



**Facultad de Educación**

**MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA**

# **MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE LA MAGIA**

*Mathematics through the magic*

**Alumno: Carlos Fernández Cimiano**

**Especialidad: Matemáticas**

**Director/a: Daniel Sadornil Renedo**

**Curso académico: 2016/2017**

**Fecha: Julio 2017**

## RESUMEN

El presente documento, como Trabajo de Fin de Máster, trata sobre el análisis del uso de los juegos de magia como recurso educativo para el proceso de enseñanza – aprendizaje de las Matemáticas. En primer lugar, se estudiará el uso de los juegos como herramienta didáctica y su relación con las matemáticas. A continuación, se analizará más detalladamente el uso de los juegos de magia como metodología de aprendizaje, así como las consecuencias derivadas de su utilización.

También se verá a lo largo del documento una colección de juegos de magia para poner en práctica durante las clases de Matemáticas. Por último, se expondrán mis experiencias personales relacionadas con el empleo de la magia en las clases de Matemáticas a las que asistí durante mi período de prácticas, así como en otras sesiones, donde pude observar su gran utilidad y lo atractivas que resultan para los alumnos.

**Palabras clave:** juego, magia, recurso educativo, Matemáticas.

## ABSTRACT

This document, as End-of-Master Project, deals with the analysis of the use of magic games as an educational resource for the teaching and learning process of Mathematics. Firstly, the use of game as a teaching implement and its relationship with Mathematics will be studied. Then, the use of magic games as a teaching methodology, and the consequences that have resulted from its usage, will be analysed in more detail.

In addition, a collection of magic games to use during the Mathematics sessions is included. Finally, I will present my personal experiences related to the use of magic in the Mathematics sessions that I attended during my practical period, as well as in other sessions, where I could observe its huge utility and how attractive they are to students.

**Key words:** game, magic, educational resouce, Mathematics.

# ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN .....	3
2. OBJETIVOS .....	6
3. MARCO TEÓRICO.....	7
3.1. USO DEL JUEGO EN EL AULA .....	7
3.1.1. ¿QUÉ SE ENTIENDE POR UN JUEGO?.....	7
3.1.2. RELACIÓN ENTRE LOS JUEGOS Y LAS MATEMÁTICAS.....	8
3.1.3. ¿SE DEBE JUGAR EN CLASE DE MATEMÁTICAS?.....	9
3.1.4. FASES Y ESTRATEGIAS DE UN JUEGO .....	12
3.1.5. VENTAJAS E INCONVENIENTES .....	14
3.2. APUNTES HISTÓRICOS SOBRE JUEGOS Y MATEMAGIA.....	16
3.3. LA MAGIA COMO RECURSO EDUCATIVO .....	18
3.4. EXPERIENCIAS MÁGICAS EN ALUMNOS DE SECUNDARIA.....	20
3.5. EFECTOS DE LA MAGIA EDUCATIVA.....	21
4. EJEMPLOS DE JUEGOS DE MAGIA MATEMÁTICA.....	26
4.1. AGUJEROS NEGROS.....	27
4.2. DIVISIBILIDAD.....	29
4.3. OPERACIONES ARITMÉTICAS.....	30
4.4. COMBINATORIA .....	31
4.5. ECUACIONES .....	32
4.6. PARIDAD / INVARIANZA.....	34
4.7. SIMETRÍA .....	35

5. EXPERIENCIAS EN EL AULA .....	38
5.1. SEMANA DE LA CIENCIA.....	38
5.2. ESTALMAT CANTABRIA.....	39
5.3. PRÁCTICAS EN EL COLEGIO CASTROVERDE.....	40
5.4. SESIÓN DE MATEMAGIA EN EL I.E.S JOSÉ MARÍA PEREDA.....	43
6. CONCLUSIONES.....	45
BIBLIOGRAFÍA .....	47
ANEXOS .....	51
ANEXO A. FICHAS DE JUEGOS DE MATEMAGIA.....	51
A.1. AGUJEROS NEGROS .....	51
A.2. DIVISIBILIDAD .....	53
A.3. OPERACIONES ARITMÉTICAS .....	55
A.4. COMBINATORIA.....	57
A.5. ECUACIONES.....	59
A.6. PARIDAD / INVARIANZA.....	61
A.7. SIMETRÍA .....	63
ANEXO B: OPINIONES DE LOS ALUMNOS SOBRE LA MATEMAGIA .....	65

# 1. INTRODUCCIÓN

El juego constituye una parte intrínseca de la naturaleza del hombre. Desde bien pequeños, jugamos con todo tipo de cosas: piedras, cartas, canicas,... Empleamos los juegos para aprender y desarrollar nuestro conocimiento acerca del mundo que nos rodea. Dentro de este contexto, se sitúan los juegos de magia. La magia es un arte que ha ido evolucionando a lo largo de su historia. Comenzó siendo una táctica para el espectáculo; pero durante su evolución, su papel ha ido cambiando hasta llegar a formar parte de la educación.

No solo el juego forma parte de la vida del ser humano, ya que las Matemáticas también aparecen en muchos aspectos de nuestra vida cotidiana. Las Matemáticas se manifiestan en diferentes campos: ciencia, tecnología, economía, arte,... Muchas actividades requieren, en mayor o menor medida, del conocimiento matemático. Sin embargo, desde el punto de vista social, las Matemáticas se han considerado desde hace mucho tiempo una materia árida y difícil de comprender, lo cual puede conducir al desánimo y al desinterés por parte de los alumnos.

Como indica García (2013), uno de los grandes objetivos de la educación es la búsqueda de metodologías que permitan alcanzar un aprendizaje lo más eficiente posible. Los docentes tienen un papel fundamental para lograr dicha meta. Son los encargados de provocar el estímulo de los alumnos para que éstos pongan en práctica todos sus conocimientos y facultades. Dentro de este contexto, si se emplean los juegos educativos como estrategia didáctica, como herramienta auxiliar en clase de Matemáticas, la formación de los estudiantes será más atractiva y se logrará despertar el interés por las Matemáticas.

Diversos autores defienden el uso de los juegos en el aula como recurso educativo (García, 2013). Londoño (2004) indica que los juegos educativos, además de cumplir la función recreativa, contribuyen a desarrollar y potenciar distintas habilidades y capacidades de la intervención educativa. De la misma manera, Martínez (2000) cita que la magia de las clases es un objetivo de los docentes, de manera que a través de la actividad lúdica y motivadora, logran

captar la atención de los alumnos hacia la materia. Asimismo, Borges (2000) afirma que el juego constituye una parte vital para el desarrollo integral del alumnado, ya que mediante él se adquieren conocimientos y habilidades y, sobre todo, brinda la oportunidad de conocerse a sí mismo, a los demás y al mundo que nos rodea. También Peña (2000) sostiene que los juegos educativos influyen en la capacidad de socialización de los alumnos, ya que permiten que éstos desarrollen aptitudes favorables a su aprendizaje, tanto sociales como intelectuales. Como ellos, otros muchos apoyan el empleo de los juegos como herramienta didáctica; por lo que puede resultar interesante plantear una metodología basada en su utilización.

El presente documento pretende analizar una metodología didáctica diferente de la metodología tradicional que se desarrolla durante las clases de Matemáticas: el uso de los juegos de magia en Matemáticas, conocido también como *Matemagia*. Mediante esta técnica, se pretende, por un lado, despertar el interés de los alumnos y aumentar su motivación, fomentando su participación en el proceso de enseñanza – aprendizaje y, por otro lado, facilitar la comprensión y explicación de las ideas y conceptos matemáticos a través de una herramienta más atractiva e intuitiva para el alumnado. Tal y como mencionan Alegría y Ruiz (2002, p. 147):

*Magia y matemáticas han sido compañeros de viaje durante mucho tiempo. Tanto los magos como los matemáticos están motivados por el sentido de sorpresa que representa el misterio esencial del mundo. Los magos muestran tales hechos sorprendentes mientras que los matemáticos tratan de explicarlos: la ciencia de la ilusión versus la ilusión de la ciencia.*

Este documento está estructurado en 4 capítulos principales, junto con 2 anexos complementarios. El capítulo 2 menciona los objetivos de la realización del proyecto. En el capítulo 3, se agrupan los aspectos que se han considerado más significativos acerca del uso de los juegos en las clases de Matemáticas: relación entre los problemas matemáticos y los juegos, justificación de si se puede jugar o no en clase de Matemáticas, ventajas e inconvenientes de su uso, etc. Asimismo, dado que el estudio se centra en una tipología de juegos

concreta (juegos de magia), se lleva a cabo un análisis histórico de los juegos de magia en relación a las Matemáticas, así como un estudio acerca de las consecuencias y efectos del empleo de la magia educativa como recurso didáctico en Matemáticas. El capítulo 4 contiene una serie de juegos de magia a emplear durante las sesiones de Matemáticas. Dentro de dicho capítulo, se incluyen juegos de diferentes tipologías, su desarrollo y el razonamiento del fundamento matemático en el cual están basados. En el capítulo 5, se recogen las experiencias personales del empleo de la magia matemática en diferentes sesiones en las que he participado y colaborado durante el desarrollo del proyecto. Finalmente, en el capítulo 6 se adjuntan las conclusiones derivadas del presente estudio. Por último, se incluyen 2 anexos que reúnen un conjunto adicional de juegos de magia matemática a llevar a cabo en clase y las valoraciones personales de los alumnos acerca del uso de la magia durante las sesiones de Matemáticas a las que asistí con ellos.

## 2. OBJETIVOS

Los objetivos fundamentales a alcanzar mediante la realización del presente proyecto son los siguientes:

- Analizar el uso de los juegos como estrategia didáctica en las clases de Matemáticas.
- Justificar si se debe o no jugar en clase de Matemáticas.
- Valorar y estudiar la componente lúdica de las matemáticas en relación a los juegos de magia.
- Justificar la importancia de la utilización de juegos de magia como recurso educativo.
- Estudiar los efectos del uso de la magia educativa en clase de Matemáticas.

De esta manera, se pretende responder a las siguientes preguntas:

*¿Se pueden utilizar juegos de magia durante las clases de Matemáticas?*

*En caso afirmativo, ¿cómo pueden emplearse?*

A lo largo del documento, se desarrollarán los diferentes objetivos aquí mencionados. Finalmente, en el capítulo 6. *Conclusiones*, se contestarán a las preguntas planteadas a partir de los resultados y análisis obtenidos.

## 3. MARCO TEÓRICO

### 3.1. USO DEL JUEGO EN EL AULA

#### 3.1.1. ¿QUÉ SE ENTIENDE POR UN JUEGO?

Como punto de partida, es necesario definir el objeto principal de estudio del presente trabajo; en este caso, los juegos de magia, englobados dentro del término más general de juego. La acepción más directa y conocida es la que nos proporcionan los diccionarios y enciclopedias. Si se toma la definición que nos ofrece la Real Academia Española, el juego se entiende como un “ejercicio recreativo o de competición sometido a reglas, y en el cual se gana o se pierde”.

Huizinga (1943), en su obra *Homo ludens*, define el juego como una “acción u ocupación libre, que se desarrolla dentro de unos límites temporales y espaciales determinados, según reglas absolutamente obligatorias, aunque libremente aceptadas, que tiene su fin en sí misma y va acompañada de un sentimiento de tensión y alegría” (p. 45). Bright, Harvey y Wheeler (1985) aceptan la definición de Huizinga, pero aportan unas características adicionales a su significado:

- Se trata de una ocupación voluntaria.
- Es un desafío contra una tarea (solitario) o un oponente.
- Se rige por un conjunto de reglas definidas que abarcan todas las maneras de jugar al juego.
- Representa una situación arbitraria claramente delimitada en el tiempo y en el espacio, desde la actividad de la vida real.
- Desde el punto de vista social, las situaciones de los juegos se consideran de importancia mínima.
- El juego está delimitado claramente en el espacio y en el tiempo. El estado exacto que se alcanza durante el juego no se conoce a priori al comenzar el mismo.
- El juego finaliza tras un número finito de movimientos en el espacio – tiempo.

Como puede observarse, son diversas las definiciones que se han hecho sobre este término. Si se toman los elementos comunes a estas definiciones, y a otras que se pueden encontrar, se puede caracterizar el juego de la siguiente manera: se trata de una actividad libre y lúdica, tanto física como mental, que el jugador ejecuta voluntariamente para divertirse. Está sometida a unas normas propias, limitadas espacial y temporalmente, y tiene un carácter incierto (el jugador no conoce previamente el resultado de su desarrollo) e improductivo (no se busca un fin utilitario).

La persona que realiza el juego lo hace con el fin de entretenerse y, en ciertas ocasiones, con un fin educativo. De esta manera, el juego debe partir siempre de un medio contextualizado a la práctica habitual de la persona. Cada vez que se desarrolla un juego, se ponen en práctica habilidades, estrategias, destrezas y, consecuentemente, competencias (Martín, 2015).

### **3.1.2. RELACIÓN ENTRE LOS JUEGOS Y LAS MATEMÁTICAS**

A primera vista, los lazos existentes entre los juegos y las matemáticas parecen no existir. Sin embargo, la relación entre ambos es más evidente de lo que se imagina.

Cuando se resuelve un problema matemático, se parte de unos datos o situaciones iniciales, a través de los cuales y siguiendo un conjunto de procedimientos y convenios establecidos, se plantea una estrategia a seguir para obtener la solución del mismo. Si se analiza un juego desde esta perspectiva, se puede observar que en él también hay una descripción de la situación o situaciones iniciales, unas normas de juego (equivalentes a los convenios y procedimientos matemáticos), las jugadas que se van produciendo (que corresponderían a los diferentes pasos del proceso deductivo), las estrategias parciales o tipos de jugadas (que serían la aplicación de resultados parciales en las matemáticas) y la obtención de estrategias generales de juego (correspondientes a la obtención de nuevos resultados). En este contexto, ganar una partida, ya sea desde su inicio o a partir de una situación dada, o afrontar satisfactoriamente un lance del juego, sería el equivalente a la correcta resolución de un problema matemático (Corbalán, 1994). Además, según como señala D'Andrea (2012), hay que emplear habilidades relacionadas con las

matemáticas para ganar un juego (observar jugadas, contar, deducir resultados, planificar nuevas jugadas y analizar posibles nuevas estrategias o resultados).

