Fundamentos del Reparto de Tartas: El Teorema de Lyapunov y extensiones

(Foundations of Cutting Cakes: Lyapunov Theorem and extensions)

Miguel Traspuesto Abascal

Trabajo de Fin de Grado

para acceder al

Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias

Universidad de Cantabria

Director: Luis Miguel Pardo Vasallo

Diciembre - 2017

Abstract. This manuscript is devoted to establish the Mathematical Foundations of the Problem of Cutting Cakes, a static Resource Allocation Problem. This Problem, which goes back to Banach, asks for a "method" to distribute a cake among n agents. The elementary operation is "Cut & Choose": someone cuts several pieces of cake and, then, agents choose some of these pieces, according to their personal preference and taste. Agents preferences are given by probability distributions on the cake. The ancestor of this problem is a classical result due to A. Lyapunov: *The range of a list of n probability distributions is a convex and compact subset of* $\mathbb{R}^n$. In Chapter 1, we exhibit a complete and detailed proof of this Theorem, following (and fulfilling) a proof by P. Halmos of 1947. Lyapunov's Theorem does not suffice to our problem. In 1951, A. Dvoretzky, A. Wald and J. Wolfowitz proved a deeper extension: *The set of matrices of expectations of finite measurable partitions of the unit with respect to a fixed list of probability distributions is convex and compact. Moreover, this set agrees with the set of matrices of measures of finite partitions of the set with respect to the same list of fixed probability distributions.* In Chapter 2, we exhibit a complete and detailed version of their proof and, in Section 2.6, we add some *original material*, based on personal reflections on this result: we introduce an operator (*restructure*), we study *the stabilizer of the DWW set, we prove that it is a convex and compact monoid and we exhibit how a perfect (proportional, envy free, fair and exact) partition may be achieved just using n "convex cuts"*. These ideas lead to pieces which are measurable sets. As, usually, measurable sets are not constructible, these pieces of cake can hardly be described to the agents. In 1987, N. Alon proved that *there exists a perfect partition of the cake $I = [0,1]$ in such a way that each piece is a finite union of intervals and, hence, constructible (a semi-algebraic set).* This is an existential Theorem and the original proof had some flows that we have also fixed to exhibit a complete and detailed proof in Chapter 3. The manuscript is completed with several Appendices to help the reader: Appendix A recalls some basic notations and well-known facts used along the manuscript, Appendix B shows short versions of some famous Cutting Cake pseudo-algorithms and Appendix C shows a couple of images of Lyapunov's paper.
Key Words: Cutting Cakes, Range of a List of Measures, Polish Topological Spaces, Stochastic Matrices, Convexity, Algorithms.

Resumen. Este manuscrito se dedica a establecer los Fundamentos Matemáticos del Problema de Reparto de Tartas, un Problema de Asignación de Recursos estático. El problema, que se remonta a Banach, demanda un "método" para distribuir una tarta entre n agentes. La operacón elemental es "Cut & Choose": alguien corta varios trozos de la tarta y, posteriormente, los agentes eligen algunos de esos trozo conforme a sus preferencias y gusto personales. Las preferencias de los agentes son dadas por distribuciones de probabilidad sobre la tarta. El antecesor de este problema es un resultado clásico debido a A. Lyapunov: *El rango de una lista de n distribuciones de probabilidad es un subconjunto convexo y compacto de* $\mathbb{R}^n$. En el Capítulo 1, mostramos una demostración completa y detallada de este Teorema, siguiendo (y completando) una demostración de P. Halmos de 1947. El teorema de Lyapunov no basta para nuestro problema. En 1951, A. Dvoretzky, A. Wald y J. Wolfowitz probaron una extensión más profunda: *El conjunto de las matrices dadas como esperanzas de particiones de la unidad medibles y finitas con respecto a una lista fija de distribuciones de probabilidad es un conjunto compacto y convexo. Más aún, este conjunto coincide con el conjunto de la matrices de medidas de particiones del conjunto con respecto a la misma lista fijada de distribuciones de probabilidad.* En el Capítulo 2, mostramos una version detallada de su demostración y, en la Sección 2.6, aportamos algún *material original*, basado en reflexiones personales sobre este Teorema: Introducimos un operador (*re-estructuración*), estudiamos *el estabilizador del conjunto de DWW, probamos que se trata de un monoide convexo y compacto y mostramos como un reparto perfecto (proporcional, libre de envidia, justo y exacto) puede obtenerse realizando n "cortes convexos"*. Estas ideas solo conducen a trozos que son conjuntos medibles. Como, usualmente, los conjuntos medibles no son constructibles, estos trozos de tarta difícilmente pueden ser descritos a los agentes. En 1987, N. Alon demostró que *existe un reparto perfecto de la tarta $I = [0,1]$ de tal modo que cada trozo es una unión finita de intervalos y, por tanto, constructible (un conjunto semi-algebraico).* Se trata de un Teorem existencial y la prueba original tiene algunos puntos dudosos que también hemos corregido para mostrar una prueba completa y detallada en el Capítulo 3. El manuscrito se completa con varios Apéndices como ayuda al lector: El Apéndice A muestra algunas notaciones básicas y resultados conocidos usados a lo largo del manuscrito, el Apéndice B muestra versiones cortas de los métodos de reparto de tartas más famosos y el Apéndice C muestra un par de imágenes del artículo de Lyapunov.
Palabras Clave: Reparto de Tartas, Rango de una Lista de Medidas, Espacios Topológicos Polacos, Matrices Estocásticas, Convexidad, Algoritmos.

Índice

CAPíTULO 0

Introducción y Resumen de Contenidos de la Memoria

Índice

0.1. Introducción

El Reparto de Tartas (Cutting Cakes) es el problema central de la cuestión de la **distribución de recursos o bienes (resource allocation) entre una población** de individuos llamados *agentes* o *jugadores*. La forma "popular" del problema es la siguiente:

Problema 1 (Reparto de Tartas). *Imaginemos una fiesta de cumpleaños y un grupo de niños que participan. Alguien saca una tarta enorme y los niños la rodean con diversas sensibilidades. ¿Cómo podemos repartir la tarta en piezas de modo que cada niño esté satisfecho tras el reparto?.*

El lector, con sus experiencias lejanas o recientes, puede fácilmente vislumbrar las dificultades del asunto. **Que no se engañe el lector por los términos "niño" y "tarta" en el enunciado del problema**. Se trata de un problema de asignación y redistribución de recursos entre agentes o jugadores, que pueden ser representados por estados, ciudadanos, empresas o niños. Un ejemplo histórico, de los muchos que existen en la historia de la Humanidad, es la serie de "Conferencias" de Teherán, Yalta y Postdam: tres agentes (representando a la URSS, el Reino Unido y los Estados Unidos), se reúne en una serie sucesiva de encuentros, para acordar el reparto de las cuotas de poder (áreas de influencia) sobre el conjunto de la "tarta" global, a posteriori de la Segunda Guerra Mundial. La insatisfacción de los agentes que participaron en el reparto se explica fácilmente por la Guerra Fría que siguió.

Históricamente, diversos autores atribuyen el origen del problema a Hugo Steinhaus, Bronisław Knaster y Stefan Banach, que mantenían encuentros habituales en el "Scottish Caffé" de Lvov (ciudad de Polonia por entonces). Las reflexiones de estos autores se plasmaron en el algoritmo de Banach-Knaster (ver Subsección B.2.3) y en el de Steinhaus (ver Subsección B.2.2). Con posterioridad varios autores enfrentaron y analizaron el problema con diversas estrategias y reflexiones, algunas de las cuales describiremos en el Apéndice B. *De todos modos, el objetivo de este Trabajo Fin de Grado no es el de la descripción histórica del problema ni el de compilación de las diversas aproximaciones, sino el de establecer con rigor y detalle los* **Fundamentos que subyacen al problema, que garantizan el sentido del mismo**.

Ante todo, se trata de un **modelo de recursos totales estáticos y no dinámicos**. Los recursos a distribuir (la "tarta") son representados por objetos inamovibles "a priori": sólo hay una tarta a repartir y la tarta no aumenta o disminuye en el tiempo. Es una simplificación de modelos de *redistribución de la riqueza*, que obedecerían a otras pautas más dinámicas. La riqueza global evoluciona en el tiempo, conforme a las observaciones de la Economía, siguiendo procesos dinámicos aún no clarificados, como demuestra el fracaso total de las predicciones sobre las diversas crisis económicas que han ido asolando a la Humanidad. En nuestro modelo, **nuestra "tarta" es un espacio topológico fijo** $(X, \mathscr{T})$, usualmente compacto, como contexto a lo largo del reparto. En algunos casos, como veremos, la tarta se simplifica al caso $X = [0, 1]$, con la topología usual.

El reparto de la tarta $(X, \mathscr{T})$ supone la escisión en "pedazos". En este sentido, los modelos pueden admitir pedazos definidos "a priori", lo que responde a un *modelo discreto.* En estas páginas **no discutiremos el modelo discreto sino los modelos continuos de distribución de recursos.** Nótese que el instrumento de reparto de tartas es usualmente un **cuchillo** que corta piezas del espacio topológico $(X, \mathscr{T})$. Por simplicidad expositiva, supondremos inicialmente que las piezas admisibles son conjuntos medibles de Borel, es decir, la $\sigma-$álgebra $\mathscr{B}(X, \mathscr{T})$ de los conjuntos medibles de Borel de la tarta $(X, \mathscr{T})$.

El modelo se basa en la *percepción subjetiva de los agentes y no en un principio de equidad o justicia global.* Que no se engañe el lector por la palabra *"niño"* del enunciado. Los "niños", como los estados o los ciudadanos de una sociedad, *pueden ser inmaduros*, incluso reivindicando sus deseos. Pero en un instante dado (de nuevo el modelo es estático y no dinamico) *tienen gustos subjetivos, asumidos y vinculados a su sensación de placer y satisfacción.* No es una cuestión de racionalidad de los agentes o jugadores. Es una cuestión de satisfacción subjetiva e individual. Algunos "niños-agentes" pueden gustar más del chocolate, otros del merengue; algunos de la crema pastelera, otros por la fruta escarchada e, incluso, por la galleta que soporta el "recurso". No es lo habitual, pero es plausible, algunos sentirán desagrado por el dulce. En este sentido, cada niño mira a la tarta observando piezas que valora más positivamente, mientras otras las descartaría con agrado. Formalmente, *el agrado o desagrado del "agente-niño", que llamaremos i, se mide a través de una distribución de probablilidad* μ_i *sobre el total del recurso* $(X, \mathscr{T})$.

0.2. Distribución de Recursos o Reparto de Tartas

0.2.1. Modelo Continuo del Reparto de Tartas (Continuous Resource Allocation). Con estas precisiones, el problema de repartos de tartas se define como sigue:

Problema 2 (Modelización (genérica) del Problema de Reparto de tartas). *Dado un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$, con conjunto de medibles de Borel $\mathscr{B} := \mathscr{B}(X, \mathscr{T})$, definir un procedimiento que resuelva el problema siguiente:*
Dada una lista de agentes (o jugadores) $\{1, \ldots, n\}$, cada uno de los cuales tiene asignada una probabilidad sobre los subconjuntos medibles de Borel $\mu_i : \mathscr{B} \longrightarrow [0, 1]$, hallar una partición de X en n conjuntos medibles de Borel

$$(X_1, \ldots, X_n) \in \mathscr{B}^n,$$

de tal modo que las percepciones de los jugadores sobre los distintos pedazos, en forma de matriz con coordenadas reales;

$$(\mu_i(X_j))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),$$

satisfaga las propiedades siguientes:

"Propiedades de satisfacción individual o global (a definir en cada caso)"

Definición 1 (Diversos Modelos de Satisfacción). *Con las notaciones anteriores, algunas propiedades de satisfacción son:*

i) Reparto de Tartas Justo (o proporcional): *Cuando cada participante estima que su porción es, al menos, la parte "proporcional":*

$$\forall i, 1 \leq i \leq n, \quad \mu_i(X_i) \geq 1/n.$$

ii) Reparto de Tartas Libre de Envidia: *Cuando cada participante estima que su porción es, al menos, tan valiosa como la que le ha tocado a los demás:*

$$\forall i, j, 1 \leq i, j \leq n, \quad \mu_i(X_i) \geq \mu_i(X_j).$$

iii) Reparto de Tartas por División Exacta: *Cuando todos los participantes están de acuerdo en el valor de cada una de las porciones repartidas:*

$$\forall i, j, 1 \leq i, j \leq n, \quad \mu_i(X_i) = \mu_j(X_i).$$

iv) Reparto de Tartas Equitativo: *Cuando todos los participantes muestran el mismo grado de satisfacción en términos del valor que asignan a la porción obtenida:*

$$\forall i, j, 1 \leq i, j \leq n, \quad \mu_i(X_i) = \mu_j(X_j).$$

Observación 0.2.1. Una de las variaciones que nos propusimos al inicio de la memoria pasaba por generalizar el Problema a los casos de "redes de relaciones" o "vecindario". En virtud de las nuevas interpretaciones de la Antropología (véase, por ejemplo, el texto [**Bau, 17**] de Z. Bauman). En concreto, sus alusiones al *"vecindario"...definido en términos de lo próximo...como 'grupo de referencia' utilizado como vara de medir la discriminación sufrida..."*. En otros términos, el grado de satisfacción del individuo, o el grado con el que mide la **"discriminación sufrida"** se mide, sobre todo, **en función del vecindario, de los individuos en su proximidad con los que cada agente se relaciona y, por tanto, con los que se compara**. Pero el concepto de "vecindario" ya no se mide en términos de distancias euclídeas, modelo de territorialidad física o étnica, por proximidad física, sino en términos de conectividad, medido a través de las interacciones, territoriales o digitales, que cada individuo tiene con otros individuos. Esto introduce un modelo de población cuyo sustrato es un grafo que determina la interconectividad de la población de agentes o jugadores.
Todos nuestros desarrollos se adaptarían bien al caso de jugadores inmersos en redes; pero hemos preferido omitir esa discusión porque aumentaría en exceso el tamaño de nuestro Trabajo.

0.3. Principales Resultados de la Memoria

A fin de ayudar al lector, hemos introducido un Apéndice (cf. Apéndice A) en el que hemos recopilado lo que consideramos terminología básica, así como algunas propiedades conocidas comunmente.

0.3.1. Teorema de Lyapunov. El punto de partida del análisis del problema de reparto de tartas (en conjuntos medibles) es un resultado clásico de A.A. Lyapunov (cf. [**Lyp, 40**]). Este enunciado se establece del modo siguiente.

DEFINICIÓN 2. *Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico y $\mathscr{B} := \mathscr{B}(X, \mathscr{T})$ la $\sigma-$álgebra de sus medibles de Borel. Denotaremos por $\Omega^1(X, \mathscr{B})$ el conjunto formado por todas las distribuciones de probabilidad sin átomos (cf. Definición 23) $\mu : \mathscr{B} \longrightarrow [0,1]$. Llamaremos vector de probabilidades de longitud n sobre $(X, \mathscr{T})$ a toda lista*

$$\underline{\mu} := (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \left[\Omega^1(X, \mathscr{B})\right]^n.$$

Llamaremos vector de probabilidades asociado a un conjunto medible de Borel $E \in \mathscr{B}$ al vector

$$\underline{\mu}(E) := (\mu_1(E), \ldots, \mu_n(E)) \in [0,1]^n.$$

Llamaremos rango de Lyapunov del espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ con respecto a un vector de probabilidades $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \left[\Omega^1(X, \mathscr{T})\right]^n$ a las imágenes de los medibles de Borel de $(X, \mathscr{T})$ a través de $\underline{\mu}$. Es decir, llamaremos rango de Lyapunov de $(X, \mathscr{T})$ a través de $\underline{\mu}$ al conjunto

$$\Lambda_{\underline{\mu}}(X, \mathscr{B}) := \{\underline{\mu}(E) := (\mu_1(E), \ldots, \mu_n(E)) \ : \ E \in \mathscr{B}\}.$$

El Teorema de Lyapunov al que hace referencia esta Memoria es el siguiente:

TEOREMA 0.3.1 (Lyapunov, cf. [**Lyp, 40**]). *Con las anteriores notaciones, para cada vector de probabilidades $\underline{\mu} \in \left[\Omega^1(X, \mathscr{B})\right]^n$, el rango $\Lambda_{\underline{\mu}}(X, \mathscr{B})$ es un conjunto compacto y convexo.*

En el Capítulo 1 mostramos una prueba completa y rigurosa de este Teorema de Lyapunov. Ante las evidentes dificultades idiomáticas de trabajar con el original de Lyapunov, hemos seleccionado una prueba alternativa debida a P.R. Halmos ([**Hal,48**]) por su poximidad temporal al original de Lyapunov. El manuscrito de Halmos contiene algunas imprecisiones e inexactitudes que hemos debido trabajar. Señalamos como aportación propia de los Lemas 1.3.1 y 1.3.2, que reemplazan una afirmación de Halmos cuya veracidad no hemos podido precisar, ni tampoco trazar a través de la propia obra de Halmos (ni siquiera en la monografía posterior del propio Halmos que hace referencia al mismo asunto: [**Hal,50**])

0.3.2. El Teorema de Dvoretzky, Wald y Wolfowitz (DWW). El anterior resultado de Lyapunov no parece relacionarse bien con el problema de repartición de tartas hasta que no introducimos una relevante extensión de dicho Teorema. Se trata del trabajo de A. Dvoretzky, A. Wald, J. Wolfowitz [**DWW, 51**]. Usaremos las mismas notaciones de la Sección precedente. Por simplidad de la exposición, vamos a considerar *espacios topológicos polacos* $(X, \mathscr{T})$ (ver Definición 35 del Apéndice A). Son aquellos espacios topológicos metrizables y completos que poseen un sub-conjunto denso contable. En particular, los medibles de Borel de un espacio topológico polaco constituyen una $\sigma-$álgebra generada por un conjunto numerable de elementos (cf. Observación A.3.1).

DEFINICIÓN 3 (MATRIZ ESTOCÁSTICA ASOCIADA A UNA PARTICIÓN). *Con las notaciones de las Secciones precedentes, sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico polaco, $\mathscr{B} := \mathscr{B}(X, \mathscr{T})$ la $\sigma-$álgebra de sus medibles de Borel, $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \left(\Omega^1(X, \mathscr{B})\right)^n$ un vector de probabilidades sin átomos definidas sobre $\mathscr{B}$. Sea*

$$\mathcal{P} := (X_1, \ldots, X_m) \in \mathscr{B}^m,$$

una partición finita de X en conjuntos medibles (i.e. X es la unión disjunta de los medibles de Borel $X_1, \ldots, X_m$). Llamaremos matriz asociada al vector $\underline{\mu}$ y a la partición $\mathcal{P}$ a la matriz:

$$\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) := (\mu_i(X_j))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \in \mathscr{M}_{n \times m}(\mathbb{R}).$$

Denotemos por $\mathscr{P}_m(X, \mathscr{B}) \subseteq \mathscr{B}^m$ el conjunto de todas las particiones de X como unión de m conjuntos medibles de Borel.

DEFINICIÓN 4 (MATRICES ESTOCÁSTICAS (POR FILAS)). *Una matriz $M = (x_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \in \mathscr{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ con n filas, m columnas y coordenadas reales, se denomina estocástica por filas (o,* *simplemente, estocástica en las páginas que siguen) si satisface que* $x_{i,j} \in [0,1]$ *para todo* i, j, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ *y, además, para cada fila se satisface*

$$\sum_{j=1}^{m} x_{i,j} = 1.$$

Denotaremos por $\mathbf{St}_{n\times m}(\mathbb{R})$ *al conjunto de las matrices estocásticas con* n *filas y* m *columnas.*

En el caso $m = n$, escribiremos $\mathbf{St}_n(\mathbb{R}) = \mathbf{St}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $(\mathbf{St}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ es un monoide (semigrupo con unidad), donde "$\cdot$" es el producto usual de matrices. Obviamente, para cualquier vector de probabilidades $\underline{\mu} \in \left[\Omega^1(X, \mathscr{B})\right]^n$ y cada partición $\mathcal{P} \in \mathscr{P}_m(X, \mathscr{B})$, la matriz asociada es estocástica por filas.

$$\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) \in \mathbf{St}_{n\times m}(\mathbb{R}).$$

La contribución de Dvoreztky, Wald y Wolfowitz es la siguiente:

Teorema 0.3.2 (Dvoreztly-Wald-Wolfowitz, cf. [**DWW, 51**]). *Con las notaciones pecedentes, supongamos que* $(X, \mathscr{T})$ *es un espacio topológico polaco y* $\mathscr{B}$ *la* $\sigma-$*álgebra de sus medibles de Borel. Sea dado también un vector de probabilidades sin átomos* $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \left(\Omega^1(X, \mathscr{B})\right)^n$. *Consideremos la siguiente familia de matrices estocásticas:*

$$DWW_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B}) := \{\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) \ : \ \mathcal{P} \in \mathscr{P}_m(X, \mathscr{B})\} \subseteq \mathbf{St}_{n\times m}(\mathbb{R}).$$

Entonces, el conjunto $DWW_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$ *es un conjunto convexo y compacto.*

El Teorema de Dvoretzky, Wald y Wolfowitz aporta el contenido matemático del problema de reparto de tartas (Problema 2), bajo la hipótesis más común del *"No crumbs left"*: se supone que toda la tarta es repartida entre los agentes-jugadores (es decir, no se dejan migas en el plato). Así, las matrices $\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) \in DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B})$ representan los valores subjetivos que asignan los distintos jugadores a un posible reparto definido por la partición en medibles de Borel $\mathcal{P} \in \mathscr{P}_n(X, \mathscr{B})$. Nótese que la hipótesis *"No crumbs left"* supone que el número de jugadores coincide con el número de trozos y que $DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B}) \subseteq \mathbf{St}_n(\mathbb{R})$.

Observación 0.3.3 (La matriz estocástica y del reparto de tartas). El Problema 1 se traduce matricialmente por:
Dado un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ y un vector de probabilidades $\underline{\mu} := (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ sobre la $\sigma-$álgebra $\mathscr{B}$ de sus medibles de Borel, hallar una partición $\mathcal{P} := (X_1, \ldots, X_n) \in \mathscr{P}_n(X, \mathscr{B})$ de tal modo que la matriz asociada $\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) \in DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B})$ satisfaga las condiciones siguientes:

i) Reparto de Tartas Justo (o proporcional): Los elementos de la diagonal de $\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P})$ son mayores que $1/n$, i.e.:
$$\forall i, 1 \leq i \leq n, \quad \mu_i(X_i) \geq 1/n.$$
ii) Reparto de Tartas Libre de Envidia: En cada fila de la matriz estocástica $\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P})$, el máximo se alcanza en un elemento diagonal, i.e.:
$$\forall i, j, 1 \leq i, j \leq n, \quad \mu_i(X_i) \geq \mu_i(X_j).$$
iii) Reparto de Tartas por División Exacta: Todas las coordenadas de las columnas de la matriz $\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P})$ son iguales, i.e.:
$$\forall i, j, 1 \leq i, j \leq n, \quad \mu_i(X_i) = \mu_j(X_i).$$
iv) Reparto de Tartas Equitativo: Todos los elementos de la diagonal de la matriz $\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P})$ son iguales, i.e.:
$$\forall i, j, 1 \leq i, j \leq n, \quad \mu_i(X_i) = \mu_j(X_j).$$

En el Capítulo 2 daremos una demostración completa y pormenorizada del Teorema de Dvoretzky, Wald y Wolfovitz, completando los detalles de [**DWW, 51**]. En la Sección 2.6 aportamos material original para un ulterior estudio del conjunto $DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B})$. La primera observación fundamental que aportamos es *la invarianza del conjunto* $DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B})$ bajo la acción de multiplicar a la derecha por matrices estocásticas (ver Proposición 2.6.2). Otras aportaciones entroncan con la modelización de Robertson-Webb para una algorítmica del reparto de tartas. A continuación resumimos nuestras principales contribuciones en esta Sección 2.6.

0.3.3. El Protocolo Robertson-Webb: Cut&Choose. En [**RW,97**] y [**RW,98**], J.M. Robertson y W.A. Webb definen la operación básica sobre la que establecer con propiedad una noción de *algoritmo de reparto de tartas* y la posibilidad de un análisis de su complejidad: **Cut&Choose**. El principio básico de su modelo de operación es el siguiente:

i) Una tarta fija $(X, \mathscr{B})$ que supondremos espacio topológico.
ii) Un número finito, $n \in \mathbb{N}$, de jugadores, con gustos diferenciados, representados por un vector de probabilidades sin átomos $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$.
iii) Una cantidad finita PLATOS AUXILIARES $m \in \mathbb{N}$.

La operación elemental se define mediante:

INPUT: Una partición $\mathscr{P} = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathscr{P}_n(X, \mathscr{B})$ en la que cada jugador tiene un pedazo de la tarta, representado por el medible de Borel $X_i \in \mathscr{B}$.

Cut: Un agente externo (o un jugador) procede a extraer pedazos de cada uno de los jugadores. Para ello, elige un multi-índice $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ tal que $k_1 + \cdots + k_n = m$ (i.e. coincide con el número de platos auxiliares). Seguidamente, extrae k_i pedazos del pedazo X_i asignado al jugador i. Esto da un refinamiento de la partición de la tarta con la descomposición como unión disjunta:

$$X_i = X_i' \dot{\bigcup} (X_{i,k_1} \dot{\bigcup} \cdots \dot{\bigcup} X_{i,k_i}),\ \ X_i' = X_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k_i} X_{i,k_j} \right).$$

Finalmente deposita los pedazos extraidos $((X_{1,1}, \ldots, X_{1,k_1}), \ldots, (X_{n,1}, \ldots, X_{n,k_n}))$ en los m platos auxiliares y los pone a disposición de los jugadores.

Choose: En la fase de elección, cada jugador selecciona alguno (o ninguno) de los pedazos y los incorpora a su parte. La regla *"No crumbs left"* supone que no se deja nada en los platos auxiliares y se obtiene una nueva partición $\mathcal{Q} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ con nuevas asignaciones a los jugadores.

OUTPUT: La nueva partición $\mathcal{Q} = (Y_1, \ldots, Y_n)$.

A partir de esta operación básica, un **algoritmo de reparto de tartas** será una secuencia finita de operaciones Cut&Choose. En este punto, debemos ya aclarar que esta pseudo-definición de Robertson-Webb es altamente difusa e incompleta y que ni es admisible como noción de algoritmo ni respeta ninguna de las formas equivalentes de la Tesis de Turing-Church. Esa es parte de la discusión que se hace como consecuencia de los resultados de la Sección 2.6.
En primer lugar, en la Subsección 2.6.1 se ofrece un modelo matricial de esta operación elemental de Robertson-Webb. Seguidamente, en la Subsección 2.6.2 mostramos como la operación Cut&Choose se modeliza mediante un operador que hemos denominado *operador reestructuración* (ver Definición 9) y que actúa sobre $DWW_{\underline{\mu}}^n(X, \mathscr{B})$ del modo siguiente:

$$\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{Q}) = \sum_{l=1}^{n} E_{(l)} \cdot \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) \cdot M_l, \tag{0.3.1}$$

donde $M_l \in \mathbf{St}_{n\times(m+n)}(\mathbb{R})$ son matrices estocásticas por filas y $E_{(l)} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ es la matriz cuadrada que tiene un 1 en al coordenada (l, l) y ceros en el resto de sus coordenadas.
Observemos que si bien $DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B})$ es invariante por la acción a derecha de las matrices estocásticas, es invariante por la acción del operador reestructuración solo en circustancias muy excepcionales (ver Proposición 2.6.4 donde se caracteriza esta invarianza). A continuación se introduce la clase de operadores $Stab_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B})$ que responde a las reestructuraciones que dejan invariante $DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B})$. En el Teorema 2.6.5 hemos demostrado algunas propiedades básicas de $Stab_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B})$. Por ejemplo, probamos que $Stab_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B})$ es un monoide compacto y convexo y que todo operador en $Stab_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B})$ posee un punto fijo dado como una matriz $M \in DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B})$ cuyas filas son vectores estacionarios.
Estudios más avanzados de $Stab_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B})$ se salen del alcance de este Trabajo de Fin de Grado. Sin embargo, visto que, salvo situaciones excepcionales, hay operadores reestructuración que no

preservan $DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B})$, decidimos analizar formas más sencillas de la operación elemental considerada por Robertson-Webb. Así, en la Subsección 2.6.3 introducimos el "corte convexo" (convex cut, ver Definición 11). La condición de corte convexo utiliza fuertemente la propiedad de que el vector de probabilidades $\underline{\mu}$ es convexo (cf. Lema 1.2.6). En la Proposición 2.6.7, probamos que la restricción a cortes convexos es equivalente a la acción de multiplicar por la derecha por matrices estocásticas (o, equivalentemente, equivale a suponer $M_1 = \cdots = M_n$ en el operador reestructuración). A pesar de haber restringido fuertemente el tipo de cortes admisibles, en la Proposición 2.6.8 probaremos que **el problema del reparto de tartas en conjuntos medibles es resoluble con un "algoritmo" que realiza tantos cortes como jugadores, usando solamente 1 plato auxiliar y cortes convexos**. Además, el "algoritmo" usa solamente el "conocimiento" de las medidas involucradas para definir los cortes; pero la "tasa" de corte es independiente de las medidas consideradas. Esto es fuertemente paradójico y genera preguntas naturales sobre la inconsistencia de los planteamientos usuales del problema de reparto de tartas. Adicionalmente, probaremos que la matriz $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)$ (que representa un corte ideal, que satisface las condiciones justo, libre de envidia, proporcional y equitativo) se puede obtener como el producto de $n-1$ matrices estocásticas por la matriz asociada a la partición $\mathcal{P}_0 = (X,\emptyset,\ldots,\emptyset)$. Más técnicamente, probaremos el resultado siguiente:
Dada la siguinte matriz

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \tag{0.3.2}$$

existen matrices estocásticas $S_1,\ldots,S_n \in \mathbf{St}_n(\mathbb{R})$ (asociadas a n cortes convexos) tales que

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right) = \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}_0)\cdot S_1\cdot\cdots\cdot S_n \in DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B}),$$

donde $\mathcal{P}_0 = (X,\emptyset,\ldots,\emptyset) \in \mathscr{P}(X,\mathscr{B})$.

Observación 0.3.4 (**Crítica al uso del término "Algoritmo"**). Obviamente, nuestras reflexiones en esta última sección del Capítulo 2 se definen sobre la base de la noción, comúnmente aceptada, de "algoritmo" usado en el contexto de "Reparto de Tartas". No es muy razonable suponer que el Input de un algorítmo sea un vector de probabilidades $\underline{\mu}$. Tampoco es razonable que uno pueda "acceder" a la información aportada por $\underline{\mu}$ a la hora de realizar un corte (sea o no convexo). Finalmente, no queda nada claro cómo se puede devolver una lista de conjuntos medibles $(X_1,\ldots,X_n)$ como Output. Desde luego, todo el modelo se sale de la Tesis de Turing-Church, como ya se había indicado. Pero si admitiésemos, incluso, un modelo abstracto (e irreal) como el modelo de *real Turing machines* (el modelo de [**BlShSm, 89**]) la codificación de un conjunto medible mediante *real Turing machines* es inaccesible, genera indecibilidad (ver los conjuntos de Julia o de Mandelbrot como indecidibles de [**BlCuShSm, 98**]) y ni siquiera está demostrado que los algoritmos al uso en el Reparto de Tartas den como resultado conjuntos definibles mediante *real Turing machines*.

0.3.4. El Teorema de Alon. Una alternativa a nuestras reflexiones precedentes pasa por la tendecia más común entre quienes, recientemente, reflexionan sobre el problema de reparto de tartas: *Simplifiquemos todo el contexto*. Para ello, reducimos el problema, simplificando las condiciones del modo siguiente:

i) La "tarta" $(X,\mathscr{T})$ se reduce al caso $X = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ con la topología usual $\mathscr{T}_n$.
ii) Los "pedazos" de tarta admisibles no serán todos los medibles de Borel en $\mathscr{B}([0,1],\mathscr{T}_n)$ sino *solamente admitimos pedazos dados como uniones finitas de intervalos.*

Frente a lo discutido sobre la definibilidad de los medibles de Borel, el uso de uniones finitas de intervalos garantizaría que el "Output" de nuestro algoritmo es definible: una unión finita de subintervalos de $[0,1]$ es simplemente un subconjunto semi-algebraico de $[0,1]$. Recordemos que los semi-algebraicos son los conjuntos definibles y constuctibles en la Teoría de 1^{er} Orden sobre cuerpos realmente cerrados. No vamos a entrar aquí en el conocimiento de la Geometría Algebraica Real; pero si nos centramos en la respuesta a la siguiente pregunta:

Problema 3. *Con las restricciones* i) *y* ii) *anteriores, ¿existen repartos de tartas justos, proporcionales, libres de envidia o equitativos dados como uniones finitas de intervalos?*

La respuesta a este Problema es afirmativa gracias a un resultado de N. Alon (cf. [**A, 87**]) que demostraremos en el Capítulo 3. El Teorema de Alon usa inteligentemente una versión del Teorema de Borsuk-Ulam generalizada a t-coloraciones, proveniente del Trabajo [**BaShSz, 81**]. Omitimos la revisión de la prueba del resultado de [**BaShSz, 81**], dada la limitación temporal y física de un Trabajo de Fin de Grado como el presente. En todo caso, el Capítulo 3 se dedica a exhibir una demostración completa de cómo usa [**A, 87**] este Teorema de punto fijo. Sin embargo, se ha realizado un esfuerzo por completar algunas inexactitudes en el trabajo de [**A, 87**], por ello es destacable la contribución del Lema 3.3.8 para poder concluir el Teorema de Alon. El resultado que se exhibe como principal de este Capítulo es el siguiente resultado que generaliza el Teorema de Hobby-Rice (cf. [**HoRi, 95**].

TEOREMA 0.3.5 ([**A, 87**]). *Sea $n \in \mathbb{N}$ un entero positivo y sea $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \left[\Omega^1([0,1])\right]^{(n)}$ un vector de probabilidades continuas (ver Definición 29) sobre el intervalo $[0,1]$ con la topología usual. Supongamos que la variación total $\|\underline{\mu}\|$ no se anula sobre intervalos de interior no vacío. Entonces, existe una familia $\mathscr{I}$ de subintervalos de $[0,1]$, que definen una partición y de cardinal $\#(\mathscr{I}) = (n-1)n$, satisfaciendo:*
Existe una partición de $\mathscr{I}$

$$\mathscr{I} = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta(i),$$

de tal modo que los conjuntos

$$F_i = \bigcup_{I \in \Delta(i)} I, \ \ 1 \leq i \leq n,$$

verifican

$$\mu_\ell(F_i) = \frac{1}{n}, \ \ \forall i, \forall \ell, \ 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq \ell \leq n.$$

En particular, la partición $\mathcal{F} = (F_1, \ldots, F_n) \in \mathscr{P}_n([0,1])$ es una partición donde cada medible de Borel es unión finita de intervalos (y, en particular, definible) de tal modo que

$$\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{F}) = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right).$$

Más aún, la partición $\mathcal{F}$ puede obtenerse realizando (de manera no uniforme) $O(n^2)$ operaciones elementales de **Cut&Choose**.

Este Teorema es un resultado meramente existencias, cuya prueba se basa en un Teorema de Punto Fijo (de ahí el uso de la expresión "no uniforme"). Indica que existe una manera de hacer una excelente partición con $O(n^2)$ operaciones elementales, pero no se tienen pistas sobre cómo hacerlos algorítmicamente. El reto, obviamente, consiste en uniformizar dicho resultado, pero se sale del alcance de este Trabajo de Fin de Grado. Debemos señalar que **la demostración de Alon posee algunas imperfecciones, que hemos debido resolver** (el Lema 3.3.8 es nuestra contribución original a este Capítulo).

0.3.5. Apéndices Finales. El trabajo presentado se finaliza con tres Apéndices para simplificar su lectura. El Apéndice A contiene parte de la terminología básica entre la usada en esta Memoria así como algunos resultados teóricos que son o bien básicos o son usados de manera transversal en las demostraciones exhibidas en la Memoria. El Apéndice B está dedicado a exhibir algunos de los "algoritmos" más famosos en la literatura sobre el problema del reparto de tartas. Los hemos incluido de manera sucinta a modo de ilustración del interés sobre el problema. Adicionalmente, en la Sección B.5, hemos incluido la demostración de otro resultado, debido a G. Chèze (cf. [**Ch, 17**]), que usa el Teorema de Borsuk-Ulam para mostrar un resultado similar al Teorema de Alon (cf. 0.3.5 precedente) para concluir la existencia de un reparto cuya matriz asociada tiene sus elementos diagonales iguales a $\frac{1}{n}$. En un último Apéndice C hemos incluido copias de la primera y última páginas del artículo original de Lyapunov, incluyendo las pocas frases en francés que, al final, resumen sus principales resultados.

CAPíTULO 1

La Demostración de Halmos

Índice

1.1. Introducción

Como ya se ha indicado en el Capítulo introductorio (Sección 0.3.1), en este Capítulo nos dedicaremos a exponer una prueba completa del siguiente Teorema de A.A. Lyapunov, siguiendo la prueba descrita por P.R. Halmos en [**Hal,48**]. El Teorema al que hacemos referencia (Teorema 0.3.1 de la Introducción) es el siguiente

TEOREMA 1.1.1 ([**Lyp, 40**], [**Hal,48**]). *Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico y sea $\mathscr{B} = \mathscr{B}(X, \mathscr{T})$ el conjunto de sus medibles de Borel. Sea*

$$\underline{\mu} := (\mu_1, \ldots, \mu_n) : \mathscr{B} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

un vector de medidas finitas, no negativas y sin átomos, definidas sobre $\mathscr{B}$. Entonces, el siguiente conjunto (llamado rango de Lyapunov de $\underline{\mu}$) es compacto y convexo:

$$\Lambda_{\underline{\mu}}(X, \mathscr{B}) = \{\underline{\mu}(E) = (\mu_1(E), \ldots, \mu_n(E)) \;\; E \in \mathscr{B}\}.$$

1.2. Sobre la convexidad

Comencemos probando la convexidad del rango de Lyapunov en esta primera Sección.

LEMA 1.2.1. *Si $\underline{\mu} \in [\Omega(X, \mathscr{B})]^n$ es un vector medidas finitas, no negativas y semi-convexo (ver Definición 27 del Apéndice A) y E es un conjunto medible en $(X, \mathscr{B})$, entonces existen $\{E_r : r \in \mathbb{N}\}$ subconjuntos medibles de E tales que para cada $k \in \mathbb{N}$ y cualesquiera k enteros positivos $r_1, \ldots, r_k$ se cumple*

$$\underline{\mu}(E_{r_1} \cap \ldots \cap E_{r_k}) = \frac{1}{2^k} \underline{\mu}(E). \tag{1.2.1}$$

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar este Lema construiremos inductivamente la sucesión $\{E_r : r \in \mathbb{N}\}$. Para $r = 1$, como $\underline{\mu}$ es semi-convexa entonces existe $E_1 \subset E$, medible, tal que $\underline{\mu}(E_1) = \frac{1}{2}\underline{\mu}(E)$. Tomamos éste como el primer elemento de la sucesión de subconjuntos del enunciado. Ahora supongamos que existen $E_1, \ldots, E_r$ conjuntos medibles tales que satisfacen las hipótesis del teorema, con ellos construiremos inductivamente el siguiente término E_{r+1}. Para ello consideramos

$$E(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r) := E_1^{\epsilon_1} \cap \ldots \cap E_r^{\epsilon_r}, \tag{1.2.2}$$

en donde $\epsilon_i \in \{0, 1\}$, $1 \leq i \leq r$, $A^1 := A$ y $A^0 := E \backslash A$.

AFIRMACIÓN. *Dada una familia finita $\{E_1, \ldots, E_r\} \subseteq \mathscr{B}$ de subconjuntos de E medibles tales que para cualquier subconjunto $J \subseteq \{1, \ldots, r\}$ se tenga que*

$$\underline{\mu}(\bigcap_{j \in J} E_j) = \frac{1}{2^{\#(J)}} \underline{\mu}(E),$$

en donde $\#(J)$ representa el cardinal de J. Entonces para cada $\underline{\epsilon} = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r) \in \{0, 1\}^r$, $\underline{\mu}(E(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r)) = \frac{1}{2^r} \underline{\mu}(E)$.

DEMOSTRACIÓN. Vamos a probar esta Afirmación por inducción en $\#_0$, el número de coordenadas nulas en $\underline{\epsilon} = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r) \in \{0,1\}^r$.

