



Facultad de Ciencias

**ONDAS ESTACIONARIAS Y
APROXIMACIONES
(STATIONARY WAVES AND
APPROXIMATIONS)**

Trabajo de Fin de Máster
para acceder al

MÁSTER EN MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Autor: Santiago Navazo Esteban

**Directores: Delfina Gómez Gandarillas
y Maria Eugenia Pérez Martínez**

Octubre - 2017

Índice

Portada	1
Índice	3
Resumen	4
Introducción	5
Capítulo 1: Preliminares. Marco abstracto para la ecuación de ondas	6
Capítulo 2: Ejemplos de ondas estacionarias	9
Capítulo 3: Vibraciones en un problema "stiff"	19
3.1 Cálculo explícito de ondas estacionarias	21
3.2 Comportamientos asintóticos. Problema en un dominio arbitrario	40
Bibliografía	48



Resumen

Las ondas estacionarias juegan un papel importante en la descripción de fenómenos relacionados con sistemas vibratorios y propagación de ondas. En este trabajo se hace una recopilación de algunas ondas estacionarias que se calculan explícitamente. Dichos cálculos permiten en ocasiones localizar ciertas vibraciones en problemas dependientes de pequeños parámetros. Esto se pone de manifiesto en un problema "stiff".

PALABRAS CLAVE:

problema espectral de Dirichlet, ondas estacionarias, vibraciones, problemas "stiff".

Abstract

Stationary waves play an important role in the description of phenomena related to vibratory systems and propagation of waves. In this report we compile some stationary waves that are calculated explicitly. These calculations sometimes allow to locate certain vibrations in problems dependent on small parameters. This is evidenced in a "stiff" problem.

KEY WORDS:

Dirichlet spectral problem, stationary waves, vibrations, stiff problems.

Introducción

Consideramos vibraciones en un problema *stiff*. Entenderemos por problema *stiff* un problema de ecuaciones en derivadas parciales donde los coeficientes de las ecuaciones son "muy grandes" o "muy pequeños" en distintas regiones del dominio en que se plantee el problema. Es decir, los coeficientes dependen de un pequeño parámetro ε , $\varepsilon \rightarrow 0$, y son de distintos órdenes de magnitud en las distintas regiones del dominio. La terminología de problema *stiff* fue introducida por J.L. Lions en los años 70: ver referencias precisas en [5] y [10] por ejemplo.

En el primer capítulo de este trabajo se expondrán varios resultados teóricos, que proporcionan un marco abstracto para los problemas de evolución de segundo orden asociados al operador de Laplace.

En el segundo capítulo se tratarán varios ejemplos de ondas estacionarias que se pueden calcular explícitamente en dominios acotados. De manera general, una solución $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ de la ecuación de ondas es una *onda estacionaria* si se puede escribir $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = U(\mathbf{x})T(t)$, donde Ω un dominio de \mathbb{R}^N , y $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $T : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones no nulas. Las ondas estacionarias juegan un papel importante en la descripción de fenómenos relacionados con sistemas vibratorios y propagación de ondas, y nos serán de utilidad en el estudio de problemas *stiff* para localizar ciertos tipos de vibraciones.

En el tercer capítulo, abordaremos un problema *stiff* planteado en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Para determinados dominios, donde se pueden separar variables, se obtendrán los valores propios como soluciones de ecuaciones no lineales. También fórmulas explícitas para las funciones propias. Por simplicidad, nos centraremos en los casos en que Ω es un intervalo o un rectángulo. Estos resultados en dimensión mayor que uno suponen una extensión de los resultados en [5] para $N = 1$. Considerando el problema de evolución para dominios más generales, y para determinadas condiciones iniciales, se dará una aproximación de la solución cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Para ilustrar esta aproximación asintótica, exponaremos varias gráficas donde se simulan las vibraciones de una cuerda o una membrana en función del tiempo, el pequeño parámetro ε y las condiciones iniciales escogidas. Para la elaboración de estas gráficas se han utilizado cálculos simbólicos y numéricos.

Capítulo 1: Preliminares. Marco abstracto para la ecuación de ondas

En este capítulo se dan los resultados teóricos necesarios para el estudio de problemas mixtos, con condición de contorno Dirichlet, asociados al operador de Laplace. Entre las referencias bibliográficas seguidas en el mismo citaremos [1], [2] y [10].

En lo que sigue, nos referiremos a V y H como espacios de Hilbert separables que satisfacen las siguientes propiedades:

- V es un subespacio denso en H .
- El operador de inclusión $i : V \rightarrow H$ es compacto.

Definimos $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal y simétrica verificando las hipótesis siguientes:

- a es *continua*, es decir, existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $|a(u, v)| \leq C\|u\|_V\|v\|_V$, para todo $u, v \in V$;
- a es *coerciva*, esto es, existe $\alpha > 0$ tal que $a(u, u) \geq \alpha\|u\|_V^2$, $\forall u \in V$.

Se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1.1: *Bajo las hipótesis anteriores, existe una sucesión creciente de números reales tendiendo hacia $+\infty$:*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots, \quad (1.1)$$

y una base hilbertiana de H , $\{u_j\}_{j=1}^\infty \subset V$, tal que, para cada $j \in \mathbb{N}$:

$$a(u_j, v) = \lambda_j(u_j, v)_H \quad \forall v \in V. \quad (1.2)$$

Además, $\{u_j/\sqrt{\lambda_j}\}_{j=1}^\infty$ es una base hilbertiana de V relativa al producto escalar inducido por la forma bilineal a .

Se plantea el siguiente problema: encontrar $u \in C([0, T^*]; V) \cap C^1([0, T^*]; H)$, $T^* > 0$, tal que para todo $v \in V$

$$\begin{cases} \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t), v \right)_H + a(u(t), v) = 0 & 0 < t < T^*, \\ u(0) = u_0, \\ \frac{du}{dt}(0) = u_1, \end{cases} \quad (1.3)$$

donde $u_0 \in V$, y $u_1 \in H$.

El problema (1.3) tiene solución única (ver por ejemplo el Teorema 15.2 de [2]).

Esto nos permite escribir la formulación débil del siguiente problema de vibraciones para el operador de Laplace:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{tt}(\mathbf{x}, t) - c^2 \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 & \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 < t < T^*, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{u}_t(\mathbf{x}, 0) = u_1(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 & 0 < t < T^*, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.4)$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ hace referencia a un dominio acotado de frontera regular, o Ω es un ortoedro N -dimensional o $\Omega = (L_1, L_2) \times \tilde{\Omega}$ donde $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^{N-1}$ dominio de frontera regular, $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$.

Una vez descrito el dominio Ω , definimos los espacios de funciones $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que nos permitan demostrar la existencia y unicidad de soluciones en problemas mixtos con condición de contorno Dirichlet. Se define el espacio $H^1(\Omega)$ como:

$$H^1(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \right\}, \quad (1.5)$$

dotado del siguiente producto escalar:

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Definimos el espacio $H_0^1(\Omega)$ como la clausura de $\mathcal{D}(\Omega)$ como subespacio de $H^1(\Omega)$. Los elementos de este espacio se anulan en la frontera de Ω , es decir,

$$H_0^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega\}. \quad (1.6)$$

Si tomamos $V = H_0^1(\Omega)$ y $H = L^2(\Omega)$, entonces estos espacios satisfacen las condiciones del Teorema 1.1. Además, si tomamos

$$a(u, v) = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} \quad u, v \in H_0^1(\Omega),$$

utilizando la *desigualdad de Poincaré*:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\Omega} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad (1.7)$$

donde C_{Ω} es una constante que depende del dominio Ω con el que se trabaja, deducimos que a es continua y coerciva en $H_0^1(\Omega)$.

La formulación débil del problema (1.4) es la siguiente: encontrar $\mathbf{u} \in C([0, T^*]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T^*]; L^2(\Omega))$, $T^* > 0$, tal que para todo $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}(\cdot, t), v \right)_{L^2(\Omega)} + (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\cdot, t), \nabla_{\mathbf{x}} v)_{L^2(\Omega)} = 0 & 0 < t < T^*, \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) = u_0, \\ \mathbf{u}_t(\cdot, 0) = u_1, \end{cases} \quad (1.8)$$

donde $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, y $u_1 \in L^2(\Omega)$.

Aplicando el Teorema 1.1 obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.2: *Existe una base hilbertiana $\{U_n\}_{n \geq 1}$ de $L^2(\Omega)$ y una sucesión creciente de valores propios $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$,*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

tales que:

$$\begin{cases} U_n \in H_0^1(\Omega) & \text{(aquí se incluye la condición Dirichlet),} \\ -\Delta U_n = \lambda_n U_n & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (1.9)$$

La multiplicidad de cada valor propio es finita y se supone que en la sucesión se repite tantas veces como su multiplicidad.

Mediante separación de variables aplicada al problema (1.4), buscamos soluciones de la forma $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = U(\mathbf{x})T(t)$, donde $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $T : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ no nulas. Este planteamiento nos lleva al siguiente problema de valores propios:

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbf{x}} U(\mathbf{x}) = \lambda U(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega, \\ U(\mathbf{x}) = 0 & \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Por el Teorema 1.2, existe un conjunto numerable de autovalores $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$. Por otra parte, el espacio vectorial generado por las correspondientes autofunciones $U_n(\mathbf{x})$ es denso en $H_0^1(\Omega)$. Es decir, para cada $U \in H_0^1(\Omega)$ existen $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que:

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n U_n(\mathbf{x}). \quad (1.10)$$

Para cada uno de los valores propios λ_n , consideramos la función $T_n(t)$, que satisface la ecuación diferencial:

$$T_n''(t) = -c^2 \lambda_n T_n(t).$$

Entonces, tenemos como soluciones para $T_n(t)$:

$$T_n(t) = \alpha \cos(\sqrt{\lambda_n} ct) + \beta \sin(\sqrt{\lambda_n} ct),$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ depende de la condición inicial $u_0(\mathbf{x})$ y $\beta \in \mathbb{R}$, de la condición inicial $u_1(\mathbf{x})$. Teniendo en cuenta que:

$$u_0(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n U_n(\mathbf{x}), \quad u_1(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n U_n(\mathbf{x}),$$

entonces la solución al problema mixto (1.4) es:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos(\sqrt{\lambda_n} ct) + \frac{\beta_n}{c\sqrt{\lambda_n}} \sin(\sqrt{\lambda_n} ct) \right) U_n(\mathbf{x}). \quad (1.11)$$

En particular, si $u_0(\mathbf{x}) = \alpha U_n(\mathbf{x})$ y $u_1(\mathbf{x}) = \beta U_n(\mathbf{x})$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ fijos, entonces se obtiene como solución:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \left(\alpha \cos(\sqrt{\lambda_n} ct) + \frac{\beta}{c\sqrt{\lambda_n}} \sin(\sqrt{\lambda_n} ct) \right) U_n(\mathbf{x}), \quad (1.12)$$

es decir, obtenemos una onda estacionaria.

Capítulo 2: Ejemplos de ondas estacionarias

En este capítulo, se abordarán ejemplos concretos de ondas estacionarias para el problema mixto correspondiente a la ecuación de ondas con condición de contorno Dirichlet en distintos dominios acotados $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, más concretamente:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{tt}(\mathbf{x}, t) - c^2 \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 & \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{u}_t(\mathbf{x}, 0) = u_1(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 & t > 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

Para resolver estos problemas, llevaremos a cabo separación de variables, es decir, buscaremos funciones de la forma $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = U(\mathbf{x})T(t)$. De este modo, llegaremos a un problema de valores propios, donde busquemos $\lambda \in \mathbb{R}$, y $U(\mathbf{x})$ una función no nula que satisfaga el problema de valores propios siguiente:

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbf{x}} U(\mathbf{x}) = \lambda U(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega, \\ U(\mathbf{x}) = 0 & \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.2)$$

Entre las referencias bibliográficas seguidas en este capítulo citaremos [4], [6] y [11].

2.1. Ecuación de ondas unidimensional en un intervalo acotado. En este caso, consideramos el problema (2.1) donde $\Omega = (0, L)$ con $L > 0$, $\mathbf{x} = x \in \mathbb{R}$. Tenemos entonces el problema mixto:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{tt}(x, t) - c^2 \mathbf{u}_{xx}(x, t) = 0 & x \in (0, L), \quad t > 0, \\ \mathbf{u}(x, 0) = u_0(x) & x \in (0, L), \\ \mathbf{u}_t(x, 0) = u_1(x) & x \in (0, L), \\ \mathbf{u}(0, t) = \mathbf{u}(L, t) = 0 & t > 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Mediante separación de variables, buscando soluciones de la forma $\mathbf{u}(x, t) = X(x)T(t)$ no nulas, obtenemos:

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Por tanto, incluyendo las condiciones de contorno, el problema de valores propios consiste en buscar $\lambda \in \mathbb{R}$ y X función no nula tales que:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad X(0) = X(L) = 0. \quad (2.4)$$

De esta ecuación, se obtienen los valores propios $\lambda_k = \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$, con $k \in \mathbb{N}$, siendo las funciones propias:

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right). \quad (2.5)$$

Sustituyendo los λ obtenidos en la ecuación para T ($T''(t) = -c^2 \lambda_k T(t)$), obtenemos para cada valor de λ dos funciones linealmente independientes:

$$T_{0,k}(t) = \cos\left(\frac{ck\pi}{L}t\right); \quad T_{1,k}(t) = \sin\left(\frac{ck\pi}{L}t\right).$$

Por tanto, las ondas estacionarias son de la forma:

$$\varphi_k(x, t) = X_k(x)T_{0,k}(t) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{ck\pi}{L}t\right) \quad k \in \mathbb{N}; \quad (2.6)$$

$$\psi_k(x, t) = X_k(x)T_{1,k}(t) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{ck\pi}{L}t\right) \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.7)$$

En particular, imponiendo en (2.3) $u_0(x) = \alpha X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$, y $u_1(x) = \beta X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, de (1.12) tenemos:

$$\mathbf{u}(x, t) = \alpha \varphi_k(x, t) + \frac{L}{ck\pi} \beta \psi_k(x, t).$$

2.2. Ecuación de ondas en un rectángulo. En este caso, consideramos el problema (2.1) donde $\Omega = (0, L) \times (0, M)$ con $L, M > 0$, $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Mediante separación de variables aplicada a (2.1), buscamos soluciones no nulas de la forma $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = X(x)Y(y)T(t)$, obteniendo:

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y)}{X(x)Y(y)} = -\lambda \in \mathbb{R}.$$

Añadiendo las condiciones de contorno, el problema de valores propios a resolver es: encontrar X, Y funciones no nulas y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y)}{X(x)Y(y)} = -\lambda, \quad X(0) = X(L) = Y(0) = Y(M) = 0. \quad (2.8)$$

En este caso, se tiene una familia biparamétrica de autovalores $\lambda_{j,k} = \frac{j^2\pi^2}{L^2} + \frac{k^2\pi^2}{M^2}$ con $j, k \in \{1, 2, 3, \dots\}$, siendo las correspondientes funciones propias:

$$\varphi_{j,k}(x, y) = X_j(x)Y_k(y) = \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi y}{M}\right), \quad (2.9)$$

y resolviendo la ecuación para T ($T''(t) = -c^2\lambda_{j,k}T(t)$), obtenemos las siguientes ondas estacionarias:

$$\varphi_{j,k}(x, y, t) = X_j(x)Y_k(y)T_{0,j,k}(t) = \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi y}{M}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{j^2}{L^2} + \frac{k^2}{M^2}}c\pi t\right); \quad (2.10)$$

$$\psi_{j,k}(x, y, t) = X_j(x)Y_k(y)T_{1,j,k}(t) = \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi y}{M}\right) \sin\left(\sqrt{\frac{j^2}{L^2} + \frac{k^2}{M^2}}c\pi t\right). \quad (2.11)$$

Si imponemos como condiciones iniciales en (2.1):

$$u_0(x, y) = \alpha X_j(x)Y_k(y), \quad u_1(x, y) = \beta X_j(x)Y_k(y),$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces la solución al problema mixto es la onda estacionaria:

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \alpha \varphi_{j,k}(x, y, t) + \frac{\beta}{c\sqrt{\lambda_{j,k}}} \psi_{j,k}(x, y, t).$$

2.3. Ecuación de ondas en un ortoedro multidimensional. En este caso, consideraremos el problema (2.1) donde $\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2) \times \cdots \times (0, L_N) \subset \mathbb{R}^N$ con $L_k > 0$ para todo k , $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$.

