

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS
DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

TESIS DOCTORAL

ANÁLISIS DE RESONANCIA PORTUARIA:
GENERACIÓN, TRANSITORIEDAD,
NO LINEALIDAD Y ACOPLAMIENTO
GEOMÉTRICO

Presentada por: D. GABRIEL DÍAZ HERNÁNDEZ

Dirigida por: D. IÑIGO JAVIER LOSADA RODRÍGUEZ
D. MAURICIO GONZÁLEZ RODRÍGUEZ

Marzo, 2006

CAPÍTULO 6
MODELADO NUMÉRICO DE LA
RESONANCIA PORTUARIA

6.1 INTRODUCCIÓN

Tradicionalmente el estudio de los efectos asociados al fenómeno de resonancia no se ha sometido a un enfoque integral, llegando en ocasiones a sacrificar procesos físicos de gran importancia, por el simple hecho de no contar con las herramientas matemáticas y/o el equipo óptimo de medición para el análisis del fenómeno. En la actualidad con el avance en las técnicas y equipos de medición, es posible evaluar y medir las características del flujo antes, durante y después de la presencia del fenómeno de resonancia, eso sí, en un número limitado de puntos, a fin de conocer mejor gran parte de los mecanismos forzadores del fenómeno de forma conjunta. Con ello, se puede contar con mayor información a la hora de diseñar las instalaciones portuarias, y asegurar el cumplimiento de los parámetros operacionales óptimos establecidos. Sin embargo, no siempre se puede realizar campañas de medición en las zonas portuarias, y en ocasiones esta tarea puede tornarse dificultosa o simplemente no es compatible con las operaciones que se realizan en un puerto operativo, sin mencionar que los episodios de resonancia portuaria se manifiestan de forma súbita, y únicamente llegan a durar algunos minutos.

Por ello, en este capítulo se presenta un modelo numérico avanzado de propagación de oleaje que logra simular la agitación y oscilaciones del flujo que interactúa con estructuras naturales o artificiales. Esta herramienta, es de gran ayuda no solo para evaluar las características presentes en instalaciones ya existentes, sino para poder considerar posibles actuaciones o modificaciones en dichas infraestructuras, y predecir el posible comportamiento del flujo bajo una gama prácticamente ilimitada de escenarios.

En este capítulo presenta un modelo basado en las ecuaciones modificadas de Boussinesq, capaz de simular adecuadamente la propagación del oleaje en laboratorio y campo, con la ventaja de contar con algunas de las características que hemos considerado indispensables en esta Tesis, a saber, transitoriedad, no linealidad y capacidad de modelar series temporales forzadoras reales y el acoplamiento entre dársenas adyacentes.

Los resultados numéricos pueden presentarse ya sea mediante mapas bidimensionales de superficie libre o corriente, o bien con el análisis de series temporales en puntos de control preestablecidos.

A pesar de contar con las bases teóricas fundamentales para considerar la mayor parte de los procesos de interés para un análisis exhaustivo de la resonancia portuaria, este modelo, de reciente desarrollo, no puede pasar a constituir una herramienta fiable y robusta para su aplicación en ingeniería, si no cuenta con un proceso de validación riguroso. Más aún, los modelos de tanta complejidad requieren además de su validación una metodología clara de aplicación que favorezca su uso en el ámbito de la ingeniería. Por ello, esta Tesis dedica una parte importante del trabajo realizado a una validación rigurosa del modelo y al desarrollo de la metodología necesaria para su utilización.

Este capítulo constituye la primera parte del proceso de validación y se dedica a una validación de los aspectos más fundamentales mediante la aplicación del modelo a casos teóricos y experimentales que sirven de referencia habitual en la validación de modelos de propagación así como con la comparación con modelos semejantes.

Los objetivos principales de este capítulo son, por tanto: 1) evaluar los rangos y limitaciones de aplicación del modelo numérico propuesto, 2) comprobar si realmente el modelo es capaz de considerar los procesos anteriormente citados y 3) sentar las bases para configurar una metodología de uso del modelo que permita su aplicación a nuevos casos de laboratorio o campo.

En los capítulos siguientes, se completará el proceso de validación y el desarrollo de la metodología de uso mediante la aplicación del modelo a los datos experimentales de laboratorio presentados en el capítulo anterior y a datos de campo.

Este capítulo se organiza de la siguiente manera. En primer lugar, se presenta los antecedentes del modelo numérico utilizado en esta Tesis, para después pasar a dar una descripción, enunciando las hipótesis de partida, así como las ecuaciones que resuelve, el esquema numérico, los límites físicos de aplicación y las técnicas de resolución que utiliza. A continuación, se la primera parte de la validación realizada del modelo numérico, comparando éste con casos propuestos en la literatura, además de con un

modelo numérico de características similares. Finalmente, se incluyen las conclusiones de este capítulo, haciendo énfasis en las virtudes y debilidades del modelo encontradas en esta primera fase de validación.

6.2 ANTECEDENTES DEL MODELO NUMERICO

El modelo en cuestión utilizado en este trabajo de Tesis, es el modelo numérico MANOLO, acrónimo de Modelo Avanzado NO Lineal de Ondas que se ha desarrollado en el marco del convenio “Desarrollo de un modelo de propagación de oleaje y agitación portuaria de última generación cuyos derechos de explotación estén bajo control español”.

Este desarrollo se puso en marcha en colaboración entre las Universidades de Cantabria y Cornell, los organismos públicos CEDEX, Puertos de Estado, Ports de la Generalitat y Dirección General de Costas, y las empresas privadas ALATEC, AZTI, INHA, HIDTMA, IBERINSA, INTECSA, SENER y PROINTEC, con el objetivo de desarrollar en España un modelo numérico de propagación del oleaje sobre una malla triangular no estructurada en elementos finitos, capaz de superar algunas de las limitaciones más importantes presentes en los modelos disponibles en el estado del arte.

Este modelo se basa en las ecuaciones modificadas débilmente no lineales y débilmente dispersivas de Boussinesq, Nwogu (1993); Woo & Liu (2004a), y Woo & Liu (2004b).

La elección de este modelo se debe a que el fenómeno de resonancia portuaria presenta características importantes de no linealidad, interacción energética entre las componentes frecuenciales, efectos dispersivos y transitoriedad que se deben de simular con detalle para el buen entendimiento de sus implicaciones sobre la ingeniería, operatividad y explotación portuarias. Este modelo incluye muchos de estos elementos anteriormente no considerados en los modelos existentes en el estado del arte.

A continuación se realiza una descripción de la formulación matemática, las condiciones iniciales y de contorno que utiliza, la técnica de generación de oleaje, el esquema y dominio de resolución, y finalmente el organigrama de resolución.

6.3 DESCRIPCIÓN DEL MODELO

La utilización del modelo numérico MANOLO aplicado al estudio del fenómeno de resonancia, se basa en las capacidades que tiene para resolver los patrones de agitación sobre un dominio numérico con contornos complejos, con la utilización de mallas adaptativas, resolviendo las velocidades y superficie libre en el plano bidimensional, incluyendo los procesos de asomeramiento, refracción, difracción, reflexión y radiación.

Además el modelo numérico MANOLO, incluye en su formulación los procesos de disipación de energía, incluyendo rotura, fricción por fondo y efectos turbulentos.

Finalmente, la elección del modelo en cuestión, y su posible inclusión en el estado del arte de la ingeniería para el estudio de la resonancia portuaria, radica en el hecho de que las ecuaciones de gobierno que utiliza, ofrecen la posibilidad de considerar de manera inherente la interacción entre diferentes componentes frecuenciales del flujo (p. ej. onda larga y onda corta), considerando los efectos dispersivos, y los efectos no lineales que se derivan de la transformación e interacción entre dichas componentes energéticas.

A continuación se realiza una descripción de las ecuaciones que el modelo numérico MANOLO resuelve, definiendo en primer lugar la formulación matemática para la obtención de las ecuaciones de gobierno. En segundo lugar se plantea el esquema numérico de aproximación espacial, partiendo del método de Galerkin en elementos finitos, y se muestran los elementos y las funciones de forma que utiliza. En tercer lugar se presenta el esquema de integración temporal. En cuarto lugar se desarrollan las condiciones de contorno para las paredes reflejantes, la radiación del oleaje hacia el exterior y la generación interna del oleaje. Finalmente, se plantean los procesos de disipación del oleaje, por fondo, por rotura y por mezcla turbulenta.

Esta descripción aparece, de forma detallada, en los informes anuales GIOC (2001) y GIOC (2003), publicados por el GIOC.

6.3.1 Ecuaciones de gobierno

El fundamento teórico del modelo MANOLO se basa en las ecuaciones completamente no lineales y débilmente dispersivas que pueden ser aplicadas tanto en profundidades intermedias como reducidas Liu (1994), Wei *et al.* (1995). A continuación se presenta una breve derivación de las mismas.

La teoría de ondas de Stokes deja de ser válida cuando el número de Ursell, es del orden de la unidad o mayor.

$$Ur = \frac{ka}{(kh)^3} \quad (6.1)$$

Esto sucede muy frecuentemente en profundidades reducidas donde kh es pequeño. Es, por tanto, necesario derivar unas nuevas ecuaciones de gobierno aproximadas, capaces de describir las características de las ondas largas que se propagan en profundidades reducidas.

La nomenclatura a seguir parte de la siguiente adimensionalización de las ecuaciones.

$$x = \frac{x'}{l_o}, \quad y = \frac{y'}{l_o}, \quad z = \frac{z'}{h_o}, \quad t = \frac{\sqrt{gh_o}}{l_o} t', \quad h = \frac{h'}{h_o} \quad (6.2)$$

donde l_o representa una magnitud característica de la longitud horizontal tal como la longitud de onda, y h_o , es una profundidad característica. La escala temporal representa el tiempo que requiere una onda larga para recorrer la distancia l_o . Denominando a_o a la amplitud característica de la onda y considerando que el movimiento oscilatorio es irrotacional se puede definir la superficie libre adimensional η y el potencial de velocidades Φ .

$$\eta = \frac{\eta'}{a_o}, \quad \Phi = \frac{h_o}{a_o l_o \sqrt{gh_o}} \Phi' \quad (6.3)$$

La ecuación de gobierno adimensional y las condiciones de contorno pueden escribirse como:

$$\mu^2 \nabla^2 \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad -h < z < \varepsilon \eta \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \mu^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \varepsilon \nabla \Phi \cdot \nabla \eta \right), \quad \text{en } z = \varepsilon \eta \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\mu^2 \nabla \Phi \cdot \nabla h, \quad \text{en } z = -h \quad (6.6)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \eta \right) + \frac{\varepsilon}{2} \left[(\nabla \Phi)^2 + \frac{1}{\mu^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0, \quad \text{en } z = \varepsilon \eta \quad (6.7)$$

donde $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ es el gradiente horizontal y

$$\varepsilon = \frac{a_o}{h_o} \quad (6.8)$$

$$\mu^2 = \left(\frac{h_o}{l_o} \right)^2 \quad (6.9)$$

representan la no linealidad y la profundidad relativa, respectivamente. Para ondas largas o profundidades muy reducidas se asume generalmente $O(\mu^2) \ll 1$, si la no linealidad es significativa y $O(\varepsilon) \approx O(1)$, el número de Ursell es mayor que uno. Sin embargo, si $O(\varepsilon) \approx O(\mu^2) \ll 1$ el número de Ursell será un número de orden uno. Este caso se conoce como la aproximación de Boussinesq.

El objetivo de esta derivación es reducir el problema originalmente tridimensional a un problema bidimensional en el plano horizontal x - y . Con el fin de conseguir este objetivo, es preciso encontrar la distribución del potencial de velocidades en la dirección vertical z . Con el fin de ilustrar este punto, integremos la ecuación de Laplace (6.4) desde $z = -h$ a $z = \varepsilon \eta$ para obtener:

$$\mu^2 \int_{-h}^{\varepsilon \eta} \nabla^2 \Phi dz + \int_{-h}^{\varepsilon \eta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} dz = 0$$

Si escribimos $\nabla^2\Phi = \nabla \cdot (\nabla\Phi)$ y aplicamos la regla de Leibniz a la primera integral, la ecuación anterior puede expresarse como:

$$\mu^2 \nabla \cdot \int_{-h}^{\varepsilon\eta} \nabla\Phi dz - \left\{ \mu^2 \varepsilon \nabla \eta \cdot \nabla\Phi - \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right\} \Big|_{z=\varepsilon\eta} - \left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \mu^2 \nabla\Phi \cdot \nabla h \right\} \Big|_{z=-h} = 0$$

Utilizando las condiciones de contorno (6.5) y (6.6) en las ecuaciones anteriores se tiene.

$$\nabla \cdot \int_{-h}^{\varepsilon\eta} \nabla\Phi dz + \frac{\partial\eta}{\partial t} = 0 \quad (6.10)$$

La ecuación resultante es exacta e independiente de la coordenada vertical z . Podemos definir un vector de velocidad horizontal integrada en vertical

$$\bar{u} = \frac{1}{h + \varepsilon\eta} \int_{-h}^{\varepsilon\eta} \nabla\Phi dz \quad (6.11)$$

La ecuación (9) se convierte en

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \nabla \cdot [(\varepsilon\eta + h)\bar{u}] = 0 \quad (6.12)$$

que es una ecuación de continuidad exacta para una columna vertical de fluido de sección unidad. Para obtener el desplazamiento de la superficie libre η y la velocidad integrada en vertical \bar{u} , es necesario derivar otra ecuación. Esto se hará formalmente más adelante utilizando el método de las perturbaciones.

Para ondas largas u ondas en profundidades reducidas, se asume que el parámetro μ^2 es pequeño. Sin embargo, el parámetro representativo de la no linealidad, ε , se mantiene de orden uno.

Se utiliza la siguiente perturbación de la solución

$$\Phi(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{2n} \Phi_n(x, y, z, t) \quad (6.13)$$

En esta forma de la solución sólo se incluyen las potencias pares de μ , dado que el parámetro μ^2 aparece en las ecuaciones de gobierno y en las condiciones de contorno. Sustituyendo la forma de la solución, (6.13), en la ecuación de Laplace (6.4) y la condición de contorno (6.6) y manteniendo los dos primeros órdenes se llega a:

Para $O(1)$:

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} = 0, \quad -h < z < \varepsilon \eta \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial z} = 0, \quad z = -h \quad (6.15)$$

Para $O(\mu^2)$:

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} = -\nabla^2 \Phi_0, \quad -h < z < \varepsilon \eta \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = -\nabla \Phi_0 \cdot \nabla h, \quad z = -h \quad (6.17)$$

De (6.14) y (6.15), la solución del orden principal, Φ_0 , es independiente de la coordenada vertical. Por tanto, se puede definir

$$\Phi_0 = \phi_{00}(x, y, t) \quad (6.18)$$

lo que implica que en el orden principal la componente vertical de la velocidad no aparece.

A partir del problema de orden $O(\mu^2)$, se puede integrar la ecuación de la continuidad (6.16) dos veces para obtener

$$\Phi_1(x, y, z, t) = \phi_{10}(x, y, t) + z\phi_{11}(x, y, t) - \frac{z^2}{2}\nabla^2\phi_{00}$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la condición de contorno en el fondo, (16), se obtiene.

$$\phi_{11} = -\nabla \cdot (h\nabla\phi_{00})$$

Consecuentemente

$$\Phi_1 = \phi_{10}(x, y, t) - z\nabla \cdot (h\nabla\phi_{00}) - \frac{z^2}{2}\nabla^2\phi_{00} \quad (6.19)$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = -\nabla \cdot (h\nabla\phi_{00}) - z\nabla^2\phi_{00} \quad (6.20)$$

La velocidad horizontal de segundo orden, $\nabla\Phi_1$, es una función cuadrática en z , mientras que la velocidad vertical es lineal en z .

Hasta el segundo orden en μ , la función potencial se puede expresar como

$$\Phi(x, y, z, t) = \phi_{00} + \mu^2 \left[\phi_{10} - z\nabla \cdot (h\nabla\phi_{00}) - \frac{z^2}{2}\nabla^2\phi_{00} \right] + O(\mu^4) \quad (6.21)$$

Donde tanto ϕ_{00} y ϕ_{10} son incógnitas y deben determinarse a partir de las condiciones de contorno en la superficie. También se puede expresar (6.21) en función de la función potencial en una superficie específica $z = z_\alpha(x, y)$. Expresando:

$$\Phi_\alpha(x, y, t) = \Phi(x, y, z_\alpha(x, y), t)$$

De (6.21) se obtiene:

$$\Phi_\alpha(x, y, t) = \phi_{00} + \mu^2 \left[\phi_{10} - z_\alpha \nabla \cdot (h \nabla \phi_{00}) - \frac{z_\alpha^2}{2} \nabla^2 \phi_{00} \right] + O(\mu^4) \quad (6.22)$$

Restando (6.22) de (6.21) queda:

$$\Phi(x, y, z, t) = \Phi_\alpha + \mu^2 \left[(z_\alpha - z) \nabla \cdot (h \nabla \phi_{00}) - \frac{1}{2} (z_\alpha^2 - z^2) \nabla^2 \phi_{00} \right] + O(\mu^4) \quad (6.23)$$

Dado que $\Phi_\alpha = \phi_{00} + O(\mu^2)$, la ecuación anterior puede escribirse en función de Φ_α como sigue:

$$\Phi(x, y, z, t) = \Phi_\alpha + \mu^2 \left[(z_\alpha - z) \nabla \cdot (h \nabla \Phi_\alpha) - \frac{1}{2} (z_\alpha^2 - z^2) \nabla^2 \Phi_\alpha \right] + O(\mu^4) \quad (6.24)$$

Obsérvese que $z_\alpha(x, y)$ es una superficie dada. Un caso especial es $z_\alpha(x, y) = -h(x, y)$.

El potencial de velocidades correspondiente Φ_α describe el potencial en el fondo.

Sustituyendo (6.23) en la ecuación de continuidad (6.10), se obtiene la siguiente ecuación de continuidad aproximada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot [(\varepsilon \eta + h) \nabla \Phi_\alpha] + \mu^2 \nabla \cdot \left\{ (\varepsilon \eta + h) \nabla \left[z_\alpha (\nabla \cdot h \nabla \Phi_\alpha) + \frac{1}{2} z_\alpha^2 \nabla^2 \Phi_\alpha \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (\varepsilon^2 \eta^2 - h^2) \nabla (\nabla \cdot h \nabla \Phi_\alpha) - \frac{1}{6} (\varepsilon^3 \eta^3 + h^3) \nabla (\nabla^2 \Phi_\alpha) \right\} = O(\mu^4) \end{aligned} \quad (6.25)$$

Se recuerda que el parámetro de no linealidad ε se considera de orden uno en la ecuación anterior.

Sustituyendo (6.23) en la condición dinámica de contorno, (6.7), se transforma en:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t} + \eta + \frac{\varepsilon}{2} (\nabla \Phi_\alpha)^2 + \mu^2 \left\{ (z_\alpha - \varepsilon \eta) \nabla \cdot \left(h \nabla \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} (z_\alpha^2 - \varepsilon^2 \eta^2) \nabla^2 \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t} \right. \\
 & \left. + \varepsilon \nabla \Phi_\alpha \cdot \nabla \left[(z_\alpha - \varepsilon \eta) \nabla \cdot (h \nabla \Phi_\alpha) + \frac{1}{2} (z_\alpha^2 - \varepsilon^2 \eta^2) \nabla^2 \Phi_\alpha \right] \right. \\
 & \left. + \frac{\varepsilon}{2} \left[\nabla \cdot (h \nabla \Phi_\alpha) + \varepsilon \eta \nabla^2 \Phi_\alpha \right]^2 \right\} = O(\mu^4)
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

Las ecuaciones (6.24) y (6.25) constituyen las ecuaciones de gobierno para el desplazamiento de la superficie libre η y el potencial de velocidades Φ_α . Una vez obtenidas éstas, el potencial de velocidades en todo el fluido se puede derivar de (6.23).

Generalmente, es más conveniente expresar las ecuaciones de gobierno en función de un campo de velocidades en lugar de en función del potencial de velocidades. Para ello, se define una componente horizontal de velocidades en $z = z_\alpha(x, y)$ tal que

$$\begin{aligned}
 u_\alpha &= (\nabla \Phi) \Big|_{z=z_\alpha} \\
 &= \nabla \Phi_\alpha + \mu^2 \left[\nabla z_\alpha \nabla \cdot (h \nabla \Phi_\alpha) + z_\alpha \nabla z_\alpha \nabla^2 \Phi_\alpha \right] + O(\mu^4)
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

esto es

$$\nabla \Phi_\alpha = u_\alpha - \mu^2 \left[\nabla z_\alpha \nabla \cdot (h u_\alpha) + z_\alpha \nabla z_\alpha \nabla \cdot u_\alpha \right] + O(\mu^4) \tag{6.28}$$

Para $\nabla \Phi_\alpha = u_\alpha + O(\mu^2)$. Sustituyendo (6.27) en la ecuación de continuidad (6.24) se llega a

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot \left[(\varepsilon \eta + h) u_\alpha \right] + \mu^2 \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{z_\alpha^2}{2} - \frac{h^2}{6} \right) h \nabla (\nabla \cdot u_\alpha) + \left(z_\alpha + \frac{h}{2} \right) h \nabla [\nabla \cdot (h u_\alpha)] \right\} \\
 & + \mu^2 \varepsilon \nabla \cdot \left\{ \eta \left[\left(z_\alpha - \frac{1}{2} \varepsilon \eta \right) \nabla (\nabla \cdot h u_\alpha) + \frac{1}{2} \left(z_\alpha^2 - \frac{1}{3} \varepsilon^2 \eta^2 \right) \nabla (\nabla \cdot u_\alpha) \right] \right\} = O(\mu^4)
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

Aplicando el gradiente horizontal de (6.25) y sustituyendo (6.27) en la ecuación resultante, se llega a

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \nabla \eta + \frac{\varepsilon}{2} \nabla |u_\alpha|^2 + \mu^2 \left\{ z_\alpha \nabla \left[\nabla \cdot \left(h \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} \right) \right] + \frac{1}{2} z_\alpha^2 \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} \right) \right\} + \\
 & + \mu^2 \varepsilon \left\{ \nabla \cdot \frac{1}{2} z_\alpha^2 u_\alpha \cdot \nabla (\nabla \cdot u_\alpha) + z_\alpha u_\alpha \cdot \nabla (\nabla \cdot h u_\alpha) + \frac{1}{2} [\nabla \cdot (h u_\alpha)]^2 - \eta \nabla \cdot \left(h \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} \right) \right\} \\
 & + \mu^2 \varepsilon^2 \nabla \left\{ \eta (\nabla \cdot h u_\alpha) (\nabla \cdot u_\alpha) - \frac{\eta^2}{2} \nabla \cdot \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} \right) - u_\alpha \cdot \nabla [\eta \nabla \cdot (h u_\alpha)] \right\} \\
 & + \mu^2 \varepsilon^3 \left\{ \nabla \cdot \frac{1}{2} \eta^2 (\nabla \cdot u_\alpha)^2 - u_\alpha \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} \eta^2 \nabla \cdot u_\alpha \right) \right\} = O(\mu^4)
 \end{aligned} \tag{6.30}$$

Una vez más (6.28) y (6.29) son las ecuaciones de gobierno para η y u_α para un ε arbitrario.

En muchas circunstancias la no linealidad y la dispersión frecuencial son del mismo orden de magnitud. En otras palabras $O(\varepsilon) \approx O(\mu^2) \ll 1$

Las ecuaciones generales de onda larga (6.28) y (6.29) pueden simplificarse como

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot [(\varepsilon \eta + h) u_\alpha] + \mu^2 \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{z_\alpha^2}{2} - \frac{h^2}{6} \right) h \nabla (\nabla \cdot u_\alpha) + \left(z_\alpha + \frac{h}{2} \right) h \nabla [\nabla \cdot (h u_\alpha)] \right\} \\
 & = O(\mu^2 \varepsilon, \mu^4)
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \nabla \eta + \frac{\varepsilon}{2} \nabla |u_\alpha|^2 + \mu^2 \left\{ z_\alpha \nabla \left[\nabla \cdot \left(h \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} \right) \right] + \frac{1}{2} z_\alpha^2 \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} \right) \right\} = O(\mu^2 \varepsilon, \mu^4) \tag{6.32}$$

Estas ecuaciones son conocidas como las ecuaciones de Boussinesq para ondas largas débilmente no lineales y dispersivas. Se pueden derivar diferentes formulaciones de las ecuaciones de Boussinesq según la especificación de $z_\alpha(x, y)$. Por ejemplo, si $z_\alpha = 0$, el vector horizontal de velocidades, $u_\alpha = u_0$, se evalúa en el nivel en reposo, $z = z_\alpha = 0$.