Corbalán (1994) comenta que “aunque no se pueda siempre hablar de actividad matemática en relación a ellos, los juegos proporcionan situaciones en las que la actividad de investigación se parece mucho a la de las personas que tratan de resolver un problema de matemáticas” (p. 19). Esto es mucho más evidente en el aula ya que resulta más sencillo situar un determinado problema matemático como un juego, y no como un simple resultado.

La relación es aún más estrecha si se habla del diseño de juegos. Diseñar un juego consiste en modelar y simular situaciones interesantes que se abordan para poder resolverlas (Corbalán, 1994). Se trata de una tarea esencial y profundamente matemática, por lo que es de especial interés desarrollar esta faceta. Algunos de los juegos más famosos y más jugados son de este tipo, como el ajedrez o la rayuela. Es más, los juegos que perduran en el tiempo y se extienden por todo el mundo constituyen, en muchas ocasiones, modelizaciones de situaciones reales. Su continuidad a lo largo del tiempo sugiere que las situaciones que representan y/o los modelos empleados son muy apropiados. Dado que la práctica matemática se basa, en su mayoría, en la realización y resolución de problemas, el estudio de dichos juegos puede resultar interesante. Asimismo, es destacable que el empleo de juegos ya realizados supone “una actividad que comporta acciones de tipos muy parecidos a los que se realizan cuando se hacen matemáticas” (p.21). Por lo tanto, existen más relaciones entre los juegos y las matemáticas de las que, aparentemente, se suponían en un principio.

### **3.1.3. ¿SE DEBE JUGAR EN CLASE DE MATEMÁTICAS?**

En ciertas ocasiones, durante las clases de Matemáticas, los docentes han podido oír a los alumnos haciendo algunos tipos de comentarios como:

*“¡Las Matemáticas son complicadísimas!”*

*“¡Esto es una pérdida de tiempo!”*

*“¡Las Matemáticas son aburridas!”*

*“Pero esto... ¿para qué me sirve?”*

Desde el punto de vista social, las Matemáticas son consideradas como una asignatura que no gusta o genera sentimientos y sensaciones negativas (rechazo, miedo, nervios, indiferencia,...). A raíz de estas ideas por parte los estudiantes, puede parecer necesario replantearse la metodología de enseñanza de las Matemáticas y aproximarse a algunos contenidos desde otra perspectiva. Una de las estrategias que pueden producir un cambio de actitud favorable de los alumnos hacia las Matemáticas es la práctica y utilización de juegos didácticos para la enseñanza de diferentes conceptos matemáticos (Corbalán, 1994)

Diversos autores defienden el uso de los juegos y actividades lúdicas dentro del aula, como Miguel de Guzmán, Fernando Corbalán y Martin Gardner, entre otros. Esta metodología de enseñanza fomenta el desarrollo integral del estudiante ya que cumple con la satisfacción de ciertas necesidades psicológicas, sociales y pedagógicas, y ayuda a potenciar una gran variedad de habilidades, destrezas y conocimientos indispensables para el desarrollo escolar y personal de los alumnos (Fernández, 2014).

Martin Gardner (1987), en relación al uso de las Matemáticas desde una filosofía recreativa, afirma:

*Con seguridad, el mejor modo de despertar a un estudiante consiste en presentarle un juego matemático, un puzzle, un truco mágico, una paradoja, un modelo o cualquiera otra de entre una veintena de posibilidades que los profesores aburridos tienden a evitar porque parecen frívolas. (p.8)*

Esto no quiere decir que sólo mediante el uso de los juegos en el aula se genere una mejora significativa del aprendizaje; por lo que tampoco se debe abusar de este tipo de actividades en el aula. Tal y como menciona Maldonado (2013), si se introducen los juegos en el aula y se retira la enseñanza “seria”, se estarían cometiendo los mismos fallos que si no se incluyen. Para Gardner (1987) “lo que tiene que haber, evidentemente es un juego recíproco entre seriedad y frivolidad. La frivolidad mantiene alerta al lector. La seriedad hace que el juego merezca la pena” (p. 8)

Igualmente, Miguel de Guzmán (2016) relaciona el juego y la enseñanza de las matemáticas a través del siguiente pensamiento:

*El juego y la belleza están en el origen de una gran parte de la matemática. Si los matemáticos de todos los tiempos se la han pasado tan bien jugando y han disfrutado tanto contemplando su juego y su ciencia, ¿por qué no tratar de aprender la matemática a través del juego y de la belleza? (p. 227)*

No obstante, De Guzmán (1984) también señala que existen diferencias trascendentes entre la práctica del juego y la práctica de la matemática. Normalmente, las reglas de un determinado juego no son tediosas, largas ni complicadas ya que lo que se busca es la diversión y la posibilidad de entrar en acción. Muchos problemas matemáticos tampoco requieren de instrucciones complejas, pero “la matemática no es sólo diversión, sino ciencia e instrumento de exploración de su realidad propia mental y externa y así ha de plantearse” (p. 6). Aun así, el juego puede resultar una herramienta motivadora, estimulante, agradable e incluso apasionante para iniciar a los más jóvenes en el mundo de las matemáticas.

Además, hay que considerar ciertas premisas acerca del empleo del juego educativo en la clase de Matemáticas. Como señala Fernández (2014), los juegos no son exclusivamente útiles para hacer “tragar” las Matemáticas a los alumnos, pues pueden utilizarse en diferentes situaciones y con objetivos diversos. Además, no sólo sirven para conseguir el aprendizaje de ciertos conceptos matemáticos, sino que su mayor interés reside en el desarrollo de los contenidos procedimentales y actitudinales. Como se ha mencionado anteriormente, durante el transcurso de un juego se desarrollan capacidades matemáticas, como recoger datos, deducir, conjeturar, etc. En relación a los aspectos actitudinales, los juegos fomentan el desarrollo de valores como el respeto a las opiniones ajenas, valorar sus opiniones, etc.

Por lo tanto, y a raíz de las ideas y valoraciones expresadas a lo largo del epígrafe, se puede confirmar que es posible jugar en clase de Matemáticas.

### **3.1.4. FASES Y ESTRATEGIAS DE UN JUEGO**

Debido a la semejanza existente entre la estructura de las matemáticas y de los juegos, las herramientas y procedimientos aplicados en la resolución de problemas matemáticos pueden emplearse para el desarrollo y resolución de los juegos (De Guzmán, 1989).

Entre las diferentes fases de resolución de problemas, o de juegos matemáticos para este caso, destaca la teoría heurística de George Polya, un matemático que intentó generalizar los métodos empleados por las personas para la resolución de problemas y describir el proceso de enseñanza para aprender a resolverlos. En su libro *Cómo plantear y resolver problemas*, desarrolló las cuatro fases de la resolución de problemas siguiendo un desarrollo heurístico. El método heurístico, según Torres (1986), es aquel en el cual se cede al estudiante el protagonismo en el proceso de enseñanza – aprendizaje ya que debe ser él mismo quien, a través de la indagación y la investigación, descubra la solución de los problemas. En este contexto, el papel del docente es de guiar al alumno, despertando su interés y orientando su actividad.

Las cuatro fases definidas por Polya son las siguientes (Polya, 1989):

1. Comprender el problema
2. Concebir un plan
3. Ejecutar el plan
4. Examinar la solución obtenida

A pesar de que el método de las cuatro fases de Polya se dirigía a la resolución de problemas, se puede emplear en el mismo contexto para los juegos matemáticos, tal y como hizo De Guzmán (1984) de la siguiente manera:

1. Antes de hacer, tratar de entender: No se trata de una idea absurda, ya que muchas personas se lanzan a hacer cosas de manera caótica para probar si aciertan por casualidad. Hay que analizar las partes del juego (reglas, fichas, funcionamiento,...) y hasta jugar un poco con ellas para familiarizarse con su forma de actuar.

2. Tramar una estrategia: se deben buscar conexiones con otros elementos conocidos. Al final de esta fase, se debe definir un plan de ataque concreto. Para idear esa estrategia, puede resultar útil contestar a ciertas preguntas como: ¿Has visto este juego en alguna otra ocasión o alguno que se le parezca? ¿Conoces algún aspecto del otro juego que pueda serte útil en éste? ¿Puedes emplear el mismo modo de proceder? ¿Puedes, al menor, resolver parte del juego? ¿Puedes resolverlo hacia atrás?... Hay que realizar un buen esquema mental de los puntos principales del juego y encontrar pistas en las diferentes funciones de sus partes.
3. Mirar si la estrategia ideada lleva al final: se trata de poner en práctica los planes definidos. En el caso de tener varias ideas en mente, hay que llevarlas a cabo de una en una, siguiendo un orden, y no limitarse exclusivamente a una única estrategia. Si la estrategia elegida es eficiente, hay que estudiarla para comprobar que no es casualidad.
4. Sacarle jugo al juego: una vez resuelto el juego, hay que tratar de ver la razón por la cual la estrategia ha funcionado. Se debe aprovechar la solución para asimilar bien la experiencia.

Las similitudes entre el método heurístico para la resolución de problemas matemáticos y su aplicación para la resolución de los juegos se pueden resumir a través de la siguiente tabla (Salvador, 2012):

	<b>PROBLEMA</b>	<b>JUEGO</b>
<b>1. COMPRENDER EL PROBLEMA</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comprender qué se pide.</li> <li>• Comprender qué se quiere encontrar.</li> <li>• Comprender los datos iniciales.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comprender los requisitos.</li> <li>• Comprender los movimientos.</li> <li>• Comprender cómo se gana.</li> </ul>
<b>2. CONCEBIR UN PLAN</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Existe un problema parecido.</li> <li>• Formular conjeturas.</li> <li>• Seleccionar posibles estrategias.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿He jugado algún juego similar?</li> <li>• ¿Qué puedo hacer?</li> <li>• Seleccionar posibles estrategias.</li> </ul>
<b>3. EJECUTAR EL PLAN</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ejecutar un plan y examinar la validez de la conjetura.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Qué movimientos hacen que el jugador progrese?</li> </ul>
<b>4. EXAMINAR EL RESULTADO</b>	Se ha resuelto el problema: <ul style="list-style-type: none"> <li>○ ¿Cuál es la estrategia general?</li> <li>○ ¿Existe otra estrategia?</li> <li>○ ¿Funciona con problemas similares?</li> <li>○ ¿Siempre funciona?</li> </ul>	El juego ha finalizado: <ul style="list-style-type: none"> <li>○ ¿Por qué he ganado/perdido?</li> <li>○ ¿Hay otra forma de ganar?</li> <li>○ ¿Es la mejor estrategia?</li> <li>○ ¿Y si se modifican las reglas?</li> </ul>

*Tabla 1. Relación entre el método heurístico para la resolución de problemas matemáticos y los juegos (Salvador, 2012)*

De esta manera, los juegos nos pueden enseñar, además de contenidos matemáticos, diversas estrategias para ganarlos, como pensar “de atrás hacia delante” o plantearse el hecho de que el juego esconde alguna regularidad o patrón que permita elaborar dicha estrategia. No obstante, no todos los juegos tienen estrategias para ganar, sino “para no perder”, de forma que los jugadores, si juegan bien, podrán ganar o empatar, pero nunca perder.

### **3.1.5. VENTAJAS E INCONVENIENTES**

Las ventajas y beneficios de uso de juegos en el aula durante el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas parecen ser bastante evidentes. Un juego matemático bien escogido conlleva un conjunto de beneficios sobre el alumno, tales como la motivación, el entusiasmo, la diversión,...

Según palabras de Salvador (2012), desde un punto de vista metodológico, un juego puede emplearse para introducir un tema, ayudar a comprender mejor los conceptos nuevos, afianzar los ya adquiridos, lograr una mayor destreza en un algoritmo o descubrir la importancia de una cierta propiedad, entre otros. Todos estos aspectos se desarrollan más adelante, en relación a los juegos de magia, en el epígrafe 3.3. *La magia como recurso educativo*.

No obstante, insertar un juego dentro del aula puede suponer algunas consecuencias negativas. En primer lugar, los juegos pueden dar problemas organizativos: espacios para llevarlos a cabo, ruido,... En muchas ocasiones, los padres y los profesores (e incluso, los propios alumnos) consideran que las clases ideales, en las que mejor se trabaja, son aquellas en las cuales hay un completo silencio. En consecuencia, la generación de ruido excesivo en clase se considera un problema importante por parte del profesor, que cree que el resto de los profesores debe pensar que lo que allí se hace no es serio, lo cual implica un problema de índole social (Corbalán, 1994).

Por otro lado, existen ciertas dificultades materiales: en algunos centros no se dispone del material suficiente en cuanto al número de alumnos que hay en el aula; por lo que es el propio docente el que debe proporcionar dicho material, lo que conlleva un trabajo extra.

Por último, hay que destacar los aspectos institucionales. Como dice Corbalán (1994), una razón por la cual no se realizan ciertos métodos innovadores de enseñanza en el aula es debido a la llamada “tiranía de los programas”, que son demasiado extensos y hay que finalizar bajo todo tipo de presiones. De esta manera, el juego no es un método eficiente por sí solo, ya que su uso debe estar dirigido como herramienta didáctica. Jugar no es suficiente para aprender, sino que es necesario la explicación de los contenidos a través de las clases magistrales y la realización de ejercicios y problemas empleando los métodos tradicionales (Fernández, 2014).

### 3.2. APUNTES HISTÓRICOS SOBRE JUEGOS Y MATEMAGIA

Los juegos de magia y las matemáticas están íntimamente relacionados. Algunas actividades matemáticas han tenido una componente lúdica que ha dado lugar a una gran parte de los juegos matemáticos que han surgido de ella.

En tiempos de los pitagóricos, ya se realizaban estudios acerca de los números, empleando las configuraciones que formaban las piedras. En esa época, los números se relacionaban más con cualidades místicas que con el ilusionismo (Alegría & Ruiz, 2002). Ciertos descubrimientos, como el hecho de que los tres números consecutivos 3, 4 y 5 formen un triángulo rectángulo (terna pitagórica) o que se puede formar un cuadrado mágico con los nueve primeros números naturales, han fomentado la creencia de que algunos números tienen poderes mágicos (Alegría, 2008). De entre todos los matemáticos, Euclides fue el primer gran pedagogo que supo emplear el valor didáctico de la sorpresa producida por la “magia” en las matemáticas, tal y como se recogía en su obra, ya perdida, *Pseudaria* (Libro de Engaños) (De Guzmán, 1984).