Aplicando separación de variables en la ecuación (2.1) buscamos soluciones de la forma $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = X_1(x_1) \cdots X_N(x_N)T(t)$ no nulas, y obtenemos:

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X_1''(x_1) \cdots X_N(x_N) + \cdots + X_1(x_1) \cdots X_N''(x_N)}{X_1(x_1) \cdots X_N(x_N)} = -\lambda.$$

El problema de valores propios que se obtiene es: hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ y X_k funciones no nulas, con $k \in \{1, 2, \dots, N\}$, tales que:

$$\begin{aligned} \frac{X_1''(x_1) \cdots X_N(x_N) + \cdots + X_1(x_1) \cdots X_N''(x_N)}{X_1(x_1) \cdots X_N(x_N)} &= -\lambda, \\ X_1(0) = \cdots = X_N(0) = X_1(L_1) = \cdots = X_N(L_N) &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Tras resolver el problema de valores propios, se obtiene una familia de autovalores multi-paramétrica, $\lambda_{j_1, \dots, j_N} = \frac{j_1^2 \pi^2}{L_1^2} + \cdots + \frac{j_N^2 \pi^2}{L_N^2}$ (donde $j_k \in \mathbb{N}$ para todo k). Las correspondientes funciones propias son:

$$\varphi_{j_1, \dots, j_N}(\mathbf{x}) = \sin\left(\frac{j_1 \pi x_1}{L_1}\right) \cdots \sin\left(\frac{j_N \pi x_N}{L_N}\right). \quad (2.13)$$

Y resolviendo la ecuación para T ($T''(t) = -c^2 \lambda_{j_1, \dots, j_N} T(t)$), obtenemos las siguientes ondas estacionarias:

$$\begin{aligned} \varphi_{j_1, \dots, j_N}(\mathbf{x}, t) &= X_{1,j_1}(x_1) X_{2,j_2}(x_2) \cdots X_{N,j_N}(x_N) T_{0,j_1, \dots, j_N}(t) = \\ &= \sin\left(\frac{j_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{j_2 \pi x_2}{L_2}\right) \cdots \sin\left(\frac{j_N \pi x_N}{L_N}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{j_1^2}{L_1^2} + \cdots + \frac{j_N^2}{L_N^2}} c \pi t\right); \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \psi_{j_1, \dots, j_N}(\mathbf{x}, t) &= X_{1,j_1}(x_1) X_{2,j_2}(x_2) \cdots X_{N,j_N}(x_N) T_{1,j_1, \dots, j_N}(t) = \\ &= \sin\left(\frac{j_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{j_2 \pi x_2}{L_2}\right) \cdots \sin\left(\frac{j_N \pi x_N}{L_N}\right) \sin\left(\sqrt{\frac{j_1^2}{L_1^2} + \cdots + \frac{j_N^2}{L_N^2}} c \pi t\right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Si imponemos $u_0(\mathbf{x}) = \alpha X_{1,j_1}(x_1) \cdots X_{N,j_N}(x_N)$ y $u_1(\mathbf{x}) = \beta X_{1,j_1}(x_1) \cdots X_{N,j_N}(x_N)$ como condiciones iniciales, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces la solución al problema mixto es la onda estacionaria:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \alpha \varphi_{j_1, \dots, j_N}(\mathbf{x}, t) + \frac{\beta}{c\sqrt{\lambda_{j_1, \dots, j_N}}} \psi_{j_1, \dots, j_N}(\mathbf{x}, t).$$

Más concretamente, en el caso tridimensional $N = 3$ tenemos: $\lambda_{j_1, j_2, j_3} = \frac{j_1^2 \pi^2}{L_1^2} + \frac{j_2^2 \pi^2}{L_2^2} + \frac{j_3^2 \pi^2}{L_3^2}$, donde $j_1, j_2, j_3 \in \mathbb{N}$, siendo las funciones propias:

$$\varphi_{j_1, j_2, j_3}(\mathbf{x}) = \sin\left(\frac{j_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{j_2 \pi x_2}{L_2}\right) \sin\left(\frac{j_3 \pi x_3}{L_3}\right).$$

Y las ondas estacionarias:

$$\begin{aligned} \varphi_{j_1, j_2, j_3}(\mathbf{x}, t) &= X_{1, j_1}(x_1) X_{2, j_2}(x_2) X_{3, j_3}(x_3) T_{0, j_1, j_2, j_3}(t) = \\ &= \sin\left(\frac{j_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{j_2 \pi x_2}{L_2}\right) \sin\left(\frac{j_3 \pi x_3}{L_3}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{j_1^2}{L_1^2} + \frac{j_2^2}{L_2^2} + \frac{j_3^2}{L_3^2}} c \pi t\right); \\ \psi_{j_1, j_2, j_3}(\mathbf{x}, t) &= X_{1, j_1}(x_1) X_{2, j_2}(x_2) X_{3, j_3}(x_3) T_{1, j_1, j_2, j_3}(t) = \\ &= \sin\left(\frac{j_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{j_2 \pi x_2}{L_2}\right) \sin\left(\frac{j_3 \pi x_3}{L_3}\right) \sin\left(\sqrt{\frac{j_1^2}{L_1^2} + \frac{j_2^2}{L_2^2} + \frac{j_3^2}{L_3^2}} c \pi t\right). \end{aligned}$$

2.4. Ecuación de ondas en un círculo. En este ejemplo consideramos el problema (2.1) donde $\Omega = B(0, L)$ con $L > 0$, $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

El cambio a coordenadas polares, $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, donde $r \in [0, L]$, y $\theta \in [0, 2\pi]$, nos lleva al siguiente problema:

$$\begin{cases} \frac{r^2}{c^2} \mathbf{u}_{tt} - r^2 \mathbf{u}_{rr} - r \mathbf{u}_r - \mathbf{u}_{\theta\theta} = 0 & r \in [0, L], \theta \in [0, 2\pi], t > 0, \\ \mathbf{u}(r, \theta, 0) = u_0(r, \theta) & r \in [0, L], \theta \in [0, 2\pi], \\ \mathbf{u}_t(r, \theta, 0) = u_1(r, \theta) & r \in [0, L], \theta \in [0, 2\pi], \\ \mathbf{u}(r, \theta, t) = 0, & r = L, \theta \in [0, 2\pi], t > 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Mediante separación de variables buscamos soluciones de la forma $\mathbf{u}(r, \theta, t) = R(r)Z(\theta)T(t)$ y obtenemos:

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{R''(r)Z(\theta) + \frac{1}{r} R'(r)Z(\theta) + \frac{1}{r^2} R(r)Z''(\theta)}{R(r)Z(\theta)} = -\lambda,$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ a determinar. El problema de valores propios a resolver es:

$$\frac{R''(r)Z(\theta) + \frac{1}{r} R'(r)Z(\theta) + \frac{1}{r^2} R(r)Z''(\theta)}{R(r)Z(\theta)} = -\lambda;$$

$$R(L) = 0; R, R' \text{ acotadas en un entorno de } 0; \Theta(0) = \Theta(2\pi); \Theta'(0) = \Theta'(2\pi). \quad (2.17)$$

Separando las variables r y θ (multiplicando por r^2) obtenemos:

$$\frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} + \lambda r^2 = \frac{Z''(\theta)}{Z(\theta)} = \mu,$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ es un valor a determinar.

Aplicamos las condiciones de periodicidad en θ (es decir, $Z(0) = Z(2\pi)$ y $Z'(0) = Z'(2\pi)$), y obtenemos $\mu = k^2$, con $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, siendo las funciones propias asociadas $Z_0(\theta) = 1$, $Z_k(\theta) = \cos(k\theta)$, y $\tilde{Z}_k(\theta) = \sin(k\theta)$, con $k \in \mathbb{N}$.

La función $R(r)$ verifica entonces la ecuación diferencial:

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - k^2)R(r) = 0, \quad (2.18)$$

donde $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Haciendo el cambio de variable $s = \sqrt{\lambda}r$, obtenemos la siguiente ecuación, donde $\tilde{R}(s) = R(r)$:

$$s^2 \frac{d^2 \tilde{R}}{ds^2} + s \frac{d\tilde{R}}{ds} + (s^2 - k^2)\tilde{R} = 0, \quad (2.19)$$

es decir, la *ecuación de Bessel de orden k* . Las soluciones de esta ecuación que presentan un comportamiento regular en 0 son las *funciones de Bessel* de primera especie, con lo que tenemos:

$$\tilde{R}(s) = J_k(s) \Rightarrow R(r) = J_k(\sqrt{\lambda}r).$$

Una de las propiedades de las funciones de Bessel de primera especie es que, para cada k fijo, tiene un conjunto numerable de ceros que tiende hacia ∞ .

Notación: Denotaremos por $\eta_{j,k}$ al cero j -ésimo estrictamente positivo de la función de Bessel J_k (es decir, $0 < \eta_{1,k} < \eta_{2,k} < \dots$).

Imponiendo la condición $R(L) = 0$, tenemos, para cada valor de k , una familia numerable de autovalores $\{\lambda_{k,j}\}_{j \geq 1}$ que verifican $R(L) = J_k(L\sqrt{\lambda}) = 0$. Estos autovalores satisfacen la propiedad:

$$L\sqrt{\lambda_{k,j}} = \eta_{j,k}, \text{ es decir, } \lambda_{k,j} = \frac{\eta_{j,k}^2}{L^2}, \quad (2.20)$$

donde $\eta_{j,k}$ es el cero j -ésimo de la función de Bessel J_k .

Esto nos da como funciones propias:

$$\varphi_{k,j}(r, \theta) = \cos(k\theta) J_k(\sqrt{\lambda_{k,j}}r) \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}, j \in \mathbb{N}; \quad (2.21)$$

$$\tilde{\varphi}_{k,j}(r, \theta) = \sin(k\theta) J_k(\sqrt{\lambda_{k,j}}r) \quad k \in \{1, 2, 3, \dots\}, j \in \mathbb{N}. \quad (2.22)$$

De aquí deducimos el valor de las funciones $T(t)$, ya que $T''(t) = -c^2 \lambda_{k,j} T(t)$.

Por tanto, tenemos las siguientes ondas estacionarias:

$$\boldsymbol{\varphi}_{k,j}(r, \theta, t) = \cos(k\theta) J_k(\sqrt{\lambda_{k,j}}r) \cos(c\sqrt{\lambda_{k,j}}t) \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}, j \in \mathbb{N}; \quad (2.23)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{k,j}(r, \theta, t) = \sin(k\theta) J_k(\sqrt{\lambda_{k,j}}r) \cos(c\sqrt{\lambda_{k,j}}t) \quad k \in \{1, 2, 3, \dots\}, j \in \mathbb{N}; \quad (2.24)$$

$$\boldsymbol{\psi}_{k,j}(r, \theta, t) = \cos(k\theta) J_k(\sqrt{\lambda_{k,j}}r) \sin(c\sqrt{\lambda_{k,j}}t) \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}, j \in \mathbb{N}; \quad (2.25)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{k,j}(r, \theta, t) = \sin(k\theta) J_k(\sqrt{\lambda_{k,j}}r) \sin(c\sqrt{\lambda_{k,j}}t) \quad k \in \{1, 2, 3, \dots\}, j \in \mathbb{N}. \quad (2.26)$$

2.5. Ecuación de ondas en un cilindro. En este ejemplo consideramos el problema (2.1) donde $\Omega = B(0, L) \times (0, H)$ con $L, H > 0$, $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Mediante el cambio a coordenadas cilíndricas, $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ ($r \in [0, L]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in (0, H)$), obtenemos el siguiente problema:

$$\begin{cases} \frac{r^2}{c^2} \mathbf{u}_{tt} - r^2 \mathbf{u}_{rr} - r \mathbf{u}_r - \mathbf{u}_{\theta\theta} - r^2 \mathbf{u}_{zz} = 0 & r \in [0, L], \theta \in [0, 2\pi], z \in (0, H), t > 0, \\ \mathbf{u}(r, \theta, z, 0) = u_0(r, \theta) & r \in [0, L], \theta \in [0, 2\pi], z \in (0, H), \\ \mathbf{u}_t(r, \theta, z, 0) = u_1(r, \theta) & r \in [0, L], \theta \in [0, 2\pi], z \in (0, H), \\ \mathbf{u}(r, \theta, z, t) = 0 & r = L \text{ ó } z \in \{0, H\}, t > 0, \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases} \quad (2.27)$$

Mediante separación de variables, buscamos soluciones de la forma $R(r)\Theta(\theta)Z(z)T(t)$, obteniendo:

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{R''(r)\Theta(\theta)Z(z) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta)Z(z) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta)Z(z) + R(r)\Theta(\theta)Z''(z)}{R(r)\Theta(\theta)Z(z)} = -\lambda,$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ a determinar. Por tanto, el problema de valores propios a resolver es:

$$\begin{aligned} \frac{R''(r)\Theta(\theta)Z(z) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta)Z(z) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta)Z(z) + R(r)\Theta(\theta)Z''(z)}{R(r)\Theta(\theta)Z(z)} &= -\lambda; \\ Z(0) = Z(H) = R(L) = 0; \quad R, R' \text{ acotadas en un entorno de } 0; \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi); \quad \Theta'(0) = \Theta'(2\pi). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Separado la variable z obtenemos:

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \frac{-\lambda R(r)\Theta(\theta) - R''(r)\Theta(\theta) - \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) - \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta)}{R(r)\Theta(\theta)} = -\mu,$$

con $\mu \in \mathbb{R}$ a determinar. Y de aquí, separando las variables r y θ :

$$\frac{-r^2 R''(r) - r R'(r) - r^2(\lambda - \mu)R(r)}{R(r)} = \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -\rho,$$

con $\rho \in \mathbb{R}$ a determinar.

Imponiendo las condiciones $Z(0) = Z(H) = 0$, y las de periodicidad para Θ , obtenemos por una parte $\mu = \frac{l^2 \pi^2}{H^2}$, luego $Z_l(z) = \sin(\frac{l\pi}{H}z)$ con $l \in \{1, 2, 3, \dots\}$; y por otra parte, $\rho = k^2$ con $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, con lo que tenemos $\Theta_k(\theta) = \cos(k\theta)$ y $\tilde{\Theta}_k(\theta) = \sin(k\theta)$. De aquí deducimos la ecuación que satisface la función $R(r)$:

$$r^2 R''(r) + r R'(r) + \left(r^2 \left(\lambda - \frac{l^2 \pi^2}{H^2} \right) - k^2 \right) R(r) = 0. \quad (2.29)$$

Haciendo un razonamiento análogo al aplicado a (2.18), es decir, haciendo el cambio $s =$

$\sqrt{\lambda - \frac{l^2 \pi^2}{H^2}} r$, llegamos a la ecuación de Bessel de orden k . Las soluciones regulares en 0 son:

$$\bar{R}(s) = J_k(s) \Rightarrow R(r) = J_k \left(\sqrt{\lambda - \frac{l^2 \pi^2}{H^2}} r \right).$$

Imponiendo la condición $R(L) = 0$, obtenemos, para cada par de valores k, l , una familia numerable de autovalores $\lambda_{m,k,l}$, con $m \in \mathbb{N}$. Evidentemente, estos autovalores satisfacen la propiedad:

$$\sqrt{\lambda_{m,k,l} - \frac{l^2 \pi^2}{H^2}} L = \eta_{m,k}, \text{ es decir, } \lambda_{m,k,l} = \frac{\eta_{m,k}^2}{L^2} + \frac{l^2 \pi^2}{H^2}. \quad (2.30)$$

Las funciones propias que se obtienen son ($k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $l, m \in \mathbb{N}$):

$$\varphi_{k,l,m}(r, \theta, z) = \cos(k\theta) \sin\left(\frac{l\pi}{H}z\right) J_k\left(\sqrt{\lambda_{m,k,l} - \frac{l^2 \pi^2}{H^2}}r\right); \quad (2.31)$$

$$\tilde{\varphi}_{k,l,m}(r, \theta, z) = \sin(k\theta) \sin\left(\frac{l\pi}{H}z\right) J_k\left(\sqrt{\lambda_{m,k,l} - \frac{l^2 \pi^2}{H^2}}r\right). \quad (2.32)$$

Teniendo en cuenta la ecuación para $T(t)$, obtenemos entonces una familia triparamétrica de ondas estacionarias, con $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ en (2.33) y (2.35), $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ en (2.34) y (2.36); $l, m \in \mathbb{N}$:

$$\varphi_{k,l,m}(r, \theta, z, t) = \cos(k\theta) \sin\left(\frac{l\pi}{H}z\right) J_k\left(\sqrt{\lambda_{m,k,l} - \frac{l^2 \pi^2}{H^2}}r\right) \cos(c\sqrt{\lambda_{m,k,l}}t); \quad (2.33)$$

$$\tilde{\varphi}_{k,l,m}(r, \theta, z, t) = \sin(k\theta) \sin\left(\frac{l\pi}{H}z\right) J_k\left(\sqrt{\lambda_{m,k,l} - \frac{l^2 \pi^2}{H^2}}r\right) \cos(c\sqrt{\lambda_{m,k,l}}t); \quad (2.34)$$

$$\psi_{k,l,m}(r, \theta, z, t) = \cos(k\theta) \sin\left(\frac{l\pi}{H}z\right) J_k\left(\sqrt{\lambda_{m,k,l} - \frac{l^2 \pi^2}{H^2}}r\right) \sin(c\sqrt{\lambda_{m,k,l}}t); \quad (2.35)$$

$$\tilde{\psi}_{k,l,m}(r, \theta, z, t) = \sin(k\theta) \sin\left(\frac{l\pi}{H}z\right) J_k\left(\sqrt{\lambda_{m,k,l} - \frac{l^2 \pi^2}{H^2}}r\right) \sin(c\sqrt{\lambda_{m,k,l}}t). \quad (2.36)$$

2.6. Ecuación de ondas en una esfera. En este ejemplo, consideramos el problema (2.1) donde $\Omega = B(0, L) \subset \mathbb{R}^3$ con $L > 0$, $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Hacemos el cambio a coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = r \sin(\theta) \cos(\phi), \\ y = r \sin(\theta) \sin(\phi), \\ z = r \cos(\theta), \end{cases} \quad (2.37)$$

donde $r \in [0, L]$, $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$; y se obtiene la siguiente ecuación transformada:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \phi^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}.$$