- Si $\#_0(\underline{\epsilon}) = 0$, entonces $\underline{\epsilon} = (1, \ldots, 1)$. Se tiene, entonces, que $\underline{\mu}(E(1, \ldots, 1)) = \underline{\mu}(E_1 \cap \ldots \cap E_r) = \frac{1}{2^r}\underline{\mu}(E)$ por hipótesis.
- Sea ahora $\underline{\epsilon}$ tal que $\#_0(\underline{\epsilon}) = k+1$. Supongamos que la Afirmación es cierta para cualquier $\underline{\delta} \in \{0,1\}^r$ con $\#_0(\underline{\delta}) \leq k$. Sin pérdida de la generalidad, podemos suponer que las coordenadas de $\underline{\epsilon}$ están ordenadas de tal forma que las primeras $k+1$ coordenadas son 0's (a la izquierda) y las siguientes $n-k-1$ coordenadas son 1's. Así, para el valor $\underline{\epsilon}$ que satisface la separación de 1's y 0's y $\#_0(\underline{\epsilon}) = k+1$, tendremos
$$E(\underline{\epsilon}) = (E \setminus E_1) \cap \cdots \cap (E \setminus E_{k+1}) \cap E_{k+2} \cap \cdots \cap E_r.$$
Definamos
$$A := (E \setminus E_1) \cap \cdots \cap (E \setminus E_k) \cap E_{k+2} \cap \cdots \cap E_r,$$
y consideremos su descomposición mediante
$$A_1 := A \cap E_{k+1},$$
$$A_2 := A \cap (E \setminus E_{k+1}).$$
Observemos que $A_2 = E(\underline{\epsilon})$ y que A es la unión disjunta de A_1 y A_2, i.e.
$$A = A_1 \dot{\bigcup} A_2.$$
Por hipótesis inductiva, como $\#_0(A_1) \leq k$, $\underline{\mu}(A_1) = \frac{1}{2^r}\underline{\mu}(E)$. De otro lado, consideremos la familia $\mathscr{E}' = \{E_i : i \in \{1, \ldots, r\} \setminus \{k+1\}\}$. Esta es una familia de $r-1$ conjuntos medibles y, obviamente, satisface la hipótesis de la Afirmación, porque tal hipótesis es válida para todo subconjunto $J \subseteq \{1, \ldots, r\}$ y lo mismo será válida para todo subconjunto $J \subseteq \{1, \ldots, r\} \setminus \{k+1\}$. Observamos que $A = E'(\underline{\delta})$, donde E' es el conjunto medible definido en la Ecuación (1.2.2) sobre la familia $\mathscr{E}'$, con $r-1$ elementos y $\#_0(\underline{\delta}) = k$. Aplicando la hipótesis inductiva, concluimos que
$$\underline{\mu}(A) = \frac{1}{2^{r-1}}\underline{\mu}(E).$$
Se concluye que
$$\frac{1}{2^{r-1}}\underline{\mu}(E) = \underline{\mu}(A) = \underline{\mu}(A_1) + \underline{\mu}(A_2) = \frac{1}{2^r}\underline{\mu}(E) + \underline{\mu}(A_2).$$
Luego $\underline{\mu}(E(\underline{\epsilon})) = \underline{\mu}(A_2) = \frac{1}{2^r}\underline{\mu}(E)$, y queda probada la Afirmación.

□

Como $\underline{\mu}$ es un vector de medidas semi-convexas, para cada $r \in \mathbb{N}$ y cada $\underline{\epsilon} = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r) \in \{0,1\}^r$, existe un conjunto medible $F(\underline{\epsilon}) \subseteq E(\underline{\epsilon})$ tal que
$$\underline{\mu}(F(\underline{\epsilon})) = \frac{1}{2}\underline{\mu}(E(\underline{\epsilon})).$$
Definamos $E_{r+1} \subseteq E$ como el conjunto medible dado por las uniones de todos los $F(\underline{\epsilon})$ antes citados. Esto es,
$$E_{r+1} = \bigcup_{\underline{\epsilon} \in \{0,1\}^r} F(\underline{\epsilon}).$$
Para concluir la prueba del Teorema debemos demostrar que la nueva familia $\{E_1, \ldots, E_{r+1}\}$ sastisface lo siguiente:
Para cualquier subconjunto finito $J \subseteq \{1, \ldots, r+1\}$, se tiene que
$$\underline{\mu}(\bigcap_{j \in J} E_j) = \frac{1}{2^{\#(J)}}\underline{\mu}(E).$$
Para verificarlo, supongamos solamente los $J \subseteq \{1, \ldots, r+1\}$ tales que $r+1 \in J$. El resto de los casos se verifican por hipótesis inductiva (caso r). Supongamos entonces que $J = \{r_1, \ldots, r_k, r+1\}$ y $\#(J) = k+1$. Nótese que la intersección
$$E_{r+1} \bigcap E_{r_1} \bigcap \cdots \bigcap E_{r_k},$$

es la unión de algunos de los conjuntos $F(\underline{\epsilon})$ con $\underline{\epsilon} \in \{0,1\}^r$. Sin embargo, por la definición de $E(\underline{\epsilon})$, ocurre que si $\underline{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_r)$ contiene algún 1 en algún lugar en $\{r_1, \dots, r_k\}$, entonces $E(\underline{\epsilon}) \cap E_{r_1} \cap \dots \cap E_{r_k} = \emptyset$. Por tanto, la familia

$$\mathscr{E} = \{\underline{\epsilon} \in \{0,1\}^r : \ F(\underline{\epsilon}) \cap E_{r_1} \cap \dots \cap E_{r_k} \neq \emptyset\},$$

está contenida en

$$\mathscr{I} = \{\underline{\epsilon} \in \{0,1\}^r : \ \epsilon_{r_j} = 0, \ 1 \leq j \leq k\}.$$

Nótese que $\#(\mathscr{I}) = 2^{r-k}$, dado que cada ϵ_i admite dos valores, salvo los ϵ_{r_j} que sólo admiten el valor 0. De otro lado, si $\underline{\epsilon} \in \mathscr{I}$, entonces $\underline{\mu}(E(\underline{\epsilon})) = \frac{1}{2^r}\underline{\mu}(E) \neq 0$. Con lo que $E(\underline{\epsilon}) \neq \emptyset$ y $\underline{\mu}(F(\underline{\epsilon})) = \frac{1}{2^{r+1}}\underline{\mu}(E) \neq 0$. Concluimos así que $\emptyset \neq F(\underline{\epsilon}) \subseteq E_{r+1} \cap E_{r_1} \cap \dots \cap E_{r_k}$ y que

$$E_{r+1} \cap E_{r_1} \cap \dots \cap E_{r_k} = \bigcup_{\underline{\epsilon} \in \mathscr{I}} F(\underline{\epsilon}).$$

Dado que $\forall \underline{\epsilon}, \underline{\delta} \in \{0,1\}^r$, $F(\underline{\epsilon}) \cap F(\underline{\delta}) = \emptyset$, concluimos

$$\underline{\mu}(E_{r+1} \cap E_{r_1} \cap \dots \cap E_{r_k}) = \sum_{\underline{\epsilon} \in \mathscr{I}} \underline{\mu}(F(\underline{\epsilon})) = \#(\mathscr{I}) \left(\frac{1}{2^{r+1}}\underline{\mu}(E) \right) = 2^{r-k} \left(\frac{1}{2^{r+1}}\underline{\mu}(E) \right) = \frac{1}{2^{k+1}}\underline{\mu}(E).$$

Y el Lema queda demostrado. □

LEMA 1.2.2. *Todo vector de medidas finitas, no negativas y semi-convexo es convexo (ver Definición 28 en Apéndice A).*

DEMOSTRACIÓN. Sea E un subconjunto medible en $(X, \mathscr{B})$. Sea $\{E_r : r \in \mathbb{N}\}$ una familia de subconjuntos medibles de E que satisfacen las condiciones del Lema 1.2.1. Denotaremos por $E_* \subseteq X$ el conjunto medible dado por la siguiente identidad

$$E_* := \liminf_{r \to \infty} E_r = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{r=i}^{\infty} E_r$$

Construimos la función $\phi : E \to \mathbb{R}$ de tal manera que:

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & x \in E_* \\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\chi_i(x)}{2^i} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En donde $\chi_i(x)$ representa la función característica de E_i. Claramente $0 \leq \phi(x)$. Y se tiene que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\chi_i(x)}{2^i} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$$

La desigualdad es estricta. De darse la igualdad, eso significaría que $\chi_i(x) = 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y entonces $x \in E_*$, lo que significaría $\phi(x) = 0$ contrariamente a lo supuesto. Por lo tanto $0 \leq \phi(x) < 1$. Además, la función ϕ es medible. Para ello bastaría ver que $\phi^{-1}(A)$ es un medible en $(X, \mathscr{B})$ para cualquier abierto de A de $[0,1)$. Si A es abierto, $x \in A$ y $x \neq 0$ entonces $x \in (0,1)$,

$$\phi^{-1}(x) = \{z \in E : \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\chi_i(z)}{2^i} = x\}.$$

Luego si la expansión binaria de x es la sucesión dada mediante

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}, \ x_i \in \{0,1\}.$$

Entonces,

$$\phi^{-1}(x) = \bigcup_{i, x_i = 1} E_i,$$

que es medible en E. Ahora, dado que $A \subseteq (0,1)$ abierto, tendremos que

$$\phi^{-1}(A) = \bigcup_{x \in A} \phi^{-1}(\{x\}).$$

Aunque parece una unión no numerable, sin embargo, es unión numerable de algunos de los conjuntos $\{E_r : r \in \mathbb{N}\}$. De hecho,

$$\phi^{-1}(A) = \bigcup\{E_r : \exists x \in A, \text{ y la } r\text{-ésima coordenada de } x \text{ en su expansión binaria es } 1\},$$

que es una unión numerable de medibles y, por tanto, medible. Todo abierto A en $[0,1)$ es o bien $A \subseteq (0,1)$ o bien $0 \in A$ en cuyo caso $A = \{0\} \cup (A \cap (0,1))$. En el primer caso, $\phi^{-1}(A)$ es medible en $(X, \mathscr{B})$ como ya hemos visto y en el segundo caso,

$$\phi^{-1}(A) = \phi^{-1}(\{0\}) \cup \phi^{-1}(A \cap (0,1)) = E_* \cup \phi^{-1}(A \cap (0,1)),$$

que es la unión de dos medibles y, por tanto, medible.
Tomemos ahora un número racional diádico $\lambda = \frac{k}{2^r}$. En donde $r \in \mathbb{N}$ y $k \in \{1, \ldots, 2^r\}$, primos entre sí. Probemos ahora la siguiente Afirmación para números diádicos.

Afirmación. *Con las anteriores notaciones, si λ es un número diádico, la igualdad siguiente es cierta*

$$\{x \in E : \ \phi(x) < \lambda\} = E_* \cup \{x \in E : \ \sum_{i=1}^{n} \frac{\chi_i(x)}{2^i} < \lambda\}.$$

Demostración Se probará por doble inclusión.

- *Demostración de* $\subseteq$. Supongamos que $\phi(x) < \lambda$. Pueden pasar dos cosas:
  - Supongamos que $\phi(x) = 0$. En este caso pueden ocurrir dos cosas. Puede ocurrir que $\chi_i(x) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $\sum_{i=1}^{n} \frac{\chi_i(x)}{2^i} = 0 < \lambda$.
  O puede ocurrir que $\phi(x) = 0$ porque $x \in E_*$. De cualquier modo, se satisface la inclusión.
  - En otro caso se tiene que $0 < \phi(x) < \lambda$. Notar que
  $$\sum_{i=1}^{n} \frac{\chi_i(x)}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\chi_i(x)}{2^i} = \phi(x) < \lambda,$$
  por lo tanto se da la inclusión.
- *Demostración de* $\supseteq$. Para esta inclusión hay que notar dos cosas.
  - En primer lugar
  $$\sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$
  - Cualquier número diádico, $\lambda_1 \in [0, \lambda)$, se puede expresar como $\lambda_1 = \sum_{i=1}^{r} \frac{a'_i}{2^i}$ con $a'_i \in \{0, 1\}$. Y por lo tanto la distancia entre dos números diádicos consecutivos es mayor que $\frac{1}{2^r}$.
  Como $\lambda_1 < \lambda$ se tiene que $\lambda < \frac{2^r - 1}{2^r}$, por lo tanto debe existir un $a'_i = 0$. Sea t el entero positivo mayor tal que $a'_t = 0$ y sea
  $$\lambda_2 := \lambda_1 + \frac{1}{2^t},$$
  es decir, la expansión de λ_2 coincide con la de λ_1 salvo en la posición t-ésima. Se tiene que λ_2 es diádico y obviamente $t < r$ por lo que la distancia entre ambos diádicos es mayor que $\frac{1}{2^r}$.

  Con las dos consideraciones anteriores, sea $x \in \{e \in E : \sum_{i=1}^{r} \frac{\chi_i(e)}{2^i} < \lambda\}$, se tiene que:
  $$\phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\chi_i(x)}{2^i} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\chi_i(x)}{2^i} + \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{\chi_i(x)}{2^i}$$
  Por lo tanto el valor de $\phi(x)$ depende de $\sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{\chi_i(x)}{2^i}$ que, por la primera observación, es menor que $\frac{1}{2^r}$. Se tiene que $\sum_{i=1}^{r} \frac{\chi_i(x)}{2^i} < \lambda$ toma valores diádicos y que $\sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{\chi_i(x)}{2^i} < \frac{1}{2^r}$, por lo tanto no se alcanza el diádico siguiente en $\phi(x)$ por lo que debe ser $\phi(x) < \lambda$. Por lo que satisface la inclusión $\supseteq$ para $\{x \in E : \sum_{i=1}^{n} \frac{\chi_i(x)}{2^i} < \lambda\}$.
  Y, por otro lado, es obvio que E_* está contenido en $\{x \in E : \ \phi(x) < \lambda\}$, pues si $x \in E_*$ entonces $\phi(x) = 0$ y, obviamente, $\phi(x) < \lambda$. $\square$

Queremos probar que $A := \{x \in E : \sum_{i=1}^{r} \frac{\chi_i(x)}{2^i} < \lambda\}$ es la unión de k conjuntos de la forma $E(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r)$ descritos en el Lema 1.2.1. Para ello nótese que

$$\lambda = \frac{k}{2^r} = \frac{a_j 2^{r-j} + \cdots + a_r}{2^r},$$

con $a_i \in \{0,1\}$, para algún $j \in \{1, \ldots, r\}$.
Consideremos los conjuntos

$$E(0, \ldots, 0, \epsilon_j, \ldots, \epsilon_r), \tag{1.2.3}$$

tales que $\epsilon_j, \ldots, \epsilon_r$ se corresponden con la expasión binaria de los enteros $k' < k$. Claramente, cada uno de estos conjuntos estará contenido en A. Esto es porque, considerando k' y su expansión binaria $\epsilon_j, \ldots, \epsilon_r$, si $e \in E(0, \ldots, 0, \epsilon_j, \ldots, \epsilon_r)$ entonces

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\chi_i(e)}{2^i} = \frac{k'}{2^r} < \lambda.$$

Además, es obvio que hay k conjuntos del tipo $E(0, \ldots, 0, \epsilon_j, \ldots, \epsilon_r)$ (ya que existe una biyección entre los conjuntos de este tipo y $\{0, \ldots, k-1\}$, cuyo cardinal es k). Por otro lado, si $e \in A$, definiendo $\epsilon_i = \chi_i(e)$ para $i \in \{1, \ldots, r\}$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\chi_i(e)}{2^i} = \frac{k'}{2^r} < \lambda,$$

por lo que es claro que e pertenecerá al conjunto $E(0, \ldots, 0, \epsilon_j, \ldots, \epsilon_r)$, que forma parte de la familia de conjuntos definidos en la Identidad (1.2.3). Es claro que la familia de conjuntos $E(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r)$ es una familia de conjuntos disjuntos dos a dos, por lo tanto

$$\underline{\mu}(\{x \in E : \sum_{i=1}^{r} \frac{\chi_i(x)}{2^i} < \lambda\}) = \frac{k}{2^r}\underline{\mu}(E) = \lambda\underline{\mu}(E).$$

Es de interés saber $\underline{\mu}(E_*)$. Para ello nótese que

$$\underline{\mu}(E_*) = \underline{\mu}(\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{r=i}^{\infty} E_r),$$

si definimos $A_i = \bigcap_{r=i}^{\infty} E_r$, es obvio que $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_i \subseteq \ldots$. Por lo tanto se tiene que

$$\underline{\mu}(E_*) = \lim_{i\to\infty} \underline{\mu}(\bigcap_{r=i}^{\infty} E_r),$$

que por la Ecuación (1.2.1), se tiene que

$$\underline{\mu}(E_*) = \lim_{i\to\infty}\lim_{r\to\infty} \frac{1}{2^r}\underline{\mu}(E) = 0$$

Por lo tanto, al unir a A algo de medida 0 se tiene que

$$\underline{\mu}(\{x \in E \,:\, \phi(x) < \lambda\}) = \lambda\underline{\mu}(E)$$

Por lo que hemos probado que para cualquier λ diádico existe una función medible ϕ que satisface la definición de convexidad. Falta estudiar lo que ocurre cuando λ es no diádico.
Sea λ no diádico, esto es, su expansión como $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$ es infinita. Se tiene que

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{e \in E \,:\, \phi(e) < \sum_{j=1}^{i} \frac{a_j}{2^j}\} = \{e \in E \,:\, \phi(e) < \lambda\}$$

Lo probaremos por doble inlcusión

- *Demostración de* $\subseteq$. Es obvio.
- *Demostración de* $\supseteq$. Sea $e \in E$ tal que $\phi(e) < \lambda$, por ser λ el límite de las sumas parciales

$$S_i := \sum_{j=1}^{i} \frac{a_j}{2^j},$$

se tiene que para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que

$$|\lambda - S_n| < \epsilon.$$

Sea $\epsilon = \lambda - \phi(e)$, que por ser $\phi(e) < \lambda$ se cumple $\epsilon > 0$. Por lo tanto, existe n_0 tal que, para ese mismo n_0

$$|\lambda - S_{n_0}| < \epsilon = \lambda - \phi(e).$$

Además $S_{n_0} < \lambda$ por lo que se tiene que

$$\phi(e) < S_{n_0} = \sum_{j=1}^{n_0} \frac{a_j}{2^j}.$$

Lo que implica que se satisface la inclusión.

Como la sucesión de conjuntos es monótona creciente se puede extraer el límite y se tiene que

$$\underline{\mu}(\{x \in E \, : \phi(x) < \lambda\}) = \lim_{i \to \infty} \sum_{j=1}^{i} \frac{a_j}{2^j} \underline{\mu}(E) = \lambda \underline{\mu}(E),$$

cuando λ no es diádico, como se quería ver. □

Lema 1.2.3. *Sea $\underline{\mu}$ un vector de medidas finitas, no negativas y convexo y sea E un subconjunto medible de $(X, \mathscr{B})$. Con las notaciones precedentes, definimos el conjunto $K(\underline{\mu}, E)$ como el conjunto de todas las funciones medibles $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ con $0 \leq \phi(x) < 1$, para todo $x \in E$, tales que $\underline{\mu}(\{x \in E \, : \phi(x) < \lambda\}) = \lambda \underline{\mu}(E)$ para $0 \leq \lambda \leq 1$. Si $\phi \in K(\underline{\mu}, E)$ y si $\underline{\nu}$ es un vector de medidas finitas absolutamente continuo con respecto a $\underline{\mu}$ (ver Definición 30 del Apéndice A) entonces $\underline{\nu}(\{x \, : \phi(x) < \lambda\})$ es una función continua de λ, $0 \leq \lambda < 1$.*

Demostración. Usaremos las notaciones sobre continuidad absoluta entre medidas y las notaciones sobre variación total descritas en las Definiciones 25 y 30 del Apéndice A. Podemos suponer que $\underline{\nu}$ es una medida ν, ya que la continuidad de $G(\lambda) := \underline{\nu}(\{x \, : \phi(x) < \lambda\})$ depende de la continuidad de cada una de las componentes $G_i(\lambda) = \nu_i(\{x \, : \phi(x) < \lambda\})$.

El objetivo es ver que para todo $\epsilon' > 0$ existe un $\delta' > 0$ tal que si $|\lambda_2 - \lambda_1| < \delta'$ entonces $|\nu(\{x \, : \phi(x) < \lambda_2\}) - \nu(\{x \, : \phi(x) < \lambda_1\})| < \epsilon'$. Podemos suponer que $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq 1$.

Al ser ν absolutamente continua respecto de $\underline{\mu}$ se sigue que (ver la Proposición A.1.8) para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier conjunto medible F de $(X, \mathscr{B})$ si $\|\underline{\mu}\|(F) < \delta$ se tiene que $|\nu|(F) < \epsilon$.

Tomemos $F = \{x \in E \, : \lambda_1 \leq \phi(x) < \lambda_2\}$. Es claro que $F = \{x \in E \, : \phi(x) < \lambda_2\} \backslash \{x \in E \, : \phi(x) < \lambda_1\}$. Si A, B son conjuntos medibles de $(X, \mathscr{B})$ se tiene que

$$\underline{\mu}(A) = \underline{\mu}(A \cap B) + \underline{\mu}(A \cap (X \backslash B)),$$

si $B \subset A$ se tiene que $A \cap B = B$ y $A \cap X \backslash B = A \backslash B$. Por lo tanto

$$\|\underline{\mu}\|(F) = \|\underline{\mu}(F)\|_1 = \|\underline{\mu}(\{x \in E \, : \phi(x) < \lambda_2\}) - \underline{\mu}(\{x \in E \, : \phi(x) < \lambda_1\})\|_1 =$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1)\|\underline{\mu}(E)\|_1 < \delta,$$

donde $\|\cdot\|_1$ denota la norma 1 en $\mathbb{R}^n$, mientras que la primera igualdad viene dada por la Proposición A.1.7. Además

$$|\nu(\{x \in E \, : \phi(x) < \lambda_2\}) - \nu(\{x \in E \, : \phi(x) < \lambda_1\})| \leq |\nu|(F) < \epsilon,$$

nótese que en este caso no se da la igualdad debido a que ν no es necesariamente no negativa. Tomando $\delta' = \frac{\delta}{\|\underline{\mu}(E)\|_1}$ se sigue la continuidad de G respecto de λ. □

Lema 1.2.4. *Si $\underline{\mu}$ es un vector de medidas convexo y E y F son dos conjuntos medibles de $(X, \mathscr{B})$ se tiene que para cualquier λ con $0 \leq \lambda \leq 1$ existe un conjunto medible de $(X, \mathscr{B})$, $C(\lambda)$, tal que*

i) $C(0) = E$ *y* $C(1) = F$.
ii) $\underline{\mu}(C(\lambda)) = (1 - \lambda)\underline{\mu}(E) + \lambda \underline{\mu}(F)$
iii) *Si además existe un vector de medidas $\underline{\nu}$ finitas y no negativas, absolutamente continuo respecto de $\underline{\mu}$, entonces $\underline{\nu}(C(\lambda))$ es una función continua de λ.*

Demostración. Consideremos las clases $K(\underline{\mu}, E\backslash F)$ y $K(\underline{\mu}, F\backslash E)$, y dos funciones medibles $\phi : E\backslash F \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\psi : F\backslash E \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $\phi \in K(\underline{\mu}, E\backslash F)$ y $\psi \in K(\underline{\mu}, F\backslash E)$. Y consideremos el conjunto

$$C(\lambda) := (E \cap F) \cup \{x \in E \setminus F \, : \phi(x) < 1 - \lambda\} \cup \{x \in F \setminus E \, : \psi(x) < \lambda\},$$

que obviamente es medible. Para probar *i)* hay que notar que por un lado

$$\{x \in E \setminus F \, : \phi(x) < 1\} = E\backslash F, \quad \{x \in E \setminus F \, : \phi(x) < 0\} = \emptyset,$$

y por otro lado

$$\{x \in F \setminus E \, : \psi(x) < 1\} = F\backslash E, \quad \{x \in F \setminus E \, : \psi(x) < 0\} = \emptyset.$$

Por lo tanto se tiene que

$$C(0) = (E \cap F) \cup (E\backslash F) = E, \quad C(1) = (E \cap F) \cup (F\backslash E) = F.$$

Para probar *ii)* hay que notar que $\{x \in E \setminus F \, : \phi(x) < 1 - \lambda\}$ y $\{x \in F \setminus E \, : \psi(x) < \lambda\}$ son disjuntos entre sí y disjuntos con $E \cap F$ por lo que se dan las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\underline{\mu}(C(\lambda)) &= \underline{\mu}(E \cap F) + \underline{\mu}(\{x \in E \setminus F \, : \phi(x) < 1 - \lambda\}) + \underline{\mu}(\{x \in F \setminus E \, : \psi(x) < \lambda\}) = \\ &= \underline{\mu}(E \cap F) + (1 - \lambda)\underline{\mu}(E\backslash F) + \lambda\underline{\mu}(F\backslash E),\end{aligned}$$

sumando y restando $\lambda\underline{\mu}(E \cap F)$ y organizando los sumandos resulta

$$\begin{aligned}\underline{\mu}(C(\lambda)) = (1 - \lambda) \left[\underline{\mu}(E \cap F) + \underline{\mu}(E\backslash F)\right] + \lambda \left[\underline{\mu}(E \cap F) + \underline{\mu}(F\backslash E)\right] = \\ (1 - \lambda)\underline{\mu}(E) + \lambda\underline{\mu}(F)\end{aligned}$$

Y por último para probar *iii)* hay que notar que

$$\underline{\nu}(C(\lambda)) = \underline{\nu}(E \cap F) + \underline{\nu}(\{x \in E \setminus F \, : \phi(x) < 1 - \lambda\}) + \underline{\nu}(\{x \in F \setminus E \, : \psi(x) < \lambda\}).$$

Se tiene que el primer sumando, $\underline{\nu}(E \cap F)$ es una función constante, luego continua como función. Por el Lema 1.2.3 anterior tanto $\underline{\nu}(\{x \in E \setminus F : \phi(x) < 1 - \lambda\})$, como $\underline{\nu}(\{x \in F \setminus E : \psi(x) < \lambda\})$ son funciones continuas de λ. Como la suma de funciones continuas es continua, se tiene que $\underline{\nu}(C(\lambda))$ es continua de λ. $\square$

Lema 1.2.5. *Si $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n) : \mathscr{B} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un vector de medidas finitas, no negativas y sin átomos y cada μ_i $1 < i \leq n$ es absolutamente continua con respecto a la anterior, μ_{i-1}, entonces $\underline{\mu}$ es un vector de medidas convexo.*

Demostración. En virtud del lema 1.2.2 bastaría probar que $\underline{\mu}$ es semi-convexo. Para ello se procederá por inducción en n. Sea E un conjunto medible de $(X, \mathscr{B})$. Para el caso $n = 1$ se tiene que $\underline{\mu} = \mu$ es una medida finita, no negativa y sin átomos. Por lo tanto E no es un átomo. Entones existe un conjunto medible $F \subseteq E$ tal que

$$0 < \mu(F) < \mu(E).$$

Si $\mu(F) \geq \frac{1}{2}\mu(E)$ denotemos $E_1 := F$, en caso contrario, denotemos $E_1 := E \setminus F$. Repitiendo este proceso inductivamente se construye una familia $\{E_t \, : \, t \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos de E medibles tales que

$$E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots \supseteq E_t \supseteq \ldots,$$

y además

$$\mu(E_1) \geq \mu(E_2) \geq \cdots \geq \mu(E_t) \geq \cdots \geq \frac{1}{2}\mu(E).$$

Definamos $E_0 := \bigcap_{t \in \mathbb{N}} E_t$. Por construcción de la familia $\{E_t \, : \, t \in \mathbb{N}\}$, se tiene que

$$\lim_{t \to \infty} \mu(E_t) = \frac{1}{2}\mu(E).$$

Tenemos entonces una familia monótona decreciente de conjuntos medibles, y, como μ es finita, se tiene que $\mu(E_1) < \infty$ por lo tanto

$$\lim_{t \to \infty} \mu(E_t) = \mu(\bigcap_{t \in \mathbb{N}} E_t) = \mu(E_0) = \frac{1}{2}\mu(E).$$

Por lo tanto μ es semi-convexa. Y en virtud del Lema 1.2.2, entonces μ es una medida convexa. Supongamos ahora que el teorema es cierto para k con $1 < k < n$. Definamos

$$\underline{\mu}' := (\mu_1, \ldots, \mu_k),$$

$$\nu' := \mu_{k+1}.$$

Por hipótesis de inducción $\underline{\mu}'$ es semi-convexa, por lo tanto existe un subconjunto de E medible en $(X, \mathscr{B})$, E_0, tal que $\underline{\mu}'(E_0) = \frac{1}{2}\underline{\mu}'(E)$. Denotemos $F_0 := E \backslash E_0$, se cumple que $\underline{\mu}'(F_0) = \frac{1}{2}\underline{\mu}'(E)$. Si $\nu'(E_0) = \frac{1}{2}\mu(E)$ quedaría probado el teorema por hipótesis inductiva.
Si $\nu'(E_0) \neq \frac{1}{2}\mu(E)$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\nu'(E_0) < \frac{1}{2}\nu'(E)$ y que, por lo tanto, $\nu'(F_0) > \frac{1}{2}\nu'(E)$. Por el apartado *iii)* del Lema 1.2.4 aplicado a $\underline{\mu}'$, ν', E_0, F_0, se cumple que por un lado existe un conjunto $C(\lambda)$ con $0 \leq \lambda \leq 1$ tal que $\nu'(C(\lambda))$ es una función continua de λ. Por lo tanto, aplicando el Teorema de Bolzano a la función

$$f(\lambda) := \nu'(C(\lambda)) - \frac{1}{2}\nu'(E),$$

se concluye que existe λ', con $0 \leq \lambda' \leq 1$, tal que $\nu'(C(\lambda')) = \frac{1}{2}\nu'(E)$. Por otro lado

$$\underline{\mu}'(C(\lambda')) = (1-\lambda')\underline{\mu}'(E_0) + \lambda'\underline{\mu}'(F_0) = (1-\lambda')\frac{1}{2}\underline{\mu}'(E) + \lambda'\frac{1}{2}\underline{\mu}'(E) = \frac{1}{2}\underline{\mu}'(E),$$

entonces se tiene que $(\mu_1(C(\lambda')), \ldots, \mu_{k+1}(C(\lambda'))) = \frac{1}{2}(\mu_1(E), \ldots, \mu_{k+1}(E))$. Y por lo tanto, este proceso inductivo probaría el Lema. $\square$

LEMA 1.2.6. *Todo vector de medidas finitas, no negativas y sin átomos, es convexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ un vector de medidas finitas, no negativas y sin átomos. Definimos $\underline{\mu}' := (\mu_1', \ldots, \mu_n')$ de tal manera que

$$\mu_i' := \sum_{j=i}^{n} \mu_j.$$

Claramente $\underline{\mu}'$ es un vector de medidas finitas, no negativas y sin átomos.
Sea $\epsilon > 0$, E un conjunto medible de $(X, \mathscr{B})$ y j un entero tal que $1 < j \leq n$. Supongamos que $|\mu_j'(E)| < \epsilon$. Se tiene que $|\mu_j'(E)| = \mu_j(E) + |\mu_{j+1}'(E)|$ por lo que se cumple

$$|\mu_{j+1}'(E)| = |\mu_j'(E)| - \mu_j(E) < \epsilon - \mu_j(E) < \epsilon.$$

Tomando entonces $\delta = \epsilon$ se concluye que cada μ_j' es absolutamente continua respecto de su predecesor. Por tanto, cumple las hipótesis del Lema 1.2.5 anterior, por lo que $\underline{\mu}'$ es un vector de medidas convexo, y entonces también semi-convexo.

AFIRMACIÓN. *Sea $\underline{\mu}$ un vector de medidas finitas, no negativas y sea $T : R^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una trasformación lineal. Si $\underline{\mu}$ es semi-convexo, entonces $T \circ \underline{\mu} : \mathscr{B} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un vector de medidas semi-convexo.*

DEMOSTRACIÓN. Es obvio que $T \circ \underline{\mu}$ es un vector de medidas. Por ser $\underline{\mu}$ semi-convexo, se tiene que para todo $E \in \mathscr{B}$ existe $F \subseteq E$, $F \in \mathscr{B}$ tal que $\underline{\mu}(F) = \frac{1}{2}\underline{\mu}(E)$. Por lo tanto se sigue que

$$(T \circ \underline{\mu})(F) = T(\underline{\mu}(F)) = T(\frac{1}{2}\underline{\mu}(E)) = \frac{1}{2}T(\underline{\mu}(E)) = \frac{1}{2}(T \circ \underline{\mu})(E),$$

por lo que se sigue la semi-convexidad de $T \circ \underline{\mu}$. $\square$

Observamos que la transformación que lleva $\underline{\mu}$ a $\underline{\mu}'$ viene dada por una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por una matriz triangular superior de rango n, con 1's como únicas coordenadas no nulas. Por tanto, T es inversible, sea $T^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la aplicación lineal inversa y observamos que $\underline{\mu} = T^{-1} \circ \underline{\mu}'$. Como $\underline{\mu}'$ es semi-convexo, también $\underline{\mu}$ es semi-convexo. Por el Lema 1.2.2 concluiremos que $\underline{\mu}$ es convexo. $\square$

COROLARIO 1.2.7. *Con las notaciones precendentes, si $\underline{\mu}$ es un vector de medidas finitas, no negativas y sin átomos, entonces el conjunto de Lyapunov $\Lambda_{\underline{\mu}}(X, \mathscr{B})$ es un conjunto convexo.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\underline{\mu}$ es un vector de medidas finitas, no negativas, y sin átomos, por el Lema 1.2.6 entonces $\underline{\mu}$ es un vector de medidas finitas, no negativas y convexo. Ahora bien, por *ii)* del Lema 1.2.4 se concluye que $\Lambda_{\underline{\mu}}(X, \mathscr{B})$ es un conjunto convexo. Basta aplicar este último Lema para cualesquiera E, F conjuntos medibles de $(X, \mathscr{B})$ tales que $\underline{\mu}(E) \in \Lambda_{\underline{\mu}}(X, \mathscr{B})$ y $\underline{\mu}(F) \in \Lambda_{\underline{\mu}}(X, \mathscr{B})$. $\square$

1.3. Sobre la Clausura

Con las notaciones de la Sección precedente, sea $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ un vector de medidas finitas sobre el conjunto de los medibles de Borel $\mathscr{B}$ de un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$. Sea $\ell : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación lineal. Denotaremos por $\Lambda(\ell, \underline{\mu}) = \ell \circ \underline{\mu} : \mathscr{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ la medida obtenida componiendo $\underline{\mu}$ con ℓ (ver Proposición A.1.11 del Apéndice A)

LEMA 1.3.1. *Sea $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n) : \mathscr{B} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un vector de medidas finito. Supongamos $\ell : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación lineal y supongamos que $\Lambda(\ell, \underline{\mu})$ es no negativa, es decir:*

$$\forall\ E \in \mathscr{B},\ \Lambda(\ell, \underline{\mu})(E) \geq 0.$$

Entonces, existen E_1, $E_2 \in \mathscr{B}$ tales que se verifican las propiedades siguientes:

i) Los conjutnos E_1 y E_2 definen una partición de X (i.e. $E_1 \cup E_2 = X$ y $E_1 \cap E_2 = \emptyset$).
ii) Si $E \subseteq E_1$, entonces $\Lambda(\ell, \underline{\mu})(E) = 0 \Rightarrow \|\underline{\mu}\|(E) = 0$, donde $\|\underline{\mu}\| = |\mu_1| + \cdots + |\mu_n|$ es la medida definida en Definición 25 y Proposición A.1.7 del Apéndice A.
iii) Para cada $E \subseteq E_2$, $\Lambda(\ell, \underline{\mu})(E) = 0$.

En particular, el vector de medidas

$$\begin{array}{rccc} \underline{\mu}_\ell : & \mathscr{B} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & E & \longrightarrow & \underline{\mu}_\ell(E) := \underline{\mu}(E \setminus E_2), \end{array}$$

es absolutamente continuo respecto a $\Lambda(\ell, \underline{\mu})$.

DEMOSTRACIÓN. Con nuestras hipótesis, $\Lambda(\ell, \underline{\mu})$ es una medida finita y no negativa, la finitud viene dada porque $\underline{\mu}$ es una medida finita. En particular $|\Lambda(\ell, \underline{\mu})| = \Lambda(\ell, \underline{\mu})$. Consideremos ahora la siguiente familia de subconjuntos medibles

$$\mathscr{I} := \{E \in \mathscr{B} :\ \Lambda(\ell, \underline{\mu})(E) = 0\}.$$

AFIRMACIÓN (Afirmación A). *Con las anteriores notaciones, $\mathscr{I}$ es un conjunto estable por uniones numerables de sus elementos y el siguiente α es un número real no negativo*

$$\alpha := \sup\{\|\underline{\mu}\|(E) :\ E \in \mathscr{I}\}.$$

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, es claro que $\mathscr{I}$ es estable por uniones numerables de elementos disjuntos dos a dos. Es decir, dada $\{E_r : r \in \mathbb{N}\{\subseteq \mathscr{I}$ una familia numerable de subconjuntos medibles en $\mathscr{I}$ tales que $E_r \cap E_s = \emptyset$, para todo $r \neq s$, se tiene que

$$\Lambda(\ell, \underline{\mu})(\bigcup_{r \in \mathbb{N}} E_r) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \Lambda(\ell, \underline{\mu})(E_r) = \sum_{r \in \mathbb{N}} 0 = 0,$$

con lo que $\bigcup_{r \in \mathbb{N}} E_r \in \mathscr{I}$. En segundo lugar, $\mathscr{I}$ es estable por intersección y por diferencia de conjuntos. Es decir, dados B_1, $B_2 \in \mathscr{I}$, entonces $B_1 \setminus B_2 \in \mathscr{I}$. Para verlo obsérvese que $B_1 \setminus B_2 = B_1 \setminus (B_1 \cap B_2)$. Si $\Lambda(\ell, \underline{\mu})(B_2) = 0$, entonces, por ser $\Lambda(\ell, \underline{\mu})$ no negativa, se tiene:

$$0 \leq \Lambda(\ell, \underline{\mu})(B_1 \cap B_2) \leq \Lambda(\ell, \underline{\mu})(B_2) = 0,$$

lo que implica que $B_1 \cap B_2 \in \mathscr{I}$ y $\mathscr{I}$ es estable por intersecciones. Pero, además,

$$\Lambda(\ell, \underline{\mu})(B_1 \setminus B_2) = \Lambda(\ell, \underline{\mu})(B_1 \setminus (B_1 \cap B_2)) = \Lambda(\ell, \underline{\mu})(B_1) - \Lambda(\ell, \underline{\mu})(B_1 \cap B_2) = 0,$$

con lo cual, se concluye que $B_1 \setminus B_2 \in \mathscr{I}$. Finalmente, estamos en condiciones de probar la Afirmación A anterior. Así, sea $\{E_r : r \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathscr{I}$ una familia numerable de conjuntos medibles en $\mathscr{I}$. Definamos

$$E'_r := E_r \setminus (\bigcup_{k=0}^{r-1} E_r).$$

Por lo visto anteriormente, $E'_r \in \mathscr{I}$ (es la diferencia de dos elementos de $\mathscr{I}$). Además

$$\bigcup_{r \in \mathbb{N}} E'_r = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} E_r.$$

Por tanto, como $\mathscr{I}$ es estable por uniones numerables de medibles de $\mathscr{I}$ disjuntos dos a dos, habremos concluido que

$$\bigcup_{r \in \mathbb{N}} E_r = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} E'_r \in \mathscr{I},$$

y habremos demostrado la primera de las partes de la Afirmación A. De otro lado, como $\|\underline{\mu}\|$ es una medida no negativa y finita, es claro que el supremo $\sup\{\|\underline{\mu}\|(E) : E \in \mathscr{I}\}$ es un número real no negativo, con lo que la Afirmación A queda demostrada. □

Afirmación (Afirmación B). *Con las anteriores notaciones, existe $E_2 \in \mathscr{I}$ tal que*

$$\|\underline{\mu}\|(E_2) = \alpha = \sup\{\|\underline{\mu}\|(E) : E \in \mathscr{B}(X, \mathscr{T})\}.$$

Demostración. Como α es un supremo de un conjunto de números reales, exite una sucesión $\{E_r : r \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathscr{I}$ de conjuntos medibles en $\mathscr{I}$ tales que

$$\lim_{r\to\infty} \|\underline{\mu}\|(E_r) = \alpha.$$

Definamos el conjunto medible

$$E_2 := \bigcup_{r\in\mathbb{N}} E_r.$$

Por la Afirmación A, tenemos que $E_2 \in \mathscr{I}$. Por tanto,

$$\|\underline{\mu}\|(E_2) \leq \alpha.$$

De otro lado, $E_r \subseteq E_2$ para cada $r \in \mathbb{N}$, con lo que

$$\|\underline{\mu}\|(E_r) \leq \|\underline{\mu}\|(E_2).$$

Por tanto,

$$\alpha = \lim_{r\to\infty} \|\underline{\mu}\|(E_r) \leq \|\underline{\mu}\|(E_2) \leq \alpha,$$

con lo que queda probada la Afirmación B. □

Para concluir la demostración del enunciado del Lema, definamos $E_1 := X \setminus E_2$. Claramente $\{E_1, E_2\}$ definen una partición de X, con lo que tenemos la afirmación *i)*. De otro lado, hemos visto que $E_2 \in \mathscr{I}$ por tanto $\Lambda(\ell, \underline{\mu})(E_2) = 0$. Pero, además, $\Lambda(\ell, \underline{\mu})$ es una medida no negativa y, por tanto, para cada $E \in \mathscr{B}$, si $E \subseteq E_2$ se tiene que

$$0 \leq \Lambda(\ell, \underline{\mu})(E) \leq \Lambda(\ell, \underline{\mu})(E_2) = 0,$$

lo que demuestra la afirmación *iii)* del Lema. Finalmente, para la afirmación *ii)* del Lema, razonaremos por reducción al absurdo. Sea $E \subseteq E_1$ tal que $\Lambda(\ell, \underline{\mu})(E) = 0$ y supongamos $\|\underline{\mu}\|(E) > 0$. Entonces, por la Afirmación A, $E_2 \cup E \in \mathscr{I}$ y $E \cap E_2 = \emptyset$. Además, como $\|\underline{\mu}\|$ es una medida no negativa, se tiene

$$\|\underline{\mu}\|(E_2 \cup E) = \|\underline{\mu}\|(E_2) + \|\underline{\mu}\|(E) > \|\underline{\mu}\|(E_2),$$

lo que contradice el hecho de ser $\|\underline{\mu}\|(E_2)$ el supremo. Para la última afirmación del Lema, procedemos del modo siguiente: En primer lugar, observemos que para cada $E \in \mathscr{B}$

$$\|\underline{\mu}_\ell\|(E) = \|\underline{\mu}\|(E \setminus E_2). \tag{1.3.1}$$

Para probar la Ecuación (1.3.1), nótese que

$$(\underline{\mu}_\ell)^+(E) = \sup\{\underline{\mu}_\ell(A) : A \subseteq E, A \in \mathscr{B}\} = \sup\{\underline{\mu}(A\setminus E_2) : A\setminus E_2 \subseteq E\setminus E_2, A \in \mathscr{B}\} = \underline{\mu}^+(E\setminus E_2).$$

Mientras que:

$$(\underline{\mu}_\ell)^-(E) = -\inf\{\underline{\mu}_\ell(A) : A \subseteq E, A \in \mathscr{B}\} = -\inf\{\underline{\mu}(A\setminus E_2) : A\setminus E_2 \subseteq E\setminus E_2, A \in \mathscr{B}\} = \underline{\mu}^-(E\setminus E_2).$$

Ambas igualdades prueban la Ecuación (1.3.1).
Finalmente, como $\Lambda(\ell, \underline{\mu})$ es no negativa, se tiene que $\forall E \in \mathscr{B}$,

$$\|\Lambda(\ell, \underline{\mu})\| = 0 \iff \Lambda(\ell, \underline{\mu}) = 0.$$

Además, si $E \in \mathscr{B}$, $\Lambda(\ell, \underline{\mu})(E) = 0$ implica, por ser $\Lambda(\ell, \underline{\mu})$ no negativa, que

$$0 \leq \Lambda(\ell, \underline{\mu})(E \cap E_2) \leq \Lambda(\ell, \underline{\mu})(E_2) = 0.$$

Finalmente, si $E \in \mathscr{B}$ es tal que $\|\Lambda(\ell, \underline{\mu})\|(E) = 0$, entonces

$$\Lambda(\ell, \underline{\mu})(E \setminus E_2) = \Lambda(\ell, \underline{\mu})(E) - \Lambda(\ell, \underline{\mu})(E \cap E_2) = 0 - 0 = 0.$$

Aplicando la propiedad *ii)* concluiremos que $\|\underline{\mu}\|(E \setminus E_2) = 0$ y, por tanto, $\forall E \in \mathscr{B}$, si $\|\Lambda(\ell, \underline{\mu})\|(E) = 0$ se tiene

$$\|\underline{\mu}_\ell\|(E) = \|\underline{\mu}\|(E \setminus E_2) = 0,$$

lo que significa que $\underline{\mu}_\ell$ es absolutamente continua respecto de $\Lambda(\ell, \underline{\mu})$. □

Una variante más fina del Lema 1.3.1 anterior es el siguiente, que se da en el caso en que $\underline{\mu}$ sea un vector de medidas no negativas.