En la Edad Media, Fibonacci (1170 – 1250) desarrolló una matemática numérica a través de las técnicas aprendidas de los árabes, utilizando los juegos como herramienta. Mediante los juegos matemáticos, logró asombrar a sus contemporáneos, hasta al mismo emperador Federico II, el cual le proclamó como *Stupor Mundi* (Asombro del mundo).

En el Renacimiento, Cardano (1501 – 1576), escribió su obra *Liber de ludo aleae*, un libro sobre juegos de azar con el cual se anticipó en el tratamiento matemático de la probabilidad que posteriormente desarrollarían otros autores como Pascal y Fermat. En esta época, surgieron los llamados *duelos matemáticos*, consistentes en resolver problemas algebraicos, en los que participaban famosos matemáticos como el propio Cardano y Tartaglia, entre muchos otros.

En el siglo XVII, hay que destacar a Leibniz (1646 – 1716) como el gran impulsor de esta actividad lúdica intelectual, apareciendo posteriormente otras figuras como Euler (1707 – 1783) o Johann Bernoulli (1667 – 1748). Gauss (1777 - 1855), gran aficionado a los juegos de cartas, anotaba las manos que

recibía en cada juego para realizar un análisis estadístico posteriormente. A su vez, Hamilton (1805 - 1865) estudió el problema de recorrer todos los vértices de un dodecaedro regular sin repetir ninguna arista y volviendo al punto de partida (camino hamiltoniano). Otros ilustres científicos también mostraron su interés sobre los juegos matemáticos, como Hilbert, von Neuman o Einstein.

En el siglo XX, destaca Charles Lutwidge Dogson (conocido como Lewis Carroll). Su firme pensamiento matemático se entremezclaba con su gusto por los juegos, dando lugar a un conjunto de enigmas matemáticos, puzzles, paradojas lógicas, juegos de cartas y acertijos relacionados con el tablero de ajedrez, entre otros. Tal como indica Gardner (1996), su interés por estos dos últimos se ve plasmado en dos de sus obras más famosas: *Las aventuras de Alicia en el País de las Maravillas* y *Alicia a través del espejo*. De hecho, muchos de sus juegos siguen siendo empleados actualmente por algunos magos en sus exhibiciones.

En cuanto a la recopilación de juegos de magia basados en las matemáticas, hay que resaltar la labor de Martin Gardner (1941 – 2010). Fue un periodista que dedicó parte de su tiempo a la redacción de relatos. Durante toda su vida, se interesó mucho por las matemáticas, la física y la ciencia, en general. Gardner compaginaba su trabajo con otras aficiones como la lectura de libros que le marcaron enormemente, como *El Mago de Oz* y *Alicia en el País de las Maravillas*, y el ajedrez, a partir del cual desarrolló multitud de juegos de magia. De hecho, su libro *Mathematics, Magic and Mystery* es el primero que se dedica completamente a la magia matemática (Blasco, 2007).

Actualmente en España, se puede destacar a Juan Tamariz (Madrid, 1942), que además de ser considerado como uno de los mejores magos del mundo, es el autor de diversos juegos basados en propiedades matemáticas, denominados por él mismo como *juegos automáticos*. Por otro lado, resalta la labor de otros expertos en magia matemática, que ejercen como profesores de matemáticas de diferentes niveles educativos, como por ejemplo Fernando Blasco (Madrid, 1968), profesor de la Universidad Complutense de Madrid, con un perfil didáctico y divulgador y otros docentes como Pedro Alegría (UPV/EHU), Álvaro Conde (CSEU La Salle, Madrid), Carlos Vinuesa (profesor

del IES Villa de Valdemoro), así como blogs y páginas web de divulgación de juegos matemáticos, entre las que destaca *DivulgaMAT* o el portal *Magia Matemática*, creado por Juan Sebastián Barrero.

### **3.3. LA MAGIA COMO RECURSO EDUCATIVO**

Como se ha mencionado anteriormente, por la similitud de la estructura entre los problemas matemáticos y los juegos, resulta evidente que existen una gran variedad de actividades y actitudes comunes que se pueden desarrollar eligiendo un buen juego. En el contexto del presente trabajo, dicho juego será un juego de magia.

De esta manera, la magia puede emplearse para diferentes propósitos, entre los cuales pueden destacarse los siguientes:

*i. La magia como instrumento de motivación*

Se puede afirmar que los alumnos están dispuestos a aprender única y exclusivamente si éstos “quieren” aprender (Vaello, 2011). Sin embargo, esta actitud no surge de manera espontánea, sino que debe ser inducida por el propio docente. En este contexto, el uso de la magia proporciona un instante asombroso dentro de la rutina de las aulas. A través de la magia, se conseguirá que las clases sean más divertidas y dinámicas. De esta manera, se genera en el alumno un mayor grado de atención, participación y de incentivación en el aprendizaje.

*ii. La magia como técnica para llamar la atención*

Tan importante como la motivación es la atención de los alumnos. Sin la atención, es muy difícil poder enseñarles algo. Mediante un aprendizaje divertido, los alumnos pondrán interés en lo que se está explicando y se conseguirá el objetivo buscado: que quieran aprender. Así, los juegos de magia son idóneos para captar la atención de los alumnos, ya que cuentan con elementos a su favor como la sorpresa, la intriga, el misterio,... Una vez captada su atención, todo lo que se diga o se haga en los minutos siguientes será atentamente estudiado y escuchado por ellos (Ruiz, 2015).

iii. *La magia como descanso entre actividades*

La magia es un recurso “polivalente”. En ciertas ocasiones, puede darse el caso de que surja, en el aula, una sensación de aburrimiento por parte de los alumnos ya que éstos consideran que la materia que se está explicando es demasiado árida y tediosa; por lo que el docente puede valorar que se haga un pequeño descanso. Otras veces, tras finalizar series de ejercicios, se producen tiempos muertos. En esos cortos instantes, los docentes pueden proporcionar a los alumnos recursos como juegos de matemagia, de manera que los alumnos pueden aprovechar ese tiempo para hacérselos unos a otros. Además, inconscientemente estarán aprendiendo y asimilando conceptos. Asimismo, estas actividades pueden realizarse no sólo en el aula durante los descansos de matemáticas, sino que pueden seguir “jugando” en los recreos y enseñar a los compañeros de otros cursos lo que han aprendido durante la clase. (Casas, 2014)

iv. *La magia como elemento de “premio”*

Los juegos de magia también pueden emplearse como premio al buen comportamiento o al trabajo bien hecho. Tal y como menciona Ruiz (2015), esta técnica puede parecer un poco banal, pero es bastante efectiva. Al ofrecerles la oportunidad de realizar un juego al finalizar la clase, los alumnos estarán intrigados y expectantes por saber qué les mostrará el profesor, por lo que harán todo lo que esté en su mano para que la magia se lleve a cabo (en este caso, las condiciones que les haya impuesto el profesor para que éste decida realizar el juego). Y no sólo eso, sino que el simple hecho de premiar las buenas actitudes puede llegar a fomentarlas durante el resto del curso escolar. Por lo tanto, si esta opción se utiliza de manera adecuada, se puede sacar un buen partido de ella.

v. *La magia como introducción a un tema de interés*

En muchos momentos, la frase *¡Sacad el libro!* viene relacionada con el comienzo de un nuevo tema y los alumnos se inquietan ante lo que puede ser una sesión de teoría aburrida. Sin embargo, si se comienza el

tema de forma “mágica”, los alumnos estarán más enganchados y su grado de implicación será mayor.

vi. *La magia como iniciación a la investigación*

La magia se puede introducir como una unidad didáctica dentro de la asignatura. Los alumnos pueden preparar una investigación acerca de algún mago del pasado o del presente, leer acerca de su biografía, investigar en Internet, practicar algunos juegos de magia,... Asimismo, los alumnos pueden investigar acerca de los propios juegos e intentar descubrir el “truco” que hay detrás de ellos.

Otros autores proponen, además, el empleo de los juegos de magia como elemento de mediación ante posibles conflictos y comportamientos disruptivos que puedan surgir en el aula (Ruiz, 2015) o como elemento de detección y tratamiento de errores (Corbalán, 1994). No obstante, estos dos aspectos quedan fuera del objeto de estudio del presente trabajo.

### **3.4. EXPERIENCIAS MÁGICAS EN ALUMNOS DE SECUNDARIA**

En el mundo que nos rodea, hay muchas cosas que un adolescente no comprende del todo. Para ellos, cualquier nueva experiencia, cualquier cosa que no sea común para él, por muy simple que sea, puede parecerle magia: agitar un vaso con agua y aceite y que nunca lleguen a mezclarse, echar ácido sobre una roca y que ésta comience a producir burbujas, frotar una vara de plástico con un paño y atraer pequeños trozos de papel... Estas experiencias están fuera de lo que, a priori, puede parecer habitual. Se han empleado herramientas y elementos usuales y se ha conseguido algo fuera de lo común.

Hay que tener en consideración este aspecto si se quiere introducir la magia en las aulas. Para que la magia sea efectiva, para que los alumnos se ilusionen, es fundamental que se utilicen materiales que sean comunes y normales para ellos: lápices, folios, calculadoras, sacapuntas, etc. De esta manera, “si ocurre algo sorprendente con esos materiales, verán magia” (Ruiz, 2015, p.30).

Además, es vital conocer su manera de percibir el mundo y presentar la magia con ideas sencillas que puedan comprender completamente. Tienen que entender el objetivo del juego; por ejemplo, que se va a adivinar un número pensado o que se ordenarán de cierta forma un conjunto de cartas entremezcladas. Así, entenderán mejor cuándo llega el final del juego. Por esta razón, los adolescentes se sorprenden cuando se adivina un número que habían pensado previamente. Ellos saben con certeza que ese número no se ha dicho en ningún momento del juego, por lo que la probabilidad de que se acierte es pequeña. Un mago puede hacer en pedazos a su ayudante y luego recomponerlo, pero para un adolescente puede ser igual de mágico que si adivinas un número que ellos hayan pensado.

Por consiguiente, se deben emplear siempre accesorios y materiales que los alumnos reconozcan y realizar juegos con ideas sencillas que puedan entender sin dificultades. De esta manera, los adolescentes disfrutarán más de los juegos y los vivirán con mayor pasión.

### **3.5. EFECTOS DE LA MAGIA EDUCATIVA**

La utilización de juegos de magia en el aula puede favorecer el desarrollo y crecimiento de determinadas competencias y valores. Además, su incidencia puede afectar no exclusivamente a los alumnos, sino también a los propios docentes. En relación a los alumnos, la magia educativa les proporciona novedades didácticas que favorecen y promueven el aprendizaje innovador frente a los propios procesos estandarizados de enseñanza (Rodríguez, 2015). En cuanto al profesorado, les facilita recursos para la motivación, uno de los factores indispensables para el logro del aprendizaje. Pero no sólo motivación para sus alumnos, sino también para ellos mismos. En muchos momentos, los alumnos no se interesan por las clases porque no saben para qué les puede servir, no entienden lo que se está intentando explicar,... Todo ello puede provocar una pérdida de motivación del docente a la hora de impartir su clase. A través de los juegos de magia, los docentes estarán innovando y modernizando su enfoque de enseñanza, empleando metodologías diferentes a las que se suelen usar en las clases rutinarias. De

esta manera, se potencia la dinamización de la clase, incentivando la motivación de los alumnos y, consecuentemente, la del propio profesor.

Por otro lado, la magia hace pensar a los alumnos y fomenta sus capacidades creativas. Cuando los alumnos presencian un juego de magia, se les despierta el interés por querer hacerlo, intentan realizar hipótesis acerca de cómo se desarrolla correctamente y cuáles pueden ser las posibles soluciones. Además, a la hora de querer realizarlo, tratan de crear sus propias historias para su presentación. De esta forma, mágicamente, estarán desarrollando su creatividad al máximo.

Particularmente, el empleo de las matemáticas aplicado a la magia potencia y desarrolla el pensamiento matemático de los alumnos. A través de juegos matemáticos, se consigue que los alumnos disfruten con las matemáticas de una manera más recreativa. Además, propicia el desarrollo de una actitud positiva hacia las matemáticas, presentándolas de una manera más atractiva de lo normal (Corbalán, 1994; Ruiz, 2015)

Asimismo, la realización y ejecución de los juegos de magia puede favorecer la mejora de la comunicación lingüística de los alumnos. Por un lado, fomenta el desarrollo de su expresión oral. Al presentar en público los juegos, los alumnos comienzan a moldear una personalidad comunicativa basada en la seguridad y la firmeza, perdiendo poco a poco el miedo a realizar exposiciones frente a un público determinado. Por otro lado, les ayuda a perfeccionar su expresión escrita. Una vez finalizado un juego de magia y explicarlo, se puede pedir a los alumnos que escriban el procedimiento del mismo de la manera más detallada posible, de forma que una persona que no conozca el juego sea capaz de realizarlo por su cuenta sin más que leer las explicaciones.

El empleo de los juegos de magia en el aula también permite el desarrollo de las habilidades sociales de los alumnos, así como el aumento en su autoestima. La ejecución de juegos en el aula facilita las relaciones entre los alumnos, les otorga seguridad y les ayuda a la hora de expresarse (Monescillos, 2013). Cuanto más se practique un juego y se presente ante los demás, los alumnos mostrarán mayor seguridad y confianza en sí mismos. Conde (2013) comenta además que, a través de los juegos de magia, los

alumnos entienden que están haciendo algo fascinante para el resto de la gente y que deben usarlo para divertir, entretener y arrancar una sonrisa a los demás; por lo que la magia “ennoblece el corazón de quien lo practica”. Por otro lado, como bien dice Corbalán (1994) en relación a las matemáticas, los juegos de magia basados en el azar permiten a los alumnos que se consideran con un nivel bajo en matemáticas ganar ciertas partidas a aquellos que siempre destacan en la asignatura, lo cual puede suponer un incremento de su autoestima y una sensación de placer y satisfacción muy motivadora.

