Y}} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N}] \\ &= \mathbf{X}\text{'} \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}\text{'}\end{aligned}$$

ya que $\mathbf{N}$ es perpendicular a S y $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ son tangentes a S.

Aclarando que estamos en los puntos de la curva y cuando derivamos el vector normal a la superficie S respecto de t lo es como funcin compuesta $\mathbf{N}(\alpha(t))$.

La derivada covariante conduce naturalmente a un concepto de paralelismo en una superficie.

4.4. Campo vectoriales paralelos a lo largo de una curva

En $\mathbb{R}^3$, vectores $\mathbf{v}$=(p,v) $\in \mathbb{R}^3_p$ y $\mathbf{w}$=(q,w) $\in \mathbb{R}^3_q$ se denominan paralelos Euclideanos a lo largo de α si $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.
Por lo tanto, un campo vectorial $\mathbf{X}$ a lo largo de una curva parametrizada α: I $\longrightarrow \mathbb{R}^3$ es paralelo Euclideano si $X(t_1) = X(t_2)$ para todo t_1, $t_2 \in$ I, donde $\mathbf{X}$(t) = (α(t),$X(t)$) para todo t $\in$ I.

Esto es, $\mathbf{X}$ es un campo vectorial paralelo Euclideano sobre la curva α si y sólo si $\dot{\mathbf{X}} = 0$, donde $\dot{\mathbf{X}}$ hace referencia a la derivada ordinaria de $\mathbf{X}$.

Además, podemos observar que en este caso la derivada ordinaria coincide con la derivada covariante, ya que se tiene que $\dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{N} = 0$ para todo campo en un plano. Esto justifica que para la definición sobre una superficie cualquiera se tome la derivada covariante, es decir:

Dada una superficie en $\mathbb{R}^3$ y una curva parametrizada α: I $\longrightarrow$ S, un campo vectorial $\mathbf{X}$ de clase C^∞ tangente a S a lo largo de α es llamada paralelo Levi-Civita ó simplemente paralelo, si $\mathbf{X}' = 0$.
Levi-Civita fue un matemático italiano que definió el concepto de conexión en una variedad de Riemann.

Que d$\mathbf{X}$/dt $\equiv \dot{\mathbf{X}}$ sea normal significa que no tiene componente tangencial en el cambio de $\mathbf{X}$ cuando t varía, y por lo tanto $\mathbf{X'} = 0$, ya que como hemos visto en la definición 4.11, $\mathbf{X'}$ es la derivada covariante que hace referencia a la parte tangente de $\dot{\mathbf{X}}$. Intuitivamente, esto significa que un ser "intrínseco" que se encuentra en la superficie no puede detectar ni apreciar ningún cambio en $\mathbf{X}$ a lo largo de la curva. Por lo tanto, éste vería los vectores $\mathbf{X}(t_1)$ y $\mathbf{X}(t_2)$ paralelos si d$\mathbf{X}$/dt es normal, de lo que podemos obtener la siguiente definición:

Definición 4.12. *Un campo vectorial diferenciable* $\mathbf{X}$ *a lo largo de un curva* α *en una superficie* M *es paralelo a lo largo de* α *si* $d\mathbf{X}/dt = \dot{\mathbf{X}}$ *es perpendicular a* M*, sabiendo que* $\mathbf{X}$ *a lo largo de* α *es diferenciable si lo es como función* $\mathbf{X}$*:* $[a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *y* $d\mathbf{X}/dt$ *hace referencia a la derivada ordinaria del campo vectorial.*

Sea M una superficie en $\mathbb{R}^3$ y p $\in$ M. Si X e Y son dos vectores tangentes a M en p. En términos de un parche coordenado $\boldsymbol{x}$: U $\longrightarrow \mathbb{R}^3$ sobre p, podemos escribir X $= \sum X^i \boldsymbol{x}_i$ y Y $= \sum Y^j \boldsymbol{x}_j$, con $\boldsymbol{x}_1 = \partial \boldsymbol{x}/\partial u^1$ y $\boldsymbol{x}_2 = \partial \boldsymbol{x}/\partial u^2$.

Como el producto interno es una función bilineal, $<$ X, Y $> = \sum X^i Y^j <\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j> = \sum X^i Y^j g_{ij}$, donde tenemos la siguiente defnición:

$$g_{ij}(u^1,\, u^2) = <\boldsymbol{x}_i(u^1,\, u^2),\, \boldsymbol{x}_j(u^1,\, u^2)> \qquad \text{ó} \qquad g_{ij} = <\boldsymbol{x}_i,\, \boldsymbol{x}_j>.$$

siendo $<\,,\,>$ el producto interno estandar de $\mathbb{R}^3$ y g_{ij} una función definida en U como una matriz simétrica en cada punto de la imagen de $\boldsymbol{x}$ que depende críticamente de qué parche coordenado hemos escogido. Se denominan **coeficientes métricos**.

La regla que asigna a cualquiera dos vectores tangentes X, Y $\in T_p$M su producto interno es llamada **Primera forma fundamental de la superficie**, donde T_pM es el espacio tangente en el punto p $\in$ M (conjunto de vectores tangentes a M en p).

Utilizamos la siguiente notación:

g = det(g_{ij})

g^{kl} = la entrada (k,l) de la inversa de la matriz (g_{ij}).

Lema 4.13. *Para un parche de coordenadas* $\boldsymbol{x}$*:* $U \longrightarrow \mathbb{R}^3$

(*a*) $g = |\boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2|^2$

(*b*) $g^{11} = g_{22}/g, \qquad g^{12} = g^{21} = \text{-}g_{12}/g, \qquad g^{22} = g_{11}/g$

(*c*) *Para todo i y j, tenemos:* $\sum_{k=1}^{2} g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j$

Demostración:

(*a*) Sea θ el ángulo entre $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$ entonces:
$|\boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2|^2 = |\boldsymbol{x}_1|^2 \ |\boldsymbol{x}_2|^2 \ sin^2\theta = |\boldsymbol{x}_1|^2 \ |\boldsymbol{x}_2|^2 \ (1 - cos^2\theta) = |\boldsymbol{x}_1|^2 \ |\boldsymbol{x}_2|^2 \ (1 \text{ - } \frac{<\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2>^2}{|\boldsymbol{x}_1|^2|\boldsymbol{x}_2|^2}) = |\boldsymbol{x}_1|^2 \ |\boldsymbol{x}_2|^2 \text{ - } <\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2>^2 = g_{11}g_{22} \text{ - } g_{12}g_{21} = $ g.

(*b*) Basta ver que $\begin{pmatrix} g_{22}/g & -g_{12}/g \\ -g_{12}/g & g_{11}/g \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$ son matrices inversas con un sencillo cálculo:

$$\begin{pmatrix} g_{22}/g & -g_{12}/g \\ -g_{12}/g & g_{11}/g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(*c*) $\sum g_{ik}g^{kj}$ es la entrada (i,j) del producto $(g_{ik})(g^{kj})$, que es la matriz identidad (δ_i^j).

Las ecuaciones de Gauss expresan las derivadas segundas $\boldsymbol{x}_{ii}$, $\boldsymbol{x}_{ij}$, $\boldsymbol{x}_{jj}$ en función de la base $\{\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j, \mathbf{N}\}$. En este sentido, son como las fórmulas de Frenet-Serret de una curva, que expresan las derivadas de **t**, **n**, **b** respecto de la base de Frenet. Por lo tanto tenemos:

$\boldsymbol{x}_{ij} = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^{k}\ \boldsymbol{x}_k + L_{ij}\mathbf{N}$, siendo $\mathbf{N}$ el vector normal a la superficie y L_{ij} los coeficientes de la segunda forma fundamental definidos como $L_{ij} = \boldsymbol{x}_{ij} \cdot \mathbf{N}$.

$< \boldsymbol{x}_{ij}, \boldsymbol{x}_l > = (\sum_{a=1}^{2} \Gamma_{ij}^{a} \boldsymbol{x}_a + L_{ij}\mathbf{N}) \cdot \boldsymbol{x}_l = \sum_{a=1}^{2} \Gamma_{ij}^{k} g_{al}$, ya que $\boldsymbol{x}_a \cdot \boldsymbol{x}_l = g_{al}$ y $\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{x}_l = 0$.