LEMA 1.3.2. *En las mismas notaciones e hipótesis anteriores, sea $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n) : \mathscr{B} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un vector de medidas sin átomos, no negativas y finitas. Sea $\ell : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ un aplicación lineal y supongamos que se verifica:*

$$\forall E \in \mathscr{B}, \quad \Lambda(\ell, \underline{\mu})(E) \geq 0.$$

Entonces, exiten $E_1, E_2 \in \mathscr{B}$ dos conjuntos medibles tales que se satisfacen las siguiente porpiedades:

i) Se tiene que $\Lambda(\ell, \underline{\mu})$ es absolutamente continua respecto a $\underline{\mu}$.
ii) Los conjuntos E_1 y E_2 definen una partición de X (i.e. $E_1 \cup E_2 = X$ y $E_1 \cap E_2 = \emptyset$).
iii) Si $E \subseteq E_1$, $\Lambda(\ell, \underline{\mu})(E) > 0 \iff \|\underline{\mu}\|(E) > 0$.
iv) Si $E \subseteq E_2$, $\Lambda(\ell, \underline{\mu})(E) = 0$.

Además, $\underline{\mu}_\ell(E) := \underline{\mu}(E \setminus E_2)$ es un vector de medidas sin átomos, no negativas, finitas y absolutamente continuo con respecto a $\Lambda(\ell, \underline{\mu})$.

DEMOSTRACIÓN. Es esencialmente la misma que en el Lema 1.3.1 precedente. El pequeño matiz es que $\underline{\mu}$ es un vector de medidas no negativas. Entonces, sea E un conjunto medible de $(X, \mathscr{B})$, se tiene que $\|\underline{\mu}|(E) = 0 \iff |\mu_i|(E) = 0$, para todo i, $1 \leq i \leq n \iff \mu_i(E) = 0$, para todo i, $1 \leq i \leq n$. Esto es cierto porque la ser μ_i no negativa, se tiene que $|\mu_i| = \mu_i$.
Por tanto, $\|\underline{\mu}\|(E) = 0 \Rightarrow \Lambda(\ell, \underline{\mu})(E) = \ell(0, \ldots, 0)$ y como ℓ es lineal, entonces $\ell(0, \ldots, 0) = 0$, por lo que hemos probado la afirmación *i)*. Para las afirmaciones *ii)* a *iv)* construyamos E_1, E_2 como en el Lema 1.3.1 precedente. Por tanto la afirmación *ii)* queda probado ya que coincide con *i)* del Lema anterior y la afirmación *iv)* coincide con *iii)* del Lema anterior. En cuanto a *iii)*, por *ii)* del Lema anterior tendríamos ue si $\|\underline{\mu}\|(E) > 0 \Rightarrow \Lambda(\ell, \underline{\mu})(E) > 0$ para cada $E \subseteq E_1$. De otro lado, si $\|\underline{\mu}\|(E) = 0$, entonces, como ya hemos visto, $\mu_i(E) = 0$ para cada i, $1 \leq i \leq n$. Luego

$$\Lambda(\ell, \underline{\mu})(E) = \ell(\mu_1(E), \ldots, \mu_n(E)) = \ell(0, \ldots, 0) = 0,$$

ya que ℓ es lineal. Con ello tenemos la equivalencia de la afirmación *iii)*. En cuanto a la última afirmación del Lema, ya hemos probado que $\underline{\mu}_\ell$ satisface casi todas las propiedades excepto ser un vector de medidas no negativas. Pero como $\underline{\mu}$ es un vector de medidas no negativas tendremos que

$$\mu_{\ell_i}(E) := \mu_i(E \setminus E_2), \quad \forall i,\ 1 \leq i \leq n.$$

Por tanto, $\underline{\mu}_\ell = (\mu_{\ell_1}, \ldots, \mu_{\ell_n})$ es un vector de medidas no negativas. □

LEMA 1.3.3. *Sea $\underline{\mu} : \mathscr{B} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un vector de medidas finitas convexas con imagen $R = \underline{\mu}(\mathscr{B})$, $\overline{R}$ la clausura de R, ∂R su frontera, $x \in \partial R$, un punto de la frontera y P_x una hiper-superficie de soporte de $\overline{R}$ pasando por x. Entonces, $R \cap P_x \neq \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN. Antes de comenzar la prueba, nótese que, por el Lema 1.2.4, se tiene que la imagen R de $\underline{\mu}$ es convexa y por lo tanto la definición de P_x tiene sentido. Por la Proposición A.2.3 se tiene que existen $\ell : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función lineal y $b \in \mathbb{R}$ tales que

i) $P_x = \{z \in \mathbb{R}^n : \ell(z) + b = 0\}$.
ii) $\forall z \in \overline{R}, \quad \ell(z) + b \geq 0$.

Por *ii)* se tiene que $-b = \inf\{\ell(z) : z \in R\}$. Por otro lado, como $R = \underline{\mu}(\mathscr{B})$, se tiene que $z = \underline{\mu}(E)$ para algun $E \in \mathscr{B}$. El hecho de que $-b$ sea el ínfimo de $\{\ell(\underline{\mu}(E)) : E \in \mathscr{B}\}$ significa que existe una familia $\{E_r : r \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos medibles de $(X, \mathscr{B})$ tales que

$$\lim_{r \to \infty} \ell(\underline{\mu}(E_r)) = -b.$$

Denotemos $E_0 := \bigcap_{r \in \mathbb{N}} E_r$. Se tiene que $E_0 \in \mathscr{B}$ por lo tanto

$$-b \leq \ell(\underline{\mu}(E_0)).$$

Por otro lado, $E_0 \subseteq E_r$ para cada $r \in \mathbb{N}$, con lo que

$$\ell(\underline{\mu}(E_0)) \leq \ell(\underline{\mu}(E_r)).$$

Por lo tanto

$$-b = \lim_{r\to\infty} \ell(\underline{\mu}(E_r)) \geq \ell(\underline{\mu}(E_0)) \geq -b,$$

con lo que $-b = \ell(\underline{\mu}(E_0))$. Por lo tanto es obvio que $\underline{\mu}(E_0) \in R \cap P_x$. $\square$

LEMA 1.3.4. *Sea $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n) : \mathscr{B} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un vector de medidas finitas y convexo. Sea $R = \underline{\mu}(\mathscr{B})$ su rango, $\overline{R}$ la clausura de R, $x \in \partial R$ un punto de su frontera y P_x una hiper-superficie de soporte de $\overline{R}$ pasando por x.*
Entonces, existe un vector de medidas finitas y convexo $\underline{\mu}' : \mathscr{B} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, cuyo rango $R' = \underline{\mu}'(\mathscr{B})$ es convexo, y existe un vector $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $R' = (-v) + R$, $\overline{R'} = (-v) + \overline{R}$ y $x' = (-v) + x \in \partial R'$. Además, la hiper-superficie de soporte P_x se transforma en una hiper-superficie de soporte $P_{x'}$ de $\overline{R'}$ pasando por x' y tal que el origen $\underline{0} \in P_{x'}$. Más aún, $x \in R$ si y solamente si $x' \in R'$.

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema 1.3.3, existe $E_0 \in \mathscr{B}$ tal que $\underline{\mu}(E_0) \in P_x$. Definamos la medida

$$\begin{array}{rccc} \underline{\mu}' : & \mathscr{B} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & E & \longrightarrow & \underline{\mu}'(E) := \underline{\mu}(E\Delta E_0) - \underline{\mu}(E_0), \end{array}$$

donde $E\Delta E_0 = (E \setminus E_0) \cup (E_0 \setminus E)$ es la diferencia simétrica.
Nótese que $\underline{\mu}'$ también verifica

$$\underline{\mu}'(E) = \underline{\mu}(E \setminus E_0) - \underline{\mu}(E \cap E_0). \tag{1.3.2}$$

La siguiente cadena de igualdades justifica la Ecuación (1.3.2):

$$\underline{\mu}(E\Delta E_0) = \underline{\mu}((E\backslash E_0) \cup (E_0\backslash E)) = \underline{\mu}(E\backslash E_0) + \underline{\mu}(E_0\backslash E) = \underline{\mu}(E\backslash E_0) + \underline{\mu}(E_0) - \underline{\mu}(E_0 \cap E).$$

Obviamente $\underline{\mu}(E \setminus E_0)$ y $\underline{\mu}(E \cap E_0)$ son dos vectores de medidas finitas, ya que $\underline{\mu}$ lo es. Por lo tanto, al ser $\underline{\mu}'$ una combinación lineal de estas dos medidas, $\underline{\mu}'$ es un vector de medidas finitas.
Sea $v = \underline{\mu}(E_0) \in \mathbb{R}^n$. Por la definición de $\underline{\mu}'$ es obvio que el rango $R' = \underline{\mu}'(\mathscr{B})$ satisface

$$(-v) + R \supseteq R'.$$

Como $E\Delta E_0 \in \mathscr{B}$, entonces, $\underline{\mu}(E\Delta E_0) \in R$ y, por tanto, $\underline{\mu}'(E) \in (-v) + R$.
De otro lado, es fácil observar que para cada $E \in \mathscr{B}$,

$$\underline{\mu}(E) - \underline{\mu}(E_0) = \underline{\mu}'(E\Delta E_0). \tag{1.3.3}$$

Es obvio que $[(E \setminus E_0) \cup (E_0 \setminus E)] \setminus E_0 = E \setminus E_0$ y $[(E \setminus E_0) \cup (E_0 \setminus E)] \cap E_0 = E_0 \setminus E$. Por lo tanto, de la Ecuación (1.3.2) se tiene que

$$\underline{\mu}'(E\Delta E_0) = \underline{\mu}'((E \setminus E_0) \cup (E_0 \setminus E)) = \underline{\mu}(E \setminus E_0) - \underline{\mu}(E_0 \setminus E)$$

Y, atendiendo a la regla $\underline{\mu}(E) = \underline{\mu}(E \cap E_0) + \underline{\mu}(E \cap (X \setminus E_0)) = \underline{\mu}(E \cap E_0) + \underline{\mu}(E \setminus E_0)$, se tiene que,

$$\begin{array}{rrcrcr} & \underline{\mu}(E) & = & \underline{\mu}(E \cap E_0) & + & \underline{\mu}(E \setminus A) \\ - & \underline{\mu}(E_0) & = & \underline{\mu}(E_0 \cap E) & + & \underline{\mu}(E_0 \setminus E) \\ \hline \\ & \underline{\mu}(E) - \underline{\mu}(E_0) & = & \underline{\mu}(E \setminus E_0) & - & \underline{\mu}(E_0 \setminus E) \end{array}$$

Por lo que queda justificada la Ecuación (1.3.3). Como $E\Delta E_0 \in \mathscr{B}$ entonces $(-v) + \underline{\mu}(E) \in R'$, con lo cual

$$(-v) + R \subseteq R'.$$

Es fácil ver que $\underline{\mu}'$ es semi-convexa. Al ser $\underline{\mu}$ convexo para cualquier conjunto medible E existen $F_- \subset (E\backslash A)$ y $F_+ \subset (E \cap A)$, medibles en $(X, \mathscr{B})$, tales que $\underline{\mu}(F_-) = \frac{1}{2}\underline{\mu}(E\backslash A)$ y $\underline{\mu}(F_+) = \frac{1}{2}\underline{\mu}(E \cap A)$. Se tiene que $F_- \cup F_+$ es un subconjunto de E y además son disjuntos. Y que por la definición de $\underline{\mu}'$, $\underline{\mu}'(F_-) = \underline{\mu}(F_-)$ y $\underline{\mu}'(F_+) = -\underline{\mu}(F_+)$. Luego se concluye que

$$\underline{\mu}'(F_- \cup F_+) = \underline{\mu}'(F_-) + \underline{\mu}'(F_+) = \underline{\mu}(F_-) - \underline{\mu}(F_+) = \frac{1}{2}\underline{\mu}(E\backslash A) - \frac{1}{2}\underline{\mu}(E \cap A) = \frac{1}{2}\underline{\mu}'(E)$$

Lo que implica que $\underline{\mu}'$ es semi-convexa y, en virtud del Lema 1.2.2, $\underline{\mu}'$ es convexa.
Obviamente, como la traslación $t_{(-v)} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, (dada por $t_{(-v)}(z) = z - v$, para cada $z \in \mathbb{R}^n$) es un isomorfismo (y una isometría), se tiene que $x \in \partial R \iff x' = x - v \in \partial R'$. Por supuesto, por la misma razon $x \in R$ si y solamente si $x' \in R'$.

Por último, considerando la traslación $t_{(-v)}$ tenemos una hiper-superficie de soporte $P_{x'}$ de $\overline{R'} = (-v) + \overline{R}$. La hiper-superficie de soporte $P_{x'}$ verifica que, como $\underline{\mu}(E_0) \in P_x$, entonces $\underline{0} = t_{(-v)}(\underline{\mu}(E_0)) \in P_{x'}$ y $P_{x'}$ pasa por el origen. □

Observación 1.3.5. El hecho de que $\underline{0} \in P_{x'}$, significa que se puede elegir una aplicación lineal $\ell : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

i) $P_{x'} = \{z \in \mathbb{R}^n : \ell(z) = 0\}$.

ii) $\forall z \in \overline{R'},\ \ell(z) \geq 0$.

Lema 1.3.6. *Sea $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ un vector de medidas finitas y convexas definidas sobre el conjunto $\mathscr{B}(X, \mathscr{T})$ de los medibles de Borel de un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$. Entonces, su rango $\underline{\mu}(\mathscr{B}(X, \mathscr{T}))$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Procederemos a demostrar el Lema por inducción en la dimensión k de la imagen, R, del vector de medidas $\underline{\mu}$. Si la dimensión de R es $k = 1$, esto significa que existe un vector $v \in \mathbb{R}^n$ no nulo y $\mu_0(B) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\underline{\mu}(B) = \mu_0(B)v,\ \ \forall B \in \mathscr{B}.$$

Es un mero ejercicio comprobar que la función $\mu_0 : \mathscr{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una medida sobre $(X, \mathscr{B})$. Además, como $\underline{\mu}$ es finita y convexa, también lo es μ_0. Por ser μ_0 finita (ver Definición 19) se tiene que $R \subseteq [\alpha, \beta]$ para algún compacto de $\mathbb{R}$. Por el Lema 1.3.3 la hiper-superfice de soporte $P_1 = \{x \in \mathbb{R} : x - \alpha = 0\}$ de $\overline{R}$ interseca a R. Esto es, existe $E_1 \in \mathscr{B}$ tal que $\alpha = \mu_0(E_1)$. Por el mismo argumento, la hiper-superfice $P_2 = \{x \in \mathbb{R} : x - \beta = 0\}$ interseca a R, con lo que existe $E_2 \in \mathscr{B}$ tal que $\beta = \mu_0(E_2)$ y por lo tanto $R = [\alpha, \beta]$. Por lo que R es cerrado y compacto.

Supongamos ahora por inducción, que para $k > 1$ el teorema se cumple para cualquiera dimensión de $\underline{\mu}$ menor o igual a $k - 1$. Sea $x \in \partial R$ y sea P_x una hiper-superficie de soporte de $\overline{R}$ (ver Definición 33). Por el Lema 1.3.5 podemos suponer que $0 \in P_x$ y por lo tanto existe una aplicación lineal $\ell : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ tal que $P_x = \{z \in \mathbb{R}^k : \ell(z) = 0\}$ y $\forall z \in \overline{R}$ se tiene que $\ell(z) \geq 0$. Por lo tanto $0 = \inf\{\ell(z) : z \in R\}$. Por la Proposición A.1.11 la función $\Lambda(\ell, \underline{\mu})$ es una medida finita y convexa. Como P_x es una hiper-superfice de soporte de $\overline{R}$ y como ℓ es positiva sobre $\overline{R}$, entonces $\Lambda(\ell, \underline{\mu})$ es una medida no negativa sobre los medibles de Borel $\mathscr{B}$. Además, el rango de $\Lambda(\ell, \underline{\mu})$ está contenido en $\mathbb{R}$ y, por tanto, tiene dimensión ≤ 1. En consecuencia, por lo visto en el caso $k = 1$, el rango de $\Lambda(\ell, \underline{\mu})$ es compacto.

Por el Lema 1.3.1 existe un conjunto medible E_2 tal que $\underline{\mu}_\ell(E) := \underline{\mu}(E \setminus E_2)$ es absolutamente continua respecto de $\Lambda(\ell, \underline{\mu})$. Consideremos $\underline{\mu}^+(E) := \underline{\mu}(E \cap E_2)$, que claramente es una medida. Se tiene que $\ell(\underline{\mu}^+(E)) = \ell(\underline{\mu}(E \cap E_2))$. Por *iii)* del Lema antes mencionado, como $E \cap E_2 \subseteq E_2$ se tiene que $\ell(\underline{\mu}(E \cap E_2)) = 0$. Por lo tanto $R^+ = \underline{\mu}^+(\mathscr{B}) \subseteq P_x$. Entonces la dimensión de R^+ es menor que $k - 1$ y por hipótesis de inducción R^+ es compacto.

Sea E_0 un conjunto medible de $(X, \mathscr{B})$ tal que $\underline{\mu}(E_0) \in \overline{R} \cap P_x$, por lo tanto existe una familia de conjuntos medibles de $(X, \mathscr{B})$, $\{E_r : r \in \mathbb{N}\}$, tal que

$$\lim_{r \to \infty} \underline{\mu}(E_r) = \underline{\mu}(E_0).$$

Por lo tanto es obvio que

$$\lim_{r \to \infty} \Lambda(\ell, \underline{\mu})(E_r) = \ell(\underline{\mu}(E_0)) = 0,$$

ya que $\underline{\mu}(E_0) \in P_x$. Como $\underline{\mu}_\ell$ es absolutamente continua respecto de $\Lambda(\ell, \underline{\mu})$ se tiene que

$$\lim_{r \to \infty} \underline{\mu}_\ell(E_r) = 0.$$

Ahora bien, como para cualquier conjunto medible E de $(X, \mathscr{B})$ se tiene que $\underline{\mu}(E) = \underline{\mu}_\ell(E) + \underline{\mu}^+(E) = \underline{\mu}(E \setminus E_2) + \underline{\mu}(E \cap E_2)$ se tiene que

$$\lim_{r \to \infty} \underline{\mu}^+(E_r) = \underline{\mu}(E_0),$$

por lo tanto, como R^+ es cerrado, $\underline{\mu}(E_0) \in R^+ \subseteq R$, por lo que $\overline{R} \cap P_x \subseteq R$.

Hemos probado que para cada $x \in \partial R$ se tiene que $x \in R$ y habremos concluido que R es cerrado.

Se concluye entonces que la imagen $R = \underline{\mu}(\mathscr{B})$ es cerrada. Adicionalmente, como $\underline{\mu}$ es finita, R es un conjunto cerrado y acotado, lo que termina la prueba del Lema. □

1.4. Demostración del Teorema Principal

A continuación demostraremos la compacidad de $\Lambda_{\underline{\mu}}(X, \mathscr{B})$. Sea $\underline{\mu}$ un vector de medidas finitas, no negativas y sin átomos. En la Observación 1.2 se justificó que $\underline{\mu}$ es un vector de medidas convexo. Por lo tanto por el Lema 1.3.6 se tiene que $\Lambda_{\underline{\mu}}(X, \mathscr{B})$ es cerrado. Ahora bien, por la Definición 19, se tiene que $\Lambda_{\underline{\mu}}(X, \mathscr{B})$, por ser $\underline{\mu}$ finita, estará contenida en un compacto. Por lo tanto, por ser $\Lambda_{\underline{\mu}}(X, \mathscr{B})$ un conjunto cerrado contenido en un compacto, es compacto. Por lo tanto $\Lambda_{\underline{\mu}}(X, \mathscr{B})$ es convexo (ver Observación 1.2 en la Sección 1.2) y compacto y se concluye la demostración del Teorema 1.1.1.

CAPíTULO 2

La Extensión de Dvoretzky, Wald y Wolfowitz

Índice

2.1. Introducción

Esta Capítulo está dedicado a la demostración del Teorema 0.3.2 de Dvoreztky, Wald y Wolfowitz. conforme a su prueba original en [**DWW, 51**]. Recordemos que ese resultado se enuncia del modo siguiente.
Con las notaciones precedentes, sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico polaco (ver Definición 35), $\mathscr{B} := \mathscr{B}(X, \mathscr{T})$ la $\sigma-$álgebra de sus medibles de Borel, $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \left(\Omega^1(X, \mathscr{B})\right)^n$ un vector de probabilidades sin átomos definidas sobre $\mathscr{B}$. Sea $\mathscr{P}_m(X, \mathscr{B}) \subseteq \mathscr{B}^m$ el conjunto de todas las particiones de X como unión de m conjuntos medibles de Borel y definamos la matriz estocástica asociada a $\underline{\mu}$ y a una partición $\mathcal{P} \in \mathscr{P}_m(X, \mathscr{B})$ mediante:

$$\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) := (\mu_i(X_j))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \in \mathscr{M}_{n \times m}(\mathbb{R}).$$

Teorema 2.1.1 (Dvoreztzky-Wald-Wolfowitz, cf. [**DWW, 51**]). *Con las notaciones precedentes, supongamos que $(X, \mathscr{T})$ es un espacio topológico polaco y un vector de probabilidades sin átomos $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \left(\Omega^1(X, \mathscr{B})\right)^n$. Consideremos la siguiente familia de matrices estocásticas por filas:*

$$DWW_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B}) := \{\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) \ : \ \mathcal{P} \in \mathscr{P}_m(X, \mathscr{B})\} \subseteq \mathbf{St}_{n \times m}(\mathbb{R}).$$

Entonces, el conjunto $DWW_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$ es un conjunto convexo y compacto.

En la Sección 2.6 aportamos material original para un ulterior estudio del conjunto $DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B})$. La primera observación fundamental que aportamos es *la invarianza del conjunto $DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B})$* bajo la acción de multiplicar a la derecha por matrices estocásticas (ver Proposición 2.6.2). Otras aportaciones entroncan con la modelización de Robertson-Webb para una algorítmica del reparto de tartas. A continuación resumimos nuestras principales contribuciones en esta Sección 2.6.
En primer lugar, en la Subsección 2.6.1 se ofrece un modelo matricial de la operación elemental Cut&Choose de Robertson-Webb, que se motrará en esa Subsección. Seguidamente, en la Subsección 2.6.2 mostramos como la operación Cut&Choose se modeliza mediante un operador que hemos denominado *operador reestructuración* (ver Definición 9) y que actúa sobre

$DWW^n_{\underline{\mu}}(X,\mathscr{B})$ del modo siguiente:

$$\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{Q}) = \sum_{l=1}^{n} E_{(l)} \cdot \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) \cdot M_l, \tag{2.1.1}$$

donde $M_l \in \mathbf{St}_{n\times(m+n)}(\mathbb{R})$ son matrices estocásticas por filas y $E_{(l)} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ es la matriz cuadrada que tiene un 1 en al coordenada (l,l) y ceros en el resto de sus coordenadas.
Observemos que si bien $DWW^{(n)}_{\underline{\mu}}(X,\mathscr{B})$ es invariante por la acción a derecha de las matrices estocásticas, es invariante por la acción del operador reestructuración solo en circustancias muy excepcionales (ver Proposición 2.6.4 donde se caracteriza esta invarianza). A continuación se introduce la clase de operadores $Stab^{(n)}_{\underline{\mu}}(X,\mathscr{B})$ que responde a las reestructuraciones que dejan invariante $DWW^{(n)}_{\underline{\mu}}(X,\mathscr{B})$. En el Teorema 2.6.5 hemos demostrado algunas propiedades básicas de $Stab^{(n)}_{\underline{\mu}}(X,\mathscr{B})$. Por ejemplo, probamos que $Stab^{(n)}_{\underline{\mu}}(X,\mathscr{B})$ es un monoide compacto y convexo y que todo operador en $Stab^{(n)}_{\underline{\mu}}(X,\mathscr{B})$ posee un punto fijo dado como una matriz $M \in DWW^{(n)}_{\underline{\mu}}(X,\mathscr{B})$ cuyas filas son vectores estacionarios.

2.2. Un importante Lema técnico en espacio topológicos polacos

Vamos a demostrar el siguiente resultado técnico relativo a los conjuntos medibles de Borel en espacio topológicos polacos, relativa a la convergencia de sucesiones de medidas.

Lema 2.2.1. *Sea $(X,\mathscr{T})$ un espacio topológico polaco y $\mathscr{B} := \mathscr{B}(X)$ su σ-álgebra de Borel asociada. Sean $\{\mu_t : t\in\mathbb{N}\}$ y μ medidas finitas y no negativas definidas sobre $\mathscr{B}$ tales que para cada $B\in\mathscr{B}$ se tiene que*

$$0 \le \mu_t(B) \le \mu(B) < \infty \quad \forall\, t \in \mathbb{N}.$$

Entonces, se cumple que existe una medida ν sobre $\mathscr{B}$ tal que

$$0 \le \nu(B) \le \mu(B) \quad B \in \mathscr{B},$$

y unos enteros positivos $\{t_i : i\in\mathbb{N}\}$ que satisfacen

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_i < t_{i+1} < \ldots,$$

tales que

$$\lim_{i\to\infty} \mu_{t_i}(B) = \nu(B).$$

Demostración. Como $(X,\mathscr{T})$ es un espacio topológico polaco, posee una base numerable de abiertos (cf. Observación A.3.1) que se denotará por $\mathscr{A}_0$. A su vez, recordemos que por el Corolario A.3.2, $\mathscr{A}_0$ genera una álgebra $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ numerable. Esta álgebra está formada por uniones e intersecciones finitas de elementos de $\mathscr{A}_0$ y sus complementarios. Incluso sabemos que las σ-álgebras generadas por $\mathscr{A}_0$ o por $\mathscr{A}$ son precisamente los conjuntos medibles de Borel de $(X,\mathscr{T})$. Es decir, con las notaciones de la Sección A.1, se tiene:

$$\sigma(\mathscr{A}_0) = \sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{B},$$

donde $\sigma(\cdot)$ denota la σ-álgebra generada por la correspondiente familia de subconjuntos de X. Como $\mathscr{A}$ es numerable, denotando $A_0 = X$ tendremos $\mathscr{A} = \{A_n : n\in\mathbb{N}\}$ dado como una sucesión de conjuntos medibles de Borel de $(X,\mathscr{T})$. Procederemos con un método de diagonalización "à la Cantor". Designemos

$$x_{n,m} = \mu_m(A_n) \quad \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2.$$

Como por hipótesis las μ_t están acotadas por μ, se tendrá que, para cada $n\in\mathbb{N}$,

$$\{x_{n,m} : m\in\mathbb{N}\} \subseteq [0, \mu(A_n)]\,,$$

por lo que las sucesiones $\{x_{n,m} : m\in\mathbb{N}\}$ son acotadas. Procederemos con un argumento inductivo con el que definiremos $q:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ del modo siguiente. Para $n=0$, sea $\{q(0,m) : m\in\mathbb{N}\}$ la familia de índices de una subsucesión convergente de la sucesión

$$\{x_{0,m} : m\in\mathbb{N}\} \subseteq [0, \mu(A_0)]\,.$$

Esta subsucesión en efecto existe porque $[0, \mu(A_0)] \subseteq \mathbb{R}$ es compacto y, por tanto, sucesionalmente compacto. Denotemos por

$$\nu(A_0) := \lim_{m\to\infty} x_{0,m} = \lim_{m\to\infty} \mu_m(A_0).$$

Para $n \geq 1$ definamos inductivamente $\{q(n,m) : m \in \mathbb{N}\}$ del modo siguiente:
Supongamos definido $\{q(n-1,m) : m \in \mathbb{N}\}$ una familia de índices tales que

> $\forall j$, $0 \leq j \leq n-1$, la sucesión $\{x_{j,m} : m \in \mathbb{N}\}$ es convergente y denotaremos por $\nu(A_j)$ el límite de esa subsucesión:
>
> $$\lim_{m\to\infty} x_{j,m} = \nu(A_j).$$

Consideramos la sucesión

$$\{x_{n,q(n-1,m)} : m \in \mathbb{N}\} \subseteq [0, \mu(A_n)] .$$

De nuevo, por el mismo argumento anterior, posee una subsucesión convergente. Denotemos

$$\{x_{n,q(n,m)} : m \in \mathbb{N}\} \subseteq [0, \mu(A_n)] ,$$

esa subsucesión convergente y, del mismo modo, denotemos por $\nu(A_n)$ su límite.
Tenemos así una "matriz" infinita de sucesiones convergentes de números reales

$$\begin{array}{ccccccc}
\mu_{q(0,0)}(A_0) & \mu_{q(0,1)}(A_0) & \dots & \mu_{q(0,m)}(A_0) & \dots & \to & \nu(A_0) \\
\mu_{q(1,0)}(A_1) & \mu_{q(1,1)}(A_1) & \dots & \mu_{q(1,m)}(A_1) & \dots & \to & \nu(A_1) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\mu_{q(n,0)}(A_n) & \mu_{q(n,1)}(A_n) & \dots & \mu_{q(n,m)}(A_n) & \dots & \to & \nu(A_n) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

El método de diagonalización de Cantor consiste en considerar la subsucesión de medidas $\{\nu_k : k \in \mathbb{N}\}$ dada mediante la siguiente igualdad:

$$\nu_k := \mu_{q(k,k)}$$

Afirmación. *Con las anteriores notaciones, para cada $n \in \mathbb{N}$, la sucesión*

$$\{\nu_k(A_n) : k \in \mathbb{N}\}$$

es una sucesión convergente y $\lim_{k\to\infty} \nu_k(A_n) = \nu(A_n)$.

Demostración. Para demostrar esta observación, nótese que para todo $k \geq n$, la subsucesión

$$\{\nu_k(A_n) : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \{\mu_{q(n,m)}(A_n) : m \in \mathbb{N}\}$$

Como $\{\mu_{q(n,m)}(A_n) : m \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión convergente, se tiene que $\{\nu_k(A_n) : k \in \mathbb{N}\}$ también converge y su límite debe ser el mismo, es decir

$$\nu(A_n) = \lim_{m\to\infty} \mu_{q(n,m)}(A_n) = \lim_{k\to\infty} \nu_k(A_n)$$

por lo que se deduce la Afirmación. □

Ahora observemos que $\nu : \mathscr{A} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada mediante $\nu(A_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ es una medida sobre el álgebra $\mathscr{A}$. Para ello es claro que:

i) $\nu(\emptyset) = \lim_{k\to\infty} \nu_k(\emptyset) = 0$,

ii)

$$\nu(A_n^c) = \lim_{k\to\infty} \nu_k(A_n^c) = \lim_{k\to\infty} \nu_k(X \setminus A_n) = \lim_{k\to\infty} \nu_k(X) - \nu_k(A_n) = \nu(X) - \nu(A_n).$$

Ahora consideremos una sucesión infinita $\{A^{(s)} : s \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathscr{A}$ de elementos disjuntos dos a dos, de tal modo que $\bigcup_{s\in\mathbb{N}} A^{(s)} \in \mathscr{A}$. Tenemos que

$$\nu_k\left(\bigcup_{s\in\mathbb{N}} A^{(s)}\right) = \mu_{q(k,k)}\left(\bigcup_{s\in\mathbb{N}} A^{(s)}\right) = \sum_{s\in\mathbb{N}} \mu_{q(k,k)}(A^{(s)}) = \sum_{s\in\mathbb{N}} \nu_k(A^{(s)}) \leq$$

$$\leq \sum_{s\in\mathbb{N}} \mu(A^{(s)}) = \mu(\bigcup_{s\in\mathbb{N}} A^{(s)}) < \infty,$$

y además se tiene que para cualquier $s \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k\to\infty} \nu_k(A^{(s)}) = \nu(A^{(s)}).$$

Por lo tanto $\{\nu_k : k \in \mathbb{N}\}$, ν y μ se encuentran en las hipótesis de la Versión Discreta del Teorema de la Convergencia Dominada A.1.13. Entendiendo cada $\upsilon \in \{\nu_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\nu\} \cup \{\mu\}$ como una sucesión de números reales no negativos:

$$\begin{array}{rccc} \upsilon : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ & s & \longrightarrow & \upsilon(A^{(s)}). \end{array}$$

Por lo tanto

$$\lim_{k\to\infty} \left(\sum_{s\in\mathbb{N}} \nu_k(A^{(s)}) \right) = \sum_{s\in\mathbb{N}} \nu(A^{(s)}),$$

luego,

$$\sum_{s\in\mathbb{N}} \nu(A^{(s)}) = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{s\in\mathbb{N}} \nu_k(A^{(s)}) \right) = \lim_{k\to\infty} \nu_k(\bigcup_{s\in\mathbb{N}} A^{(s)}) = \nu(\bigcup_{s\in\mathbb{N}} A^{(s)}),$$

dónde la última igualdad se deduce del hecho de que, por hipótesis, $\bigcup_{s\in\mathbb{N}} A^{(s)} \in \mathscr{A}$. Y hemos demostrado entonces que ν es una medida sobre $\mathscr{A}$.
Nos encontramos ante las hipótesis del Teorema A.3.3 y por tanto existirá una única medida $\tilde{\nu} : \mathscr{B} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que

$$\tilde{\nu}|_{\mathscr{A}} = \nu.$$

Para concluir con la prueba necesitaremos demostrar que para cada $B \in \mathscr{B}$ se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \nu_k(B) = \tilde{\nu}(B).$$

Para ello, consideremos un conjunto intermedio de $\mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}(X)$ de los medibles de Borel de $(X, \mathscr{T})$:

$$\mathscr{B}_0 = \{B \in \mathscr{B} : \exists \lim_{k\to\infty} \nu_k(B)\},$$

recordando que $\nu_k(B) = \mu_{q(k,k)}(B)$. Obviamente tenemos que

$$\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}.$$

A continuación veamos que $\mathscr{B}_0$ es una σ-álgebra. Para ello, obsérvese que $\emptyset, X \in \mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}_0$. Además, si $B \in \mathscr{B}_0$, se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \nu(X \setminus B) = \lim_{k\to\infty} (\nu_k(X) - \nu_k(B)) = \tilde{\nu}(X) - \lim_{k\to\infty} \nu_k(B).$$

Por lo tanto el límite existe y entonces $X \setminus B \in \mathscr{B}_0$. Se tiene también que para $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k\to\infty} \nu_k(\bigcup_{i=1}^{n}) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \nu_k(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \lim_{k\to\infty} \nu_k(B_i).$$

Se tiene entonces que $\mathscr{B}_0$ es cerrado por uniones finitas. Se concluye entonces que $\mathscr{B}_0$ es álgebra de conjuntos. Para ver que, en efecto, es una σ-álgebra necesitaremos verificar la condición de uniones numerables. Para ello, consideremos $\{B^{(s)} : s \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathscr{B}_0$. Ahora, se define inductivamente

$$\widetilde{B^{(0)}} := B^{(0)},$$

y para $s \geq 1$, se define

$$\widetilde{B^{(s)}} := B^{(s)} \setminus \left(\bigcup_{j=0}^{s-1} B^{(j)} \right) = B^{(s)} \setminus \left(\bigcup_{j=0}^{s-1} \widetilde{B^{(j)}} \right).$$

Obviamente, la familia $\{\widetilde{B^{(s)}} : s \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathscr{B}_0$ es una familia de conjuntos medibles de Borel disjuntos dos a dos. Y se tiene

$$\bigcup_{s\in\mathbb{N}} B^{(s)} = \bigcup_{s\in\mathbb{N}} \widetilde{B^{(s)}}.$$

Por tanto, bastará con probar que $\bigcup_{s\in\mathbb{N}} \widetilde{B^{(s)}} \in \mathscr{B}_0$ para concluir que $\mathscr{B}_0$ es una σ-álgebra.
De nuevo usaremos la Versión Discreta del Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue A.1.13, comprobemos a continuación la hipótesis del mismo.

$$\nu_k(\widetilde{B^{(s)}}) \leq \mu(\widetilde{B^{(s)}}) < \infty \text{ para todo } k \in \mathbb{N},\ s \in \mathbb{N}.$$

De otro lado $\exists \lim_{k\to\infty} \nu_k(\widetilde{B^{(s)}})$ porque $\widetilde{B^{(s)}} \in \mathscr{B}_0$ para cada $s \in \mathbb{N}$. Finalmente,

$$\sum_{s\in\mathbb{N}} \nu_k(\widetilde{B^{(s)}}) = \nu_k(\bigcup_{s\in\mathbb{N}} \widetilde{B^{(s)}}) = \nu_k(\bigcup_{s\in\mathbb{N}} B^{(s)}) < \infty,$$

$$\sum_{s\in\mathbb{N}} \mu(\widetilde{B^{(s)}}) = \mu(\bigcup_{s\in\mathbb{N}} \widetilde{B^{(s)}}) = \mu(\bigcup_{s\in\mathbb{N}} B^{(s)}) < \infty.$$

Entonces, con $\{\nu_k : k \in \mathbb{N}\}$ y μ nos encontramos en las hipótesis del Teorema, entendiendo cada $\upsilon \in \{\nu_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\mu\}$ como una sucesión de números reales no negativos:

$$\begin{array}{rccc} \upsilon : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ & s & \longrightarrow & \upsilon(\widetilde{B^{(s)}}). \end{array}$$

Por lo tanto se tendrá

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{s\in\mathbb{N}} \nu_k(\widetilde{B^{(s)}}) = \sum_{s\in\mathbb{N}} \lim_{k\to\infty} \nu_k(\widetilde{B^{(s)}}).$$

Y se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{s\in\mathbb{N}} \nu_k(\widetilde{B^{(s)}}) = \lim_{k\to\infty} \nu_k(\bigcup_{s\in\mathbb{N}} \widetilde{B^{(s)}}) = \lim_{k\to\infty} \nu_k(\bigcup_{s\in\mathbb{N}} B^{(s)}),$$

por lo tanto $\exists \lim_{k\to\infty} \nu_k(\bigcup_{s\in\mathbb{N}} B^{(s)})$ lo que implica que $\bigcup_{s\in\mathbb{N}} B^{(s)} \in \mathscr{B}_0$. Tenemos así una σ-álgebra $\mathscr{B}_0$ tal que

$$\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$$

y recordemos que $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{A})$ es la σ-álgebra generada por $\mathscr{A}$. Por lo tanto, se tiene

$$\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{B}.$$

Concluimos que $\mathscr{B} = \mathscr{B}_0$. Por tanto, para cada $B \in \mathscr{B}$, existe el límite

$$\lim_{k\to\infty} \nu_k(B).$$

Más aún, $\lim_{k\to\infty} \nu_k(B)$ define una medida en $\mathscr{B}$ que, en particular, coincide con ν en $\mathscr{A}$. Por la unicidad de la extensión (ver Lema A.3.4) tendremos que

$$\lim_{k\to\infty} \nu_k(B) = \tilde{\nu(B)}, \quad \forall B \in \mathscr{B}.$$

Y se concluye así la demostración del Lema.