Con respecto a la magia matemática, existe un hecho paradójico: los alumnos no se interesan por conocer la prueba de los resultados matemáticos, se conforman con decir que simplemente se lo creen. En cambio, sí que quieren saber en qué se basan los resultados de los juegos de magia (Blasco, 2007). Cuando los alumnos ven un juego de magia, comienzan a hacerse una serie de preguntas de manera espontánea: ¿cómo lo ha hecho?, ¿y si hubiese hecho esto?, ¿y si hubiera usado esto?,... Se trata de un mecanismo “que se corresponde con la necesidad esencial de comprender su entorno para poder interactuar con él” (Ruiz, 2015, p. 25). Por tanto, la magia puede favorecer el desarrollo del pensamiento crítico de los alumnos. Pero ello no significa que se deba explicar siempre el funcionamiento de un determinado juego, sino que el docente, a través de los juegos, debe ayudar a los alumnos a construir un auténtico espíritu crítico con respecto al mundo que les rodea. Además, durante el desarrollo de los juegos, los alumnos se mantienen alerta y analizan cada uno de los movimientos y acciones que se realizan, intentando buscar la resolución de los mismos. De esta forma, inconscientemente, los alumnos desarrollan su atención.

Como se ha explicado, a través de la magia, los alumnos logran centrar su atención en lo que se está ejecutando. En este contexto, Ruiz (2015) expone que los mensajes y las ideas que captan durante esos instantes tendrán un mayor peso y perdurarán durante más tiempo que si sólo escuchan a un profesor que se limita a dar su clase de la manera convencional. Por ello, el uso de la magia en el aula puede convertir a los docentes en personas con una mayor capacidad de influencia; de esta manera, se pueden emplear los juegos de magia unidos con mensajes para la educación en valores, evitar

malas conductas, promover hábitos saludables,... En definitiva, promover el bienestar social de los adolescentes.

Igualmente, la magia contribuye a un mayor acercamiento entre todos los individuos que están en el aula, fomentando la relación psicoafectiva entre los propios alumnos y entre los alumnos y los docentes. Ruiz (2015) afirma, además, que “el uso de la magia por un maestro consigue, a los ojos de los alumnos, aumentar su reputación” (p. 26). Realizar juegos de magia ante los alumnos convierte al profesor en alguien más respetado y admirado, alguien a quien los alumnos, en mayor o menor medida, tienen ganas de volver a ver.

Hay que destacar que estos efectos no son los únicos existentes. Existen otros múltiples impactos del uso de la magia en las aulas que se pueden alcanzar en diversas asignaturas. Sin embargo, en lo que respecta a las matemáticas, esos impactos no adquieren una importancia excesiva. A modo de resumen, se indica a continuación el conjunto de efectos de la magia educativa explicados a lo largo del epígrafe:

- *Estimular el aprendizaje de los alumnos y la motivación del profesorado.*
- *Desarrollar la memoria y la creatividad de los alumnos.*
- *Estimular y desarrollar el pensamiento matemático.*
- *Mejorar la comunicación lingüística de los alumnos.*
- *Aumentar la autoestima y desarrollar habilidades sociales.*
- *Desarrollar su pensamiento crítico y su capacidad de atención.*
- *Enseñar hábitos que fomenten el bienestar social de los adolescentes.*
- *Mejorar las relaciones profesor-alumnos y alumnos-alumnos.*

Como se puede apreciar, los efectos aquí mencionados guardan relación con el desarrollo de algunas competencias de la Ley Orgánica de Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE):

- Competencia lingüística
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología
- Aprender a aprender

- Competencias sociales y cívicas
- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor

## 4. EJEMPLOS DE JUEGOS DE MAGIA MATEMÁTICA

En este capítulo, se presentarán algunos juegos de magia que pueden llevarse a cabo en las clases de matemáticas. Cada uno de los juegos está estructurado de la siguiente manera:

- Instrucciones para realizar el juego
- Explicación y fundamentos del juego

Los juegos de magia pueden catalogarse en diferentes tipos, en función del concepto matemático en el cual están basados. En el presente trabajo, se presentan juegos de magia matemática que se pueden clasificar, según su justificación, de la siguiente forma:

1. Agujeros negros
2. Divisibilidad
3. Operaciones aritméticas
4. Combinatoria
5. Ecuaciones
6. Paridad / Invarianza
7. Simetría

Para cada una de las tipologías, se desarrollará con detalle y explicará un único juego. Asimismo, en el *Anexo A. Fichas de juegos de magia*, se explicarán y mencionarán otros juegos basados en la misma propiedad matemática, así como la fuente de la cual se puede obtener su explicación y fundamento matemático. Hay que señalar que las referencias indicadas a lo largo de este capítulo hacen alusión a la ubicación de los diferentes juegos que se explican, lo cual no implica que dichas referencias sean el origen de los mismos. De hecho, muchos de los juegos de magia más conocidos se usan sin saber el fundamento matemático que hay detrás, y en las referencias empleadas aparecen dichos análisis. Asimismo, algunos de los juegos detallados tienen cabida en varios de los apartados.

## 4.1. AGUJEROS NEGROS

En las matemáticas, algunos procesos repetitivos dan lugar a resultados que se mantienen constantes en iteraciones sucesivas. (Alegría, 2008). De esta manera, se pueden plantear juegos de magia que se basan en plantear operaciones cuyo resultado es siempre el mismo, independientemente del valor inicial. Este tipo de juegos se conocen como *agujeros negros*. Este peculiar nombre guarda relación con el fenómeno astronómico ya que, sea cual sea el valor inicial que se adopte, inevitablemente el resultado final será siempre el mismo. Un ejemplo clásico de este tipo de juegos (y que los alumnos pueden inventarse) son las igualdades algebraicas; por ejemplo:

$$(6X + 12) / 3 - 2X = 4$$

➤ ***El mágico 1089*** (Gadner, 2003)

**INSTRUCCIONES:** Se pide al espectador que piense un número de tres cifras que no sea capicúa. A continuación, como si le hubiese leído el pensamiento, el mago escribe un número en un papel y se lo entrega a otro espectador que mantendrá guardado el papel hasta finalizar el juego.

Posteriormente, se le pide que realice las siguientes operaciones:

1. Cambia el primer y el último dígito entre sí. Las centenas serán las unidades y las unidades serán las centenas. Por ejemplo: 123 → 321.
2. De los dos números que se tiene (el original elegido por el espectador y el obtenido tras cambiar la primera y la última cifra entre sí), resta el menor al mayor.
3. Al resultado obtenido de la resta, vuélvele a intercambiar la primera y última cifra.
4. Suma los dos últimos números.

El resultado de la suma es 1089, que casualmente coincide con el número que había escrito el mago en el papel que custodia uno de los espectadores.

**EXPLICACIÓN:** Se considera el número *abc* (se partirá del supuesto que  $a > c$ ). Al intercambiar las posiciones de la primera y última cifra, se obtiene el número *cba*, y al restar los dos números se obtiene lo siguiente:

$$\begin{array}{r} 100a + 10b + c \\ - 100c + 10b + a \\ \hline 100(a - c) + (c - a) \end{array}$$

Como  $a > c$ , el término  $(c - a)$  es negativo. Para anular ese número negativo, se sustituye una unidad de las centenas por 100 unidades, tal y como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} 100(a - c) + (c - a) &= 100(a - c - 1) + 100 + (c - a) = \\ &= 100(a - c - 1) + 90 + (10 + c - a) \end{aligned}$$

De esta manera, el término  $(10 + c - a)$  ya es un número positivo comprendido entre 1 y 9. Como se puede apreciar, este número siempre tiene el 9 como segunda cifra y la suma de la primera y última cifra es también 9 pues:

$$(a - c - 1) + (10 + c - a) = 9$$

Si ahora se intercambian la primera y última cifra y se suman los dos últimos números, se tiene que:

$$\begin{array}{r} 100(a - c - 1) + 90 + (10 + c - a) \\ + 100(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1) \\ \hline 100(10 - 1) + 180 + (10 - 1) = 900 + 180 + 9 = 1089 \end{array}$$

El juego sólo funciona cuando el número no es capicúa ya que, en caso de serlo ( $a = c$ ), al restar los números  $abc$  y  $bca$  se obtendría un resultado nulo; pero los números capicúas se han descartado desde el inicio. Este juego permite puestas en escena totalmente diversas. Por ejemplo, una vez que el espectador anuncia el resultado final como 1089, se puede enseñar la predicción sosteniendo la hoja del revés, de manera que se leerá 6801, que no se corresponde con la respuesta correcta. El mago puede mostrar perplejidad para después disculparse por ese absurdo despiste y girar la hoja en la posición correcta. De esta manera, se añade un toque de humor a la presentación (Gadner, 2003). Otra posible puesta en escena consiste en escribir una palabra en el papel, en lugar de un número. Cuando el espectador piensa el número se le da un libro y, tras finalizar las operaciones, se le dice

que busque en el libro de la siguiente forma. Se le pide que busque la página correspondiente a las dos primeras cifras del número obtenido (10). Dentro de esa página, la línea correspondiente a la siguiente cifra (8) y, por último, la palabra que corresponda a la última cifra (9). Esa palabra coincidirá con la escrita en el papel (Muñoz, 2004).

## 4.2. DIVISIBILIDAD

Otros juegos matemáticos se basan en la divisibilidad entre números. Entre las reglas de divisibilidad de los números naturales, una de las más utilizadas para realizar juegos de magia es la asociada a la divisibilidad del 9. Todo número cuya suma de cifras es múltiplo de 9 es múltiplo de 9. Gran parte de los juegos de magia matemática basados en la divisibilidad se fundamentan en esta propiedad.

➤ **La cifra tachada** (Muñoz, 2004)

INSTRUCCIONES: Se le pide a un espectador que realice los siguientes pasos:

1. Piensa un número de cuatro cifras.
2. Resta a dicho número la suma de sus cifras.
3. Al número resultante, quítale el número que quieras (que no sea un cero)
4. Dime el resto de cifras, en el orden que quieras.

Una vez que el espectador le dice las cifras, el mago es capaz de saber la cifra que ha tachado.

EXPLICACIÓN: Si a un número cualquiera se le resta la suma de sus cifras, el resultado siempre es un múltiplo de 9.

En efecto, si se considera el número

$$abcd = 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d$$

la operación que se hace es:

$$(1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d) - (a + b + c + d) = 999 \cdot a + 99 \cdot b + 9 \cdot c$$

Por tanto, si se tacha una de las cifras de ese número, el mago sólo debe sumar mentalmente los número que se le van diciendo y, una vez hecha la suma, sólo debe buscar qué cantidad falta para que esa suma sea múltiplo de 9. La cantidad que falta es precisamente la cifra tachada. Puede darse el caso de que al sumar las cifras resultantes, se obtenga directamente un múltiplo de 9, por lo que la cifra tachada debe ser un 9 (la otra posibilidad sería el 0, pero se ha descartado desde el principio).

### 4.3. OPERACIONES ARITMÉTICAS

Este tipo de juegos de magia se basan en la ejecución de las operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación y división) de varios números aleatorios proporcionados por el espectador. La “magia” en este tipo de juegos reside, fundamentalmente, en la rapidez con la cual el mago es capaz de realizar dichas operaciones.

➤ **Suma de Fibonacci** (Gadner, 2003)

INSTRUCCIONES: El mago pide al espectador que anote dos números cualesquiera, uno debajo del otro. A continuación, se le indica que los sume para obtener un tercer número. Posteriormente, se suma el tercer número con el que está situado encima para obtener un cuarto, y esto se prolonga hasta obtener 10 números. Por ejemplo:

1) <b>8</b>	2) <b>5</b>	3) 13	4) 18	5) 31
6) 49	7) 80	8) 129	9) 209	10) 338

Mientras el espectador anota los números (incluyendo los dos primeros), el mago se mantiene de espaldas. Una vez completada la columna, el mago se vuelve y reta al espectador a que él haga la suma de los 10 números con calculadora mientras que el mago lo realizará a mano. Asombrosamente, el mago es capaz de averiguar la suma en cuestión de segundos.

EXPLICACIÓN: A y B son los dos números escogidos arbitrariamente por el espectador. Siguiendo las operaciones que le indica el mago, se obtiene lo siguiente:

1) A	2) B	3) A + B	4) A + 2B	5) 2A + 3B
6) 3A + 5B	7) 5A + 8B	8) 8A + 13B	9) 13A + 21B	10) 21A + 34B

Sumando los 10 números, se obtiene un total de  $55A + 88B$ . Se puede apreciar fácilmente que la suma es igual a 11 veces el séptimo término de la serie ( $5A + 8B$ ).

Por lo tanto, para obtener la suma total no hay más que multiplicar el séptimo término por 11. Para el ejemplo mostrado anteriormente, el séptimo número es 80; por lo que la suma total de la serie será 880 ( $80 \cdot 11 = 880$ )

#### 4.4. COMBINATORIA

La combinatoria es la parte de las matemáticas que estudia los procedimientos y estrategias a seguir para el recuento de los elementos de un determinado conjunto o las diversas maneras de agrupar dichos elementos. La gran parte de los juegos aquí clasificados son juegos de cartas, en los cuales el “truco” del juego se basa, precisamente, en una ordenación de las mismas.

➤ **Orden en el universo** (Muñoz, 2004; Capó, 2012)

INSTRUCCIONES: Se toman, boca abajo, las cartas del 1 al 9 de cualquier palo y se colocan ordenadas de manera decreciente (la primera carta el as, bajo ella el dos, posteriormente el tres y así sucesivamente). El mago muestra al público las cartas para que comprueben que están ordenadas y a continuación pide la colaboración de una persona del público y se le pide que realice los siguientes pasos:

1. Corta el mazo y completa el corte.
2. Divide el mazo en dos montones carta a cara, es decir, coloca la primera carta en un montón, la segunda a otro, la tercera al primer montón,... Y así con todas.
3. Por último, coloca uno de los dos montones sobre el otro.
4. Repite los dos pasos anteriores dos veces más.

Una vez que el espectador haya realizado los pasos anteriores, y siempre con las cartas hacia abajo, el mago muestra la última carta del mazo y pasa, una a

una de abajo hasta arriba del mazo, tantas cartas como indique el valor de la carta mostrada. Tras hacerlo, el mago muestra de nuevo las cartas al público y, asombrosamente, las cartas vuelven a estar en orden.

EXPLICACIÓN: Cuando se colocan inicialmente las cartas como se indica, no importa cómo se realicen los cortes porque se obtiene un bucle formado por las nueve cartas. Al dividir las cartas en dos montones, las cartas pasan de ir consecutivas a ir de dos en dos:

$$\{1 - 3 - 5 - 7 - 9 - 2 - 4 - 6 - 8\}$$

Tras realizar el segundo corte, van de cuatro en cuatro:

$$\{1 - 5 - 9 - 7 - 9 - 2 - 4 - 6 - 8\}$$

Y tras el tercer corte van de ocho en ocho. Sin embargo, al tener nueve cartas, si tras una carta va la correspondiente a ocho cartas después, al ser cíclico cada carta lleva asociada su carta anterior. Por tanto, las cartas vuelven a estar ordenadas tras el tercer corte:

$$\{1 - 9 - 8 - 7 - 6 - 5 - 4 - 3 - 2\}$$

Puede darse el caso de que no comience en el as; es por ello que se mira la última carta y se trasladan de abajo hacia arriba tantas cartas como indique su valor.