Las correspondientes ecuaciones de Boussinesq se convierten en

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot [(\varepsilon \eta + h) u_0] + \mu^2 \nabla \cdot \left\{ \frac{h^2}{2} \nabla (\nabla \cdot (h u_0)) - \frac{h^3}{6} \nabla [\nabla \cdot (h u_0)] \right\} = O(\mu^2 \varepsilon, \mu^4) \tag{6.33}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + \nabla \eta + \frac{\varepsilon}{2} \nabla |u_0|^2 = O(\mu^2 \varepsilon, \mu^4) \tag{6.34}$$

Por otro lado, si $z_\alpha = -h$, el vector horizontal de velocidades $u_\alpha = u_b$ representa la velocidad horizontal en el fondo. Las ecuaciones de Boussinesq se transforman en

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot [(\varepsilon \eta + h)u_b] + \mu^2 \nabla \cdot \left\{ \frac{h^3}{3} \nabla (\nabla \cdot u_b) - \frac{h^2}{2} [\nabla \cdot (hu_b)] \right\} = O(\mu^2 \varepsilon, \mu^4) \quad (6.35)$$

$$\frac{\partial u_b}{\partial t} + \nabla \eta + \frac{\varepsilon}{2} \nabla |u_b|^2 + \mu^2 \left\{ h^2 \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\partial u_b}{\partial t} \right) - h \nabla \left(\nabla \cdot \left(h \frac{\partial u_b}{\partial t} \right) \right) \right\} = O(\mu^2 \varepsilon, \mu^4) \quad (6.36)$$

Otra formulación bastante común de las ecuaciones de Boussinesq se expresa en función de la velocidad horizontal integrada en vertical definida en (6.11). Para obtener la forma general de las ecuaciones de Boussinesq, es necesario en primer lugar encontrar la relación entre u_α y \bar{u} .

Sustituyendo (6.23) en (6.11) se llega a

$$\bar{u} = u_\alpha + \mu^2 \left\{ \left(\frac{h}{2} + z_\alpha \right) \nabla [\nabla \cdot (hu_\alpha)] + \left(\frac{z_\alpha^2}{2} - \frac{h^2}{6} \right) \nabla (\nabla \cdot u_\alpha) \right\} + O(\mu^2 \varepsilon, \mu^4) \quad (6.37)$$

En donde se ha utilizado (6.26). Sustituyendo la ecuación anterior en (6.31) y (6.32), se llega a:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot [(\varepsilon \eta + h)\bar{u}] = 0 \quad (6.38)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \eta + \frac{\varepsilon}{2} \nabla |\bar{u}|^2 + \mu^2 \left\{ \frac{h^2}{6} \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) - \frac{h}{2} \nabla \left(\nabla \cdot \left(h \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) \right) \right\} = O(\mu^2 \varepsilon, \mu^4) \quad (6.39)$$

Es necesario hacer constar que la ecuación de continuidad (6.38) en función de la velocidad integrada en vertical es exacta como se muestra en (6.12).

Todas estas ecuaciones de Boussinesq tienen la misma precisión dado que sus errores de truncamiento son de $O(\mu^2\varepsilon, \mu^4)$. Se pueden obtener muchas otras formulaciones diferentes reemplazando los términos de orden superior, $O(\mu^2)$, por una relación de orden inferior.

Por ejemplo, en las ecuaciones de cantidad de movimiento se puede sustituir la derivada temporal del vector de velocidad por el gradiente horizontal negativo del desplazamiento de la superficie libre sin afectar a la exactitud de la ecuación resultante. Sin embargo, la ecuación de la dispersión resultante para cada una de las formulaciones planteadas difiere considerablemente y variará el rango de aplicación de dichas ecuaciones en términos de μ^2 .

Con el fin de examinar la relación de la dispersión lineal para diferentes formulaciones de las ecuaciones de Boussinesq, consideremos el caso de fondo constante. La forma linealizada de las ecuaciones de Boussinesq (6.31) y (6.32) se convierte en:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \nabla \cdot u_\alpha + \mu^2 \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) h^3 \nabla^2 (\nabla \cdot u_\alpha) = 0 \quad (6.40)$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \nabla \eta + \mu^2 \alpha h^2 \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} \right) = 0 \quad (6.41)$$

en donde

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{z_\alpha}{h} \right)^2 + \frac{z_\alpha}{h} \quad (6.42)$$

y z_α se ha asumido constante. Obsérvese que si $z_\alpha = 0, \alpha = 0$, y si $z_\alpha = -h, \alpha = -0.5$.

Considérese una onda progresiva de pequeña amplitud en la dirección $-x$

$$\eta = a_o \exp[i(kx - \omega t)] \quad (6.43)$$

$$u_\alpha = b_o \exp[i(kx - \omega t)] \quad (6.44)$$

Donde a_0 y b_0 son constantes. Sustituyendo las ecuaciones anteriores en las ecuaciones de gobierno, se llega a que:

$$\begin{bmatrix} -i\omega & ikh - i\mu^2 \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) k^3 h^3 \\ ik & -i\omega + i\mu^2 \alpha k^2 h^2 \omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{Bmatrix} = 0 \quad (6.45)$$

que es un sistema de ecuaciones homogéneas para a_0 y b_0 . Para garantizar la existencia de soluciones para a_0 y b_0 diferentes de la trivial, el determinante de la ecuación anterior debe ser nulo, es decir:

$$\omega^2 (1 - \alpha \mu^2 k^2 h^2) - k^2 h \left[1 - \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \mu^2 k^2 h^2 \right] = 0$$

o

$$\frac{\omega^2}{k^2} = C^2 = \left[\frac{1 - \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \mu^2 k^2 h^2}{1 - \alpha \mu^2 k^2 h^2} \right] h \quad (6.46)$$

que nos da la celeridad. Cuando el término a la derecha es negativo, ω o k se convierten en constantes imaginarias. Por tanto, el sistema crece exponencialmente en el tiempo o en el espacio. Por ejemplo, para $\alpha = 0$

$$C^2 = \left[1 - \frac{1}{3} \mu^2 k^2 h^2 \right] h \quad (6.47)$$

Esta ecuación representa la relación de dispersión para la ecuación de Boussinesq linealizada si se emplea en la formulación la velocidad horizontal en el nivel en reposo. El sistema se vuelve inestable cuando

$$\mu kh > \sqrt{3} \quad (6.48)$$

condición que puede darse para ondas muy cortas. Para $\alpha = -0.5$,

$$C^2 = \frac{1 + \frac{1}{6}\mu^2 k^2 h^2}{1 + \frac{1}{2}\mu^2 k^2 h^2} \quad (6.49)$$

que es siempre positivo. Por tanto, las ecuaciones de Boussinesq, expresadas en función de la velocidad horizontal en el fondo, tienen mejores características frente a la inestabilidad.

Las ecuaciones de gobierno, (6.29) y (6.29), pueden expresarse de la siguiente forma compacta (Liu (1994); Wei *et al.* (1995)).

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot M = 0 \quad (6.50)$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \varepsilon(u_\alpha \cdot \nabla)u_\alpha + \nabla \eta + \mu^2 V_1 + \varepsilon \mu^2 V_2 = O(\mu^4) \quad (6.51)$$

en donde

$$M = M_1 + M_2 \quad (6.52)$$

$$M_1 = (h + \varepsilon \eta)u_\alpha \quad (6.53)$$

$$M_2 = \mu^2 (h + \varepsilon \eta) \left\{ \left[\frac{1}{2} z_\alpha^2 - \frac{1}{6} (h^2 - \varepsilon \eta h + (\varepsilon \eta)^2) \right] \nabla (\nabla \cdot u_\alpha) + \left[z_\alpha + \frac{1}{2} (h - \varepsilon \eta) \right] \nabla (\nabla \cdot (h u_\alpha)) \right\} + O(\mu^4) \quad (6.54)$$

$$V_1 = \frac{1}{2} z_\alpha^2 \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} \right) + z_\alpha \nabla \left(\nabla \cdot \left(h \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} \right) \right) - \nabla \left[\frac{1}{2} (\varepsilon \eta)^2 \nabla \cdot \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} \right) + \varepsilon \eta \nabla \cdot \left(h \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} \right) \right] \quad (6.55)$$

$$V_2 = \nabla \left[(z_\alpha - \varepsilon \eta) (u_\alpha \cdot \nabla) (\nabla \cdot h u_\alpha) + \frac{1}{2} (z_\alpha^2 - (\varepsilon \eta)^2) (u_\alpha \cdot \nabla) (\nabla \cdot u_\alpha) + \frac{1}{2} (\nabla \cdot (h u_\alpha) + \varepsilon \eta \nabla \cdot u_\alpha)^2 \right] \quad (6.56)$$

Estas ecuaciones son válidas para modelar ondas de amplitud finita con efectos débilmente dispersivos. Mejorando las características de la dispersión lineal de estas

ecuaciones considerando un valor adecuado de z_α , estas ecuaciones pueden ser utilizadas en profundidades intermedias (p.e., Nwogu (1993), Chen & Liu (1995)). Por ejemplo, Chen & Liu (1995) sugieren un valor óptimo de z_α de aproximadamente -0.52 h. Es necesario hacer constar que incluir los efectos de dispersión frecuencial de orden superior y los efectos no lineales da lugar a la aparición de derivadas espaciales de tercer orden en la ecuación de conservación de la masa, $\nabla \cdot M_2$, y del momento, $\varepsilon \mu^2 V_2$, respectivamente. A la hora de desarrollar algoritmos numéricos, es necesario prestar especial atención a estas derivadas de tercer orden.

Una vez obtenido el vector de velocidades horizontales u_α el perfil vertical de las componentes de la velocidad puede expresarse como

$$u = u_\alpha + \mu^2 \left\{ (z_\alpha - z) \nabla [\nabla \cdot (h u_\alpha)] + \frac{1}{2} (z_\alpha^2 - z^2) \nabla (\nabla \cdot u_\alpha) \right\} + O(\mu^4) \quad (6.57)$$

$$w = -\mu^2 [\nabla \cdot (h u_\alpha) + z \nabla \cdot u_\alpha] + O(\mu^4) \quad (6.58)$$

donde w es la componente vertical del campo de velocidades.

A continuación, se presentan las ecuaciones de gobierno bidimensionales para ondas débilmente no lineales y débilmente dispersivas

Inicialmente se va a considerar con detalle únicamente el caso de ondas débilmente no lineales. Si asumimos que $O(\varepsilon) \cong O(\mu^2) \leq 1$ en las ecuaciones (6.50) a (6.56), las ecuaciones de gobierno se reducen a las siguientes ecuaciones de Boussinesq modificadas:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot [(h + \varepsilon \eta) u_\alpha] + \mu^2 \nabla \cdot [C_1 h^3 \nabla (\nabla \cdot u_\alpha) + C_3 h^2 \nabla (\nabla \cdot (h u_\alpha))] = 0 \quad (6.59)$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \nabla \eta + \frac{\varepsilon}{2} \nabla (u_\alpha \cdot u_\alpha) + \mu^2 \left[C_2 h^2 \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} \right) + \beta h \nabla \left(\nabla \cdot \left(h \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} \right) \right) \right] \quad (6.60)$$

Donde

$$C_1 = \frac{1}{2} \left(\beta^2 - \frac{1}{3} \right), \quad C_2 = \frac{\beta^2}{2}, \quad C_3 = \beta + \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{z_\alpha}{h} \quad (6.61)$$

Obsérvese que las derivadas espaciales de tercer orden aparecen en la ecuación de continuidad pero no en las ecuaciones del momento. Debido a la presencia de derivadas espaciales de tercer orden, el método de los elementos finitos lineal de Galerkin no puede ser aplicado directamente. Con el fin de reducir el orden de las derivadas espaciales de mayor orden, se introducen variables auxiliares, tal que

$$E = (E_1, E_2) := \nabla(\nabla \cdot u_\alpha); \quad R_1 := \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}; \quad R_2 := \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}; \quad R_3 := \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \quad (6.62)$$

Con estas nuevas variables las ecuaciones de gobierno pueden re-escribirse con derivadas de un orden inferior tal que:

$$\begin{aligned} & \dot{\eta} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \varepsilon \eta) u_\alpha] + \frac{\partial}{\partial y} [(h + \varepsilon \eta) v_\alpha] \\ & + \mu^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[C_1 h^3 E_1 + C_3 h^2 \left(2 \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + u_\alpha R_1 + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + v_\alpha R_3 + \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} + h E_1 \right) \right] \\ & + \mu^2 \frac{\partial}{\partial y} \left[C_1 h^3 E_2 + C_3 h^2 \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} + u_\alpha R_3 + 2 \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + v_\alpha R_2 + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + h E_2 \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.63)$$

$$\begin{aligned} & u_\alpha + \mu^2 \left[C_2 h^2 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} + \beta h \frac{\partial^2 (h u_\alpha)}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_\alpha^2 + v_\alpha^2) \right] \\ & + \mu^2 \left[C_2 h^2 \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x \partial y} + \beta h \frac{\partial^2 (h v_\alpha)}{\partial x \partial y} \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.64)$$

$$\begin{aligned} & v_\alpha + \mu^2 \left[C_2 h^2 \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x^2} + \beta h \frac{\partial^2 (h v_\alpha)}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_\alpha^2 + v_\alpha^2) \right] \\ & + \mu^2 \left[C_2 h^2 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x \partial y} + \beta h \frac{\partial^2 (h u_\alpha)}{\partial x \partial y} \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.65)$$

$$E_1 - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} \right] = 0 \quad (6.66)$$

$$E_2 - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x} \right] = 0 \quad (6.67)$$

donde el punto sobre la variable indica diferenciación parcial con respecto al tiempo. Obsérvese que se ha logrado que la derivada espacial de mayor orden sea de segundo orden a expensas de introducir una ecuación diferencial adicional en el sistema. R_1, R_2, R_3 serán obtenidas a partir de la batimetría antes de que se comience la integración en el tiempo dado que R_1, R_2 son invariantes en el tiempo.

El tratamiento de \dot{v}_α en la ecuación (6.63) y \dot{u}_α en la ecuación (6.64) se explicará con detalle en la sección relativa a la integración temporal.

6.3.2 Esquema numérico de aproximación espacial

Uno de los mayores esfuerzos en la elaboración del modelo MANOLO ha residido en el desarrollo de un modelo en elementos finitos eficiente y preciso para resolver las ecuaciones (6.59) y (6.60) para fondo variable en un dominio irregular. La selección adecuada de un esquema de aproximación espacial y de un esquema de integración temporal se va a discutir a continuación.

Método de Galerkin en elementos finitos

Para el desarrollo del método de los elementos finitos tipo Galerkin es necesario que los residuos ponderados de las ecuaciones de gobierno sean nulos, es decir, las ecuaciones (6.63), (6.64), (6.65), (6.66) y (6.67) se multiplican por la función de ponderación $W(x,y)$ y se integran en el dominio espacial Ω . A continuación se presenta la forma débil de las ecuaciones realizando la integración por partes e introduciendo integrales en el contorno Γ .

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\Omega} W \dot{\eta} dx dy = \\
 & \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial W}{\partial x} \left[(h + \varepsilon \eta) u_{\alpha} + \mu^2 \left(C_6 h^3 E_1 + C_3 h^2 \left(2 \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + u_{\alpha} R_1 + \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + v_{\alpha} R_3 + \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right) \right] \right. \\
 & \left. + \frac{\partial W}{\partial y} \left[(h + \varepsilon \eta) v_{\alpha} + \mu^2 \left(C_6 h^3 E_2 + C_3 h^2 \left(\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} + u_{\alpha} R_3 + 2 \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + v_{\alpha} R_2 + \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right) \right] \right\} dx dy \\
 & - \int_{\Gamma} \left\{ n_x W \left[(h + \varepsilon \eta) u_{\alpha} + \mu^2 \left(C_6 h^3 E_1 + C_3 h^2 \left(2 \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + u_{\alpha} R_1 + \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + v_{\alpha} R_3 + \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right) \right] \right. \\
 & \left. + n_y W \left[(h + \varepsilon \eta) v_{\alpha} + \mu^2 \left(C_6 h^3 E_2 + C_3 h^2 \left(\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} + u_{\alpha} R_3 + 2 \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + v_{\alpha} R_2 + \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right) \right] \right\} d\Gamma
 \end{aligned} \tag{6.68}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\Omega} \left\{ W - \mu^2 \left[W \left(C_4 \frac{\partial h^2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \beta \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{\partial W}{\partial x} \left(C_5 h^2 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x} \right) \right] \right\} \dot{u}_{\alpha} dx dy \\
 & \iint_{\Omega} \left\{ \mu^2 W \left[C_2 \frac{\partial h^2}{\partial x} \frac{\partial \dot{v}_{\alpha}}{\partial y} + \beta \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial (h \dot{v}_{\alpha})}{\partial y} \right] + \frac{\partial W}{\partial x} \left[\eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_{\alpha}^2 + v_{\alpha}^2) + \mu^2 \left(C_2 h^2 \frac{\partial \dot{v}_{\alpha}}{\partial y} + \beta h \frac{\partial (h \dot{v}_{\alpha})}{\partial x} \right) \right] \right\} dx dy \\
 & - \int_{\Gamma} n_x W \left\{ \eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_{\alpha}^2 + v_{\alpha}^2) + \mu^2 \left[C_2 h^2 \left(\frac{\partial \dot{u}_{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}_{\alpha}}{\partial y} \right) + \beta h \left(\frac{\partial h \dot{u}_{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial h \dot{v}_{\alpha}}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Gamma
 \end{aligned} \tag{6.69}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\Omega} \left\{ W - \mu^2 \left[W \left(C_4 \frac{\partial h^2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \beta \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{\partial W}{\partial y} \left(C_5 h^2 \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial h^2}{\partial y} \right) \right] \right\} \dot{v}_{\alpha} dx dy \\
 & \iint_{\Omega} \left\{ \mu^2 W \left[C_2 \frac{\partial h^2}{\partial y} \frac{\partial \dot{u}_{\alpha}}{\partial x} + \beta \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial (h \dot{u}_{\alpha})}{\partial x} \right] + \frac{\partial W}{\partial y} \left[\eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_{\alpha}^2 + v_{\alpha}^2) + \mu^2 \left(C_2 h^2 \frac{\partial \dot{u}_{\alpha}}{\partial y} + \beta h \frac{\partial (h \dot{u}_{\alpha})}{\partial x} \right) \right] \right\} dx dy \\
 & - \int_{\Gamma} n_y W \left\{ \eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_{\alpha}^2 + v_{\alpha}^2) + \mu^2 \left[C_2 h^2 \left(\frac{\partial \dot{u}_{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}_{\alpha}}{\partial y} \right) + \beta h \left(\frac{\partial h \dot{u}_{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial h \dot{v}_{\alpha}}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Gamma
 \end{aligned} \tag{6.70}$$

$$\iint_{\Omega} W E_1 dx dy = - \iint_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial x} \left(\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial y} \right) dx dy - \int_{\Gamma} n_x W \left(\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{\alpha}}{\partial y} \right) d\Gamma
 \tag{6.71}$$

$$\iint_{\Omega} W E_2 dx dy = - \iint_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial y} \left(\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial y} \right) dx dy - \int_{\Gamma} n_y W \left(\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{\alpha}}{\partial y} \right) d\Gamma
 \tag{6.72}$$

en donde

$$C_4 = \frac{1}{2}\beta(\beta+1), C_5 = \beta\left(\frac{1}{2}\beta+1\right), C_6 = \frac{\beta^2}{2} + \beta + \frac{1}{3}$$

(6.73)

y n_x y n_y son las componentes x e y del vector normal, \mathbf{n} , al contorno, respectivamente.

Las variables dependientes se aproximan como una combinación lineal de funciones de forma $\psi_j((x,y))$ y los correspondientes valores nodales de las variables dependientes como:

$$F(x, y, n, \Delta t) \approx \sum_{j=1}^{ND} \psi_j(x, y) \{F\}_j^n \quad (6.74)$$

$$E(x, y, n, \Delta t) \approx \sum_{j=1}^{ND} \psi_j(x, y) \{E\}_j^n \quad (6.75)$$

donde $F = \{\eta, u_\alpha, v_\alpha\}$, $E = \{E_1, E_2\}$, ' ND ' es el número total de nodos en el dominio y $n = 0, 1, 2, \dots$, representa los pasos de tiempo. Análogamente, la profundidad y las derivadas espaciales segundas de la profundidad se aproximan también con la misma familia de funciones de forma, es decir,

$$h(x, y) \approx \sum_{j=1}^{ND} \psi_j(x, y) \{h\}_j \quad (6.76)$$

$$R_1(x, y) \approx \sum_{j=1}^{ND} \psi_j(x, y) \{R_1\}_j \quad (6.77)$$

$$R_2(x, y) \approx \sum_{j=1}^{ND} \psi_j(x, y) \{R_2\}_j \quad (6.78)$$

$$R_3(x, y) \approx \sum_{j=1}^{ND} \psi_j(x, y) \{R_3\}_j \quad (6.79)$$

En este caso se aplica el método de los elementos finitos de Galerkin de tal modo que la función de ponderación $W(x, y)$ es la misma que la función de forma ($\psi(x, y)$).

Sustituyendo (6.74) y (6.75) en las formas débiles (6.66) a (6.72), se obtienen las siguientes ecuaciones matriciales:

$$\sum_{j=1}^{ND} [M^\eta]_{ij} \{\dot{\eta}\}_j^n = \{f^\eta\}_i^n + \{q^\eta\}_i^n \quad (6.80)$$

$$\sum_{j=1}^{ND} [M^u]_{ij} \{\dot{u}\}_j^n = \{f^u\}_i^n + \{q^u\}_i^n \quad (6.81)$$

$$\sum_{j=1}^{ND} [M^v]_{ij} \{\dot{v}\}_j^n = \{f^v\}_i^n + \{q^v\}_i^n \quad (6.82)$$

$$\sum_{j=1}^{ND} [M^{E_1}]_{ij} \{E_1\}_j^n = \{f^{E_1}\}_i^n + \{q^{E_1}\}_i^n \quad (6.83)$$

$$\sum_{j=1}^{ND} [M^{E_2}]_{ij} \{E_2\}_j^n = \{f^{E_2}\}_i^n + \{q^{E_2}\}_i^n \quad (6.84)$$

donde $i = 1, 2, \dots, ND$ y $\dot{F} = \{\dot{\eta}, \dot{u}_\alpha, \dot{v}_\alpha\}$. El punto sobre las variables en las ecuaciones (6.79) a (6.83) representa diferenciación en el tiempo. Las expresiones detalladas para estas matrices y vectores se encuentran en el informe anual, GIOC (2001).

Elementos y funciones de forma

Para realizar la aproximación espacial en dos dimensiones mediante el método de elementos finitos, el dominio computacional Ω se divide en un conjunto de elementos que no se superponen, empleándose funciones lineales triangulares de tres nodos.

Es conocido que los elementos triangulares son muy adecuados para aproximar cualquier dominio y contorno de forma arbitraria. Los nodos se definen en los vértices de los triángulos con un total de 'ND' nodos en el dominio. La función de interpolación de Lagrange se utiliza como función de forma cumpliendo la siguiente propiedad en cada nodo,

$$\psi_i(x_i, y_j) = \delta_{ij} \quad (6.85)$$

donde δ_{ij} es la función delta de Dirac.

En cada elemento triangular (Ω_e) habrá tres funciones de forma locales ($\psi_1^e, \psi_2^e, \psi_3^e$) que se muestran en la Figura 6.1.

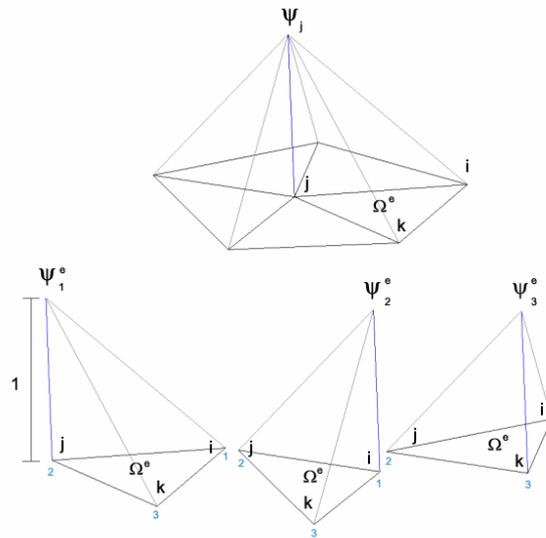


Figura 6.1 Funciones de forma global y local, tomado de GIOC (2001)

6.3.3 Esquema de integración temporal

El esquema de integración temporal debe ser suficientemente preciso como para que los errores de truncamiento no den lugar a ningún tipo de dispersión o disipación numérica.