Si sumamos sobre l y multiplicamos por los coeficientes g^{lk}:
$\sum_{l=1}^{2} < \boldsymbol{x}_{ij}, \boldsymbol{x}_l > g^{lk} = (\sum_{l,a=1}^{2} (\Gamma_{i,j}^{a} g_{a,l}) g^{lk}) = \Gamma_{ij}^{k}$, usando la propiedad (c) del Lema anterior.

De aquí obtenemos la definición de los **símbolos de Cristoffel** denotados por Γ_{ij}^{k} ($1 \leq$ i,j,k ≤ 2), que son las funciones definidas en U para una superficie simple $\boldsymbol{x}$: U $\longrightarrow \mathbb{R}^3$ y que usaremos para varios resultados.

Proposición 4.14. *Si* $\alpha(t) = \boldsymbol{x}(\alpha^1(t), \alpha^2(t))$ *es una curva regular en un parche coordenado* $\boldsymbol{x}$ *y* $\mathbf{X}$ *es un campo vectorial diferenciable a lo largo de* α *con* $\mathbf{X} = \sum X^i \boldsymbol{x}_i$, *entonces* $\mathbf{X}$ *es paralelo a lo largo de* α *sí y sólo si*

$$0 = \frac{dX^k}{dt} + \sum \Gamma_{ij}^{l}\ X^i\ \frac{d\alpha^j}{dt},\ k=1,2.$$

Demostración:

d$\mathbf{X}$/dt es perpendicular a M, esto es, sí y sólo si para todo l, se tiene:

$$0 \equiv \langle\ \frac{d\mathbf{X}}{dt}, \boldsymbol{x}_l\ \rangle = \langle\ \sum \frac{dX^i}{dt}\ \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_l\ \rangle + \langle\ \sum X^i \boldsymbol{x}_{ij}\ \frac{d\alpha^j}{dt}, \boldsymbol{x}_l\ \rangle$$

esto es, sí y sólo si

$$0 = \sum \frac{dX^i}{dt}\ g_{il} + \sum < \boldsymbol{x}_{ij}, \boldsymbol{x}_l > X^i\ \frac{d\alpha^j}{dt}, \qquad \text{l} = 1,2.\ \mathbf{(1)}$$

donde si $\boldsymbol{x}$: U $\longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una superficie simple y α(s) es la curva velocidad unitaria en la imagen de $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{x}_{ij}(\text{a,b}) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial u^j \partial u^i}(\text{a,b})$$

$$\boldsymbol{x}_{ij} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial u^j \partial u^i}$$

Y $\boldsymbol{x}_{ij} = \boldsymbol{x}_{ji}$, ya que podemos asumir que $\boldsymbol{x}$ es de clase C^3. Si estas ecuaciones son multiplicadas por g^{lk} y sumadas sobre l, obtenemos el resultado siguiente:
$0 = \sum (\frac{dX^i}{dt})\ \delta_i^k + \sum \Gamma_{ij}^{k} X^i (\frac{d\gamma^j}{dt})$ ó

$$0 = \frac{dX^k}{dt} + \sum \Gamma^k_{ij} X^i \frac{d\alpha^j}{dt}, \qquad \text{k = 1,2.} \ \mathbf{(2)}$$

donde Γ^k_{ij} hacen referencia a los símbolos de Cristoffel que aparecen en (1) al calcular las derivadas segundas. A la inversa, si la ecuación **(2)** la multiplicamos por g_{kl} y sumamos sobre k, el resultado es **(1)**.

Por lo tanto, **X** es paralelo sí y sólo si se tiene **(2)**. $\square$

Notamos que no asumimos que t es longitud de arco a lo largo de α. También podemos observar que la ecuación diferencial que **X** debe satisfacer depende solamente de la curva α dada y de las cantidades intrínsecas Γ^k_{ij}. Por lo tanto, **el concepto de paralelismo a lo largo de la curva es intrínseco**.

Propiedades del paralelismo

El paralelismo tiene las siguientes propiedades que utilizaremos más adelante:

(I) Si **X** es un campo vectorial paralelo a lo largo de α, entonces **X** tiene longitud constante, ya que $\frac{d}{dt}\ ||\mathbf{X}||^2 = \frac{d}{dt}\ (\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}) = 2\dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{X} = 0$, ya que $\dot{\mathbf{X}}$ es perpendicular a la superficie por ser **X** paralelo y a su vez **X** es tangente a ésta.

(II) Si **X** e **Y** son dos campos vectoriales paralelos a lo largo de α, entonces $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$ es constante a lo largo de α, ya que $d(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})/dt = \mathbf{X'} \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y'} = 0$

(III) Si **X** y **Y** son paralelos a lo largo de α, entonces el ángulo

$$cos^{-1}(\mathbf{X}{\cdot}\mathbf{Y}/||\mathbf{X}||||\mathbf{Y}||)$$

entre **X** e **Y** es constante a lo largo de α, ya que $\mathbf{X}{\cdot}\mathbf{Y}$, $||\mathbf{X}||$, y $||\mathbf{Y}||$ son cada uno constantes a lo largo de α.

(IV) Si **X** e **Y** son paralelos a lo largo de α, entonces lo son $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ y c**X** para todo c $\in \mathbb{R}$. Esto es trivial aplicando las propiedades de derivada covariante y viendo que tanto (**X**+**Y**)**'** como (c**X**)**'** son iguales a cero.

Este resultado confirma que cuando paralelamente trasladamos vectores, ángulos y longitudes se conservan, al igual que en geometría plana, sin embargo, como veremos más adelante, si tenemos dos curvas diferentes que unen p con q y $\tilde{X}$ es un vector tangente en p, el valor del campo vectorial en q depende de cual de las curvas se haya usado para transportarlo. Esta es una de las diferencias más críticas entre la geometría en el plano y la geometría en una

superficie arbitraria.
A partir de las propiedades vistas anteriormente, surge un importante teorema de existencia y unicidad de un campo vectorial paralelo tangente a la superficie S a lo largo de α:

Teorema 4.15. *Dada una superficie* S *en* $\mathbb{R}^3$*, y sea* α*:* I $\longrightarrow$ S *una curva parametrizada en* S*. Sea* $t_0 \in$ I*, y sea* $\boldsymbol{v} \in \mathrm{S}_{\alpha(t_0)}$*. Entonces existe un único campo vectorial* **V***, tangente a* S *a lo largo de* α*, el cual es un campo paralelo y tiene* $\mathbf{V}(t_0) = \boldsymbol{v}$*.*

Demostración:

Se requiere un campo vectorial **V** tangente a S a lo largo de α que satisfaga **V'** = 0, para que sea paralelo. Tenemos por definición de derivada covariante:

$$\mathbf{V'} = \dot{\mathbf{V}} - (\dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} =$$

$$= \dot{\mathbf{V}} - [d(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N})/dt - \mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{N}}]\mathbf{N} =$$

$$= \dot{\mathbf{V}} + (\mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{N}})\mathbf{N}$$

En el primer paso se aplican las propiedades de la derivación ordinaria y covariante, y en el segundo paso se elimina el factor $\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}$ ya que **V** y **N** son ortogonales. Por lo tanto **V'** = 0 si y sólo si **V** satisface la ecuación diferencial siguiente:

$$\dot{\mathbf{V}} + (\mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{N}})\mathbf{N} = 0,$$

que es una ecuación diferencial de primer orden.

Si escribimos $\mathbf{V}(\mathrm{t}) = (\alpha(\mathrm{t}),\ V_1(\mathrm{t}),\ V_2(\mathrm{t}),\ V_3(\mathrm{t}))$, obtenemos que la anterior ecuación diferencial se convierte en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de la siguiente forma:

$$\tfrac{dV_i}{dt} + \textstyle\sum_{j=1}^{3} N_i(N_j)\text{'}V_j = 0,$$

donde N_j (j $\in \{1,2,3\}$) son las componentes de **N**.

Por el teorema de existencia y unicidad de solución de ecuaciones diferenciales de primer orden, existe un único campo vectorial **V** a lo largo de α

se satisface $\dot{\mathbf{V}} + (\mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{N}})\mathbf{N} = 0$ con la condición inicial de $\mathbf{V}(t_0) = \boldsymbol{v}$ (Esto es, satisfaciendo $V_i(t_0) = v_i$ para i $\in \{1, 2, 3\}$, donde $\boldsymbol{v} = (\alpha(t_0), v_1, v_2, v_3)$).