Este juego pueden realizarlo varios espectadores a la vez, mientras siguen las instrucciones del mago. La peculiaridad de este juego es la libertad de los espectadores a la hora de realizar los diferentes pasos. Cada uno de los espectadores corta el mazo como quiere, reparte en los montones y la manera de recoger ambos montones puede ser diferente. Los movimientos realizados son completamente aleatorios y, aun así, el resultado siempre es el mismo.

## 4.5. ECUACIONES

Son muy conocidos en el mundo de la magia los típicos juegos de averiguar la edad, el peso, un número pensado,... Se sigue un conjunto de pasos indicados por el mago, asociados a operaciones aritméticas y, tras proporcionarle el resultado correspondiente, es capaz de adivinarlo. Si se

analizan estos juegos de manera más profunda, se observa que están fundamentados en la resolución de ecuaciones.

➤ **Magia en el calendario** (Capó, 2012)

**INSTRUCCIONES:** El mago dará a un espectador un rotulador y un calendario del año que sea. El voluntario elegirá un mes cualquiera y marcará una cuadrícula de 4x4 aleatoria. Una vez definida, comienza una carrera entre el mago y el espectador en calcular la suma de los 16 días que componen la cuadrícula señalada. El mago realizará la suma mentalmente, mientras que el espectador puede ayudarse de una calculadora. Curiosamente, el mago obtiene la respuesta antes que el espectador.

**EXPLICACIÓN:** Una cuadrícula (matriz) cualquiera de cualquier página de cualquier calendario tiene la siguiente forma:

		1	2	3	4	5
6 (a)	7 (a+1)	8 (a+2)	9 (a+3)	10	11	12
13 (a+7)	14 (a+8)	15 (a+9)	16 (a+10)	17	18	19
20 (a+14)	21 (a+15)	22 (a+16)	23 (a+17)	24	25	26
27 (a+21)	28 (a+22)	29 (a+23)	30 (a+24)	31		

*Ilustración 1. Forma de la matriz cuadrada de orden 4 en un mes cualquiera*

Por tanto, si se traduce al lenguaje algebraico, la suma que se debe realizar es la siguiente:

$$a + (a+1) + (a+2) + (a+3) + (a+7) + (a+8) + (a+9) + (a+10) + (a+14) + (a+15) + (a+16) + (a+17) + (a+21) + (a+22) + (a+23) + (a+24) = 16 \cdot a + 192$$

De esta manera, el mago debe multiplicar el primer número de la matriz seleccionada por el espectador por 16 y sumarle 192.

Este juego puede realizarse de manera inversa, es decir, el espectador puede indicarle al mago la suma de la cuadrícula que haya elegido y el mago es capaz de indicar cuál es la matriz. Si el espectador le proporciona al mago el valor de la suma, sólo deberá despejar el valor de  $a$ :

$$S = 16 \cdot a + 192 \quad \rightarrow \quad a = (S - 192) / 16$$

## 4.6. PARIDAD / INVARIANZA

El concepto de paridad es una idea que está presente en muchos aspectos de nuestra vida cotidiana: par – impar, sí – no, blanco – negro, bueno – malo,... Los juegos mencionados en este capítulo explotan la dualidad par – impar que existe entre los números naturales. Por ejemplo, si a un número impar le sumas o restas otro número impar, se obtiene un resultado par. Además, esta dualidad está presente no sólo en los números naturales, sino en otros elementos muy empleados en los juegos de magia, como las cartas o las monedas.

➤ **Cara o cruz** (Alegría, 2008)

INSTRUCCIONES: El mago pide prestadas tres monedas y las deja caer sobre la mesa. A continuación, solicita la ayuda de un espectador. Con el mago de espaldas, el espectador va girando las monedas, una a una, las veces que quiera, pero pronunciando la palabra “giro” cada vez que voltee una de ellas. Una vez finalizado el proceso, el espectador tapa una de las monedas con la mano, tras lo cual el mago se vuelve al público y adivina si dicha moneda está de cara o de cruz.

EXPLICACIÓN: El fundamento de este juego se basa en la siguiente propiedad:

*Si un elemento que admite dos estados está en uno de ellos y se cambia su estado un número par de veces, dicho elemento no cambia de estado. En cambio, si se cambia un número impar de veces, entonces cambiará su estado.*

Al comienzo del juego, se colocan las monedas sobre la mesa y, mientras se explica al espectador lo que tiene que realizar, se cuenta secretamente el número de caras. Si el número es par, el mago debe recordar el número 0; si es impar, debe recordar el número 1.

Mientras el espectador voltear las monedas y pronunciando la palabra “giro”, el mago va cambiando el valor asignado cada vez que la diga: del 0 cambia al 1 y del 1 cambia al 0.

Cuando termina de girar las monedas y tapa una de ellas, el mago debe emplear la siguiente clave para saber en qué posición está la moneda oculta:

- Si el número final es 0, significa que hay un número par de caras. De esta forma, si una de las monedas está de cara y la otra de cruz, la oculta estará de cara; mientras que si las dos monedas están de cara o las dos de cruz, la oculta será cruz.
- Si el número final es 1, entonces habrá un número impar de caras. Por tanto, si el mago ve una moneda de cara y la otra de cruz, la oculta será cruz y si las dos monedas están de cara o las dos de cruz, la oculta será cara.

Este juego puede realizarse con cualquier número inicial de monedas. El efecto es idéntico al original; basta con fijarse en la paridad de las monedas antes y después de la sucesión de giros, aplicando las directrices explicadas. También puede hacerse el juego, pero pidiendo al espectador que oculte dos monedas, en lugar de una. A través de la misma propiedad, se puede adivinar si las monedas tapadas muestran el mismo o distinto estado: si la paridad de las monedas que están a la vista coincide con la inicial, las monedas ocultas muestran el mismo estado; si la paridad han cambiado, las dos monedas estarán en estados diferentes.

#### **4.7. SIMETRÍA**

La simetría está presentes en muchos aspectos de la vida. Los seres humanos en sí mismos somos un claro ejemplo de simetría. Tenemos una “casi” igualdad entre las dos partes de nuestro cuerpo que se obtienen al dividirlo por una línea que pasa por el centro del ombligo y de nuestra nariz. Incluso el mismo Leonardo da Vinci estudió esta simetría a través de su obra *El hombre de Vitruvio*. Además, muchos elementos y fenómenos de la naturaleza gozan también de esta propiedad: las telas de araña, los cristales de un mineral, las celdas hexagonales de un panal... En el siguiente apartado, se explicarán juegos de magia (en este caso, juegos de cartas) en los que la fundamentación está basada en ordenaciones y posiciones simétricas.

➤ ***Alicia en el País de los Espejos*** (Alegría, 2008)

INSTRUCCIONES:

1. Un espectador saca de la baraja 5 cartas cualesquiera y sus correspondientes homónimas (mismo valor y color). A continuación, se colocan en una fila de forma que las cartas homónimas queden equidistantes de los extremos, como si se tratara de un espejo (simetría especular).
2. El mago muestra esta extensión en espejo y explica que una mitad representa el mundo de la realidad y la otra, su imagen especular, el de la fantasía.
3. Tras esto, el mago recoge la extensión, separa las cartas en dos montones, alternativamente de derecha a izquierda (mezcla *faro*) y deposita una de las mitades sobre la otra. Realiza esta operación varias veces, simulando que ambos mundos se entrecruzan entre sí.
4. Una vez mezcladas, se separan las primeras cinco cartas en un montón sobre la mesa y las otras cinco en otro montón. Para que se produzca la unión de los dos mundos, un espectador debe deletrear la palabra “*ESPEJISMO*” pasando por cada letra una carta de arriba abajo del montón que prefiera. Se levantan las primeras cartas y se comprueba que son homónimas.
5. El mago muestra a continuación las siguientes cartas para demostrar que la unión sólo se ha materializado con las cartas superiores; para lo cual va girando las cartas superiores de cada montón y formando otros montones con ellas. Mientras los va formando, el mago invierte las cartas de uno de los montones pero deja el mismo orden de las cartas del otro montón.
6. Repartidas las cartas restantes en los nuevos montones, el mago “invoca” al espíritu de la ilusión y va girando las cartas superiores de cada montón. En este caso, sí coinciden todas las cartas y los mundos separados por el espejo se han unido completamente.

EXPLICACIÓN: Este juego se basa en la propiedad de la mezcla *faro*, a través de la cual dos cartas separadas la misma distancia de los extremos vuelven a

quedar equidistantes tras la mezcla. Al dividir la baraja en dos montones, se está realizando una mezcla faro, por lo que la distribución de las mismas sigue siendo simétrica (se han dispuesto inicialmente de esta manera). Al unir ambas mitades y separar las primeras cinco cartas, se sigue manteniendo la simetría especular. Por tanto, para que las primeras cartas de cada montón sean homónimas, y no se rompa la simetría, es necesario trasladar la última carta de uno de los montones a la posición superior, pasando de arriba abajo tantas cartas como sea necesario (al deletrear *“ESPEJISMO”*, se trasladan las cartas de arriba abajo, quedando la carta inferior del montón antes del deletreo en la parte superior al finalizar). El resto de cartas mantiene la simetría especular; por lo que es necesario dar la vuelta a uno de los montones para que las cartas superiores de cada uno sean homónimas.

## 5. EXPERIENCIAS EN EL AULA

En el siguiente capítulo, relataré mis experiencias personales con la matemagia en las diferentes sesiones a las que asistí durante el desarrollo del presente proyecto. Se plasmarán las observaciones y vivencias relativas a cada una de las ocasiones en las que colaboré (cómo se plantearon los juegos, el uso que se hizo de los mismos, la colaboración por parte de los alumnos, sus reacciones,...)

A lo largo de la elaboración de este trabajo, he podido aplicar y analizar la magia matemática en diferentes lugares y momentos:

- Semana de la Ciencia.
- ESTALMAT Cantabria.
- Prácticas en el Colegio Castroverde.
- Sesión de Matemagia en el I.E.S José María Pereda.

A continuación, se detallan las experiencias vividas en cada una de estas situaciones.

### 5.1. SEMANA DE LA CIENCIA

En esta primera ocasión de contacto con la magia matemática, como aún llevaba poco tiempo dentro del estudio de la matemagia, actué de simple observador. Se trataba de una sesión de matemagia dentro de un conjunto de actividades relativas a la Semana de la Ciencia, a cargo de Daniel Sadornil, en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Cantabria, celebrada el 9 de noviembre. La sesión iba destinada a 33 alumnos de 1º y 2 de la ESO del Colegio Sagrada Familia. Durante el desarrollo de la misma, estuve examinando diversos aspectos. En primer lugar, la presentación de los diferentes juegos, que se realizó de manera dinámica y de forma que los alumnos comprendiesen el objetivo final del juego. A continuación, el desarrollo de los mismos. La temática de los juegos era variada, y en muchos de ellos se sacaban voluntarios para colaborar en el propio juego. Por último, las reacciones de los alumnos. Muchos se quedaban fascinados con el resultado y pedían que se repitiese el juego para ver si lograban sacar el “truco”.

Como primera toma de contacto, fue bastante productiva ya que pude tener en cuenta ciertas consideraciones para el momento en el cual comenzase a desarrollar y participar activamente en otras sesiones. Por un lado, la forma de presentación de los juegos. Los juegos de magia son como “productos” que se quieren vender, por lo que es necesario “deleitar” al público y atraer su atención hacia ellos. De esta forma, si se consigue captar su interés desde el inicio, lo más probable es que lo mantengan a lo largo del desarrollo del mismo. Por otro lado, los diferentes modos de llevar a cabo su desarrollo y el modo de expresarse durante la explicación de las diferentes fases de los mismos. Los juegos pueden presentarse a públicos totalmente diversos, desde niños y adolescentes hasta profesores y otros expertos en la materia. En todo caso, es necesario que la forma de expresarse, sobre todo a la hora de realizar las explicaciones, sea comprensible para todos los asistentes ya que, en caso contrario, pueden perder el interés y distraerse durante el progreso del juego. Además, el desarrollo debe ejecutarse de manera amena y divertida. No se trata de una clase magistral sino de una metodología totalmente diferente. Los alumnos deben quedarse “cautivados” por la matemagia; por tanto, es necesario que lo vean como una vía entretenida e interesante de aprender Matemáticas.

## **5.2. ESTALMAT CANTABRIA**

La segunda sesión de matemagia en la cual participé fue una dentro del proyecto ESTALMAT Cantabria el 3 de diciembre. Este proyecto trata de detectar, orientar y estimular de manera continua, durante dos cursos, el talento matemático excepcional de estudiantes de 1º y 2º de ESO a través de una sesión por semana de 3 horas. En esta sesión, colaboré con Belén Hallado, profesora de Matemáticas del I.E.S Besaya y del proyecto ESTALMAT. En esta ocasión, iba a empezar a poner en práctica alguno de los juegos de magia que había estudiado; así que nos organizamos para determinar qué juegos íbamos a desarrollar cada uno. Yo realicé únicamente dos juegos: uno de números (*Suma de Fibonacci*) y otro de cartas (*Orden en el Universo*). Quería comenzar mi andadura con los juegos de magia de forma suave. La sesión se desarrolló en un aula de la Facultad de Ciencias, para 15 alumnos aproximadamente. Belén comenzó a presentar y desarrollar los

juegos, mientras yo observaba el aula. Muchos de los juegos que había escogido ya los había empleado Daniel Sadornil en la anterior sesión a la que asistí, así que pude comparar diferentes maneras de presentar y abordar un mismo juego. Al igual que Daniel, sacaba voluntarios del público para que participasen en el desarrollo del juego. Una vez que finalizaba un juego, se les prestaba material y se les dejaba un pequeño tiempo para ver si eran capaces de explicar el fundamento del mismo. En algunos momentos, debido a la dificultad que suponía la explicación, se les daba una pequeña pista para ayudarlos. Hubo bastantes alumnos que lograron descubrir el truco matemático que había detrás de algunos juegos. Por último, se les repetían los juegos, explicando mientras tanto su fundamento, tras lo cual los alumnos, con el material que se les había entregado, pudiesen llevarlo a cabo por ellos mismos y poder analizar los distintos resultados en función del procedimiento que habían seguido. Yo desarrollé mis dos juegos a la mitad y al final de la sesión, respectivamente. Como Daniel y Belén, saqué voluntarios para que colaborasen conmigo. Mientras explicaba el procedimiento del juego, los alumnos estaban completamente atentos, posiblemente para ir analizando los pasos e investigar cuál era el fundamento. Al final, les ayudé a demostrarlo para que lo pudiesen hacer ellos.