En esta sección se describe el esquema predictor-corrector Adams-Bashforth-Moulton utilizado para integrar (6.80 a 6.84). Este esquema está muy extendido entre los esquemas de integración temporal.

El procedimiento se basa fundamentalmente en un método predictor-corrector de tamaño de paso variable que usa el método de Adams -Bashforth de cuatro pasos como predictor y el método de Adams-Moulton de tres pasos como corrector.

Para cada paso de tiempo estimado (predictor), la solución se inserta en el término a la derecha de la ecuación de gobierno para encontrar la solución actualizada o corregida (corrector). La solución actualizada se inserta de nuevo en el término a la derecha de la ecuación de gobierno con el fin de encontrar una nueva solución actualizada. Esta

operación se repite hasta que la diferencia entre dos soluciones actualizadas sucesivas es menor que un error de tolerancia, determinado, Lapidus & Seinfeld (1974).

En el presente modelo, el esquema utilizado para el paso predictor corresponde al Adams-Bashforth de tercer orden.

$$P[\eta]: [M^\eta]_{ij} \frac{\{\eta\}_{j(0)}^{n+1} - \{\eta\}_j^n}{\Delta t} = \frac{1}{12} [23\{f^\eta\}_i^n - 16\{f^\eta\}_i^{n-1} + 5\{f^\eta\}_i^{n-2}] \quad (6.86)$$

$$P[u_\alpha]: [M^u]_{ij} \frac{\{u\}_{j(0)}^{n+1} - \{u\}_j^n}{\Delta t} = \frac{1}{12} [23\{f^u\}_i^n - 16\{f^u\}_i^{n-1} + 5\{f^u\}_i^{n-2}] \quad (6.87)$$

$$P[v_\alpha]: [M^v]_{ij} \frac{\{v\}_{j(0)}^{n+1} - \{v\}_j^n}{\Delta t} = \frac{1}{12} [23\{f^v\}_i^n - 16\{f^v\}_i^{n-1} + 5\{f^v\}_i^{n-2}] \quad (6.88)$$

Aquí es necesario destacar que los vectores de forzamiento, $\{f^u\}$ y $\{f^v\}$ contienen derivadas temporales de la velocidad ($\{\dot{v}\}$ en $\{f^u\}$ y $\{\dot{u}\}$ en $\{f^v\}$). Para la etapa predictor, estas derivadas se evalúan como:

$$\{\dot{r}\}_i^n = \frac{1}{2\Delta t} [3\{r\}_i^n - 4\{r\}_i^{n-1} + \{r\}_i^{n-2}] + O(\Delta t^2) \quad (6.89)$$

$$\{\dot{r}\}_i^{n-1} = \frac{1}{2\Delta t} [\{r\}_i^n - \{r\}_i^{n-2}] + O(\Delta t^2) \quad (6.90)$$

$$\{\dot{r}\}_i^{n-2} = \frac{-1}{2\Delta t} [3\{r\}_i^{n-2} - 4\{r\}_i^{n-1} + \{r\}_i^n] + O(\Delta t^2) \quad (6.91)$$

donde $\{r\}$ representa $\{u\}$ o $\{v\}$.

Resolviendo las ecuaciones (6.86), (6.87) y (6.88) se obtienen soluciones para los primeros valores de la predicción, $\{\eta\}_{j(0)}^{n+1}$, $\{u\}_{j(0)}^{n+1}$ y $\{v\}_{j(0)}^{n+1}$ en el nodo j -ésimo y el paso temporal $(n+1)$. Utilizando estos valores, la variable auxiliar se actualiza en el paso temporal $(n+1)$ resolviendo las ecuaciones (6.83) y (6.84); es decir,

$$\{E_1\}_{j(0)}^{n+1} = [M^{E_1}]_{ij}^{-1} \{f^{E_1}\}_{i(0)}^{n+1} \quad (6.92)$$

$$\{E_2\}_{j(0)}^{n+1} = [M^{E_2}]_{ij}^{-1} \{f^{E_2}\}_{i(0)}^{n+1} \quad (6.93)$$

Para actualizar los vectores de forzamiento en la etapa "corrector", los términos con derivada temporal en los vectores de forzamiento son evaluados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \{\dot{r}\}_{i(0)}^{n+1} &= \frac{1}{6\Delta t} \left[11\{r\}_{i(0)}^{n+1} - 18\{r\}_i^n + 9\{r\}_i^{n-1} - 2\{r\}_i^{n-2} \right] + O(\Delta t^3) \\ \{\dot{r}\}_{i(0)}^n &= \frac{1}{6\Delta t} \left[2\{r\}_{i(0)}^{n+1} - 3\{r\}_i^n - 6\{r\}_i^{n-1} + \{r\}_i^{n-2} \right] + O(\Delta t^3) \\ \{\dot{r}\}_{i(0)}^{n-1} &= \frac{1}{6\Delta t} \left[-\{r\}_{i(0)}^{n+1} + 6\{r\}_i^n - 3\{r\}_i^{n-1} - 2\{r\}_i^{n-2} \right] + O(\Delta t^3) \\ \{\dot{r}\}_{i(0)}^{n-2} &= \frac{1}{6\Delta t} \left[2\{r\}_{i(0)}^{n+1} - 9\{r\}_i^n + 18\{r\}_i^{n-1} - 11\{r\}_i^{n-2} \right] + O(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (6.94)$$

Una vez que los vectores de forzamiento han sido actualizados hasta el paso temporal $(n+1)$; es decir, $\{f^\eta\}_{i(0)}^{n+1}$, $\{f^u\}_{i(0)}^{n+1}$ y $\{f^v\}_{i(0)}^{n+1}$, las soluciones correctas se obtienen aplicando el método corrector de cuarto orden de Adams-Moulton (Lapidus & Seinfeld (1974)).

El consiguiente procedimiento de iteración se explica a continuación. Para obtener el s -ésimo valor corregido para $\{\eta\}_{j(s)}^{n+1}$, donde s especifica el número de iteraciones ($s=1, 2, \dots$), es necesario integrar la ecuación de continuidad de la manera siguiente:

$$C[\eta]: \{\eta\}_{j(s)}^{n+1} = \{\eta\}_j^n + \frac{\Delta t}{24} [M^\eta]_{ij}^{-1} \left(9\{f^\eta\}_{i(s-1)}^{n+1} + 19\{f^\eta\}_i^n - 5\{f^\eta\}_i^{n-1} + \{f^\eta\}_i^{n-2} \right) \quad (6.95)$$

Utilizando $\{\eta\}_{j(s)}^{n+1}$, $\{u\}_{j(s-1)}^{n+1}$ y $\{v\}_{j(s-1)}^{n+1}$, se actualiza el vector de forzamiento $\{f^u\}_{i(s-1)}^{n+1}$. La ecuación de conservación del momento se puede integrar como

$$C[u_\alpha]: \{u\}_{j(s)}^{n+1} = \{u\}_j^n + \frac{\Delta t}{24} [M^u]_{ij}^{-1} \left(9\{f^u\}_{i(s-1)}^{n+1} + 19\{f^u\}_i^n - 5\{f^u\}_i^{n-1} + \{f^u\}_i^{n-2} \right) \quad (6.96)$$

Análogamente, para $\{\eta\}_{j(s)}^{n+1}$, $\{u\}_{j(s-1)}^{n+1}$ y $\{v\}_{j(s-1)}^{n+1}$, el vector de forzamiento $\{f^v\}_{i(s-1)}^{n+1}$ se actualiza y la ecuación del momento se integra como

$$C[v_a]: \{v\}_{j(s)}^{n+1} = \{v\}_j^n + \frac{\Delta t}{24} [M^v]_{ij}^{-1} \left(9\{f^v\}_{i(s-1)}^{n+1} + 19\{f^v\}_i^n - 5\{f^v\}_i^{n-1} + \{f^v\}_i^{n-2} \right)$$

(6.97)

Si se requiere el siguiente paso “corrector”, los vectores de forzamiento de las variables auxiliares $\{f^{E_1}\}_{i(s)}^{n+1}$ y $\{f^{E_2}\}_{i(s)}^{n+1}$ se actualizan utilizando $\{u\}_{j(s)}^{n+1}$ y $\{v\}_{j(s)}^{n+1}$ y las ecuaciones (92) se resuelven para $\{E_1\}_{j(s)}^{n+1}$ y $\{E_2\}_{j(s)}^{n+1}$ respectivamente.

Lo errores relativos entre dos pasos de corrección consecutivos se definen como

$$\Delta e_\eta = \max \left(\frac{\{\eta\}_{j(s)}^{n+1} - \{\eta\}_{j(s-1)}^{n+1}}{\{\eta\}_{j(s)}^{n+1}} \right)$$

$$\Delta e_u = \max \left(\frac{\{u\}_{j(s)}^{n+1} - \{u\}_{j(s-1)}^{n+1}}{\{u\}_{j(s)}^{n+1}} \right)$$

$$\Delta e_v = \max \left(\frac{\{v\}_{j(s)}^{n+1} - \{v\}_{j(s-1)}^{n+1}}{\{v\}_{j(s)}^{n+1}} \right)$$

(6.98)

El paso corrector continúa hasta que $\Delta e_\eta, \Delta e_u$ y Δe_v son menores que 10^{-4} .

6.3.4 Condiciones de contorno

La aplicación de condiciones de contorno apropiadas es una condición necesaria para obtener soluciones numéricas correctas en un dominio computacional finito. En esta sección se discuten tres tipos de condiciones de contorno: (1) condición de contorno de pared reflejante, (2) condición de contorno de absorción o radiación y (3) generación interna de ondas. Asimismo, se describen los mecanismos introducidos para generar disipación de energía

Condición de contorno de pared reflejante

Se trata de implementar una condición de pared reflejante que sea consistente física y matemáticamente. La condición de contorno en una pared rígida e impermeable implica, desde el punto de vista físico, que no se produzca el paso de fluido a través de la pared,

es decir, condición de no flujo. Para satisfacer una condición de no flujo en el sistema de ecuaciones integrado en vertical, la componente normal de la velocidad horizontal integrada en vertical debe ser siempre nula.

$$\bar{u} \cdot n = 0, \quad x \in \Gamma_w \quad (6.99)$$

donde Γ_w representa el contorno de la pared. Esta condición debe describirse en función de u_α , dado que u_α es una de las variables incógnita. Asumiendo que $O(\nabla h) \approx O(\mu^2)$ cerca del contorno, la relación entre u_b y u_α puede escribirse (a partir de la ecuación (6.59) como

$$\bar{u} = u_\alpha + \mu^2 h^2 C_\sigma E \quad (6.100)$$

Por tanto, la condición de contorno de no flujo de u_α en el contorno reflejante se expresa como

$$u_\alpha \cdot n = -\mu^2 h^2 C_\sigma E \cdot n \quad (6.101)$$

La condición de no-flujo en el contorno es

$$u_\alpha \cdot n = 0 \quad (6.102)$$

Por tanto,

$$E \cdot n = 0 \quad (6.103)$$

Esta condición será utilizada cuando se discuta la condición de contorno de la ecuación del momento.

Derivemos ahora la condición de no flujo a partir de la ecuación de continuidad.

Integrando la ecuación (58) en el dominio Ω , se puede obtener

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot [(h + \varepsilon \eta) u_{\alpha}] + \mu^2 \nabla \cdot [C_1 h^3 E + C_3 h^2 \nabla (\nabla \cdot (h u_{\alpha}))] \right\} d\Omega = 0 \quad (6.104)$$

Utilizando el teorema de la divergencia y sacando la derivada temporal de la superficie libre fuera de la integral en el espacio se llega a que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \eta d\Omega + \int_{\Gamma} \left\{ [(h + \varepsilon \eta) u_{\alpha}] \cdot n + \mu^2 [C_1 h^3 E + C_3 h^2 \nabla (\nabla \cdot (h u_{\alpha}))] \cdot n \right\} d\Gamma \quad (6.105)$$

Asumamos que $\Gamma \equiv \Gamma_w$. Es decir, todo el dominio queda completamente encerrado por paredes impermeables. Obsérvese que esta hipótesis es consistente con el diseño global del dominio computacional dado que la condición de radiación para contorno abierto se va a formular como una capa tipo esponja localizada frente a la pared y el contorno tipo pala se localizará dentro del dominio (Figura 6.2). Estas condiciones de contorno se presentarán con detalle en las siguientes secciones.

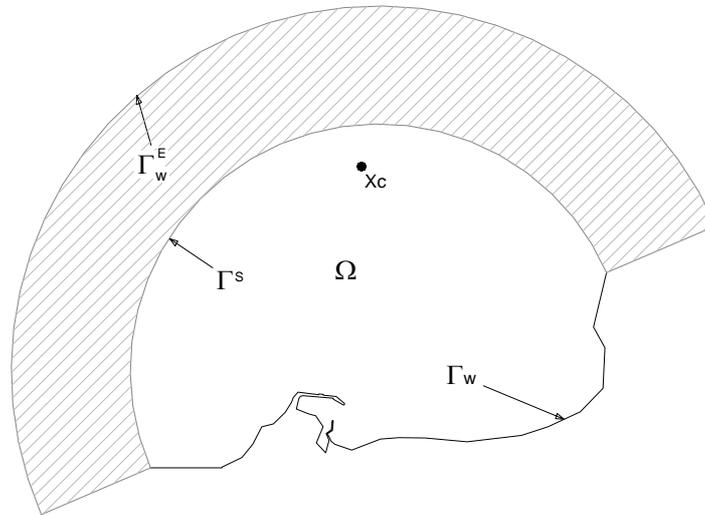


Figura 6.2 Esquema del dominio computacional y del contorno

Dado que $\Gamma \equiv \Gamma_w$, no se produce pérdida o ganancia de masa en todo el dominio. Por tanto, la derivada temporal de la masa total, que es el primer término de la ecuación anterior, es cero.

Haciendo uso de las identidades vectoriales, el tercer término de la integral de contorno en (6.105) puede expresarse como

$$\begin{aligned} \mu^2 C_3 h^2 \nabla(\nabla \cdot (h u_\alpha)) &= \mu^2 C_3 h^2 \{ \nabla(\nabla h \cdot u_\alpha) + \nabla(h \nabla \cdot u_\alpha) \} \\ &= \mu^2 C_3 h^2 \{ (\nabla h \cdot \nabla) u_\alpha + (u_\alpha \cdot \nabla) \nabla h + \nabla h \times (\nabla \times u_\alpha) + u_\alpha \times (\nabla \times \nabla h) + (\nabla \cdot u_\alpha) \nabla h + h E \} \end{aligned} \quad (6.106)$$

Dado que $O(\nabla \times u_\alpha) \approx O(\varepsilon \mu^2)$, el orden del tercer término a la derecha de la ecuación anterior es $O(\varepsilon \mu^4)$.

El cuarto término es también cero dado que el rotacional del gradiente es idénticamente nulo. Con estos resultados, la ecuación (6.104) puede describirse como

$$\int_{\Gamma} \left\{ \left[h + \varepsilon \eta + \mu^2 C_3 h^2 (\nabla h \cdot \nabla) \right] u_\alpha + \mu^2 \left[C_6 h^3 E + C_3 h^2 (u_\alpha \cdot \nabla + \nabla \cdot u_\alpha) \nabla h \right] \right\} \cdot n d\Gamma = 0 \quad (6.107)$$

Puede demostrarse que asumiendo $O(\nabla h) \approx O(\mu^2)$ cerca del contorno, utilizando la ecuación (6.101), el integrando en la ecuación (6.107) es nulo con un error de truncamiento del orden $O(\varepsilon \mu^2, \mu^4)$.

Obsérvese que el integrando en la integral de contorno en la ecuación (6.105) es idéntico al de la integral de contorno en la forma débil de la ecuación de continuidad (6.68) multiplicado por la función de ponderación W . Con el mismo argumento puede demostrarse que el integrando multiplicado por la función de ponderación W en la ecuación anterior es nulo. Dado que el integrando es idénticamente nulo, la integral de contorno de la forma débil de la ecuación de continuidad se anula. Por tanto, no es necesario realizar ningún trabajo adicional para el tratamiento de la condición de contorno para la superficie libre en paredes sólidas.

Considérese la aplicación de la condición de no flujo en las ecuaciones del momento. Como se ha mencionado anteriormente, la condición de contorno en sentido físico impone una restricción a la componente normal de la velocidad en la pared. Si se

especifica la componente normal de la velocidad en un nodo del contorno, la ecuación del momento en la dirección tangencial se resuelve para la componente tangencial de la velocidad en el nodo. Dado que la orientación de un segmento del contorno no coincide siempre con los ejes cartesianos globales, consideraremos un sistema de coordenadas con una rotación local en el nodo del contorno. Esta idea de la transformación local de las coordenadas se basa en el trabajo anterior realizado por Engelman *et al.* (1982) y Pinder & Gray (1977). Podemos introducir un sistema de coordenadas local (n, T) con n alineado en la dirección normal y hacia afuera y T alineado con la tangente en el contorno. Esto corresponde a rotar localmente el sistema de coordenadas (x, y) un ángulo θ con respecto al nuevo sistema de coordenadas (n, T) en el sentido contrario a las agujas del reloj. Por tanto, las componentes del campo de velocidades (u_n, u_T) en función del nuevo sistema de coordenadas (n, T) se relacionan con las componentes del campo de velocidades (u_α, v_α) en el sistema de coordenadas (x, y) mediante la siguiente ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_T \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_\alpha \\ v_\alpha \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y \\ T_x & T_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_\alpha \\ v_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \cdot u_\alpha \\ T \cdot u_\alpha \end{pmatrix} \quad (6.108)$$

donde $n = (n_x, n_y)$ es el vector normal con el sentido hacia afuera y $T = (T_x, T_y)$ es el vector tangente al contorno.

Transformemos las ecuaciones x e y del momento en la ecuación tangencial del momento imponiendo la restricción aplicada a la componente normal de la velocidad.

La ecuación tangencial del momento se obtiene haciendo el producto de las ecuaciones del momento (x, y) con el vector tangente T en el nodo del contorno,

$$T \cdot \left\{ u_\alpha + \nabla \eta + \frac{\varepsilon}{2} \nabla (u_\alpha \cdot u_\alpha) + \mu^2 \left[C_2 h^2 \nabla (\nabla \cdot \dot{u}_\alpha) + \beta h \nabla (\nabla \cdot (h \dot{u}_\alpha)) \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & \dot{u}_\alpha + \mu^2 \left[C_2 h^2 \frac{\partial \dot{u}_\alpha}{\partial x^2} + \beta h \frac{\partial (h \dot{u}_\alpha)}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_\alpha^2 + v_\alpha^2) \right] + \\
 & \mu^2 \left[C_2 h^2 \frac{\partial \dot{v}_\alpha}{\partial x \partial y} + \beta h \frac{\partial (h \dot{v}_\alpha)}{\partial x \partial y} \right]
 \end{aligned} \right\} = T_x \cdot \\
 & \left. \begin{aligned}
 & \dot{v}_\alpha + \mu^2 \left[C_2 h^2 \frac{\partial \dot{v}_\alpha}{\partial y^2} + \beta h \frac{\partial (h \dot{v}_\alpha)}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_\alpha^2 + v_\alpha^2) \right] + \\
 & \mu^2 \left[C_2 h^2 \frac{\partial \dot{u}_\alpha}{\partial x \partial y} + \beta h \frac{\partial (h \dot{u}_\alpha)}{\partial x \partial y} \right]
 \end{aligned} \right\} + T_y \cdot
 \end{aligned}
 \tag{6.109}$$

La restricción sobre la componente normal de la velocidad se obtiene a partir de la condición física de no flujo y que se muestra en (6.102). Ésta se puede describir como,

$$n \cdot u_\alpha = n_x u_\alpha + n_y v_\alpha = 0
 \tag{6.110}$$

Se ha construido una familia de ecuaciones en el contorno que es diferente de las ecuaciones de gobierno en el dominio. Con el fin de resolver este nuevo sistema de ecuaciones en el marco del procedimiento establecido para la integración temporal, donde la ecuación de \dot{u} se resuelve independientemente de la de \dot{v} , es necesario tomar una decisión respecto a si la integración temporal se realiza para \dot{u} o para \dot{v} en la ecuación del momento tangencial. En este trabajo la opción se determina en función del ángulo del vector normal, θ . Por ejemplo, si $\theta = 0^\circ$, lo que implica que el contorno es paralelo al eje -y, se resuelve \dot{v} en la ecuación del momento tangencial y $u = 0$ se especifica como una restricción de la ecuación. Por otro lado, si $\theta = \pi/2$ y el contorno es paralelo al eje -x, se resuelve \dot{u} y se impone $v = 0$. Se propone que:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \left(\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4} \right) \text{ o } \left(\frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{7\pi}{4} \right): \\
 & \left(-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right) \text{ o } \left(\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4} \right):
 \end{aligned} \right. \text{ u y v se resuelven a partir de (6.109)}$$

(6.111)

A continuación, es necesario construir la forma débil de la ecuación del momento tangencial. Además, habrá que demostrar que el término de la integral en el contorno desaparece en la forma débil. La forma débil para la integración temporal de \dot{u}_α se puede expresar como

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega} \left\{ W - \mu^2 \left[W \left(C_4 \frac{\partial h^2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \beta \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{\partial W}{\partial x} \left(C_3 h^2 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x} \right) \right] \right. \\
& \left. - \mu^2 \frac{T_y}{T_x} \left[W \left(C_4 \frac{\partial h^2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial W}{\partial x} \left(C_3 h^2 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x} \right) \right] \right\} \dot{u}_\alpha d\Omega \\
& = \iint_{\Omega} \left\{ \mu^2 W \left[C_2 \frac{\partial h^2}{\partial x} \frac{\partial \dot{v}_\alpha}{\partial y} + \beta \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial (h \dot{v}_\alpha)}{\partial y} \right] + \frac{\partial W}{\partial x} \left[\eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_\alpha^2 + v_\alpha^2) + \mu^2 \left(C_2 h^2 \frac{\partial \dot{v}_\alpha}{\partial y} + \beta h \frac{\partial (h \dot{v}_\alpha)}{\partial y} \right) \right] \right. \\
& \left. + \frac{T_y}{T_x} W \left[-\dot{v}_\alpha + \mu^2 \left(C_2 \frac{\partial h^2}{\partial y} \frac{\partial \dot{v}_\alpha}{\partial y} + \beta \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial (h \dot{v}_\alpha)}{\partial y} \right) \right] \right. \\
& \left. + \frac{T_y}{T_x} \frac{\partial W}{\partial y} \left[\eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_\alpha^2 + v_\alpha^2) + \mu^2 \left(C_2 h^2 \frac{\partial \dot{v}_\alpha}{\partial y} + \beta h \frac{\partial (h \dot{v}_\alpha)}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Omega \\
& - \int_{\Gamma} n_x W \left\{ \eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_\alpha^2 + v_\alpha^2) + \mu^2 \left[C_2 h^2 \left(\frac{\partial \dot{u}_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}_\alpha}{\partial y} \right) + \beta h \left(\frac{\partial h \dot{u}_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial h \dot{v}_\alpha}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma} \frac{T_y}{T_x} n_y W \left\{ \eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_\alpha^2 + v_\alpha^2) + \mu^2 \left[C_2 h^2 \left(\frac{\partial \dot{u}_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}_\alpha}{\partial y} \right) + \beta h \left(\frac{\partial h \dot{u}_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial h \dot{v}_\alpha}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Gamma
\end{aligned}
\tag{6.112}$$

Aquí se muestra claramente que todos los términos de las integrales de contorno se cancelan entre sí, dado que $n_x = -(T_y/T_x)n_y$. Obsérvese que la forma débil se ha formulado de tal manera que se pueda producir la cancelación de las integrales de contorno. Si comparamos la ecuación anterior con la forma débil de u_α en el dominio (ecuación (68)), se observa la aparición de nuevos términos seguidos de $T_y/T_x (= -\cot \theta)$.