$\square$

2.3. El rango de las esperanzas de particiones de la unidad finitas es compacto y convexo

Antes de comenzar con el estudio de esta Sección, definiremos unos conjuntos que serán de ayuda para la claridad de exposición de esta y las siguientes Secciones de este Capítulo.

Definición 5. *Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico, $\mathscr{B} = \mathscr{B}(X)$ sus conjuntos medibles de Borel y $m \in \mathbb{N}$ un entero con $m \geq 1$. Sea $\Omega_{\geq 0}(X, \mathscr{B})$ el conjunto de las funciones medibles no negarivas relativas a $\mathscr{B}$. Consideremos el conjunto:*

$$UP^{(m)}(X, \mathscr{B}) := \{(\eta_1, \dots, \eta_m) \in [\Omega_{\geq 0}(X, \mathscr{B})]^m : \eta_1(x) + \cdots + \eta_m(x) = 1, \forall x \in X\}.$$

A las listas $\underline{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_m) \in UP^{(m)}(X, \mathscr{B})$ las llamaremos listas de particiones de la unidad medibles sobre $(X, \mathscr{B})$.

Definición 6. *Con las notaciones de la definición precedente, consideremos el subconjunto*

$$UP^{(m)}_{esc}(X, \mathscr{B}) := \{(\eta_1, \dots, \eta_m) \in UP^{(m)}(X, \mathscr{B}) : \eta_i \text{ es escalonada}, 1 \leq i \leq m\}.$$

A los elementos $\underline{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_m) \in UP^{(m)}_{esc}(X, \mathscr{B})$ los denominaremos listas de particiones de la unidad escalonadas.

OBSERVACIÓN 2.3.1. Obsérvese que si $\underline{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_m) \in UP_{esc}^{(m)}(X, \mathscr{B})$, por ser cada η_i escalonada y medible, existirá $\{B_1, \dots, B_k\} \subseteq \mathscr{B}$ un conjunto finito de medibles de Borel de $(X, \mathscr{T})$ y una matriz de números reales positivos $\mathscr{M} = \left(c_j^{(i)} \in [0,1] : 1 \leq j \leq k, 1 \leq i \leq m \right)$ tales que

$$\eta_i(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j^{(i)} \chi_{B_j}(x),$$

donde χ_{B_j} es la función característica del conjuto medible B_j.

OBSERVACIÓN 2.3.2. Dado una lista de particiones de la unidad $\underline{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_m) \in UP_{esc}^{(m)}(X, \mathscr{B})$, si $\eta_i(x) \in \{0,1\}$ para cada $1 \leq i \leq m$ y $x \in X$, se tiene que el conjunto de medibles descritos en la observación anterior tiene cardinal m. Es decir, existe $\{B_1, \dots, B_m\} \subseteq \mathscr{B}$ un conjunto de medibles de Borel de $(X, \mathscr{T})$ y por tanto la matriz de coeficientes

$$\mathscr{M} = \left(c_j^{(i)} \in [0,1] : 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq m \right),$$

satisface que $c_j^{(i)} \in \{0,1\}$ y por lo tanto

$$\eta_i = \chi_{B_i}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

En estos casos los elementos de $UP_{esc}^{(m)}(X, \mathscr{B})$ describen las particiones de X introducidas en la Definición 3 de la Introducción. La reproducimos aquí por comodidad del lector.

DEFINICIÓN 7. *Con las notaciones anteriores, consideremos el conjunto de las particiones de X como unión de m medibles de Borel.*

$$\mathscr{P}_m(X, \mathscr{B}) := \{\mathcal{P} = (X_1, \dots, X_m) \in \mathscr{B}^m : X = \bigcup_{i=1}^{m} X_i, \ X_i \cap X_j = \emptyset \text{ para } i \neq j\}.$$

DEFINICIÓN 8 (Matriz de una partición de la unidad medible). *Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico, $\mathscr{B} := \mathscr{B}(X)$ la familia de sus subconjuntos medibles de Borel. Sea $\underline{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_m) \in UP^{(m)}(X, \mathscr{B})$ un vector de partición de la unidad medible y sea $\underline{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in [\Omega(X, \mathscr{B})]^n$ un vector de medidas finitas y no negativas. Definiremos la matriz asociada a $\underline{\eta}$ con respecto a $\underline{\mu}$ a la matriz*

$$\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\underline{\eta}) := \left(E_{\mu_i}(\eta_j) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in \mathscr{M}_{n \times m}(\mathbb{R}),$$

donde $E_{\mu_i}(\eta_j)$ es la esperanza de η_j con respecto a la medida μ_i, es decir,

$$E_{\mu_i}(\eta_j) = \int_X \eta_j(x) \, d\mu_i(x).$$

OBSERVACIÓN 2.3.3. Como las medidas son finitas y no negativas y $\eta_j(x) \in [0,1]$ para cada $x \in X$, se tiene que $E_{\mu_i}(\eta_j) \in \mathbb{R}$ es un número real positivo. Además, para cada i, $1 \leq i \leq n$

$$\sum_{j=1}^{m} E_{\mu_i}(\eta_j) = \int_X \left(\sum_{j=1}^{m} \eta_j(x) \, d\mu_i(x) \right) = \mu_i(X).$$

Por tanto si $\underline{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ es un vector de probabilidades sobre X, la matriz $\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\underline{\eta})$ es una matriz estocástica en $\mathbf{St}_{n \times m}(\mathbb{R})$.

CONSTRUCCIÓN. *A partir de las anteriores definiciones, definamos los siguentes conjuntos de matrices reales*

$$V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B}) := \left\{ \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\underline{\eta}) : \underline{\eta} \in UP^{(m)}(X, \mathscr{B}) \right\},$$
$$V_{\underline{\mu}, esc}^{(m)}(X, \mathscr{B}) := \left\{ \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\underline{\eta}) : \underline{\eta} \in UP_{esc}^{(m)}(X, \mathscr{B}) \right\}.$$

OBSERVACIÓN 2.3.4. Sea $\mathcal{P} = (X_1, \dots, X_m) \in \mathscr{P}_m(X, \mathscr{B})$ una partición de X en un m conjuntos medibles. Consideremos

$$\underline{\eta}_{\mathcal{P}} := (\chi_{X_1}, \dots, \chi_{X_m}) \in UP_{esc}^{(m)}(X, \mathscr{B}),$$

la partición de la unidad escalonada definida por la partición $\mathcal{P}$. Obviamente, se tiene

$$\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\underline{\eta}_{\mathcal{P}}) = \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) = \left(\mu_j(X_i) \right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n},$$

donde $\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P})$ es la matriz estocástica introducida en la Definición 3. En particular, se tiene que el conjunto Dvoretzky-Wald-Wolfowitz

$$DWW_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B}) = \{\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathscr{P}_m(X, \mathscr{B})\},$$

satisface

$$DWW_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B}) \subseteq V_{\underline{\mu},esc}^{(m)}(X, \mathscr{B}) \subseteq V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B}).$$

Teorema 2.3.5 (**Dvoretzky-Wald-Wolfowitz**). *Con las notaciones precedentes, si $(X, \mathscr{T})$ es un espacio topológico polaco, $\mathscr{B} := \mathscr{B}(X)$ sus conjuntos medibles de Borel y si $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ es un vector probabilidades, entonces el conjunto*

$$V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B}) \subseteq \mathbf{St}_{n\times m}(\mathbb{R}),$$

es un conjunto convexo y compacto.

Demostración. Para comenzar con la demostración de este Teorema demostraremos que $V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$ es convexo. Para ello, sean $\mathscr{M}, \mathscr{M}' \in V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$, veamos que $t\mathscr{M} + (1-t)\mathscr{M}' \in V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$, $\forall t \in [0,1]$. Se tiene que

$$\mathscr{M} = \left(\int_X \eta_i(x)\, d\mu_j(x)\right), \qquad \mathscr{M}' = \left(\int_X \eta_i'(x)\, d\mu_j(x)\right).$$

Por lo tanto

$$t\mathscr{M} + (1-t)\mathscr{M} = t\left(\int_X \eta_i(x)\, d\mu_j(x)\right) + (1-t)\left(\int_X \eta_i'(x)\, d\mu_j(x)\right) =$$

$$= \left(\int_X t\eta_i(x)\, d\mu_j(x)\right) + \left(\int_X (1-t)\eta_i'(x)\, d\mu_j(x)\right) = \left(\int_X t\eta_i(x) + (1-t)\eta_i'(x)\, d\mu_j(x)\right).$$

Como $t\eta + (1-t)\eta'$ es una partición de la unidad, se tiene que $t\mathscr{M} + (1-t)\mathscr{M}' \in V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$. Entonces $V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$ es convexo. Veamos la condición *"ser compacto"*, que tiene más dificultad. Consideramos una sucesión

$$\{\underline{\eta}^{(r)} = (\eta_1^{(r)}, \ldots, \eta_m^{(r)}) : r \in \mathbb{N}\}$$

donde cada $\underline{\eta}^{(r)} \in UP^{(m)}(X, \mathscr{B})$ es una lista de particiones de la unidad. Supongamos que la siguiente sucesión de matrices

$$\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\underline{\eta}^{(r)}) = \left(E_{\mu_j}(\eta_i^{(r)})\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B}),$$

es una sucesión convergente a una matriz $M \in \mathscr{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Se tiene que las listas de particiones de la unidad $\underline{\eta}^{(r)}$ satisfacen:

$$\eta_1^{(r)}(x) + \cdots + \eta_m^{(r)}(x) = 1,\ \forall x \in X,\ \text{con } \eta_i^{(r)}(x) \ge 0,\ 1 \le i \le m,\ \forall r \in \mathbb{N}.$$

Sea $\mu := \|\underline{\mu}\| : \mathscr{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ la variación total de $\underline{\mu}$ (ver Definición 25 en el Apéndice A). En virtud de la Proposición A.1.7, μ es una medida y además, por ser $\underline{\mu}$ un vector de medidas no negativas, se tiene que

$$\mu(B) = \mu_1(B) + \cdots + \mu_n(B),\ \forall B \in \mathscr{B}.$$

Además, por la misma Proposición, se tiene que μ es una medida finita y no negativa. Definamos, entonces, una sucesión de medidas

$$\nu_1^{(r)}(B) := \int_B \eta_1^{(r)}(x)\, d\mu(x).$$

Afirmación. *Con las notaciones precedentes, $\nu_1^{(r)} : \mathscr{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una medida finita y no negativa para cada $r \in \mathbb{N}$. Además se tiene que $\nu_1^{(r)}(B) \le \mu(B)$ para todo $B \in \mathscr{B}$.*

Demostración. Es obvio que $\nu_1^{(r)}(\emptyset) = 0$,

$$\nu_1^{(r)}(\emptyset) = \int_\emptyset \eta_1^{(r)}(x)\, d\mu(x) = 0.$$

Sea $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos medibles en $(X,\mathscr{B})$ disjuntos. Se tiene que

$$\nu_1^{(r)}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \int_{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i} \eta_1^{(r)}(x)\, d\mu(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{A_i} \eta_1^{(r)}(x)\, d\mu(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \nu_1^{(r)}(A_i)$$

Por lo tanto, se trata de una medida. Para ver que es finita, bastaría ver que está acotada por μ. Como se tiene que $\eta_1^{(r)}(x) \leq 1$, $\forall x \in X$, se tiene que

$$\nu_1^{(r)}(B) = \int_B \eta_1^{(r)}(x)\, d\mu(x) \leq \int_B 1\, d\mu(x) = \mu(B),\ \ \forall r \in \mathbb{N}.$$

Y por último para ver que cada $\nu_1^{(r)}$ es no negativa basta notar que $\eta_1^{(r)} \geq 0$ para cada $r \in \mathbb{N}$, lo que implica que

$$\eta_1^{(r)}(B) = \int_X \eta_1^{(r)}\, d\mu(x) \geq \int_X 0\, d\mu(x) = 0.$$

□

Entonces, nos encontramos en las hipótesis del Lema 2.2.1 con las medidas $\{\nu_1^{(r)} :\ r \in \mathbb{N}\}$ y μ. Por tanto existe una subsucesión

$$\{q_1(k) :\ k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N},$$

y una medida no negativa y finita sobre $\mathscr{B}$, $\nu_1 : \mathscr{B} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, tal que

$$\lim_{k\to\infty} \nu_1^{(q_1(k))}(B) = \nu_1(B),\ \ \forall B \in \mathscr{B}.$$

Ahora considero una nueva sucesión de medidas

$$\nu_2^{(q_1(k))} := \int_B \eta_2^{(q_1(k))}(x)\, d\mu(x),\ \forall B \in \mathscr{B},\ \forall k \in \mathbb{N},$$

que por un argumento idéntico a la Afirmación anterior, son en efecto, medidas. Volvemos a estar en las hipótesis del Lema 2.2.1, dado que $\eta_2^{(q_1(k))}(x) \leq 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces existe una subsucesión

$$\{q_2(k) :\ k \in \mathbb{N}\} \subseteq \{q_1(k) :\ k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N},$$

y una medida no negativa y finita $\nu_2 : \mathscr{B} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \nu_2^{(q_2(k))}(B) = \nu_2(B),\ \ \forall B \in \mathscr{B}.$$

Repitiendo el mismo proceso, encontraremos $\underline{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_m) : \mathscr{B} \to \mathbb{R}^m$ una lista de medidas no negativas y finitas, y una subsucesión

$$\{Q(r) :\ r \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N},$$

tal que

$$\lim_{r\to\infty} \nu_i^{(Q(r))}(B) = \nu_i(B),\ \ \forall B \in \mathscr{B},\ 1 \leq i \leq m.$$

Pero, además, dado que

$$\sum_{j=1}^m \int_B \eta_j^{(r)}(x)\, d\mu(x) = \int_B \left(\sum_{j=1}^m \eta_j^{(r)}(x)\right) d\mu(x) = \mu(B),$$

donde la última igualdad se da debido a que $\sum_{j=1}^m \eta_j^{(r)}(x) = 1$. Entonces, en el límite se satisface:

$$\nu_1(B) + \cdots + \nu_m(B) = \mu(B). \tag{2.3.1}$$

Ahora usaremos el Teorema de Radon-Nikodym (cf. Teorema A.1.9 del Apéndice A). Obsérvese que tenemos dos tipos de derivadas de Radon-Nikodym.

En primer lugar al ser ν_i no negativas para $1 \leq i \leq m$, se tiene que para cualquier conjunto $B \in \mathscr{B}$, si $\mu(B) = 0$ entonces $\nu_i(B) = 0$ por la definición de ν_i. Entonces ν_i es absolutamente continua respecto μ, para cada $1 \leq i \leq m$. Por lo que se puede aplicar Radon-Nikodym. Consideremos entonces las derivadas de Radon-Nikodym de cada ν_i con respecto a μ, es decir, $f_i = \frac{\partial \nu_i}{\partial \mu}$ con $1 \leq i \leq m$. Es decir, f_i es una función medible tal que

$$\nu_i(B) = \int_B f_i(x)\, d\mu(x),\ 1 \leq i \leq m,\ \forall B \in \mathscr{B}.$$

Además, como ν_i es no negativa, f_i es no negativa para cada i, $1 \leq i \leq m$. Y, por la Ecuación (2.3.1), $f_1(x) + \cdots + f_m(x) = 1$ salvo en un conjunto $E' \in \mathscr{B}$ medible tal que $\mu(E') = 0$, por la unicidad del Teorema de Radom-Nikodym. Claramente $\nu_i(E') = 0$ para cada $1 \leq i \leq m$. Podemos considerar $f_i'(x) = f_i(x)$ para cada $x \in X \setminus E'$ y cada i, $1 \leq i \leq m$, y, por ejemplo, $f_1(x) = 1$, $f_i(x) = 0$, para cada $x \in E'$ y cada $2 \leq i \leq m$. Claramente se tiene que

$$\nu_i(B) = \int_B f_i'(x)\, d\mu(x),\ 1 \leq i \leq m,$$

f_i' es no negativa para cada $1 \leq i \leq m$ y $f_1'(x) + \cdots + f_m'(x) = 1$ para todo $x \in X$. Por lo que podemos suponer $f_i = f_i'$ desde un inicio.
De otro lado, también podemos considerar la derivada de Radon-Nikodym de cada μ_j con respecto a μ, debido a que al ser $\mu = \mu_1 + \cdots + \mu_n$ y cada μ_j, $1 \leq j \leq n$, no negativa se tiene que para cualquier B medible de $(X, \mathscr{B})$, si $|\mu|(B) = \mu(B) = 0$, entonces $|\mu_j|(B) = \mu_j(B) = 0$, para $1 \leq j \leq n$. Entonces μ_j es absolutamente continua respecto de μ para cada $1 \leq j \leq n$. Por lo tanto consideremos $g_j = \frac{\partial \mu_j}{\partial \mu}$ que satisface que

$$\mu_j(B) = \int_B g_j(x)\, d\mu(x),\ 1 \leq j \leq m,\ \forall B \in \mathscr{B}.$$

Finalmente, como $\mu = \mu_1 + \cdots + \mu_n$, consideramos para cada i, $1 \leq i \leq m$, y j, $1 \leq j \leq n$, se tiene

$$a_{i,j} = \lim_{r\to\infty} \int \eta_i^{(Q(r))}(x)\, d\mu_j(x).$$

es la coordenada en el lugar (i, j) de la matriz $M = \lim_{r\to\infty} \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\underline{\eta}^{(r)})$ indicada al inicio de la demostración.

Afirmación. *Con las anteriores notaciones, se tiene que*

$$a_{i,j} = \int_X f_i(x)\, d\mu_j(x).$$

Demostración. Antes de comenzar recordemos que

$$\nu_i(X) = \int_X f_i(x)\, d\mu(x),\ 1 \leq i \leq m,$$

$$\mu_j(X) = \int_X g_j(x)\, d\mu(x),\ 1 \leq j \leq n.$$

Por lo tanto se tiene que, para cada $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$, se satisface

$$a_{i,j} = \lim_{r\to\infty} \int_X \eta_i^{(r)}(x)\, d\mu_j(x) = \lim_{r\to\infty} \int_X \eta_i^{(r)}(x) g_j(x)\, d\mu(x) = \int_X g_j(x)\, d\nu_j(x) =$$

$$= \int_X g_j(x) f_i(x)\, d\mu(x) = \int_X f_i(x)\, d\mu_j(x).$$

□

Por lo tanto, denotando $\underline{f} := (f_1, \ldots, f_m) \in UP^{(m)}(X, \mathscr{B})$, tendremos

$$M = (a_{i,k}) = \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\underline{f}),$$

y concluimos que $M \in V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$. Hemos probado que el conjunto $V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$ verifica:

Todo límite de una sucesión $\{\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\underline{\eta}^{(r)}) : r \in \mathbb{N}\} \subseteq V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$ está en $V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$.

Por lo tanto $V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$ es cerrado. Además, $V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B}) \subseteq \mathbf{St}_{n\times m}(\mathbb{R})$, que es un conjunto acotado. Por tanto, $V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$ es compacto. □

2.4. El rango de las esperanzas de particiones de la unidad escalonadas es compacto y convexo

LEMA 2.4.1. *Con las notaciones precedentes, sea $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ un vector de medidas medidas finitas y no negativas. Sea $\underline{\eta}$ una lista de particiones de la unidad tal que $\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\underline{\eta})$ es un punto extremo del convexo $V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$ (ver Definición 34 del Apéndice A) y consideremos el conjunto siguiente*

$$Y := \bigcup_{i=1}^{m} \{x \in X : 0 < \eta_i(x) < 1\}.$$

Entonces, $\mu_j(Y) = 0$, $\forall j$, $1 \leq j \leq n$. En particular, los puntos extremos de $V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$ pertenecen a $DWW_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos, procediendo por reducción al absurdo, que Y no es un conjunto de medida nula para μ_{j_0} con $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ (i.e. $\mu_{j_0}(Y) \neq 0$). Entonces, existe $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ definiendo el conjunto

$$Z_{i_0} := \{y \in Y : \ 0 < \eta_{i_0}(y) < 1\},$$

de tal modo que $\mu_{j_0}(Z_{i_0}) \neq 0$. Nótese que si no fuera así,

$$\mu_{j_0}(Y) = \mu_{j_0}\left(\bigcup_{i=1}^{m} Z_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} \mu_{j_0}(Z_i) = 0,$$

contradiciendo la hipótesis $\mu_{j_0}(Y) \neq 0$. Ahora, para cada $x \in Z_{i_0}$, tenemos que

$$\eta_1(x) + \cdots + \eta_m(x) = 1,$$

por ser $\underline{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ una partición de la unidad. Como $\eta_{i_0}(x) \in (0, 1)$ entonces la Ecuación anterior implica que debe existir $i_1(x) \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$ tal que

$$0 \leq \eta_{i_1(x)}(x) < 1.$$

En particular, podemos definir

$$Z_{i_0,i} := \{z \in Z_{i_0} : \ 0 < \eta_{i_0}(z) < 1, \ 0 < \eta_i(z) < 1\}.$$

Habremos probado que

$$Z_{i_0} = \bigcup_{i=1}^{m} Z_{i_0,i}.$$

Como $\mu_{j_0}(Z_{i_0}) \neq 0$, entonces ha de existir $i_1 \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$ tal que $\mu_{j_0}(Z_{i_0,i_1}) \neq 0$. Denotemos por $Z = Z_{i_0,i_1}$ y tendremos

i) $Z \subseteq Y$, tal que $\mu_{j_0}(Z) \neq 0$,
ii) existe $i_0, i_1 \in \{1, \ldots, m\}$ con $i_0 \neq i_1$ tales que

$$0 < \eta_{i_0}(z) < 1, \ 0 < \eta_{i_1}(z) < 1, \ \forall z \in Z.$$

Definamos, para cada $r \in \mathbb{N}$, $Z_r \subseteq Z$ como el conjunto siguiente

$$Z_r := \{z \in Z : \ \frac{1}{r} < \eta_{i_0}(z), \eta_{i_1}(z) < 1 - \frac{1}{r}\}.$$

Tenemos una cadena creciente de medibles de Borel y se verifica

$$Z = \bigcup_{r \in N} Z_r.$$

Por tanto,

$$\mu_{j_0}(Z) = \lim_{r \to \infty} \mu_{j_0}(Z_r),$$

por lo que si $\mu_{j_0} \neq 0$, existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_{j_0}(Z_{n_0}) \neq 0$. Definamos, finalmente, $\delta := \frac{1}{n_0} > 0$, $Z' = Z_{n_0}$ y tendremos que:

i) $Z' \subseteq Y$, tal que $\mu_{j_0}(Z') \neq 0$,
ii) Para cada $z \in Z'$, $\delta < \eta_{i_0}(z) < 1 - \delta$, $\delta < \eta_{i_1}(z) < 1 - \delta$.

Consideremos la función $\underline{\zeta} : X \longrightarrow R^m$ dada del modo siguiente: Para cada $x \in X$, $\underline{\zeta}(x) = (\zeta_1(x), \ldots, \zeta_m(x))$ viene dado del modo siguiente:

$$\zeta_{i_0}(x) = -\zeta_{i_1}(x) = \begin{cases} \delta, & \text{si } x \in Z', \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

siendo $\zeta_i(x) = 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0, i_1\}$. Como Z' es un conjunto medible y $\underline{\zeta}$ es constante sobr Z', es claro que $\underline{\zeta}$ es una aplicación medible y sus coordenadas $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ son funciones medibles.
Sea $t \in \mathbb{R}$ satisfaciendo $-1 \leq t \leq 1$ consideramos la aplicación $\underline{\eta} + t\underline{\zeta}$. Veamos ahora que para cada $t \in [-1, 1]$, la aplicación $\underline{\eta} + t\underline{\zeta}$ es una partición de la unidad en funciones medibles de $(X, \mathscr{B})$. Ya hemos discutido que $\underline{\eta}$ y $\underline{\zeta}$ son medibles, por lo que $\underline{\eta} + t\underline{\zeta}$ es obviamente una lista de funciones medibles. Queda por ver que son partición de la unidad. Ahora bien, dado $x \in X$ se tiene que si $x \in Z'$

$$\sum_{i=1}^{m} (\eta_i(x) + t\zeta_i(x)) = \sum_{i \neq i_0, i_1} \eta_i(x) + (\eta_{i_0}(x) + t\delta) + (\eta_{i_1}(x) - t\delta) = \sum_{i=1}^{m} \eta_i(x) = 1.$$

Mientras que si $x \notin Z'$, es obvio que $\underline{\zeta}(x) = 0$ y $\underline{\eta}(x) + t\underline{\zeta}(x) = \underline{\eta}(x)$ con lo que también se satisface la igualdad deseada.
Finalmente, si $x \in X \setminus Z'$ es claro que $\eta_i(x) + t\zeta_i(x) = \eta_i(x) \geq 0$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Mientras que si $x \in Z'$ se tiene que

- Para cada $i \neq i_0, i_1$, $\eta_i(x) + t\zeta_i(x) = \eta_i(x) \geq 0$
- Si $i = i_0$, tenemso que $\delta < \eta_{i_0} < 1 - \delta$, luego si $t \in [-1, 0]$,

$$\eta_{i_0}(x) + t\zeta_{i_0}(x) = \eta_{i_0}(x) + t\delta \geq \eta_{i_0} - \delta \geq 0.$$

  Si, por le contrario, $t \in [0, 1]$ es claro que

$$\eta_{i_0}(x) + t\zeta_{i_0}(x) \geq \eta_{i_0}(x) \geq 0.$$

- El caso $i = i_1$ será análogo al caso $i = i_0$, siguiendo el argumento simétrico.

Por tanto, $\underline{\eta} + t\underline{\zeta}$ es una partición de la unidad medible (en el sentido de la Definición 5). Además, nótese que se tiene

$$\int_X [\eta_{i_0}(x) + \zeta_{i_0}(x)] \, d\mu_{j_0}(x) - \int_X [\eta_{i_0}(x) - \zeta_{i_0}(x)] \, d\mu_{j_0}(x) = \int_X 2\zeta_{i_0}(x) \, d\mu_{j_0}(x) =$$

$$= \int_{Z'} 2\delta \, d\mu_{j_0}(x) = 2\delta\mu_{j_0}(Z') \neq 0.$$

Por lo tanto $\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\underline{\eta} + \underline{\zeta})$ y $\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\underline{\eta} - \underline{\zeta})$ son dos puntos distintos de $V_{\underline{\mu}}^{m}(X, \mathscr{B})$. Por el teorema anterior este conjunto es convexo, y por lo tanto el segmento que los une $\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\underline{\eta} + t\underline{\zeta})$ esta contenido en él y se tiene que $\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\underline{\eta})$ es un interior del segmento. Esto contradice nuestra hipótesis de que $\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\underline{\eta})$ es un punto extremo $V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$. Por lo tanto, necesariamente Y ha de ser de medida nula con respecto a μ_{j_0}, con lo que no puede existir $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\mu_j(Y) \neq 0$.
Para concluir la demostración del Lema sea $\underline{\eta}$ tal que $\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\underline{\eta}) \in V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$ es un punto extremo. Se tiene entonces que Y es un conjunto de medida nula para todos los μ_j, $1 \leq j \leq n$. Definamos $\underline{\eta}' = (\eta'_1, \ldots, \eta'_m)$ del modo siguiente:

$$\eta'_1(x) := \begin{cases} \eta_1(x), & \text{si } x \notin Y \\ 1, & \text{si } x \in Y, \end{cases}$$

y para cada i, $1 \leq i \leq m$, definamos:

$$\eta'_i(x) := \begin{cases} \eta_i(x), & \text{si } x \notin Y \\ 0, & \text{si } x \in Y. \end{cases}$$

Claramente, $\underline{\eta}' = (\eta'_1, \ldots, \eta'_m)$ es una partición de la unidad medible y se tiene, por ser $\mu_j(Y) = 0$, $\forall j$, que

$$\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\underline{\eta}) = \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\underline{\eta}').$$

Pero, por la propia definición de Y, si $x \notin Y$, $\eta_i(x) \in \{0,1\}$. Por tanto, $\eta_i'(X) \subseteq \{0,1\}$, para cualesquiera i, $1 \leq i \leq m$. En otras palabras, definiendo el medible de Borel $X_i := \eta_i'^{-1}(\{1\})$ y la partición $\mathcal{P} = (X_1, \ldots, X_m) \in \mathscr{P}_m(X, \mathscr{B})$, se tiene

$$\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) = \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\underline{\eta}') \left(= \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\underline{\eta})\right).$$

Por tanto, $\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\underline{\eta}) \in DWW_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$ y el Lema queda demostrado.

□

TEOREMA 2.4.2. *Sea $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ una lista probabilidades sobre $(X, \mathscr{B})$, entonces se tiene que $V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B}) = V_{\underline{\mu},esc}^{(m)}(X, \mathscr{B})$. En particular, dada una matriz $M \in V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$, existe una partición de la unidad escalonda $\underline{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ de tal modo que*

i) $M = \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\underline{\eta})$.

ii) Cada compomente η_i de $\underline{\eta}$ satisface que $\eta_i(X)$ es finito y su cardinal satisface:
$$\#(\eta_i(X)) \leq 2^{nm-n+1}.$$

iii) La imagen del conjunto X por la función escalonada $\underline{\eta}$ es también un conjunto finito y satisface:
$$\#(\underline{\eta}(X)) \leq 2^{m(nm-n+1)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 2.3.5, se tiene que $V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$ es compacto y convexo en $\mathbf{St}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Dada una matriz $M \in V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$, existe una partición de la unidad $\underline{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ tal que $M = \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\underline{\eta})$. Además, se ha de verificar, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, que

$$\sum_{i=1}^{m} \int_X \eta_i(x)\, d\mu_j(x) = \mu_j(X).$$

Por lo tanto, $V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$ es un subconjunto de $\mathbf{St}_{n\times m}(\mathbb{R})$ que es un convexo de dimensión $N = nm - n$. En particular, la dimensión de $V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$ está acotada por N. Por el Teorema de Minkowski (cf. Teorema A.2.4 del Apéndice A), por ser $V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$ convexo y compacto, para cada matriz $Q \in V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$ existirán matrices extremas $\{Q_1, \ldots, Q_{N+1}\}$ de $V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$ tales que Q es combinación lineal convexa de $\{Q_1, \ldots, Q_{N+1}\}$.
Dada la matriz $M = \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\underline{\eta})$ anterior, existirán $\{M_1, \ldots, M_{N+1}\} \subseteq V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$, matrices extremas, y existirán $c_1, \ldots, c_{N+1} \in [0,1]$ tales que

- $c_1 + \cdots + c_{N+1} = 1$,
- $M = c_1 M_1 + \cdots + c_{N+1} M_{N+1}$.

Por el Lema 2.4.1 anterior, dado que $\{M_1, \ldots, M_{N+1}\}$ son matrices extremas de $V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$, concluiremos que $\{M_1, \ldots, M_{N+1}\} \subseteq DWW_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$. Existirán, entonces, $N+1$ particiones $\{\mathcal{P}^{(1)}, \ldots, \mathcal{P}^{(N+1)}\} \in \mathscr{P}_m(X, \mathscr{B})$ de tal modo que

$$M_i = \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}^{(i)}),\ 1 \leq i \leq N+1.$$

Supongamos $\mathcal{P}^{(i)} = (P_1^{(i)}, \ldots, P_m^{(i)}) \in \mathscr{B}^m$ y definamos las funciones medibles escalonadas

$$\sigma_i := \sum_{k=1}^{N+1} c_k \chi_{P_i^{(k)}},$$

donde $\chi_{P_i^{(k)}}$ es la función característica de $P_i^{(k)} \subseteq X$. Nótese que para cada $x \in X$ y cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ existirá un conjunto $S_x(i) \subseteq \{1, \ldots, N+1\}$ tal que $x \in P_i^{(k)}$ si y solamente si $k \in S_x(i)$. En ese caso,

$$\sigma_i(x) = \sum_{k \in S_x(i)} c_k. \qquad (2.4.1)$$

Ahora bien, fijando $x \in X$ y dados $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, m\}$ se tiene que $S_x(i_1) \cap S_x(i_2) = \emptyset$. Porque si $k \in S_x(i_1) \cap S_x(i_2)$, entonces llegaríamos a contradicción: llegaríamos a $x \in P_{i_1}^{(k)} \cap P_{i_2}^{(k)} = \emptyset$ (dado que $\mathcal{P}(k) = (P_1^{(k)}, \ldots, P_1^{(k)})$ es una partición de X).

De otro lado, fijado $x \in X$, se tiene que

$$\{1, \ldots, N+1\} = \bigcup_{i=1}^{m} S_x(i). \tag{2.4.2}$$

Claramente, dado $k \in \{1, \ldots, N+1\}$ y la partición $\mathcal{P}^{(k)} = (P_1^{(k)}, \ldots, P_m^{(k)})$ ha de existir algún $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $x \in P_i^{(k)}$. Esto último significa que $k \in S_x(i)$ y queda probada la Igualdad (2.4.2). Además, dicha Igualdad es una descomposición como unión disjunta. Finalmente, combinando las Igualdades (2.4.1) y (2.4.2) tendremos

$$\sum_{i=1}^{m} \sigma_i(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k \in S_x(i)} c_k = \sum_{k=1}^{N+1} c_k \tag{2.4.3}$$

Con ello hemos probado que $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ es una partición de la unidad escalonada. Además,

$$E_{\mu_j}(\sigma_i) = \sum_{k=1}^{N+1} c_k \mu_j(P_i^{(k)}),$$

con lo que tendremos

$$\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\underline{\sigma}) = \sum_{k=1}^{N+1} c_k \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}^{(k)}) = \sum_{k=1}^{N+1} c_k M_k = M = \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\underline{\eta}).$$

En particular, hemos probado que $M \in V_{\underline{\mu},esc}^{(m)}(X, \mathscr{B})$ y la igualdad

$$V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B}) = V_{\underline{\mu},esc}^{(m)}(X, \mathscr{B}).$$

Para concluir la prueba del enunciado, consideremos el conjunto finito $\mathscr{P}_{(m)}(\{1, \ldots, N+1\})$ formado por todas las particiones en m subconjuntos del conjunto $\{1, \ldots, N+1\}$. Aunque se podrían refinar las cotas, nótese que

$$\#\mathscr{P}_{(m)}(\{1, \ldots, N+1\}) \leq (\mathscr{P}(\{1, \ldots, N+1\})^m) \leq 2^{m(nm-n+1)},$$

donde $\mathscr{P}(\{1, \ldots, N+1\})$ es el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto finito $\{1, \ldots, N+1\}$. Ahora, en virtud de la Identidad (2.4.2), tendremos que para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ y cada $x \in X$ se tiene

$$\sigma_i(x) = \sum_{k \in S_x(i)} c_k \in \{\sum_{k \in K} c_k : K \in \mathscr{P}(\{1, \ldots, N+1\})\}.$$

Con lo que conluimos que $\#\sigma_i(X) \leq \#\mathscr{P}(\{, 1, \ldots, N+1\}) = 2^{nm-n+1}$. Igualmente, para cada $x \in X$ se tiene que

$$\underline{\sigma}(x) = \left(\sum_{k \in S_x(1)} c_k, \ldots, \sum_{k \in S_x(m)} c_k \right) \in \mathscr{U}_{\underline{\sigma}},$$

donde $\mathscr{U}_{\underline{\sigma}} = \{\left(\sum_{k \in P_1} c_k, \ldots, \sum_{k \in P_m} c_k\right) : (P_1, \ldots, P_m) \in \mathscr{P}_{(m)}(\{1, \ldots, N+1\})\}$. Por tanto,

$$\#\sigma(X) \leq \#\mathscr{U}_{\underline{\sigma}} \leq \#\mathscr{P}_{(m)}(\{1, \ldots, N+1\}) \leq 2^{m(mn-n+1)},$$

y el Teorema queda demostrado. $\square$

2.5. Demostración del Teorema Principal

Para comenzar, retomemos el Lema 1.2.4. Sea $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ un vector de medidas finitas, no negativas y convexas. Entonces, para cada número real $c \in [0, 1]$, existe un conjunto Borel medible $X_c \in \mathscr{B}$ tal que $\underline{\mu}(X_c) = c\underline{\mu}(X)$.