He de decir que, antes de comenzar la sesión, estaba nervioso ya que no sabía si las explicaciones que iba a hacer eran del todo adecuadas y las iban a comprender sin dificultad ni cómo iba a ser su reacción. No obstante, a medida que desarrollaba los juegos, empecé a sentirme más aliviado. Hubo muy buen *feedback* por parte de los alumnos e iban entendiendo mis explicaciones. Fue una primera experiencia como matemago muy enriquecedora.

### **5.3. PRÁCTICAS EN EL COLEGIO CASTROVERDE**

Durante el período de prácticas (27 febrero – 28 abril) correspondiente al Máster de Formación del Profesorado, pude desarrollar todo lo que había estudiado (y estaba estudiando por aquel entonces) acerca de la matemagia en las clases ordinarias de un centro escolar, en mi caso, el Colegio Castroverde en Santander. En las distintas ocasiones en las que pude aplicar los juegos de

magia yo era el único responsable y organizador, sin ningún tipo de respaldo o ayuda de otras personas que estuviesen inmersas en este mundo (como ocurría en las dos primeras sesiones en las que colaboré). Ese hecho resultaba ideal para poder analizar todos los aspectos que podían resultarme interesantes a la hora de desarrollar este documento.

A lo largo de los dos meses que estuve en el Centro, empleé los juegos de magia con fines diversos tal como se menciona en el epígrafe 3.3. *La magia como recurso educativo*:

- Como técnica para llamar la atención: Durante los primeros días que impartí clase (semanas 2 y 3), hubo algunos momentos en los que la clase comenzaba a descontrolarse; así que empleé algunos juegos con el objetivo de captar su atención hacia mí. Resultó una técnica muy eficiente ya que no sólo me prestaban atención durante el desarrollo del juego, sino que también la mantenían tras finalizarlo, cuando ya comenzábamos con la clase ordinaria en sí. Además, con ello conseguía no sólo captar su atención sino también despertar su interés y motivación con respecto a la asignatura.
- Como herramienta de “descanso”: En las semanas medias del período de prácticas (semanas 4, 5 y 6), durante las clases en las cuales los alumnos habían trabajado correctamente, y que mostraban cansancio y caras de agotamiento, utilicé la matemagia como una forma de desconexión rápida del ritmo de trabajo, tras la cual los alumnos “recuperaban” la energía y continuaban con sus labores.
- Como elemento de premio: Este aspecto estaba relacionado con el uso de la matemagia como técnica para llamar la atención. Empleé los juegos con este propósito, fundamentalmente, en la parte final de mis prácticas (semanas 7 y 8). En aquellos momentos en los cuales había demasiado revuelo en la clase, les proponía a los alumnos hacer un juego de magia antes de terminar siempre y cuando se comportasen correctamente. Me gustaba llamarlo premio, y no chantaje, porque en ningún momento se les “obligaba” a los alumnos a hacer algo que no

quisieran (como ocurre en un chantaje) sino que se les recompensaba si su comportamiento era adecuado. Esta técnica tenía dos objetivos diferenciados:

- *Método de persuasión*: no siempre ha funcionado, y en algunas ocasiones tuve que descartar la realización del juego ya que tuve que llamarles la atención varias veces por su comportamiento.
  - *Método de premio*: siempre ha funcionado. En aquellas clases en las cuales su comportamiento mejoraba y se mantenía, se realizaba el juego de magia que se había prometido.
- Como introducción a una unidad didáctica: Durante mis prácticas, asistí no exclusivamente a clases de Matemáticas, sino también de Física y Química. En una de esas clases, íbamos a comenzar a estudiar la estática de los sistemas físicos, es decir, su equilibrio. Dentro de este contexto, realicé un juego de magia que podía relacionarse con el tema que se iba a empezar; en este caso, dicho juego era *Orden en el Universo*. Con él pude explicar, de manera introductoria al tema, que aunque se desplace un sistema de su situación de equilibrio, éste va a tender a volver a dicha situación, tal y como ocurre con las cartas en el juego. De análoga manera, utilicé juegos basados en la simetría a la hora de introducir a los alumnos de Matemáticas en las características de las funciones, entre las cuales se encuentra concretamente la simetría.
  - Como introducción a la investigación: En algunos de los juegos que llevé a cabo, incité a los alumnos a que fuesen ellos mismos los que descubrieran el truco matemático que había detrás. Para ello, en varias ocasiones realicé de nuevo los juegos para que analizaran todos los aspectos del mismo y que pudiesen sacar sus propias conclusiones. En algunos juegos (como por ejemplo, *La cifra tachada*) les resultó sencillo obtener el truco matemático; en otros era algo más laborioso y les di alguna pequeña pista para que lo obtuviesen ellos mismos.

En definitiva, mi período de prácticas fue el más productivo en cuanto al uso de la magia como recurso educativo en las matemáticas y pude corroborar los diferentes usos de la misma que se han detallado anteriormente.

#### **5.4. SESIÓN DE MATEMAGIA EN EL I.E.S JOSÉ MARÍA PEREDA**

En esta ocasión, asistí de nuevo junto con Daniel Sadornil; aunque esta vez iba a colaborar activamente a través de la realización de juegos. La sesión iba destinada a los alumnos de 1º de ESO del I.E.S José María Pereda de Santander para el 26 de mayo. Unos días antes, preparamos la sesión y decidimos la batería de juegos que realizaríamos cada uno. La sesión se dividía en dos pases de una hora lectiva de duración. Durante la primera, asistieron los alumnos de 1ºA y 1ºB, mientras que los alumnos de 1ºC y 1ºD acudieron a la segunda. Al ser dos personas, nos organizamos de manera que hiciésemos los juegos alternativamente, uno cada uno. Cada uno de nosotros preparamos 6 juegos diferentes. En mi caso, preparé tres juegos de cartas y tres de números. En cada uno de los juegos, tanto Daniel como yo seguimos las mismas pautas: explicábamos las pautas de manera dinámica y divertida, sacábamos voluntarios entre el público para que desarrollasen el juego con nosotros y, en algunas ocasiones, pedíamos la colaboración de algún alumno más, además del voluntario, para ver que estaba siguiendo nuestras instrucciones. Sin embargo, dado el escaso tiempo que teníamos para realizar cada una de las dos sesiones, no tuvimos la oportunidad de incitar a los alumnos a que pudiesen obtener el fundamento matemático que había tras los juegos.

Una de las cosas que más me sorprendió fue la enorme diferencia entre los dos grupos de alumnos. Durante la primera sesión, los alumnos manifestaban más predisposición a participar, prestaban más atención y se les veía más entusiasmados con la matemagia. En cambio, había menos alumnos del segundo grupo que se ofrecían voluntarios, en determinadas ocasiones se distraían durante el desarrollo del juego y algunos de ellos mostraban indiferencia e impasividad por el resultado de los juegos. Quería pensar que las causas de esto no eran debido al desinterés por la matemagia sino al

cansancio de los propios alumnos. Era viernes y ya se empezaba a notar el agotamiento acumulado de la semana. Pero más sorprendente fue la diferencia de criterios entre nosotros y los profesores del instituto. Según ellos, el segundo grupo tenía a los mejores alumnos y, sin embargo, fueron los que menos predisposición e interés mostraban durante la sesión de matemagia. Por tanto, a partir de la experiencia vivida, se puede decir que los mejores alumnos no siempre responden mejor. Aun así, la gran mayoría de los alumnos, en mayor o menor medida, disfrutaron de la sesión de juegos de magia que les habíamos preparado; por lo que yo estaba satisfecho y salí con muy buen sabor de boca.

## 6. CONCLUSIONES

Como conclusiones extraídas a lo largo de la elaboración del presente documento, y haciendo referencia a lo mencionado en el Capítulo 2. *Objetivos*, se puede dar respuesta a las siguientes preguntas:

*¿Se pueden utilizar juegos de magia durante las clases de Matemáticas?*

*En caso afirmativo, ¿cómo pueden emplearse?*

Tal y como se ha indicado, diversos autores defienden el uso de los juegos como estrategia didáctica para la enseñanza de las matemáticas. Se ha demostrado que el uso de los juegos fomenta capacidades y habilidades que favorecen un correcto desarrollo positivo adolescente, tanto desde el punto de vista académico como el social y personal. Asimismo, el empleo de los juegos en clase de Matemáticas potencia un cambio de actitud positiva hacia las mismas, consideradas desde siempre como una asignatura aburrida y difícil de comprender.

Igualmente, existe una estrecha relación entre los juegos y las matemáticas, hasta el punto en el que las herramientas y técnicas de resolución y planteamiento de los problemas matemáticos pueden extrapolarse para los juegos; pero no sólo existe esa conexión entre los juegos y las matemáticas, sino que también hay gran cantidad de problemas y ejercicios matemáticos que tienen una componente lúdica (por ejemplo, el acertijo de la col, la oveja y el lobo).

En consecuencia, sí que es posible utilizar los juegos de magia en las clases de Matemáticas; si bien es cierto que no debe abusarse de su uso. Si se emplean exclusivamente los juegos de magia como herramienta de aprendizaje y se aparta la metodología tradicional en su totalidad, se estarían cometiendo las mismas equivocaciones que si no se incluyen. Por lo tanto, debe existir un equilibrio entre la “seriedad” y la “diversión”.

Los juegos de magia, en clase de Matemáticas, pueden emplearse con objetivos diversos: como instrumento de motivación, como técnica para llamar la atención, como herramienta de descanso, como método de premio, como introducción a un tema de interés, como propia unidad didáctica,... En

cualquier caso, el uso de la matemagia en el aula, como se ha mencionado anteriormente, fomenta el desarrollo de determinadas competencias y valores en los alumnos, relacionadas con las recogidas en la LOMCE. Pero no sólo tiene repercusión sobre los alumnos, sino también sobre los propios docentes y las interrelaciones profesorado – alumnado. En cuanto a la primera, permite innovar su metodología de enseñanza y evitar su propia desmotivación. En relación a la segunda, mejorando la “reputación” del docente a ojos de los alumnos y facilitando las relaciones entre ambos. Todo esto queda contrastado a través de mi experiencia práctica en las diferentes sesiones y eventos en los cuales tuve la oportunidad de llevar a cabo los juegos de magia matemática.

De esta manera, la utilización de los juegos de magia en el aula supone un conjunto de ventajas para ambas partes. Por lo tanto, puede resultar interesante su introducción como metodología de enseñanza de las Matemáticas, con el fin de conseguir un aprendizaje significativo y que, tanto los profesores como los alumnos, disfruten y lo vivan con pasión.

## BIBLIOGRAFÍA

- Alegría, P. & Fernández, S. (2010). Martin Gardner, el mago de la divulgación. *La Gaceta de la RSME*, 13 (4), 671 – 704.
- Alegría, P. & Ruiz de Arcaute, J.C. (2002, Octubre). La magia desvelada. *Sigma*, 21, 145 – 174.
- Alegría, P. (2008). *Magia por principios*. Bilbao: Publidisa.
- Alegría, P. (2010). *Matemáticas en una baraja de cartas: Juegos de magia con cartas basados en principios matemáticos*. <http://www.matematicasenaccion.unican.es/transparencias20092010/magiaycartas.pdf>. Recuperado el 19 de abril de 2017.
- Álvarez, V., Fernández, P. & Márquez, M. A. (2002). Cartomagia matemática y cartoteoremas matemáticos. *La Gaceta Matemática*, 5, 711 – 735.
- Arroyo, A. (2010). *Paridad*. Ponencia desarrollada en el I Seminario del programa ESTALMAT, Castilla y León. <http://www.socylem.es/sitio/index.php/i-seminario-estalmat>. Recuperado el 12 de mayo de 2017.
- Blasco, F. (2007). *Magia: los mejores trucos para entender los números* (4ª ed.). Madrid: Temas de Hoy.
- Bright, G. W., Harvey, J. G. & Wheeler, M. M. (1985). Learning and Mathematics Games. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1, 1 – 189.
- Capó Dolz, M. (2012). *Magia matemática: ¡Sorpréndete, disfruta y aprende!* (1ª ed.). Barcelona: Ediciones B.
- Casas Bernas, N. (2014). *Metodología para enseñar probabilidad y estadísticas mediante juegos de magia en matemáticas de 3º de ESO*. (Trabajo fin de máster). Universidad Internacional de La Rioja, Bilbao.
- Conde, Á. (2013). *Magia y educación: Educación en valores a través de la magia*. <http://alvarocondemago.blogspot.com.es/2013/09/educacion-en-valores-traves-de-la-magia.html>. Recuperado el 19 de abril de 2017.

Corbalán Yuste, F. (1994). *Juegos matemáticos para Secundaria y Bachillerato*. Madrid: Editorial Síntesis.

D'Andrea, C. (2012). Juegos matemáticos y análisis de estrategias ganadoras. *Trabajos de Matemática – Serie “B”*, Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemáticas, Astronomía y Física (61/2012). <https://atlas.mat.ub.edu/personals/dandrea/D'Andrea.pdf>. Recuperado el 20 de abril de 2017.

De Guzmán, M. (1984, septiembre). *Juegos matemáticos en la enseñanza*. Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM) en Santa Cruz de Tenerife, España.

De Guzmán, M. (1989). Juegos y matemáticas. *Revista SUMA*, 4, 61 – 64.

De Guzmán, M. (2016). *Un legado de fe*. Madrid: Grand Guignol Ediciones.

DivulgaMAT: Portal de divulgación de las matemáticas. <http://www.divulgamat.net/>. Recuperado el 19 de abril de 2017.

Fernández César, R. & Lahiguera Serrano, F.J (2014). Matemagia y su influencia en la actitud hacia las matemáticas en la escuela rural. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 89, 33 – 55.

Fernández López, M. (2014). *El juego y las matemáticas*. (Trabajo final de grado). Universidad de La Rioja, La Rioja.