Esta ecuación se resuelve conjuntamente con

$$v_\alpha = -\frac{1}{n_y}(n_x u_\alpha) \quad (6.113)$$

en el nodo del contorno cuyo ángulo normal se encuentra en el rango $(\pi/4 < \theta < 3\pi/4)$ o $(5\pi/4 < \theta < 7\pi/4)$. Fuera de este rango, es necesario resolver un sistema de ecuaciones diferente. La forma débil de \dot{v}_α en el contorno puede escribirse como

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left\{ W - \mu^2 \left[W \left(C_4 \frac{\partial h^2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \beta \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{\partial W}{\partial y} \left(C_5 h^2 \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial h^2}{\partial y} \right) \right] \right. \\ & \left. - \mu^2 \frac{T_x}{T_y} \left[W \left(C_4 \frac{\partial h^2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \beta \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial W}{\partial x} \left(C_5 h^2 \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial h^2}{\partial y} \right) \right] \right\} \dot{v}_\alpha d\Omega \\ & = \iint_{\Omega} \left\{ \mu^2 W \left[C_2 \frac{\partial h^2}{\partial y} \frac{\partial \dot{u}_\alpha}{\partial x} + \beta \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial (h \dot{u}_\alpha)}{\partial x} \right] + \frac{\partial W}{\partial y} \left[\eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_\alpha^2 + v_\alpha^2) + \mu^2 \left(C_2 h^2 \frac{\partial \dot{u}_\alpha}{\partial x} + \beta h \frac{\partial (h \dot{u}_\alpha)}{\partial x} \right) \right] \right. \\ & \left. + \frac{T_x}{T_y} W \left[-\dot{u}_\alpha + \mu^2 \left(C_2 \frac{\partial h^2}{\partial x} \frac{\partial \dot{u}_\alpha}{\partial x} + \beta \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial (h \dot{u}_\alpha)}{\partial x} \right) \right] \right. \\ & \left. + \frac{T_x}{T_y} \frac{\partial W}{\partial x} \left[\eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_\alpha^2 + v_\alpha^2) + \mu^2 \left(C_2 h^2 \frac{\partial \dot{u}_\alpha}{\partial x} + \beta h \frac{\partial (h \dot{u}_\alpha)}{\partial x} \right) \right] \right\} d\Omega \\ & - \int_{\Gamma} n_y W \left\{ \eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_\alpha^2 + v_\alpha^2) + \mu^2 \left[C_2 h^2 \left(\frac{\partial \dot{u}_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}_\alpha}{\partial y} \right) + \beta h \left(\frac{\partial h \dot{u}_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial h \dot{v}_\alpha}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} \frac{T_x}{T_y} n_x W \left\{ \eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_\alpha^2 + v_\alpha^2) + \mu^2 \left[C_2 h^2 \left(\frac{\partial \dot{u}_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}_\alpha}{\partial y} \right) + \beta h \left(\frac{\partial h \dot{u}_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial h \dot{v}_\alpha}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (6.114)$$

Los términos de la integral de contorno también desaparecen dado que $n_y = -(T_x/T_y)n_x$. La ecuación restrictiva que debe resolverse conjuntamente con la anterior es,

$$u_\alpha = -\frac{1}{n_x}(n_y v_\alpha) \quad (6.115)$$

Finalmente, consideremos la condición de contorno para la variable auxiliar. Generalmente, cuando se introduce una variable auxiliar con el fin de reducir el orden de las derivadas espaciales de mayor orden, es necesario introducir una nueva condición

de contorno para las variables adicionales. En este trabajo, las condiciones de contorno para las variables auxiliares se tratan de manera semejante a la condición de contorno de no-flujo. En el nodo del contorno la componente tangencial del vector auxiliar, es decir

$$T \cdot E = T_x E_1 + T_y E_2 = T_x \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} \right] + T_y \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} \right] \quad (6.116)$$

se debe resolver imponiendo la condición restrictiva de que la componente normal cumpla

$$n \cdot E = 0 \quad (6.117)$$

En la integración temporal empleada, (6.116) se resuelve para E_1 y E_2 con base en el ángulo del vector normal, θ . Como se ha hecho anteriormente, se sugiere que

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4} \right) \text{ o } \left(\frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{7\pi}{4} \right) : \\ \left(-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right) \text{ o } \left(\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4} \right) : \end{array} \right. \quad (6.118)$$

Demostraremos que las integrales de contorno no aparecen en la forma débil (6.116). La forma débil de E_1 es

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} W E_1 d\Omega &= - \iint_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial x} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} \right) + \frac{T_y}{T_x} \left[\frac{\partial W}{\partial y} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} \right) + W E_2 \right] d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma} n_x W \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} \right) + \frac{T_y}{T_x} n_y W \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (6.119)$$

Dado que $n_x = -(T_y / T_x) n_y$, los términos de las integrales de contorno se cancelan entre sí. Esta ecuación se resuelve conjuntamente con $E_2 = -(n_x / n_y) E_1$.

De igual modo, la forma débil de E_1 es

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Omega} WE_2 d\Omega &= -\iint_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial y} \left(\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial y} \right) + \frac{T_x}{T_y} \left[\frac{\partial W}{\partial x} \left(\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial y} \right) + WE_1 \right] d\Omega \\
 &+ \int_{\Gamma} n_y W \left(\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial y} \right) + \frac{T_x}{T_y} n_x W \left(\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial y} \right) d\Gamma
 \end{aligned} \tag{6.120}$$

La integral de contorno se elimina. Esta ecuación se resuelve con $E_1 = -(n_y/n_x)E_2$.

Radiación de energía hacia el exterior

Con el fin de llevar a cabo aplicaciones prácticas, es inevitable restringir el tamaño del dominio computacional y aplicar una condición de contorno de radiación, que permita a las ondas propagarse fuera del dominio a través del contorno en el que se ha impuesto la radiación. Es muy importante minimizar en dicho contorno las posibles fuentes de reflexión que no sean de naturaleza física. En este caso se ha adoptado una condición de capa tipo esponja cerca del contorno para absorber toda la energía que llega al contorno procedente del dominio fluido. En la Figura 6.2, Γ_W^E indica la pared impermeable situada al final de la capa tipo esponja y Γ^S denota la posición inicial de la capa tipo esponja. La selección de Γ^S depende del problema y Γ^S se determina de tal modo que se garantiza un espesor suficiente de la capa tipo esponja. x_c se define como un centro de radiación y se selecciona de tal modo que la línea que conecta x_c y un punto sobre Γ_W^E pueda ofrecer una dirección de radiación adecuada. Si la capa tipo esponja puede atenuar de forma efectiva la energía de la onda, no es necesario tratar Γ_W^E como una condición de radiación, dado que ninguna onda llegará a Γ_W^E . Sin embargo, en este caso, será necesaria una capa tipo esponja de bastante espesor.

La capa tipo esponja se introduce añadiendo los siguientes términos

$$S_{\eta} = C_{\eta} \nabla^2 \eta \tag{6.121}$$

$$S_u = -C_{u1} u_{\alpha} + C_{u2} \nabla^2 u_{\alpha} \tag{6.122}$$

$$S_v = -C_{v1} v_{\alpha} + C_{v2} \nabla^2 v_{\alpha} \tag{6.123}$$

a la derecha de la ecuación de continuidad (6.63), y de las ecuaciones del momento (6.64), y (6.65), respectivamente.

Los términos de atenuación o disipación lineales en u y v se denominan "enfriamiento Newtoniano" y aquellos términos con derivadas segundas son términos de viscosidad artificial (Israeli & Orszag (1981)).

Los coeficientes de amortiguación C_η, C_{u1} y C_{u2} decrecen exponencialmente a medida que nos alejamos del contorno Γ_W^E y se definen como

$$C_\eta = G_1^\eta \frac{\exp\left[\|x - x_s\|/\|x_e - x_s\|\right]^{G_2^\eta} - 1}{\exp(1) - 1} \quad (6.124)$$

$$C_{u1} = \omega G_1^{u1} \frac{\exp\left[\|x - x_s\|/\|x_e - x_s\|\right]^{G_2^{u1}} - 1}{\exp(1) - 1} \quad (6.125)$$

$$C_{u2} = \omega G_1^{u2} \frac{\exp\left[\|x - x_s\|/\|x_e - x_s\|\right]^{G_2^{u2}} - 1}{\exp(1) - 1} \quad (6.126)$$

donde x_s es la coordenada inicial de la capa tipo esponja ($x_s \in \Gamma^S$) y x_e es la coordenada final de la capa tipo esponja ($x_e \in \Gamma_W^E$), ω es la frecuencia de la onda que debe ser atenuada, y $G_1^\eta, G_2^\eta, G_1^{u1}, G_2^{u1}, G_1^{u2}, G_2^{u2}$ son constantes que deben ser determinadas para calibrar la cantidad de viscosidad en el contorno. Estas constantes dependen del problema. Para valores dados de x, x_s y x_e son coordenadas de los puntos en los que la línea que conecta x y x_c intersecta Γ^S y Γ_W^E , respectivamente.

Generalmente, se suele tomar como espesor de la capa tipo esponja de dos a tres veces la longitud de onda, Kirby *et al.* (1998).

Generación interna de ondas

Usualmente no es posible determinar *a priori* las características de las ondas reflejadas en el interior del dominio computacional, especialmente cuando las ecuaciones de gobierno son no lineales. Por tanto, el problema de generar y radiar ondas en el contorno del dominio es complejo. Una forma de resolver este problema es utilizar un método basado en una función fuente que generar una onda objetivo dentro del dominio computacional, acoplado con unas capas absorbentes tipo esponja en el contorno del dominio para eliminar las ondas reflejadas que se radian fuera de la región.

Larsen & Dancy (1993) utilizaron este tipo de aproximación en un modelo bidimensional en diferencias finitas para las ecuaciones convencionales de Boussinesq. Emplearon una fuente lineal para generar ondas en una malla. En el interior del dominio se añade y resta masa a lo largo de la fuente/sumidero lineal. Este método necesita un cierto ajuste para garantizar que los resultados sean buenos para ciertos casos. Basándose en la hipótesis de linealidad, Wei *et al.* (1999) derivaron una función fuente para las ecuaciones extendidas de Boussinesq, que relaciona la magnitud de la función fuente con las características de la superficie de la onda objetivo, añadiendo un término fuente a la ecuación de continuidad o aplicando un forzamiento de presión en la ecuación del momento. Esta función fue implementada en su modelo de diferencias finitas. Walkley (1999) introdujo una profundidad variable en el tiempo en la ecuación de continuidad para generar ondas en el interior del dominio. Sin embargo, no especifica la relación exacta entre la intensidad de la variación temporal y el perfil de la superficie de la onda objetivo.

En este modelo en elementos finitos, se ha adoptado el método de función fuente de Wei *et al.* (1999). El método emplea una función fuente, F_w^η que se añade en las ecuaciones de gobierno como una fuente de masa en la ecuación de continuidad. Asumiendo que el fondo es constante y que el centro de la región fuente es paralelo al eje y , la función fuente puede escribirse como

$$F_w^\eta(x, y, t) = D \sin[k \sin(\theta_w)y - \omega t] \exp[-\gamma(x - x_w^s)^2] \quad (6.127)$$

donde D es la magnitud de la función fuente, γ es el parámetro asociado a la función fuente, x_w^s es la coordenada x de la posición central de la región fuente, y θ_w es el

ángulo entre la dirección de propagación de la onda y el eje x . Para una onda monocromática o una componente única de un oleaje irregular, la magnitud de la función fuente puede determinarse como

$$D = \frac{2\eta_o [\omega^2 - gC_6 k^4 h^3] \cos(\theta_w)}{wkI [1 - C_5 (kh)^2]} \quad (6.128)$$

donde C_5, C_6 son constantes cuyo valor se muestra en la ecuación (72) e I es una constante de integración que se expresa como

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} \exp\left[-\frac{(k \cos \theta_w)^2}{4\gamma}\right] \quad (6.129)$$

Obsérvese que la anchura de la función fuente deberá ser lo más pequeña posible, dado que se han hecho las hipótesis de ecuaciones de gobierno linealizadas y profundidad constante a la hora de derivar la función fuente. Por otro lado, es necesario que esta región se defina con un número de nodos suficiente para generar las ondas objetivo. Estos dos factores son los que determinan la elección final del valor de γ . Los valores típicos de γ utilizados en este modelo varían entre $80/\lambda^2$ a $320/\lambda^2$ (λ es la longitud de onda), lo que corresponde a una función fuente con una anchura de aproximadamente 0.25 a 0.5 veces la longitud de onda.

Para poder aplicarlo en este modelo en elementos finitos, la función fuente debe ser aproximada mediante una combinación lineal de funciones de forma y de valores nodales de $F_w^n(x, y, t)$ es decir,

$$F_w^n(x, y, n\Delta t) \approx \sum_{j=1}^{ND} \psi_j(x, y) \{F_w^n\}_j \quad (6.130)$$

donde ND es el número total de nodos y $\psi_j(x, y)$ es la función de forma. La magnitud de la función fuente, D se calcula antes de que comience la integración en el tiempo. En

cada paso predictor se calculan los valores nodales de $\{F_w^\eta\}_j^n$ y se formula el vector de forzamiento global. Este vector global se utiliza de forma continuada en el paso corrector iterativo.

6.3.5. Términos de disipación

El modelo numérico MANOLO incluye dentro de su formulación la posibilidad de considerar la influencia de tres efectos de disipación del flujo dentro del dominio computacional. El primero corresponde a la modelación de los efectos de disipación que sufre el flujo por la influencia de la fricción en el fondo; el segundo factor corresponde a la disipación del flujo por efectos de rotura, y el tercer efecto disipador gestiona los efectos turbulentos y de vorticidad que acompañan a la rotura.

A continuación se muestra de manera resumida los términos específicos sobre los que se apoya el modelo numérico para la resolución de los tres efectos fundamentales de disipación del flujo.

Disipación por fondo

Uno de los procesos fundamentales que es necesario tener en cuenta a la hora de evaluar la disipación es la fricción por fondo.

La disipación por fricción se incorpora en las ecuaciones añadiendo el término de fricción en el lado derecho de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, tal que

$$\langle \text{Ec. del momento} \rangle = -\frac{f}{h + \eta} u_b |u_b| \quad (6.131)$$

donde el vector u_b es el vector de velocidad en el fondo y f es un coeficiente de fricción.

El coeficiente de fricción toma valores entre $O(10^{-2})$ a $O(10^{-3})$ (Whitford & Thornton (1996), Kobayashi *et al.* (1997)). En general, este coeficiente de fricción se suele relacionar con el coeficiente de Chezy, C_e , tal que $f = g/C_e^2$. Los coeficientes de Chezy toman valores entre 20~60 según lo observado en estudios de aplicación de modelos numéricos de transformación de oleaje existentes en la literatura, Larsen & Dancy (1993), Raney & Butler (1975), Van Rijn (1993).

Disipación por rotura

La disipación por rotura es un proceso importante de disipación que tiene lugar cuando el oleaje alcanza una altura de ola determinada y el perfil se vuelve inestable. En general, este proceso tiene lugar cerca de la costa debido al aumento de la altura de ola producido por el asomeramiento. El proceso de rotura se caracteriza por la transferencia de energía al espectro turbulento, la disminución de la altura de ola y la generación de corrientes. De manera análoga a como se ha hecho con la fricción por fondo, la disipación por rotura se realiza añadiendo términos en las ecuaciones generales. Estos términos, que dependen del espacio y tiempo se activan y desactivan exclusivamente cuando se produce la rotura.

En los modelos basados en las ecuaciones tipo Boussinesq existen tres tipos de formulaciones. La primera de ellas es la formulación basada en la viscosidad de remolino (Zelt (1991); Wei *et al.* (1995)). La segunda fue introducida por Schäffer *et al.* (1993) y se basa en el concepto del “roller”. Finalmente, existe una tercera formulación, aunque menos extendida asociada al concepto de vorticidad (Ben-Yu (1995)). Aunque existen diferencias significativas desde el punto de vista conceptual entre estas tres diferentes formulaciones, se ha demostrado (Ben-Yu (1995)), que los resultados numéricos obtenidos son muy similares en todos los casos.

En este modelo, la rotura se simula siguiendo la primera formulación, es decir, añadiendo términos proporcionales a la viscosidad de remolino en las ecuaciones de conservación de cantidad de la cantidad de movimiento, tal que

$$\langle \text{Cant. de mov. en } u_\alpha \rangle = \frac{1}{h+\eta} \left[\left\{ \nu_b ((h+\eta)u_\alpha)_x \right\}_x + \frac{1}{2} \left\{ \nu_b ((h+\eta)u_\alpha)_y + \nu_b ((h+\eta)v_\alpha)_x \right\}_y \right] \quad (6.132)$$

$$\langle \text{Cant. de mov. en } v_\alpha \rangle = \frac{1}{h+\eta} \left[\left\{ \nu_b ((h+\eta)v_\alpha)_y \right\}_y + \frac{1}{2} \left\{ \nu_b ((h+\eta)v_\alpha)_x + \nu_b ((h+\eta)u_\alpha)_y \right\}_x \right] \quad (6.133)$$

donde ν_b es la viscosidad de remolino para rotura que se expresa en función de la derivada temporal de la superficie libre (Kennedy *et al.* (2000)).

Disipación por turbulencia (subgrid turbulence mixing)

Es sobradamente conocido que el flujo en la zona de rompiente se caracteriza por la existencia de vórtices y turbulencia generados por efecto de la rotura. La extensión de las ecuaciones de Boussinesq a partir de la integración vertical de las ecuaciones de Euler requiere la inclusión de los efectos de la turbulencia. Dado que es evidente que los procesos turbulentos asociados con la rotura podrían ser un factor importante que modifique el flujo resultante, y muy especialmente el correspondiente al sistema de corrientes generado por el oleaje, parece clara la necesidad de incluir de alguna manera la parametrización de las tensiones semejantes a las de Reynolds resultantes de los procesos turbulentos en la escala de submalla (subrid-scale turbulence) asociados a los vórtices generados en la zona de rompientes.

Si no se incluye un modelo de submalla en las ecuaciones de gobierno, el campo de corrientes generado por el oleaje puede llegar a ser tan caótico que deje de ser realista.

Por ello, se incluye un modelo de submalla tipo Smagorinsky (1963) que tiene en cuenta el efecto de la viscosidad de remolino sobre el flujo resultante.

$$\langle \text{Ec. del mom. en } u_\alpha \rangle = \frac{1}{h+\eta} \left[\left\{ v_T \left((h+\eta) u_\alpha \right)_x \right\}_x + \frac{1}{2} \left\{ v_T \left((h+\eta) u_\alpha \right)_y + v_T \left((h+\eta) v_\alpha \right)_x \right\}_y \right] \quad (6.134)$$

$$\langle \text{Ec. del mom. para } v_\alpha \rangle = \frac{1}{h+\eta} \left[\left\{ v_T \left((h+\eta) v_\alpha \right)_y \right\}_y + \frac{1}{2} \left\{ v_T \left((h+\eta) v_\alpha \right)_x + v_T \left((h+\eta) u_\alpha \right)_y \right\}_x \right] \quad (6.135)$$

$$v_T \equiv c_m \Delta x \Delta y \sqrt{\left[(u_x)^2 + (v_y)^2 + \frac{1}{2} (u_y + v_x)^2 \right]} \quad (6.136)$$

6.3.6 Límites de aplicación del modelo numérico

Históricamente, las propiedades no lineales y dispersivas de las ecuaciones de Boussinesq, se enfocaban a resolver observaciones experimentales de ondas solitarias que se propagaban a lo largo de amplias distancias sin sufrir cambios aparentes en su celeridad y forma. Ursell (1953) unifica los estudios de propagación de este tipo de ondas y define un parámetro basado en la amplitud de la onda incidente, su longitud y profundidad lo cual permitió obtener la primera parametrización de los efectos relativos de dispersividad y no linealidad sobre la propagación de ondas. En los años 60 diversos estudios, Madsen & Mei (1969), Mei & Le Méhauté (1966), Peregrine (1966), se basaron en el planteamiento de Ursell para desarrollar una serie de ecuaciones basadas en las técnicas matemáticas de Boussinesq para la resolución de aquellas ondas que se propagan sobre fondos variables.

Peregrine (1967), posteriormente, presentó un sistema bidimensional de ecuaciones basadas en las ecuaciones de Boussinesq las cuales establecieron las bases para el planteamiento de las ecuaciones modificadas y extendidas de Boussinesq, como las planteadas en el apartado anterior. Sin embargo, este sistema primigenio de ecuaciones estaba limitado a fondos muy someros, con características dispersivas lineales que rápidamente divergían del comportamiento real conforme el problema se situaba en

aguas más profundas, haciendo que el modelo propuesto tuviese una aplicación ingenieril muy limitada.

En los últimos años se han realizados un gran número de propuestas para extender la aplicación del sistema de ecuaciones de Boussinesq para rangos de aplicación superiores, alcanzando en la actualidad una adecuada aplicación para el límite de aguas profundas.

Madsen *et al.* (1991), añadieron términos de dispersión extras al sistema de ecuaciones original a fin de mejorar las características dispersivas del flujo sobre un fondo variable, como se puede verificar en Madsen & Sørensen (1992), Mientras que Beji & Nadaoka (1996), sugirieron producir un sistema de ecuaciones de Boussinesq extendido a través de una simple manipulación algebraica del sistema original de Peregrine (1967), ampliando así los rangos de aplicación hacia aguas intermedias-profundas.

Posteriormente Agnon *et al.* (1999), sugirieron que este tipo de ecuaciones se pueden derivar utilizando un parámetro libre, Agnon *et al.* (1999). En contraste a lo propuesto por Nwogu (1993), que realizó la derivación del sistema de ecuaciones de Boussinesq considerando la velocidad horizontal en una profundidad arbitraria. Con ello, conseguía ajustar la mejor dispersividad del modelo, y extender así el rango de aplicación proponiendo diferentes valores de dicha profundidad teórica. Para cada una de ellas, se puede evaluar los mínimos errores relativos entre las celeridades de fase y de grupo con respecto a los valores exactos expuestos en la teoría de Airy.

El modelo MANOLO, que se basa íntegramente en la metodología y ecuaciones propuestas por Nwogu (1993) y posteriormente Woo & Liu (2004a), mantienen la filosofía de utilizar un valor óptimo de profundidad en la cual la velocidad horizontal del flujo arroja las máximas correlaciones con los valores propuestos por la teoría lineal.

Existe un parámetro α en las ecuaciones modificadas de Boussinesq, que esta íntimamente ligado con la profundidad arbitraria z_a , y que se selecciona para mejorar las características lineales de dispersión de las ecuaciones. Nwogu (1993), seleccionó un valor de $\alpha = -0.39$, utilizando una técnica de minimización del error en la velocidad de fase para un rango $0 \leq h/L \leq 0.5$, donde el valor máximo representa lo que se conoce como el límite de aguas profundas.

Más recientemente, Chen & Liu (1995) encontraron un valor $\alpha = -0.3855$, empleando una técnica de mínimos cuadrados para ajustar las celeridades de fase y de grupo en el mismo rango de valores.

En este apartado se presentan los valores del error relativo para la celeridad de fase, la celeridad de grupo y el coeficiente de asomeramiento, obtenidos con las formulaciones lineales, comparados con las formulaciones modificadas de Boussinesq que el modelo MANOLO utiliza para diferentes valores de α , considerando el mismo rango de aplicación de valores de h/L que comúnmente ha sido planteado en la literatura.

La celeridad de fase y la celeridad de grupo que obtenidas a partir de la teoría lineal, Madsen & Sørensen (1992), se pueden calcular con las relaciones siguientes.

$$C^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = gh \frac{\tanh(kh)}{kh} \quad (6.137)$$

$$C_g = \frac{C}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right) \quad (6.138)$$

Las ecuaciones modificadas de Nwogu (1993) nos ofrecen las siguientes relaciones matemáticas para las mismas variables dependientes.

$$C^2 = gh \frac{1 - \beta kh^2}{1 - \alpha kh^2} \quad (6.139)$$

$$C_g = C \left(1 - \frac{kh^2}{3(1 - \alpha kh^2) \cdot (1 - \beta kh^2)} \right) \quad (6.140)$$

La figura 6.3 compara la velocidad de fase obtenida mediante la teoría lineal, con la correspondiente celeridad de fase que propone Nwogu (1993). La gráfica muestra que para el valor de $\alpha=0$ (velocidad en la superficie), y $\alpha=1/3$ (velocidad constante en todo el perfil vertical, Peregrine (1967)), la velocidad de fase diverge rápidamente de los valores propuestos por la teoría de Airy, excediendo un error relativo del 5% para un $h/L_0=0.3$, ocurriendo lo mismo cuando se considera un valor de α que tiende hacia el

fondo. El valor de $\alpha=-0.39$ propuesto por Nwogu (1993), seleccionado para el modelo MANOLO, muestra los menores errores relativos para todo el rango de h/L propuesto.