Lema 2.5.1. *Con las notaciones precedentes, sea $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in [\Omega(X, \mathscr{B})]^n$ es un vector de medidas finitas, no negativas y sin átomos. Sea $k \in \mathbb{N}$ y sean unas constantes $\{c_1, \ldots, c_k\} \subseteq [0, 1]$ tales que $c_1 + \cdots + c_k = 1$, entonces existe una partición de X, $\{S_{c_1}, \ldots, S_k\} \subseteq \mathscr{B}$, en medibles de $(X, \mathscr{B})$ tal que*

$$\underline{\mu}(S_t) = c_t \underline{\mu}(X),\ 1 \leq t \leq k.$$

Demostración. Antes de comenzar con la prueba recordemos que, por el Lema 1.2.6, se tiene que, al ser $\underline{\mu}$ un vector de medidas finitas, no negativas y sin átomos, entonces $\underline{\mu}$ es también un vector de medidas convexas. A continuación, construiremos los conjuntos $\{S_t : 1 \leq t \leq k\}$ inductivamente. Para comenzar, de acuerdo a lo enunciado al inicio de la Sección, existe un conjunto $X_{c_1} \in \mathscr{B}$ medible de $(X, \mathscr{B})$ tal que

$$\underline{\mu}(X_{c_1}) = c_1 \underline{\mu}(X),$$

consideremos $a_2 = \frac{c_2}{c_2 + \cdots + c_k}$ (si $c_2 = \cdots = c_k = 0$ consideremos $a_2 = 0$), obviamente $a_2 \in [0,1]$. Considerando ahora $F = X \setminus S_1$ y $E = \emptyset$, por el Lema 1.2.4 se tiene que existe X_{c_2} tal que

$$\underline{\mu}(X_{c_2}) = a_2 \underline{\mu}(X \setminus X_{c_1}) = a_2(\underline{\mu}(X) - \underline{\mu}(X_{c_1})) = a_2((1 - c_1)\underline{\mu}(X)) = c_2 \underline{\mu}(X).$$

De modo recursivo se construye, para cada k', $1 < k' < k$, el subconjunto $X_{c_{k'}}$ como un subconjunto de $X \setminus (\bigcup_{t=1}^{k'-1}) X_{c_t}$ tal que definiendo $a_{k'}$ mediante

$$a_{k'} = \frac{c_{k'}}{c_{k'} + \cdots + c_n},$$

(si $c_{k'} = c_{k'+1} = \cdots = c_k = 0$ se toma $a_{k'} = 0$) se tenga que

$$\underline{\mu}(X_{c_{k'}}) = a_{k'} \underline{\mu} \left(X \setminus (\bigcup_{t=1}^{k'-1} X_{c_t}) \right) = a_{k'} \left(\underline{\mu}(X) - \underline{\mu}(\bigcup_{t=1}^{k'-1} X_{c_t}) \right) =$$

$$= a_{k'} (1 - (c_1 + \cdots + c_{k'-1})) \underline{\mu}(X) = c_{k'} \underline{\mu}(X).$$

Supongamos, entonces, que hemos construido los conjuntos medibles de Borel $X_{c_1}, \ldots, X_{c_{k-1}} \in \mathscr{B}$ por el proceso recursivo precedente. Nótese que se tiene

$$\underline{\mu}(X \setminus (\bigcup_{t=1}^{k-1} X_{c_t})) = \underline{\mu}(X) - \underline{\mu}(\bigcup_{t=1}^{k-1} X_{c_t}) = (1 - (c_1 + \cdots + c_{k-1}))\underline{\mu}(X) = c_k \underline{\mu}(X).$$

Por lo que, tomando $X_{c_k} = X \setminus (\bigcup_{t=1}^{k-1} S_t)$, tenemos la familia descrita en el enunciado del Lema. $\square$

Teorema 2.5.2. *Con las notaciones de las Secciones precedentes, sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico polaco, $\mathscr{B} = \mathscr{B}(X, \mathscr{T})$ la σ-álgebra de sus medibles de Borel y sea $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \left[\Omega^1(X, \mathscr{B})\right]^n$ un vector de probabilidades libres de átomos. Entonces*

$$V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B}) = V_{\underline{\mu}, esc}^{(m)}(X, \mathscr{B}) = DWW_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B}).$$

En particular, $DWW_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$ es un conjunto compacto y convexo (lo que implica el Teorema 2.1.1)

Demostración. En virtud del Teorema 2.4.2 anterior, será suficiente demostrar que

$$DWW_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B}) = V_{\underline{\mu}, esc}^{(m)}(X, \mathscr{B}).$$

Sea $\underline{\eta}'$ cualquier lista de particiones de la unidad escalonadas. Consideremos la familia de conjuntos medibles $\{B_1, \ldots, B_k\} \subseteq \mathscr{B}$ dada en la Observación 2.3.1. Y consideremos una nueva familia de conjuntos medibles en $(X, \mathscr{B})$ dada por

$$Y_1 = B_1,$$

$$Y_t = B_t \setminus (\bigcup_{l=1}^{t-1} B_l), 1 < t \leq k.$$

Obviamente $\{Y_t : 1 \leq t \leq k\}$ es una familia de conjuntos medibles de $(X, \mathscr{B})$ disjuntos dos a dos cuya unión es X. Por construcción, la función $\underline{\eta}'$ es constante sobre cada uno de los medibles Y_t de la familia así construida. De otro lado, si $\underline{\eta}' = (\eta'_1, \ldots, \eta'_m)$ tendremos que satisface la condición de partición de la unidad, es decir,

$$\eta'_1(x) + \cdots + \eta'_m(x) = 1, \quad \forall x \in X.$$

Supongamos $\mu_j(Y_t) \neq 0$ para algún $t \in \{1, \ldots, k\}$. Definamos $c_{i,j}^{(t)} \in [0,1]$ mediante la identidad siguiente

$$\mu_j(Y_t) c_{i,j}^{(t)} = \int_{Y_t} \eta'_i(x)\, d\mu_j(x),$$

con $j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$. Nótese que

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_j(Y_t) c_{i,j}^{(t)} = \sum_{i=1}^{m} \int_{Y_t} \eta_i'(x)\, d\mu_j(x) = \int_{Y_t} d\mu_j(x) = \mu_j(Y_t),$$

por lo que $c_{1,j}^{(t)} + \cdots + c_{m,j}^{(t)} = 1$. Entonces, en virtud del Lema precedente, existirán $S_{1,t}, \ldots, S_{m,t}$ subconjuntos medibles de Y_t, disjuntos dos a dos, tales que

$$\mu_j(S_{i,t})) = c_{i,j}^{(t)} \mu_j(Y_t),$$

para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ y cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Definamos $S_i := \bigcup_{t=1}^{k} S_{i,t}$. Nótese que los conjuntos de la forma S_i son disjuntos dos a dos por serlo los $S_{i,t}$ y los Y_t definidos anteriormente. Tenemos entonces que

$$\int_X \eta_i'(x)\, d\mu_j(x) = \sum_{t=1}^{k} \int_{Y_t} \eta_i'(x)\, d\mu_j(x) = \sum_{t=1}^{k} \mu_j(S_{i,t}) = \mu_j(S_i).$$

Con lo que hemos probado que, denotando $\mathcal{P} = (S_1, \ldots, S_m) \in \mathscr{P}_m(X, \mathscr{B})$, se cumple que

$$\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\underline{\eta}') = \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}).$$

Con lo que se tiene que $\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\underline{\eta}') \in DWW_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$. Con ello habremos probado la Identidad $V_{\underline{\mu},esc}^{(m)}(X, \mathscr{B}) = DWW_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$, combinado con el Teorema 2.4.2:

$$V_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B}) = V_{\underline{\mu},esc}^{(m)}(X, \mathscr{B}) = DWW_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B}).$$

Por el Teorema 2.3.5 concluimos que $DWW_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$ es compacto y convexo, concluyendo, de paso, la prueba del Teorema 2.1.1. □

Observación 2.5.3 ([**DWW, 51**]⟹[**Lyp, 40**]). El Teorema 2.1.1 (de [**DWW, 51**]) implica el Teorema 1.1.1 (de [**Lyp, 40**] y [**Hal,48**]). Para demostrarlo basta la siguiente sencilla observación. Con las mismas notaciones de este Capítulo, sea $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ una lista de distribuciones de probabilidades libres de átomos. Consideremos el conjunto de matrices estocásticas por filas $DWW_{\underline{\mu}}^{(2)}(X, \mathscr{B})$ que, con los resultados precedentes, es un conjunto compacto y convexo.

Consideremos la siguiente proyección canónica

$$\pi_1 : \quad \mathscr{M}_{n\times 2}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^n,$$

la proyección que asocia a cada matrizz con n filas y 2 columnas su primera columna. Entonces, observamos que

$$\pi_1(DWW_{\underline{\mu}}^{(2)}(X, \mathscr{B})) = \Lambda_{\underline{\mu}}(X, \mathscr{B}), \tag{2.5.1}$$

definiendo, además, una biyección entre ambos conjuntos, cuya inversa es

$$\begin{array}{rccc} \pi_1^{-1} : & \Lambda_{\underline{\mu}}(X, \mathscr{B}) & \longrightarrow & DWW_{\underline{\mu}}^{(2)}(X, \mathscr{B}) \\ & \underline{\mu}(E) & \longrightarrow & (\underline{\mu}(E), \underline{1} - \underline{\mu}(E))^T, \end{array}$$

donde $E \in \mathscr{B}$ es medible, $\underline{1} = (1, \ldots, 1)$ y, obviamente, $\underline{1} - \underline{\mu}(E) = \underline{\mu}(X \setminus E)$ y el superíndice T significa traspuesta. Obviamente, π_1 define un homeomorfismo entre $\Lambda_{\underline{\mu}}(X, \mathscr{B})$ y $DWW_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$, lo que nos permite concluir la compacidad de $\Lambda_{\underline{\mu}}(X, \mathscr{B})$. Como, además, π_1, es lineal y $DWW_{\underline{\mu}}^{(2)}(X, \mathscr{B})$ es convexo, la Identidad 2.5.1 nos permite garantizar que $\Lambda_{\underline{\mu}}(X, \mathscr{B})$ es convexo.

2.6. Un Modelo de Cálculo Matricial para los Algoritmos del Reparto de Tartas

En la Introducción hemos definido el problema de reparto de tartas y el modelo de operación elemental de Robertson-Webb sobre Cut&Choose. Aquí vamos a hacer unas pocas reflexiones originales sobre las consecuencias de los resultados de Lyapunov-Halmos y Dvoretzky-Wald-Wolfowitz.

2.6.1. Operación elemental de Robertson-Webb y el Cálculo de Cut&Choose con matrices estocásticas.

1. <u>**Los elementos del problema:**</u>
    1. Disponemos de una **tarta** que supondremos que es un espacio topológico polaco $(X, \mathscr{T})$ y el conjunto de sus medibles de Borel $\mathscr{B} := \mathscr{B}(X)$, inducido por esa estructura de espacio topológico.
    2. Dispondremos de n **jugadores** cuyas preferencias están dadas por un vector $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ de probabilidades libres de átomos.
2. <u>**La operación Cut:**</u>
    1. Introducemos unas matrices auxiliares $E_{(i)} = \left(\delta_{k,r}^{(i)}\right)_{1 \leq k,r \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dadas mediante
    $$\delta_{k,r}^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{si } (k,r) = (i,i) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
    2. La operación **Cut** toma como INPUT una partición $\mathcal{P} = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathscr{P}_n(X, \mathscr{B})$ en medibles de Borel, donde X_i es el pedazo que tiene asignado el jugador i. Esta partición tiene asignada una matriz $\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) \in DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B})$, dada mediante las reglas
    $$\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) = (\mu_i(X_j))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbf{St}_n(\mathbb{R}).$$
    3. La operación **Cut** dispone de m PLATOS ADICIONALES en los que se depositarán los pedazos. La estrategia de corte comienza por elegir a quienes se les corta un pedazo y cuántos pedazos se le van a extraer a cada jugador. Esto consiste en dar una lista de números naturales $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ tales que
        - Suman m (i.e. $\sum_{i=1}^n k_i = m$).
        - Al jugador i-ésimo le extraeremos k_i pedazos.

       Nótese que, con nuestras notaciones, las posibles listas de multi-índices $\underline{k}$ tiene cardinal igual al número combinatorio
    $$\binom{m+n-1}{n-1}.$$
       Se trata del número de monomios homogéneos de grado m en n variables.
    4. Una vez fijado $\underline{k}$, el proceso **Cut** extrae varios pedazos de cada jugador, conforme lo indicado en $\underline{k}$. Así, para el jugador i, se extrae una lista
    $$X_{i,1}, \ldots, X_{i,k_i} \in \mathscr{B},$$
       de conjuntos medibles de Borel, disjuntos dos a dos, con la única condición, obvia, por otra parte, de que *lo extraido al jugador i no puede ser superior a lo que tiene.* En suma, tenemos una lista de medibles para el jugador i tal que
        - Los pedazos $X_{i,1}, \ldots, X_{i,k_i}$ van a ser depositados en los platos auxiliares.
        - El jugador i se queda con $X_i' = X_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k_i} X_{i,j}\right) \in \mathscr{B}$.

       Designemos por $T_{\underline{k}}$ al listado de esas n particiones
    $$T_{\underline{k}} = ((X_{1,1}, \ldots, X_{1,k_1}), \ldots, (X_{n,1}, \ldots, X_{n,k_n}))\,.$$
       Designemos por $I_{\underline{k}}$ el listado de las particiones asociadas a $\underline{k}$. Es decir,
    $$I_{\underline{k}} = \{(i,j) : \, 1 \leq i \leq n, \, 1 \leq j \leq k_i\}\,.$$
       Supondremos $I_{\underline{k}} \cong \{1, \ldots, m\}$ mediante el orden lexicográfico.
    5. Asociaremos a la particion orginial $\mathcal{P}$ y al corte $T_{\underline{k}}$ una matriz que tiene la forma
    $$Ext_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}, T_{\underline{k}}) = \left(\mathscr{M}_{\underline{\mu}}^{(1)}(\mathcal{P}) \mid E_{\underline{\mu}}^{(2)}(T_{\underline{k}})\right) \in \mathscr{M}_{n \times (n+m)}(\mathbb{R}),$$
       donde
    $$\mathscr{M}_{\underline{\mu}}^{(1)}(\mathcal{P}) = \left(\mu_i(X_j')\right)_{1 \leq i,j \leq n},$$
    $$E_{\underline{\mu}}^{(2)}(T_{\underline{k}}) = (E_1 | \cdots | E_n) \in \mathscr{M}_{n \times m}(\mathbb{R}),$$
    $$E_i = (\mu_\ell(X_{i,j}))_{\substack{1 \leq \ell \leq n \\ 1 \leq j \leq k_i}} \in \mathscr{M}_{n \times k_i}(\mathbb{R}).$$

PROPOSICIÓN 2.6.1. *Con las anteriores notaciones, la matriz* $Ext_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}, T_{\underline{k}}) \in \mathscr{M}_{n\times(n+m)}(\mathbb{R})$ *es una matriz estocástica por filas que llamaremos matriz extendida del corte* $T_{\underline{k}}$ *sobre la partición* $\mathcal{P}$.

DEMOSTRACIÓN. Es evidente. La fila ℓ-ésima de $Ext_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}, T_{\underline{k}})$ tiene por suma

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_\ell(X_i') + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k_i} \mu_\ell(X_{i,j})\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu_\ell(X_i) = \mu_\ell(X) = 1.$$

□

3. **La operación Choose** consiste en que cada jugador seleccione las piezas depositadas en los platos adicionales. Obviamente, *dos jugadores distintos no se pueden quedar el mismo pedazo.* Esto significa que el proceso **Choose** consiste en generar una partición del conjunto $I_{\underline{k}}$ de índices asociados a la lista $\underline{k}$:

$$I_{\underline{k}} = J_1 \dot{\bigcup} \cdots \dot{\bigcup} J_n, \tag{2.6.1}$$

de tal modo que el resultado final para los jugadores sea una nueva partición $\mathcal{Q} := (Y_1, \ldots, Y_n)$ de la tarta X dada mediante la regla siguiente

$$Y_i := X_i' \bigcup \left(\bigcup_{(i,j)\in J_i} X_{i,j} \right), \; 1 \le i \le n. \tag{2.6.2}$$

La partición $\mathcal{Q}$ es el resultado de una iteración de Cut&Choose de Robertson-Webb.

A partir de la partición de $I_{\underline{k}}$ definida en la Ecuación (2.6.1), podemos definir una matriz estocástica por filas $\mathscr{J} \in \mathbf{St}_{m\times n}(\mathbb{R})$ con m filas y n columnas, mediante las reglas

- En cada fila sólo hay una coordenada no nula (y, por tanto, esa coordenada no nula es igual a 1).
- En la columna i-ésima de $\mathscr{J}$, las coordenadas son

$$c_{r,i} := \begin{cases} 1 & \text{si el } r\text{-ésimo elemento de } I_{\underline{k}} \text{ está en } J_i \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Resumiendo, con las notaciones precedentes, el proceso de Cut&Choose toma la forma:

Proceso: Cut&Choose.

INPUT: $\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P})$.

Cut: Hallar $Ext_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}, T_{\underline{k}})$.

Choose: Evaluar $\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{Q}) = Ext_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}, T_{\underline{k}}) \cdot \left(\frac{Id_n}{\mathscr{J}}\right)$, donde $\cdot$ es el producto de matrices.

OUTPUT: $\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{Q})$.

2.6.2. El operador Reestructuración. Los resultados de Lyapounov-Halmos y Dvoretzky-Wald-Wolfowitz permiten observar una acción de monoide sobre $DWW_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B})$. Para definirla, definamos la acción siguiente:

PROPOSICIÓN 2.6.2. *Sea* $(X, \mathscr{T})$ *un espacio topológico polaco,* $\mathscr{B} := \mathscr{B}(X)$ *la* σ*-álgebra de sus medibles de Borel y* $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_r)$ *un vector de probabilidades libres de átomos sobre* $\mathscr{B}$. *Sean* $m, n \in \mathbb{N}$ *dos enteros positivos. Entonces, la siguiente aplicación está bien definida*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{St}_{m\times n}(\mathbb{R}) \times DWW_{\underline{\mu}}^{(m)}(X, \mathscr{B}) & \longrightarrow & DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B}) \\ (S, \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P})) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) \cdot S. \end{array}$$

En el caso particular $m = n$, *la anterior aplicación define una acción a derecha del monoide* $(\mathbf{St}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ *sobre* $DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B})$.

Demostración. Basta demostrar que la aplicación está bien definida, lo que significa probar que si $\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) \in DWW_{\underline{\mu}}^{(m)}(X,\mathscr{B})$ y $S \in \mathbf{St}_{m\times n}(\mathbb{R})$, entonces existe una partición $\mathcal{Q} \in \mathscr{P}_n(X,\mathscr{B})$ tal que

$$\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{Q}) = \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) \cdot S.$$

Haremos uso del Lemma 2.5.1. Supongamos así la matriz S dada mediante

$$S = (s_{j,i})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m} \in \mathbf{St}_{m\times n}(\mathbb{R}),$$

con las propiedades $s_{j,i} \geq 0$, para $1 \leq i \leq n$ y $\sum_{i=1}^{n} s_{j,i} = 1$ para cada j, $1 \leq j \leq m$. Supongamos $\mathcal{P} = (X_1, \ldots, X_m)$. Por el citado Lema 2.5.1, para cada j, $1 \leq j \leq m$, existe una partición de $X_j = X_{j,1} \dot{\bigcup} \cdots \dot{\bigcup} X_{j,n}$ de tal modo que

$$\underline{\mu}(X_{j,i}) = s_{j,i}\underline{\mu}(X_j).$$

En particular, $\mu_\ell(X_{j,i}) = s_{j,i}\mu_\ell(X_j)$ para cada ℓ, $1 \leq \ell \leq r$.
Consideremos ahora la matriz $M \in \mathscr{M}_{r\times n}(\mathbb{R})$ dada mediante

$$M = \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) \cdot S = \begin{pmatrix} \mu_1(X_1) & \cdots & \mu_1(X_m) \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_r(X_1) & \cdots & \mu_r(X_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{1,1} & \cdots & s_{1,n} \\ s_{2,1} & \cdots & s_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{m,1} & \cdots & s_{m,n} \end{pmatrix}$$

Entonces $M = (m_{\ell,i})_{1\leq \ell\leq r, 1\leq i\leq n}$, donde

$$m_{\ell,i} = \sum_{j=1}^{m} \mu_\ell(X_j)s_{j,i}.$$

Ahora bien, $\mu_\ell(X_j)s_{j,i} = \mu_\ell(X_{j,i})$, por tanto

$$m_{\ell,i} = \sum_{j=1}^{m} \mu_\ell(X_{j,i}) = \mu_\ell(Y_i),$$

donde $Y_i = \bigcup_{j=1}^{m} X_{j,i}$. Por tanto, definiendo $\mathcal{Q} := (Y_1, \ldots, Y_n) \in \mathscr{P}_n(X,\mathscr{B})$ como nueva partición en medibles de Borel, habremos concluido

$$\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{Q}) = \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) \cdot S \in DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B}).$$

El resto de las afirmaciones son evidentes. □

Teniendo en cuenta la acción de las matrices estocásticas sobre $DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B})$, podemos intentar extender a otras acciones del modo siguiente.

Definición 9 (**Operador Reestructuración**). *Sean $m, n \in \mathbb{N}$ dos números enteros positivos. Llamaremos operador reestructuración sobre las matrices $\mathscr{M}_{r\times n}(\mathbb{R})$ dado por matrices estocásticas por filas $M_1, \ldots, M_r \in \mathbf{St}_{m\times n}(\mathbb{R})$ a la transformación*

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{I}: & \mathscr{M}_{r\times m}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{r\times n}(\mathbb{R}) \\ & Q & \longrightarrow & \sum_{\ell=1}^{r} E_{(\ell)} \cdot Q \cdot M_\ell, \end{array}$$

donde las matrices $E_{(1)}, \ldots, E_{(r)} \in \mathscr{M}_r(\mathbb{R})$ son las definidas en el Apartado 2.1. de la Subsección 2.6.1.
Nótese que esta operación difiere de la acción de las matrices estocásticas. Lo resumimos en unas pocas propiedades

Proposición 2.6.3. *Con las notaciones de la Subsección precedente, sea $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_r)$ un vector de probabilidades libres de átomos, sea $\mathcal{P} = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathscr{P}_n(X,\mathscr{B})$ una partición de un espacio topológico polaco $(X,\mathscr{T})$ en conjuntos medibles de Borel y ninguno de los cuales es vacío.*

i) Si $T_{\underline{k}}$ es una estrategia de **Cut** *de $\mathcal{P}$, la matriz $Ext_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}, T_{\underline{k}})$ se obtiene como reestructuración de la matriz $\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P})$. Es decir, existen matrices estocásticas*

$$M_1, \ldots, M_r \in \mathbf{St}_{n\times(m+n)}(\mathbb{R}),$$

tales que

$$Ext_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}, T_{\underline{k}}) = \sum_{\ell=1}^{r} E_{(\ell)} \cdot \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) \cdot M_\ell.$$

ii) Si, adicionalmente, $\mathscr{J}$ es la matriz estocástica por filas asociada a una fase de **Choose** *y si $\mathcal{Q} = (Y_1, \ldots, Y_n) \in \mathscr{P}_n(X, \mathscr{B})$ es la partición de X obtenida tras aplicar Cut ($T_{\underline{k}}$) y Choose ($\mathscr{J}$) a la partición $\mathcal{P}$, entonces, la matriz $\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{Q})$ es una reestructuración de la amtriz $\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P})$. Es decir, existen matrices estocásticas*

$$N_1, \ldots, N_r \in \mathbf{St}_n(\mathbb{R}),$$

tales que

$$\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{Q}) = \sum_{\ell=1}^{r} E_{(\ell)} \cdot \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) \cdot N_\ell.$$

Más aún, dadas cualesquiera dos particiones $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathscr{P}_n(X, \mathscr{B})$ existen matrices estocásticas $M_1, \ldots, M_r \in \mathbf{St}_n(\mathbb{R})$, tales que $\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{Q}) \in DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B})$ se obtiene a partir de una reestructuración de $\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P})$, i.e.

$$\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{Q}) = \sum_{\ell=1}^{r} E_{(\ell)} \cdot \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) \cdot M_\ell.$$

Demostración. Recordemos que la estrategia de **Cut**, $T_{\underline{k}}$, genera una lista de subconjuntos medibles de Borel de X_i, $X_{i,1}, \ldots, X_{i,k_i}$, para cada $1 \leq i \leq n$, y que se define $X_i' = X_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k_i} X_{i,j}\right)$. Denotemos por $r_i^{(\ell)} \in [0,1]$ tal que

$$\mu_\ell(X_i') = r_i^{(\ell)} \mu_\ell(X_i),$$

para cada $1 \leq i \leq n$, $1 \leq \ell \leq r$. Del mismo modo, denotemos $s_{i,j}^{(\ell)} \in [0,1]$ para cada $1 \leq j \leq k_i$ tales que

$$\mu_\ell(X_{i,j}) = s_{i,j}^{(\ell)} \mu_\ell(X_i).$$

Sean las matrices $M_1, \ldots, M_r$ definidas por

$$M_\ell = \left(D_\ell | M_1^{(\ell)} | \cdots | M_n^{(\ell)}\right),$$

donde

i) La matriz D_ℓ es una matriz diagonal tal que

$$D_\ell := \begin{pmatrix} r_1^{(\ell)} & & \\ & \ddots & \\ & & r_n^{(\ell)} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

ii) La matriz $M_i^{(\ell)}$ para cada $1 \leq i \leq n$ es una matriz cuyas filas son nulas excepto la fila i-ésima que tiene la forma $(s_{i,1}^{(\ell)}, \ldots, s_{i,k_i}^{(\ell)})$. Por tanto

$$M_i^{(\ell)} := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ s_{i,1}^{(\ell)} & \cdots & s_{i,k_i}^{(\ell)} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n \times k_i}(\mathbb{R}).$$

La matriz M_ℓ tiene n filas y $n + \sum_{i=1}^{n} k_i = n + m$ columnas. Además, es una matriz estocástica cuyas coordenadas están en $[0,1]$ y cuyas filas suman

$$r_i^{(\ell)} + \sum_{j=1}^{k_i} s_{i,j}^{(\ell)} = 1,$$

debido a que

$$\mu_\ell(X_i) = \mu_\ell(X_i') + \sum_{j=1}^{k_i} \mu_\ell(X_{i,j}) = \left(r_i^{(\ell)} + \sum_{j=1}^{k_i} s_{i,j}^{(\ell)} \right) \mu_\ell(X_i).$$

Ahora, considero el producto

$$(\mu_\ell(X_1), \ldots, \mu_\ell(X_n)) \cdot M_\ell = (v_0^{(\ell)} | v_1^{(\ell)} | \cdots | v_n^{(\ell)}) \in \mathbb{R}^{n+m}.$$

donde

$$v_0^{(\ell)} = (r_1^{(\ell)} \mu_\ell(X_1), \ldots, r_n^{(\ell)} \mu_\ell(X_n)) = (\mu_\ell(X_1'), \ldots, \mu_\ell(X_n')),$$

y para cada i, $1 \leq i \leq n$,

$$v_i^{(l)} = (s_{i,1}^{(\ell)} \mu_\ell(X_i), \ldots, s_{i,k_i}^{(\ell)} \mu_\ell(X_i)) = (\mu_\ell(X_{i,1}), \ldots, \mu_\ell(X_{i,k_i})).$$

Seguidamente, observemos que $E_{(\ell)} \cdot \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) \cdot M_\ell$ es la matriz que tiene todas sus filas nulas excepto la fila ℓ-ésima que es precisamente la fila dada por $(\mu_\ell(X_1), \ldots, \mu_\ell(X_n) \cdot M_\ell$. Es decir

$$E_{(\ell)} \cdot \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) \cdot M_\ell = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ v_0^{(\ell)} & \cdots & v_n^{(\ell)} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{r \times (n+m)}(\mathbb{R}).$$

Finalmente observamos que

$$\sum_{\ell=1}^{r} E_{(\ell)} \cdot \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) \cdot M_\ell = Ext_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}, T_{\underline{k}}), \tag{2.6.3}$$

lo que demuestra la propiedad *i)*. Para demostrar la propiedad *ii)* basta con recordar que

$$\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{Q}) = Ext_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}, T_{\underline{k}}) \left(\frac{Id_n}{\mathscr{J}} \right).$$

Como $\left(\frac{Id_n}{\mathscr{J}} \right) \in \mathbf{St}_{(n+m)\times n}(\mathbb{R})$, definiendo para cada ℓ, $1 \leq \ell \leq n$,

$$N_\ell = M_\ell \cdot \left(\frac{Id_n}{\mathscr{J}} \right) \in \mathbf{St}_n(\mathbb{R}),$$

tenemos una matriz estocástica con n filas y columnas. Y, por la Ecuación (2.6.3) se tiene que

$$\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{Q}) = \sum_{\ell=1}^{r} E_{(\ell)} \cdot \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) \cdot N_\ell.$$

La última afirmación del enunciado es obvia. Dadas $\mathcal{P} = (X_1, \ldots, X_n)$, $\mathcal{Q} = (Y_1, \ldots, Y_n)$. Basta con considerar la partición dada mediante

$$\{X_i \cap Y_j : 1 \leq i, j \leq n\} \in \mathscr{P}_{n^2}(X, \mathscr{B}).$$

Siguiendo el mismo proceso indicado para las operaciones de cortar y escoger con $s_{i,j}^{(\ell)} \in [0,1]$, $1 \leq i, j \leq n$, $1 \leq \ell \leq r$, tales que $s_{i,j}^{(l)} \mu_\ell(X_i) = \mu_\ell(X_i \cap Y_j)$. No haremos los detalles. □

En general no está garantizado que $DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}$ sea invariante por la acción del operador reestructuración. La siguiente Proposición muestra algunas de las dificultades.

Proposición 2.6.4. *Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico polaco, $\mathscr{B} = \mathscr{B}(X)$ la σ-álgebra de sus medibles de Borel. Sea $n \in \mathbb{N}$ un entero positivo y $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ un vector de distribuciones de probabilidad sobre $\mathscr{B}$ libres de átomos. Las siguientes propiedades son equivalentes*

i) $DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B}) = \mathbf{St}_n(\mathbb{R})$,

ii) $Id_n \in DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B})$, *iii)* $DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B})$ *es estable por la acción del operador reestructuración. Es decir, dada* $M \in DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B})$ *y dadas* $N_1, \ldots, N_n \in \mathbf{St}_n(\mathbb{R})$*, se tiene que*

$$N = \sum_{l=1}^{n} E_{(l)} \cdot M \cdot N_l \in DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B}).$$

Demostración. La equivalencia entre *i)* y *ii)* es obvia. En primer lugar, supongamos que se satisface *i)*, es decir, que se verifica $DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B}) = \mathbf{St}_n(\mathbb{R})$, entonces $Id_n \in DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B})$ obviamente. De otro lado, por la Proposición 2.6.2, como $DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B})$ es estable por la acción a derecha de $\mathbf{St}_n(\mathbb{R})$ se tendra que si $Id_n \in DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B})$, entonces para toda matriz $S \in \mathbf{St}_n(\mathbb{R})$,

$$S = Id_n \cdot S \in DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B}),$$

lo que prueba la equivalencia entre ambas propiedades. De otro lado, es obvio, por construcción, que el operador reestructuración transforma matrices estocásticas en matrices estocásticas, con lo que obviamente se concluye *i)⇒iii)*. Para concluir, *iii)⇒i)*, consideremos las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \mathscr{M}_{\underline{\mu}}((X, \emptyset, \ldots, \emptyset)) \in DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B}),$$

$$\vdots$$

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathscr{M}_{\underline{\mu}}((\emptyset, \ldots, \emptyset, X)) \in DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B}).$$

Claramente se tiene que existe una matriz de permutación (y, por tanto, una matriz estocástica) tal que

$$A_i = A_1 \cdot P_i,$$

(P_i es la matriz que intercambia la columna 1 y la columna i). Finalmente, se tiene

$$Id_n = \sum_{\ell=1}^{n} E_{(\ell)} \cdot A_\ell = \sum_{\ell=1}^{n} E_{(\ell)} \cdot A_1 \cdot P_\ell,$$

como $A_1 \in DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B})$, si se da la propiedad *iii)*, tendremos la propiedad *ii)*. □

A la vista de la anterior Proposición, introduciremos la siguiente noción:

Definición 10 (Estabilizador de $DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B})$). *Con las notaciones precedentes, definiremos el estabilizador de* $DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B})$ *(y lo denotaremos mediante* $Stab_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B})$*) a la familia de los operadores reestructuración que estabilizan* $DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B})$*. Es decir,*

$$Stab_{\underline{\mu}}^{(n)} := \Big\{ (M_1, \ldots, M_n) \in \mathbf{St}_n(\mathbb{R})^n : \sum_{i=1}^{n} E_{(i)} \cdot N \cdot M_i \in DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B}) \ , \\ \forall N \in DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B}) \Big\} .$$

Podemos resumir algunas de las propiedades conocidas de este conjunto el siguiente enunciado:

Teorema 2.6.5. *Con las notaciones precedentes se tiene:*

i) $(Stab_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B}), \odot)$ *es un monoide compacto y convexo con las operación* $\odot$ *dada mediante:*

$$(M_1 | \ldots | M_n) \odot (N_1 | \ldots | N_n) := (M_1 \cdot N_1 | \ldots | M_n \cdot N_n).$$

ii) $(\mathbf{St}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ *es un submonoide de* $(Stab_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B}), \odot)$ *con la obvia identificación*

$$S \longrightarrow (S | \ldots | S) \in Stab_{\underline{\mu}}^{(n)}(X, \mathscr{B}).$$

iii) $(Stab_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B}),\odot)$ *es un submonoide de* $(\mathbf{St}_n(\mathbb{R}))^n$*. Además*

$$Stab_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B}) = (\mathbf{St}_n(\mathbb{R}))^n \iff DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B}) = \mathbf{St}_n(\mathbb{R}).$$

iv) $Stab_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B})$ *es compacto y convexo.*

v) Todo operador $L \in Stab_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B})$ *posee un punto fijo. Más aún, si* $L = (M_1|\dots|M_n) \in Stab_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B})$*, entonces existen vectores fila estacionarios* $\pi_i \in \Delta_{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ *de* M_i *(i.e. vectores propios de valor propio 1), para cada* i*,* $1 \le i \le n$*, y existe un partición* $\mathcal{P} = (X_1,\dots,X_n) \in \mathscr{P}_n(X,\mathscr{B})$ *tales que*

$$\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \hline \pi_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \pi_n \end{pmatrix}.$$

Demostración. Es obvio que $(Stab_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B}),\odot)$ es un semigrupo con unidad. Por la Proposición 2.6.2 anterior, observando que si $S \in \mathbf{St}_n(\mathbb{R})$, el operador reestructuración $(S|\dots|S)$ tiene la forma

$$\sum_{i=1}^n E_{(i)} \cdot M \cdot S = \left(\sum_{i=1}^n E_{(i)}\right) \cdot M \cdot S = Id_n \cdot M \cdot S \in DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B}).$$

Concluimos que $(S|\dots|S) \in Stab_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B})$. Lo que prueba la afirmación *ii)*. Es obvio también que $Stab_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B})$ es un submonoide de $(\mathbf{St}_n(\mathbb{R}))^n$. En cuanto a la equivalencia, es una traducción de la Proposición 2.6.4 precedente.
El item *iv)* es consecuencia del Teorema de Dvoretzky-Wald-Wolfowitz (Teorema 2.1.1 precedente). Así, dados dos operadores reestructuración

$$M = (M_1|\dots|M_n),\ N = (N_1|\dots|N_n) \in Stab_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B}),$$

y dado $t \in [0,1]$, los operadores

$$M_t = (tM_1 + (1-t)N_1|\dots|tM_n + (1-t)N_n) \in (\mathbf{St}_n(\mathbb{R}))^n.$$

satisfacen, para cada $\mathscr{M} \in DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B})$, que

$$\sum_{i=1}^n E_{(i)} \cdot \mathscr{M} \cdot (tM_i + (1-tN_i)) = t\left(\sum_{i=1}^n E_{(i)} \cdot \mathscr{M} \cdot M_i\right) + (1-t)\left(\sum_{i=1}^n E_{(i)} \cdot \mathscr{M} \cdot N_i\right).$$

Como $M,N \in Stab_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B})$ y $DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B})$ es convexo, entonces,

$$t\mathscr{M}_1 + (1-t)\mathscr{M}_2 = t\left(\sum_{i=1}^n E_{(i)} \cdot \mathscr{M} \cdot M_i\right) + (1-t)\left(\sum_{i=1}^n E_{(i)} \cdot \mathscr{M} \cdot N_i\right) \in DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B}),$$

y por tanto $M_t \in Stab_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B})$. Como $(\mathbf{St}_n(\mathbb{R}))^n \subseteq \mathbb{R}^{n^3}$ es un conjunto compacto, basta con ver que $Stab_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B})$ es cerrado.
Sea dada una sucesión, $\{M^{(r)} = (M_1^{(r)}|\dots,|M_n^{(r)}) : r \in \mathbb{N}\} \subseteq Stab_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B})$ que converge (en norma euclídea en $\mathbb{R}^{n^3}$) a una secuencia

$$M = (M_1|\dots|M_n).$$

Sea $\mathscr{M} \in DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B})$ entonces, es fácil de verificar que

$$\mathscr{N} = \sum_{i=1}^n E_{(i)} \cdot \mathscr{M} \cdot M_i = \lim_{r\to\infty}\left(\sum_{i=1}^n E_{(i)} \cdot \mathscr{M} \cdot M_i^{(r)}\right).$$

Como $DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B})$ es cerrado, entonces $\mathscr{N} \in DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B})$.

Para la afirmación *v)*, basta con aplicar el Teorema del Punto fijo de Brouwer a la acción del operador $M = (M_1|\dots,|M_n) \in Stab_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B})$

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B}) & \longrightarrow & DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B}) \\ & \mathscr{M} & \longrightarrow & \sum_{i=1}^{n} E_{(i)} \cdot \mathscr{M} \cdot M_i. \end{array}$$

Como Φ es obviamente continua y $DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B})$ es compacto, entonces Φ posee un punto fijo. Entonces existe una partición $\mathcal{P} = (X_1,\dots,X_n) \in \mathscr{P}_n(X,\mathscr{B})$ de tal modo que

$$\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} E_{(i)} \cdot \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) \cdot M_i.$$

En particular, si π_i es la fila i-ésima de $\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P})$, esta identidad indica que

$$\pi_i = \pi_i M_i, \text{ para cada } i, 1 \le i \le n.$$

En términos de matrices estocástiacs, esto se traduce diciendo que $\pi_i \in \Delta_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ es un vector fila propio de valor propio 1, que es lo que denomina un vector estacionario de M_i. $\square$

PROBLEMA ABIERTO 2.6.6. Con las notaciones anteriores caracterizar las propiedades esenciales de $Stab_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B})$ en función de $\underline{\mu}$ y, de paso, obtener propiedades adicionales de $DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B})$.

Obviamente, muchas son las propiedades que se podrían estudiar sobre $Stab_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B})$ (fidelidad, generación, estructura, etc...), pero se escapan a los objetivos de un Trabajo de Fin de Grado como éste.

2.6.3. Corte Convexo y Corte de Tartas. Hemos observado que no siempre podemos garantizar que $DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}(X,\mathscr{B})$ sea estable bajo la acción de cualquier operador reestructuración. Sin embargo, vamos a ver cómo la convexidad de $\underline{\mu}$ (cf. Lema 1.2.6, del Capítulo 1) se puede aprovechar para el reparto de tartas.

DEFINICIÓN 11. *Sea $(X,\mathscr{T})$ un espacio topológico polaco, $\mathscr{B} = \mathscr{B}(X)$ sus medibles de Borel y $\mathcal{P} = (X_1,\dots,X_n) \in \mathscr{P}_n(X,\mathscr{B})$ una partición en medibles de Borel. Una estrategia de corte $T_{\underline{k}}$ dada por*

$$T_{\underline{k}} = ((X_{1,1},\dots,X_{n,k_1}),\dots,(X_{n,1},\dots,X_{n,k_n})),$$

se dice convexa si para cada i,j, $1 \le i \le n$ $1 \le j \le k_i$, existe $s_{i,j} \in [0,1]$ tal que

$$\underline{\mu}(X_{i,j}) = s_{i,j}\underline{\mu}(X_i).$$

Nótese que uno siempre podría hacer estrategias de corte convexas por ser $\underline{\mu}$ convexo.

PROPOSICIÓN 2.6.7. *Con las notaciones de la Definición precedente, sea $\mathcal{P} = (X_1,\dots,X_n) \in \mathscr{P}_n(X,\mathscr{B})$ una partición en medibles de Borel y sea $\mathcal{Q} = (Y_1,\dots,Y_n) \in \mathscr{P}_n(X,\mathscr{B})$ la partición obtenida después de una estrategia de corte $T_{\underline{k}}$ y aplicando una estrategia cualquiera de selección $\mathscr{J}$. Son equivalentes:*

i) $T_{\underline{k}}$ es un corte convexo.

ii) Existe una matriz estocásticas $S \in \mathbf{St}_n(\mathbb{R})$ tal que

$$\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{Q}) = \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) \cdot S.$$

DEMOSTRACIÓN. Revisando la prueba de la Proposición 2.6.2 uno observa que se realiza un corte convexo. Recíprocamente, si se realiza un corte convexo, las matrices estocásticas $M_1,\dots,M_n$ de la demostración de la Proposición 2.6.3 satisfacen

$$M_1 = \cdots = M_n.$$

Por tanto, por la misma Proposición tendremos

$$\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{Q}) = \sum_{i=1}^{n} E_{(i)} \cdot \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) \cdot M_i \cdot \left(\frac{Id_n}{\mathscr{J}}\right) = \sum_{i=1}^{n} E_{(i)} \cdot \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) \cdot S = (\sum_{i=1}^{n} E_{(i)}) \cdot \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) \cdot S =$$
$$= Id_n \cdot \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) \cdot S = \mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) \cdot S,$$

donde $S = M_i \cdot \left(\frac{Id_n}{\mathscr{J}}\right) \in \mathbf{St}_n(\mathbb{R})$ es estocástica por ser producto de estocasticas por filas. $\square$

El siguiente resultado nos confirma el poder de los cortes convexos.

PROPOSICIÓN 2.6.8. *Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico polaco, $\mathscr{B} = \mathscr{B}(X)$ sus medibles de Borel y $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ un vector de probabilidades sin átomos. Entonces, el problema del reparto de tartas para $\underline{\mu}$ se puede resolver en n cortes convexos, devolviendo como resultado una partición $\mathcal{P} = (X_1, \ldots, X_n)$ de matriz*

$$\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \in DWW^{(n)}_{\underline{\mu}}(X, \mathscr{B}).$$

En particular, la matriz $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)$ se obtiene como

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right) = A_1 \cdot S_1 \cdots S_n,$$

donde A_1 es la matriz de la prueba de la Proposición 2.6.4 y $S_1, \ldots, S_n$ son matrices estocásticas

DEMOSTRACIÓN. Usaremos solamente cortes convexos. La única propiedad es que, en la fase de elección (**Choose**) no todos los jugadores pueden rechazar lo que se disponga en el plato. Sólo usaremos 1 plato adicional. Se puede llamar a esto “reparto de abuela”.
Numeremos los jugadores del modo $\{1, \ldots, n\}$.

Input: X, $\underline{\mu}$.
  Inicializar: $i = 1$, $\mathcal{P} = (\emptyset, \ldots, \emptyset, X) \in \mathscr{P}_n(X, \mathscr{B})$.
  while $i \leq n$ **do**
    El jugador n hace un corte convexo $X_{n,i}$ tal que

$$\frac{1}{n - (i-1)} \underline{\mu}(X_n) = \frac{1}{n} \underline{\mu}(X) = \underline{\mu}(X_{n,i}).$$

    Asignar $X_i := X_{n,i}$.
    $i := i + 1$.
    $X_n := X_n \setminus X_{n,i}$.
  end while
  return
Output: La partición obtenida.