Gadner, M. (2003). *Mathematics, Magic and Mystery*. United States: Dover Publications.

García Solís, P. A. (2013). *Magia y educación*. (Tesis doctoral). Universidad Rafael Landívar, Quezaltenango, Guatemala.

Gardner, M. (1996). *The Universe in a Handkerchief: Lewis Carroll's Mathematical Recreations, Games, Puzzles, and Word Plays*. New York: Springer – Verlag.

Hallado, B. & Sadornil, D. (2014). *Magia Matemática*. Taller desarrollado en el marco del programa ESTALMAT, Cantabria.

Huizinga, J. (1943). *Homo ludens*. Madrid: Editorial Alianza.

Jefatura del Estado (2013). Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. Publicada en *Boletín Oficial del Estado*, No. 295, del 10 de diciembre de 2013. España.

Maldonado Silva, M. A. (2013). *La magia como recurso educativo en el aula de matemáticas de 1º de ESO: la MateMagia*. (Trabajo final de máster). Universidad Internacional de la Rioja, Sevilla.

Martín Vilchez, C. (2015). *El juego como recurso didáctico en el aula de matemáticas*. (Trabajo final de grado). Universidad de Granada, Granada.

McOwan, P. & Parker, M. (2010). *The manual of Mathematical Magic*. London: Queen Mary University.  
[http://www.mathematicalmagic.com/docs/mathsmagic\\_full.pdf](http://www.mathematicalmagic.com/docs/mathsmagic_full.pdf). Recuperado el 19 de abril de 2017.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015). Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. Publicada en *Boletín Oficial del Estado*, No. 25, del 29 de enero de 2015. España.

Monescillos Rubio, M. (2013). *Títeres, cómic y magia como recursos de motivación y comunicación en el aula*. (Trabajo final de máster). Universidad Internacional de la Rioja, Madrid.

Muñoz Santoja, J. (2004, octubre). *Una matemática motivadora: la matemagia*. Taller desarrollado en las VI Jornadas de Educación Matemática de la Comunidad Valenciana, España.

Muñoz Santoja, J. (2008). *Ernesto el aprendiz de matemago* (3ª ed.). Madrid: Nivola.

Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas* (2ª ed.). México: Editorial Trillas.

Quintero, R. (2006, agosto). El truco de  $m$  pilas de Gergonne y el sistema de numeración de base  $m$ . *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 13 (2), 165 – 176.

Real Academia Española (2014). *Diccionario de la lengua española* (24ª ed.). <http://dle.rae.es/>. Recuperado el 23 de marzo de 2017.

Rodríguez Alfieri, R. (2016). *Magia y educación*. (Trabajo final de grado). Universidad Jaume I, Castellón de la Plana.

Ruiz Domínguez, X. (2015). *Educando con magia: El ilusionismo como recurso didáctico* (3ª ed.). Madrid: Narcea.

Salvador, A. (2012). El juego como recurso didáctico en el aula de Matemáticas. Universidad Politécnica de Madrid. <http://www2.camino.upm.es/Departamentos/matematicas/grupomaic/conferencias/12.Juego.pdf>. Recuperado el 12 de mayo de 2017

Torres, P. (1986). El método heurístico en la enseñanza de la Matemática del nivel medio general. *Revista de Educación*, 16 (60), 114 – 120.

Vaello Orts, J. (2007). *Cómo dar clase a los que no quieren* (1ª ed.). Barcelona: Graó.

## ANEXOS

### ANEXO A. FICHAS DE JUEGOS DE MATEMAGIA

#### A.1. AGUJEROS NEGROS

➤ *La fila de nueve* (Alegría, 2008)

• **INSTRUCCIONES:**

1. Coloca en una fila sobre la mesa, de izquierda a derecha y en orden creciente, las cartas del as al nueve de un mismo palo o distinto.



2. Retira una carta de cualquier esquina (la que tú quieras).
3. Vuelve a retirar una carta de la esquina que prefieras (el número de posibilidades aumenta).
4. Retira una carta de cualquier esquina, por última vez.
5. Suma los valores de las tres cartas seleccionadas.
6. Divide el resultado entre 6 (la división es exacta) y busca la carta de la mesa que ocupa el lugar indicado por el cociente, comenzando desde la izquierda.

Parece imposible saber cuál será esa carta, pero me apuesto lo que quieras a que es el cuatro.

- **EXPLICACIÓN:** El producto de tres números consecutivos siempre es múltiplo de 6. Asimismo, la suma de tres números escogidos de las esquinas en la disposición anterior es múltiplo de 6, independientemente del orden de elección. Para comprobarlo, si se toman los restos de las divisiones de cada una de las cartas entre tres, se tiene que una tiene resto = 0 (una de las cartas va a ser múltiplo de 3), otra resto = 1 y la última resto = 2. Además, esta suma también es múltiplo de dos (dos de las cartas seleccionadas son consecutivas, por lo que una de ellas debe ser par); por lo que, al ser múltiplo de 2 y de 3, consecuentemente, será múltiplo de 6.

Si dividimos entre 6, basta con comprobar las posibilidades que tenemos al quitar las cartas y siempre se llegará al 4.

➤ **Cifras pares e impares** (Hallado & Sadornil, 2014)

- **INSTRUCCIONES:** Se pide a un espectador que escriba un número arbitrario.
  1. Contamos el número de cifras pares, de cifras impares y el total de cifras.
  2. Formamos un nuevo número con estos valores, en ese orden ( $n^{\circ}$  de cifras pares,  $n^{\circ}$  de cifras impares y  $n^{\circ}$  total de cifras)
  3. Repetimos las operaciones con el número obtenido sucesivas veces hasta que no haya variación en el resultado.

Irremediabilmente, siempre llegamos al mismo resultado: 123

Ejemplo: 2335839304304 → 6713 → 134 → 123 → 123

- **EXPLICACIÓN:** Resulta evidente que, si el número inicial es  $n > 999$ , una iteración conduce a un número menor que  $n$ . Si se repite el proceso, se obtiene un número menor que 1000 en un número finito de pasos. Es esta situación, es fácil tener en cuenta todos los casos posibles:
  - 3 cifras pares y 0 cifras impares
  - 2 cifras pares y 1 cifras impar
  - 1 cifra par y 2 cifras impares
  - 0 cifras pares y 3 cifras impares

En todos los casos, basta con realizar una única iteración para llegar al número 123.

## A.2. DIVISIBILIDAD

➤ ***El juego sobrenatural*** (Alegría, 2008)

• **INSTRUCCIONES:**

1. Se pide a un espectador que saque una moneda del bolsillo y que escriba en una hoja de papel el año en que fue acuñada. El mago escribe dicho número al revés y resta el menor del mayor.
2. El espectador deberá coger cuatro cartas de la baraja, de palos diferentes, cuyos valores coincidan con los indicados por las cuatro cifras del resultado de la resta (se emplearán los reyes para los ceros).
3. Una vez tomadas, las coloca boca abajo en la mesa, las remueve hasta no saber cuál es cuál y guardarse una de ellas en el bolsillo.

Increíblemente, el mago adivina dicha carta, sin que el propio espectador sepa cuál es la carta que tiene en su bolsillo.

- **EXPLICACIÓN:** Si a un número cualquiera se le resta la suma de sus cifras, el resultado siempre es un múltiplo de 9.

Cuando el espectador retira una de las cartas para guardarla en su bolsillo, el mago toma las tres cartas restantes y, al dejarlas sobre la baraja, las extiende un poco para ver los índices. En primer lugar, se fija en qué palo falta y, a continuación, suma mentalmente sus valores. La carta oculta será del palo que falta y de valor, la cantidad que hay que añadir a la suma para llegar al siguiente múltiplo de 9.

- **Quinceañero** (Hallado & Sadornil, 2014)
- **INSTRUCCIONES Y EXPLICACIÓN:** El mago se dirige a una pareja, chico-chica, y habla acerca de la dualidad del universo: blanco-negro, positivo-negativo, hombre-mujer,... Explica que mucha gente no conoce dicha dualidad que rige las fuerzas universales y que dichas fuerzas se acentúan durante la juventud. A continuación, realiza los siguientes pasos:
    1. El mago muestra la baraja y pide al hombre que las mezcle y a la mujer que corte y reparta tres cartas a su izquierda. Luego, se pide que corte de nuevo y reparta otras tres cartas a su derecha.
    2. Ahora, es la mujer quien mezcla y el hombre debe repartir otros dos conjuntos de tres cartas, uno a su derecha y otro a su izquierda.
    3. Ambos descartan uno de sus montones. El mago puede aprovechar para destacar la similitud o diferencia de la elección. Se le pide a cada uno que mezcle el montón elegido y recuerde la carta inferior. Posteriormente, se le pide a la mujer que coloque sus cartas sobre las del hombre. El mago pone las seis cartas restantes (las de los montones descartados) encima y se coloca el grupo de doce sobre el resto de la baraja.
    4. El mago pide a la mujer que diga un número especial para ella. El número debe estar comprendido entre 13 y 19.
    5. A continuación, reparte sobre la mesa tantas cartas como indique dicho número mientras se explica la relación entre la cartomancia y la numerología. Del número de dos cifras escogido por la mujer, como hay que eliminar las fuerzas negativas, se resta la cifra mayor menos la menor y se separan del montón tantas cartas como dé el resultado. La última carta será la elegida por el hombre. Se separa dicha carta y se coloca el resto de cartas en la parte superior de la baraja.
    6. Ahora, para fortalecer las fuerzas positivas, se hace la suma de las dos cifras y se apartan tantas cartas como indique el valor. Se separa la última carta repartida y se comprueba que ésta es la de ella, mientras que la anterior es la de él.

### A.3. OPERACIONES ARITMÉTICAS

➤ **Prodigio en cálculo** (McOwan & Parker, 2010)

- **INSTRUCCIONES:** Se solicita a un espectador que diga un número cualquiera de cuatro cifras. Dicho número se apunta dos veces en un papel.

A continuación, se le pide que diga otro número de cuatro cifras (puede ser igual o diferente al que había escrito inicialmente). Se escribe dicho número debajo del número de la izquierda.

Tras escribirlo, el mago escribe un número “arbitrario” debajo del número de la derecha. Los cuatro números quedarían dispuestos de la siguiente manera

4825            4825

3625            6374

Una vez escritos los cuatro números, el mago reta a los espectadores. Se trata de saber quién es más rápido de realizar el producto de los números dos a dos (por un lado, los de la izquierda y por otro, los de la derecha) y, posteriormente, sumar ambos resultados. Los espectadores incluso pueden ayudarse de la calculadora. Asombrosamente, el mago da la solución en cuestión de segundos.

- **EXPLICACIÓN:** El último número escrito no es casual, sino que resulta de restar del 9999 el último número nombrado. Para el ejemplo ilustrado:

$$9999 - 3625 = 6374$$

Para obtener el resultado final rápidamente, se procede como sigue:

- Se resta una unidad al primer número indicado por el espectador y se escribe su resultado.

$$4825 - 1 = 4824$$

- Se resta 9999 menos dicho número y escribimos su resultado a la derecha del anterior. La unión de los dos números es la suma de los dos productos.

$$9999 - 4824 = 5175 \quad \rightarrow \quad \text{Resultado final} = 48245175$$

➤ **La gran multiplicación** (Capó, 2012)

- **INSTRUCCIONES:** El truco parte del número 12.345.679.
  1. Se le pide a un espectador que escoja un número natural entre el 1 y el 9. A continuación, multiplica dicho número por 9, de manera que se obtiene un número de dos cifras.
  2. Comienza la competición. El mago y el voluntario intentarán multiplicar el número original (12.345.679) con el número de dos cifras del paso anterior. El voluntario puede emplear la calculadora, mientras que el mago lo hará mentalmente. Quien antes obtenga el resultado gana.

Sorprendentemente, el mago da la solución antes de que el voluntario introduzca los datos en la calculadora.

- **EXPLICACIÓN:** El juego se basa en la siguiente relación numérica:

$$12.345.679 \cdot 9 = 111.111.111$$

A partir de dicha relación, se puede deducir fácilmente que:

$$12.345.679 \cdot 18 = 12.345.679 \cdot 9 \cdot 2 = 222.222.222$$

$$12.345.679 \cdot 27 = 12.345.679 \cdot 9 \cdot 3 = 333.333.333$$

...

$$12.345.679 \cdot 81 = 12.345.679 \cdot 9 \cdot 9 = 999.999.999$$

Por lo tanto, cuando el voluntario anuncia el número de dos cifras, el mago ya conoce de antemano el resultado que se va a obtener.

#### A.4. COMBINATORIA

➤ **Las 21 cartas** (Muñoz, 2004)

- **INSTRUCCIONES:** Se toman 21 cartas cualesquiera y se muestran a una persona del público. Mientras el mago va distribuyéndolas en tres montones, sin decirlo en alto, el espectador deberá elegir una de las cartas (también se puede elegir antes de realizar la división por montones). Al finalizar, el espectador indica en qué montón ha quedado su carta elegida; el mago coloca los montones uno sobre otro y vuelve a repartir las cartas en tres montones. Al acabar, el espectador le vuelve a indicar en qué montón ha quedado ahora la carta. El mago vuelve a colocar los montones y se repite el proceso una vez más. Tras colocar los montones por última vez, el mago es capaz de averiguar cuál es la carta que había escogido el espectador.
- **EXPLICACIÓN:** El fundamento del juego se basa en que el mago coloca en cada ocasión el montón donde se encuentra la carta elegida entre los otros dos. En el primer reparto, la carta elegida se encuentra en el segundo tercio del mazo. Tras el segundo reparto, se puede ver fácilmente que la carta queda en alguna de las tres posiciones centrales. Por último, una vez colocadas las cartas tras el tercer reparto, la carta queda situada en el centro del mazo.

Este truco puede realizarse con 9, 15 o 27 cartas; obteniendo el mismo resultado. Para el caso en el cual se utilicen 9 cartas, la carta elegida queda situada en el centro del mazo tras el segundo reparto, por lo que no es necesario realizar un tercero.

Se trata de un juego clásico que mucha gente suele conocer. No obstante, existen algunas variantes del mismo, como el de las 27 cartas basado en el truco de  $m$  pilas de Gergonne y el sistema de numeración de base  $m$  (Quintero, 2006). A partir de dicho truco, se puede aplicar el juego con un número cualquiera de cartas y poder llevar la carta elegida a cualquier posición de la baraja.