O equivalentemente:

$$\mathbf{u}_{rr} + \frac{2}{r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r^2} \mathbf{u}_{\theta\theta} + \frac{\cot(\theta)}{r^2} \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \mathbf{u}_{\phi\phi} = \frac{1}{c^2} \mathbf{u}_{tt}. \quad (2.38)$$

Mediante separación de variables, buscamos $\mathbf{u}(r, \theta, \phi, t) = R(r)Z(\theta)Y(\phi)T(t)$, obteniendo:

$$\frac{R''(r) + \frac{2}{r}R'(r)}{R(r)} + \frac{\frac{1}{r^2}Z''(\theta) + \frac{\cot(\theta)}{r^2}Z'(\theta)}{Z(\theta)} + \frac{\frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)}Y''(\phi)}{Y(\phi)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = -\lambda,$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$. En consecuencia, el problema de valores propios a resolver es:

$$\frac{R''(r) + \frac{2}{r}R'(r)}{R(r)} + \frac{\frac{1}{r^2}Z''(\theta) + \frac{\cot(\theta)}{r^2}Z'(\theta)}{Z(\theta)} + \frac{\frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)}Y''(\phi)}{Y(\phi)} = -\lambda;$$

$$Z, Z' \text{ acotadas en } 0 \text{ y } \pi; Y(0) = Y(2\pi); Y'(0) = Y'(2\pi); \quad (2.39)$$

$$R(L) = 0; R, R' \text{ acotadas en } 0.$$

Separando la variable r obtenemos:

$$\frac{r^2 R''(r) + 2r R'(r) + \lambda r^2 R(r)}{R(r)} = \frac{-Z''(\theta)Y(\phi) - \cot(\theta)Z'(\theta)Y(\phi) - \frac{1}{\sin^2(\theta)}Z(\theta)Y''(\phi)}{Z(\theta)Y(\phi)} = \mu,$$

con $\mu \in \mathbb{R}$. Separando finalmente las variables θ y ϕ , tenemos:

$$\frac{\mu \sin^2(\theta)Z(\theta) + \sin^2(\theta)Z''(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta)Z'(\theta)}{Z(\theta)} = \frac{-Y''(\phi)}{Y(\phi)} = \rho, \quad \rho \in \mathbb{R}.$$

Entonces, por las condiciones de periodicidad, $\rho = j^2$, $Y_j(\phi) = \cos(j\phi)$ e $\tilde{Y}_j(\phi) = \sin(j\phi)$, donde $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

La ecuación respecto de θ es:

$$\sin^2(\theta)Z''(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta)Z'(\theta) + (\mu \sin^2(\theta) - j^2)Z(\theta) = 0.$$

Haciendo el cambio de variable $\omega = \cos(\theta)$ obtenemos la siguiente ecuación transformada, donde $\tilde{Z}(\omega) = Z(\theta)$:

$$(1 - \omega^2)\frac{d^2 \tilde{Z}}{d\omega^2} - 2\omega \frac{d\tilde{Z}}{d\omega} + \left(\mu - \frac{j^2}{1 - \omega^2}\right)\tilde{Z} = 0, \quad (2.40)$$

la *ecuación de Legendre* (o ecuación asociada a la de Legendre). Esta ecuación tiene soluciones regulares en el intervalo $[-1, 1]$ sólo si $\mu = l(l+1)$, $l \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, y $0 \leq j \leq l$. Distinguiamos 2 casos:

- Caso 1: $j = 0$.

$$(1 - \omega^2)\frac{d^2 \tilde{Z}}{d\omega^2} - 2\omega \frac{d\tilde{Z}}{d\omega} + \mu \tilde{Z} = 0. \quad (2.41)$$

En este caso, las únicas soluciones que presentan un comportamiento regular en ± 1 se tienen cuando $\mu = l(l+1)$, donde $l \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, y son los *polinomios de Legendre* $P_l(\omega)$.

- Caso 2: $j \neq 0$. En este caso, para $l \geq j$, definimos:

$$P_l^j(\omega) := (1 - \omega^2)^{j/2} \frac{d^j}{d\omega^j} P_l(\omega), \quad (2.42)$$

donde $P_l(\omega)$ es el polinomio de Legendre de grado l ($P_l^j(\omega) = 0$ si $j > l$). Estas funciones modificadas son las únicas funciones regulares en $[-1, 1]$ de la ecuación:

$$(1 - \omega^2) \frac{d^2 \tilde{Z}}{d\omega^2} - 2\omega \frac{d\tilde{Z}}{d\omega} + \left(\mu - \frac{j^2}{1 - \omega^2} \right) \tilde{Z} = 0, \quad (2.43)$$

cuando $\mu = l(l + 1)$. En consecuencia, tenemos $\tilde{Z}_{j,l}(\omega) = P_l^j(\omega)$ para $l = j, j + 1, \dots$.

Faltan por resolver las ecuaciones para $R(r)$ y para $T(t)$.

La ecuación para $R(r)$ es:

$$r^2 R''(r) + 2r R'(r) + (\lambda r^2 - l(l + 1)) R(r) = 0,$$

con las condiciones $R(L) = 0$ y R acotada en 0.

Esta ecuación se puede reducir a la ecuación de Bessel esférica mediante el cambio de variable $s = \sqrt{\lambda} r$:

$$s^2 \frac{d^2 \tilde{R}}{ds^2} + 2s \frac{d\tilde{R}}{ds} + (s^2 - l(l + 1)) \tilde{R} = 0, \quad (2.44)$$

donde $\tilde{R}(s) = R(r)$. Las soluciones a esta ecuación regulares en 0 son las *funciones de Bessel esféricas de primera especie* $j_l(s)$, que se pueden relacionar con las funciones de Bessel de primera especie haciendo el siguiente cambio:

$$j_l(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2s}} J_{l+1/2}(s), \quad (2.45)$$

es decir, $R(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}r}} J_{l+1/2}(\sqrt{\lambda}r)$. Imponiendo $R(L) = 0$, obtenemos una sucesión de autovalores y autofunciones dependientes de l , $\lambda_{m,l}$, donde $m \in \mathbb{N}$, que verifican la propiedad:

$$\sqrt{\lambda_{m,l}} L = \eta_{m,l+1/2}, \text{ es decir, } \lambda_{m,l} = \frac{\eta_{m,l+1/2}^2}{L^2} \quad m \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Las funciones propias que se obtienen son ($j \in \{0, 1, 2, \dots, l\}$ en el primer caso y $j \in \{1, 2, \dots, l\}$ en el segundo caso; $m \in \mathbb{N}$; $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$):

$$\varphi_{m,l,j}(r, \theta, \phi) = P_l^j(\cos(\theta)) \cos(j\phi) \sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda_{m,l}}r}} J_{l+1/2}(\sqrt{\lambda_{m,l}}r); \quad (2.46)$$

$$\tilde{\varphi}_{m,l,j}(r, \theta, \phi) = P_l^j(\cos(\theta)) \sin(j\phi) \sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda_{m,l}}r}} J_{l+1/2}(\sqrt{\lambda_{m,l}}r). \quad (2.47)$$

Las ondas estacionarias son entonces:

$$\varphi_{m,l,j}(r, \theta, \phi, t) = P_l^j(\cos(\theta)) \cos(j\phi) \sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda_{m,l}}r}} J_{l+1/2}(\sqrt{\lambda_{m,l}}r) \cos(c\sqrt{\lambda_{m,l}}t); \quad (2.48)$$

$$\tilde{\varphi}_{m,l,j}(r, \theta, \phi, t) = P_l^j(\cos(\theta)) \sin(j\phi) \sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda_{m,l}r}}} J_{l+1/2}(\sqrt{\lambda_{m,l}r}) \cos(c\sqrt{\lambda_{m,l}t}); \quad (2.49)$$

$$\psi_{m,l,j}(r, \theta, \phi, t) = P_l^j(\cos(\theta)) \cos(j\phi) \sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda_{m,l}r}}} J_{l+1/2}(\sqrt{\lambda_{m,l}r}) \sin(c\sqrt{\lambda_{m,l}t}); \quad (2.50)$$

$$\tilde{\psi}_{m,l,j}(r, \theta, \phi, t) = P_l^j(\cos(\theta)) \sin(j\phi) \sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda_{m,l}r}}} J_{l+1/2}(\sqrt{\lambda_{m,l}r}) \sin(c\sqrt{\lambda_{m,l}t}). \quad (2.51)$$

Nótese que las funciones $Z_{j,l}(\theta)Y_j(\phi)$ (dependientes únicamente de los ángulos), donde $j \leq l$, son los denominados *armónicos esféricos* (salvo constante multiplicativa):

$$\begin{aligned} Y_l^0(\theta, \phi) &= P_l(\cos(\theta)); \\ Y_l^j(\theta, \phi) &= P_l^j(\cos(\theta)) \cos(j\phi); \\ \tilde{Y}_l^j(\theta, \phi) &= P_l^j(\cos(\theta)) \sin(j\phi). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Capítulo 3: Vibraciones en un problema "stiff"

En los capítulos anteriores se ha abordado el problema de la ecuación de ondas en un medio homogéneo. Pero, ¿qué ocurre cuando planteamos un problema en un medio heterogéneo compuesto por dos materiales con propiedades físicas diferentes? Por ejemplo, podríamos considerar las vibraciones de una membrana o una cuerda compuesta por dos materiales con distinta "rigidez".

Consideramos $\Omega = \text{int}(\overline{\Omega_0 \cup \Omega_1}) \subset \mathbb{R}^N$, con $\Sigma = \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_1 \neq \emptyset$ variedad de dimensión $N - 1$, y $\Omega_0, \Omega_1 \subset \mathbb{R}^N$ abiertos disjuntos, verificándose además que $\partial\Omega \cap \Sigma \neq \emptyset$ (véase por ejemplo la Figura 1). Planteamos el siguiente problema de evolución mixto:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{u}_{tt}^\varepsilon - \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^\varepsilon = 0 & \text{en } \Omega_0, t > 0, \\ \mathbf{u}_{tt}^\varepsilon - \varepsilon \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^\varepsilon = 0 & \text{en } \Omega_1, t > 0, \\ \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{u}_t^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = u_1(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = 0 & \mathbf{x} \in \partial\Omega, t > 0, \\ \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)|_{\partial\Omega_0 \cap \Sigma} = \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)|_{\partial\Omega_1 \cap \Sigma} & t > 0 \text{ (igualdad de trazas),} \\ \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial n}(\mathbf{x}, t)|_{\partial\Omega_0 \cap \Sigma} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial n}(\mathbf{x}, t)|_{\partial\Omega_1 \cap \Sigma} & t > 0 \text{ (transmisión de la derivada).} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

En este caso, Ω_0 está ocupado por el medio "más rígido" y Ω_1 por el medio "menos rígido", ε es un pequeño parámetro positivo, es decir, $0 < \varepsilon \ll 1$, y n es el vector normal unitario exterior a Ω_0 en Σ .

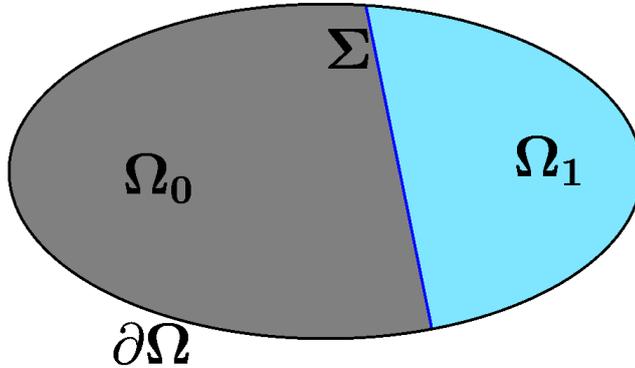


Figura 1: Una posible representación gráfica del conjunto Ω .

En esta sección, $\varepsilon > 0$ es un parámetro fijo. Multiplicando por una función test $v(\mathbf{x})$, $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ e integrando respecto de \mathbf{x} tenemos, fijado $t > 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{u}_{tt}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{\Omega_0} \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \varepsilon \int_{\Omega_1} \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\partial\Omega_0} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}_0 v(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}) + \varepsilon \int_{\partial\Omega_1} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}_1 v(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega_0} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) \nabla_{\mathbf{x}} v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \varepsilon \int_{\Omega_1} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) \nabla_{\mathbf{x}} v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \\
& = - \int_{\Omega_0} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^\varepsilon \nabla_{\mathbf{x}} v d\mathbf{x} - \varepsilon \int_{\Omega_1} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^\varepsilon \nabla_{\mathbf{x}} v d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

La última igualdad es cierta por la condición Dirichlet homogénea en $\partial\Omega$ y por la condición de transmisión en 0, teniendo en cuenta que $\mathbf{n}_1|_{\partial\Omega_1 \cap \Sigma} = -\mathbf{n}_0|_{\partial\Omega_1 \cap \Sigma}$, \mathbf{n}_0 y \mathbf{n}_1 son las normales unitarias exteriores a $\partial\Omega_0$ y $\partial\Omega_1$ respectivamente.

Así, la formulación débil del problema (3.1) se escribe como:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{d^2 \mathbf{u}^\varepsilon}{dt^2}, v \right)_H + a^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, v) = 0 \quad \forall v \in V, \\
& \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = u_0, \quad \frac{d\mathbf{u}^\varepsilon}{dt}(\mathbf{x}, 0) = u_1,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

donde $V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$,

$$a^\varepsilon(u, v) = a_0(u, v) + \varepsilon a_1(u, v) \quad \forall u, v \in V, \tag{3.3}$$

$$a_i(u, v) = \int_{\Omega_i} \nabla_{\mathbf{x}} u \cdot \nabla_{\mathbf{x}} v d\mathbf{x} \quad i = 0, 1,$$

$$(u, v)_H = \int_{\Omega} uv d\mathbf{x},$$

y los datos iniciales $u_0 \in V$, $u_1 \in H$. Aplicando el Teorema 15.2 de [2], el problema tiene solución única $C([0, T^*]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T^*]; L^2(\Omega))$, $T^* > 0$.

Mediante separación de variables, llegamos al problema espectral "stiff":

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbf{x}} u^\varepsilon = \lambda^\varepsilon u^\varepsilon & \text{en } \Omega_0, \\ -\varepsilon \Delta_{\mathbf{x}} u^\varepsilon = \lambda^\varepsilon u^\varepsilon & \text{en } \Omega_1, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{en } \partial\Omega, \\ u^\varepsilon|_{\partial\Omega_0 \cap \Sigma} = u^\varepsilon|_{\partial\Omega_1 \cap \Sigma}, \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n}|_{\partial\Omega_0 \cap \Sigma} = \varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n}|_{\partial\Omega_1 \cap \Sigma}, \end{cases} \tag{3.4}$$

donde buscamos $\lambda^\varepsilon \in \mathbb{R}$ y funciones $u^\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ no nulas.

La formulación variacional de este problema se expresa como:

Encontrar λ^ε , $u^\varepsilon \in V$, $u^\varepsilon \neq 0$ tales que:

$$\int_{\Omega_0} \nabla_{\mathbf{x}} u^\varepsilon \cdot \nabla_{\mathbf{x}} v d\mathbf{x} + \varepsilon \int_{\Omega_1} \nabla_{\mathbf{x}} u^\varepsilon \cdot \nabla_{\mathbf{x}} v d\mathbf{x} = \lambda^\varepsilon \int_{\Omega} u^\varepsilon v d\mathbf{x} \quad \forall v \in V. \tag{3.5}$$

Fijado $\varepsilon > 0$, la forma bilineal a^ε es:

- *Continua.* En efecto, si $u, v \in V$, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$\begin{aligned}
|a^\varepsilon(u, v)| & \leq \|\nabla_{\mathbf{x}} u\|_{L^2(\Omega_0)} \|\nabla_{\mathbf{x}} v\|_{L^2(\Omega_0)} + \varepsilon (\|\nabla_{\mathbf{x}} u\|_{L^2(\Omega_1)} \|\nabla_{\mathbf{x}} v\|_{L^2(\Omega_1)}) \leq \\
& \leq 2 \|\nabla_{\mathbf{x}} u\|_H \|\nabla_{\mathbf{x}} v\|_H \leq 2 \|u\|_V \|v\|_V.
\end{aligned}$$

- *Coerciva.* Si $u \in H_0^1(\Omega)$, entonces, por la desigualdad de Poincaré (ver (1.7)) tenemos

$$a^\varepsilon(u, u) \geq \varepsilon \|\nabla_{\mathbf{x}} u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \frac{\varepsilon}{C_\Omega + 1} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Como este problema es un problema de valores propios asociado a una forma bilineal, simétrica, continua y coerciva a^ε sobre V , entonces por el Teorema 1.1 el conjunto de autovalores del problema (3.4) $\{\lambda_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$ verifica

$$0 < \lambda_1^\varepsilon \leq \dots \leq \lambda_n^\varepsilon \leq \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty. \quad (3.6)$$

Sean entonces, $\{U_n^\varepsilon\}_{n \geq 1}$ las funciones propias asociadas normalizadas en $H = L^2(\Omega)$, que también son ortogonales en $V = H_0^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} U_m^\varepsilon U_n^\varepsilon d\mathbf{x} = \delta_{m,n}.$$

Calculado λ^ε , T^ε verifica $T^{\varepsilon''}(t) = -\lambda^\varepsilon T^\varepsilon(t)$ y por tanto las ondas estacionarias son

$$U_k^\varepsilon(\mathbf{x}) \left(\alpha \cos(\sqrt{\lambda_k^\varepsilon} t) + \beta \sin(\sqrt{\lambda_k^\varepsilon} t) \right), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

En particular, si tomamos $u_0(\mathbf{x}) = \alpha U_k^\varepsilon(\mathbf{x})$, y $u_1(\mathbf{x}) = \beta U_k^\varepsilon(\mathbf{x})$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces, la solución de (3.1) es la onda estacionaria:

$$\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = U_k^\varepsilon(\mathbf{x}) \left(\alpha \cos(\sqrt{\lambda_k^\varepsilon} t) + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_k^\varepsilon}} \sin(\sqrt{\lambda_k^\varepsilon} t) \right). \quad (3.7)$$

3.1 Cálculo explícito de ondas estacionarias

En esta sección consideramos el cálculo de valores propios, funciones propias y ondas estacionarias en dominios "sencillos" donde pueden ser calculados "explícitamente". Por simplicidad de notación, tomaremos $\lambda = \lambda^\varepsilon$, y lo propio con las funciones $U = U^\varepsilon$, $T = T^\varepsilon$, etc. No obstante, debe tenerse presente en todo momento la dependencia de ε .