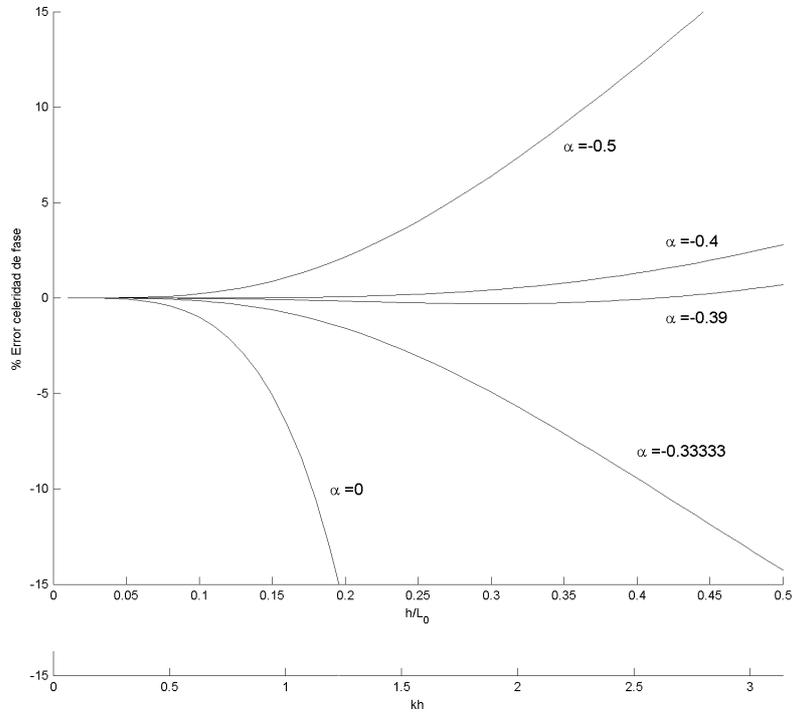
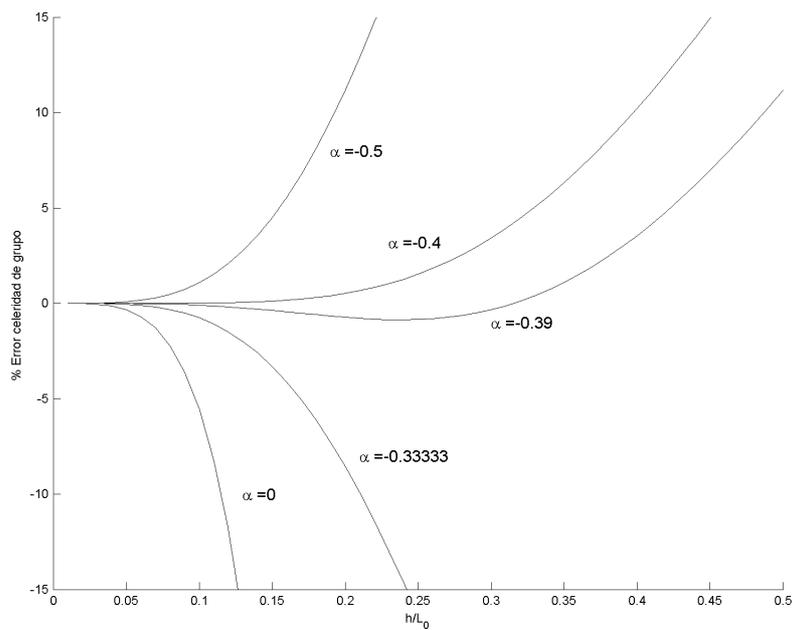


Figura 6.3 Comparación del % de error relativo entre diferentes valores de α y la teoría lineal para la celeridad de fase.



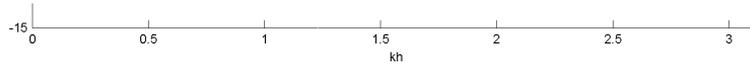


Figura 6.4 Comparación del % de error relativo entre diferentes valores de α y la teoría lineal para la celeridad de grupo.

La figura 6.4, que muestra las comparaciones entre los valores de la velocidad de grupo propuestos por la teoría lineal y aquellos obtenidos con la ecuación (6.140), que los valores de celeridad de grupo divergen rápidamente, para los valores de α correspondientes al fondo, a la superficie libre y al propuesto por Peregrine (1967). Se alcanzan errores superiores al 10% para los valores límite de $h/L_0 > 10$ con el valor de $\alpha = -0.39$ seleccionado.

Queda claro que con el valor de α propuesto por Nwogu (1993), y utilizado en el modelo MANOLO, los valores de la velocidad de fase y velocidad de grupo quedan mejor definidos para un rango más amplio de h/L .

6.4 TRABAJOS PRELIMINARES DE VALIDACIÓN

Como parte fundamental del desarrollo del nuevo modelo numérico y para verificar las bases conceptuales de la aplicación del mismo en el marco de la problemática establecida en esta Tesis doctoral, se ha realizado un trabajo de validación preliminar. Este trabajo se ha realizado utilizando como referencia diversos datos experimentales clásicos existentes en la literatura, empleados generalmente en la validación de modelos de programación, además de datos numéricos procedentes de modelos similares desarrollados por otras instituciones de investigación. En este segundo caso, se han realizado principalmente comparaciones con el modelo FUNWAVE[®], que al igual que el modelo MANOLO, se basa en las ecuaciones modificadas de Boussinesq propuestas por Nwogu (1993), con la importante diferencia de que se trata de un modelo integrado en un esquema de diferencias finitas sobre dominios rectangulares con mallas estructuradas.

El modelo FUNWAVE[®], es un modelo que ha sido ampliamente validado, para el estudio de la propagación de oleaje de corto periodo con datos experimentales en laboratorio (Kirby *et al.* (1998); Kennedy *et al.* (2000), y Kirby (2002)).

Estos trabajos de validación, además de servir para verificar la calidad de los resultados que el modelo numérico MANOLO ofrece para diversas geometrías y forzamientos, permitió iniciar y recopilar una serie de recomendaciones de buena práctica para la realización y diseño de las simulaciones numéricas: desde el tratamiento de la malla en elementos finitos triangulares, el diseño de las condiciones de absorción de energía en los contornos, el pre-proceso que se debe de realizar con los datos batimétricos y de contorno, el manejo y adaptación de las series de ondas monocromáticas, e irregulares como forzadores del sistema numérico, y los tiempos de simulación con vistas a mejorar la estabilidad numérica del modelo y establecer sus costes computacionales. Estos

aspectos se desarrollan aún más en el siguiente capítulo en el que se muestran las simulaciones de los ensayos experimentales realizados en nuestro laboratorio.

En esta primera fase, los casos considerados para la validación han sido los siguientes:

- Evolución del movimiento del fluido en una dársena rectangular cerrada
- Propagación del oleaje sobre un bajo batimétrico (Berkhoff *et al.* (1982))
- Propagación de oleaje sobre un lente batimétrica Whalin (1971)
- Resonancia en una bahía rectangular
 - Resonancia lineal en una bahía rectangular (Ippen & Goda (1963))
 - Generación resonante de superarmónicos (Rogers & Mei (1978))
 - Generación resonante de subarmónicos (Rogers & Mei (1978))

Como se desprende de la lista de casos seleccionados, todos ellos corresponden a casos de laboratorio de geometrías sencillas que nos permiten fijar la atención, más sobre los procesos físico simulados, que sobre la problemática numérica inherente a geometrías complejas y casos que precisan grandes recursos informáticos.

Más aún, los casos han sido suficientemente contrastados en la literatura, lo que nos da garantías a la hora de considerarlos como casos de referencia para la validación del modelo. Por otra parte, hay que decir, que los casos seleccionados recogen gran parte de los retos planteados para el modelo, a saber: propagación de onda corta incluyendo diferentes profundidades relativas; efectos importantes de refracción-difracción; resonancia lineal y no lineal; resonancia inducida por la generación de ondas largas por ondas cortas; transitoriedad en la distribución energética en los recintos, etc.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos para cada uno de los casos considerados, detallando las características fundamentales del ensayo en laboratorio y de la configuración numérica correspondiente.

6.4.1 Evolución del movimiento del fluido en una dársena rectangular cerrada

En esta primera aplicación, el modelo numérico se utiliza para el análisis del movimiento de un fluido que se encuentra atrapado dentro de una dársena rectangular con paredes verticales y 100% reflejantes, con un fondo constante y un tiempo indefinido, sin la acción de ningún factor de disipación que afecte al fluido.

Este ejercicio numérico es muy frecuentemente utilizado para la validación y análisis de modelo bidimensionales de propagación transitoria, p.e., Kirby *et al.* (1998). En general, es utilizado para evaluar los posibles errores y problemas numéricos, además de para la revisión de la conservación de la masa dentro del sistema a lo largo del tiempo.

El dominio computacional considerado es un cuadrado de 6 m x 6 m de área, con profundidad constante de $h=0.5$ m, y paredes verticales 100% reflejantes.

La condición inicial de superficie libre considera un cono Gaussiano suspendido en el instante $t=0$ s, que se libera al inicio de la simulación como único forzamiento para todo el tiempo de ejecución, cuya ecuación inicial es la siguiente.

$$\eta_0 = 0.045e^{-2[x^2+y^2]} \quad (6.141)$$

Debido a la gravedad, la superficie libre se propaga desde el centro hacia el contorno rectangular para posteriormente reflejarse y moverse nuevamente hacia el punto central, repitiendo este ciclo indefinidamente.

La figura 6.5 muestra las características geométricas del dominio computacional, para la malla en elementos finitos triangulares no estructurados utilizada, de igual forma se

indican los puntos de medición de las series temporales de superficie libre. La malla generada consta de 2577 nodos y 4992 elementos.

La simulación se realizó para un tiempo total de $t=600$ s con un incremento de $\Delta t=0.01$ s. Se validaron los resultados con las simulaciones mostradas por Kirby *et al.* (1998), obtenidas con el modelo FUNWAVE ©, siguiendo fielmente las geometrías del dominio y del elemento forzador.

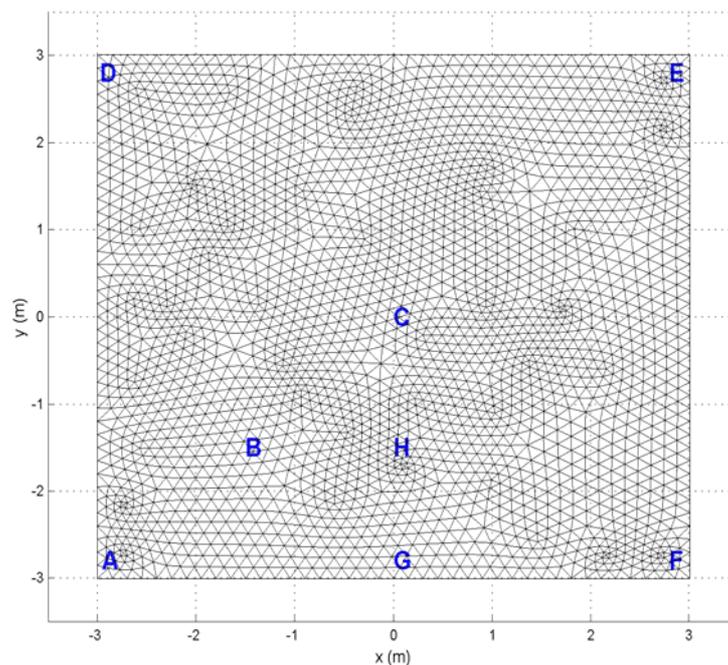


Figura 6.5 Dominio numérico rectangular y puntos de medición propuestos.

La figura 6.6 presenta las comparaciones de superficie libre obtenidas con los modelos numéricos utilizados, para los puntos seleccionados, y para el tiempo $0 < t < 50$ s, encontrándose valores que se correlacionan casi a la perfección, presentando únicamente pequeñas variaciones posiblemente debidas a las diferencias entre las dimensiones y posiciones de los nodos de cada malla numérica utilizada.

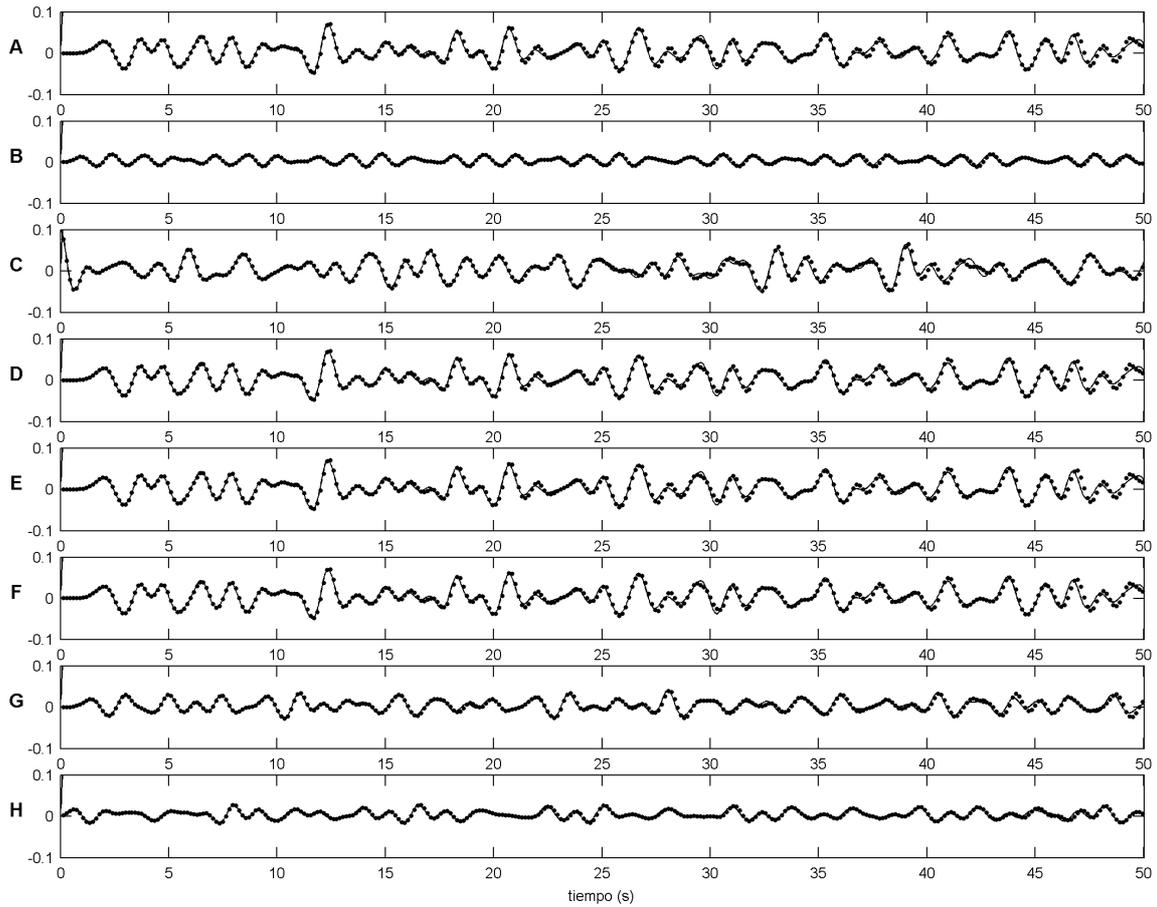


Figura 6.6 Comparación de los registros de superficie libre hasta el tiempo $t=50s$, para los 8 puntos seleccionados. FUNWAVE © (línea continua), MANOLO (puntos).

En la figura 6.7, se muestran las representaciones tridimensionales de superficie libre para ocho diferentes instantes de tiempo.

En este caso, es evidente que el modelo FUNWAVE© debe dar resultados muy similares a los del modelo MANOLO dado que al tratarse de una geometría rectangular, la malla del FUNWAVE© se adapta perfectamente a la descripción del dominio.

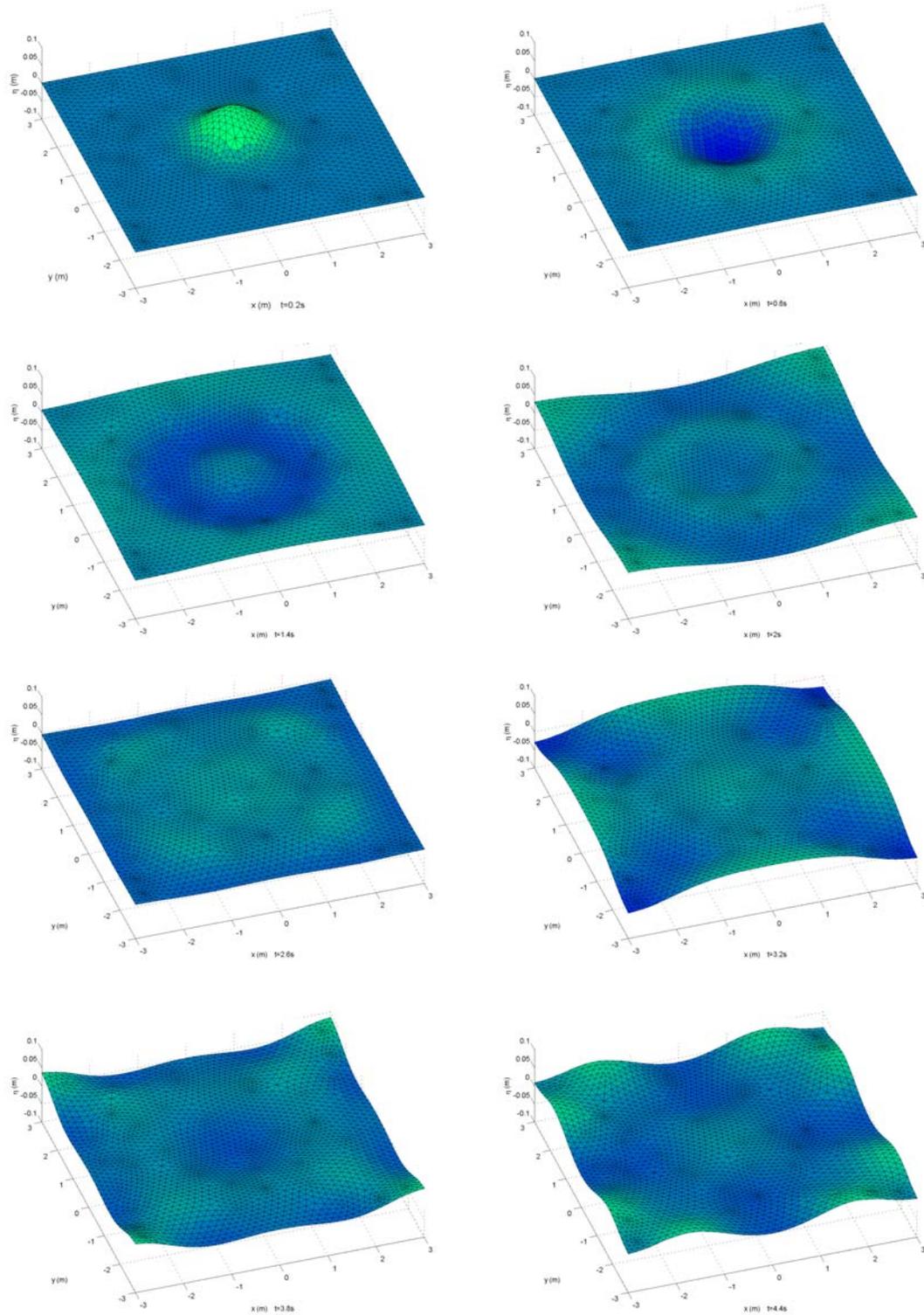


Figura 6.7 Superficie libre 3D simulada con el modelo MANOLO para los tiempos $t=0 s$, $t=2 s$, $t=4 s$, $t=6 s$, $t=8 s$, $t=10 s$, $t=12 s$, y $t=14 s$.

6.4.2 Propagación del oleaje sobre un bajo batimétrico, (Berkhoff *et al.* (1982))

Este problema ha sido ampliamente utilizado en nuestro campo de trabajo para la validación de modelos numéricos de propagación de oleaje bidimensional, ya que ofrece la posibilidad de observar y caracterizar claramente los procesos de asomeramiento, refracción y difracción que el oleaje sufre sobre el bajo elíptico propuesto por Berkhoff *et al.* (1982) en sus experimentaciones en laboratorio.

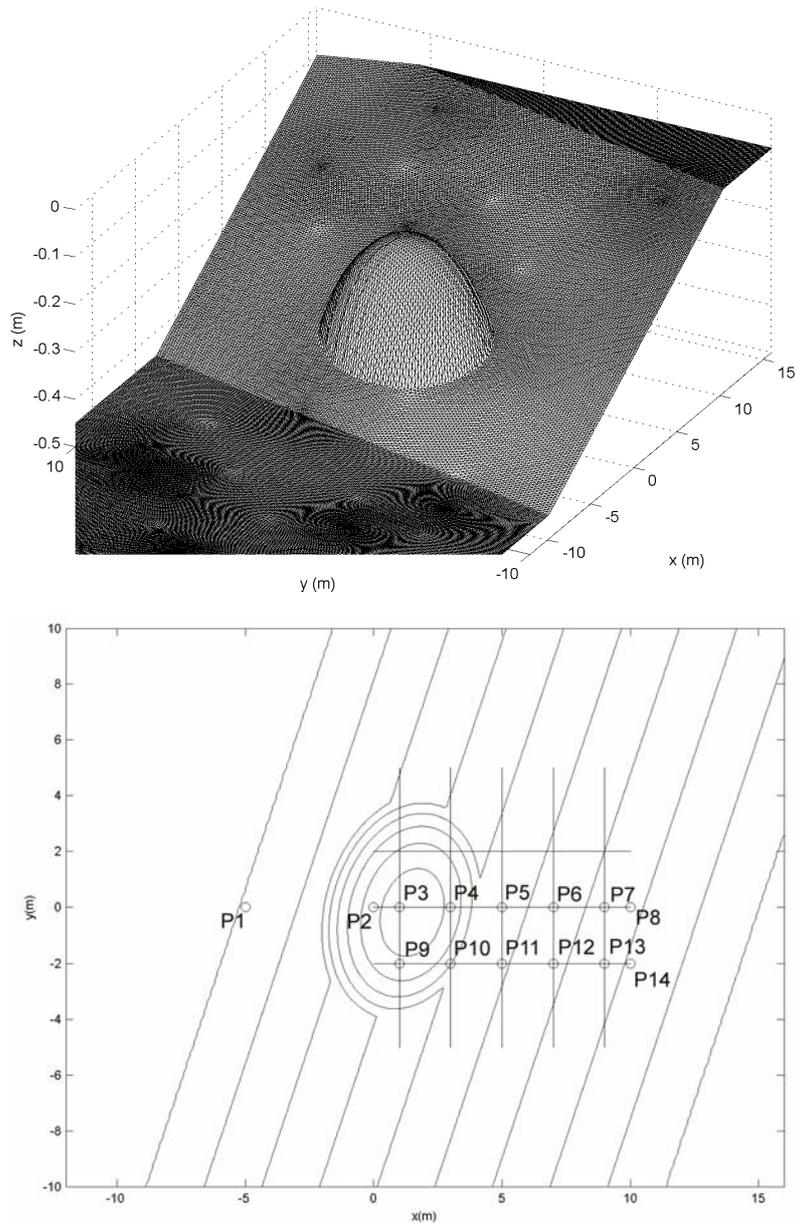


Figura 6.8 Detalle del bajo representado en una malla en elementos finitos y batimetría para el experimento de Berkhoff (1982). Sensores y posición de los perfiles considerados.

El dominio expuesto en este apartado, sigue fielmente las dimensiones propuestas por Kirby *et al.* (1998) que fueron utilizadas para la validación del modelo FUNWAVE ©, y cuyos resultados se retoman para complementar nuestra propia validación.

La geometría del dominio consiste en un tanque de oleaje de 28 m de longitud por 20 m de ancho $(x,y)=[-12,16]x[-10,10]$, con paredes verticales en los laterales, un generador de oleaje en el extremo inicial $x=12$ m, y un área de absorción de energía en los últimos 3m del extremo final del tanque que simulan una playa disipativa.