Sin embargo, el teorema de existencia y unicidad no garantiza que $\mathbf{V}$ sea tangente a S a lo largo de α, que es la segunda condición que debemos probar.

Para ver que $\mathbf{V}$ es tangente a S vemos que a partir de $\dot{\mathbf{V}} + (\mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{N}})\mathbf{N} = 0$ tenemos:

$$d(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N})/dt =$$

$$\dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{N}} =$$

$$[-(\mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{N}})\mathbf{N}] \cdot \mathbf{N} + \mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{N}} =$$

$$-\mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{N}} + \mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{N}} = 0,$$

por lo tanto, $\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}$ es constante a lo largo de α y como, $(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N})(t_0) = \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{N}(\alpha(t_0)) = 0$, esta constante debe ser cero, ya que por el enunciado sabemos que $\boldsymbol{v} \in S_{\alpha(t_0)}$.

En consecuencia, el campo vectorial $\mathbf{V}$ es un campo vectorial tangente a S a lo largo de α, y paralelo porque satisface la ecuación $\dot{\mathbf{V}} + (\mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{N}})\mathbf{N} = 0$ como vimos anteriormente. $\square$

Si estudiamos este teorema definiendo la superficie como un conjunto de superficies simples, es decir, como una colección de parches coordenados, tenemos:

Teorema 4.16. *Sea $\alpha(t)$ una curva regular en una superficie* M *de clase C^2. Sea* $\tilde{\mathrm{X}}$ *un vector tangente a* M *en $\alpha(t_0)$. Entonces existe un único campo vectorial* $\mathbf{X}$ *que es paralelo a lo largo de α con* $\mathbf{X}(t_0) = \tilde{\mathrm{X}}$

Demostración:

Sea $\boldsymbol{x}$ un parche de coordenadas sobre $\alpha(t_0)$ y $\alpha(t) = \boldsymbol{x}(\alpha^1(t), \alpha^2(t))$.
Considerando el valor inicial del problema:

$$\frac{dX^k}{dt} = -\sum \Gamma^k_{ij}(\alpha^1(t), \alpha^2(t))X^i(t)\ \frac{d\alpha^j}{dt}, \qquad \text{k=1,2,}$$
$$X^k(t_0) = \tilde{X}^k.$$

Por el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales, sabemos que existe una única solución para valores de t cercanos a t_0. Esta solución de campo vectorial es paralelo a lo largo de α. Cubriendo la curva α con parches coordenados y aplicando la proposición 4.14 en cada uno de ellos, definimos el campo paralelo $\mathbf{X}$ a lo largo de toda la curva α. $\square$

Definición 4.17. *El único campo vectorial* $\mathbf{X}$ *paralelo a lo largo de* α *tal que* $\mathbf{X}\,(t_0) = \tilde{\mathrm{X}}$ *se llama* ***transporte paralelo*** *de* $\tilde{\mathrm{X}}$ *a lo largo de* α.

5. TRANSPORTE PARALELO

A partir del último teorema, se estudia el concepto de transporte paralelo.

El paralelismo puede ser usado para transportar vectores tangentes desde un punto de una superficie a otro.

5.1. Definición y propiedades básicas

Definición 5.1. *Dados dos puntos* p *y* q *de una superficie* S*, una curva parametrizada en* S *de un punto* p *a otro punto* q *es una aplicación de clase* C^∞ α*:* $[a,b] \longrightarrow$ S*, de un intervalo cerrado* $[a,b]$ *en* S*, con* $\alpha(a)$ = p *y* $\alpha(b)$ = q.

Por la propiedad de ser C^∞ de una función α definida en un intervalo cerrado, queremos decir que α es la restricción a [a,b] de una función C^∞ de algún intervalo abierto que contiene a [a,b] en S.

Cada curva parametrizada α: [a,b] $\longrightarrow$ S de p a q determina una función P_α: $S_p \longrightarrow S_q$ definida por $P_\alpha(\boldsymbol{v}) = \mathbf{V}(b)$, donde para $\boldsymbol{v} \in S_p$ ($\boldsymbol{v}$ vector tangente a p en S), $\mathbf{V}$ es el único campo vectorial paralelo a lo largo de α con $\mathbf{V}(a) = \boldsymbol{v}$.

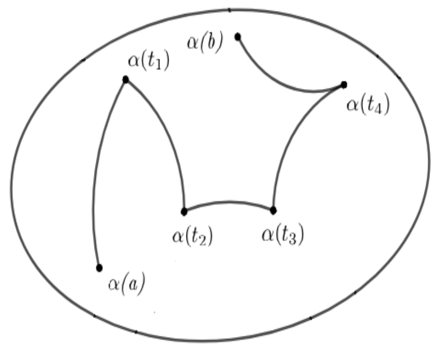
$P_\alpha(\boldsymbol{v})$ se denomina **transporte paralelo** (o traslación paralela) **de p a q a lo largo de** α

Propiedades

∗ El transporte paralelo de un punto p a otro punto q es una trayectoria dependiente, es decir, si α y β son dos curvas parametrizadas en S de p a q y $\boldsymbol{v} \in S_p$, entonces, en general $P_\alpha(\boldsymbol{v}) \neq P_\beta(\boldsymbol{v})$

∗ Los vectores tangentes $\boldsymbol{v} \in S_p$ también pueden ser transportados a lo largo de curvas diferenciables a trozos en S. Definamos este concepto:

Definición 5.2. *Una curva* α *de clase* C^∞ *a trozos parametrizada en* S *es una aplicación continua* α*:* $[a,b] \longrightarrow$ S *tal que la restricción de* α *a* $[t_i,\, t_i+1]$ *es de clase* C^∞ *para cada* $i \in \{0,1,\ldots,k\}$*, donde* $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k+1} = b$.



De esta forma, el transporte paralelo de $\boldsymbol{v} \in S_{\alpha(t)}$ a lo largo de α hasta $\alpha(b)$ es obtenido transportando $\boldsymbol{v}$ sobre α hasta $\alpha(t_1)$ para obtener $\boldsymbol{v}_1 \in S_{\alpha(t_1)}$, luego transportando $\boldsymbol{v}_1$ sobre α hasta $\alpha(t_2)$ para obtener $\boldsymbol{v}_2 \in S_{\alpha(t_2)}$ y así sucesivamente, obteniendo finalmente $\mathrm{P}_\alpha(\boldsymbol{v})$ al realizar el transporte de $\boldsymbol{v}_k \in S_{\alpha(t_k)}$ a lo largo de α hasta $\alpha(b)$.

Teorema 5.3. *Sea* S *una superficie* $\in \mathbb{R}^3$*, sean* $p, q \in$ S*, y sea* α *una curva parametrizada de clase* C^∞ *a trozos desde* p *a* q*. Entonces el transporte paralelo* $\mathrm{P}_\alpha\colon \mathrm{S}_p \longrightarrow \mathrm{S}_q$ *a lo largo de* α *es un isomorfismo vectorial el cual preserva el producto escalar, estos es:*

(i) P_α *es una aplicación lineal*
(ii) P_α *es inyectiva y sobreyectiva*
(iii) $\mathrm{P}_\alpha(\boldsymbol{u}) \cdot \mathrm{P}_\alpha(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ *para todo* $\boldsymbol{v}$*,* $\boldsymbol{w} \in \mathrm{S}_p$.

Demostración:

Para demostrar (i), es decir, que P_α es una aplicación lineal, debe cumplirse que:

1. $\mathrm{P}_\alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \mathrm{P}_\alpha(\boldsymbol{u}) + \mathrm{P}_\alpha(\boldsymbol{v})$ para $\boldsymbol{u}=(u_1,\ u_2,\ u_3)$ y $\boldsymbol{v}=(v_1,\ v_2,\ v_3)$ vectores de S_p.