Consideramos el parámetro ε fijo, y dimensiones $N = 1$ y $N = 2$, es decir, vibraciones de una cuerda y una membrana rectangular. También consideramos posibles formas de extender los resultados a dimensiones superiores.

3.1.1 Problema en dimensión 1: Se considera el siguiente problema de valor inicial, con $\Omega_0 = (-1, 0)$, $\Omega_1 = (0, 1)$, $\Omega = (-1, 1)$, $\mathbf{x} = x \in \mathbb{R}$.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{u}_{tt} - \mathbf{u}_{xx} = 0 & \text{en } \Omega_0, t > 0, \\ \mathbf{u}_{tt} - \varepsilon \mathbf{u}_{xx} = 0 & \text{en } \Omega_1, t > 0, \\ \mathbf{u}(x, 0) = u_0(x) & x \in (-1, 1), \\ \mathbf{u}_t(x, 0) = u_1(x) & x \in (-1, 1), \\ \mathbf{u}(-1, t) = \mathbf{u}(1, t) = 0 & t > 0, \end{array} \right. \quad (3.8)$$

con las siguientes condiciones de transmisión en $x = 0$:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(0^+, t) = \mathbf{u}(0^-, t) & t > 0, \\ \varepsilon \mathbf{u}_x(0^+, t) = \mathbf{u}_x(0^-, t) & t > 0. \end{cases}$$

El estudio de este problema se ha hecho en las referencias [5] y [7] de la bibliografía. Dada la complejidad en dimensión 2 se incluye aquí el caso unidimensional para ilustrar la técnica que emplearemos en las secciones 3.1.2 y 3.1.3 para dimensión superior. Véase también la referencia [3] para otros problemas de perturbaciones singulares, de "masas concentradas", en dimensión 1.

Buscamos soluciones de (3.8) mediante separación de variables, es decir, $\mathbf{u}(x, t) = X(x)T(t)$. Entonces:

$$\begin{cases} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda & x \in (-1, 0), \\ \frac{T''(t)}{T(t)} = \varepsilon \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda & x \in (0, 1). \end{cases}$$

El problema de valores propios a resolver es:

$$\begin{cases} \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda & x \in (-1, 0), \\ \varepsilon \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda & x \in (0, 1), \\ X(-1) = X(1) = 0, \\ X(0^-) = X(0^+), \quad X'(0^-) = \varepsilon X'(0^+). \end{cases} \quad (3.9)$$

Entonces se tiene que $\lambda > 0$, y las funciones $X(x)$ son de la forma:

$$X(x) = \begin{cases} A_0 \cos(\sqrt{\lambda}x) + B_0 \sin(\sqrt{\lambda}x) & x \in (-1, 0), \\ A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}x\right) + B_1 \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}x\right) & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.10)$$

Aplicando la condición de continuidad en 0, obtenemos $A_1 = A_0$; si aplicamos la condición de transmisión de la derivada en 0, entonces tenemos $B_1 = B_0/\sqrt{\varepsilon}$. Esto nos permite reescribir (3.10) como:

$$X(x) = \begin{cases} A_0 \cos(\sqrt{\lambda}x) + B_0 \sin(\sqrt{\lambda}x) & x \in (-1, 0), \\ A_0 \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}x\right) + B_0 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}x\right) & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Imponemos las condiciones Dirichlet en $x = \pm 1$, y obtenemos:

$$\begin{cases} A_0 \cos(\sqrt{\lambda}) - B_0 \sin(\sqrt{\lambda}) = 0, \\ A_0 \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}\right) + B_0 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}\right) = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

El determinante de la matriz de coeficientes del sistema (3.11) es:

$$\begin{vmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}) & -\sin(\sqrt{\lambda}) \\ \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}\right) & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}\right) \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cos(\sqrt{\lambda}) \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}\right) \sin(\sqrt{\lambda}). \quad (3.12)$$

Suponiendo que $\cos(\sqrt{\lambda}) \neq 0$ y que $\cos(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}) \neq 0$, obtenemos que los autovalores λ satisfacen:

$$\sqrt{\varepsilon} \tan(\sqrt{\lambda}) + \tan\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}\right) = 0. \quad (3.13)$$

Para cada ε fijo, esta ecuación tiene una sucesión creciente de autovalores $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ (ver (3.6)). En la Figura 2 tenemos un par de gráficas donde se muestra el comportamiento de la función definida en el lado izquierdo de la ecuación (3.13) para distintos valores de ε . Los valores λ donde la gráfica corta el eje de abscisas son justamente los ceros de (3.13).

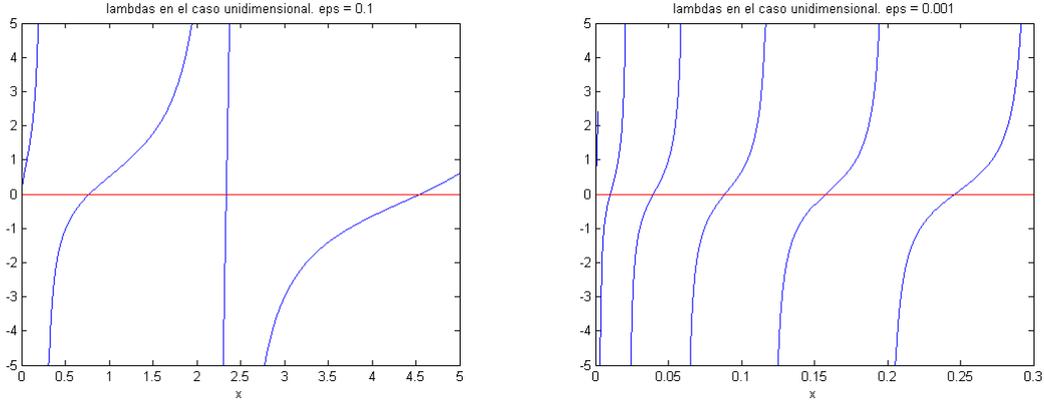


Figura 2: A la izquierda, autovalores λ obtenidos cuando $\varepsilon = 0.1$ en el intervalo $(0, 5)$. A la derecha, cuando $\varepsilon = 0.001$ en el intervalo $(0, 0.3)$.

Si se tiene (3.13), obtenemos:

$$0 = A_0 - B_0 \tan(\sqrt{\lambda}) = A_0 + B_0 \tan\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}\right).$$

De ahí deducimos que $A_0 = B_0 \tan(\sqrt{\lambda})$. Se obtienen entonces las funciones propias del problema (3.9):

$$X_k(x) = \begin{cases} \tan(\sqrt{\lambda_k}) \cos(\sqrt{\lambda_k}x) + \sin(\sqrt{\lambda_k}x) & x \in (-1, 0), \\ \tan(\sqrt{\lambda_k}) \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda_k}{\varepsilon}}x\right) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda_k}{\varepsilon}}x\right) & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.14)$$

En las Figuras 3 y 4 se muestran las gráficas de diversas funciones propias para distintos valores de ε . Si λ es pequeño, se ve que estas funciones aproximan a funciones propias del problema de Dirichlet en Ω_1 extendidas por 0 en Ω_0 (señaladas en rojo) para $\varepsilon \rightarrow 0$. Esto ilustra el resultado teórico del Lema 3.1.

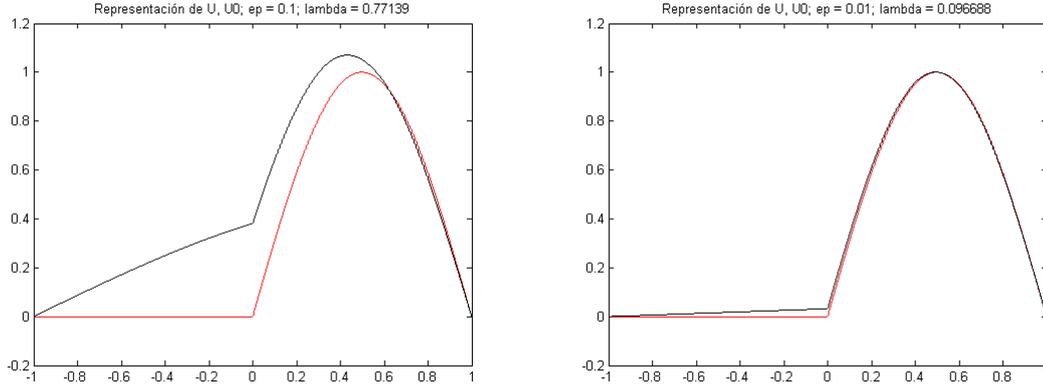


Figura 3: Gráfica de la primera función propia $X_1(x)$ que satisface (3.9) para distintos valores de ε . En el primer caso, $\varepsilon = 0.1$ y $\lambda_1 \approx 0.771394$. En el segundo caso, $\varepsilon = 0.01$, y $\lambda_1 \approx 0.0966878$.

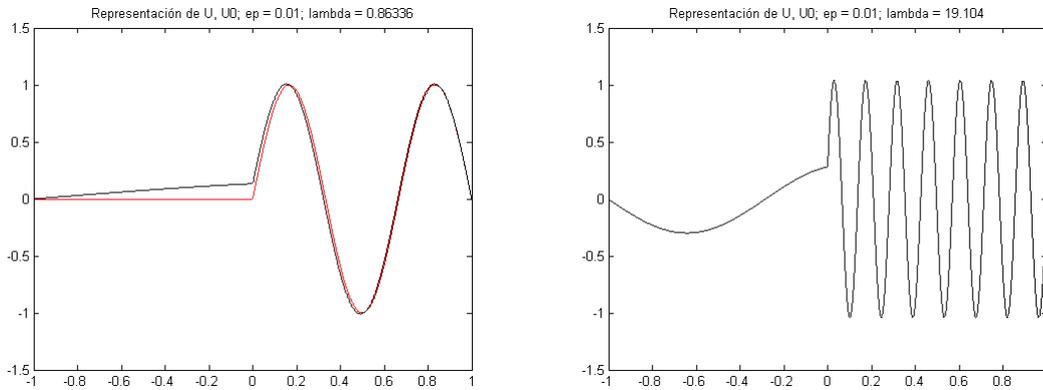


Figura 4: Distintas funciones propias que satisfacen (3.9) para diferentes valores de λ cuando $\varepsilon = 0.01$. En el primer caso, $\lambda_3 \approx 0.863359$ (tercer autovalor). En el segundo caso, $\lambda_{15} \approx 19.10398$ (decimoquinto autovalor).

Las funciones $T(t)$ asociadas son obviamente $T_{0,k}(t) = \cos(\sqrt{\lambda_k}t)$, $T_{1,k}(t) = \sin(\sqrt{\lambda_k}t)$. Por tanto, las ondas estacionarias que se obtienen son:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{0,k}(x, t) &= X_k(x) \cos(\sqrt{\lambda_k}t); \\ \mathbf{u}_{1,k}(x, t) &= X_k(x) \sin(\sqrt{\lambda_k}t). \end{aligned} \quad (3.15)$$

¿Qué ocurre si $\cos(\sqrt{\lambda}) = 0$ o $\cos(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}) = 0$?

Si $\cos(\sqrt{\lambda}) = 0$, teniendo en cuenta (3.12), necesariamente se llega a que $\cos(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}) = 0$.

Argumentando de forma análoga, se demuestra que si $\cos(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}) = 0$, entonces $\cos(\sqrt{\lambda}) = 0$. De esta manera tenemos:

$$\cos(\sqrt{\lambda}) = \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}\right) = 0,$$

con lo que $\sqrt{\lambda} = \frac{(2j+1)\pi}{2}$, y $\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, donde $j, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Estas dos condiciones no tienen lugar simultáneamente para cualquier valor de ε . Los valores de ε para los que esto ocurre forman un conjunto numerable:

$$\varepsilon_{j,k} = \left(\frac{2j+1}{2k+1} \right)^2 \quad \text{donde } j, k \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad \text{y} \quad j < k. \quad (3.16)$$

En este tipo de casos, tenemos que $\tilde{\lambda}_j = \frac{(2j+1)^2\pi^2}{4}$, con $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$. La autofunción $\tilde{X}_j(x)$ obtenida es:

$$\tilde{X}_j(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2}x\right) & x \in (-1, 0), \\ \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2\sqrt{\varepsilon}}x\right) & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.17)$$

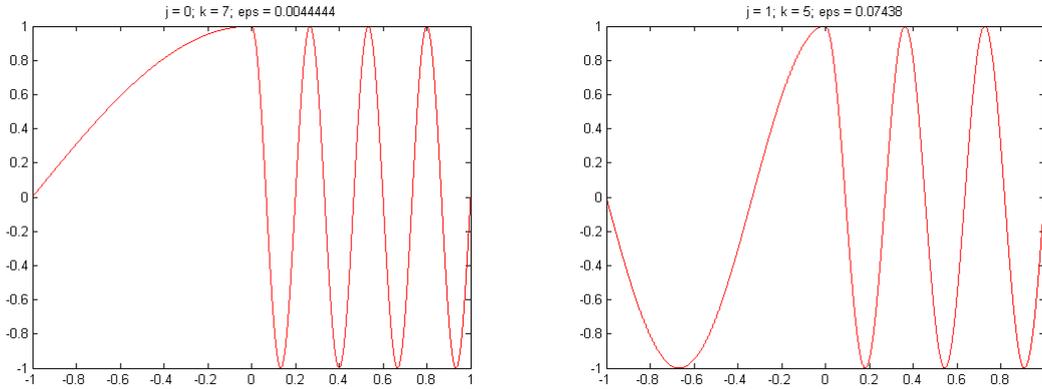


Figura 5: Distintas funciones $\tilde{X}_j(x)$ que se pueden expresar mediante la fórmula (3.17). A la izquierda, con $\varepsilon = 1/225$, $\tilde{\lambda}_j = \pi^2/4$ ($j = 0$, $k = 7$). A la derecha, con $\varepsilon = 9/121$, $\tilde{\lambda}_j = 9\pi^2/4$ ($j = 1$, $k = 5$).

Las funciones $\tilde{T}_{0,j}(t)$, $\tilde{T}_{1,j}(t)$ obtenidas son:

$$\tilde{T}_{0,j}(t) = \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2}t\right), \quad \tilde{T}_{1,j}(t) = \sin\left(\frac{(2j+1)\pi}{2}t\right).$$

Por tanto, las ondas estacionarias $\tilde{\mathbf{u}}_{0,j}(t)$, $\tilde{\mathbf{u}}_{1,j}(t)$ son:

$$\tilde{\mathbf{u}}_{0,j}(x, t) = \tilde{X}_j(x) \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2}t\right), \quad \tilde{\mathbf{u}}_{1,j}(x, t) = \tilde{X}_j(x) \sin\left(\frac{(2j+1)\pi}{2}t\right).$$

Un aspecto a tener en cuenta de estas funciones es que la amplitud de las vibraciones es igual en ambos lados de la cuerda.