Obviamente, este algoritmo devuelve una partición $(Y_1, \ldots, Y_n)$ de tal modo que

$$\underline{\mu}(Y_i) = \frac{1}{n} \underline{\mu}(X) = \frac{1}{n},$$

y tenemos el resultado aparecido. □

OBSERVACIÓN 2.6.9. Este resultado indica que se puede obtener un reparto de tartas eficiente en conjuntos medibles con todas las buenas propiedades de proporcional, equitativo y libre de envidia. Sin embargo, los conjuntos medibles obtenidos tienen algo de indefinible, no disponemos de métodos constructivos que nos permitan construirlos. Esto conduce a propuestas más exigentes sobre la posibilidad de disponer de descripciones de los pedazos obtenidos al final del “algoritmo”. En este sentido se buscan simplificaciones de la tarta a repartir que usualmente suele ser el intervalo $[0, 1]$. Es decir, se trabaja bajo hipótesis fuertes como

- $X = [0, 1]$.
- Hallar una partición $\mathcal{P} = (X_1, \ldots, X_n)$ donde cada X_i es una unión finita de subintervalos de X (i.e. un conjunto semi-algebraico).

En el siguiente Capítulo discutiremos algunas respuestas positivas a estos requerimientos adicionales.

CAPíTULO 3

El Teorema de Alon: Existencia de Procedimientos Óptimos con uniones finitas de intervalos

Índice

3.1. Introducción

En este Capítulo vamos a dar una demostración del Teorema de N. Alon de [**A, 87**] presentado en la Introducción de este manuscrito (ver Subsección 0.3.4). El objetivo consiste en demostrar que si la Tarta consiste en el intervalo $[0, 1]$ con la topología usual, entonces existen repartos proporcionales, justos y equitativos para los cuales cada "pedazo" es una unión finita (y, por tanto, definible) de subintervalor de $[0, 1]$. El enunciado concreto que probaremos es el siguiente:

TEOREMA 3.1.1 (Alon, cf. [**A, 87**]). *Sea $n \in \mathbb{N}$ un entero positivo y sea $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \left[\Omega^1([0,1])\right]^{(n)}$ un vector de probabilidades continuas (ver Definición 29) sobre el intervalo $[0, 1]$ con la topología usual. Supongamos que la variación total $\|\underline{\mu}\|$ no se anula sobre intervalos de interior no vacío. Entonces, existe una familia $\mathscr{I}$ de subintervalos de $[0, 1]$, que definen una partición y de cardinal $\#(\mathscr{I}) = (n-1)n$, satisfaciendo:*
Existe una partición de $\mathscr{I}$

$$\mathscr{I} = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta(i),$$

de tal modo que los conjuntos

$$F_i = \bigcup_{I \in \Delta(i)} I, \ \ 1 \leq i \leq n,$$

verifican

$$\mu_\ell(F_i) = \frac{1}{n}, \ \ \forall i, \forall \ell, \ 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq \ell \leq n.$$

En particular, la partición $\mathcal{F} = (F_1, \ldots, F_n) \in \mathscr{P}_n([0, 1])$ es una partición donde cada medible de Borel es unión finita de intervalos (y, en particular, definible) de tal modo que

$$\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{F}) = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right).$$

Más aún, la partición $\mathcal{F}$ puede obtenerse realizando (de manera no uniforme) $O(n^2)$ operaciones elementales de **Cut&Choose**.

3.2. Un poco de Combinatoria en Esferas Absolutas: Coloraciones

En esta Sección vamos a introducir algunos elementos técnicos preliminares a la prueba del Teorema de Alon. Denotaremos (como en la Definición 31 del Apéndice A) por Δ_n el símplex n-dimensional, es decir,

$$\Delta_n := \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ x_i \geq 0, \ \sum_{i=0}^{n} x_i = 1)\}.$$

Si $k \in \mathbb{N}$ es un número entero positivo, $(\Delta_n)^k$ puede identificarse, mediante el paso a la traspuesta, con las matrices estocásticas por filas. De hecho, tnemos la identificación, mediante trasposición, $(\Delta_n)^k \cong \mathbf{St}_{k\times(n+1)}(\mathbb{R})$.

Definición 12. *Sea n un entero positivo y $x = (x_0, \ldots, x_n) \in \Delta_n$. El soporte de x, denotado por $supp(x)$ se define como*

$$supp(x) := \{i \in \{0, \ldots, n\} : x_i \neq 0\}.$$

Notación 3.2.1. Introduciremos la notación de un subconjunto de $(\Delta_n)^k$ que nos será de utilidad.

$$Y_{n,k} := \{(y_1, \ldots, y_k) \in (\Delta_n)^k : supp(y_i) \cap supp(y_j) = \emptyset, \ \forall i \neq j\}.$$

Nótese que cada columna de un punto de $Y_{n,k}$ tiene una coordenada no nula. Esa coordenada ya no puede ser compartida por el resto de columnas, por lo tanto, en esa fila ya no podrá haber más coordenadas no nulas. Por lo tanto, visto con la identificación matricial $Y_{n,k} \subseteq \mathbf{St}_{k\times(n+1)}(\mathbb{R})$, los puntos $(y_1, \ldots, y_k) \in Y_{n,k}$ son matrices estocásticas cuyas k filas son, respectivamente, $y_1, \ldots, y_k$ y cuyas columnas poseen, a lo sumo, una coordenada no nula. Definiremos ahora una trasposición γ dada mediante

$$\begin{array}{cccc} \gamma : & Y_{n,k} & \longrightarrow & Y_{n,k} \\ & (y_1, \ldots, y_k) & \longrightarrow & (y_2, \ldots, y_k, y_1), \end{array}$$

que será de utilidad. Matricialmente puede considerarse como multiplicar por la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema 3.2.2 ([**BaShSz, 81**],Statement B'). *Con las notaciones precedentes, sea t un entero positivo y k un entero primo impar. Sea $g : Y_{n,k} \to \mathbb{R}^{t-1}$ una función continua. Entonces existe $y \in Y_{n,k}$ tal que*

$$g(y) = g(\gamma y) = \cdots = g(\gamma^{k-1} y).$$

Definición 13. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo compacto de números reales. Una t-coloración finita de I, con $t \in \mathbb{N}$ un entero positivo, es una partición*

$$I = C_1 \dot{\bigcup} \cdots \dot{\bigcup} C_t,$$

donde cada C_i es un medible de Borel y $\mu_L(C_i) \neq 0$ para cada $i \in \{1, \ldots, t\}$, siendo μ_L la medida de Lebesgue.

Definición 14. *Sea $t \in \mathbb{N}$ un entero positivo e $I = [0, 1]$ el intervalo unidad de $\mathbb{R}$. Una t-coloración con medidas de I es unalista de medidas no negativas sobre los medibles de Borel de I $\mu_1, \ldots, \mu_t$, que son libres de átomos y satisfacen:*

$$\mu_1([0, x]) + \cdots + \mu_t([0, x]) = \mu_L([0, x]), \ \forall x \in [0, 1].$$

Nótese que toda t-coloración finita define también una t-coloración con medidas. Bastaría con definir, para cada $i \in \{1, \ldots, t\}$, las medidas

$$\mu_i(F) = \int_F \chi_{C_i}(x)\, d\mu_L(x) = \mu_L(C_i \cap F), \ \forall F \in \mathscr{B}(I),$$

donde χ_{C_i} denota la función característica de C_i.

Definición 15. *Dada una t-coloración con medidas $\mu_1, \ldots, \mu_t$ del intervalo $I = [0, 1]$, diremos que es una t-coloración continua si las funciones $M_i : I \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, dadas mediante $M_i(x) := \mu_i([0, x])$, son continuas para cada $i \in \{1, \ldots, t\}$.*

Definición 16. *Sean k, t, r tres números enteros positivos. Sea $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_t)$ una t-coloración con medidas del intervalo $[0, 1]$. Una k-descomposición de talla r de I asociada a $\underline{\mu}$ es un par $(\mathscr{S}, \mathscr{F})$ donde:*

i) $\mathscr{S} = \{0 = y_0 \leq y_1 \leq \cdots \leq y_r \leq y_{r+1} = 1\}$ *un conjunto formado por r elementos del intervalo $[0, 1]$.*

ii) $\mathscr{F} = \{F_1, \ldots, F_k\}$ *es una partición de* I *salvo algunos elementos de* $\mathscr{S}$ *de tal modo que:*

(a) Cada F_i *está formado por la unión de algunos de los subintervalos de* I *del conjunto*

$$\{[0, y_1]\} \bigcup \{(y_j, y_{j+1}] : 1 \leq j \leq r\}.$$

(b) Para cada i*,* $1 \leq i \leq t$*, y para cada* j*,* $1 \leq j \leq k$*, se tiene:*

$$\mu_i(F_j) = \frac{1}{k}\mu_i([0, 1]).$$

3.3. Una construcción de una partición en intervalos

3.3.1. Introducción. En esta sección se hará un estudio detallado del trabajo realizado en [**A, 87**] en el cual se expone una generalización del Teorema de Hobby-Rice (cf. [**HoRi, 95**]). El Teorema al que se refiere es el siguiente:

TEOREMA 3.3.1 (Teorema de Hobby-Rice (cf. [**HoRi, 95**])). *Sea* $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ *un vector de medidas sobre* $([0, 1], \mathscr{B})$*,* $\mathscr{B} := \mathscr{B}([0, 1])$ *su* σ*-álgebra de Borel. Entonces para algún* r*,* $1 \leq r \leq n$*, existen unos puntos* $x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_r < 1 = x_{r+1}$*, tales que denotando* $A := \bigcup_{i=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} [x_{2i}, x_{2i+1}]$ *y* $B := \bigcup_{i=0}^{\lceil \frac{r}{2} \rceil} [x_{2i-1}, x_{2i}] = [0, 1] \setminus A$*, se tiene*

$$\mu_j(A) = \mu_j(B),\ 1 \leq j \leq n.$$

El Toerema que generalizará este Teorema anterior es el siguiente:

TEOREMA 3.3.2. *Sea* $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_t)$ *un vector de probabilidades continuas (ver Definición 29 del Apéndice A) sobre* $[0, 1]$ *y sea* k *un entero positivo. Entonces existe una* k*-descomposición de talla* $(k-1)t + 1$*.*

El Teorema de Hobby-Rice es el caso particular $k = 2$ de este último Teorema.

3.3.2. Construcción de la Partición. Con las notaciones precedentes, tomemos un punto $y = (y_1, \ldots, y_k) \in Y_{n,k}$ y definamos

$$x := (x_0, \ldots, x_n) := \frac{1}{k}(y_1 + \cdots + y_k).$$

Para cada i, $1 \leq i \leq k$, supongamos $y_i = (y_0^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)}) \in \Delta_n$,

$$x_i = \frac{1}{k}(y_i^{(1)} + \cdots + y_i^{(k)}),$$

se tiene que, evidentemente $x_i \geq 0$ para cada $0 \leq i \leq n$. Y se tiene que

$$x_0 + \cdots + x_n = \frac{1}{k}(\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=0}^{n} y_i^{(j)}) = 1.$$

Por lo que $x \in \Delta_n$. Con este x definimos la siguiente familia de subintervalos de $I = [0, 1]$:

$$I_0 := [0, x_0], \quad I_j := (\sum_{i=0}^{j-1} x_i, \sum_{i=0}^{j} x_i], \quad 1 \leq j \leq n.$$

Consideramos la medida de Lebesgue μ_L sobre el intervalo $[0, 1]$, se tiene que

$$\mu_L(I_0) = x_0,\ \mu_L(I_j) = \sum_{i=0}^{j} x_i - \sum_{i=0}^{j-1} x_i = x_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Por lo tanto $\mu_L(I_j) = x_j$ para $0 \leq j \leq n$.

LEMA 3.3.3. *Con las anteriores notaciones, existe una aplicación suprayectiva*

$$\ell = \ell_y : \{j \in \{0, \ldots, n\} : x_j > 0\} \longrightarrow \{1, \ldots, k\},$$

dada mediante la siguiente propiedad:
Para cada $j \in \{0, \ldots, n\}$*,* $x_j > 0$*, existe un único* $\ell_y(j) = i \in \{1, \ldots, k\}$ *tal que la coordenada* j*-ésima de* y_i *es no nula.*

Demostración. Si $x_j > 0$, entonces existe al menos un $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $y_j^{(i)} > 0$. Pero por definición de $Y_{n,k}$, no puede haber dos índices $i_1, i_2 \in \{1, \dots, k\}$ tales que $y_j^{(i_1)}$, $y_j^{(i_2)} > 0$ porque, en ese caso, se tendría $j \in supp(y_{i_1}) \cap supp(y_{i_2}) = \emptyset$. Por lo tanto la correspondencia ℓ, tal y como esta definida, es una aplicación. Por otro lado, veamos que es suprayectiva. Como $y_i \in \Delta_n$ debe tener alguna coordenada no nula. Supongamos $j \in \{0 \dots, n\}$ el menor valor tal que $y_j^{(i)} \neq 0$. Veamos que $\ell_y(j) = i$. Si hubiera $i_1 \neq i$ tal que $y_j^{i_1} \neq 0$ entonces $j \in supp(y_i) \cap supp(y_{i_1}) = \emptyset$. Por lo tanto se tiene que

$$x_j = \frac{1}{k} y_j^{(i)},$$

y entonces $\ell(j) = i$, por lo que ℓ es suprayectiva. $\square$

Con las anteriores notaciones definamos, para cada $y \in Y_{n,k}$,

$$\Lambda_i(y) := \{j \in \{0, \dots, n\} : \ell_y(j) = i\} = \ell_y^{-1}(\{i\}).$$

Definamos, finalmente, la unión de intervalos

$$F_i(y) := \bigcup_{j \in \Lambda_i(y)} I_j, \;\; 1 \leq i \leq k.$$

Afirmación. *Con las anteriores notaciones, se tiene que la colección de subconjuntos $F_1(y), \dots, F_k(y)$ satisfacen:*

i) Son disjuntos dos a dos.
ii) Se tiene que $I = \bigcup_{i=1}^k F_i(y)$.

Demostración. i) Por la definición de ℓ_y no puede haber dos i_1, i_2 distintos tales que $j \in \Lambda_{i_1}(y) \cap \Lambda_{i_2}(y) = \emptyset$. Recuérdese ahora que los intervalos I_j son disjuntos dos a dos y se concluye la afirmación.

ii) Como se tiene

$$0 \leq x_0 \leq x_0 + x_1 \leq \dots \leq \sum_{i=0}^{j-1} x_i \leq \dots \leq \sum_{i=0}^{n} x_i = 1,$$

es claro que $I \subseteq \bigcup_{i=1}^k F_i(y)$, lo que concluye la prueba.

$\square$

Lema 3.3.4. *Con las anteriores notaciones, sea $y \in Y_{n,k}$ y sean $F_1(y), \dots, F_k(y)$ las uniones finitas de intervalos construidos por el método anterior. Entonces*

$$\mu_L(F_i(y)) = \frac{1}{k}, \; \forall i, \; 1 \leq i \leq k,$$

donde μ_L es la medida de Lebesgue sobre el intervalo $[0, 1]$.

Demostración. Primero recordemos que, para cada $j \in \{0, \dots, n\}$, se tiene

$$\mu_L(I_j) = x_j = \frac{1}{k} y_j^{(\ell(j))}.$$

Como son dos a dos disjuntos, se tiene para cada $i \in \{1, \dots, k\}$,

$$\mu_L(F_i) = \mu_L(\bigcup_{j \in \Lambda_i(y)} I_j) = \sum_{j \in \Lambda_i(y)} \mu_L(I_j) = \sum_{j \in \Lambda_i(y)} \frac{1}{k} y_j^{(\ell(j))} = \frac{1}{k}.$$

Y se tiene que la última igualdad es cierta ya que al ser $j \in \Lambda_i(y)$ se tiene que se toman los elementos no nulos de $y_{\ell(j)}$, y como este es un punto de Δ_n, se da que su suma será 1. $\square$

A continuación se discutirá, para cualesquiera $k, t \in \mathbb{N}$ enteros positivos, la existencia de una k-descomposicion para cualquier t-coloración. Esta discusión se dividirá en tres partes, una primera, el caso $k = 2$, que surge de la aplicación directa del Teorema de Borsuk-Ulam, se toma de [**AW, 86**] sin demostrarla. Seguidamente se detalla el caso en el que k es primo impar, siguendo [**A, 87**]. Finalmente, siguiendo también [**A, 87**], mostramos como a partir de cualesquiera k-descomposición y l-descomposición se puede construir una kl-descomposicón.

TEOREMA 3.3.5 ([**AW, 86**], Proposición 2.1). *Con las notaciones precedentes, toda t-coloración admite una 2-descomposición de tamaño como mucho t.*

TEOREMA 3.3.6. *([**A, 87**]) Sean $k \in \mathbb{N}$ un número primo impar, $t \in \mathbb{N}$ un entero positivo y $N = (k-1)t$. Entonces, toda t-coloración de medidas continuas (en el sentido de la Definición 15) admite una k-descomposición de talla $N+1$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el conjunto $Y_{n,k}$ descrito en 3.2.1. Para cada subconjunto no vacío $F \subseteq \{0, \ldots, n\}$ definamos

$$A_F := \{y \in Y_{n,k} : \ell_y^{-1}(\{1\}) = F\},$$

donde $\ell_y : \{0, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$ es la aplicación suprayectiva descrita en el Lema 3.3.3. Observamos que la siguiente es una descomposición de $Y_{n,k}$ como unión finita de abiertos, disjuntos dos a dos:

$$Y_{n,k} = \bigcup_{\emptyset \subsetneq F \subseteq \{0,\ldots,n\}} A_f. \tag{3.3.1}$$

Para ver que A_F es abierto, retomemos la definición de la función ℓ_y introducida en el Lema 3.3.3. Observamos que dado $j \in \{0, \ldots, n\}$, son equivalentes:

- $j \in \ell_y^{-1}(\{1\})$,
- $y_j^{(1)} > 0$.

Por tanto, podemos escribir

$$A_F = Y_{n,k} \cap \{y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^{k(n+1)} : \ y_j^1 > 0, \ j \in F\}.$$

Como F es un conjunto no vacío y finito, concluimos que $A_F \subseteq Y_{n,k}$ es un abierto. De otro lado, la aplicación ℓ_y es suprayectiva para cada $y \in Y_{n,k}$. Por tanto, $\ell_y^{-1}(\{1\}) \subseteq \{0, \ldots, n\}$ es un conjunto no vacío, luego $y \in A_F$, donde $F = \ell_y^{-1}(\{1\})$. Finalmente, si $y \in A_F \cap A_G \neq \emptyset$, entonces $F = \ell_y^{-1}(\{1\}) = G$. Por tanto, la Identidad (3.3.1) es una descomposición de $Y_{n,k}$ como unión finita de abiertos disjuntos dos a dos.
Sea ahora $\mu_1, \ldots, \mu_t$ una t-coloración del intervalo $[0,1]$ dada por medidas continuas (en el sentido de la Definición 15). Dado $y \in Y_{n,k}$, sean $F_1(y), \ldots, F_k(y)$ las uniones finitas de intervalos descritos como en párrafos precedentes. Para cada i, $1 \leq i \leq t-1$, definamos

$$\begin{array}{rccc} g_i : & Y_{n,k} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longrightarrow & \mu_i(F_1(y)). \end{array} \tag{3.3.2}$$

Observamos que la función g_i es continua si y solamente si para cada $F \subseteq \{0, \ldots, n\}$ no vacío, la restricción $g_i^{(F)} : A_F \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua (donde A_F son los abiertos descritos para la Identidad (3.3.1)).
Ahora, fijando $F \subseteq \{0, \ldots, n\}$, $F_1(y)$ viene dado por la descomposición siguiente:

$$F_1(y) = \{0\}^\epsilon \cup \left(\bigcup_{j \in F} (\sum_{t=0}^{j-1} x_t, \sum_{t=0}^{j} x_t] \right),$$

donde

$$\{0\}^\epsilon = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } 0 \notin F, \\ \{0\}, & \text{si } 0 \in F. \end{cases}$$

Fijando $F = \ell_y^{-1}(\{1\})$, los extremos de los intervalos, con $j \in F$,

$$I_j = (\sum_{t=0}^{j-1} x_t, \sum_{t=0}^{j} x_t],$$

son funciones continuas de y. Más aún, fijando $j \in F$, la función

$$\begin{array}{ccc} A_F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longrightarrow & \mu_i((\sum_{t=0}^{j-1} x_t, \sum_{t=0}^{j} x_t]), \end{array}$$

es una función continua. Por tanto, la función $g_i|_{A_F}$ es una suma de $(\#(F))$ funciones continuas definidas en A_F. Por tanto $g_i|_{A_F}$ es continua y, dada la partición en abiertos de la Identidad (3.3.1), la función g_i definida en (3.3.2) es también continua.

Consideremos ahora la apliciación continua

$$g := (g_1, \ldots, g_{t-1}) : Y_{n,k} \longrightarrow \mathbb{R}^{t-1}.$$

Aplicando el Teorema del Punto fijo de [**BaShSz, 81**] (ver Teorema 3.2.2), existe un punto fijo $\underline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k) \in Y_{n,k}$ de tal modo que

$$g(\underline{\theta}) = g(\gamma\underline{\theta}) = \cdots = g(\gamma^{k-1}\underline{\theta}),$$

donde γ es la trasposición definida en Notación 3.2.1. Se tiene que esta trasposición satisface

$$\gamma^j \underline{\theta} = (\theta_{j+1}, \ldots, \theta_k, \theta_1, \ldots, \theta_j).$$

Por lo tanto

$$g_i(\gamma^j\underline{\theta}) = \mu_i(F_1(\gamma^j\underline{\theta})) = \mu_i(F_{j+1}(\underline{\theta})),$$

para cada j, $1 \leq j \leq k-1$. Para verificar la última igualdad, recordemos que

$$F_1(\underline{\theta}) = \bigcup_{j \in \Lambda_1(\underline{\theta})} I_j,$$

donde

$$\Lambda_1(\underline{\theta}) = \ell_{\underline{\theta}}^{-1}(\{1\}).$$

Por lo tanto, al aplicar γ^j se tiene que

$$\Lambda_1(\gamma^j\underline{\theta}) = \ell_{\gamma^j\underline{\theta}}^{-1}(\{1\}) = \ell_{\underline{\theta}}^{-1}(\{j+1\}) = \Lambda_{j+1}(\underline{\theta}),$$

con lo que se concluye que

$$F_1(\gamma^j\underline{\theta}) = \bigcup_{j \in \Lambda_1(\gamma^j\underline{\theta})} I_j = \bigcup_{j \in \Lambda_{j+1}(\underline{\theta})} I_j = F_{j+1}(\underline{\theta}),$$

Por lo tanto, el punto fijo $\underline{\theta} \in Y_{n,k}$ satisface que para cada i, $1 \leq i \leq t-1$

$$\mu_i(F_1(\underline{\theta})) = \cdots = \mu_i(F_k(\underline{\theta})),$$

mientras que, al ser $F_i(\underline{\theta}), 1 \leq i \leq k$, conjuntos disjuntos dos a dos

$$\mu_i(F_1(\underline{\theta})) + \cdots + \mu_i(F_k(\underline{\theta})) = \mu_i(\bigcup_{i=1}^{k} F_i(\underline{\theta})) = \mu_i([0,1]). \tag{3.3.3}$$

Por lo que hemos probado que para cada $1 \leq j \leq k$ y $1 \leq i \leq t-1$ se tiene que

$$\mu_i(F_j(\underline{\theta})) = \frac{1}{k}\mu_i([0,1]).$$

Nótese que por ser $\mu_1, \ldots, \mu_t$ una t-coloración en medidas de $[0,1]$, se tiene que para cualesquiera $a, b \in [0,1]$ con $a \leq b$,

$$\mu_1([a,b]) + \cdots + \mu_t([a,b]) = \mu_L([a,b]) = b - a.$$

Como $F_j(\underline{\theta})$ es una unión finita de sub-intervalos disjuntos del intervalo $[0,1]$, se tiene:

$$\mu_L(F_j(\underline{\theta})) = \sum_{i=1}^{t-1} \mu_i(F_j(\underline{\theta})) + \mu_t(F_j(\underline{\theta})).$$

Por el Lema 3.3.4 se tendrá

$$\frac{1}{k} = \mu_L(F_j(\underline{\theta})) = \sum_{i=1}^{t-1} \mu_i(F_j(\underline{\theta})) + \mu_t(F_j(\underline{\theta})).$$

Como $F_1(\underline{\theta}), \ldots, F_k(\underline{\theta})$ define una partición del intervalo $[0,1]$, a partir de la Identidad (3.3.3) concluimos que

$$\mu_i(F_j(\underline{\theta})) = \frac{1}{k}\mu_i([0,1]),\ 1 \leq j \leq k.$$

De otro lado, tenemos que

$$\mu_t([0,1]) = 1 - \sum_{i=1}^{t-1} \mu_i([0,1]).$$

Por tanto, podemos concluir que

$$\mu_t(F_j(\underline{\theta})) = \frac{1}{k}(1 - \sum_{i=1}^{t} \mu_i([0,1])) = \frac{1}{k}\mu_t([0,1])$$

□

OBSERVACIÓN 3.3.7. Nótese que hemos desarrolado la prueba en el caso de t-coloraciones de medidas continuas. Obviamente, contiene el caso de t-coloraciones finitas tales que la t-coloración de medidas defina (conforme a la Observación precedente) es continua.

Nótese que el caso $k = 2$ se sigue del Teorema 3.3.5 de [**AW, 86**].

LEMA 3.3.8. *Sean $t, p, q \in \mathbb{N}$ tres número enteros positivos. Supongamos que para $k = p$ y $k = q$ se satisface la siguiente propiedad:*
(P_k) Para cualquier t-coloración continua $\mu_1, \ldots, \mu_t$ del intervalo $[0,1]$ que satisface

$$\sum_{\ell=1}^{t} \mu_\ell([0,x]) = \mu_L([0,x]),\ \forall x \in [0,1], \tag{3.3.4}$$

donde μ_L es la medida de Lebesgue en el intervalo $[0,1]$, existe una k-descomposición $(\mathscr{I}_k, \mathscr{F}_k)$ donde:

- *$\mathscr{I}_k$ es una partición del intervalo $[0,1]$ en intervalos de la forma*

$$\mathscr{I}_k = \{[\,0, b_1, (a_2, b_2], \ldots, (a_N, b_N]\},\tag{3.3.5}$$

- *$\#(\mathscr{I}_k) = N = (k-1)t$,*
- *$\mathscr{F}_k = \{F_1, \ldots, F_k\}$ donde cada F_i es una unión finita de algunos de los intervalos de $\mathscr{I}_k$ y $\mathscr{F}_k$ define una partición del intervalo $[0,1]$.*
- *$\mu_\ell(F_i) = \frac{1}{k}\mu_\ell([0,1])$, $1 \le \ell \le t$, $1 \le i \le k$.*

Entonces, existe una (pq)-descomposición de cualquier t-coloración continua dada por un par $(\mathscr{I}, \mathscr{F})$ donde

- *$\mathscr{I}$ es una partición de $[0,1]$ en intervalos del tipo de la Identidad (3.3.5).*
- *$\mathscr{F} = \{F_1, \ldots, F_{pq}\}$ es una partición de $[0,1]$ donde cada F_j es una unión finita de algunos de los intervalos en $\mathscr{I}$.*
- *$\#(\mathscr{I}) = (pq-1)t$.*
-
- *$\mu_\ell(F_j) = \frac{1}{pq}\mu_\ell([0,1])$, $1 \le \ell \le t$, $1 \le j \le pq$.*

DEMOSTRACIÓN. Haremos la demostración en dos etapas. Sea $\mu_1, \ldots, \mu_t$ una t-coloración del intevalo $[0,1]$. Supongamos que satisface

$$\sum_{\ell=1}^{t} \mu_\ell([0,x]) = x,\ \forall x \in [0,1].$$

Entonces, la variación total $\|\underline{\mu}\| = \mu_1 + \cdots + \mu_t$ define una función

$$\begin{array}{rccc} h: & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longrightarrow & h(x) := \|\underline{\mu}\|([0,x]), \end{array}$$

con $\|\underline{\mu}\|$ que no sea nula sobre itervalos de interior no vacío contenido en $[0,1]$. Nótese que si $a, b \in [0,1]$, con $a < b$, entonces

$$\|\underline{\mu}\|((a,b)) = b - a \neq 0.$$

AFIRMACIÓN. *La función h es una función biyectiva, estrictamente creciente y continua. Lo mismo sucede con su inversa $h^{-1}: [0,1] \longrightarrow [0,1]$.*

DEMOSTRACIÓN. La continuidad de h está garantizada por la continuidad de $\underline{\mu}$. Como la función $\|\underline{\mu}\|$ es no nula sobre intervalos abiertos, entonces dados $a < b$ con $a, b \in [0,1]$, $\|\underline{\mu}\|([a,b]) \neq 0$ y, por tanto,

$$h(a) = \|\underline{\mu}\|([0,a]) < \underline{\mu}\|([0,b]) = h(b),$$

entonces h es estrictamente creciente. Además, $\|\underline{\mu}\|([0,0]) = 0$, lo cual implica $f(0) = 0$. De otro lado

$$h(1) = \|\underline{\mu}\|([0,1]) = \mu_L([0,1]) = 1.$$

Finalmente, h es suprayectiva por el Teorema de Bolzano: dado $t \in [0,1]$, como

$$h(0) = 0 < t < 1 = h(1) \Rightarrow \exists x \in [0,1],\ h(x) = t.$$

Por tanto, h es biyectiva, continua y estrictamente creciente. Podemos considerar su inversa $h^{-1} : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ y será también biyectiva, continua y estrictamente creciente. $\square$

Dado que se satisface la propiedad (P_p), existe una p-descomposición $(\mathscr{I}, \mathscr{F})$ de la t-coloración continua $\mu_1, \ldots, \mu_t$, donde $\#(\mathscr{I}) = (p-1)t$ y $\mathscr{F} = \{F_1, \ldots, F_p\}$, donde cada F_i es unión de algunos intervalos de $\mathscr{I}$ y

$$\mu_\ell(F_i) = \frac{1}{p}\mu_\ell([0,1]),\ 1 \leq \ell \leq t.$$

Ahora, observemos que, salvo traslaciones, existe $\lambda_i > 0$ tal que existe una función estrictamente creciente y continua

$$\phi_i :\ F_i \longrightarrow [0, \lambda_i],$$

(o en $(0, \lambda_i]$, en el caso que el intervalo $[0, b_1] \not\subseteq F_i$). Esta función ϕ_i es una isometría sobre cada uno de los intervalos que forman F_i. Por tanto, se preserva la medida de Lebesgue y se tiene que

$$\mu_L(F_i) = \mu_L([0,\lambda]_i) = \lambda_i.$$

Por el Lema 3.3.4, podemos suponer que $\mu_L(F_i) = \frac{1}{p}$. Dado un intervalo $I = [a,b]$, con $a < b$,

$$\sum_{\ell=1}^{t} \mu_\ell((a,b]) = \sum_{\ell=1}^{t} \left(\mu_\ell([0,b]) - \mu_L([0,a])\right) = \mu_L([0,b]) - \mu_L([0,a]) = b - a.$$

Como F_i es una unión finita de intervalos de este tipo, se tien

$$\sum_{\ell=1}^{t} \mu_\ell(F_i) = \mu_L(F_i) = \lambda_i.$$

De otro lado

$$\sum_{\ell=1}^{t} \mu_\ell(F_i) = \sum_{\ell=1}^{t} \frac{1}{p}\mu_\ell([0,1]) = \frac{1}{p}\left(\sum_{\ell=1}^{t} \mu_\ell([0,1])\right) = \frac{1}{p}\mu_L([0,1]) = \frac{1}{p}.$$

Por tanto, podemos concluir que $\lambda_i = \frac{1}{p}$. De otro lado, podemos considerar la homotecia

$$\begin{array}{cccc} \eta_p : & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longrightarrow & p \cdot x. \end{array}$$

Definamos, finalmente, la función

$$\Phi_i : \quad F_i \quad \longrightarrow \quad [0,1],$$

dada mediante $\Phi_i := \eta_p \circ \phi_i$. Se tiene que Φ es una función estrictamente creciente, continua y biyectiva.
Definamos para cada ℓ, $1 \leq \ell \leq t$, y cada $X \in \mathscr{B}([0,1])$ la medida

$$\nu_\ell(X) := \mu_\ell(\Phi^{-1}(X)).$$

Consideremos la variación total $\|\underline{\nu}\| = \nu_1 + \cdots + \nu_t$ como medida definida sobre los medibles de Borel de $[0,1]$.
Sea $(a,b) \subseteq [0,1]$ un intervalo de interior no vacío (i.e $a < b$). Como Φ_i es estrictamente creciente y continua, entonces $\Phi_i^{-1}((a,b))$ es una unión finita de intersecciones de un intervalo abierto J de $[0,1]$ con los intervalos que componen F_i. Como J es abierto, hay un subintervalo $J' \subseteq F_i$ tal que $J \cap J'$ contiene un intervalo abierto de interior no vacío. Por tanto, como $\mu_1, \ldots, \mu_t$ es una t-coloración,

$$\|\underline{\mu}\|(J \cap J') \neq 0.$$

Pero $J \cap J' \subseteq \Phi_i^{-1}((a,b))$ y $\|\underline{\mu}\|(J \cap J') \leq \|\underline{\mu}\|(\Phi_i^{-1}((a,b)))$. Luego $\|\underline{\mu}\|(\Phi_i^{-1}((a,b))) \neq 0$. Pero se tiene

$$0 < \|\underline{\mu}\|(\Phi_i^{-1}((a,b))) = \sum_{\ell=1}^{t} \mu_\ell(\Phi_i^{-1}((a,b))) = \sum_{\ell=1}^{t} \nu_\ell((a,b)) = \|\underline{\nu}\|((a,b)).$$

En particular, la siguiente función es una función continua, biyectiva y estrictamente creciente:

$$\begin{array}{cccc} f: & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longrightarrow & \|\underline{\nu}\|([0,x]) = \sum_{\ell=1}^{t} \nu_\ell([0,x]). \end{array}$$

Definamos, finalmente, la siguiente familia de medidas finitas sobre los medibles de Borel del intervalo $[0,1]$:

$$\nu'_\ell(X) := \nu_\ell(f^{-1}(X)),\ \forall X \in \mathscr{B}([0,1]).$$

Ahora, sea $x \in [0,1]$ y consideremos $y \in [0,1]$ tal que $f(y) = x$. Se tendrá

$$\sum_{\ell=1}^{t} \nu'_\ell([0,x]) = \sum_{\ell=1}^{t} \nu_\ell(f^{-1}([0,x])) = \sum_{\ell=1}^{t} \nu_\ell([0, f^{-1}(x)]) = \sum_{\ell=1}^{t} \nu_\ell([0,y]) = \|\underline{\nu}\|([0,y]) = f(y) = x.$$

En particular, $\nu'_1, \ldots, \nu'_t$ es una t-coloración del intervalo $[0,1]$. Como se satisface la propiedad (P_q) existe una coloración foramda por $(\mathscr{I}_1, \mathscr{F}_1)$, donde

- $\mathscr{I}_1$ es una familia de $(q-1)t$ intervalos disjuntos que definen una partición de $[0,1]$.
- $\mathscr{F}_1 = \{A_{i,1}, \ldots, A_{i,q}\}$ es una partición del intervalo $[0,1]$ en q conjuntos medibles, cada uno de los cuales es una unión finita de elementos de $\mathscr{I}_1$.
- $\nu'_\ell(A_{i,j}) = \frac{1}{q}\nu'_\ell([0,1])$, $\forall \ell$, $1 \leq \ell \leq t$.

Ahora, como f es estrictamente creciente y continua, si J es un subintervalo de $[0,1]$, entonces $f^{-1}(J)$ es también un subintervalo de $[0,1]$. En particular, definamos

- $\mathscr{I}_2 = \{f^{-1}(I) : I \in \mathscr{I}_1\}$. que es una familia de subintervalos de $[0,1]$ de cardinal $(q-1)t$.
- $\mathscr{F}_2 = \{G_{i,1}, \ldots, G_{i,q}\}$, con $G_{i,j} = f^{-1}(F_{i,j})$, es una partición de $[0,1]$ en q medibles de Borel, cada uno de los cuales es unión finita de algunos de los intervalos de $\mathscr{I}_2$.
- Para cada ℓ, $1 \leq \ell \leq t$ se tiene

$$\nu_\ell(G_{i,j}) = \nu_\ell(f^{-1}(A_{i,j})) = \nu'_\ell(A_{i,j}) = \frac{1}{q}\nu'_\ell([0,1]).$$

Pero, además, como $f: [0,1] \longrightarrow [0,1]$ es biyectiva, $f^{-1}([0,1]) = [0,1]$. Por tanto

$$\nu'_\ell([0,1]) = \nu_\ell[0,1],$$

y tendremos la familia $(\mathscr{I}_2, \mathscr{F}_2)$ anterior, con

$$\nu_\ell(G_{i,j}) = \frac{1}{q}\nu_\ell([0,1]).$$

Seguidamente, consideremos la familia $\mathscr{F}_3^{(i)} = \{F_{i,1}, \ldots, F_{i,q}\}$ dada mediante

$$F_{i,j} = \Phi^{-1}(G_{i,j}) \subseteq F_i.$$

Observemos que

$$\mu_\ell(F_{i,j}) = \mu_\ell(\Phi^{-1}(G_{i,j})) = \nu_\ell(G_{i,j}) = \frac{1}{q}\nu_\ell([0,1]).$$

Pero, además, $\nu_\ell([0,1]) = \mu_\ell(\Phi^{-1}([0,1])) = \mu_\ell(F_i)$. Por lo que la familia $\{F_{i,1}, \ldots, F_{i,q}\}$ satisface:

$$\mu_\ell(F_{i,j}) = \frac{1}{q}\nu_\ell([0,1]) = \frac{1}{q}\mu_\ell(F_i) = \frac{1}{pq}\mu_\ell([0,1]).$$

De otro lado, la familia

$$\mathscr{I}_3^{(i)} = \Phi^{-1}(\mathscr{I}_2) = \{\Phi^{-1}(I) : I \in \mathscr{I}_2\},$$

define una familia finita de subconjunto del intervalo $[0,1]$.

Si $\Lambda(i)$ es el conjunto de los intervalos que forman F_i, la familia $\mathscr{I}_3^{(i)}$ es una familia de medibles de Borel de $[0,1]$, cada uno de los cuales es una unión finita de intervalos. Como Φ_i es estrictamente creciente, si $\Phi_i^{-1}(I)$ interseca solamente r intervalos consecutivos $J_1, \ldots, J_r$ de los que componen F_i, entonces

$$\Phi_i^{-1}(I) = (\Phi_i^{-1}(I) \cap J_1) \dot{\bigcup} J_2 \dot{\bigcup} \cdots \dot{\bigcup} J_{r-1} \dot{\bigcup} (\Phi_i^{-1}(I) \cap J_r)$$

En particular, $\mathscr{I}_3^{(i)}$ es una familia de medibles de Borel dados como unión finita de intervalos en una familia de intervalos $\widetilde{\mathscr{I}_3^{(i)}}$ cuyo cardinal no es mayor que el cardinal de $\mathscr{I}_2$.
Por tanto, la familia $(\widetilde{\mathscr{I}_3^{(i)}}, \widetilde{\mathscr{F}_3^{(i)}})$ es un par formado por

- $\widetilde{\mathscr{I}_3^{(i)}}$ es una familia de intervalos de $[0,1]$ de cardinal acotado por $(q-1)t$,
- $\widetilde{\mathscr{F}_3^{(i)}} = \{F_{i,1}, \ldots, F_{i,q}\}$ es una partición de F_i cuyos elementos son uniones finitas de elementos de $\widetilde{\mathscr{I}_3^{(i)}}$.
- $\mu_\ell(F_{i,j}))\frac{1}{pq}\mu_\ell([0,1])$, $1 \leq \ell \leq t$.

Juntando las familias y definiendo

$$\mathscr{I} = \bigcup_{i=1}^{p} \mathscr{I}_3^{(i)}, \quad \mathscr{F} = \bigcup_{i=1}^{p} \mathscr{F}_3^{(i)},$$

tendremos que

- $\#(\mathscr{I}) \leq p \cdot \max\{\#(\mathscr{I}_3^{(i)}) : 1 \leq i \leq p\} \leq p(q-1)t \leq (pq-1)t$,
- $\#(\mathscr{F}) = pq$,
- Los elementos de $\mathscr{F}$ son uniones finitas de elementos de $\mathscr{I}$,
- Para cada $F \in \mathscr{F}$ y cada ℓ, $1 \leq \ell \leq t$:
$$\mu_\ell(F) = \frac{1}{pq}\mu_\ell([0,1]).$$

Luego $(\mathscr{I}, \mathscr{F})$ es una (pq)-descomposición de la t-coloración $\mu_1, \ldots, \mu_t$ y el Lema queda demostrado. □

Con las notaciones precedentes, es claro que con la combinación de los Teoremas 3.3.5, 3.3.6 y el Lema 3.3.8 precedente, podríamos concluir el siguiente Corolario:

COROLARIO 3.3.9. *Sea $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_t)$ un vector de medidas continuas sobre $[0,1]$ tales que*

$$\mu_1([0,\alpha]) + \cdots + \mu_t([0,\alpha]) = \alpha,$$

para cualquier $\alpha \in [0,1]$. Entonces, para todo número enterok > 1 existe una k-descomposición de talla $(k-1)t+1$.