2. $\mathrm{c} \cdot \mathrm{P}_\alpha(\boldsymbol{u}) = \mathrm{P}_\alpha(\mathrm{c} \cdot \boldsymbol{u})$ con $\mathrm{c} \in \mathbb{R}$

Para demostrar 1,
Sea α la curva parametrizada a trozos de clase C^∞ tal que $\alpha(\mathrm{a}) = \mathrm{p}$ y $\alpha(\mathrm{b}) = \mathrm{q}$, entonces por definición de transporte paralelo tenemos que $\mathrm{P}_\alpha(\boldsymbol{u}) = \mathbf{U}(\mathrm{b})$

siendo $\mathbf{U}$ el único campo vectorial paralelo a lo largo de α tal que $\mathbf{U}(\mathrm{a}) = \boldsymbol{u}$. De igual manera, se define $\mathrm{P}_\alpha(\boldsymbol{v}) = \mathbf{V}(\mathrm{b})$. Así:

$\mathrm{P}_\alpha(\boldsymbol{u}) + \mathrm{P}_\alpha(\boldsymbol{v}) = \mathbf{U}(\mathrm{b}) + \mathbf{V}(\mathrm{b}) = (\mathbf{U} + \mathbf{V})(\mathrm{b}) = \mathrm{P}_\alpha(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$ por las propiedades de campos vectoriales siendo $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ el único campo vectorial paralelo a lo largo de α con $(\mathbf{U} + \mathbf{V})(\mathrm{a}) = \mathbf{U}(\mathrm{a}) + \mathbf{V}(\mathrm{a})$ tal que $(\mathbf{U} + \mathbf{V})(\mathrm{b}) = \mathrm{P}_\alpha(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$ por definición como hemos visto anteriormente en esta sección.

Actuamos de manera análoga para demostrar 2,
$\mathrm{c} \cdot \mathrm{P}_\alpha(\boldsymbol{u}) = \mathrm{c} \cdot \mathbf{U}(\mathrm{b}) = (\mathrm{c} \cdot \mathbf{U})(\mathrm{b}) = \mathrm{P}_\alpha(\mathrm{c} \cdot \boldsymbol{u})$ siendo $\mathrm{c} \cdot \mathbf{U}$ el único campo vectorial paralelo a lo largo de α con $(\mathrm{c} \cdot \mathbf{U})(\mathrm{a}) = \mathrm{c} \cdot \mathbf{U}(\mathrm{a})$ tal que $(\mathrm{c} \cdot \mathbf{U})(\mathrm{b}) = \mathrm{P}_\alpha(\mathrm{c} \cdot \boldsymbol{u})$ por definición como hemos visto anteriormente en esta sección.

Estas propiedades se cumplen en consecuencia de que si $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ son campos vectoriales paralelos a lo largo de la curva parametrizada α en S, se tiene que también lo son $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ y $\mathrm{c} \cdot \mathbf{U}$ para todo $\mathrm{c} \in \mathbb{R}$, ya que aplicando las propiedades vistas de derivada covariante tenemos:

$(\mathbf{U} + \mathbf{V})\text{'} = \mathbf{U}\text{'} + \mathbf{V}\text{'} = 0 \qquad (\mathbf{U}\text{'} = 0 \text{ y } \mathbf{V}\text{'} = 0)$

$(\mathrm{c} \cdot \mathbf{U})\text{'} = d\mathrm{c}/\mathrm{dt} \cdot \mathbf{U} + \mathrm{c} \cdot \mathbf{U}\text{'} = 0 \qquad (\mathbf{U}\text{'} = 0 \text{ y c es una constante})$

Para demostrar (*ii*), tenemos que el núcleo de P_α es cero ya que si $||\mathrm{P}_\alpha(\boldsymbol{v})|| = 0$, implica que $||\boldsymbol{v}|| = 0$ por la propiedad (*iii*) de este teorema, por lo tanto P_α es una aplicación lineal inyectiva de un espacio vectorial de dimensión 2 a otro, y todas las funciones son sobreyectivas, ya que 2 = dim(Img) + dim(kerf).

Por último, es inmediato demostrar (*iii*), debido a que si $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ son campos vectoriales paralelos, entonces $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$ es constante, ya que por las propiedades vitas de derivada covariante tenemos:

$d(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V})/dt = \mathbf{U}\text{'} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{V}\text{'} = 0 \qquad (\mathbf{U}\text{'} = 0 \text{ y } \mathbf{V}\text{'} = 0)$, y por lo tanto:

$\mathrm{P}_\alpha(\boldsymbol{u}) \cdot \mathrm{P}_\alpha(\boldsymbol{v}) = \mathbf{U}(\mathrm{b}) \cdot \mathbf{V}(\mathrm{b}) = \mathbf{U}(\mathrm{a}) \cdot \mathbf{V}(\mathrm{a}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \quad \square$

En resumen, hemos probado que **el transporte paralelo es isometría**, ya que es un isomorfismo lineal que preserva el producto escalar. Por tanto, se deducen las siguientes 2 consecuencias importantes:

a) $||\mathbf{U}||$ es constante.
b) El ángulo entre dos campos vectoriales paralelos **U** y **V** es constante, visto en (I) y (III) de las propiedades de paralelismo correspondientes a **U** y **V**.

Esto es, conserva las longitudes y los ángulos entre vectores correspondientes a los campos vectoriales paralelos.

5.2. Aplicación a curvas geodésicas

En geometría plana, las líneas rectas juegan un papel muy importante como base para la mayoría de las construcciones y para la formación de la mayoría de las figuras estudiadas. Por eso, vamos a estudiar curvas, que llamaremos geodésicas, en una superficie arbitraria que desempeña el papel más análogo posible al de las rectas del plano. Primero de todo estudiaremos lo que es una curva geodésica en una superficie y seguido de esto, trataremos de generalizar las propiedades de las líneas rectas a curvas en superficies y explorar como se relacionan.

Definición 5.4. *Una curva geodésica en una superficie* $\mathrm{S} \subset \mathbb{R}^3$ *es una curva parametrizada* α*:* $\mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{S}$ *cuya aceleración es ortogonal a* S *en todos sus puntos, esto es,* $\ddot{\alpha} \in S^{\perp}_{\alpha(t)}$ *para todo* $\mathrm{t} \in \mathrm{I}$*, y por tanto,* $\ddot{\alpha}(t)$ *es un múltiplo de* $\mathbf{N}(\alpha(t))$ *para todo* $\mathrm{t} \in \mathrm{I}$*, siendo* $\mathbf{N}(\alpha(t))$ *el vector normal de dirección en cada punto* $\alpha(t)$*.*

Observación 5.5. *El campo vectorial tangente se translada paralelo a lo largo de las geodésicas, ya que parametrizando la curva con parámetro natural se tiene que la segunda derivada es la derivada del campo tangente y como es ortogonal a la superficie, eso significa que la derivada covariante del campo tangente es nula, esto es, que es paralelo.*

Así, se puede decir que una curva geodésica es una curva en S que siempre "va recta" en la superficie. Por lo tanto, la curva no tiene componente de aceleración tangente a la superficie.
Obsérvese que las curvas geodésicas tienen velocidad constante, ya que $\dot{\alpha} \in \mathrm{S}_{\alpha(t)}$ y $\ddot{\alpha} \in \mathrm{S}^t_{\alpha(t)}$ para todo $\mathrm{t} \in \mathrm{I}$, lo que implica que:

$\frac{d}{dt}\,(||\dot{\alpha}(t)||^2) = \frac{d}{dt}\,(\dot{\alpha}(\mathrm{t}) \cdot \dot{\alpha}(\mathrm{t})) = 2\dot{\alpha}(\mathrm{t}) \cdot \ddot{\alpha}(\mathrm{t}) = 0.$

Intuitivamente, parece claro que dado cualquier punto p en una superficie S en

$\mathbb{R}^3$ y cualquier velocidad inicial $\boldsymbol{v}$ en p ($\boldsymbol{v} \in S_p$), debería haber una geodésica en S pasando por p con velocidad inicial $\boldsymbol{v}$. Es decir, una curva que viaja en una superficie S, pasando a travs de p con velocidad $\boldsymbol{v}$ debería ser capaz de continuar viajando "recto" sobre S a velocidad constante $||\boldsymbol{v}||$, trazando así una geodésica en S. De hecho, la geodésica cumpliendo estas propiedades es esencialmente única, y queda probado en el siguiente teorema:

Teorema 5.6. *Sea* S *una superficie en* $\mathbb{R}^3$*, sea* p $\in$ S*, y sea* $\boldsymbol{v} \in \mathrm{S}_p$*. Entonces existe un intervalo abierto* I *que contiene el* 0 *y una geodésica* α*:* $\mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{S}$ *tal que:*