3.1.2 Problema en dimensión 2: Se considera el siguiente problema de valor inicial definido a trozos, con $\Omega_0 = (-1, 0) \times (0, 1)$, $\Omega_1 = (0, 1) \times (0, 1)$, $\Omega = (-1, 1) \times (0, 1)$, $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{tt} - \Delta_{\mathbf{x}}\mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega_0, t > 0, \\ \mathbf{u}_{tt} - \varepsilon\Delta_{\mathbf{x}}\mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega_1, t > 0, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{u}_t(\mathbf{x}, 0) = u_1(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 & \mathbf{x} \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases} \quad (3.18)$$

con las siguientes condiciones de transmisión cuando $x = 0$:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(0^+, y, t) = \mathbf{u}(0^-, y, t) & y \in (0, 1), t > 0, \\ \varepsilon \mathbf{u}_x(0^+, y, t) = \mathbf{u}_x(0^-, y, t) & y \in (0, 1), t > 0. \end{cases}$$

Mediante separación de variables, buscamos soluciones de la forma $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = U(\mathbf{x})T(t)$ y se llega al problema (3.4). Entonces, separando variables en x y en y , $U(\mathbf{x})T(t) = X(x)Y(y)T(t)$, obtenemos:

$$\begin{cases} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y)}{X(x)Y(y)} = -\lambda & \mathbf{x} \in \Omega_0, \\ \frac{T''(t)}{T(t)} = \varepsilon \frac{X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y)}{X(x)Y(y)} = -\lambda & \mathbf{x} \in \Omega_1. \end{cases}$$

El problema de valores propios a resolver es:

$$\begin{cases} \frac{X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y)}{X(x)Y(y)} = -\lambda & \mathbf{x} \in \Omega_0, \\ \varepsilon \frac{X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y)}{X(x)Y(y)} = -\lambda & \mathbf{x} \in \Omega_1, \\ X(-1) = X(1) = 0, & Y(0) = Y(1) = 0, \\ X(0^-)Y(y) = X(0^+)Y(y) & y \in (0, 1), \\ X'(0^-)Y(y) = \varepsilon X'(0^+)Y(y) & y \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.19)$$

Así, tenemos

$$\begin{cases} \frac{X''(x)}{X(x)} + \lambda = \frac{-Y''(y)}{Y(y)} = \mu & \mathbf{x} \in \Omega_0, \\ \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{\lambda}{\varepsilon} = \frac{-Y''(y)}{Y(y)} = \hat{\mu} & \mathbf{x} \in \Omega_1, \end{cases}$$

con μ y $\hat{\mu}$ constantes a determinar. En un principio, pueden tener lugar 2 casos:

- **Caso 1:** $\mu = \hat{\mu}$.

Imponiendo las condiciones $Y(0) = Y(1) = 0$, tenemos entonces una sucesión numerable de autovalores $\mu_j = j^2\pi^2$, donde $j \in \mathbb{N}$. Evidentemente,

$$Y_j(y) = \sin(j\pi y) \quad y \in (0, 1). \quad (3.20)$$

- **Caso 2:** $\mu \neq \hat{\mu}$.

La autofunción $X(x)Y(y)$ sería:

$$X(x)Y(y) = \begin{cases} X(x) \sin(\sqrt{\mu}y) & \text{si } (x, y) \in \Omega_0, \\ X(x) \sin(\sqrt{\hat{\mu}}y) & \text{si } (x, y) \in \Omega_1. \end{cases}$$

Imponemos $X(0^-) \sin(\sqrt{\mu}y) = X(0^+) \sin(\sqrt{\hat{\mu}}y)$, al aplicar la condición de igualdad de trazas en Σ , para todo $y \in (0, 1)$. Por tanto, $X(0) = 0$, con lo que nos encontraríamos con un problema Dirichlet en Ω_0 y otro en Ω_1 . Al ser un problema de valores propios,

tenemos que $X(x) = A_0 \sin(\rho\pi x)$ si $x \in (-1, 0)$, y $X(x) = A_1 \sin(\hat{\rho}\pi x)$ si $x \in (0, 1)$, donde $\rho, \hat{\rho}$ son números naturales. Derivando respecto de x , obtenemos:

$$X'(x)Y(y) = \begin{cases} X'(x) \sin(\sqrt{\mu}y) & \text{si } (x, y) \in \Omega_0, \\ X'(x) \sin(\sqrt{\hat{\mu}}y) & \text{si } (x, y) \in \Omega_1. \end{cases}$$

Aplicando la condición de transmisión en 0 para las derivadas, deducimos que debe verificarse, para cada $y \in (0, 1)$, que $X'(0^-) \sin(\sqrt{\mu}y) = \varepsilon X'(0^+) \sin(\sqrt{\hat{\mu}}y)$. Entonces, $X'(0) = 0$, con lo que llegamos a $X \equiv 0$.

En consecuencia, con la separación de variables, no encontramos funciones propias cuando $\mu \neq \hat{\mu}$.

Descartado el caso 2, la ecuación para $X(x)$ queda entonces como:

$$X''(x) = \begin{cases} (\mu_j - \lambda)X(x) = (j^2\pi^2 - \lambda)X(x) & x \in (-1, 0), \\ \left(\mu_j - \frac{\lambda}{\varepsilon}\right)X(x) = \left(j^2\pi^2 - \frac{\lambda}{\varepsilon}\right)X(x) & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.21)$$

Teniendo en cuenta que ε fijo, $0 < \varepsilon < 1$, distinguimos varios casos:

• **Caso I:** que $0 < \lambda < \varepsilon j^2\pi^2$, con lo que las soluciones son de la forma:

$$X(x) = \begin{cases} A_0 \cosh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \lambda}x\right) + B_0 \sinh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \lambda}x\right) & x \in (-1, 0), \\ A_1 \cosh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \frac{\lambda}{\varepsilon}}x\right) + B_1 \sinh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \frac{\lambda}{\varepsilon}}x\right) & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.22)$$

Imponiendo la condición $X(0^-) = X(0^+)$ deducimos que $A_0 = A_1$. Por otra parte, si imponemos la condición de transmisión $X'(0^-) = \varepsilon X'(0^+)$, tenemos:

$$B_1 = \sqrt{\frac{j^2\pi^2 - \lambda}{\varepsilon^2 j^2\pi^2 - \varepsilon\lambda}} B_0 = \gamma_j^\varepsilon B_0.$$

La función $X(x)$ puede reescribirse como:

$$X(x) = \begin{cases} A_0 \cosh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \lambda}x\right) + B_0 \sinh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \lambda}x\right) & x \in (-1, 0), \\ A_0 \cosh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \frac{\lambda}{\varepsilon}}x\right) + \gamma_j^\varepsilon B_0 \sinh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \frac{\lambda}{\varepsilon}}x\right) & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Imponiendo las condiciones Dirichlet en $x = -1$ y $x = 1$ tenemos:

$$\begin{cases} A_0 \cosh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \lambda}\right) - B_0 \sinh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \lambda}\right) = 0, \\ A_0 \cosh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \frac{\lambda}{\varepsilon}}\right) + \gamma_j^\varepsilon B_0 \sinh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \frac{\lambda}{\varepsilon}}\right) = 0. \end{cases}$$

El determinante de la matriz de coeficientes del sistema es:

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cc} \cosh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \lambda}\right) & -\sinh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \lambda}\right) \\ \cosh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \frac{\lambda}{\varepsilon}}\right) & \gamma_j^\varepsilon \sinh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \frac{\lambda}{\varepsilon}}\right) \end{array} \right| = \\ & = \cosh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \lambda}\right) \gamma_j^\varepsilon \sinh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \frac{\lambda}{\varepsilon}}\right) + \sinh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \lambda}\right) \cosh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \frac{\lambda}{\varepsilon}}\right) > 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

La única solución es, $A_0 = B_0 = 0$, con lo que no encontramos funciones propias de la forma $X(x)Y(y)$ si $\lambda < \varepsilon j^2\pi^2$.

• **Caso II:** que $\lambda = \varepsilon j^2\pi^2$, con lo que las soluciones son de la forma:

$$X(x) = \begin{cases} A_0 \cosh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \lambda}x\right) + B_0 \sinh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \lambda}x\right) & x \in (-1, 0), \\ A_1 + B_1x & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.24)$$

Imponiendo la condición $X(0^-) = X(0^+)$ deducimos que $A_0 = A_1$. Por otra parte, si imponemos la condición de transmisión $X'(0^-) = \varepsilon X'(0^+)$ entonces:

$$B_1 = \frac{\sqrt{j^2\pi^2 - \lambda}}{\varepsilon} B_0.$$

La función $X(x)$ puede reescribirse como:

$$\begin{cases} A_0 \cosh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \lambda}x\right) + B_0 \sinh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \lambda}x\right) = 0 & x \in (-1, 0), \\ A_0 + \frac{\sqrt{j^2\pi^2 - \lambda}}{\varepsilon} B_0 x = 0 & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Imponiendo las condiciones Dirichlet en $x = -1$ y $x = 1$ tenemos:

$$\begin{cases} A_0 \cosh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \lambda}\right) - B_0 \sinh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \lambda}\right) = 0, \\ A_0 + \frac{\sqrt{j^2\pi^2 - \lambda}}{\varepsilon} B_0 = 0. \end{cases}$$

El determinante de la matriz de coeficientes del sistema es:

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cc} \cosh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \lambda}\right) & -\sinh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \lambda}\right) \\ 1 & \frac{\sqrt{j^2\pi^2 - \lambda}}{\varepsilon} \end{array} \right| = \\ & = \cosh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \lambda}\right) \frac{\sqrt{j^2\pi^2 - \lambda}}{\varepsilon} + \sinh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \lambda}\right) > 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Por tanto, $A_0 = B_0 = 0$, con lo que no encontramos funciones propias de la forma $X(x)Y(y)$ si $\lambda = \varepsilon j^2\pi^2$.

• **Caso III:** que $\varepsilon j^2 \pi^2 < \lambda < j^2 \pi^2$, con lo que las soluciones son de la forma:

$$X(x) = \begin{cases} A_0 \cosh\left(\sqrt{j^2 \pi^2 - \lambda} x\right) + B_0 \sinh\left(\sqrt{j^2 \pi^2 - \lambda} x\right) & x \in (-1, 0), \\ A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon} - j^2 \pi^2} x\right) + B_1 \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon} - j^2 \pi^2} x\right) & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.26)$$

Imponiendo la condición $X(0^-) = X(0^+)$ deducimos que $A_0 = A_1$. Por otra parte, aplicando la condición de transmisión en $x = 0$, $X'(0^-) = \varepsilon X'(0^+)$, tenemos:

$$B_1 = \sqrt{\frac{j^2 \pi^2 - \lambda}{\varepsilon \lambda - \varepsilon^2 j^2 \pi^2}} B_0.$$

La función $X(x)$ puede reescribirse como:

$$X(x) = \begin{cases} A_0 \cosh\left(\sqrt{j^2 \pi^2 - \lambda} x\right) + B_0 \sinh\left(\sqrt{j^2 \pi^2 - \lambda} x\right) & x \in (-1, 0), \\ A_0 \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon} - j^2 \pi^2} x\right) + \sqrt{\frac{j^2 \pi^2 - \lambda}{\varepsilon \lambda - \varepsilon^2 j^2 \pi^2}} B_0 \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon} - j^2 \pi^2} x\right) & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Ahora, aplicando las condiciones Dirichlet en $x = 1$ y $x = -1$ tenemos:

$$\begin{cases} A_0 \cosh\left(\sqrt{j^2 \pi^2 - \lambda}\right) - B_0 \sinh\left(\sqrt{j^2 \pi^2 - \lambda}\right) = 0, \\ A_0 \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon} - j^2 \pi^2}\right) + \sqrt{\frac{j^2 \pi^2 - \lambda}{\varepsilon \lambda - \varepsilon^2 j^2 \pi^2}} B_0 \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon} - j^2 \pi^2}\right) = 0. \end{cases}$$

El determinante de la matriz de coeficientes del sistema es:

$$\begin{vmatrix} \cosh\left(\sqrt{j^2 \pi^2 - \lambda}\right) & -\sinh\left(\sqrt{j^2 \pi^2 - \lambda}\right) \\ \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon} - j^2 \pi^2}\right) & \sqrt{\frac{j^2 \pi^2 - \lambda}{\varepsilon \lambda - \varepsilon^2 j^2 \pi^2}} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon} - j^2 \pi^2}\right) \end{vmatrix} = \\ = \sqrt{\frac{j^2 \pi^2 - \lambda}{\varepsilon \lambda - \varepsilon^2 j^2 \pi^2}} \cosh\left(\sqrt{j^2 \pi^2 - \lambda}\right) \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon} - j^2 \pi^2}\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon} - j^2 \pi^2}\right) \sinh\left(\sqrt{j^2 \pi^2 - \lambda}\right).$$

Dividiendo por $\cosh\left(\sqrt{j^2 \pi^2 - \lambda}\right)$, comprobamos que para ser autovalor λ debe verificar:

$$\tanh\left(\sqrt{j^2 \pi^2 - \lambda}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon} - j^2 \pi^2}\right) + \sqrt{\frac{j^2 \pi^2 - \lambda}{\varepsilon \lambda - \varepsilon^2 j^2 \pi^2}} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon} - j^2 \pi^2}\right) = 0. \quad (3.27)$$

Esta ecuación es una ecuación no lineal para λ . Fijados $j \in \mathbb{N}$, y $\varepsilon > 0$, obtenemos un conjunto finito de ceros, y por tanto de autovalores,

$$\{\tilde{\lambda}_{j,k}\}_{j \text{ fijo}, k=1}^{M(j,\varepsilon)},$$

donde $M(j, \varepsilon)$ es el número total de autovalores obtenidos.

En las Figuras 6 y 7 se muestra el comportamiento de la función definida por el lado izquierdo de la ecuación (3.27) para distintos valores de j y ε . Los valores λ donde la gráfica corta el eje de abscisas son justamente los $\tilde{\lambda}_{j,k}$. Se ve que $M(j, \varepsilon)$ aumenta al disminuir el ε .

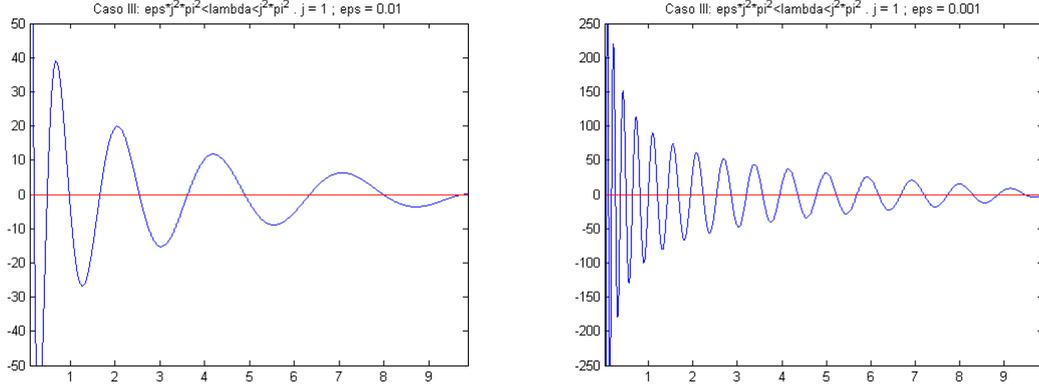


Figura 6. Autovalores $\tilde{\lambda}$ obtenidos con $j = 1$ para distintos valores de ε . A la izquierda, con $\varepsilon = 0.01$; a la derecha, con $\varepsilon = 0.001$.

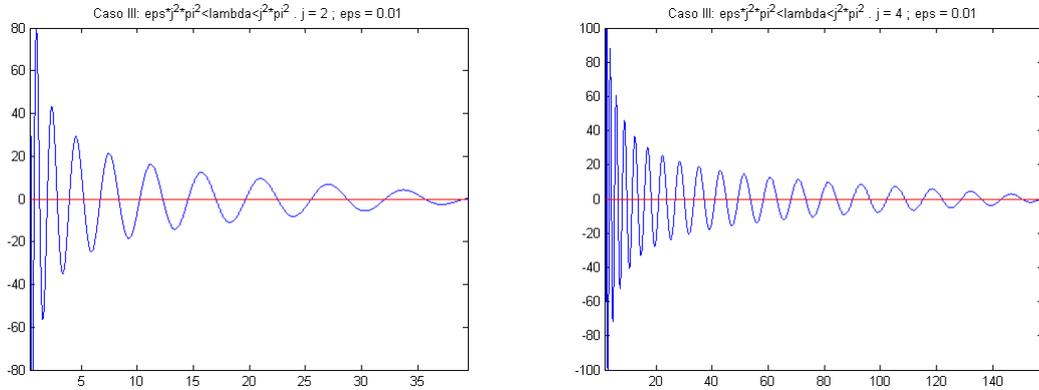


Figura 7. Autovalores $\tilde{\lambda}$ obtenidos con $\varepsilon = 0.01$ para distintos valores de j . A la izquierda, con $j = 2$; a la derecha, con $j = 4$.

Si $\lambda = \tilde{\lambda}_{j,k}$ verifica la ecuación (3.27), entonces $A_0 = B_0 \tanh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \lambda}\right)$, con lo que deducimos la expresión de las funciones $\tilde{X}_{j,k}(x)$. Estas funciones $\tilde{X}_{j,k}(x)$ están definidas a trozos como:

$$\tilde{X}_{j,k}(x) = \begin{cases} \tanh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \lambda}\right) \cosh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \lambda}x\right) + \sinh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \lambda}x\right) & x \in (-1, 0), \\ \tanh\left(\sqrt{j^2\pi^2 - \lambda}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon} - j^2\pi^2}x\right) + \\ + \sqrt{\frac{j^2\pi^2 - \lambda}{\varepsilon\lambda - \varepsilon^2j^2\pi^2}} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon} - j^2\pi^2}x\right) & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.28)$$

En las siguientes gráficas (Figuras 8, 9 y 10) mostramos el comportamiento de algunas de las autofunciones $\tilde{X}_{j,k}(x)Y_j(y)$ obtenidas mediante este procedimiento. La primera gráfica de la Figura 8 hace referencia a la función $\tilde{X}_{1,2}(x)$ así como a la aproximación $X_2^*(x) = \sin(2\pi x)$ en $(0, 1)$ extendida por 0 a la izquierda (en rojo). En la figura de la derecha, mostramos la función propia $\tilde{X}_{1,2}(x)Y_1(y)$, cuyo perfil es el de la gráfica izquierda.