TEOREMA 3.3.10. *Sean $m, n \in \mathbb{N}$ dos números enteros positivos. Sea $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ un vector de probabilidades continuas, sin átomos, y tales que a variación total $\|\underline{\mu}\| := \mu_1 + \cdots + \mu_n$ no se anula sobre subintervalos abiertos no vacíos de $[0,1]$. Entonces, existe una familia $\mathscr{I}$ de subintervalos de $[0,1]$, que definen una partición de $[0,1]$ y satisfacen $\#(\mathscr{I}) = (m-1)n$, y: Existe una partición en m subconjuntos de $\mathscr{I}$*

$$\mathscr{I} = \bigcup_{i=1}^{m} \Delta(i),$$

de tal modo que los conjuntos

$$F_i := \bigcup_{I \in \Delta(i)} I, \ 1 \leq i \leq m,$$

verifican

$$\mu_\ell(F_i) = \frac{1}{m}, \ \forall i, \forall \ell, \ 1 \leq i \leq m, \ 1 \leq \ell \leq n.$$

En el caso $n = m \in \mathbb{N}$, entonces existe una solución del problema de reparto de tartas $\mathcal{P} = (F_1, \ldots, F_n) \in \mathscr{P}_n([0,1], \mathscr{T}_u)$ de tal modo que la matriz asociada satisface

$$\mathscr{M}_{\underline{\mu}}(\mathcal{P}) = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right) \in DWW_{\underline{\mu}}^{(n)}([0,1], \mathscr{T}_u),$$

siendo $F_1, \ldots, F_n$ *uniones finitas de subintervalos de* $[0,1]$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el vector de probabilidades $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ continuas y la función de su variación total $\|\underline{\mu}\| = \mu_1 + \cdots + \mu_n$. Definamos

$$\nu_\ell := \frac{\mu_\ell}{n},\ 1 \leq \ell \leq n,$$

y la función siguiente

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longrightarrow & f(x) := \|\underline{\nu}\|([0,x]) = \nu_1([0,x]) + \cdots + \nu_n([0,x]). \end{array}$$

AFIRMACIÓN. *La función f es una función biyectiva, estrictamente creciente y continua. Lo mismo sucede con su inversa* $f^{-1} : [0,1] \longrightarrow [0,1]$.

DEMOSTRACIÓN. La continuidad de f está garantizada por la continuidad de $\underline{\mu}$. Como la función $\|\underline{\mu}\|$ es estricatamente creciente (o no nula sobre intervalos abiertos), entonces dados $a < b$ con $a, b \in [0,1]$, $\|\underline{\mu}\|([a,b]) \neq 0$ y

$$f(a) = \|\underline{\nu}\|([0,a]) = \frac{1}{n}\|\underline{\mu}\|([0,a]) < \frac{1}{n}\|\underline{\mu}\|([0,b]) = \|\underline{\nu}\|([0,b]) = f(b).$$

Además, $\|\underline{\nu}\|([0,0]) = 0$, lo cual implica $f(0) = 0$. De otro lado

$$f(1) = \|\underline{\nu}\|([0,1]) = \frac{1}{n}\|\underline{\mu}\|([0,1]) = \frac{n}{n} = 1.$$

Finalmente, f es suprayectiva por el Teorema de Bolzano: dado $t \in [0,1]$, como

$$f(0) = 0 < t < 1 = f(1) \Rightarrow \exists x \in [0,1],\ f(x) = t.$$

Por tanto, f es biyectiva, continua y estrictamente creciente. Podemos considerar su inversa $f^{-1} : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ y será también biyectiva, continua y estrictamente creciente. $\square$

Definamos osbre el intervalo $[0,1]$ las medidas positivas $\nu_1', \ldots, \nu_n'$ dadas mediante

$$\nu_\ell'(B) = \nu_\ell(f^{-1}(B)),\ \forall B \in \mathscr{B}([0,1], \mathscr{T}_u),$$

dónde $([0,1], \mathscr{T}_u)$ es el espacio topológico $[0,1]$ con la topología usual. Obsérvese, además, que si $x \in [0,1]$ entonces

$$\sum_{\ell=1}^{n} \nu_\ell'([0,x]) = \sum_{\ell=1}^{n} \nu_\ell(f^{-1}([0,x])).$$

Si $y \in [0,1]$ es tal que $f(y) = x$, entonces, como f es creciente $f([0,y]) = [0,x]$, por tanto $[0,y] = f^{-1}([0,x])$. Esto nos da

$$\sum_{\ell=1}^{n} \nu_\ell'([0,x]) = \sum_{\ell=1}^{n} \nu_\ell([0,y]) = \|\underline{\nu}\|([0,y]) = f(y) = x.$$

Aplicando, entonces, el Corolario 3.3.9, existe una m-descomposición de talla $(m-1)n+1$ de la n-coloración $\nu_1', \ldots, \nu_n'$ dada mediante un par $(\mathscr{I}, \mathscr{F})$ donde

- $\mathscr{F} = \{F_1, \ldots, F_m\}$.
- Cada F_i es una unión finita de intervalos en $\mathscr{I}$.
- Y además $\nu_\ell'(F_i) = \frac{1}{m}\nu_\ell'([0,1])$.

Ahora, definamos $G_i := f^{-1}(F_i)$ para cada i, $1 \leq i \leq m$. Como f^{-1} es estrictamente creciente y continua, para cada intervalo $J \subseteq [0,1]$, $f^{-1}(J)$ es también un intervalo de $[0,1]$. Por tanto, cada G_i es una unión finita de intervalos de $I = [0,1]$. Finalmente, se tiene:

$$\frac{\mu_\ell(G_i)}{n} = \nu_\ell(G_i) = \nu_\ell(f^{-1}(F_i)) = \nu_\ell'(F_i) = \frac{1}{m}\nu_\ell'([0,1]),$$

y por otro lado

$$\nu_\ell'([0,1]) = \nu_\ell(f^{-1}([0,1])) = \frac{1}{n}\mu_\ell([0,1]),$$

por lo que se concluye que

$$\mu_\ell(G_i) = \frac{1}{m}\mu_\ell([0,1]),\ \forall \ell, \forall j,\ 1 \leq \ell \leq n,\ 1 \leq j \leq m.$$

En el caso $m = n$ y n es un número primo, tenemos la afirmación buscada. $\square$

APÉNDICE A

Terminología y Resultados Básicos, Notación y Resultados Preliminares

Índice

En este Capítulo recordaremos algunas de las nociones matemáticas básicas, y algunas de las propiedades más conocidas, usadas en esta Memoria.

A.1. $\sigma-$Álgebras, Medidas, Probabilidades

A.1.1. Terminología. Comenzamos con las definiciones esenciales. Sea X un conjunto cualquiera y consideremos su conjunto potencia asociado, $\mathscr{P}(X)$.

Definición 17. *Una álgebra (de Boole) sobre X se define como una colección $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$ de subconjuntos de X tales que:*

i) Los subconjunto impropios están en $\mathscr{A}$ (i.e. $X, \emptyset \in \mathscr{A}$).

ii) La clase $\mathscr{A}$ es cerrada por complementariedad (i.e. Si $A \in \mathscr{A}$, entonces su complementario $X \setminus A \in \mathscr{A}$.

iii) Es cerrada por uniones finitas. Si $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \mathscr{A}$ es una familia finita de elementos de $\mathscr{A}$, entonces $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathscr{A}$.

Es obvio que la intersección e álgebras de Boole es también álgebra de Boole. Por ello, para cada $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$, podemos definir el álgebra de Boole generada por $\mathscr{F}$ como la menor álgebra que contiene a $\mathscr{F}$, esto es,

$$\langle \mathscr{F} \rangle := \bigcap \{\mathscr{G} \subseteq \mathscr{P}(X) : \mathscr{G} \text{ es álgebra y } \mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}\},$$

Los elementos de $\langle \mathscr{F} \rangle$ se obtienen mediante combinaciones Booleanas finitas de elementos de $\mathscr{F}$. Es decir, todo elemento $B \in \langle \mathscr{F} \rangle$ se obtiene mediante un número finito de aplicaciones de los operadores unión, intersección y complementación a los elementos de $\mathscr{F}$.

Definición 18. *Una σ-álgebra sobre X se define como una colección $\Sigma \subset \mathscr{P}(X)$ que es álegra y ademas se cumple que*

$$\textit{Si } \{A_i : i \in \mathbb{N}\} \textit{ es una familia contable de elementos de } \Sigma \textit{ se tiene que } \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \Sigma.$$

Al par (X, Σ) se le denomina espacio de medida, y a cada conjunto $E \in \Sigma$ se le llama conjunto medible.

De nuevo, la intersección de una familia cualquiera de σ-álgebras sobre un conjunto X es también una σ-álgebra. Por tanto, dado $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$, definimos la σ-álgebra generada por $\mathscr{F}$ a la menor σ-álgebra sobre X que contiene a $\mathscr{F}$, esto es,

$$\sigma(\mathscr{F}) := \bigcap \{\mathscr{G} \subseteq \mathscr{P}(X) : \mathscr{G} \textit{ es } \sigma\textit{-álgebra, } \mathscr{F} \subset \mathscr{G}\}.$$

EJEMPLO A.1.1.
- *La σ-álgebra trivial:* $\Sigma = \{\emptyset, X\}$
- *Dado un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$, se define la σ-álgebra de Borel como la generada por el conjunto de los abiertos de $\mathscr{T}$. Denotaremos $\mathscr{B}(X, \mathscr{T}) = \sigma(\mathscr{T})$ (o simplemente $\mathscr{B}(X)$) a la σ-álgebra de Borel y a sus elementos $B \in \mathscr{B}(X, \mathscr{T})$ los llamaremos medibles de Borel de $(X, \mathscr{T})$.*

En lo que sigue fijaremos una σ-álgebra, Σ en X. Sobre esta σ-álgebra,

DEFINICIÓN 19. *Dado un espacio de medida (X, Σ), una media sobre (X, Σ) es una aplicación:*

$$\begin{array}{rccc} \mu: & \Sigma & \longrightarrow & \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \\ & S & \longmapsto & \mu(S), \end{array}$$

donde $\mathbb{R}$ son los números reales, y que satisface las siguientes propiedades:

i) $\mu(\emptyset) = 0$.

ii) Si $\{A_i \,:\, i \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma$ es una familia de elementos de Σ, disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i).$$

- *Una medida μ se dice no negativa si $\mu(S) \geq 0$ para todo $S \in \Sigma$.*
- *Una medida μ se dice finita si su rango está contenido en un compacto de $\mathbb{R}$. Es decir, si existen α, $\beta \in \mathbb{R}$ tales que para todo $S \in \Sigma$ se tiene que $\mu(S) \in [\alpha, \beta]$. Si μ es no negativa, una condición necesaria y suficiente para ser una medida finita es que se satisfaga $\mu(X) < +\infty$.*
- *Una medida μ se dice probabilidad si $\mu(X) = 1$.*

NOTACIÓN A.1.2. Usaremos la notación $\Omega(X, \Sigma)$ (o simplemente $\Omega(X)$ cuando no haya confusión sobre Σ) al conjunto de todas las medidas del par (X, Σ).

EJEMPLO A.1.3.
- *La medida de* Lebesgue.
  Se define la medida exterior como

$$\begin{array}{rccc} \lambda^*: & \mathscr{P}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\} \\ & E & \longmapsto & \lambda^*(E), \end{array}$$

en donde se tiene que, si $\ell(I)$ es la longitud del intervalo I,

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : \text{donde } \{I_n\}\text{son intervalos que } E \subseteq \bigcup I_n \right\}.$$

Se define la σ-álgebra de Lebesgue como la menor de las que, conteniendo a los intervalos, satisface además: Para cada $E \subseteq \mathbb{R}$, si E es medible de Lebesgue, entonces

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} \quad \lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap (\mathbb{R} \backslash A)),$$

sobre esta σ-álgebra se define la medida de Lebesgue, μ_L, como

$$\mu_L(E) = \lambda^*(E).$$

Esta medida se generaliza al caso de $\mathbb{R}^n$ usando cubos n-dimensionales en lugar de intervalos en la definición de la medida exterior.

- *La medida de* Gauss. *Sea $\mathscr{B}_0$ el completado de la σ-álgebra de Borel sobre $\mathbb{R}^n$ y $\mu_L^{(n)}$ la medida de Lebesgue sobre $\mathscr{B}_0$. Se define la medida de Gauss como*

$$\begin{array}{rccc} \gamma_n: & \mathscr{B}_0 & \longrightarrow & [0,1] \\ & E & \longmapsto & \gamma_n(E), \end{array}$$

en donde

$$\gamma_n(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_E e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}\, d\mu_L^{(n)}(x),$$

en donde $\|x\|$ representa la norma euclidea de un vector en $\mathbb{R}^n$. Esta medida es una probabilidad inducida por la distribución normal $N(0,1)$.

DEFINICIÓN 20. *(Descomposición de Jordan) Sea $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ una medida finita sobre una σ-álgebra Σ. Definimos las dos funciones de la descomposición de Jordan mediante*

$$\mu^+(B) := \sup\{\mu(A) : \ A \in \Sigma, \ A \subseteq B\},$$
$$\mu^-(B) := -\inf\{\mu(A) : \ A \in \Sigma, \ A \subseteq B\}.$$

DEFINICIÓN 21. *Sea (X, Σ) un espacio de medida, sea $\mu \in \Omega(X, \Sigma)$ una medida y sean μ^+, μ^- las funciones dadas por la Descomposición de Jordan anterior. A la función $|\mu| = \mu^+ + \mu^- : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ se le llama variación total. Además, $|\mu|$ es una medida (cf. Teorema A.1.5).*

DEFINICIÓN 22. *Dado un espacio de medida (X, Σ) y una medida sobre (X, Σ). Un conjunto medible A de (X, Σ), se llama átomo si $\mu(A) \neq 0$ y para cualquier $B \subset A$, tal que $B \in \Sigma$, se tiene que $\mu(B) = 0$ o $\mu(B) = \mu(A)$.*

DEFINICIÓN 23. *Sea (X, Σ) un espacio de medida, una medida $\mu \in \Omega(X, \Sigma)$ se dice sin átomos si μ no tiene átomos. Una medida se llama atómica en caso contrario.*

DEFINICIÓN 24. *Sea (X, Σ) un espacio de medida. Se llama lista o vector de medidas a un vector $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in [\Omega(X, \Sigma)]^n$ en donde cada μ_i es una medida.*

- *Si $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in [\Omega(X, \Sigma)]^n$ es un vector de medidas, en el que cada μ_i es no negativa, diremos vector de medidas no negativas.*
- *Si $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in [\Omega(X, \Sigma)]^n$ es un vector de medidas, en el que cada μ_i es finita, diremos vector de medidas finito.*
- *Si $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in [\Omega(X, \Sigma)]^n$ es un vector de medidas, en el que cada μ_i es una probabilidad, diremos vector de probabilidades.*
- *Si $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in [\Omega(X, \Sigma)]^n$ es un vector de medidas, en el que cada μ_i es una medida sin átmos, diremos vector de medidas sin átomos.*

NOTACIÓN A.1.4. Denotaremos $[\Omega^1(X, \Sigma)]^n$ el conjunto de los vectores de probabilidad libres de átomos.

DEFINICIÓN 25. *Sea $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n) : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un vector de medidas finitas. Definimos la variación total de $\underline{\mu}$ como*

$$\begin{array}{rccc} \|\underline{\mu}\| : & \Sigma & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & E & \longrightarrow & \|\underline{\mu}\|(B) = |\mu_1|(B) + \cdots + |\mu_n|(B). \end{array}$$

La variación total $\|\underline{\mu}\|$ es también una medida, en este caso no negativa (cf Proposición A.1.7)

DEFINICIÓN 26. *Sea (X, Σ) un espacio de medida y $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ el espacio de medida de los reales con la σ-álgebra de Borel. Sea*

$$\begin{array}{rccc} \eta : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \eta(x), \end{array}$$

si para cada $A \in \mathscr{B}$ se tiene que $\eta^{-1}(A) \in \Sigma$ entonces η se le llama una función medible. Si η admite un número finito de valores, entonces η se llama función medible escalonada.

DEFINICIÓN 27. *Sea (X, Σ) un espacio de medida, una medida $\mu \in \Omega(X, \Sigma)$ se dice semi-convexa si para cada conjunto medible E de (X, Σ) se tiene que existe $F \subset E$, conjunto medible, tal que $\mu(F) = \frac{1}{2}\mu(E)$.*
Un vector de medidas $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in [\Omega(X, \Sigma)]^n$ se dice semi-convexo si cada μ_i es una medida semi-convexa. Es deicr, para cada conjunto medible E se tiene que existe $F \subset E$ tal que

$$\underline{\mu}(F) = (\mu_1(F), \ldots, \mu_n(F)) = \frac{1}{2}(\mu_1(E), \ldots, \mu_n(E)) = \frac{1}{2}\underline{\mu}(E).$$

Para cada medida (o vector de medidas) $\underline{\mu}$ y cada conjunto medible E de (X, Σ), se define el conjunto $K(\underline{\mu}, E)$ como el conjunto de todas las funciones medibles $\phi : E \to \mathbb{R}$ con $0 \leq \phi(x) < 1$, para todo $x \in E$, tales que $\underline{\mu}(\{x \in E \ : \phi(x) < \lambda\}) = \lambda\underline{\mu}(E)$ para $0 \leq \lambda \leq 1$.

DEFINICIÓN 28. *Sea (X, Σ) un espacio de medida, se dice que una medida (o vector de medidas) $\mu \in \Omega(X, \Sigma)$ (o $\underline{\mu} \in [\Omega(X, \Sigma)]^n$) es convexa si para cualquier conjunto medible E de (X, Σ), se tiene que $K(\mu, E)$ es no vacío.*

DEFINICIÓN 29. *Sea* $(\mathbb{R},\mathscr{B})$ *es espacio de medida de los reales con la* σ*-álgebra de Borel. Sea* μ *una medida sobre* $(\mathbb{R},\mathscr{B})$*. Se dice que* μ *es continua si la función*

$$\begin{array}{rccc} M: & \mathscr{B} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \mu([0,x]), \end{array}$$

es una función continua.

DEFINICIÓN 30 (Continuidad absoluta). *Sea* (X,Σ) *un espacio de medida y sean* $\underline{\mu}$*,* $\underline{\nu} \in [\Omega(X,\Sigma)]^n$ *dos vectores de medidas sobre* (X,Σ)*. Se dice que* $\underline{\mu}$ *es absolutamente continuo con respecto de* $\underline{\nu}$ *si se verifica:*

$$\forall E \in \Sigma, \quad \|\underline{\nu}\|(E) = 0 \ \Rightarrow \ \|\underline{\mu}\|(E) = 0.$$

A.1.2. Resultados.

TEOREMA A.1.5 (Teorema de Jordan, (cf. [**Hal,50**], Capítulo 29)). *Sea* (X,Σ) *un espacio de medida y sea* $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ *una medida finita (ver Definición 19) y sean* μ^+ *y* μ^- *las funciones dadas por la Descomposición de Jordan (ver Definición 20). Se tiene que*

$$\mu = \mu^+ - \mu^-,$$

y la variación total $|\mu| = \mu^+ + \mu^- : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una medida finita y no negativa sobre* Σ*.*

OBSERVACIÓN A.1.6. Si $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ es una medida finita y no negativa, $|\mu| = \mu$. Basta, para verificarlo, con ver que si $B \in \Sigma$, $\mu^-(B) = 0$ siempre, mientras $\mu^+(B) = \mu(B)$.

PROPOSICIÓN A.1.7. *Si* $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n) : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es un vector de medidas finitas, entonces* $\|\underline{\mu}\|$ *(ver Definición 25) es una medida finita y no negativa. Si* $\underline{\mu}$ *es un vector de medidas no negativas, entonces* $\|\underline{\mu}\| = \|\underline{\mu}\|_1$*. En dónde*

$$\begin{array}{rccc} \|\underline{\mu}\|_1 : & \mathscr{B} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & B & \longrightarrow & \|\underline{\mu}(B)\|_1 = \mu_1(B) + \cdots + \mu_n(B). \end{array}$$

A continuación presentaremos una condición sobre la continuidad absoluta entre medidas que será de gran utilidad, así como el resultado conocido como Teorema de Radon-Nikodym.

PROPOSICIÓN A.1.8 ([**Hal,50**], Capítulo 30). *Sean* $\underline{\mu}$ *y* $\underline{\nu}$ *dos vectores de medidas en* (X,Σ)*. Se dice que* $\underline{\mu}$ *es absolutamente continua respecto de* $\underline{\nu}$ *si para todo* E *medible y todo* $\epsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que si* $\|\underline{\nu}\|(E) < \delta$ *se tiene que* $\|\underline{\mu}\|(E) < \epsilon$*.*

TEOREMA A.1.9 (Teorema de Radon-Nikodym, [**Nik, 30**]). *Sea* (X,Σ) *un espacio de medida y sean* μ *y* ν *dos medidas finitas. Supongamos que* ν *es absolutamente continua respecto de* μ *entonces existe una función medible* f *tal que*

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu.$$

Se suele denotar a f *por* $f = \frac{\partial \nu}{\partial \mu}$*. Además, si* g *es otra función medible de* (X,Σ) *tal que*

$$\nu(E) = \int_E g \, d\mu,$$

entonces $f = g$ *excepto, tal vez, en un conjunto de medida nula para* μ*.*

NOTACIÓN A.1.10. Sea $\ell : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación lineal y $\underline{\mu} : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un vector de medidas. Denotaremos mediante $\Lambda(\ell, \underline{\mu}) := \ell \circ \underline{\mu} : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$.

PROPOSICIÓN A.1.11. *Sea* $\underline{\mu} : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *un vector de medidas finitas. Y sea* $\ell : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *una aplicación lineal. Entonces* $\Lambda(\ell, \underline{\mu})$ *es una medida finita. Si* $\underline{\mu}$ *es libre de átomos, entonces* $\Lambda(\ell, \underline{\mu})$ *es libre de átomos. Si* $\underline{\mu}$ *es convexa,* $\Lambda(\ell, \underline{\mu})$ *es convexa. Además,* $\Lambda(\ell, \underline{\mu})$ *es no negativa si y solamente si*

$$\Lambda(\ell, \underline{\mu})(E) \geq 0, \quad \forall E \in \Sigma.$$

A.1.3. Teoremas de la Convergencia Dominada de Lebesgue. A continuación recordamos el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, y su versión discreta, que demostraremos.

TEOREMA A.1.12 (Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue). *Sea $\{f_r : r \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de funciones integrables que converge en casi todo punto a una función medible f y tal que:*

$$|f_r(x)| \leq g(x) \quad \textit{para casi todo } x \in X,$$

con g una función integrable. Entonces f es una función integrable y

$$\int f \, d\mu = \lim_{r \to \infty} \int f_r \, d\mu.$$

COROLARIO A.1.13 (Versión Discreta del Torema de la Convergencia Dominada de Lebesgue). *Sea $\{\nu_r : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0} : r \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de sucesiones de números reales no negativos. Supongamos que para cada $r \in \mathbb{N}$, la sucesión ν_r define una serie sumable, es decir:*

$$\sum_{s \in \mathbb{N}} \nu_r(s) < \infty.$$

Sea $\upsilon : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ otra sucesión y supongamos que ν_r converge a υ puntualmente. Es decir, supongamos que para cada $s \in S \subseteq \mathbb{N}$ se tiene que

$$\lim_{r \to \infty} \nu_r(s) = \upsilon(s).$$

Supongamos, adicionalmente, que nuestra sucesión está dominada por una sucesión sumable. Es decir, supongamos que existe $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que:

i) Se tiene que μ domina a cada ν_r (i.e. $\nu_n(s) \leq \mu(s) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall s \in S$).
ii) Se tiene que μ es sumable. (i.e. $\sum_{s \in \mathbb{N}} \mu(s) < \infty$).

Entonces, υ es sumabble y se tiene que

$$\lim_{r \to \infty} \left(\sum_{s \in \mathbb{N}} \nu_r(s) \right) = \sum_{s \in \mathbb{N}} \upsilon(s).$$

DEMOSTRACIÓN. Basta con asociar a cada sucesión $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ una función

$$\begin{array}{rccc} I_\nu : & \mathbb{R}_{\geq 0} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longrightarrow & \sum_{j \in \mathbb{N}} \nu(j) \chi_{[j,j+1]}(u), \end{array}$$

donde $\chi_{[j,j+1]}$ es la función característica del intervalo $[j, j+1]$. Entonces se tiene que, siendo μ_L la integral de Lebesgue

$$\int_0^\infty I_\nu(x) \, d\mu_L(x) = \int_0^\infty \sum_{j \in \mathbb{N}} \nu(j) \chi_{[j,j+1]}(x) \, d\mu_L(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \nu(j) \int_0^\infty \chi_{[j,j+1]}(x) \, d\mu_L(x) =$$

$$= \sum_{j \in \mathbb{N}} \nu(j) \mu_L([j, j+1]) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \nu(j),$$

para cada $\nu \in \{\nu_r : r \in \mathbb{N}\} \cup \{\mu\}$. Por otro lado, para cada $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ se tiene que $u \in [j', j'+1]$ para algún $j' \in \mathbb{N}$ y además

$$\lim_{r \to \infty} I_{\nu_r}(u) = \lim_{r \to \infty} \sum_{j \in \mathbb{N}} \nu(j) \chi_{[j,j+1]}(u) = \lim_{r \to \infty} \nu_r(j') = \upsilon(j') = \sum_{j \in \mathbb{N}} \upsilon(j) \chi_{[j,j+1]}(u) = I_\upsilon(u),$$

también

$$|I_{\nu_r}(u)| = |\nu_r(j')| \leq \mu(u) < \infty,$$

por lo tanto, con las funciones $\{I_{\nu_r} : r \in \mathbb{N}\}$, I_υ nos encontramos ante la hipótesis del Teorema anterior. Entonces

$$\lim_{r \to \infty} \left(\sum_{s \in \mathbb{N}} \nu_r(s) \right) = \lim_{r \to \infty} \int_0^\infty I_{\nu_r}(x) \, d\mu_L(x) = \int_0^\infty I_\upsilon(x) \, d\mu_L(x) = \sum_{s \in \mathbb{N}} \upsilon_r(s),$$

además υ es sumable, debido a que I_υ es integrable. □

A.2. Conjuntos Convexos

A.2.1. Terminología.

DEFINICIÓN 31. *Sea n un entero positivo, se define el simplex n-dimensional al siguiente conjunto que denotaremos por $\Delta_n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$:*

$$\Delta_n := \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ x_i \geq 0, \ \sum_{i=0}^{n} x_i = 1)\}.$$

DEFINICIÓN 32. *Un conjunto $R \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si para todo $x, y \in R$ y para todo $t \in [0,1]$ se tiene que*

$$tx + (1-t)y \in R.$$

DEFINICIÓN 33. *Sea $R \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, $\overline{R}$ su clausura y sea $x \in \overline{R}$ un punto. Una hiper-superficie de soporte de $\overline{R}$ en x es una variedad afín lineal $P_x \subseteq \mathbb{R}^n$ de dimensión $n-1$ (i.e. codimensión 1) tal que se verifica:*

i) El punto $x \in P_x$.

ii) Dados $\ell : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación lineal y $b \in \mathbb{R}$ tales que

$$P_x = \{z \in \mathbb{R}^n : \ \ell(z) + b = 0\},$$

entonces, la función $\Lambda_b : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (afín lineal) dada por

$$\Lambda_b(z) := \ell(z) + b, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n,$$

no cambia de signo sobre $\overline{R}$ (i.e. $\left[\forall z \in \overline{R}, \ \ell(z) + b \geq 0\right] \vee \left[\forall z \in \overline{R}, \ \ell(z) + b \leq 0\right]$).

DEFINICIÓN 34. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y convexo. Llamaremos puntos extremos de S a los puntos de S que no están en el interior de algún segmento contenido en S.*

A.2.2. Algunos Resultados Básicos sobre Convexidad.

PROPOSICIÓN A.2.1 ([**RS,93**], Teorema 1.1.9). *Si $R \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo (ver Definición 32), su clausura $\overline{R} \subseteq \mathbb{R}^n$ también es convexo.*

PROPOSICIÓN A.2.2 ([**RS,93**], Teorema 1.3.2). *Si $R \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo, $\overline{R}$ su clausura y ∂R la frontera de R, para cualquier $x \in \partial R$, existe al menos una hiper-superficie (ver Definición 33) de soporte de $\overline{R}$ pasando por x.*

PROPOSICIÓN A.2.3. *Si $R \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo, $\overline{R}$ su clausura, ∂R su frontera y $x \in \partial R$ y P_x una hiper-superfice de soporte. Entonces, existen $\ell : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación lineal y $b \in \mathbb{R}$ tales que*

i) $P_x = \{z \in \mathbb{R}^n : \ \ell(z) + b = 0\}$.

ii) $\forall z \in \overline{R}, \quad \ell(z) + b \geq 0$

Y si $\underline{0} = (0, \ldots, 0) \in P_x$, ℓ y b se pueden elegir con $b = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Por ser P_x una hiper-superficie de soporte, se tiene que existen ℓ' una función lineal y $b' \in \mathbb{R}$ tal que $P_x = \{z \in \mathbb{R}^n : \ \ell'(z) + b' = 0\}$ y la función $\Lambda_b(z) := \ell'(z) + b'$ no cambia de signo en $\overline{R}$. Si se tiene que $\ell'(z) + b' \geq 0$ para todo $z \in \overline{R}$ tomar $\ell = \ell'$ y $b = b'$, en caso contrario tomar $\ell = -\ell'$ y $b = -b'$. □

TEOREMA A.2.4 (Teorema de Minkowski, (cf. [**BS,11**], Capítulo 8)). *Sea A un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$ de dimensión N. Entonces cualquier punto, P, de A es combinación convexa de como mucho $N+1$ puntos extremos. Es decir, existe una familia de puntos extremos $\{P_1, \ldots, P_{N+1}\} \subseteq A$ y unas constantes no negativas $\{c_1, \ldots, c_{N+1}\} \subseteq \mathbb{R}$ tales que*

$$c_1 + \cdots + c_{N+1} = 1, \ \ c_i \geq 0, \ 1 \leq i \leq N+1,$$

y

$$P = c_1 P_1 + \ldots + c_{N+1} P_{N+1}, \ \forall P \in A.$$

Nótese que el número de puntos extremos usados depende de la dimensión, pero eso no significa que todo convexo es la envolvete convexa de un número finito de puntos extremos. El ejemplo obvio es la bola cerrada $\overline{B(\underline{0}, 1)} \subseteq \mathbb{R}^n$ de centro $\underline{0} \in \mathbb{R}^n$ y radio 1, que no es la envolvente convexa de un número finito de puntos. Es decir, los puntos $P_1, \ldots, P_{N+1}$ del Teorema anterior depeden de P y no hay condición de finitud global ni siquiera en el caso compacto.

A.3. Espacios Topológicos Polacos

A.3.1. Terminología.

DEFINICIÓN 35. *Un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ se dice polaco si es homeomorfo a un espacio métrico completo que posee un subconjunto denso numerable.*

OBSERVACIÓN A.3.1. En un espacio topológico polaco hay una base de abiertos numerable. Supongamos que $(X, \mathscr{T})$ es un espacio con métrica d y sea $D \subsetneq X$ el subconjunto denso numerable. Se tiene que el siguiente conjunto numerable es una base de abiertos de X:

$$\left\{B_X(x, \frac{1}{n}) : \ x \in D, \ n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\right\}.$$

A.3.2. Resultados.

COROLARIO A.3.2. *Si $(X, \mathscr{T})$ es un espacio topológico polaco, entonces la σ-álgebra de sus conjuntos de Borel, $\mathscr{B}$, posee un sistema generador $\mathscr{A}$ que es contable, es álgebra y genera $\mathscr{B}$. Es decir, existe $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ tal que:*

i) es álgebra de conjuntos,
ii) es numerable,
iii) genera la σ-álgebra $\mathscr{B}$ (i.e. $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{B}$).

DEMOSTRACIÓN. Consideramos la base numerable de abiertos de $(X, \mathscr{T})$, existe por ser $(X, \mathscr{T})$ polaco. Denotemos por $\mathscr{F}$ esa base y sea $\mathscr{A} = \langle \mathscr{F} \rangle$ el álgebra de conjuntos generado por $\mathscr{F}$. Claramente $\mathscr{A}$ es un conjunto numerable. Finalmente, es fácilmente verificable que

$$\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{A}),$$

es obvio que $\sigma(\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{B}$, porque todos los elementos de $\mathscr{A}$ son conjuntos de medibles de Borel. Recordemos que por la forma en la que se construye $\mathscr{A}$, es decir por uniones e intersecciones finitas, así como la complementariedad, de elementos abiertos de la topología $\mathscr{T}$ (concretamente bolas). De otro lado, sea $\mathscr{G}$ una σ-álgebra cualquiera que contenga a $\mathscr{A}$. Sea $A \subseteq X$ un abierto cualquiera. Como $\mathscr{F}$ es una base de abiertos de $(X, \mathscr{T})$, entonces existe algún subconjunto $\mathscr{F}_1 \subseteq \mathscr{F}$ tal que

$$A = \bigcup_{B \in \mathscr{F}_1} B$$

Se tiene que, al ser $\mathscr{F}$ numerable, $\mathscr{F}_1$ es numerable. Como $B \in \mathscr{A}$ para cada $B \in \mathscr{F}$, tenemos escrito A como unión numerable de elementos de $\mathscr{A}$. Como $\mathscr{G}$ es σ-álgebra tal que $\mathscr{A} \subset G$, entoneces $A \in \mathscr{G}$. Por lo tanto se ha probado que cualquier abierto de $(X, \mathscr{T})$ está en $\mathscr{G}$ (i.e. $\mathscr{T} \subset \mathscr{G}$) para cualquier σ-álgebra $\mathscr{G}$ que contenga $\mathscr{A}$. Luego $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{T}) \subseteq \mathscr{G}$ para cualquier $\mathscr{G}$ σ-álgebra que contenga a $\mathscr{A}$, por lo que $\mathscr{B} \subseteq \sigma(\mathscr{A})$.

□

A continuación se mostrarán algunos resultados de [**Sri, 91**] que serán de utilidad. Al no ser el interés de este trabajo, únicamente se enunciarán sin demostración.

TEOREMA A.3.3 (cf. [**Sri, 91**], p. 101). *Sea $\mathscr{A}$ una álgebra de subconjuntos de un conjunto X y sea $\mu : \mathscr{A} \to [0, 1]$ una medida sobre $\mathscr{A}$. Sea $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{A})$ la σ-álgebra definida por $\mathscr{A}$. Entonces, existe una única medida $\nu : \mathscr{B} \to [0, 1]$ tal que*

$$\nu|_{\mathscr{A}} = \mu.$$

LEMA A.3.4 (cf. [**Sri, 91**], p. 102). *Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico, $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ el conjunto de los medibles de Borel de $(X, \mathscr{T})$. Sea $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ un álgebra de subconjuntos tal que $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{B}$. Sea $\mu : \mathscr{A} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ una medida sobre $\mathscr{A}$. Y sean $\nu_1, \nu_2 : \mathscr{B} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ dos medidas sobre $\mathscr{B}$ tales que:*

$$\nu_1|_{\mathscr{A}} = \mu, \ \nu_2|_{\mathscr{A}} = \mu.$$

Entonces $\nu_1 = \nu_2$.

Y continuamos con dos resultados sobre espacios topológicos polacos.

LEMA A.3.5 ([**Sri, 91**], p.104). *Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico polaco $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ la σ-álgebra de sus medibles de Borel de $(X, \mathscr{T})$. Entonces, toda medida μ sobre X es regular, es decir, para cada $B \in \mathscr{B}$ se tiene:*

$$\mu(B) = \sup\{\mu(F) :\ F \subseteq B,\ F \text{ cerrado}\} = \inf\{\mu(A) :\ B \subseteq A,\ A \text{ abierto}\}.$$

TEOREMA A.3.6 ([**Sri, 91**], p.105). *Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico polaco, $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ el conjunto de sus medibles de Borel y μ una medida. Para cada $\epsilon > 0$ y para cada $B \in \mathscr{B}$, existe un compacto $K_\epsilon \subseteq B$ tal que $\mu(B \setminus K_\epsilon) < \epsilon$.*

APÉNDICE B

Algoritmos y Pseudo-Algoritmos de Reparto de Tartas

Índice

B.1. Introducción

En este Apéndice, en las Secciones B.2 y B.3, se expondrán algunos de los procedimientos clásicos, expuestos en [**UE, 10**], para resolver el Problema 2, atendiendo a las definiciones de satisfacción expuestas en la Definición 1. Para facilidad del lector recordaremos aquí tanto el Problema como las Definiciones.

Problema (Modelización (genérica) del Problema de Reparto de tartas). *Dado un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$, con conjunto de medibles de Borel $\mathscr{B} := \mathscr{B}(X, \mathscr{T})$, definir un procedimiento que resuelva el problema siguiente:*
Dada una lista de agentes (o jugadores) $\{1, \ldots, n\}$, cada uno de los cuales tiene asignada una probabilidad sobre los subconjuntos medibles de Borel $\mu_i : \mathscr{B} \longrightarrow [0, 1]$, hallar una partición de X en n conjuntos mediles Borel

$$(X_1, \ldots, X_n) \in \mathscr{B}^n,$$

de tal modo que las percepciones de los jugadores sobre los distintos pedazos, en forma de matriz con coordenadas reales;

$$(\mu_i(X_j))_{1 \le i,j \le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),$$

satisfaga las propiedades siguientes:

i) Reparto de Tartas Justo (o proporcional): *Cuando cada participante estima que su porción es, al menos, la parte "proporcional":*

$$\forall i, 1 \le i \le n, \quad \mu_i(X_i) \ge 1/n.$$

ii) Reparto de Tartas Libre de Envidia: *Cuando cada participante estima que su porción es, al menos, tan valiosa como la que le ha tocado a los demás:*

$$\forall i, j, 1 \le i, j \le n, \quad \mu_i(X_i) \ge \mu_i(X_j).$$

iii) Reparto de Tartas por División Exacta: *Cuando todos los participantes están de acuerdo en el valor de cada una de las porciones repartidas:*

$$\forall i, j, 1 \le i, j \le n, \quad \mu_i(X_i) = \mu_j(X_i).$$

iv) Reparto de Tartas Equitativo: *Cuando todos los participantes muestran el mismo grado de satisfacción en términos del valor que asignan a la porción obtenida:*

$$\forall i, j, 1 \leq i, j \leq n, \quad \mu_i(X_i) = \mu_j(X_j).$$

Para poder resolver el problema se dividirá el capítulo en dos partes. Una primera parte en la que se expondrán Algoritmos y Pseudo-Algoritmos que resuelvan el Problema atendiendo a la definición de Proporcionalidad. Una segunda parte en la que se resolverá el Problema atendiendo a la definición de Libre de Envidia.

B.2. Repartos Proporcionales

Expondremos algunas de las formas de repartir una tarta que cumplan la definición de Proporcionalidad expuesta en la Definición anterior.

B.2.1. Cut-and-Choose. Comenzamos con el caso sencillo en la que tenemos dos jugadores, $n = 2$. El cual se divide en dos sencillos pasos:

i) El jugador 1 corta la tarta en dos partes que considere de igual valor.
ii) El jugador 2 escoge la que considere mejor, y el jugador 1 se queda con la otra parte.

Analicemos el reparto. En el primer paso, el jugador 1 construye X_1, X_2, disjuntos, tales que

$$\mu_1(X_1) = \mu_1(X_2) = \frac{1}{2}.$$

En el segundo paso, el jugador 2, al escoger la que considere mejor, supongamos X_2, está claro que

$$\mu_2(X_2) \geq \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto es obvio que el reparto es proporcional.

B.2.2. Reparto de Steinhaus. Esta forma de repartir la tarta es válida cuando dividamos la tarta entre tres jugadores, $n = 3$. Y se divide en cuatro pasos.

i) El jugador 1 corta la tarta en tres partes de igual valor.
ii) El jugador 2 pasa si evalua al menos dos de esas partes mejor que $\frac{1}{3}$, si no marca dos como malas.
    Si el jugador 2 pasa, los jugadores escogerán en el siguiente orden 3, 2, 1.
iii) El jugador 3 pasa si evalua al menos dos de esas partes mejor que $\frac{1}{3}$, si no marca dos como malas.
    Si el jugador 3 pasa, los jugadores escogerán en el siguiente orden 2, 3, 1.
iv) Si ni 2 ni 3 pasaran, entonces el jugador 1 tomará una de las marcadas como malas por ambos. La tarta restante se la repartirán 2 y 3 mediante Cut-and-Choose.