(i) $\alpha(0) = \mathrm{p}$ *y* $\dot{\alpha}(0) = \boldsymbol{v}$
(ii) Si β*:* $\tilde{\mathrm{I}} \longrightarrow \mathrm{S}$ *es otra geodésica en* S *con* $\beta(0) = \mathrm{p}$ *y* $\dot{\beta}(0) = \boldsymbol{v}$*, entonces* $\tilde{\mathrm{I}} \subset \mathrm{I}$ *y* $\beta(t) = \alpha(t)$ *para todo* $t \in \tilde{\mathrm{I}}$*.*

La geodésica α *se denomina como la geodésica maximal en* S *pasando por* p *con velocidad inicial* $\boldsymbol{v}$*.*

Demostración:

Una superficie en $\mathbb{R}^3$ es un conjunto no vacío S $\in \mathbb{R}^3$ de la forma S $= f^{-1}(\mathrm{c})$ donde f: U $\longrightarrow \mathbb{R}$, U abierto en $\mathbb{R}^3$, es una función C^∞ con $\nabla f(\mathrm{p}) \neq 0$ para todo p $\in$ S. Como $\nabla f(\mathrm{p}) \neq 0$ para todo p en algún conjunto abierto que contiene a S, podemos asumir (reduciendo U si es necesario) que $\nabla f(\mathrm{p}) \neq 0$ para todo p $\in$ U. Tenemos que $\mathbf{N} = \nabla f/||\nabla f||$

Por definición, tenemos que una curva geodésica en una superficie S $\in \mathbb{R}^3$ es una curva parametrizada α: I $\longrightarrow$ S cuya aceleración es ortogonal a S en todas sus partes, esto es, $\ddot{\alpha} \in S^{\perp}_{\alpha(t)}$ para todo t $\in$ I, y por tanto, $\ddot{\alpha}(t)$ es un múltiplo de $\mathbf{N}(\alpha(t))$ para todo t $\in$ I: $\ddot{\alpha}(t) = \mathrm{g(t)}\mathbf{N}(\alpha(t))$ para todo t $\in$ I, donde g: I $\longrightarrow \mathbb{R}^3$.

Ahora multiplicando por la derecha en ambos lados de la igualdad por $\mathbf{N}(\alpha(t))$, obtenemos:

$\mathrm{g} = \ddot{\alpha} \cdot \mathbf{N} = d(\dot{\alpha} \cdot \mathbf{N})/dt$ - $\dot{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{N}}$ = -$\dot{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{N}}$,

ya que $\dot{\alpha} \cdot \mathbf{N} = 0$.

Por lo tanto α: I $\longrightarrow$ S es una curva geodésica si y sólo si satisface la ecuación diferencial siguiente:

$$\ddot{\alpha} + (\dot{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{N}})\mathbf{N} = 0.$$

Si definimos α(t) = (α_1(t), α_2(t), α_3(t)), la ecuación diferencial de segundo orden definida anteriormente en α se convierte en un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden que viene dado por:

$$\tfrac{d^2\alpha_i}{dt^2} + \textstyle\sum_{j,k=1}^{3} N_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\tfrac{\partial N_j}{\partial \alpha_k}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\tfrac{d\alpha_j}{dt}\tfrac{d\alpha_k}{dt} = 0,$$

donde N_j (j $\in \{1, 2, 3\}$) son las componentes de $\mathbf{N}$.

Por el teorema de existencia de solución aplicado a cada ecuación, existe un intervalo I_1 que contiene al 0 y una solución β_1: $\mathrm{I}_1 \longrightarrow$ U para dicha ecuación diferencial satisfaciendo las condiciones iniciales $\beta_1(0)$ = p y $\dot{\beta}(0) = \boldsymbol{v}$ (Esto es, satisfaciendo $\alpha_i(0) = \mathrm{p}_i$ y (dα_i/dt)(0) = v_i para i $\in \{1, 2, 3\}$, donde p = (p_1, p_2, p_3) y $\boldsymbol{v}$ = (p, v_1, v_2, v_3). Además, esta solución es única en el sentido de que si β_2: $\mathrm{I}_2 \longrightarrow$ U es otra solución de $\ddot{\alpha} + (\dot{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{N}})\mathbf{N} = 0$ con $\beta_2(0)$ = p y $\dot{\beta}_2(0) = \boldsymbol{v}$, entonces β_1(t) = β_2(t) para todo t $\in \mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_2$. Por lo tanto, resulta que existe un intervalo abierto máximo I (I es la unión de los dominios de todas las soluciones de $\ddot{\alpha} + (\dot{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{N}})\mathbf{N} = 0$ tal que $\alpha(0)$ = p y $\dot{\alpha}(0)$ = $\boldsymbol{v}$) y una única solución α: I $\longrightarrow$ U de $\ddot{\alpha} + (\dot{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{N}})\mathbf{N} = 0$ satisfaciendo $\alpha(0)$ = p y $\dot{\alpha}(0) = \boldsymbol{v}$. Además, si β: $\tilde{I} \longrightarrow$ U es cualquier solución de $\ddot{\alpha} + (\dot{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{N}})\mathbf{N} = 0$ con $\beta(0)$ = p y $\dot{\beta}(0) = \boldsymbol{v}$ entonces $\tilde{I} \subset$ I y β es la restricción de I a $\tilde{I}$.

Para completar la demostración, falta comprobar que la solución α de $\ddot{\alpha} + (\dot{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{N}})\mathbf{N} = 0$ es ciertamente una curva en S. En ese caso debe ser una curva geodésica, ya que satisface la ecuación geodésica anterior, y el resto de teorema se deduce de las afirmaciones de unicidad anteriores.

Ahora vamos a ver que α se trata de una curva en S.
Primero, notamos que para toda solución α: I $\longrightarrow$ U de $\ddot{\alpha} + (\dot{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{N}})\mathbf{N} = 0$, se tiene que $\dot{\alpha} \cdot \mathbf{N} = 0$. Por lo tanto,

$$d(\dot{\alpha} \cdot \mathbf{N})/dt = \ddot{\alpha} \cdot \mathbf{N} + \dot{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{N}} = 0$$

por

$$\ddot{\alpha} + (\dot{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{N}})\mathbf{N} = 0,$$

así que $\dot{\alpha} \cdot \mathbf{N}$ es constante a lo largo de α, y $(\dot{\alpha} \cdot \mathbf{N})(0) = \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{N}(\mathrm{p}) = 0$, ya que $\boldsymbol{v} \in S_p$ y $\mathbf{N}$(p) es ortogonal a S_p.
Por lo tanto, se sigue por último:

$d(f \circ \alpha)(\mathrm{t})/dt = \nabla f(\alpha(\mathrm{t})) \cdot \dot{\alpha}(t) = ||\nabla f(\alpha(\mathrm{t}))||\mathbf{N}(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) = 0$ para todo $\mathrm{t} \in \mathrm{I}$, por lo tanto $f \circ \alpha$ es constante, y $f(\alpha(0)) = f(\mathrm{p}) = \mathrm{c}$ lo que implica que $f(\alpha(t)) = \mathrm{c}$ para todo $\mathrm{t} \in \mathrm{I}$, esto es, Imagen $(\alpha) \subset f^{-1}(\mathrm{c}) = \mathrm{S}$. $\square$

Ahora, por la definición y propiedades que hemos visto de transporte paralelo y de curva geodésica tenemos el siguiente resultado:

Corolario 5.7. *Sea* S *una superficie en* $\mathbb{R}^3$ *y sea* α*:* $\mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{S}$ *una geodésica en* S *con* $\dot{\alpha} \neq 0$*. Entonces un campo vectorial* $\mathbf{X}$ *tangente a* S *a lo largo de* α *es un campo paralelo a lo largo de* α *si y sólo si tanto* $||\mathbf{X}||$ *como el ángulo entre* $\mathbf{X}$ *y* $\dot{\alpha}$ *son constantes a lo largo de* α*.*

Demostración:

Por un lado tenemos que la implicación hacia la derecha es inmediata por las propiedades (I) y (III) correspondientes a campos vectoriales paralelos probadas en dicha sección.

Sea α: $\mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{S}$ una geodésica en S con $\dot{\alpha} \neq 0$, y supongamos que $\mathbf{X}$ es un campo vectorial tangente a S paralelo a lo largo de α, entonces vamos a probar que, el ángulo entre $\mathbf{X}$ y $\dot{\alpha}$ es constante a lo largo de α, ya que $||\mathbf{X}||$ es constante ya está probado.