En la Figura 9 se observa que, fijados j y k , la amplitud de las funciones en el lado izquierdo tiende hacia 0 cuando ε tiende hacia 0.

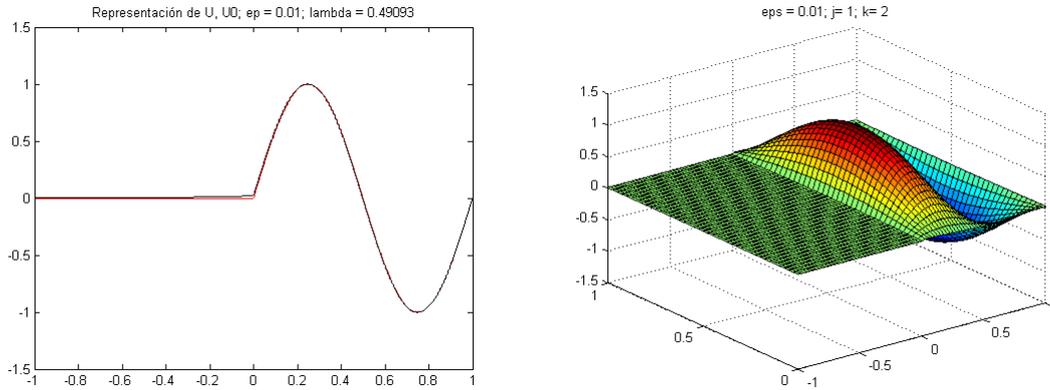


Figura 8: A la izquierda, representación de la función $\tilde{X}_{1,2}(x)$ cuando $\varepsilon = 0.01$ (negro), comparada con $\sin(2\pi x)$ en $(0, 1)$ extendida a la izquierda por 0 (rojo). ($\tilde{\lambda}_{1,2} \approx 0.490926$). A la derecha, representación de $\tilde{X}_{1,2}(x)Y_1(y) = \tilde{X}_{1,2}(x) \sin(\pi y)$.

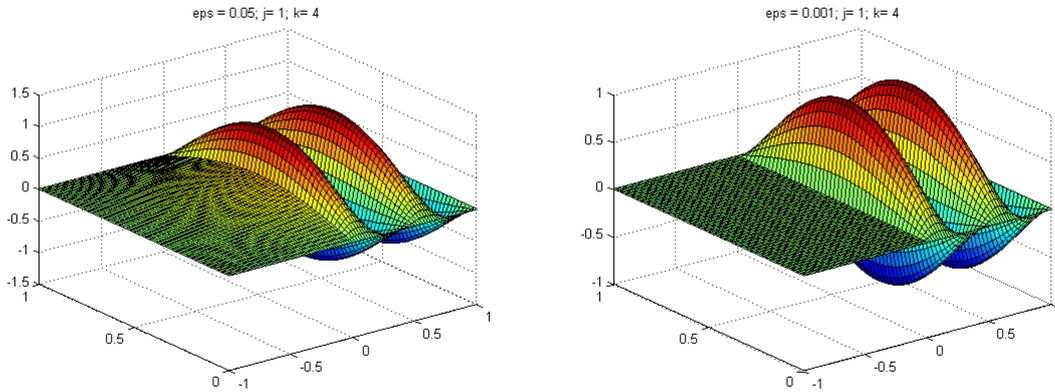


Figura 9: Representación de la función $\tilde{X}_{1,4}(x)Y_1(y) = \tilde{X}_{1,4}(x) \sin(\pi y)$ para distintos valores de ε . A la izquierda, cuando $\varepsilon = 0.05$ ($\tilde{\lambda}_{1,4} \approx 7.931848$). A la derecha, cuando $\varepsilon = 0.001$ ($\tilde{\lambda}_{1,4} \approx 0.167682$).

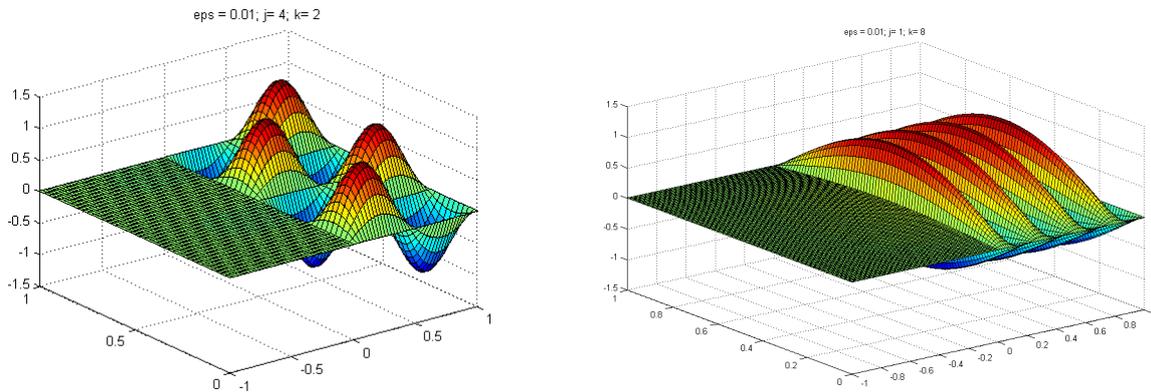


Figura 10: Para $\varepsilon = 0.01$: a la izquierda, representación de la función $\tilde{X}_{4,2}(x)Y_4(y) = \tilde{X}_{4,2}(x) \sin(4\pi y)$ ($\tilde{\lambda}_{4,2} \approx 1.973289$). A la derecha, representación de $\tilde{X}_{1,8}(x)Y_1(y) = \tilde{X}_{1,8}(x) \sin(\pi y)$ ($\tilde{\lambda}_{1,8} \approx 6.351804$).

• **Caso IV:** que $\lambda = j^2\pi^2$, con lo que las soluciones son de la forma:

$$X(x) = \begin{cases} A_0 + B_0x & x \in (-1, 0), \\ A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{j^2\pi^2}{\varepsilon} - j^2\pi^2}x\right) + B_1 \sin\left(\sqrt{\frac{j^2\pi^2}{\varepsilon} - j^2\pi^2}x\right) & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.29)$$

Imponiendo la condición $X(0^-) = X(0^+)$ deducimos que $A_0 = A_1$. Añadiendo además la condición de transmisión en 0, $X'(0^-) = \varepsilon X'(0^+)$, tenemos $B_0 = \sqrt{\varepsilon j^2\pi^2 - \varepsilon^2 j^2\pi^2} B_1$. Las soluciones $X(x)$ son entonces de la forma:

$$X(x) = \begin{cases} A_0 + \sqrt{\varepsilon j^2\pi^2 - \varepsilon^2 j^2\pi^2} B_1 x & x \in (-1, 0), \\ A_0 \cos\left(\sqrt{\frac{j^2\pi^2}{\varepsilon} - j^2\pi^2}x\right) + B_1 \sin\left(\sqrt{\frac{j^2\pi^2}{\varepsilon} - j^2\pi^2}x\right) & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Imponiendo las condiciones Dirichlet en $x = -1$ y $x = 1$ tenemos:

$$\begin{cases} A_0 - \sqrt{\varepsilon j^2\pi^2 - \varepsilon^2 j^2\pi^2} B_1 = 0, \\ A_0 \cos\left(\sqrt{\frac{j^2\pi^2}{\varepsilon} - j^2\pi^2}\right) + B_1 \sin\left(\sqrt{\frac{j^2\pi^2}{\varepsilon} - j^2\pi^2}\right) = 0. \end{cases}$$

Si igualamos a 0 el determinante de la matriz de coeficientes del sistema, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{\varepsilon j^2\pi^2 - \varepsilon^2 j^2\pi^2} \\ \cos\left(\sqrt{\frac{j^2\pi^2}{\varepsilon} - j^2\pi^2}\right) & \sin\left(\sqrt{\frac{j^2\pi^2}{\varepsilon} - j^2\pi^2}\right) \end{vmatrix} = \sin\left(\sqrt{\frac{j^2\pi^2}{\varepsilon} - j^2\pi^2}\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{j^2\pi^2}{\varepsilon} - j^2\pi^2}\right) \sqrt{\varepsilon j^2\pi^2 - \varepsilon^2 j^2\pi^2} = 0. \quad (3.30)$$

La ecuación (3.30) da los ceros de una función no lineal de la variable ε . Dicha ecuación solamente se satisface para una infinidad numerable de $\varepsilon \in (0, 1)$.

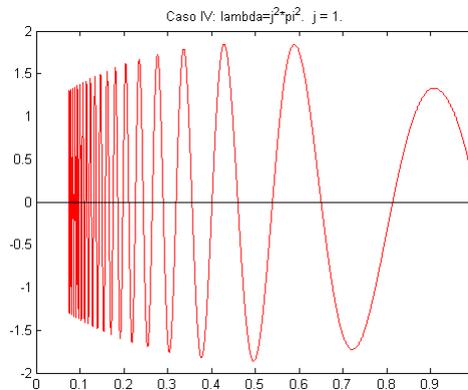


Figura 11: Valores de $\varepsilon \in (0, 1)$ que satisfacen (3.30) para $j = 1$.

Si ε no satisface la ecuación (3.30), entonces $j^2\pi^2$ no será un valor propio de (3.19). Si por el contrario, ε satisface esta ecuación no lineal, entonces $j^2\pi^2$ será un valor propio de (3.19), obtenemos que $A_0 = \sqrt{\varepsilon j^2\pi^2 - \varepsilon^2 j^2\pi^2} B_1$, y las funciones $X(x)$, tomando $B_1 = 1$, vendrán dadas por:

$$X_{j,0}(x) = \begin{cases} \sqrt{\varepsilon j^2\pi^2 - \varepsilon^2 j^2\pi^2} + \sqrt{\varepsilon j^2\pi^2 - \varepsilon^2 j^2\pi^2} x & x \in (-1, 0), \\ \sqrt{\varepsilon j^2\pi^2 - \varepsilon^2 j^2\pi^2} \cos\left(\sqrt{\frac{j^2\pi^2}{\varepsilon} - j^2\pi^2} x\right) + \sin\left(\sqrt{\frac{j^2\pi^2}{\varepsilon} - j^2\pi^2} x\right) & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.31)$$

En la Figura 12 hacemos una representación gráfica de las autofunciones $X_{j,0}(x)Y_j(y)$ con $j = 1$, es decir, $\lambda = \pi^2$, para distintos valores de ε . En la primera gráfica, $\varepsilon \approx 0.1169$; en la segunda, $\varepsilon \approx 0.01009364$.

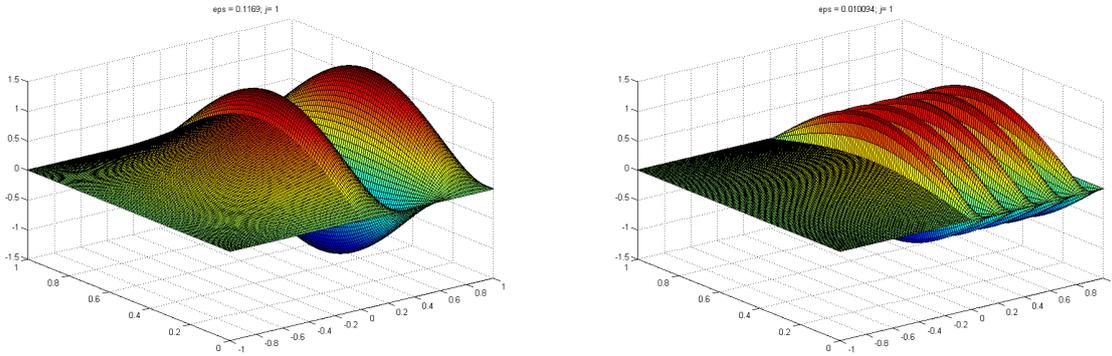


Figura 12: Funciones propias $X_{1,0}(x)Y_1(y)$, donde $X_{1,0}(x)$ viene dada por (3.31).

• **Caso V:** que $\lambda > j^2\pi^2$, con lo que las soluciones son de la forma:

$$X(x) = \begin{cases} A_0 \cos(\sqrt{\lambda - j^2\pi^2} x) + B_0 \sin(\sqrt{\lambda - j^2\pi^2} x) & x \in (-1, 0), \\ A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon} - j^2\pi^2} x\right) + B_1 \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon} - j^2\pi^2} x\right) & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.32)$$

Aplicando la condición $X(0^-) = X(0^+)$ tenemos que $A_0 = A_1$. Aplicando la condición de transmisión $X'(0^-) = \varepsilon X'(0^+)$, deducimos:

$$B_1 = \sqrt{\frac{\lambda - j^2\pi^2}{\varepsilon\lambda - \varepsilon^2 j^2\pi^2}} B_0.$$

La expresión (3.32) se reescribe entonces como:

$$X(x) = \begin{cases} A_0 \cos(\sqrt{\lambda - j^2\pi^2} x) + B_0 \sin(\sqrt{\lambda - j^2\pi^2} x) & x \in (-1, 0), \\ A_0 \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon} - j^2\pi^2} x\right) + \sqrt{\frac{\lambda - j^2\pi^2}{\varepsilon\lambda - \varepsilon^2 j^2\pi^2}} B_0 \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon} - j^2\pi^2} x\right) & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Imponiendo las condiciones de contorno Dirichlet homogéneas en $x = -1$ y $x = 1$ tenemos:

$$\begin{cases} A_0 \cos(\sqrt{\lambda - j^2\pi^2}) - B_0 \sin(\sqrt{\lambda - j^2\pi^2}) = 0, \\ A_0 \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon} - j^2\pi^2}\right) + \sqrt{\frac{\lambda - j^2\pi^2}{\varepsilon\lambda - \varepsilon^2 j^2\pi^2}} B_0 \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon} - j^2\pi^2}\right) = 0. \end{cases}$$

El determinante de la matriz de coeficientes del sistema es:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \cos(\sqrt{\lambda - j^2\pi^2}) & -\sin(\sqrt{\lambda - j^2\pi^2}) \\ \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon} - j^2\pi^2}\right) & \sqrt{\frac{\lambda - j^2\pi^2}{\varepsilon\lambda - \varepsilon^2 j^2\pi^2}} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon} - j^2\pi^2}\right) \end{vmatrix} = \\ & = \sqrt{\frac{\lambda - j^2\pi^2}{\varepsilon\lambda - \varepsilon^2 j^2\pi^2}} \cos(\sqrt{\lambda - j^2\pi^2}) \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon} - j^2\pi^2}\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon} - j^2\pi^2}\right) \sin(\sqrt{\lambda - j^2\pi^2}). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Suponiendo entonces que $\cos(\sqrt{\lambda - j^2\pi^2}) \neq 0$ y que $\cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon} - j^2\pi^2}\right) \neq 0$, λ satisface la siguiente ecuación:

$$\sqrt{\varepsilon\lambda - \varepsilon^2 j^2\pi^2} \tan(\sqrt{\lambda - j^2\pi^2}) + \sqrt{\lambda - j^2\pi^2} \tan\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon} - j^2\pi^2} = 0. \quad (3.34)$$

Para cada j y ε fijos, esta ecuación nos da una familia numerable de autovalores $\{\lambda_{j,k}\}$, con $\lambda_{j,k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$.

En las Figuras 13 y 14 se muestra la gráfica de la función definida por el lado izquierdo (3.34) para distintos valores de ε y j . Los autovalores $\lambda_{j,k}$ son los puntos de corte con el eje de abscisas.

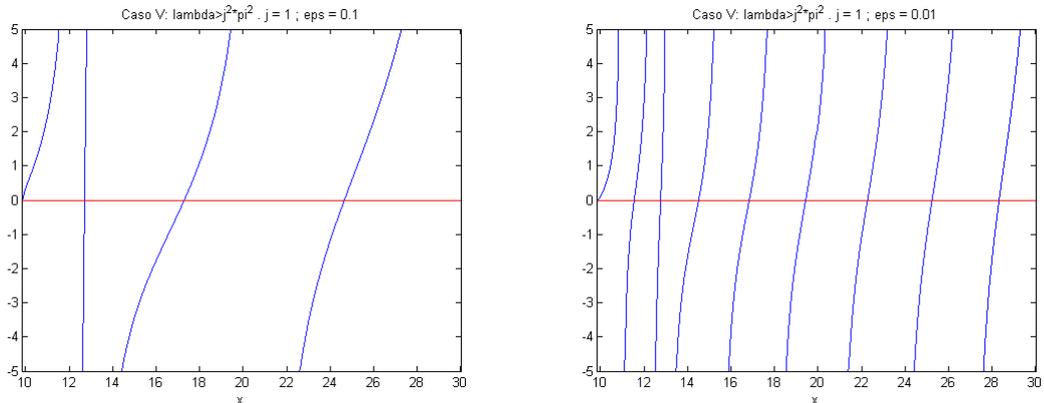


Figura 13: Distribución de los primeros valores propios $\lambda > j^2\pi^2$, donde $j = 1$, para distintos valores de ε . A la izquierda, con $\varepsilon = 0.1$; a la derecha, con $\varepsilon = 0.01$.