La variación de la profundidad dentro del dominio se caracteriza por contar con una combinación de una pendiente de 1:50 rotada 20° con respecto al eje y, siguiendo las relaciones geométricas siguientes:

$$\begin{aligned} x_r &= \cos(20)x - \sin(20)y \\ y_r &= \sin(20)x + \cos(20)y \end{aligned} \tag{6.142}$$

$$h(x, y) = 0.45 \quad y_r \leq -5.82 \tag{6.143}$$

$$h(x, y) = 0.45 - 0.02(5.82 + y_r) \quad y_r > -5.82 \tag{6.144}$$

y un bajo elíptico situado en el centrado en el origen, como sigue.

$$\left(\frac{x_r}{4}\right)^2 + \left(\frac{y_r}{3}\right)^2 < 1 \tag{6.145}$$

La ecuación de profundidad total queda como:

$$h(x, y) = 0.3 - \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{x_r}{5}\right)^2 - \left(\frac{y_r}{3.75}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{6.146}$$

La figura 6.8 muestra la batimetría resultante y el mallado realizado para las simulaciones numéricas considerando 15 nodos por longitud de onda incidente dentro del dominio y una corona de absorción de energía hacia el exterior de 2 veces la longitud de onda incidente, con un número de nodos para el dominio y la corona de 79921, y un número de elementos triangulares igual a 158720.

En Kirby *et al.* (1998), el dominio computacional se define a través de una malla estructurada en diferencias finitas con separación constante entre elementos rectangulares, proponiendo así una malla de 560 x 200 elementos que arroja un total de 112000 nodos, 2.7 veces más costosa computacionalmente que la malla en elementos finitos no estructurada propuesta por el mallado del modelo numérico MANOLO, logrando de esta forma optimizar el número de nodos a través de la concentración de los elementos triangulares en función del calado en cada punto, además de asegurar que al menos 15 nodos representen la longitud de onda en cada zona dentro del dominio.

El dominio computacional también cuenta con dos zona de absorción de oleaje, la primera con una longitud de 7 m, situada a la izquierda del dominio ($x=-10$ m) con la finalidad de absorber aquel oleaje que se irradia hacia el exterior del dominio, la segunda situada en el extremo derecho del dominio con un espesor de 3 m que simula el efecto de la playa disipativa existente en las experimentaciones de laboratorio.

Se ha simulado un oleaje monocromático con una amplitud de $a=0.0232$ m, y un periodo $T=1$ s, durante un tiempo total de 60 s, y paso de tiempo $\Delta t=0.01$ s, tal como lo propone Kirby *et al.* (1998). Se asignaron 14 puntos de medición y 5 perfiles para las comparaciones pertinentes.

La figura 6.9 muestra las series temporales de superficie libre para los 14 puntos de control asignados dentro del dominio y para los dos modelos numéricos utilizados, se observa cómo el oleaje comienza a propagarse desde la zona de generación y alcanza el estado de equilibrio aproximadamente dentro de las 20 primeras olas individuales. Las elevaciones registradas para aquellos puntos situados por encima del bajo muestran una concentración de la energía que se traduce en un asomeramiento de las olas individuales, las cuales adoptan crestas estrechas y senos más planos, indicando la interacción no lineal que el fondo impone en la transformación del oleaje.

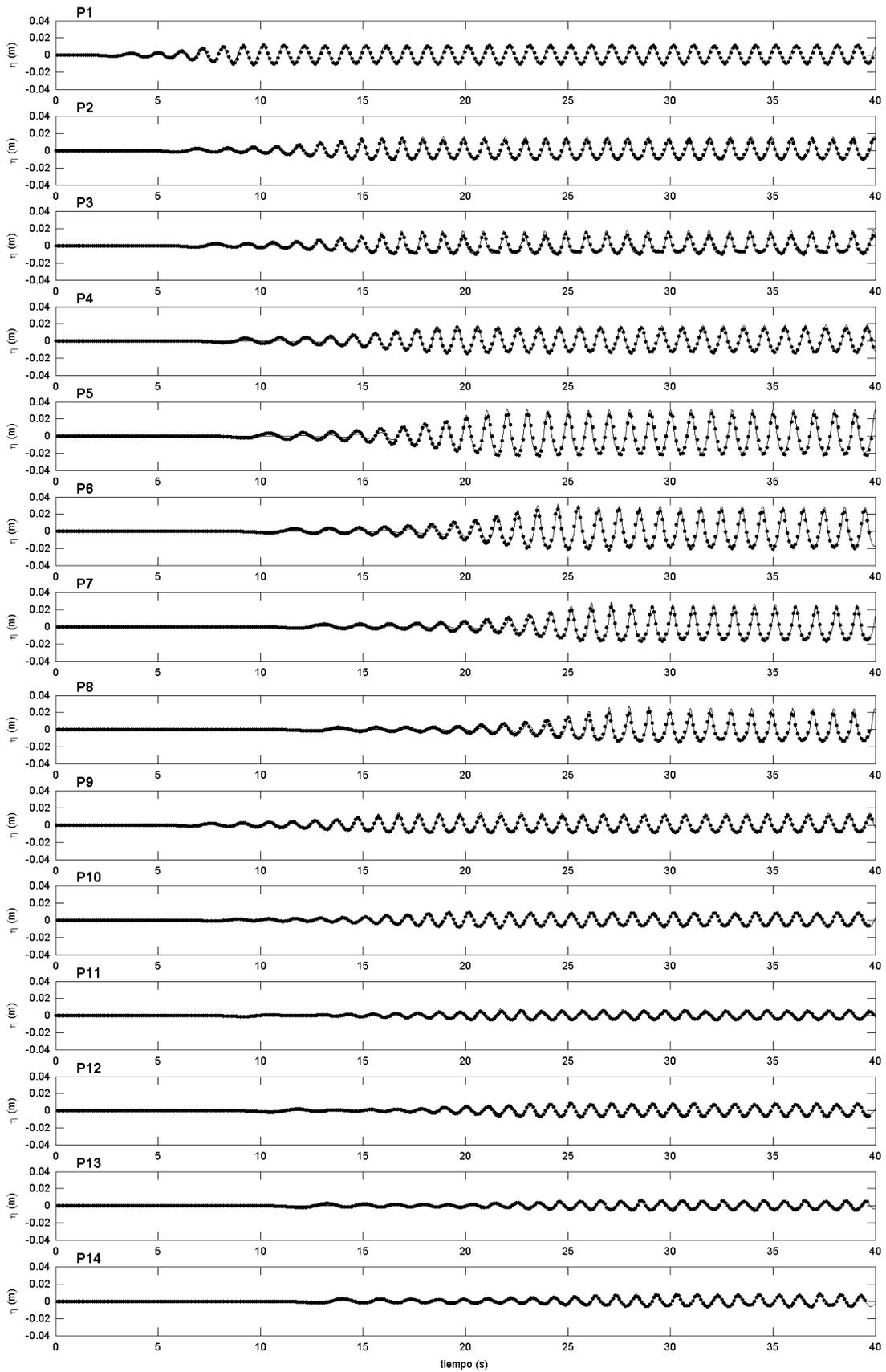


Figura 6.9 Series temporales de superficie libre simuladas con los modelos numéricos FUNWAVE © (línea continua), y MANOLO (puntos).

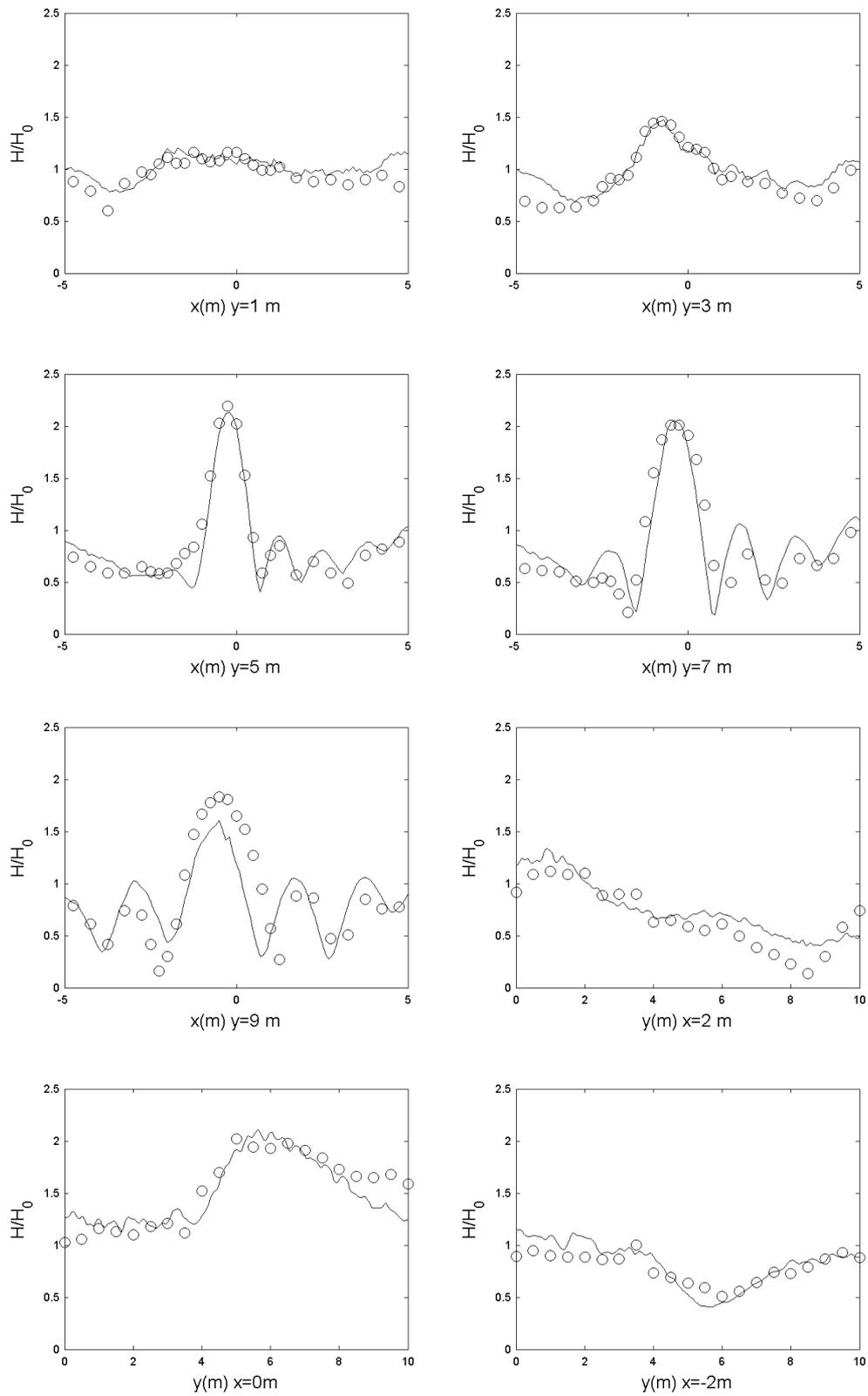


Figura 6.10 Comparaciones de la altura de ola de los 8 transectos. Datos experimentales (ooo) MANOLO (línea continua).

La figura 6.10 muestra las comparaciones de los coeficientes de amplificación alcanzados en los 8 transectos propuestos, para los resultados obtenidos en los ensayos experimentales de Berkhoff *et al.* (1982) y los resultados de altura de ola obtenidos numéricamente con el modelo MANOLO.

Los datos de laboratorio obtenidos en los experimentos de Berkhoff *et al.* (1982) obtenidos en los 8 transectos se obtienen a través de realizar un promediado de las olas individuales para la ventana de simulación de $36 < t < 40$ segundos, para la cual el modelo ya ha alcanzado el estado cuasi-estacionario de oscilación.

En general, se obtienen buenos resultados comparados con los datos experimentales, y en contraste con los resultados obtenidos por las modelaciones numéricas con un modelo basado en las ecuaciones de la *mild slope* por Berkhoff *et al.* (1982), y Kirby & Dalrymple (1994), se observa un mejor desempeño en los valores de superficie libre del oleaje que se mueven sobre el bajo elíptico, indicando la importancia de considerar factores no lineales para lograr mejores resultados para este experimento.

Las mayores diferencias encontradas entre los datos experimentales y los numéricos se aprecian en la sección posterior al bajo batimétrico, aproximadamente en la zona de $x > 8$ m, en donde las alturas de ola obtenidas numéricamente presentan valores aproximadamente un 10% menores que los registrados experimentalmente.

La reducción de los valores de altura de ola numérica observados al final del tanque en $x = 16$ m, se deben en gran parte a que el modelo numérico asegura una absorción total de las ondas que llegan al final del dominio, mientras que los experimentos pueden llegar a incluir una cierta reflexión desde el fondo del tanque la cual llega a imprimir una mayor amplitud en las ondas incidente por efectos de reflexión parcial.

La figura 6.11 muestra una representación de la superficie libre numérica para $t = 40$ s, incluyendo los contornos de la batimetría representados con las líneas negras.

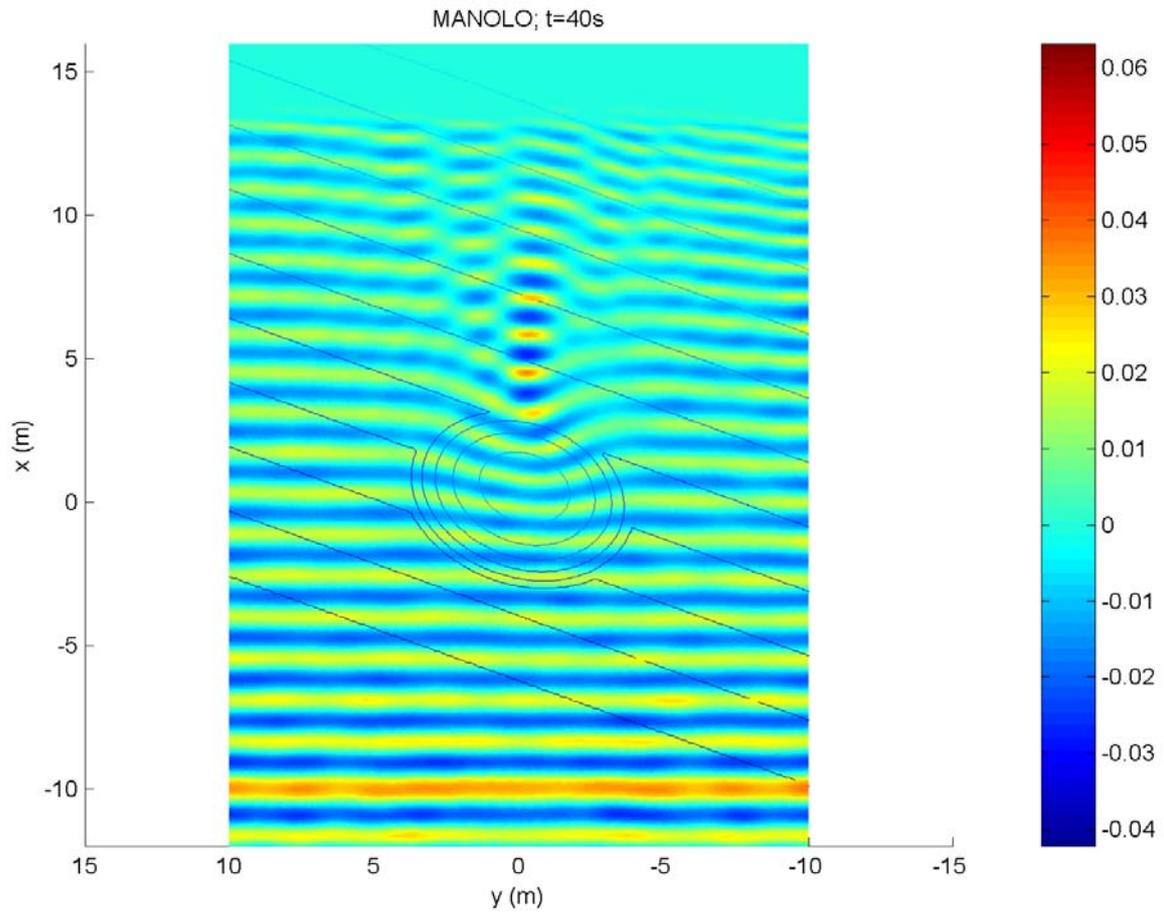


Figura 6.11 Mapa de superficie libre y batimetría del caso Berkhoff et al. (1982) obtenido numéricamente con el modelo MANOLO para t=40 s

6.4.3 Propagación de oleaje sobre una lente batimétrica, (Whalin (1971))

En este apartado se presenta la validación del modelo numérico MANOLO para el análisis experimental propuesto por Whalin (1971), para la verificación de la concentración del oleaje sobre una batimetría formada por once semicírculos ascendentes y sucesivos.

El diseño geométrico del fondo batimétrico siguió las siguientes ecuaciones propuestas.

$$\begin{aligned} h(x, y) &= 0.4572 & 0 \leq x < 10.67 - G \\ h(x, y) &= 0.4572 + (10.67 - G - x)/25 & 10.67 - G \leq x < 18.29 - G \\ h(x, y) &= 0.1524 & 18.29 - G \leq x < 21.34 \end{aligned} \quad (6.147)$$

donde

$$G(y) = [y(6.096 - y)]^{1/2} \quad 0 \leq y \leq 21.34 \quad (6.148)$$

En la figura 6.12 se muestra la batimetría obtenida para las simulaciones numéricas como parte inicial del proceso de validación del modelo de oleaje.

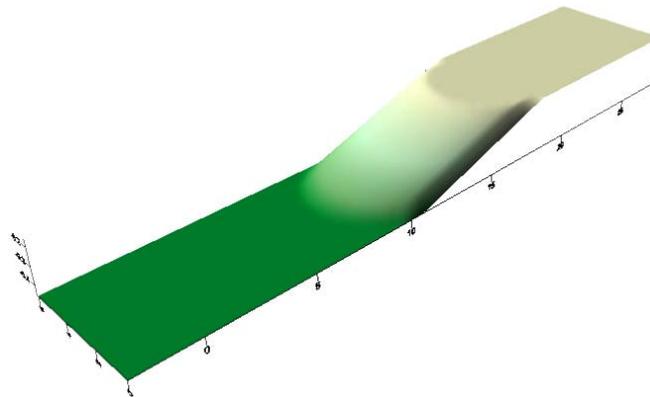


Figura 6.12 Batimetría propuesta en los experimentos de Whalin (1971)

Se realizaron tres simulaciones con oleaje monocromático siguiendo los experimentos de Whalin (1971). Los oleajes incidentes tienen una altura de ola $H_1=0.039$ m, $H_2=0.015$ m y $H_3=0.0136$ m, y corresponden a un periodo de $T_1=1$ s, $T_2=2$ s, y $T_3=3$ s, obteniéndose para la profundidad constante $h=0.4572$ m, una profundidad relativa de $h/L_1=0.306$, $h/L_2=0.117$ y $h/L_3=0.74$ respectivamente.

Debido a que se trabaja con tres periodos diferentes de oleaje incidente, y a fin de minimizar los costos computacionales, se generan tres mallas individuales para cada una de las simulaciones, alcanzándose los siguientes valores para cada caso, mostrados en la tabla 6.1.

H (m)	T (s)	h/L	nodos	elementos
0.039	1	0.306	57794	114668
0.015	2	0.117	12058	23689
0.0136	3	0.074	6750	13188

Tabla 6.1 Valores geométricos y de oleaje incidente para los tres casos simulados.

El dominio numérico consta de una zona de absorción de 2.8 metros de espesor, situada en el extremo derecho del dominio, área que simula una playa disipativa que busca minimizar los efectos de la reflexión desde el fondo del dominio. Se colocó una segunda zona de absorción del oleaje hacia el exterior al inicio del dominio, compartiendo posición con el área de generación. Dicha zona se encarga de captar y absorber el oleaje que se irradia hacia el exterior del sistema y atraviesa la zona de generación, intentando así simular los efectos de absorción que la pala de generación de oleaje utiliza en laboratorio.

La figura 6.13 muestra la transformación de las tres ondas monocromáticas al incidir sobre el fondo variable.

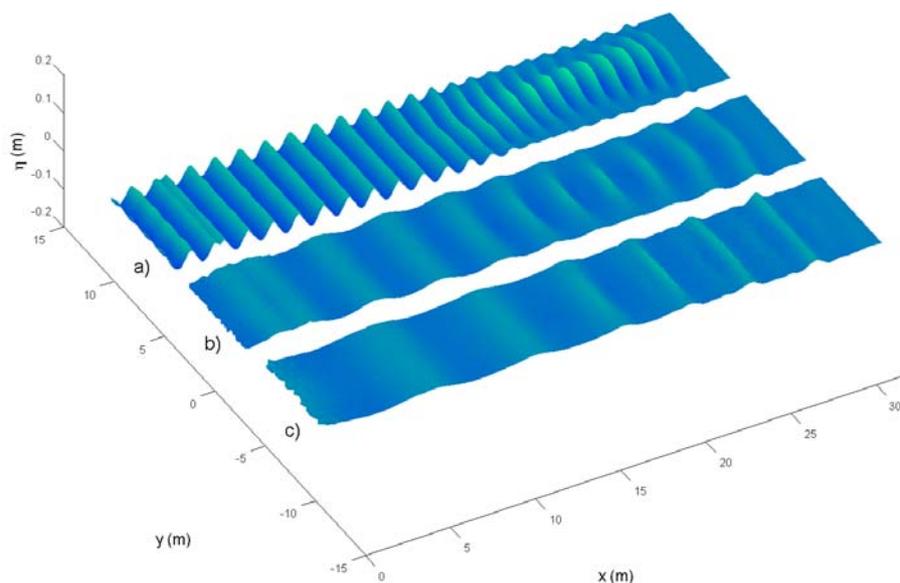


Figura 6.13 Superficie libre instantánea para $t=40s$, obtenidas con el modelo numérico MANOLO, para los tres periodos, a) $T=1s$, $H=0.039m$, b) $T=2s$, $H=0.015m$, c) $T=3s$, $H=0.0136m$.

La figura 6.14 muestra las comparaciones de los valores de amplitud para el primero, segundo, y tercer armónico calculados numéricamente a lo largo de la línea central el dominio computacional, con los valores experimentales obtenidos por Whalin (1971).

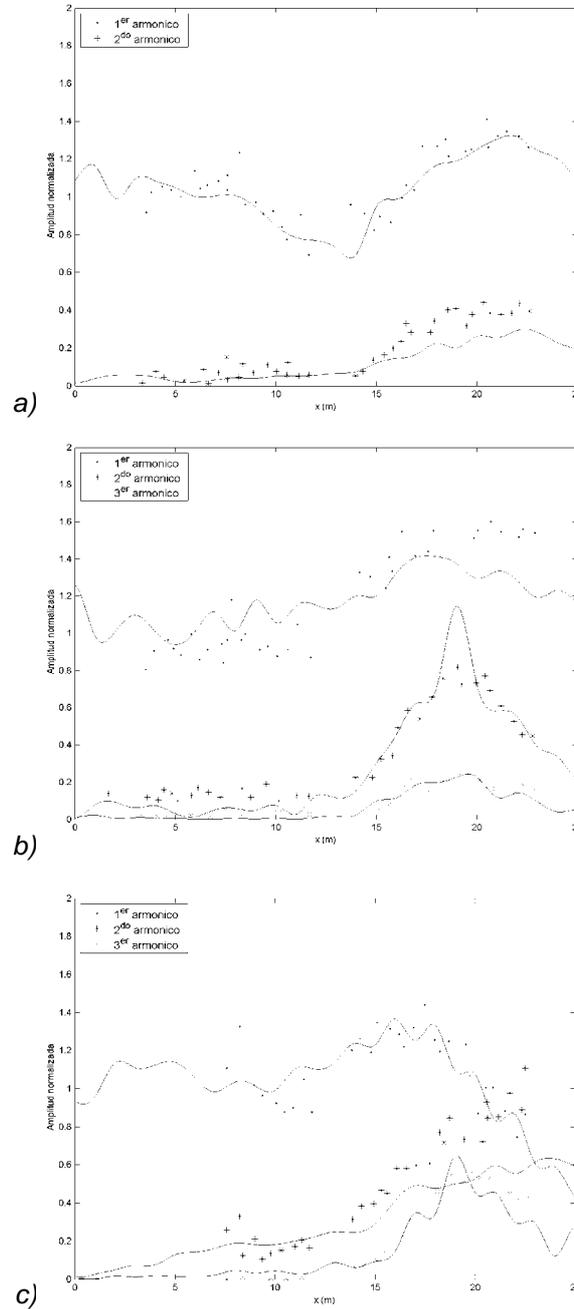


Figura 6.14 Comparaciones entre las amplitudes de los tres primeros armónicos para la línea central a lo largo del canal, y para los tres periodos, a) $T=1s$, $H=0.039m$, b) $T=2s$, $H=0.015m$, $T=3s$, $H=0.0136m$. Comparados con los datos experimentales Whalin (1971). Datos experimentales: 1er armónico (●●), 2do armónico (**), 3er armónico (XX). Resultados numéricos: Líneas continuas.