Sabemos que,

$$\cos(\gamma) = \mathbf{X} \cdot \dot{\alpha}/||\boldsymbol{X}||\ ||\dot{\alpha}||$$

Por lo tanto:

$\gamma = \arccos(\mathbf{X} \cdot \dot{\alpha}/||\mathbf{X}||\ ||\dot{\alpha}||)$ es constante por serlo $||\mathbf{X}||$, $||\dot{\alpha}||$ y $\mathbf{X} \cdot \dot{\alpha}$:

$d(\mathbf{X} \cdot \dot{\alpha})/dt = \dot{\mathbf{X}} \cdot \dot{\alpha} + \mathbf{X} \cdot \ddot{\alpha} = 0$

por ser $\mathbf{X}$ campo vectorial paralelo a lo largo de α y α una geodésica en S.

Para la implicación de derecha a izquierda, supongamos que tanto $||\mathbf{X}||$ como el ángulo entre $\mathbf{X}$ y $\dot{\alpha}$ es constante a lo largo de α.

Sea $t_0 \in$ I y sea $\boldsymbol{v} \in S_{\alpha(t_0)}$ un vector unitario ortogonal a $\dot{\alpha}(t_0)$. Sea $\mathbf{V}$ el único campo vectorial paralelo a lo largo de α tal que $\mathbf{V}(t_0) = \boldsymbol{v}$. Entonces $||\mathbf{V}|| = 1$ y $\mathbf{V} \cdot \dot{\alpha} = 0$ a lo largo de α, así que $\{\dot{\alpha}(t), \mathbf{V}(t)\}$ es una base ortogonal para $S_{\alpha(t)}$, para cada t $\in$ I.

En particular, existen funciones de clase C^∞ f, g: I $\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{X} = f\dot{\alpha} + g\ \mathbf{V}$.

Como

$$\cos(\gamma) = \mathbf{X} \cdot \dot{\alpha} = ||\mathbf{X}||\ ||\dot{\alpha}|| = f\ ||\dot{\alpha}||/||\mathbf{X}||$$

y

$$||\mathbf{X}||^2 = f^2\ ||\dot{\alpha}||^2 + g^2,$$

la constancia de γ, $||\mathbf{X}||$ y $||\dot{\alpha}||$ a lo largo de α implica que f y g son constantes a lo largo de α.
Por lo tanto, $\mathbf{X}$ es paralelo a lo largo de α por la propiedad (IV) del paralelismo. $\square$

Proposición 5.8. *La curvatura geodésica de una curva en una superficie es un concepto intrínseco.*

Demostración:

Si $\boldsymbol{x}$: U $\longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una superficie simple y γ(s) es una curva de velocidad unitaria en la imagen de $\boldsymbol{x}$, tenemos que

$$\mathbf{S} = \mathbf{N} \times \mathbf{t}$$

siendo S la normal intrínseca a la curva γ.
Sea $\epsilon_{ij} = [\mathbf{N}, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j]$, donde $[\mathbf{N}, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j] = <(\mathbf{N} \times \boldsymbol{x}_i), \boldsymbol{x}_j>$ es el triple producto escalar de $\mathbf{N}$, $\boldsymbol{x}_i$ y $\boldsymbol{x}_j$. Se tiene que $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$ y por el lema 4.13, ϵ_{12} = -ϵ_{21} = $\sqrt{g}$. Como ϵ_{ij} es cero o depende solo de g, tenemos que ϵ_{ij} es un concepto intrínseco.

$$k_g = < k_g\mathbf{S}, \mathbf{S} > = [k_g\mathbf{S}, \mathbf{N}, \mathbf{t}]$$

Además sabemos que, para una curva de velocidad unitaria $\gamma(s) = \boldsymbol{x}(\gamma^1(s), \gamma^2(s))$:

$$k_g\mathbf{S} = \textstyle\sum_{k=1}^2 [(\partial^2\gamma^k/\partial s^2 + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k(\partial\gamma^i/\partial s)(\partial\gamma^j/\partial s)]\boldsymbol{x}_k$$

y

$$k_n = \sum_{i,j=1}^{2} L_{ij}(\partial\gamma^i/\partial s)(\partial\gamma^j/\partial s)$$

ya que si desarrollamos la fórmula $\mathbf{k} = \ddot{\gamma}$ y utilizamos las ecuaciones de Gauss que dan los valores de las derivadas sucesivas $\boldsymbol{x}_{ij}$, aplicando la regla de la cadena:

$$\begin{gathered}
\gamma(s) = \boldsymbol{x}(\gamma^1(s), \gamma^2(s)) \\
\dot{\gamma}(s) = (\partial\gamma^1/\partial s)\boldsymbol{x}_i + (\partial\gamma^2/\partial s)\boldsymbol{x}_j \\
\ddot{\gamma}(s) = \partial \left[(\partial\gamma^1/\partial s)\boldsymbol{x}_i + (\partial\gamma^2/\partial s)\boldsymbol{x}_j\right]/\ \partial s \\
= (\partial^2\gamma^1/\partial s^2)\boldsymbol{x}_i + (\partial\gamma^1/\partial s)(\partial\boldsymbol{x}_i/\partial s) + (\partial^2\gamma^2/\partial s^2)\boldsymbol{x}_j + (\partial\gamma^2/\partial s)(\partial\boldsymbol{x}_j/\partial s) \\
= (\partial^2\gamma^1/\partial s^2)\boldsymbol{x}_i + (\partial\gamma^1/\partial s)(\boldsymbol{x}_{ii}(\partial\gamma^1/\partial s) + \boldsymbol{x}_{ij}(\partial\gamma^2/\partial s)) + (\partial^2\gamma^2/\partial s^2)\boldsymbol{x}_j + \\
(\partial\gamma^2/\partial s)(\boldsymbol{x}_{ji}(\partial\gamma^1/\partial s) + \boldsymbol{x}_{jj}(\partial\gamma^2/\partial s)) \\
= k_n\mathbf{N} + k_g\mathbf{S}
\end{gathered}$$

Mediante las ecuaciones de Gauss el resultados se sigue de modo directo, igualando partes normales entre sí y partes tangentes entre sí. Por lo tanto, sustituyendo $k_g\mathbf{S}$ en la ecuación de arriba obtenemos:

$$k_g = \sum\ (\ddot{\gamma^k} + \sum\ \Gamma_{ij}^k\ \dot{\gamma^i}\ \dot{\gamma^j})\ \left[\boldsymbol{x}_k, \mathbf{N}, \sum \boldsymbol{x}_i\dot{\gamma^l}\right]$$

$$= \sum\ (\ddot{\gamma^k} + \sum\ \Gamma_{ij}^i\ \dot{\gamma^i}\ \dot{\gamma^j})\dot{\gamma^l}\ [\mathbf{N}, \boldsymbol{x}_l, \boldsymbol{x}_k]$$

ó

$$k_g = \sum\ (\ddot{\gamma^k} + \sum\ \Gamma_{ij}^k\ \dot{\gamma^i}\ \dot{\gamma^j})\dot{\gamma^l}\ \epsilon_{lk},$$

que vemos que es intrínseca. □

Hay veces que es útil una fórmula extrínseca de k_g:

$$k_g = <\dot{\mathbf{t}}, \mathbf{S}> = \left[\dot{\mathbf{t}}, \mathbf{N}, \mathbf{t}\right] = \left[\mathbf{N}, \mathbf{t}, \dot{\mathbf{t}}\right] = <\mathbf{N}, \mathbf{t}\ \mathrm{x}\ \dot{\mathbf{t}}> = <\mathbf{N}, \mathbf{t}\ \mathrm{x}\ \mathbf{kn}> = \\ \mathbf{k}<\mathbf{N}, \mathbf{b}> = \mathbf{k}\ \cos\alpha$$

donde α es el ángulo entre la normal unitaria $\mathbf{N}$ de la superficie, y la binormal $\mathbf{b}$ de la curva. Hay que tener en cuenta que $k_g = \mathbf{k}\ \cos\alpha$ tiene sentido incluso cuando $\mathbf{k} = 0$, y ni $\mathbf{b}$ ni α son definidos porque $k_g = 0$ cuando $\mathbf{k} = 0$

Por definición, sabemos que una curva regular α(t) en una superficie M es recta si dα/dt es paralela a lo largo de α. Esta definición es una generalización de las líneas rectas en el plano, cuyos vectores tangentes son todos paralelos. Con esta definición nace un importante resultado que vamos a demostrar:

Proposición 5.9. *Una curva regular $\alpha(t)$ en una superficie* M *es recta si y sólo si* dt/ds *es constante y* $\alpha(\mathrm{t(s)})$ *es una geodésica, donde* s *es la longitud de arco.*

Demostración:

Para demostrar la implicación de derecha a y izquierda asumimos que $\alpha(\mathrm{t(s)})$ es una geodésica y $\mathrm{dt/ds} \equiv \mathrm{c}$. Por lo tanto,

$$\mathrm{d}\alpha/\mathrm{dt} = \mathrm{d}\alpha/\mathrm{ds} \cdot \mathrm{ds/dt} = \mathbf{t} \cdot \mathrm{ds/dt} = \mathbf{t}/\mathrm{c}.$$

Por definición, $\alpha(\mathrm{t})$ es recta si $\mathrm{d}\alpha$ es paralela a lo largo de α.
Tenemos $d^2\alpha/\mathrm{d}t^2 = \dot{\mathbf{t}}/c^2$. Como $\alpha(\mathrm{t(s)})$ es una geodésica, $\dot{\mathbf{t}} = \ddot{\alpha}$ es normal a la superficie. Por lo tanto $\mathrm{d}\alpha$ es paralela, y $\alpha(\mathrm{t})$ es recta.

Para demostrar la otra implicación, ahora asumimos que $\alpha(\mathrm{t})$ es recta.
$d^2\alpha/\mathrm{d}t^2$ es normal a M, y necesitamos probar que dt/ds = constante y $\mathrm{d}\mathbf{t}/\mathrm{ds}$ es normal a M.

$\mathrm{d}\alpha/\mathrm{dt} = (\mathrm{d}\alpha/\mathrm{ds})(\mathrm{ds/dt}) = \mathbf{t}(\mathrm{ds/dt})$. Como $\mathrm{d}\alpha/\mathrm{dt}$ es paralela, su longitud $|\mathrm{ds/dt}|$ es constante. Como ds/dt es continua, ds/dt es una constante $\neq 0$, y por lo tanto dt/ds, que es su inversa, es una constante.

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d^2\alpha}{ds^2} = \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)\left(\frac{d^2t}{ds^2}\right)$$

Como dt/ds es constante $d^2\mathrm{t}/\mathrm{d}s^2 = 0$ y $\mathrm{d}\mathbf{t}/\mathrm{ds}$ es normal porque $d^2\alpha/\mathrm{d}t^2$ lo es.
$\square$

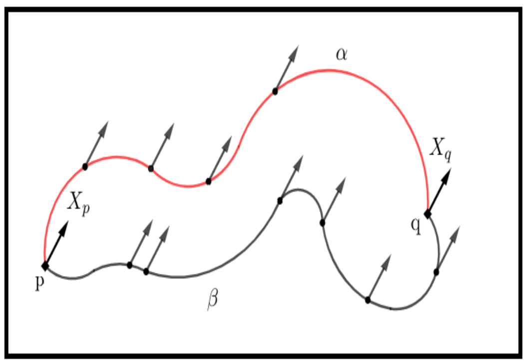
Observación 5.10. *Si dos superficies son tangentes a lo largo de una curva, el transporte paralelo a lo largo de la curva para cada una de las superficies es el mismo, esto es porque tienen la misma recta normal y por lo tanto la misma diferenciación covariante.*
En particular el vector tangente a la curva se transporta paralelo a lo largo de una de las superficies si y sólo si lo hace en la otra, esto es, la curva es geodésica de una de las superficies si y sólo si lo es de la otra.

5.3. Dependencia del camino escogido para el transporte paralelo

Una vez entendido el por qué se definen campos vectoriales paralelos tangentes a una superficies a lo largo de curvas que se explica al principio de la lectura de este trabajo, se puede observar que el transporte paralelo depende del camino escogido, es más, se tiene el siguiente resultado:

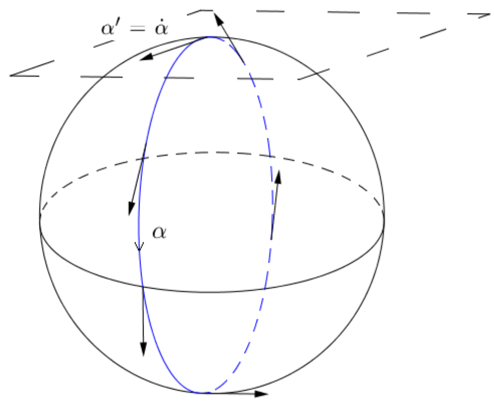
El transporte paralelo no depende del camino escogido si y sólo si la curvatura de Gauss es nula (véase [5], proposición 14.9), que enunciamos aunque no estamos en condiciones de demostrar.

Por un lado, es fácil observar que en el plano $\mathbb{R}^2$, sea cual sea la definición de transporte paralelo a lo largo de una curva, no dependerá de la curva escogida.

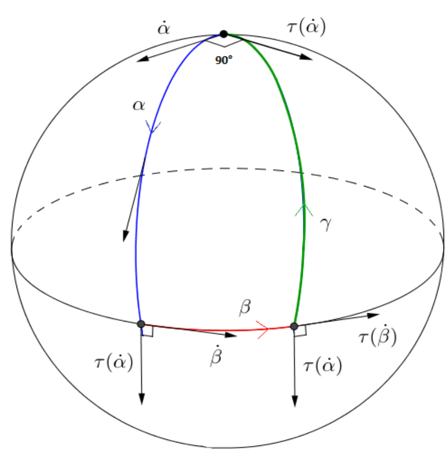


Sin embargo, en $\mathbb{R}^3$, si consideramos por ejemplo la superficie esférica y tomamos como caminos curvas geodésicas (por su simplicidad de actuación para el transporte paralelo) podemos observar lo siguiente:

Sea α un meridiano de la esfera, y por lo tanto una curva geodésica, sabemos que $\dot{\alpha}$ se transporta paralelo conservando la longitud y el ángulo con α (por el Corolario 5.7), y al transportar $\dot{\alpha}$ a lo largo de α volvemos al vector de partida.



Sin embargo, si tomamos un camino definido a trozos en una esfera podemos observar lo siguiente:
Sean α y γ dos meridianos de la esfera y β el ecuador de esta, observamos que $\tau(\dot{\alpha})$ es tangente al meridiano γ, y el transporte paralelo de $\dot{\alpha}$ genera un vector final que no es el vector de partida $\dot{\alpha}$, es decir, $\tau(\dot{\alpha}) \neq \dot{\alpha}$, donde en este caso hemos llamado τ al transporte paralelo para abreviar:



Ahora, vamos a hablar del grupo de holonomía. Sea S una superficie regular y p $\in$ S. Para cada curva regular a trozos α: [0,l] $\longrightarrow$ S con $\alpha(0) = \alpha(l) =$ p, sea P_α: T_p(S) $\longrightarrow$ T_p(S) la aplicación que asigna a cada $\mathbf{v} \in T_p$(S) su transporte paralelo, a lo largo de α, de regreso a p. Como hemos visto, P_α es una isometría lineal de T_p(S). Si β: [l, $\tilde{l}$] $\longrightarrow$ S es otra curva parametrizada regular a trozos con β(l) $=$ $\beta(\tilde{l})$ $=$ p, se define la composición de lazos: $\beta \circ \alpha$: [0, l +

$\tilde{l}] \longrightarrow$ S con $\beta \circ \alpha(s) = \alpha(s)$ si s $\in$ [0,l] y $\beta \circ \alpha(s) = \beta(s)$ si s $\in$ [l,$\tilde{l}$] como se ha visto en la asignatura de teoría global de superficies [4].