- **La herencia de los camellos** (Alegría, 2008)
- **INSTRUCCIONES Y EXPLICACIÓN:** Se trata de explicar el problema clásico de los 7 camellos y 3 hijos, ilustrado con cartas:
    1. *Había una vez un hombre que tenía 7 camellos y 3 hijos. Al morir y abrirse su testamento, en el mismo se decía que “la mitad de sus camellos serían para su hijo mayor, la cuarta parte para su segundo hijo y la octava parte para su tercer y último hijo”* → Para ejemplificarlo, se emplearán 7 cartas cualesquiera que representan los camellos.
    2. *Como el reparto no daba una solución exacta, acudieron al mejor erudito y matemático para que les ayudara. Lo primero que hizo éste fue “prestarles uno de sus camellos”* → En la mesa, caras abajo, se reparten las 7 cartas y se coloca sobre ellas, también cara abajo, un comodín, que representará el camello que el erudito les ha prestado.
    3. *Con aquel préstamo, la herencia era de 8 camellos y le debían uno.* → Mientras se cuentan las cartas en voz alta, se realiza una mezcla Monge: se extrae la primera carta, se coloca la segunda sobre ella, la tercera bajo ambas, y así sucesivamente.
    4. *Con el nuevo número, hizo la división y le dio 4 camellos al primer hijo, 2 camellos al segundo y 1 camello al tercero* → Se extrae del paquete las cartas que ocupan las posiciones pares, que representan la parte de herencia del hijo mayor. Del paquete restante, se extraen de nuevo las cartas en posición par: la herencia del hijo mediano. Por último, se extrae la primera carta: la herencia del hijo pequeño.
    5. *Al completar el reparto, “aún sobraba un camello”, que era justamente el que les prestó el erudito* → Al hacer el reparto de cartas, queda una única carta. Se muestra dicha carta y se comprueba que es, precisamente, el comodín.

## A.5. ECUACIONES

➤ **Adivinar la edad y el número de familiares** (Muñoz, 2004)

- **INSTRUCCIONES:** El siguiente juego puede hacerse con todo el público a la vez y después ir adivinando ambos números individualmente. Sea como fuere, el mago indicará a los espectadores que sigan los siguientes pasos:
  1. Escribe el número de personas que viven en tu casa.
  2. Multiplícalo por 2 y súmale 4.
  3. Al resultado de la suma, multiplícalo por 50.
  4. Súmale 1568 al resultado del producto.
  5. A lo obtenido, réstale el año de nacimiento.

Para finalizar, el mago le solicita al espectador el resultado final de la operación anterior, le pregunta si ha cumplido años en el año presente e inmediatamente el mago indica la edad y el número de personas que viven en su casa.

- **EXPLICACIÓN:** El truco consiste en sumarle, al número obtenido,  $(N - 1768)$  si el espectador aún no ha cumplido años o  $(N - 1767)$  si ya ha sido su cumpleaños, siendo  $N$  el año actual en el que se está en el momento de realizar el juego. Se obtiene un número de tres cifras; la primera indica la cantidad de personas que viven en su casa y las otras dos, su edad.

PASOS	CÁLCULOS
Escribe el número de personas que viven en tu casa	$X$
Multiplícalo por 2 y súmale 4	$2X + 4$
Al resultado de la suma, multiplícalo por 50	$(2X + 4) \cdot 50 = 100X + 200$
Súmale 1568 al resultado del producto	$100X + 200 + 1568 = 100X + 1768$
A lo obtenido, réstale el año de nacimiento	$100X + 1768 - Y$
El mago suma $(N - 1768)$ (suponiendo que el espectador no ha cumplido años)	$100X + 1768 - Y + (N - 1768) = 100X + (N - Y)$

- **El juego del dominó** (Capó, 2012)
- **INSTRUCCIONES:** Un voluntario escoge, sin que el mago lo sepa, una ficha al azar de un juego completo de fichas de dominó y con los dos números que aparezcan en ella, se le pide que haga los siguientes cálculos:
  1. Escoge cualquiera de los dos números y multiplícalo por 2.
  2. Suma 5 al resultado obtenido.
  3. Multiplica por 5 el resultado del paso anterior.
  4. Suma el segundo número de la ficha al resultado anterior.
  5. Resta 7 al último resultado obtenido.

Una vez hechas las operaciones, el voluntario pronuncia el resultado final en voz alta y el mago es capaz de acertar la ficha escogida inicialmente por el espectador.

- **EXPLICACIÓN:** Si se llama  $x$  a uno de los números e  $y$  al segundo, traduciendo los pasos al lenguaje algebraico, se obtiene lo siguiente:

PASOS	CÁLCULOS
Dobla uno de los números	$2X$
Suma 5 al resultado obtenido	$2X + 5$
Multiplica por 5 el resultado del paso anterior	$5(2X + 5) = 10X + 25$
Suma el segundo número	$10X + 25 + Y$
Resta 7 al último resultado obtenido	$10X + Y + 18$

Por tanto, lo único que tiene que hacer el mago es restarle 18 al resultado dado por el espectador. De esta manera, se obtiene un número de dos cifras, donde cada cifra corresponde a cada uno de los números que aparece en la ficha.

## A.6. PARIDAD / INVARIANZA

➤ **La mansión embrujada** (Álvarez, Fernández & Márquez, 2002)

- **INSTRUCCIONES:** Se coloca sobre la mesa nueve cartas caras abajo formando un cuadrado de 3 x 3. Estas cartas representan las habitaciones de una mansión embrujada, pudiendo pasar de una a otra en vertical y en horizontal, pero no en vertical. Una vez que los espectadores hayan comprendido el mecanismo, el mago retira las cartas que ocupan las esquinas y el centro y pide a los espectadores que cada uno se sitúe mentalmente en una de las cuatro cartas que quedan. Luego, se explica que aquella noche aparecieron nuevas habitaciones y se vuelven a colocar las cinco cartas retiradas.

Posteriormente, los espectadores deben realizar la siguiente secuencia:

1. Moveros 4 lugares → al acabar, el mago retira las dos cartas de las esquinas superiores.
2. Moveros 5 lugares → al acabar, el mago retira la carta de la primera fila y la tercera carta de la segunda fila.
3. Moveros 3 lugares → al acabar, el mago retira la segunda carta de la segunda fila y la tercera de la tercera fila.
4. Moveros 1 lugar → al acabar, el mago retira la primera carta de la segunda fila y la segunda de la tercera fila.

Si los espectadores no se han equivocado al moverse, el mago habrá logrado atraparlos a todos en la misma habitación.

- **EXPLICACIÓN:** Supongamos que el conjunto de cartas representa un pequeño tablero de ajedrez, de casillas negras y blancas. La clave está en que, si el número de movimientos es par, estarán en casillas del mismo tipo, mientras que si el número de movimientos es impar, cambian de tipo de casilla. De esta forma, se pueden retirar cartas de posiciones del tipo contrario a donde se encuentran los espectadores. No obstante, para realizar correctamente el juego, es necesario que todos los espectadores se encuentren inicialmente en posiciones del mismo tipo. Por esta razón, se quitan las 5 cartas (todas del mismo tipo) antes de que se sitúen mentalmente en las habitaciones.

➤ **Caras arriba** (Arroyo, 2010)

- **INSTRUCCIONES:** El mago separa la baraja (52 cartas) en dos montones iguales, vuelve uno de ellos caras arriba y solicita a un espectador que realice los siguientes pasos:

1. Mezcla ambos montones al azar las veces que quiera hasta que pueda convencerse de que la distribución de cartas caras arriba y caras abajo sea completamente aleatoria.
2. Reparte 26 cartas (la mitad de la baraja) y entrégame el resto.

El mago pone el paquete a su espalda y anuncia que tratará de saber el número de cartas cara arriba que contiene el paquete del espectador. Secretamente, el mago gira todo su paquete y pide al espectador que cuente el número de cartas cara arriba que tiene su paquete. El mago muestra el suyo y asegura haber colocado las cartas de manera que su paquete contiene el mismo número de cartas caras arriba que el paquete del espectador. Cuenta las cartas y ambas cantidades coinciden.

- **EXPLICACIÓN:** Al principio, siempre hay 26 cartas cara arriba y 26 cartas cara abajo. Independientemente de las veces que se mezcle, siempre estarán en esa proporción. Al dividir la baraja en dos partes iguales, el mazo del espectador contendrá  $k$  cartas caras arriba; por lo que habrá  $(26 - k)$  cartas cara arriba en el mazo del mago, pues siempre hay 26 cartas, y  $26 - (26 - k) = k$  cartas cara abajo. Al dar el mago la vuelta a su paquete, hay  $k$  cartas cara arriba, que son las mismas que contiene el paquete del espectador.

## A.7. SIMETRÍA

➤ **Amores reales** (Alegría, 2008)

- **INSTRUCCIONES:** El mago separa los reyes y las reinas de la baraja. Los extiende sobre la mesa en cualquier orden, con la condición de que los palos deben estar simétricos, es decir, los palos de las cuatro primeras cartas en orden inverso a los de las cuatro últimos (simetría especular). Tras esto, se busca en la baraja el As de corazones, el cual representará a Cupido, y se deja cara arriba en la mesa. Una vez definido a Cupido, el mago entrega el paquete de reyes y reinas boca abajo a un espectador y le pide que siga los siguientes pasos:

1. Reparte caras abajo las cartas sobre la mesa, en dos montones, alternativamente a la derecha y a la izquierda. Coloca uno de los montones sobre el otro.
2. Repite el proceso las veces que quieras.
3. Cuando desees, reparte por última vez las cartas en dos manos, coloca a Cupido cara arriba sobre uno de los montones y deposita el otro montón encima.

Después, el mago extiende el abanico y retira a Cupido junto con las dos cartas que están en contacto con él, tras lo cual entrega de nuevo las cartas al espectador. Se repiten los mismos pasos hasta que todas las cartas estén emparejadas, tras lo cual se mostrarán los cuatro pares de cartas para comprobar que todas las parejas de cada palo se han unido.

- **EXPLICACIÓN:** En una baraja con un número par de cartas, dos cartas que ocupan lugares equidistantes de los extremos vuelven a quedar equidistantes después de una mezcla faro. Al dividir la baraja en dos montones alternativamente, se está realizando una mezcla faro, por lo que la distribución de los mismos sigue siendo simétrica. Cuando se coloca a Cupido en cualquiera de los dos montones y se deposita el otro encima, las dos cartas que están en contacto con él se encuentran equidistantes de los dos extremos; y como las cartas estaban colocadas siguiendo una simetría especular, dichas cartas serán del mismo palo. Al retirar esas cartas y repetir el proceso, se llega a la misma conclusión.

➤ **Divorcios reales** (Alegría, 2008)

- **INSTRUCCIONES:** El mago separa los reyes y las reinas de la baraja. Coloca los reyes juntos y, encima de ellos, las damas juntas, pero con los palos dispuestos en orden inverso (simetría especular).
  1. Una vez dispuestas las cartas, el mago muestra las cartas al público y anuncia que presenciarán una boda real precedida de un divorcio real.
  2. El mago reparte caras abajo las cartas sobre la mesa, en dos montones, alternativamente a la izquierda y a la derecha. Luego, coloca uno de los montones sobre el otro. Entrega las cartas a un espectador y le pide que repita la operación las veces que quiera.
  3. El mago muestra por encima que las cartas no están emparejadas. Posteriormente, se le pide al espectador que realice el ritual de casamiento. Con las cartas en la mano, debe deletrear la frase “REY BUSCA REINA” del siguiente modo: por cada letra de R-E-Y, pasará una carta de arriba abajo. Al final, las dos cartas siguientes se retiran sin ver. Con las restantes, deletrea B-U-S-C-A pasando una carta cada vez de arriba abajo. Las dos cartas se vuelven a retirar. Se repite la misma operación con R-E-I-N-A. Se descartan las dos primeras.
  4. El mago pide al espectador que muestre las dos cartas que mantiene en su mano. Se trata de una pareja del mismo palo. Luego, pide que vuelva cara arriba el resto de parejas. Todas están emparejadas. ¡Y el mago no ha tocado las cartas!
- **EXPLICACIÓN:** en una baraja con un número par de cartas, dos cartas que ocupan lugares equidistantes de los extremos vuelven a quedar equidistantes después de una mezcla faro. Cuando se hacen dos montones, se está haciendo un faro; pero la distribución de las reinas y reyes es simétrica. Al pasar 3 cartas de arriba abajo, se coge la carta cuarta y quinta que son del mismo palo. Quedan 6 cartas en posición especular. Al pasar 5 cartas, se coge la sexta y la primera que son también del mismo palo. Cuando quedan 4 cartas y se pasan 5 se está escogiendo la segunda y la tercera, también del mismo palo.

## ANEXO B: OPINIONES DE LOS ALUMNOS SOBRE LA MATEMAGIA

- *“Es genial y muy divertido y diferente. No lo había visto nunca y creo que sería genial si siguieses con ello”.*
- *“Mezclar la magia con las matemáticas me ha parecido una absurdez de primeras, pero cuando nos ha mostrado unos trucos de magia me ha dejado asombrada. Es espectacular y además es una manera de hacer las matemáticas más interesantes. Los trucos de magia han sido ingeniosos. Me ha gustado mucho”.*
- *“Me parece una manera entretenida de aprender matemáticas y hace que la clase sea más llevadera”.*
- *“El truco que más me ha gustado es el de la suma”.*
- *“Me ha gustado mucho porque a mí las matemáticas me parecen aburridas y esto las hace divertidas y entretenidas”.*
- *“Me parece una manera interesante de enseñar mates”.*
- *“Me ha parecido una forma muy divertida de aprender y, como es más entretenido, la gente presta más atención y aprende más”.*
- *“Ha estado muy chulo ya que era entretenido y, cuando querías adivinar el truco, era pura matemática. Te ayuda a conseguir más rapidez a la hora de hacer operaciones (sumas, restas...). Es una manera muy buena de aprender matemáticas”.*
- *“Divertidísimo”.*
- *“Mmm... Tus trucos de magia me han parecido interesantes porque no es lo típico en los magos. En vez de utilizar lo de siempre, usaste tu propio estilo y eso es lo principal. Lo último que diré será... Eres un mago diferente”.*
- *“Me gusta porque los trucos son muy ingeniosos y los encuentro con mucho sentido, me gusta la idea de juntar la magia con las matemáticas. Me esperaba trucos más complicados, pero aun así me ha parecido innovador y divertido”.*