Los resultados numéricos son consistentes con los datos experimentales, y con las comparaciones propuestas por Li *et al.* (1999). Se observa para el caso de $T=1$ s, que tanto el primer como el segundo armónico aumentan en valor al propagarse sobre las lentes batimétricas crecientes. Los valores numéricos obtenidos para ambos armónicos son consistentes con los valores experimentales si no consideramos la disgregación que presentan las mediciones experimentales. Los valores para el segundo armónico parecen ser sub-estimados por parte del modelo numérico para la parte final del dominio, posiblemente debido a que la zona de absorción numérica impuesta al final del dominio tiene un comportamiento diferente a la técnica correspondiente utilizada en el laboratorio.

Para la simulación con $T=2$ s se obtienen las mejores correlaciones con los datos experimentales para el primero, segundo, y tercer armónico, con únicamente una sobre-amplificación en el máximo de la curva del segundo armónico, que rápidamente se establece hasta llegar al final del dominio y valores levemente sobre amplificados en la parte final del dominio por parte del primer armónico.

6.4.4. Resonancia en una bahía rectangular

Con el fin de evaluar la aplicabilidad del modelo MANOLO para estudiar las oscilaciones portuarias, se ha estudiado la resonancia inducida por la incidencia de una onda periódica en un puerto rectangular y se ha comparado con los resultados experimentales. En este tipo de estudio suele ser necesario escalar el tamaño del dominio con el fin de evitar posibles errores de redondeo derivados de un tamaño excesivamente pequeño de los elementos.

En primer lugar se ha considerado el caso de resonancia lineal, para después analizar el caso de resonancia no lineal. Este último caso muestra claramente las posibilidades y mejoras que este modelo ofrece frente a los modelos lineales usualmente empleados en el análisis de fenómenos de resonancia portuaria.

Caso 1. Resonancia lineal en una bahía rectangular, (Ippen & Goda, 1963)

Ippen & Goda (1963), y posteriormente Lee (1971), llevaron a cabo una serie de experimentos de propagación de oleaje dentro de una bahía rectangular estrecha, con una anchura mucho menor que la longitud del puerto $w \ll l$, y con una longitud portuaria mucho menor que las longitudes de onda incidentes $l \ll L$, con el objetivo de obtener la respuesta de oscilación lineal del puerto.

Las dimensiones propuestas para dichas experimentaciones fueron las siguientes, anchura $w=0.0604$ m, longitud $l=0.3111$ m y profundidad constante $h=0.2573$ m.

La figura 6.15 muestra las dimensiones y el mallado en elementos finitos generado para las simulaciones numéricas con el modelo MANOLO. En este caso y debido a que el problema es simétrico con respecto al eje longitudinal del dominio, se propone la utilización de la mitad del dominio computacional para reducir el coste de CPU. La longitud del tamaño de la corona de absorción es igual a 2.70 m, y la posición del área de generación es en el punto $x=-1.50$ m, con una longitud de 1.50 m y una anchura de 0.20 m. La malla en elementos finitos triangulares no estructurados generada, consta de 2835 nodos y 5392 elementos.

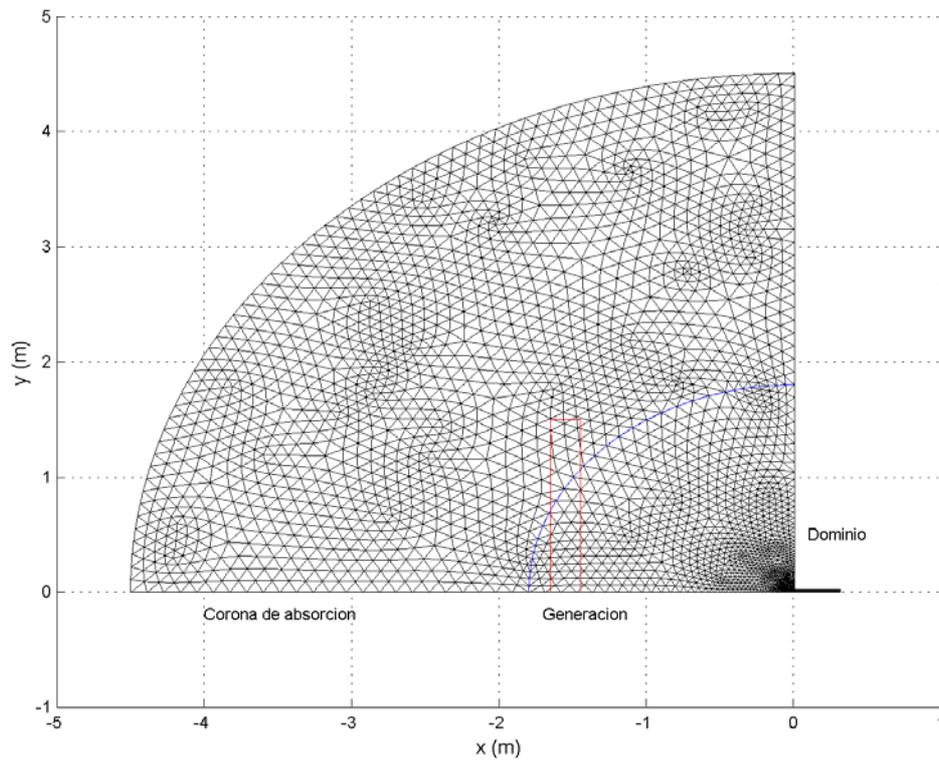


Figura 6.15 Dominio computacional y malla en elementos finitos triangulares para el caso simulado Ippen & Goda (1963).

Se han realizado una serie de simulaciones para diferentes valores crecientes de número de onda adimensionalizado con la longitud del puerto para el rango $0.5 < kl < 4.5$ con un intervalo de simulaciones cada $\Delta kl = 0.5$, con ondas monocromáticas de amplitud constante para cada serie de $a = 0.0033$ m.

Además, se realizó una ejecución adicional para el modo fundamental del puerto rectangular, que es $kl = 1.32$ y corresponde exactamente al punto de sobre-amplificación máxima que presenta el canal, Lee (1971). Las simulaciones numéricas llegaron al estado cuasi-estacionario aproximadamente en las seis primeras olas generadas.

La figura 6.16 representa la respuesta de amplificación dentro del puerto rectangular obtenido con el modelo MANOLO, y comparado con los resultado obtenidos con un modelo lineal propuesto por Lee (1971), previamente validado con los datos experimentales de Ippen & Goda (1963).

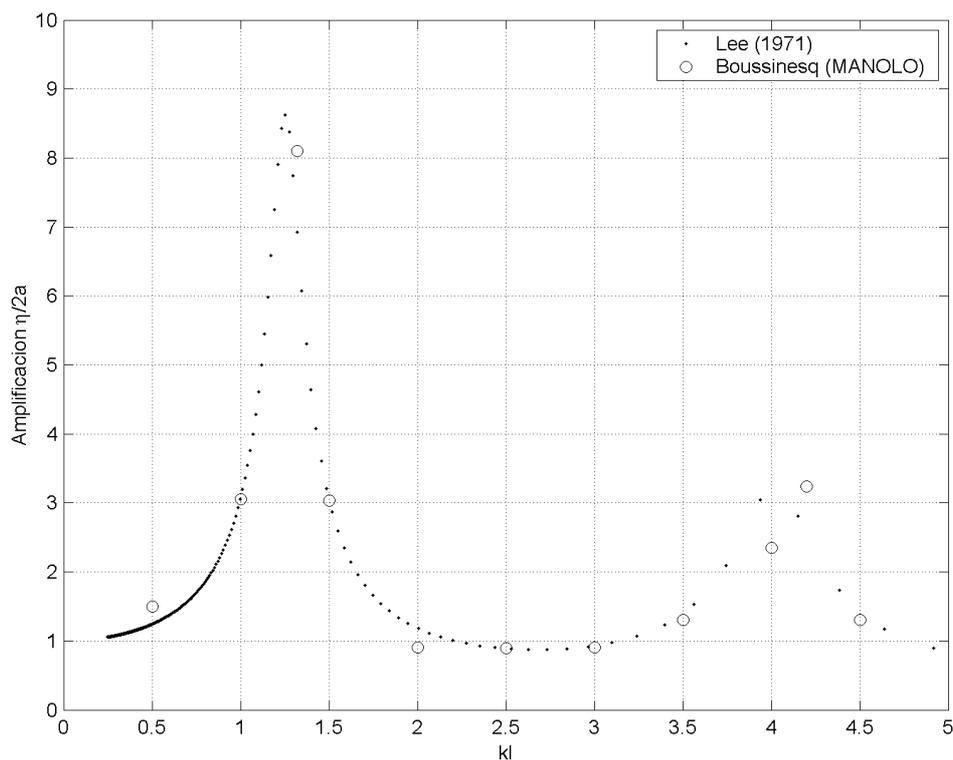


Figura 6.16 Respuesta de amplificación para el puerto rectangular Ippen & Goda (1963). Solución lineal Lee (1971), puntos. Solución numérica MANOLO, círculos.

Los resultados obtenidos con el modelo MANOLO tienen una buena correlación con los obtenidos con el modelo analítico de Lee (1971), poniéndose de manifiesto la capacidad que tiene el modelo numérico para evaluar el fenómeno de resonancia portuaria lineal para una dársena rectangular bajo condiciones simplificadas de geometría y oleaje.

En la figura 6.17 se puede observar la respuesta de amplificación que el modelo ofrece para los experimentos de Ippen & Goda (1963), en las representaciones de superficie libre para tres diferentes tiempos de ejecución para un $kl=1.32$ (modo fundamental).

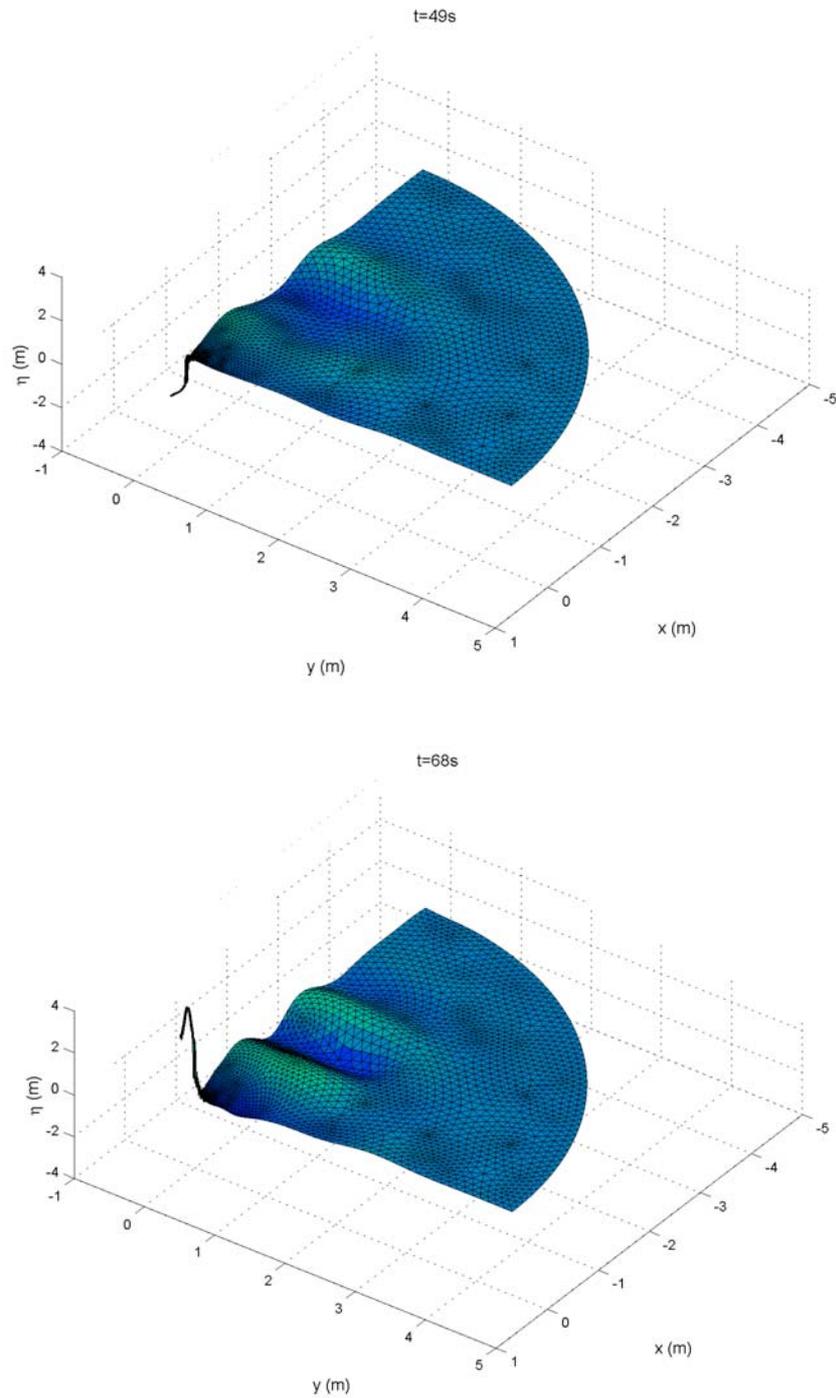


Figura 6.17 Mapas 2D de superficie libre para el caso Ippen & Goda (1963), simulado con el modelo numérico MANOLO para $kl=1.32$, y los tiempos $t_1=49s$, y $t_2=68s$.

Caso 2. Generación resonante de superarmónicos, (Rogers & Mei (1978))

Rogers & Mei (1978), estudiaron la respuesta resonante no lineal en una bahía larga y estrecha. Utilizaron las ecuaciones convencionales de Boussinesq en el interior de la bahía y la teoría lineal de ondas fuera de la bahía de tal modo que el problema no lineal en el interior de la bahía quedara desacoplado del problema en el océano exterior. El problema de contorno unidimensional no lineal fue resuelto numéricamente en el dominio de la frecuencia. Asimismo se realizaron ensayos experimentales para una frecuencia fija y tres longitudes de bahía diferentes que corresponden a los tres primeros modos resonantes, respectivamente.

Los resultados numéricos obtenidos por los autores para el segundo y tercer armónico se desvían de forma significativa de los datos experimentales. Una de las razones que explica estas diferencias podría ser que los experimentos fueron realizados en profundidades intermedias, $\mu^2 = 0.257$, que se sale del rango de aplicación de las ecuaciones convencionales de Boussinesq. Otra razón podría ser que la hipótesis de asumir teoría lineal de ondas fuera de la bahía pudiera ser poco correcta. En cualquier caso, su trabajo fue el primer estudio riguroso en el que se puso de manifiesto la importancia de la no linealidad y la dispersión en el problema de la oscilación en el interior de puertos o bahías.

El modelo numérico MANOLO presenta dos ventajas fundamentales frente a la aproximación de Rogers & Mei (1978). En primer lugar, las ecuaciones de gobierno utilizadas tienen un rango de validez mucho más amplio que las ecuaciones de Boussinesq convencionales, de tal modo que el parámetro de dispersión de los experimentos sí se encuentra dentro del rango de validez del presente modelo. En segundo lugar, la no linealidad se aplica en todo el dominio.

Las experimentaciones fueron realizadas para tres bahías de longitud 1.211 pies, 4.173 pies y 7.136 pies. Dado que el sistema era no lineal, determinaron experimentalmente dichas longitudes de las bahías produciendo los tres primeros picos resonantes.

La pala, localizada a una distancia de 31 pies de la bocana de la bahía, generaba ondas con un periodo de 1.545 s. Se utilizó una profundidad constante de 6 pulgadas dando lugar a una longitud de onda de aproximadamente 6 pies. Para cada bahía se hicieron ensayos con 3 amplitudes incidentes diferentes.

En su modelo físico, se midió inicialmente la amplitud de las ondas estacionarias con la bocana de la bahía completamente cerrada. A partir de esas medidas se calcularon las amplitudes de los armónicos y las diferencias de fase, utilizándolas como condiciones de contorno para sus cálculos numéricos del sistema de ondas en el interior de la bahía. En su trabajo hacen notar que en su teoría y experimentación el armónico de orden cero se asumió pequeño y fue eliminado del análisis de Fourier.

Con el fin de comparar los resultados numéricos obtenidos con los experimentos, es necesario seguir su procedimiento experimental de manera idéntica. Sin embargo, la limitación derivada de los recursos computacionales hace necesario utilizar un dominio mucho más pequeño y colocar la pala mucho más cerca de la bocana que lo realizado en los ensayos de laboratorio.

En este apartado se muestran los resultados correspondientes al caso de la bahía de 7.136 pies que tiene una forma muy similar a la que se ha mostrado en el caso de Ippen & Goda (1963). Una vez más, y dado que el problema es simétrico con respecto al eje y , solamente se ha considerado la mitad del dominio para realizar los cálculos. Las dimensiones físicas de la bahía rectangular son 0.5 m de ancho, una longitud de 21.75 m y una profundidad de 1.525 m. Esto representa un prototipo a escala 1:10 de la bahía en cuestión.

La figura 6.18 muestra las dimensiones y el mallado en elementos finitos diseñado para el caso 2 y caso 3 de resonancia no lineal y generación de sub-armónicos, simuladas con el modelo MANOLO, y al igual que en el caso 1 anteriormente descrito, se considera un problema simétrico con respecto al eje longitudinal del dominio

El área de generación se localiza a 18 m de la bocana del canal, y una zona de absorción semicircular con inicio a 25 m de la bocana y con una anchura de 25 m.

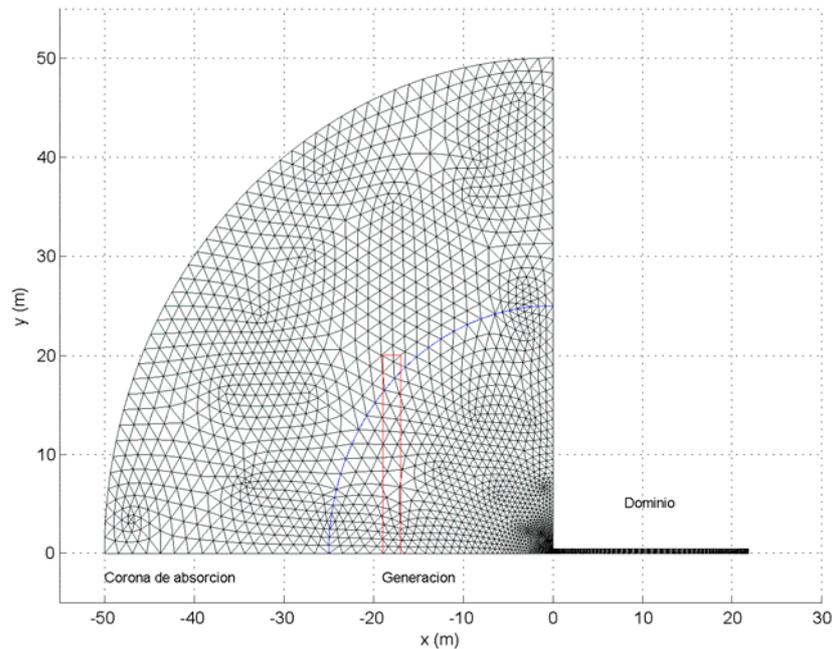


Figura 6.18 Dominio computacional y malla en elementos finitos triangulares para el caso simulado Rogers & Mei (1978).

La malla en elementos finitos triangulares diseñada cuenta con 1911 nodos y 3568 elementos. El centro de la generación interna se sitúa en $x = -18$ m, y la zona de generación en $(x, y) \in [-20, -16] \times [0, 20]$ m. La onda objetivo para la función de generación se selecciona de tal modo que las amplitudes de los armónicos calculados en $(x, y) = (0, 0)$ coinciden con los valores medidos en Rogers & Mei (1978) para el caso de la bocana de la bahía cerrada. Se ha observado que dos componentes objetivo son suficientes para reproducir los ensayos. La primera componente objetivo tiene una amplitud de 0.035 m y una longitud de onda de 18.3 m, correspondiéndole un período de 4.9 s. La segunda componente objetivo tiene una amplitud de 0.01 m y una longitud de onda de 7.9 m, con un periodo de 2.45 s.

La Figura 6.19 muestra la representación tridimensional de superficie libre para diferentes instantes de tiempo por al caso considerado, observándose la respuesta de la bahía y su desarrollo a lo largo del tiempo, desde la acción de las primeras ondas donde el movimiento no se ha desarrollado totalmente, hasta que algunas de las frecuencias de

la bahía comienzan a resonar, y la sobre-amplificación de la superficie libre comienza a aparecer.

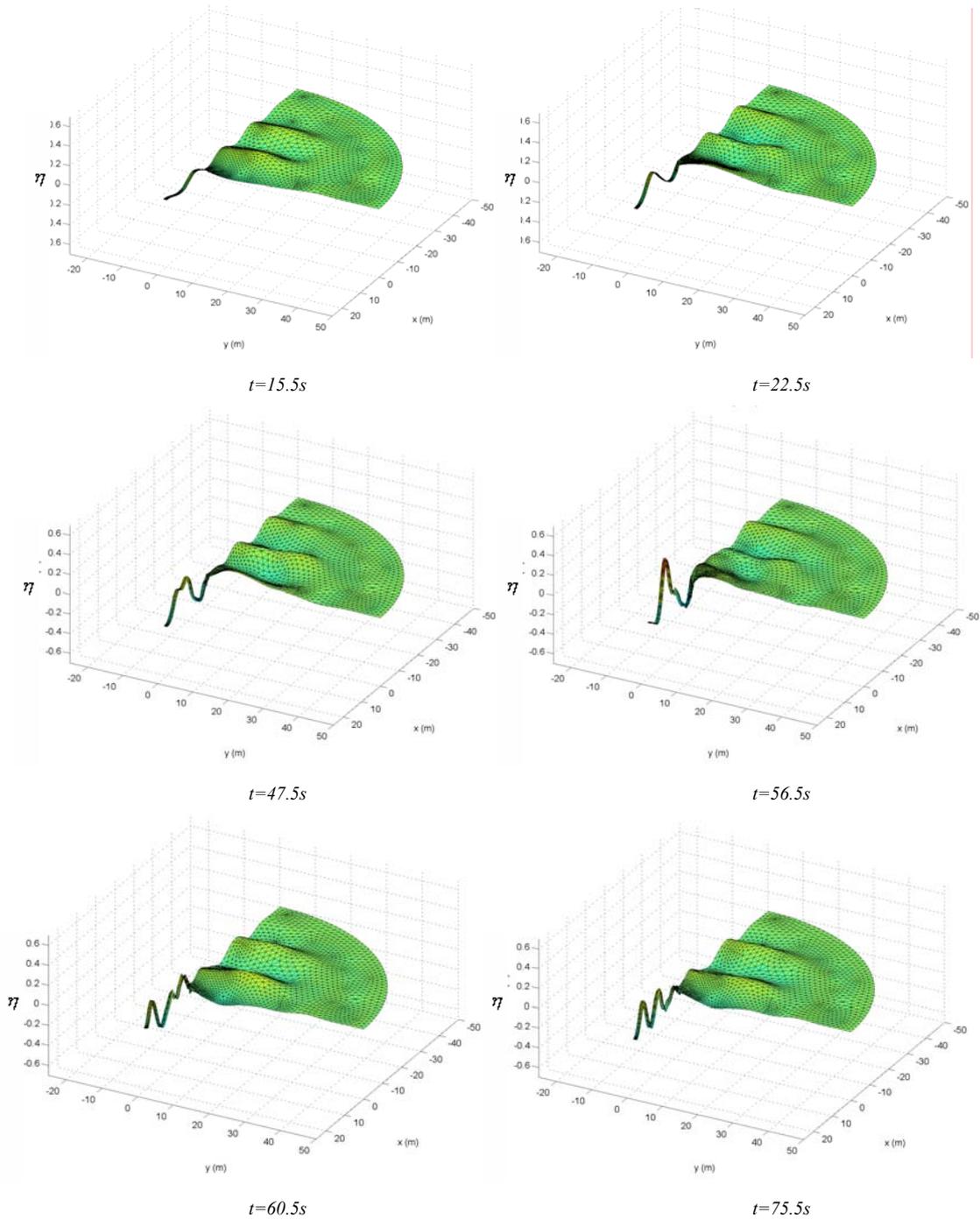


Figura 6.19 Desarrollo de la superficie libre para el caso de Rogers & Mei (1978), modelado numéricamente para diferentes instantes de tiempo.

Para verificar si el sistema ha llegado a un estado cuasi-estacionario, la serie temporal de la superficie libre se ha representado en diferentes puntos de control situados a lo largo de la línea media del canal, figura 6.20.