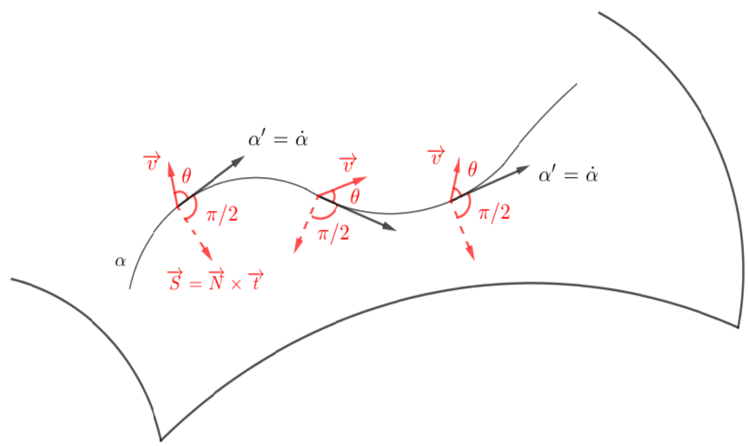
Sea H_p(S) = $\{P_\alpha : T_p(S) \longrightarrow T_p(S)\,;\, \textit{para todas las } \alpha \textit{ que conectan p con p}\}$, donde α es una curva regular a trozos. Este conjunto se denomina grupo de holonomía de S en p, y en él se define la operación $P_\alpha \circ P_\beta = P_{\alpha\circ\beta}$.
Además, podemos tomar como referencia la figura anterior ilustrada como ejemplo de holonomía, en el cual se obtiene un vector final diferente al vector inicial.
La operación de composición de transporte paralelo define estructura de grupo. Como el transporte paralelo es isometría, el grupo de holonomía es subgrupo del grupo de isometrías vectoriales del plano tangente. En el caso de que el grupo de holonomía sea trivial, es decir, compuesto sólo por la identidad, significa que cualquier vector transportado por cualquier lazo vuelve a su posición inicial. Esto es, que el transporte paralelo no depende del lazo escogido.
Si tenemos dos puntos p y q distintos conectados por dos curvas distintas α y β y el grupo de holonomía en p es trivial, entonces se puede definir el lazo $\alpha \circ \overline{\beta}$, donde $\overline{\beta}$ denota el camino inverso. Así, $P_\alpha \circ P_{\overline{\beta}} = P_{\alpha\circ\overline{\beta}}$ es la identidad y, por tanto, $P_\alpha = P_\beta$: el transporte paralelo no depende del camino escogido.

Si la superficie S es conexa por caminos, los grupos de holonomía en puntos cualesquiera son isomorfos. Esto se demuestra de manera análoga a la de los grupos de homotopía.
Sin embargo, los grupos de holonomía y homotopía no están relacionados: para la esfera el grupo de holonomía es el de los giros del plano, esto es, isomorfo a la circunferencia unidad, mientras que el grupo de homotopía es trivial, ya que la esfera es simplemente conexa.
Además añadimos, como simple observación, que el hecho de que el grupo de holonomía sea trivial está relacionado con el hecho de que la curvatura de Gauss del espacio sea nula, pero la demostración de esta propiedad se escapa con mucho del propósito de este trabajo.

5.4. Aproximación del transporte paralelo a lo largo de curvas mediante el transporte paralelo a lo largo de geodésicas

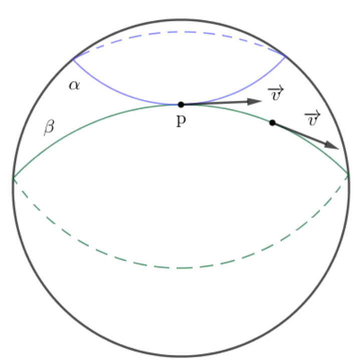
Un importante resultado que podemos utilizar a partir de las propiedades que presentan las curvas geodésicas es la aproximación del transporte paralelo de cualquier curva definida en una superficie a partir de éstas, ya que como hemos visto, estas curvas presentan la importante característica de conservar longitudes y ángulos de cualquier vector con el vector tangente en el transporte paralelo, pues el vector tangente es paralelo, mientras que en una curva que no es geodésica el transporte de un vector tangente paralelamente no es tangente.

Observamos la siguiente figura en la cual se define una curva geodésica α en una superficie y el transporte paralelo de vectores tangentes produce vectores tangentes a dicha curva:

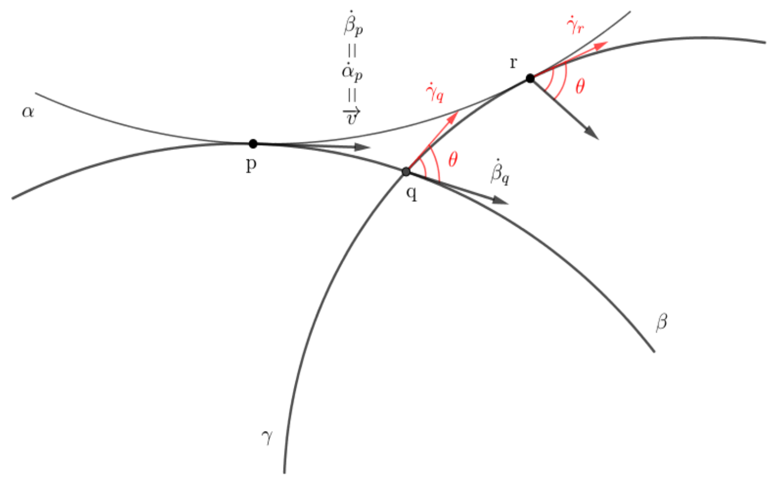


$\dot{\alpha}$ es paralelo y el transporte es isometría.

Si tomamos por ejemplo la superficie esfera con un circulo máximo β y un círculo menor α que tienen el mismo vector tangente $\overrightarrow{v}$ a la superficie en p, dicho vector por β se transporta siendo paralelo por ser β geodésica, pero ¿cómo se transporta por α?

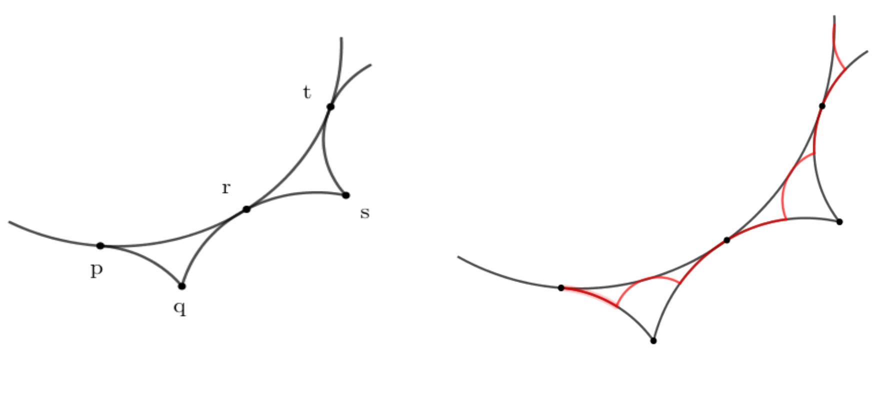


Si tomamos otro círculo máximo γ que pase por un punto q y sea tangente a α en un punto r, obtenemos la siguiente figura:

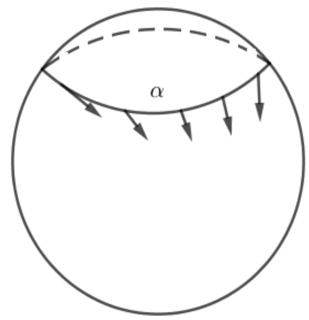


con α circulo menor (no geodésica) y β, γ dos circulos máximos (geodésicas). Observamos que el vector obtenido en r es el trasportando de $\dot{\beta}_q$ por γ y no es tangente a la curva α.

Para ir de p a r tenemos dos caminos: por α o por β y γ, el transporte paralelo depende del camino. Si esta situación la llevamos al límite acercando q y r hacia obtenemos lo siguiente:



El transporte paralelo por α lo aproximamos por curvas regulares a pedazos que sean geodésicas. Esto hace que el vector tangente al transportarlo por el paralelo "vaya cayendo":



Referencias

[1] J.A.Thorpe *Elementary Topics in Diferential Geometry*. Springer- Verlag New York, Heidelberg, Berlin (1979)

[2] Richard S. Millman, George D. Parker *Elements of Diferential Geometry*. Englewood Cliffs, New Jersey (1977)

[3] Manfredo P.do Carmo *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Versión española de José Claudio Sabina de Lis. Alianza editorial, Madrid (1990)

[4] M.A.Amstrong: *Topología Básica*. Reverté, Barcelona (1987)

[5] A.Montesdecoa: *Apuntes de Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*. Universidad de La Laguna (2004) (accesibles en https://amontes.webs.ull.es/apuntes/gth.pdf)