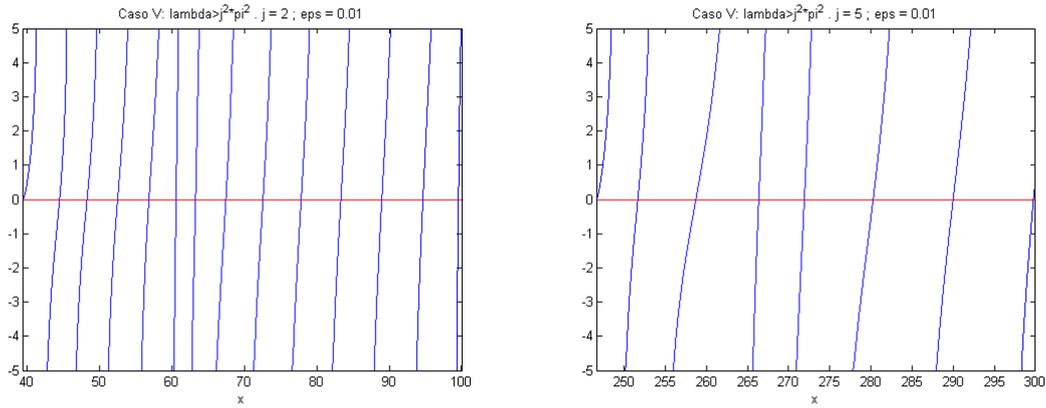


Figura 14: Distribución de los primeros valores propios $\lambda > j^2\pi^2$, donde $\varepsilon = 0.1$, para distintos valores de j .
A la izquierda, con $j = 2$; a la derecha, con $j = 5$.

Si λ verifica (3.34), tenemos que $A_0 = B_0 \tan(\sqrt{\lambda - j^2\pi^2})$, con lo que obtenemos las siguientes funciones $X_{j,k}(x)$ si tomamos $B_0 = 1$:

$$X_{j,k}(x) = \begin{cases} \tan(\sqrt{\lambda_{j,k} - j^2\pi^2}) \cos(\sqrt{\lambda_{j,k} - j^2\pi^2}x) + \sin(\sqrt{\lambda_{j,k} - j^2\pi^2}x) & x \in (-1, 0), \\ \tan(\sqrt{\lambda_{j,k} - j^2\pi^2}) \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda_{j,k}}{\varepsilon} - j^2\pi^2}x\right) + \\ + \sqrt{\frac{\lambda_{j,k} - j^2\pi^2}{\varepsilon\lambda_{j,k} - \varepsilon^2j^2\pi^2}} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda_{j,k}}{\varepsilon} - j^2\pi^2}x\right) & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.35)$$

En las siguientes figuras se muestran distintos ejemplos de autofunciones $X_{j,k}(x)Y_j(y)$ del caso V. Observamos que no todas estas funciones oscilan fuertemente en el lado izquierdo de la membrana.

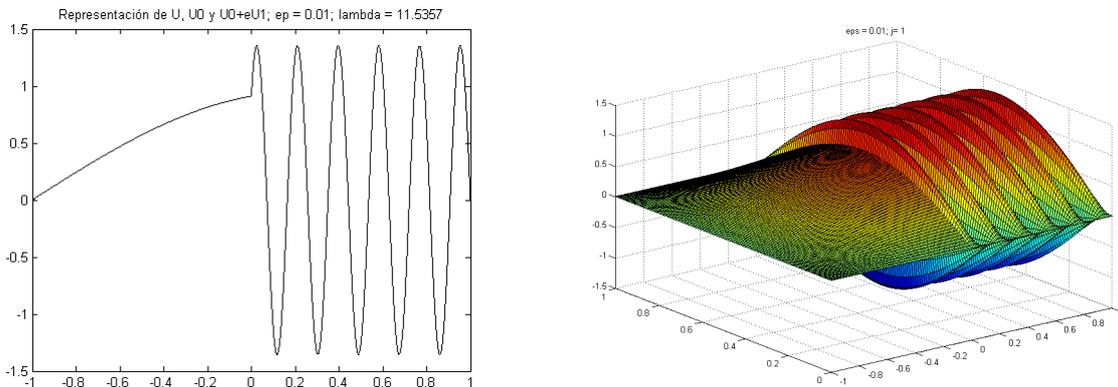


Figura 15: A la izquierda, gráfica de la función $X_{1,k}(x)$ definida por (3.35), donde $\varepsilon = 1/100$, y $\lambda_{1,k} \approx 11.535693$. A la derecha, gráfica de la función propia $X_{1,k}(x) \sin(\pi y)$.

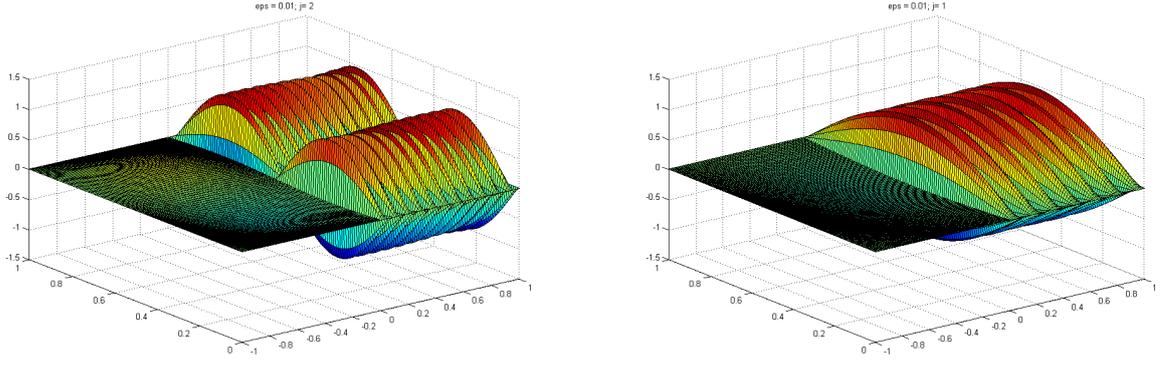


Figura 16: Funciones $X_{j,k}(x)Y_j(y)$ definidas para $\varepsilon = 0.01$. A la izquierda, gráfica de la función $X_{2,k}(x)\sin(2\pi y)$, con $\lambda_{j,k} \approx 48.223916$. A la derecha, gráfica de $X_{1,k}(x)\sin(\pi y)$, donde $\lambda_{j,k} \approx 16.8473753$.

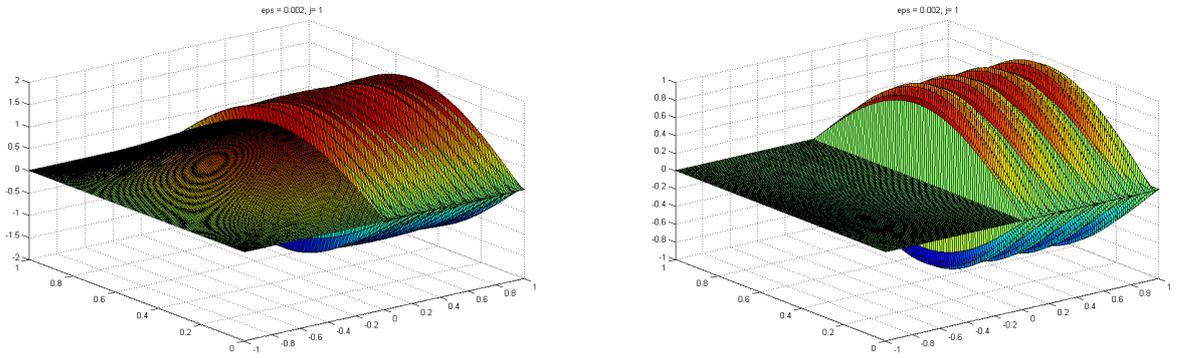


Figura 17: Funciones $X_{1,k}(x)\sin(\pi y)$ definidas para $\varepsilon = 0.002$ con distintos valores de k . A la izquierda, para $\lambda_{1,k} \approx 12.078789$. A la derecha, para $\lambda_{1,k} \approx 20.230744$.

¿Qué ocurre si $\cos(\sqrt{\lambda - j^2\pi^2}) = 0$ o $\cos(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon} - j^2\pi^2}) = 0$?

En virtud de (3.33), si $\cos(\sqrt{\lambda - j^2\pi^2}) = 0$, se comprueba que $\cos(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon} - j^2\pi^2}) = 0$.

Recíprocamente, si $\cos(\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon} - j^2\pi^2}) = 0$, entonces $\cos(\sqrt{\lambda - j^2\pi^2}) = 0$.

Necesariamente, debe cumplirse que:

$$\lambda - j^2\pi^2 = \frac{(2k+1)^2\pi^2}{4}, \quad \frac{\lambda}{\varepsilon} - j^2\pi^2 = \frac{(2l+1)^2\pi^2}{4}, \quad \text{con } k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Esta dos condiciones no tienen lugar simultáneamente para cualquier valor de ε . Los valores de ε para los que esto ocurre son:

$$\varepsilon_{j,k,l} = \frac{4j^2 + (2k+1)^2}{4j^2 + (2l+1)^2}; \quad k, l \in \{0, 1, 2, \dots\}, j \in \{1, 2, 3, \dots\}, k < l. \quad (3.36)$$

En este caso, los autovalores λ que se obtienen de esta forma son

$$\tilde{\lambda}_{j,k} = j^2\pi^2 + \frac{(2k+1)^2\pi^2}{4},$$

y por tanto, la expresión de la función $\tilde{\tilde{X}}_{j,k}(x)$ es:

$$\tilde{\tilde{X}}_{j,k}(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}x\right) & x \in (-1, 0), \\ \cos\left(\sqrt{\frac{j^2 + \left(\frac{2k+1}{2}\right)^2}{\varepsilon}} - j^2\pi x\right) & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.37)$$

En las Figuras 18 y 19 mostramos algunas de estas funciones $\tilde{\tilde{X}}_{j,k}(x)Y_j(y)$, para distintos valores de j , k y l . En la Figura 19, se ve que las funciones propias pueden también ser fuertemente oscilantes en Ω_0 .

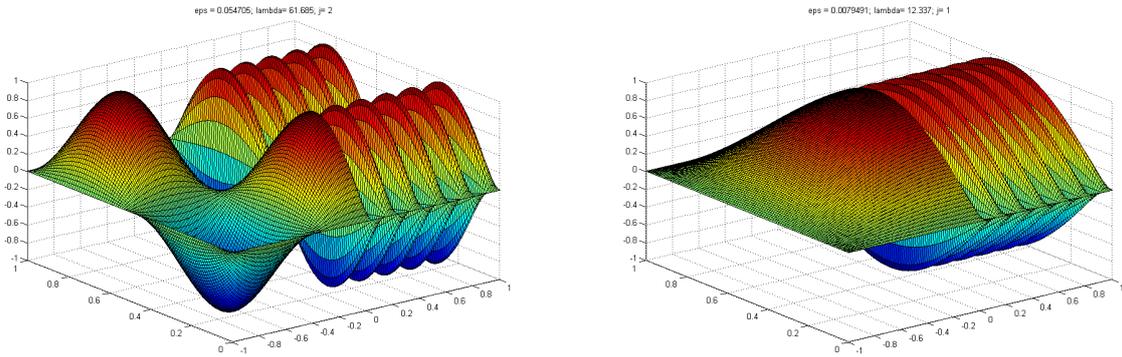


Figura 18: Distintas funciones $\tilde{\tilde{X}}_{j,k}(x) \sin(j\pi y)$, donde $\tilde{\tilde{X}}_{j,k}(x)$ satisface (3.37). La primera con $j = 2$, $k = 1$, $l = 10$ ($\tilde{\tilde{\lambda}}_{j,k} \approx 61.685$, $\varepsilon \approx 0.054705$). La segunda con $j = 1$, $k = 0$ y $l = 12$ ($\tilde{\tilde{\lambda}}_{j,k} \approx 12.337$, $\varepsilon \approx 0.0079491$).

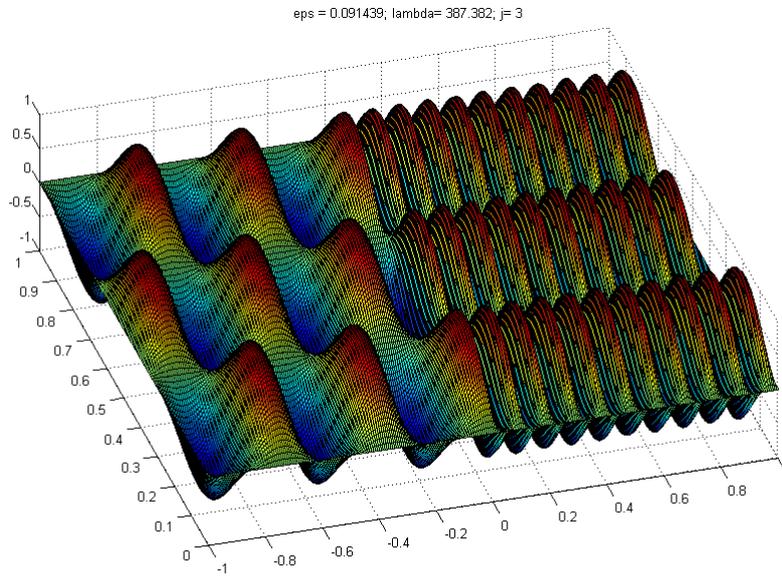


Figura 19: Gráfica de $\tilde{\tilde{X}}_{j,k}(x)Y_j(y)$, con $j = 3$, $k = 5$ y $l = 20$ ($\varepsilon = 0.091439$, $\tilde{\tilde{\lambda}}_{j,k} = 387.382$);

Una vez estudiados los distintos casos, obtenemos una familia biparamétrica de ondas estacionarias $\mathbf{u}_{j,k}(x, y, t) = X_{j,k}(x)Y_j(y)T_{0,j,k}(t)$, y $\tilde{\mathbf{u}}_{j,k}(x, y, t) = X_{j,k}(x)Y_j(y)T_{1,j,k}(t)$, donde $X_{j,k}$

vienen dadas por (3.28), (3.31), (3.35) o (3.37), $Y_j(y) = \sin(j\pi y)$, y donde $T_{0,j,k}(t)$ y $T_{1,j,k}(t)$ se definen como:

$$\begin{aligned} T_{0,j,k}(t) &= \cos(\sqrt{\lambda_{j,k}}t) \quad t > 0; \\ T_{1,j,k}(t) &= \sin(\sqrt{\lambda_{j,k}}t) \quad t > 0. \end{aligned}$$

Este problema se puede generalizar a dimensión N arbitraria.

3.1.3 Problema en dimensión N :

Se considera el problema de vibraciones (3.1), con $\Omega_0 = (-1, 0) \times \tilde{\Omega}$, $\Omega_1 = (0, 1) \times \tilde{\Omega}$, $\Omega = (-1, 1) \times \tilde{\Omega}$ donde $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^{N-1}$, por ejemplo, un producto de intervalos. $\mathbf{x} = (x, \mathbf{y})$ con $x \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{y} = (x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$.

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{tt} - \Delta_{\mathbf{x}}\mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega_0, t > 0, \\ \mathbf{u}_{tt} - \varepsilon\Delta_{\mathbf{x}}\mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega_1, t > 0, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{u}_t(\mathbf{x}, 0) = u_1(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 & \mathbf{x} \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases} \quad (3.38)$$

con las siguientes condiciones de transmisión cuando $x = 0$:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(0^+, \mathbf{y}, t) = \mathbf{u}(0^-, \mathbf{y}, t) & \mathbf{y} \in \tilde{\Omega}, t > 0, \\ \varepsilon\mathbf{u}_x(0^+, \mathbf{y}, t) = \mathbf{u}_x(0^-, \mathbf{y}, t) & \mathbf{y} \in \tilde{\Omega}, t > 0. \end{cases}$$

Mediante separación de variables, buscamos soluciones de la forma $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = U(\mathbf{x})T(t)$ y se llega al problema (3.4). Entonces, separando las variables x, \mathbf{y} , $U(\mathbf{x})T(t) = X(x)Y(\mathbf{y})T(t)$, obtenemos:

$$\begin{cases} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)Y(\mathbf{y}) + X(x)\Delta_{\mathbf{y}}Y(\mathbf{y})}{X(x)Y(\mathbf{y})} = -\lambda & \mathbf{x} \in \Omega_0, \\ \frac{T''(t)}{T(t)} = \varepsilon \frac{X''(x)Y(\mathbf{y}) + X(x)\Delta_{\mathbf{y}}Y(\mathbf{y})}{X(x)Y(\mathbf{y})} = -\lambda & \mathbf{x} \in \Omega_1. \end{cases}$$

El problema de valores propios a resolver es:

$$\begin{cases} \frac{X''(x)Y(\mathbf{y}) + X(x)\Delta_{\mathbf{y}}Y(\mathbf{y})}{X(x)Y(\mathbf{y})} = -\lambda & \mathbf{x} \in \Omega_0, \\ \varepsilon \frac{X''(x)Y(\mathbf{y}) + X(x)\Delta_{\mathbf{y}}Y(\mathbf{y})}{X(x)Y(\mathbf{y})} = -\lambda & \mathbf{x} \in \Omega_1, \\ X(-1) = X(1) = 0, \\ Y(\mathbf{y}) = 0 & \mathbf{y} \in \partial\tilde{\Omega}, \\ X(0^-)Y(\mathbf{y}) = X(0^+)Y(\mathbf{y}) & \mathbf{y} \in \tilde{\Omega}, \\ X'(0^-)Y(\mathbf{y}) = \varepsilon X'(0^+)Y(\mathbf{y}) & \mathbf{y} \in \tilde{\Omega}. \end{cases} \quad (3.39)$$

Así tenemos:

$$\begin{cases} \frac{X''(x)}{X(x)} + \lambda = \frac{-\Delta_{\mathbf{y}}Y(\mathbf{y})}{Y(\mathbf{y})} = \mu & \mathbf{x} \in \Omega_0, \\ \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{\lambda}{\varepsilon} = \frac{-\Delta_{\mathbf{y}}Y(\mathbf{y})}{Y(\mathbf{y})} = \hat{\mu} & \mathbf{x} \in \Omega_1. \end{cases}$$

En un principio, pueden tener lugar 2 casos:

- **Caso 1:** $\mu = \hat{\mu}$, y además, la función $Y(\mathbf{y})$ es igual en Ω_0 y en Ω_1 .