La serie temporal muestra unos patrones de evolución de la superficie libre bastante diferentes de un punto a otro. Frente a la bocana del puerto $x=(-4,0)$, la oscilación de la superficie libre es muy pequeña en el tiempo, indicando la existencia de un nodo. Como se muestra en las figuras 6.20 (b) – (e) las componentes armónicas de más alta frecuencia empiezan a aparecer en la bahía. Debido al comportamiento del tipo de onda estacionaria en la bahía, cada punto muestra diferentes fluctuaciones de la superficie libre. Las figuras (b) y (d) muestran los antinodos para el primer armónico, mientras que en las figuras (c) y (e) aparecen nodos. Estos gráficos muestran también que existe un periodo de modulación inicial antes de que el sistema alcance un estado cuasi-estacionario, similar al sistema lineal en la sección anterior. Estas modulaciones son más notables, como es obvio, en los puntos interiores de la bahía (figura 6.20 (d) y (e)), llegándose al estado cuasi-estacionario alrededor de los 150 s.

Las características de las oscilaciones de la superficie libre en los diferentes puntos pueden estudiarse también mediante un análisis de las componentes espectrales. Los paneles de la derecha de la figura 6.20, muestran los espectros de amplitud normalizados con la profundidad en el mismo punto que en los presentados en los paneles a la izquierda.

Utilizando una transformada rápida de Fourier, se obtiene la amplitud del espectro para aproximadamente 15 periodos, $t \in [150, 225]$ s. El primer armónico corresponde a 0.2 Hz, que es una frecuencia muy próxima al de las ondas incidentes. Al segundo y tercer armónico les corresponden unas frecuencias de 0.4 y 0.6 Hz, respectivamente. Como era esperable, cerca de la bocana $x=(-4,0)$, todas las componentes armónicas son muy pequeñas. Los espectros en $x=(2.4,0)$ y $x=(12.5,0)$ (figuras 6.20 (b) y d) muestran la generación componentes armónicas superiores con la correspondiente reducción en la amplitud del armónico principal. Por otro lado, las figuras 6.20 (c) y (e) muestran que la magnitud de los armónicos de más alta frecuencia es todavía mayor que la correspondiente al primer armónico. Especialmente, en el punto $x=(17.2, 0)$, figura 6.20

(e) la amplitud del segundo armónico se amplifica considerablemente, lo que está en consonancia con la observación de Rogers & Mei (1978) según la cual el segundo pico resonante es producto de interacciones no lineales.

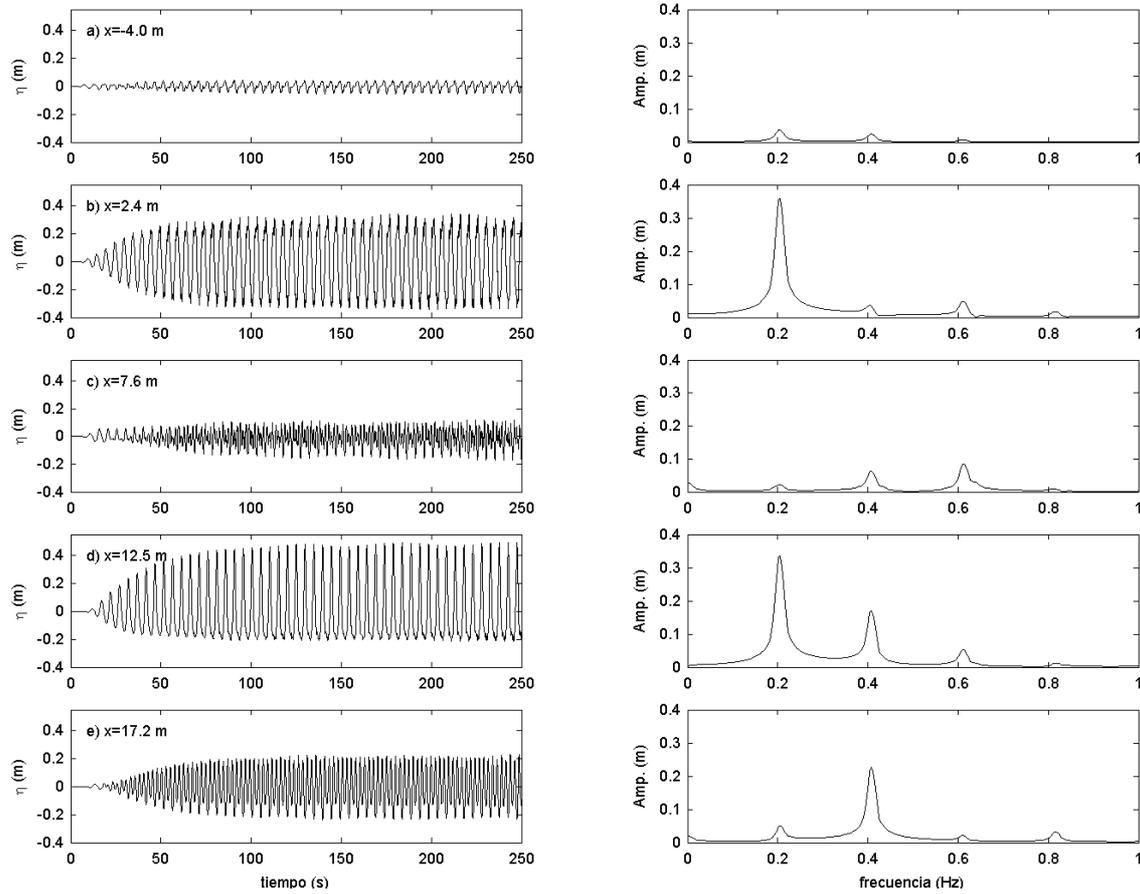


Figura 6.20 Registros temporales de superficie libre y espectros de amplitudes obtenidos para 5 puntos localizados a lo largo del canal. Resultados numéricos.

Caso 3. Generación resonante de subarmónicos, (Rogers & Mei (1978))

La resonancia portuaria puede ser causada por ondas infragravitatorias (subarmónicas) vinculadas a grupos Bowers (1977); Mei & Agnon (1989); Woo & Liu (2004b). La interacción de estas ondas vinculadas con estructuras portuarias puede dar lugar a la generación local de ondas infragravitatorias libres. Cuando la frecuencia de dichas ondas infragravitatorias coincide con una de las frecuencias naturales del puerto, se produce una respuesta resonante.

En esta sección se presenta como se ha hecho uso del modelo MANOLO para analizar la resonancia portuaria inducida por grupos. El sistema incidente se ha forzado con dos componentes frecuenciales que al interactuar no-linealmente generan una onda vinculada. La frecuencia de la onda subarmónica vinculada se ha generado de tal modo que coincida con una de las frecuencias naturales de oscilación del puerto a fin de forzar la resonancia portuaria de esta componente subarmónica resultante en el interior del puerto.

En este caso se ha seleccionado la geometría de la bahía rectangular más larga utilizada por Rogers & Mei (1978). La figura 6.21, muestra la solución analítica del factor de amplificación para esta geometría, obtenido con el modelo analítico propuesto por Liu *et al.* (2004). Como se observa en la figura, ω_1 , que corresponde al tercer modo resonante, se aproxima mucho a la frecuencia de la onda incidente considerada en la sección anterior. Además, de ω_1 se ha generado una componente adicional en la generación interna de frecuencia ω_2 . La selección de ω_2 se ha hecho de tal modo que la onda vinculada subarmónica con una frecuencia de pulsación $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, coincida con la frecuencia del segundo modo resonante. Las frecuencias de las dos ondas portantes son $\omega_1 = 0.21$ Hz y $\omega_2 = 0.33$ Hz, respectivamente. Se ha utilizado la misma amplitud objetivo, es decir, $a_1 = a_2 = 0.005$ m. El período de la onda vinculada correspondiente es aproximadamente 8s.

La malla utilizada es idéntica a la mostrada para el caso 2 anteriormente descrito, que se puede observar en la figura 6.18.

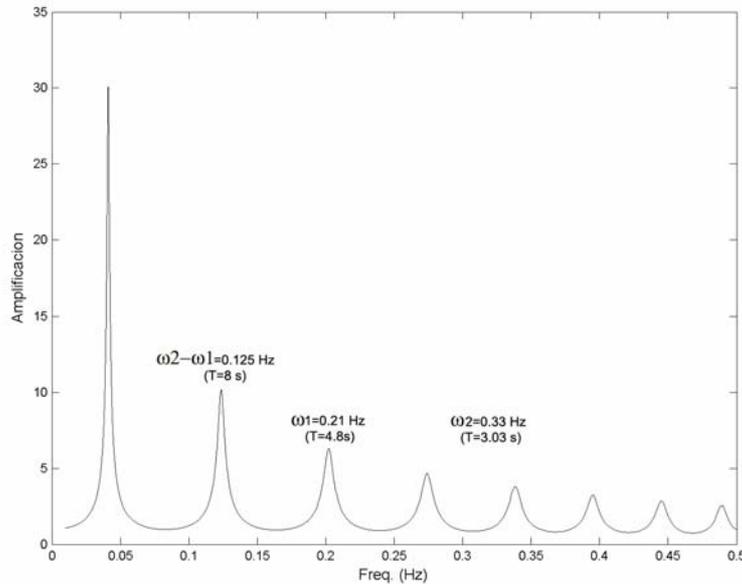


Figura 6.21 Solución analítica del factor de amplificación para el caso de Rogers & Mei (1978). Obtenido con el modelo propuesto por Liu et al. (2004).

Los resultados numéricos de este caso muestran unas fluctuaciones de la superficie libre irregular, y difícil de observar a simple vista, por esto la variación temporal de la energía de la onda puede analizarse mediante un espectro tipo wavelet como se muestra en la figura 6.22. En $x=2.4$ m y 12.5 m ((a) y (c)), la energía de la onda se concentra en el periodo de la onda (4~6 s) y el nivel energético de la onda subarmónica (8 s) es bajo. Obsérvese, que el periodo de una de las dos ondas de generación del grupo, $T=4.8$ s, coincide con el tercer modo resonante de la bahía de tal modo que el nivel energético en (4~6 s) se amplifica y es mucho mayor que el correspondiente a la otra onda incidente cuyo periodo es 3 s.

Como era esperable la energía de la onda subarmónica domina en ciertas localizaciones como se muestra en las figuras (b) y (d). En el fondo de la bahía (e), el nivel de energía dominante, tanto para la onda portante como subarmónica, se muestra claramente en la figura. Comparando el tiempo que tarda en hacerse patente totalmente la energía de la onda subarmónica en diferentes posiciones ((b), (d) y (e)), se observa que más tiempo es necesario cuanto más nos alejamos de la bocana. Esto parece razonable puesto que hace falta espacio y tiempo para transferir la energía a los subarmónicos. Una vez que las ondas subarmónicas han sido totalmente desarrolladas, éstas permanecen en la bahía.

Sin embargo, las componentes de onda corta, cuyo periodo es inferior a 3 s, no llegan a una situación cuasi estacionaria en ningún punto del dominio. Este fenómeno puede ser explicado considerando una transferencia relativamente intensa entre componentes armónicas de alta frecuencia. Por otra lado, es interesante observar que las características periódicas de la transferencia de energía entre componentes de onda larga cuyo periodo es mayor de 6 s, está prácticamente en todas las localizaciones. Entre todas ellas, la más evidente es la caracterización periódica de 12 s claramente observable en la parte más interior de la bahía (figura 6.22 (e)).

Utilizando las series temporales de la superficie libre, se hace una transformada rápida de Fourier (FFT) para obtener el factor de amplificación. Los resultados se muestran en la figura 6.23. La FFT se realiza utilizando el segmento temporal de 150 s a 250 s, dado que tanto la onda portante como las ondas subarmónicas han llegado a un estado cuasi estacionario cerca de los 70 s como se muestra en la figura 6.19. La figura 6.23 (a) muestra el factor de amplificación en la bocana de la bahía ($x=(0,0)$) considerando la bahía cerrada. Obsérvese que para la normalización solo se utiliza la altura de una de las ondas objetivo ($2a_1$), de tal modo que las dos ondas portantes tienen un factor de amplificación próximo a 1. Dado que la no linealidad no es muy fuerte ($\varepsilon = 0.13$), el factor de amplificación de los subarmónicos y superarmónicos no es muy grande. Sin embargo, al abrir la bahía las componentes subarmónicas se ven claramente amplificadas, dado que su frecuencia coincide con el segundo modo resonante de la bahía, figura 6.23 (b).

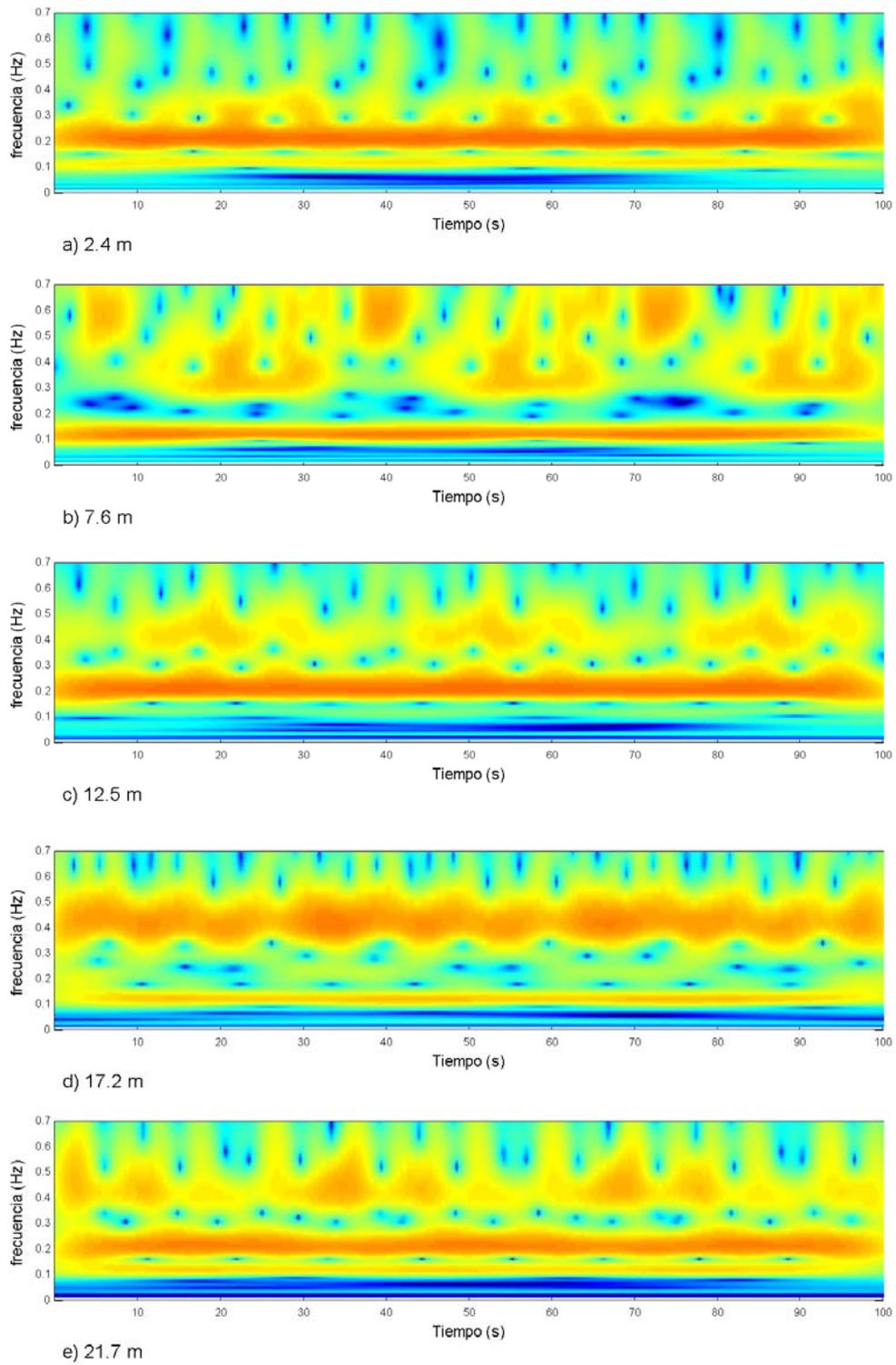


Figura 6.22 Espectros wavelet para diferentes posiciones del puerto

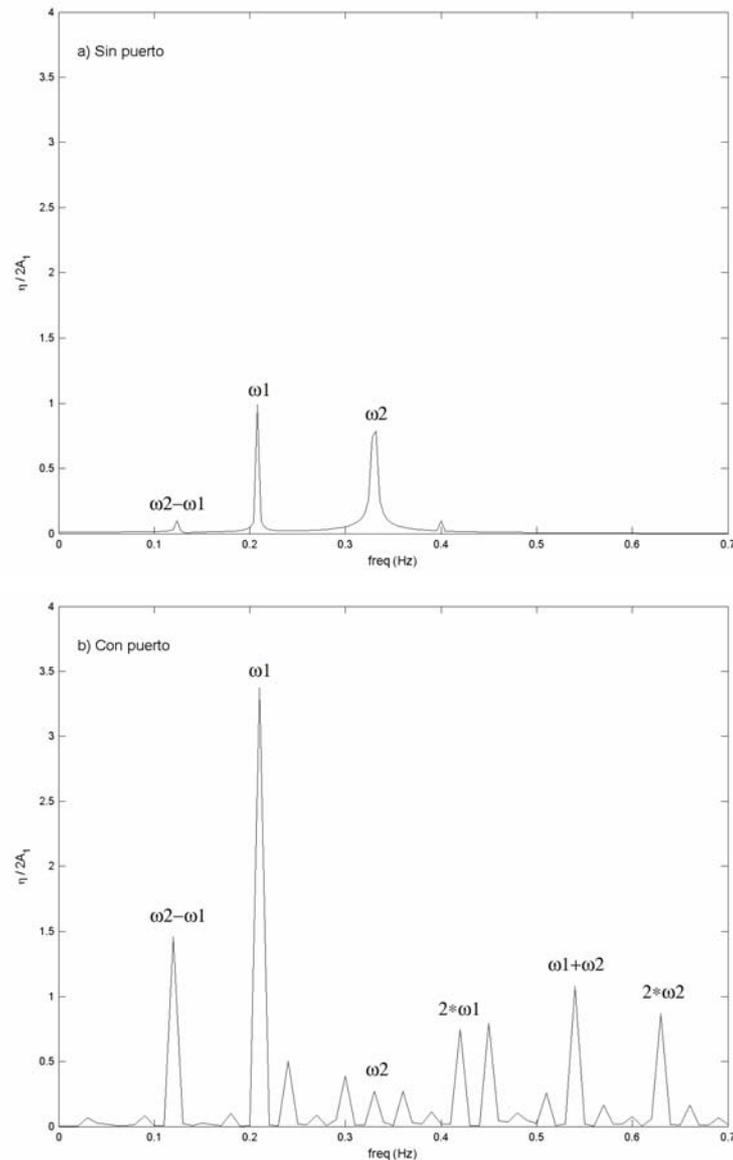


Figura 6.23 Factor de amplificación (a) en la entrada de la bahía con la bahía cerrada y (b) al final de la bahía con la bahía abierta

Las variaciones espaciales de la amplitud a lo largo de la bahía, tanto de la onda portante incidente como de la onda subarmónica se muestra en la figura 6.23. Se observa la fuerte transformación energética que sufre el sub-armónico $\omega_2 - \omega_1$ que adquiere importancia bajo los efectos de la resonancia; el armónico ω_1 sufre las máximas sobre-amplificaciones resonantes, mientras que el armónico ω_2 cede gran parte de su energía al sub-armónico, y a super-armónicos $\omega_1 + \omega_2$, $2 \cdot \omega_1$, y $2 \cdot \omega_2$ en forma de oscilaciones más cortas.

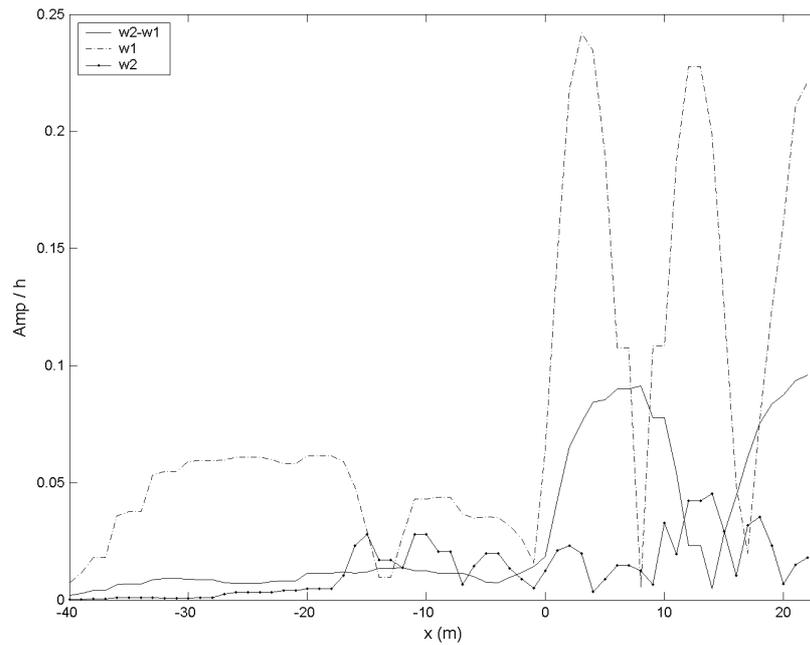


Figura 6.24 Variación espacial de las amplitudes a lo largo de la bahía

La figura 6.24 expone de manera clara cómo a partir del punto de inicio de la bocana $x=0$ m, el modelo logra transformar la energía incidente de la onda bi-cromática hacia el sub armónico $\omega_2 - \omega_1$, haciendo que éste se libere del grupo bi-cromático de ondas incidentes.

Las amplificaciones para el armónico $\omega_2 - \omega_1$ muestran dos antinodos bien marcados, mientras que para la onda con una frecuencia ω_1 presenta las máximas sobre amplificaciones a lo largo del canal, ya que coincide con uno de los modos resonantes naturales del canal rectangular. La onda con el armónico ω_2 , parece que no sufre amplificación alguna por los efectos resonantes, cediendo parte de su energía hacia el armónico resonante $\omega_2 - \omega_1$, el cual presenta inclusive sobre-amplificaciones menos energéticas que las interiores en la zona exterior del puerto rectangular.

6.5 CONCLUSIONES

En este capítulo se ha presentado el modelo numérico MANOLO. El citado modelo resuelve las ecuaciones modificadas de Boussinesq debidas a Nwogu (1993) sobre una malla no estructurada en elementos finitos. Las ecuaciones resueltas son transitorias, y mejoran la no linealidad y dispersividad frente a las ecuaciones anteriormente utilizadas para el estudio de la resonancia portuaria. La generación se realiza mediante una función fuente que puede simular series temporales de oleaje de corto periodo. Dado el carácter no lineal de las ecuaciones, el modelo puede generar ondas largas que a su vez pueden ser causa del forzamiento de resonancia portuaria.

En principio, el modelo reúne todos los requisitos necesarios para abordar adecuadamente los elementos que desde el punto de vista conceptual sirven de eje fundamental de esta Tesis: generación, transitoriedad, no linealidad y, dada la facilidad de discretizar geometrías complejas mediante mallas no estructuradas, sumada a la no linealidad, también el acoplamiento geométrico.

El modelo se ha contrastado frente a una serie de casos de referencia típicos de la literatura, considerando, tanto la propagación de oleaje como la resonancia. Los resultados obtenidos son sumamente satisfactorios, especialmente en cuanto al caso considerado en el que se ha analizado la generación de resonancia por un subarmónico a partir de dos ondas de corto periodo. El modelo se ha mostrado como muy adecuado no sólo para analizar los periodos resonantes, sino fundamentalmente para estudiar la distribución energética en el espacio y en el tiempo, en el interior de la geometría considerada.

Se considera, por tanto, que el modelo ha dado resultados muy prometedores y que puede servir como base para una metodología para el análisis riguroso de la resonancia portuaria.

Después de esta primera fase de validación, se pretende continuar con la validación del modelo mediante su aplicación a los casos experimentales realizados en nuestro laboratorio y especialmente diseñados para considerar efectos no lineales, transitorios y acoplamiento geométrico, para posteriormente estudiar aplicaciones a casos reales. Este trabajo adicional se recoge en los capítulos siguientes. A partir del mismo, se podrán extraer conclusiones más detalladas en cuanto a las capacidades y limitaciones del modelo.