Analicemos el reparto. En el primer paso, el jugador 1 construye X_1, X_2, X_3 disjuntos tales que

$$\mu_1(X_1) = \mu_1(X_2) = \mu_1(X_3) = \frac{1}{3}.$$

Supongamos ahora que en el segundo paso se da

$$\mu_2(X_1) \geq \frac{1}{3}, \quad \mu_2(X_2) \geq \frac{1}{3}.$$

Se tiene entonces que el jugador 2 pasa y los jugadores escogerán en el orden 3, 2, 1. Evidentemente el jugador 3 escogerá X_{i_3} tal que $\mu_3(X_{i_3}) \geq \frac{1}{3}$. El jugador 2 escogerá entre X_1 y X_2, por lo que es obvio que $\mu_2(X_{i_2}) \geq \frac{1}{3}$. Y el jugador 1 escogerá lo restante que se tiene que $\mu_1(X_{i_1}) = \frac{1}{3}$. Por lo tanto el reparto es proporcional.
En el caso en que el jugador 2 no pase y el jugador 3 sí pase, se tiene obviamente, por un argumento análogo, que el reparto también será proporcional.
Ahora en el caso de que no pasen ninguno de los dos jugadores, entonces el jugador 1 tomará una de las rechazadas (X_{i_1}) y obviamente se tiene $\mu_1(X_{i_1}) = \frac{1}{3}$. Tras esta selección del jugador 1, los jugadores 2 y 3 se reparten el resto ($X \setminus X_{i_1}$) mediante **Cut-and-Choose**. Obviamente se tendrá que

$$\mu_2(X_{i_2}) \geq \frac{1}{3}, \quad \mu_3(X_{i_3}) \geq \frac{1}{3}.$$

Y se concluye que el reparto es proporcional.

B.2.3. Reparto de Banach-Knaster. Esta forma de repartir la tarta es válida para cualquier número de jugadores, también es conocido como *Last-Diminisher*, último en disminuir. El reparto es el siguiente

---

Algoritmo: Last-Diminisher.
  Input: Una lista de jugadores $J = \{1, \ldots, n\}$, una Tarta X.
  Output: $\{X_1, \ldots, X_n\}$ partición de X.

Initialize: $i = 1$.
while $\#(J) \geq 1$ **do**
  El jugador i corta un trozo de X, T, tal que $\mu_i(T) = \frac{1}{n}$.
  Sea $k = \max\{j \in J : \mu_j(T) \geq \frac{1}{n}\}$.
  if $k = i$ **do**
    Asigna $X_k = T$.
    Actualizar i al siguiente elemento de J.
  else
    Al jugador k se le asigna un trozo de T, X_k, tal que $\mu_k(X_k) = \frac{1}{n}$.
  end if
  $J := J \setminus \{k\}$.
  $X := X \setminus T_k$.
end while
Output: $\{X_1, \ldots, X_n\}$

Es claro que es un reparto proporcional. Todos los jugadores, salvo el último, obtendrán un trozo de tarta que valoran por $\frac{1}{n}$. El último jugador se quedará con el trozo restante de tarta. Este trozo, al haber pasado este jugador los trozos anteriores, claramente lo valorará por más de $\frac{1}{n}$, ya que al pasar los otros trozos estos serán valorados por él por menos de $\frac{1}{n}$.

B.2.4. Reparto de Dubins-Spanier. Al igual que el reparto anterior, este también es válido para cualquier número de jugadores. También es conocido como *moving-knife*. Al contrario que en repartos anteriores, este reparto necesita la ayuda de un agente externo, un árbitro. El reparto es el siguiente

i) El árbitro mueve lentamente un cuchillo a lo largo de la tarta, de izquierda a derecha. Cualquier jugador puede pedir que pare en cualquier momento. Cuando un jugador pide que pare se queda con el trozo a la izquierda del cuchillo.
ii) Cuando se corte un trozo se sigue con el trozo de la derecha del cuchillo y el resto de jugadores. Cuando solo quede un jugador, este se queda con el trozo de tarta que haya.

Esta claro que el reparto es proporcional. Salvo con el último jugador, el resto pedirá que pare cuando observe que se llega a un porción de valor $\frac{1}{n}$. En el caso del último, al no haber pedido que pare en ningún momento, es que todos los trozos anteriores a él son de valor menos que $\frac{1}{n}$. Por lo tanto el último trozo lo verá de valor mayor que $\frac{1}{n}$.
Es importante destacar que la acción del cuchillo, moviéndose a lo largo de la tarta, hace que este reparto tenga un procedimiento continuo. Por ello es difícil, incluso ante las nociones más "relajadas", que este procedimiento de *moving-knife* sea aceptado como algoritmo entre los especialístas del tema. Sin embargo, es cierto que se puede "discretizar" este procedimiento evitando así la necesidad de un árbitro moviendo un cuchillo. Desconocemos si se han hecho estudios precisos sobre cómo discretizar este proceso de manera eficiente.

B.2.5. Reparto de Even-Paz. Se trata de un reparto válido para cualquier número de jugadores. A este procedimiento también se le conoce como *Divide y vencerás*. El reparto es el siguiente

---

Algoritmo: Even-Paz.
  Input: Una lista de jugadores J, una Tarta X.
  Output: $\{X_1, \ldots, X_n\}$ partición de X.

Initialize: a, b tal que $X = [a, b]$, $n = \#J$.
if $n = 1$ **do**

Asignar $X_k = X$ con $k \in J$.
return.
end if
for each $i \in J$ **do**
Sea $b_i \in X$ tal que $\mu_i([a, b_i]) = \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n}$.
end for
Ordenar $\{b_i : i \in J\}$, se obtiene $i_1, \ldots, i_n$ los indices ordenados.
Sea $B := b_{i_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$ el elemento $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$-ésimo de la lista anterior.
$X_1' := [a, B]$, $J_1 := \{b_{i_j} : 1 \leq j < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, *Even-Paz($J_1$, X_1').*
$X_2' := [B, b]$, $J_2 := \{b_{i_j} : \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq j \leq n\}$, *Even-Paz($J_2$, X_2').*
Output: $\{C_1, \ldots, C_n\}$

Es claro que, en cada paso del proceso, a cada grupo J de jugadores se le asigna un trozo de tarta el cuál valoran por, como poco, $\frac{\lfloor \frac{n}{2^k} \rfloor}{n}$, con n el número de jugadores. El proceso continua recursivamente hasta que $\lfloor \frac{n}{2^k} \rfloor = 1$, por lo tanto es obvio que en la última llamada recursiva cada jugador valorará el trozo que se le asigna por, como poco, $\frac{1}{n}$.

B.3. Repartos Libres de Envidia

Expondremos algunas de las formas de repartir una tarta que cumplan la definición de Libre de Envidia de la Definición del inicio de este Capítulo. Comenzamos, siguiendo una estructura similar a la anterior, con un reparto para 2 jugadores.

B.3.1. Cut-and-Choose. Se tiene que este reparto para dos jugadores también cumple la condición de reparto sin envidia. Esto se debe a que, para el caso $n = 2$ las Definiciones de Proporcionalidad y Libre de Envidia expuestas al inicio del Capítulo son equivalentes.

Afirmación. *Si el Problema de Reparto de Tartas expuesto al inicio del Capítulo trata de repartir la Tarta entre dos jugadores, un reparto satisface la Definición de Proporcionalidad si y solo si satisface la Definición de Libre de Envidia.*

Demostración. Tenemos un reparto entre dos jugadores X_1, X_2, y supongamos que X_1 se le asigna al jugador 1 y X_2 al jugador 2. Supongamos que el reparto es Proporcional, se tiene entonces que

$$\mu_i(X_i) \geq \frac{1}{2}, \text{ para } i \in \{1, 2\},$$

Como X_1, X_2 es una partición de $C = [0, 1]$. Por lo que se tiene que

$$\mu_1(X_1) + \mu_1(X_2) = \mu_1(C) = 1,$$

y como $\mu_1(X_1) \geq \frac{1}{2}$, se tiene que $\mu_1(X_2) \leq \frac{1}{2}$. De la misma forma ocurre con el segundo jugador, luego el reparto es Libre de Envidia. Supongamos ahora el reparto Libre de Envida, por lo que se tiene que $\mu_1(X_1) \geq \mu_1(X_2)$. Por ser un reparto se tiene que

$$1 = \mu_1(X_1) + \mu_1(X_2) \leq 2\mu_1(X_1),$$

por lo tanto $\mu_1(X_1) \geq \frac{1}{2}$. De igual manera se observa lo mismo para el jugador 2 y se concluye que el reparto es Proporcional. ☐

B.3.2. Reparto de Selfridge-Conway. Se trata de un reparto libre de envidia para tres jugadores. El reparto es el siguiente

i) El jugador 1 corta el pastel en tres trozos que el considere iguales.
ii) El jugador 2 pasa si valora al menos dos trozos por el máximo, o, si sólo hay uno, recorta otro para conseguir esos dos trozos. Si pasa, los jugadores deberan elegir trozos en el siguiente orden, 3, 2, 1.
iii) Si el jugador 2 recortó un trozo, los jugadores deberán elegir en el siguiente orden, 3, 2, 1, obligando al jugador 2 a escoger el trozo recortado (a no ser que lo escogiera 3). Lo recortado lo asignaremos en el siguiente paso.
iv) Ahora el reparto de lo recortado. Quien, entre el jugador 2 y 3, no haya escogido el trozo recortado será el cortador, al otro jugador lo llamaremos no cortador. Cortará la tarta en tres trozos iguales. Se escogerá en el siguiente orden: no cortador, jugador 1, cortador.

Antes de comenzar el análisis del proceso conviene mencionar que el el último paso esta bien definido. Es decir, el jugador 1 nunca tendrá la posibilidad de ser cortador o no cortador. Esto se debe a que en el paso *iii)*, puede ocurrir que 3 escoja el trozo recortado y entonces 2 sería cortador. O por otro lado 3 no escoja el trozo recortado y entonces 2 se ve obligado a cogerlo y entonces 3 es el cortador. Pasemo ahora al análisis del reparto. El jugador 1 recorta tres trozos disjuntos X_1, X_2, X_3, tales que

$$\mu_1(X_1) = \mu_1(X_2) = \mu_1(X_3) = \frac{1}{3}.$$

Supongamos que en el segundo paso, el jugador 2 pasa. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que se tiene

$$\mu_2(X_1) = \mu_2(X_2) \geq \mu_2(X_3).$$

Se tiene entonces que el jugador 3 escoge. Si el jugador 3 escogiera X_3, el jugador dos escogería una entre X_1 y X_2 y el jugador 1 el otro trozo. Claramente el reparto es libre de envidia.
El jugador 1 piensa que ha recibido un trozo igual al de los demás, luego no siente envidia. El jugador 3 escoge el trozo que considera más grande de entre los tres, luego tampoco tiene envidia de los otros dos. Y el jugador 2, como X_3 es el trozo que menos valora, tampoco sentirá envida. Luego el reparto es libre de envidia.
Supongamos ahora que el jugador 3 escogiera X_2 (reps. X_1). Entonces el jugador 2 escogerá X_1 (resp. X_2), y el jugador 1 escogerá X_3.
Por un argumento similar al anterior, ninguno de los jugadores sentirá envidia.
Supongamos ahora que el jugador 2 no pasa. Sin pérdida de generalidad podemos suponer

$$\mu_2(X_2) > \mu_2(X_1) \geq \mu_2(X_3).$$

Se tiene que el jugador 2 recortará X_2 en dos trozos disjuntos $X_{2,1}$, $X_{2,2}$, y se tiene que

$$\mu_2(X_1) = \mu_2(X_{2,1}) \geq \mu_2(X_3).$$

Por un argumento similar al anterior se concluye que el reparto, sin considerar $X_{2,2}$, es libre de envidia. Nótese que se tiene que $\mu_i(X_{2,1}) < \mu_i(X_2)$, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Se trata ahora de repartir $X_{2,2}$. Supongamos ahora, sin pérdida de generalidad, que el reparto es el siguiente

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \rightarrow & 1 \\ X_{2,1} & \rightarrow & 2 \\ X_3 & \rightarrow & 3 \end{array}$$

Por lo tanto 3 será el cortador, por lo que tendremos $X_{2,2} = Y_1 \dot{\cup} Y_2 \dot{\cup} Y_3$, tales que

$$\mu_3(Y_1) = \mu_2(Y_3) = \mu_3(Y_3) = \frac{1}{3}\mu_3(X_{2,2}).$$

Y supongamos, sin pérdida de generalidad, que este último reparto es

$$\begin{array}{ccc} Y_2 & \rightarrow & 2 \\ Y_1 & \rightarrow & 1 \\ Y_3 & \rightarrow & 3 \end{array}$$

Por lo que se trata de ver que el reparto siguiente es libre de envidia.

$$\begin{array}{ccc} X_1 \cup Y_1 & \rightarrow & 1 \\ X_{2,1} \cup Y_2 & \rightarrow & 2 \\ X_3 \cup Y_3 & \rightarrow & 3 \end{array}$$

Veamos que el jugador 1 no tiene envidia. Se tiene que, obviamente $\mu_1(X_1 \cup Y_1) > \mu_1(X_1)$. Como el fue quien inicialmente cortó los trozos, y como $X_{2,1} \cup Y_2$ es un subconjunto propio e X_2, $\mu_1(X_1) > \mu_1(X_{2,1} \cup Y_2)$, por lo que no siente envidia del jugador 2. Por otro lado, el jugador 1 valora X_1 y X_3 por igual, y en el reparto del recorte, al elegir antes que 3 se tiene que $\mu_1(Y_1) \geq \mu_1(Y_3)$. por lo tanto $\mu_1(X_1 \cup Y_1) \geq \mu_1(X_3 \cup Y_3)$. Por lo tanto tampoco sentirá envidia del jugador 3.
Veamos que el jugador 2 no tiene envidia. Al ser el primero en escoger en el reparto del recorte, se tiene que $\mu_2(Y_2) \geq \mu_2(Y_i)$ para $i \in \{1, 3\}$. Por lo tanto, al no sentir envidia en el reparto parcial, tampoco lo hará en este.
Veamos que el jugador 3 no tiene envidia. Como él es el que divide el recorte, piensa que Y_1, Y_2, Y_3 son iguales, por lo tanto al no sentir envidia en el reparto parcial, tampoco lo sentirá en

este. Por lo que concluimos que ningún jugador siente envidia de los otros dos y el reparto es libre de envidia.

B.3.3. Reparto de Stromquist. Al igual que el anterior, se trata de un reparto libre de envidia para tres jugadores. Sin embargo este es un procedimiento en el que actua un árbitro moviendo un cuchillo. El reparto es el siguiente

i) El árbitro mueve un cuchillo a lo largo de la tarta de izquierda a derecha.
ii) Al mismo tiempo cada jugador mueve su propio cuchillo, de tal manera que corten el trozo de la derecha del cuchillo del árbitro a la mitad.
iii) En el momento en el que, desde el punto de vista de uno de los jugadores, i, el árbitro deje a la izquierda un trozo de valor $\frac{1}{3}$, este jugador pedirá que se pare. Cuando esto suceda ese jugador recibe el trozo a la izquierda del cuchillo del árbitro.
iv) El trozo de la derecha del árbitro es cortado por el cuchillo que esté en medio de los tres. Si el cuchillo del medio pertenece al jugador i, los otros dos jugadores reciben el trozo de tarta en el que esté su cuchillo. Si no, llamemos j al jugador que sea el poseedor del cuchillo del medio. Entonces el jugador que no sea ni i ni j recibe el trozo en el que esté situado su cuchillo y j recibe el último trozo.

Analicemos el reparto. Supongamos, sin pérdida de la generalidad, que el jugador 1 es quién pide al árbitro que pare. Por lo tanto recibirá un trozo X_1 tal que $\mu_1(X_1) = \frac{1}{3}$. Además, al ser el primero en pedir que pare, se tiene que $\mu_i(X_1) \leq \frac{1}{3}$ para $i \in \{2, 3\}$, es decir, los otros dos jugadores no tienen envidia de 1.

Supongamos en primer lugar, que en el último paso del reparto, el jugador 1 es quien sostiene el cuchillo que está en el medio. Se obtienen así dos trozos, X_2 y X_3 tales que $\mu_1(X_2) = \mu_1(X_3) = \frac{1}{3}$. Por lo tanto el jugador 1 no tendrá envidia de ninguno de los otros dos. Para concluir falta ver que los otros dos jugadores no tienen envidia entre sí.

Supongamos, sin pérdida de la generalidad, que el jugador 2 tiene su cuchillo sobre X_2 y el jugador 3 sobre X_3. Es decir, el jugador 2 recibe X_2 y el judador 3 recibe X_3. Comencemos con el jugador 2, como su cuchillo está sobre X_2 significa que la parte de X_2 que está a la izquierda del cuchillo desde su punto de vista ya es la mitad de $C \setminus X_1$. Por lo tanto, desde su punto de vista, valor X_2 por al menos la mitad de $C \setminus X_1$, lo que significa que $\mu_2(X_2) \geq \mu_2(X_3)$, por lo que no tiene envidia del jugador 3.

Por un argumento similar se sigue que el jugador 3 no tiene envidia del jugador 2, y se concluye que el reparto, en este caso, es libre de envidia.

Supongamos en segundo lugar que, en el último paso del reparto, 1 no sostiene el cuchillo del medio, supongamos que es 2. Por un argumento similar al anterior, 3 no tendrá envidia de lo que reciba 2. Y como 2 es quien sostiene el cuchillo, el valora los dos trozos de $C \setminus X_1$ por igual, por lo que no tendrá envidia de lo que reciba 3. Por lo tanto en este último caso el reparto también es libre de envidia.

B.4. Protocolo de Robertson-Webb

En 1997, J.M. Robertson y W.A. Webb introdujeros un algoritmo para obtener particiones que son aproximadamente libres de envidia (cf. [**RW,97**]). Posteriormente, en su libro [**RW,98**] introdujeron un procedimiento conocido como Protocolo de Robertson-Webb, que calcula particiones de tartas libres de envidia; aunque los pedazos no son necesariamente convexos. Pero, al menos, el protocolo de Robertson-Webb termina sus repartos en un número finito de pasos. Lo que sigue es una descripción resumida de dicho "protocolo", que no pretende ser ni completa ni precisa, una tal descripción sería muy extensa y nos llevaría a un exceso de páginas en este Trabajo de Fin de Grado, de por sí bastante extenso ya.

Para comenzar, dado un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ y un vector de probabilidades $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ definido sobre los medibles de Borel $\mathscr{B} = \mathscr{B}(X, \mathscr{T})$. Sea $\epsilon > 0$ un número real positivo. Una división ϵ-casi exacta de X es una partición $\mathcal{P} = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathscr{P}_n(X, \mathscr{B})$ tal que existen unas razones $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}$ verificándose

$$|\mu_i(X_j) - w_j| < \epsilon, \ \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Es decir, una divisón ϵ-casi exacta es cualquier partición sobre la cual todos los jugadores mantienen un consenso, salvo $\epsilon > 0$, sobre su valor. Por ejemplo, la repartición del corte

convexo descrita en la Subsección 2.6.3 muestra como hallar una división ϵ-casi exacta de razon $\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}$ para cualquier $\epsilon > 0$.
En [**RW,97**], Robertson-Webb exponen cómo obtener una división ϵ-casi exacta con razones dadas $w_1, \ldots, w_n$ con un número finito de operaciones de Cut&Choose descritas en la Sección 2.6.1. A partir de ello, procederemos como sigue:
Input:

- Un trozo de tarta X,
- Una tolerancia $\epsilon > 0$,
- n jugadores, $J_1, \ldots, J_n$,
- $m < n$ jugadores que llamaremos *"jugadores activos"*, $J_1, \ldots, J_m$(los otros $n - m$ jugadores los llamaremos *"observadores"*),
- n probabilidades $\mu_1, \ldots, \mu_n$ asociadas a los jugadores,
- un conjunto de m razones positivas $w_1, \ldots, w_m$.

Output:
Una partición de X a lo largo de los jugadres activos $X_1, \ldots, X_m$ tal que

- La partición es libre de envidia respecto de los pesos y los jugadores activos. (i.e. para cuales quiera dos jugadores J_i, J_j, $\frac{\mu_i(X_i)}{\mu_i(J_j)} \geq \frac{w_i}{w_j}$),
- La partición es ϵ-casi exacta respecto de las razones dadas $w_1, \ldots, w_n$.

Procedimiento:
Usar un procedimiento ϵ-casi exacto sobre X y obtener una partición para los n jugadores ϵ-casi exacta respecto de los pesos $w_1, \ldots, w_m$. Por ejemplo, se puede usar el procedimiento **Crumb and Pack**.
Uno de los jugadors (por ejemplo J_1) corta las piezas de tal manera que la paritición es exacta para él (i.e. para cada j, $1 \leq j \leq n$, $\mu_1(X_j)/\mu_1(X) = w_j$). Si el resto de jugadores está de acuerdo con el corte, entonces asignar el trozo X_i al jugador activo J_i. Esta partición es libre de envidia para los jugadores activos, luego hemos terminado.
Si alguno de los jugadores no estuviese de acuerdo, entonces hay un trozo $P \subseteq X$ en el que hay un desacuerdo respecto a los jugadores activos. Cortando, si fuera necesario, P en trozos más pequeños, podremos acotar el desacuerdo de tal manera que $\mu_i(P)/\mu_i(X) < \epsilon$, para cada uno de los jugadores activos (i.e $1 \leq i \leq m$).
Dividir los jugadores activos en dos grupos: los *"optimistas"*, que piensan que P posee más valor, y los *"pesismistas"*, que piensan que P posee menor valor. Sea δ tal que, para cualquier jugador optimista i y pesimista j:

$$\frac{\mu_i(P)}{\mu_i(X)} - \frac{\mu_j(P)}{\mu_j(X)} > \delta.$$

Dividir el resto de la tarta, $X \setminus P$, en dos piezas Q y R, tal que la división es casi exacta para cada uno de los n jugadores. Asignar $P \bigcup Q$ a los optimistas. Como piensan que P tiene mayor valor, necesariamente pensarán que $P \bigcup Q$ posee suficiente valor. Asignar R a los pessimitas. Como piensan que P tiene poco valor, necesariamente pensarás que R posee suficiente valor.
En este punto se han dividido los jugadores activos en dos grupos, cada grupo tiene asignado un trozo de la tarta disjunto del trozo del otro grupo. Además, el trozo asignado a su grupo tiene valor suficiente para cada uno de los jugadores del grupo. Queda, entonces, dividir cada uno de los dos trozos a lo largo de los jugadores de cada grupo. Lo haremos recursivamente del siguiente modo:

- Recursivamente dividir $P \bigcup Q$ a lo largo de los jugadores optimistas (i.e. los optimistas serán jugadores activos y el resto serán observadores).
- Recursivamente dividir R a lo largo de los pesimistas (i.e. los pesimistas serán jugadores activos y el resto observadores).

En cada una de llamadas recursivas, la división resultante será, como mucho, δ-casi exacta. Como la partición será δ-casi exacta, la partición de los optimistas no causará envidia respecto de los pesimistas y vice versa. Por lo tanto, la partición total de X a lo largo de todos los jugadres será libre de envidia y ϵ-casi exacta.

B.5. Reparto Inducido por Borsuk-Ulam

En esta Sección vamos a revisar los resultados del trabajo de G. Chèze en [**Ch, 17**]. En él se usa un clásico Teorema de Punto Fijo (el Teorema de Borsuk-Ulam, cf. Teorema B.5.1 más abajo) para probar lo siguiente:

Dadas $\mu_1, \ldots, \mu_n$ probabilidades sobre el intervalo $[0,1]$, dadas por funciones de densidad continuas, existe una partición de $[0,1]$ en n intervalos $\mathscr{I} = (I_1, \ldots, I_n) \in \mathscr{P}_n([0,1)$ de tal manera que la matriz estocástica de reparto asociado tiene la forma siguiente:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{n} \end{pmatrix},$$

es decir, los elementos de la diagonal principal son de la forma $\frac{1}{n}$; aunque se desconocen las coordenadas fuera de la diagonal principal.

Para ello, [**Ch, 17**] usa el Teorema de Borsuk-Ulam que enunciamos a continuación. Para cada entero m positivo, Denotaremos por $S^{m-1} \subseteq \mathbb{R}^m$ a la esfera de radio 1, centrada en el origen de $\mathbb{R}^m$. El Teorema citado es el siguiente:

Teorema B.5.1 (Teorema de Borsuk-Ulam). *Sea k un número entero y $f : S^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ una función continua y antipodal ($f(-x) = -f(x)$), entonces existe $x_0 \in S^k$ tal que $f(x_0) = 0$*

Demostraremos que para un entero $n \in \mathbb{N}$ y cualquier permutación $\sigma \in \mathscr{S}_n$, dadas funciones de densidad $f_1, \ldots, f_n : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, el sistema de ecuaciones

$$\int_0^{x_1} f_{\sigma(1)}(x)\, d\mu_L(x) = \int_{x_1}^{x_2} f_{\sigma(2)}(x)\, d\mu_L(x) = \cdots = \int_{x_{n-1}}^{1} f_{\sigma(n)}(x)\, d\mu_L(x),$$

posee solución en puntos $x_1, \ldots, x_{n-1}$ satisfaciendo:

$$0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq 1.$$

Finalmente, se trata de probar el enunciado siguiente:

Teorema B.5.2. *Sean $f_1, \ldots, f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ funciones medibles con imagen acotada (contenidas en un compacto) y $\sigma \in \mathscr{S}_n$ una permutación. Se tiene entonces que el sistema anterior tiene solución.*

Demostración. Para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, sea $F_i : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función tal que para cada $e = (e_1, \ldots, e_n) \in S^{n-1}$ toma el valor siguiente:

$$F_i(e) := sng(e_{i+1}) \int_{e_1^2+\cdots+e_i^2}^{e_1^2+\cdots+e_i^2+e_{i+1}^2} f_{\sigma(i+1)}(x)\, d\mu_L(x) - sng(e_1) \int_0^{e_1^2} f_{\sigma(1)}(x)\, d\mu_L(x),$$

donde $sgn(x)$ denota la función signo de x. Consideremos la función f definida mediante

$$\begin{array}{cccc} f: & S^{n-1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n-1} \\ & e & \longrightarrow & (F_1(e)), \ldots, F_{n-1}(e)). \end{array}$$

Afirmación. *Con las anteriores notaciones, la función f es continua y antipodal.*

Demostración. Veamos que es continua, para ello bastaría ver que cada F_i, $1 \leq i \leq n$ es continua. Sea $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida mediante

$$\begin{array}{cccc} g: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \int_0^x h(t)\, d\mu_L(t), \end{array}$$

con $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ una función medible y acotada. Sea $x_0 \in [0,1]$ y $x \in [0,1]$, supongamos $x \geq x_0$, entonces

$$|g(x) - g(x_0)| = \left| \int_{x_0}^x h(t)\, d\mu_L(t) \right| \leq \sup_{t \in [0,1]} |h(t)| \left| \int_{x_0}^x d\mu_L(t) \right| = |x - x_0| \sup_{t \in [0,1]} |h(t)|.$$

La desigualdad es igualmente válida si $x_0 \geq x$. Luego para todo $\epsilon > 0$ existe

$$\delta = \frac{\epsilon}{\max\{1, \sup_{t \in [0,1]} |h(t)|\}} > 0,$$

tal que si $|x - x_0| < \delta$ entonces

$$|g(x) - g(x_0)| < \epsilon,$$

con la que se satisface la continuidad de g. Antes de ver la continuidad de F_i necesitamos una función auxiliar

$$\begin{array}{rccc} g': & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & sgn(x)\int_0^{x^2} h(t)\, d\mu_L(t), \end{array}$$

con $h: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ una función medible y acotada. Si $x_0 \in [-1,1] \setminus \{0\}$ la continuidad g' se deduce de la continuidad de g. Sea ahora $x_0 = 0$, y $x \in [-1,1]$.

$$|g'(x) - g'(x_0)| = |g'(x)| = |sgn(x)\int_0^{x^2} h(t)\, d\mu_L(t)| = |\int_0^{x^2} h(t)\, d\mu_L(t)| \leq |x| \sup_{t\in[0,1]} |h(t)|.$$

Luego para todo $\epsilon > 0$ existe

$$\delta = \frac{\epsilon}{\max\{1, \sup_{t\in[0,1]} |h(t)|\}} > 0,$$

tal que si $|x - x_0| < \delta$ entonces

$$|g'(x) - g'(x_0)| < \epsilon,$$

con la que se satisface la continuidad de g'. Ahora tendiendo en cuenta que

$$F_i(e) = sng(e_{i+1})\int_0^{e_1^2+\cdots+e_i^2+e_{i+1}^2} f_{\sigma(i+1)}(x)\, d\mu_L(x) - sng(e_{i+1})\int_0^{e_1^2+\cdots+e_i^2} f_{\sigma(i+1)}(x)\, d\mu_L(x) -$$

$$-sng(e_1)\int_0^{e_1^2} f_{\sigma(1)}(x)\, d\mu_L(x),$$

se sigue la continuidad de F_i.

Veamos que es antipodal. Para ello, sea $e = (e_1, \ldots, e_n) \in S^{n-1}$, se tiene que

$$F_i(-e) = sng(-e_{i+1})\int_{e_1^2+\cdots+e_i^2}^{e_1^2+\cdots+e_i^2+e_{i+1}^2} f_{\sigma(i+1)}(x)\, d\mu_L(x) - sng(-e_1)\int_0^{e_1^2} f_{\sigma(1)}(x)\, d\mu_L(x) =$$

$$= -sng(e_{i+1})\int_{e_1^2+\cdots+e_i^2}^{e_1^2+\cdots+e_i^2+e_{i+1}^2} f_{\sigma(i+1)}(x)\, d\mu_L(x) + sng(e_1)\int_0^{e_1^2} f_{\sigma(1)}(x)\, d\mu_L(x) = -F_i(e).$$

Por lo tanto, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que $F_i(-e) = -F_i(e)$, de lo que se sigue que $f(-e) = -f(e)$. $\square$

Por el Teorema de Borsuk-Ulam, existe $\tilde{e} = (\tilde{e_1}, \ldots, \tilde{e_n}) \in S^{n-1}$ tal que $f(\tilde{e}) = 0$. Por lo que escribiendo $x_1 = \tilde{e}_1^2$, y $x_i = x_{i-1} + \tilde{e}_i^2$, se obtiene el conjunto de puntos $\{x_i : 1 \leq i \leq n-1\} \subseteq [0,1]$ creciente (i.e. $x_{i-1} < x_i$ para $1 < i \leq n-1$) tal que es solución del sistema mencionado.

Esto es debido a que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que $F_i(\tilde{e}) = 0$, por lo tanto

$$0 = sng(e_{i+1})\int_{e_1^2+\cdots+e_i^2}^{e_1^2+\cdots+e_i^2+e_{i+1}^2} f_{\sigma(i+1)}(x)\, d\mu_L(x) - sng(e_1)\int_0^{e_1^2} f_{\sigma(1)}(x)\, d\mu_L(x).$$

Lo que implica que se tiene la siguiente igualdad

$$sng(e_{i+1})\int_{e_1^2+\cdots+e_i^2}^{e_1^2+\cdots+e_i^2+e_{i+1}^2} f_{\sigma(i+1)}(x)\, d\mu_L(x) = sng(e_1)\int_0^{e_1^2} f_{\sigma(1)}(x)\, d\mu_L(x).$$

Como la igualdad es cierta para cada uno de los $i \in \{1, \ldots, n, \}$, se tiene entonces que

$$sgn(e_1)\int_0^{x_1} f_{\sigma(1)}(x) d\mu_L(x) = sgn(e_2)\int_{x_1}^{x_2} f_{\sigma(2)}(x) d\mu_L(x) = \cdots = sgn(e_n)\int_{x_{n-1}}^{1} f_{\sigma(n)}(x) d\mu_L(x).$$

Ahora bien, como f es antipodal, se tiene que $f(\tilde{e}) = f(-\tilde{e}) = 0$, por lo tanto se tiene que

$$\int_0^{x_1} f_{\sigma(1)}(x)\, d\mu_L(x) = \int_{x_1}^{x_2} f_{\sigma(2)}(x)\, d\mu_L(x) = \cdots = \int_{x_{n-1}}^{1} f_{\sigma(n)}(x)\, d\mu_L(x),$$

y hemos encontrado solución al sistema anterior. $\square$

APÉNDICE C

Un par de imágenes del artículo original de Lyapunov

En las páginas siguientes de este Apéndice nos limitamos a exhibir la primera y última páginas del trabajo original de Lyapunov.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 465—478 **Série mathématique**

Посвящается памяти
В. И. Гливенко

А. А. ЛЯПУНОВ

О ВПОЛНЕ АДДИТИВНЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЯХ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

Изучается множество значений вполне аддитивной функции, принимающей значения из n-мерного векторного пространства. Доказано, что это множество замкнуто, а в случае, когда функция лишена скачков, то оно выпукло. Кроме того в этом последнем случае изучено поведение функции, когда ее значения принадлежат границе указанного множества.

Известно, что вполне аддитивная функция множеств, определенная для всех B-множеств отрезка и принимающая действительные значения, имеет в качестве множества значений замкнутое множество, а в случае, когда она лишена скачков, — замкнутый сегмент. Кроме того относительно такой функции естественным образом определяется понятие метрического типа множества; оказывается, что в случае функции, лишенной скачков, в концы сегмента отображается в точности по одному метрическому типу. Очевидно, наконец, что всякий замкнутый сегмент, содержащий начало координат, является множеством значений некоторой вполне аддитивной функции.

Настоящая работа посвящена выяснению вопроса о том, в каком смысле эти свойства сохраняются для вполне аддитивных функций, значения которых суть векторы n-мерного линейного пространства.

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность А. Н. Колмогорову, давшему мне при редактировании этой работы ряд чрезвычайно ценных указаний, которыми я воспользовался, особенно при доказательстве теоремы II.

§ 1

Мы будем рассматривать некоторую систему подмножеств $\{E\}$ некоторого абстрактного множества X, инвариантную относительно сложений с конечным или счетным числом слагаемых и взятия дополнений, а также n-мерное эвклидово пространство R^n. Во всем дальнейшем буквами E, $\mathcal{E}$, H, B с различными индексами обозначаются множества системы $\{E\}$; буквой x с различными индексами—элементы множества X (мы будем называть их точками множества X), а буквами a, b, c — векторы (или точки) пространства R^n.

Однако

$$\varphi(U_1 \cdot U_2 + E) = u + \varphi(E),$$

$$\varphi(U_1 \cdot U_2 + [(U_1 - U_2) - E]) = u + \varphi((U_1 - U_2) - E) = u - \varphi(E).$$

Таким образом точки $u+\varphi(E)$ и $u-\varphi(E)$ входят в Ξ, но u есть середина отрезка, их соединяющего, т. е. u есть точка обыкновенная.

2) $\varphi(U_1 - U_2) \neq 0$. Тогда

$$\varphi(U_1 + [U_2 - U_1]) = \varphi(U_1) + \varphi(U_2 - U_1) = u + \varphi(U_2 - U_1),$$

$$\varphi(U_1 - [U_1 - U_2]) = \varphi(U_1) - \varphi(U_1 - U_2) = u - \varphi(U_1 - U_2) = u - \varphi(U_2 - U_1).$$

Следовательно точки $u - \varphi(U_2 - U_1)$ и $u + \varphi(U_2 - U_1)$ входят в Ξ. Однако u есть середина отрезка, их соединяющего, т. е. u есть обыкновенная точка. Следовательно, если u есть точка необыкновенная, то в нее может отображаться не больше, чем один метрический тип E^*. Однако в силу замкнутости множества Ξ по крайней мере один метрический тип в нее отображается, т. е. u есть точка единственности.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
8. III. 1940

A. LIAPOUNOFF. SUR LES FONCTIONS-VECTEURS COMPLÈTEMENT ADDITIVES

RÉSUMÉ

Nous étudions les fonctions-vecteurs $\varphi(E)$ définies sur des systèmes $\{E\}$ d'ensembles abstraits, invariants par rapport aux opérations boreliennes $(\sum, C)$ dont les valeurs appartiennent à l'espace euclidient à n-dimensions.

Une fonction-vecteur $\varphi(E)$ est dite complètement additive si quel que soit le système d'ensembles disjoints $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ appartenant à $\{E\}$, les longueurs des vecteurs $\varphi(E_n)$ forment une série convergente et

$$\varphi\left(\sum E_n\right) = \sum \varphi(E_n).$$

$\varphi(E)$ subit un saut sur E, si quel que soit l'ensemble $E' \subset E$ appartenant à $\{E\}$ on a $\varphi(E') = 0$ ou bien $\varphi(E') = \varphi(E) \neq 0$. On dit que $\varphi(E)$ est identiquement nulle $\varphi(E') \equiv 0$ sur E' si $\varphi(E' \cdot E'') = 0$ quel que soit l'ensemble E'' appartenant à $\{E\}$.

Le type métrique de E_1 relativement à $\varphi(E)$ est la réunion de tous les ensembles E_2 tels que $\varphi(E_1 - E_2) \equiv \varphi(E_2 - E_1) \equiv 0$. Nous désignons le type métrique de E par E^* et nous considérons la fonction $\varphi(E^*) = \varphi(E)$.

Nous démontrons les théorèmes suivants.

THÉORÈME I. *L'ensemble des valeurs d'une fonction-vecteur complètement additive et dépourvue de sauts, est toujours convexe.*

THÉORÈME II. *L'ensemble des valeurs de toute fonction-vecteur complètement additive est toujours fermé.*

THÉORÈME III. *Soit $\varphi(E)$ une fonction-vecteur complètement additive et dépourvue de sauts et a — un vecteur fixe appartenant à l'ensemble Ξ des valeurs de $\varphi(E)$. Alors l'équation $\varphi(E^*) = a$ admet un ensemble ayant la puissance du continu de solutions diverses dans le cas où a est intérieur à un segment rectiligne contenu dans Ξ. Elle admet une solution unique dans le cas contraire.*

Bibliografía

[A, 87] N. Alon, *Splitting Necklaces.* Advances in Mathemathics **63** (1987), 247-253.

[AW, 86] N. Alon, D. B. West, *The Borsuk-Ulam theoream and bisection of necklaces.* Proceedings of the American Mathematical Society **98** (1986), 623-628.

[BaShSz, 81] I. Bárány, S. B. Shlosman, A. Szücs, *On a Topological Generalization of a Theorem of Tverberg.* J. of London Math. Soc (2) **23** (1981), 158-164.

[BS,11] B. Simon, *"Convexity: An Analytic Viewpoint"*. C.U.P., 2011.

[Bau, 17] Z. Bauman, *"Retrotopia"*.Polity Press, United Kingdom, 2017.

[BlCuShSm, 98] L. Blum, F. Cucker, M. Shub, S. Smale, *"Complexity and Real Computation"*. Springer, 1998.

[BlShSm, 89] L. Blum, M. Shub, S. Smale, *On a Theory of Computation and Complexity over the Real Numbers: NP-completeness, Recursive Functions and Universal Machines.* Bull. of the Amer. Math. Soc. **21** (1989), 1-46.

[BV, 11] S.P. Boyd, L. Vandenberghe, *"Convex Optimization"*. Cambridge University Press, 2011, 50-51.

[Ch, 17] G. Chèze, *Existence of a Simple and Equitable Fair Division: A Short Proof.* Mathematical Social Sciences **87** (2017), 92-93.

[DWW, 51] A. Dvoretzky, A. Wald, J. Wolfowitz, *Realtions among certain ranges of Vector measures.* Pacific J. Math. **1** (1951), 59-74.

[UE, 10] U. Endriss, *"Lecture Notes on Fair Division"*. Institute for Logic, Language and Computation, University of Amsterdam, 2010.

[Hal,48] P.R. Halmos, *The range of a vector measure.* Bulletin of the American Mathematical Society **54** (1948), 416-421.

[Hal,50] P.R. Halmos, *Measure Theory* Van Nostransd, N. York, 1950.

[HoRi, 95] C.R. Hobby, J.R. Rice, *A moment problem in L_1 approximation.* Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1995), 665-670

[Krp, 72] R. M. Karp, *Reducibility Among Combinatorial Problems.* In R. E. Miller and J. W. Thatcher (eds.). Complexity of Computer Computations. Plenum Press, New York, 1972, pp. 85103.

[Lyp, 40] A.A. Lyapunov, *Sur les fonctions-vecteurs complètement additives.* Bull. Acad. Sci. URSS Ser. Math, [Izvestia Akad. Nauk SSSR] **4** (1940), 465-478.

[Nik, 30] O. Nikodym, *Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon.* Fundamenta Mathematicae, **15** (1930), 131-179.

[RW,97] J.M. Robertson, W. A. Webb, *Near exact and envy free cake division.* Ars Combinatoria, **45** (1997), 97108.

[RW,98] ______, *"Cake-Cutting Algorithms: Be Fair If You Can"*. A.K. Petersm Natick, Massachusetts, 1998.

[RS,93] S. Rolf, *Basic convexity.* En "Convex Bodies: The Brunn-Minkowski theory"; Cambridge University Press, 1993, 1-17.

[Sri, 91] S.M. Sirvastava, *A Course on Borel Sets.* GTM 180, Springer, 1991.