Tenemos entonces una familia numerable de autovalores, $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ tales que $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k \leq \mu_{k+1} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$. También obtenemos una familia numerable de autofunciones $Y_k(\mathbf{y})$, donde $k \in \mathbb{N}$.

- **Caso 2:** La función $Y(\mathbf{y})$ no coincide en Ω_0 y en Ω_1 .

Este supuesto incluye todos los casos $\mu \neq \hat{\mu}$. La autofunción $X(x)Y(\mathbf{y})$ quedaría entonces como:

$$X(x)Y(\mathbf{y}) = \begin{cases} X(x)Y_j(\mathbf{y}) & \text{si } (x, \mathbf{y}) \in \Omega_0, \\ X(x)Y_k(\mathbf{y}) & \text{si } (x, \mathbf{y}) \in \Omega_1, \end{cases}$$

donde $j \neq k$.

Imponemos $X(0^-)Y_j(\mathbf{y}) = X(0)Y_k(\mathbf{y})$, al aplicar la condición de igualdad de trazas en Σ , para todo $\mathbf{y} \in \Omega$. Necesariamente, $X(0) = 0$, con lo que nos encontraríamos con un problema Dirichlet en Ω_0 y en Ω_1 . Al ser un problema de valores propios, tenemos que $X(x) = A_0 \sin(\rho\pi x)$ si $x \in (-1, 0)$, y que $X(x) = A_1 \sin(\hat{\rho}\pi x)$ si $x \in (0, 1)$, donde $\rho, \hat{\rho} \in \mathbb{N}$. Derivando respecto de x , obtenemos:

$$X'(x)Y(\mathbf{y}) = \begin{cases} X'(x)Y_j(\mathbf{y}) & \text{si } (x, \mathbf{y}) \in \Omega_0, \\ X'(x)Y_k(\mathbf{y}) & \text{si } (x, \mathbf{y}) \in \Omega_1. \end{cases}$$

Aplicando la condición de transmisión en 0 para las derivadas, tenemos $X'(0^-)Y_0(\mathbf{y}) = \varepsilon X'(0^+)Y_1(\mathbf{y}) \forall \mathbf{y} \in \tilde{\Omega}$. Entonces, deducimos que $X'(0) = 0$, con lo que $X \equiv 0$.

En consecuencia, $\mu = \hat{\mu}$ y las funciones propias $Y_j(\mathbf{y})$ e $Y_k(\mathbf{y})$ deben ser iguales.

Descartando el caso 2, podemos plantear un único problema de valores propios para la variable \mathbf{y} con condición Dirichlet que no depende de ε , y es:

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbf{y}}Y(\mathbf{y}) = \mu Y(\mathbf{y}) & \mathbf{y} \in \tilde{\Omega}, \\ Y(\mathbf{y}) = 0 & \mathbf{y} \in \partial\tilde{\Omega}. \end{cases} \quad (3.40)$$

Por el Teorema 1.2, aplicado a $\tilde{\Omega}$, existe una sucesión $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$ de autovalores tal que $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \xrightarrow[j \rightarrow \infty]{} \infty$ y autofunciones $\{Y_j(\mathbf{y})\}_{j=1}^{\infty}$ de (3.40).

La ecuación para $X(x)$ es:

$$X''(x) = \begin{cases} (\mu_j - \lambda)X(x) & x \in (-1, 0), \\ \left(\mu_j - \frac{\lambda}{\varepsilon}\right)X(x) & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.41)$$

La expresión (3.41) es idéntica a (3.21), salvo por que en este caso μ_j no es necesariamente $j^2\pi^2$. Por tanto, las diferentes expresiones de la función $X(x)$ obtenidas en el caso bidimensional son válidas en este caso general sin más que sustituir $j^2\pi^2$ por μ_j , teniendo en cuenta los correspondientes casos (**casos I-V**).

3.2 Comportamientos asintóticos. Problema en un dominio arbitrario

En esta sección, plantearemos el problema (3.1) en un dominio Ω arbitrario de \mathbb{R}^N . En el apartado anterior se han calculado distintas ondas estacionarias cuando se trabajaba en dominios donde se podía separar variables. Aún así, los valores propios se han determinado como raíces de ecuaciones no lineales, encontrándose aproximaciones a las mismas.

Sin embargo, aplicando ciertos resultados teóricos, se pueden demostrar algunas propiedades asintóticas (cuando $\varepsilon \rightarrow 0$) que satisfacen los autovalores $\{\lambda_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$ y autofunciones $\{U_n^\varepsilon(\mathbf{x})\}_{n=1}^\infty$ del problema (3.4), que nos permitirán obtener determinadas aproximaciones de las soluciones del problema (3.1).

Estas propiedades de los autovalores y autofunciones del problema (3.4) se han estudiado en las referencias [5], [7], [10] de la bibliografía. A continuación enunciaremos algunas de ellas, que utilizaremos para obtener las aproximaciones.

Por una parte, existen resultados que nos permiten dar una cota inferior y superior de los autovalores λ_n^ε cuando $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$C\varepsilon \leq \lambda_n^\varepsilon \leq C_n\varepsilon, \quad (3.42)$$

donde C es una constante que no depende de ε ni n ; C_n es otra constante, que no depende de ε y tal que $C_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Para cada n fijo, deducimos la existencia de autovalores de orden $O(\varepsilon)$, que denominaremos *bajas frecuencias*.

Se tiene de hecho el siguiente resultado:

Lema 3.1: *Para cada $k \in \mathbb{N}$, los valores $\lambda_k^\varepsilon/\varepsilon$ convergen cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ hacia λ_k^* , donde λ_k^* es el k -ésimo valor propio del siguiente problema Dirichlet:*

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbf{x}}U = \lambda U & \text{en } \Omega_1, \\ U = 0 & \text{en } \partial\Omega_1. \end{cases} \quad (3.43)$$

Las correspondientes autofunciones U_k^ε , tomadas de modo que $\|U_k^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = 1$, convergen en $L^2(\Omega)$ a U_k^* , donde U_k^* es una función propia asociada a λ_k^* del problema (3.43) extendida por 0 en Ω_0 .

Utilizando estos resultados, se tienen aproximaciones de ondas estacionarias para las bajas frecuencias via los valores propios y funciones propias del problema de Dirichlet en Ω_1 (3.43) extendidas por 0 en Ω_0 . Además, basándonos en las técnicas utilizadas en [8] para altas y bajas frecuencias para otros problemas de perturbaciones espectrales singulares, postulamos que si tomamos en el problema (3.1) las siguientes condiciones iniciales:

$$u_0(\mathbf{x}) = U_k^*(\mathbf{x}), \quad u_1(\mathbf{x}) = 0,$$

entonces la solución $\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ obtenida se aproxima por

$$\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) \approx U_k^*(\mathbf{x}) \cos(\sqrt{\lambda_k^* \varepsilon} t) \quad (3.44)$$

para tiempos $t \leq t_{\varepsilon, k}$, donde $t_{\varepsilon, k}$ depende del radio de convergencia de los valores propios (es decir, $|\lambda_k^\varepsilon - \lambda_k^* \varepsilon|$) y de ε , y fijado k , $t_{\varepsilon, k} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty$. De hecho, ambas funciones $\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ y

$U_k^*(\mathbf{x}) \cos(\sqrt{\lambda_k^* \varepsilon} t)$ son aproximaciones de una onda estacionaria.

Análogamente, si tomamos en el problema (3.1) las siguientes condiciones iniciales:

$$u_0(\mathbf{x}) = 0, \quad u_1(\mathbf{x}) = U_k^*(\mathbf{x}),$$

la solución $\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ obtenida se aproxima por

$$\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) \approx \frac{1}{\sqrt{\lambda_k^* \varepsilon}} U_k^*(\mathbf{x}) \sin(\sqrt{\lambda_k^* \varepsilon} t) \quad (3.45)$$

para tiempos $t \leq t_{\varepsilon, k}$.

Esto nos permite localizar vibraciones que afectan, por ejemplo, solamente a una parte del dominio. En particular, podemos utilizar las ondas estacionarias del capítulo 2 para aproximar vibraciones de cuerdas, membranas u otros objetos con una parte muy rígida. Esto lo ilustramos con unas gráficas obtenidas con métodos numéricos basados en diferencias finitas para el problema de la cuerda y de la membrana. En todos los casos, las funciones u_0 y u_1 serán funciones nulas o funciones propias del problema de Dirichlet en Ω_1 extendidas por 0 en Ω_0 .

Gráficas obtenidas para el problema de la cuerda

En las siguientes gráficas se muestra el comportamiento de $\mathbf{u}^\varepsilon(x, t)$ para distintos valores de t , en función de ε y de las condiciones iniciales u_0 y u_1 .

- Gráficas obtenidas con $u_0 = \sin(\pi x)$, $u_1 = 0$ para distintos valores de ε y t :

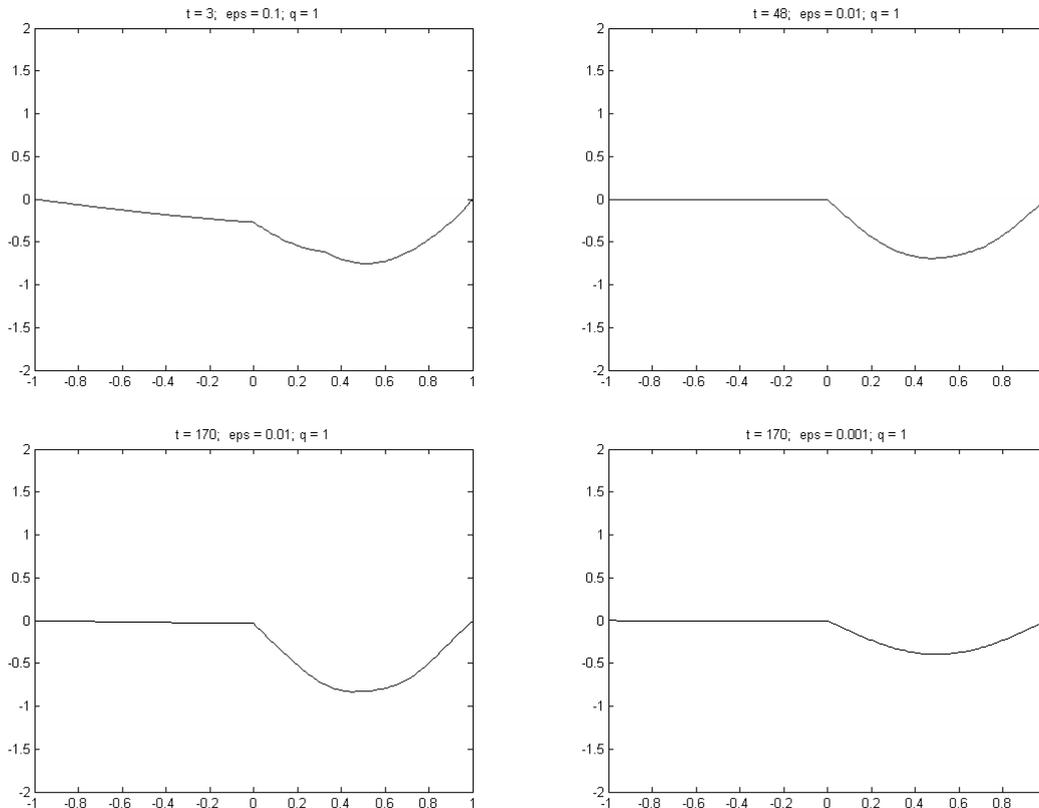


Figura 20: Soluciones obtenidas para distintos valores de t y ε cuando $k = 1$. Se observa que los desplazamientos en el lado izquierdo tienden a desaparecer al reducirse ε .

En la primera gráfica, tomamos $k = 1$, $\varepsilon = 0.1$ y $t = 3$. En la segunda y tercera gráficas, tomamos también $k = 1$, pero $\varepsilon = 0.01$ ($t = 48$ en la segunda gráfica, y $t = 170$ en la tercera). En la cuarta gráfica se ha tomado $t = 170$ y $\varepsilon = 0.001$.

• Gráficas obtenidas con $u_0 = \sin(k\pi x)$, $u_1 = 0$ para distintos valores de k , ε y t :

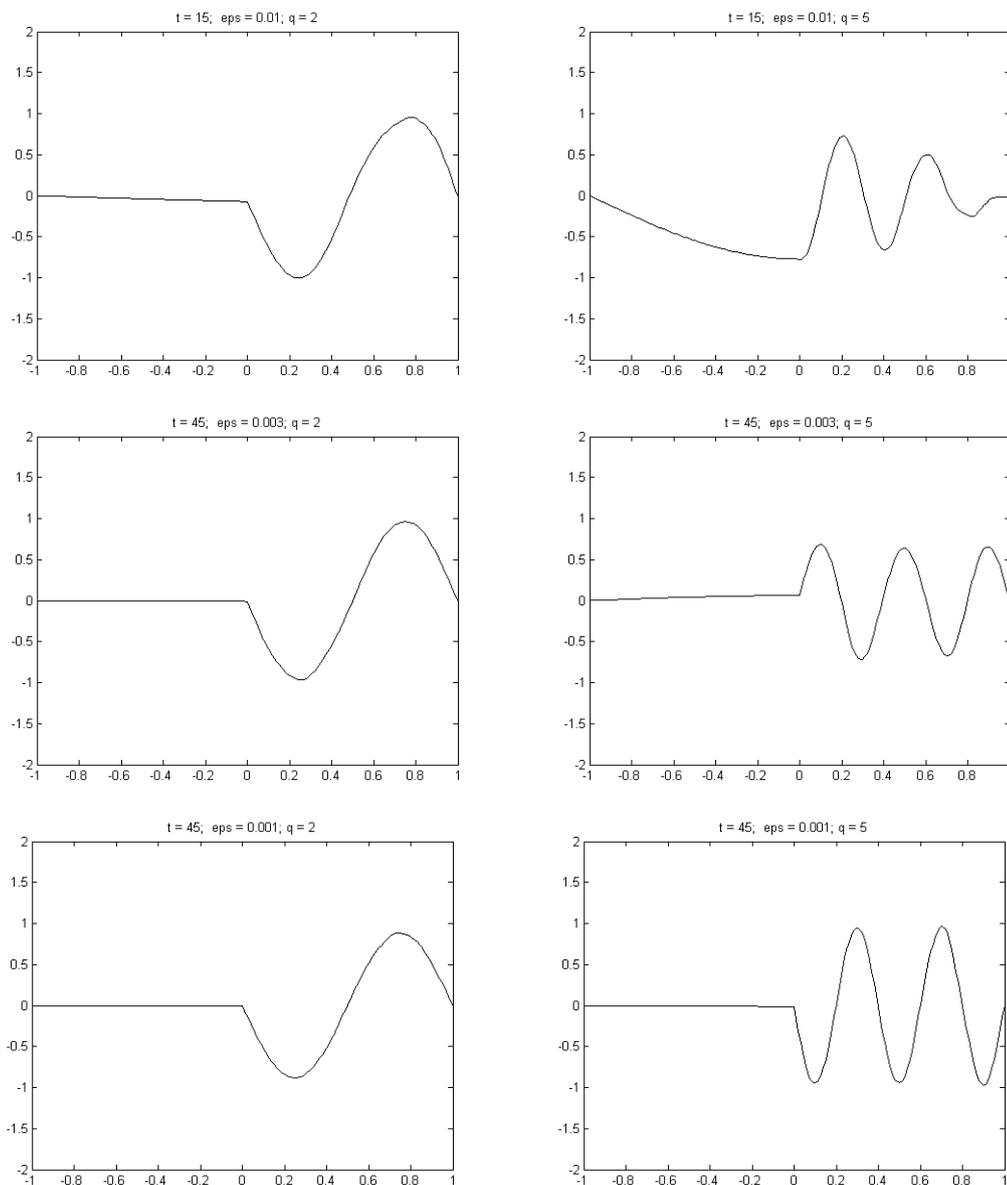


Figura 21: Efecto de los valores de k y ε en el comportamiento de las soluciones. Al reducir ε se reducen los desplazamientos en el lado izquierdo.

En las gráficas de la Figura 21 se tiene el mismo efecto que en la Figura 20 dependiendo del parámetro k . Tomamos en las gráficas de la izquierda $k = 2$ y las gráficas de la derecha, $k = 5$. En las gráficas superiores se toma $\varepsilon = 0.01$ y $t = 15$. En las gráficas centrales, se toma $\varepsilon = 0.003$ y $t = 45$, y las gráficas inferiores, $\varepsilon = 0.001$ y $t = 45$.

Nótese que los valores pequeños de ε , que nos dan mejores aproximaciones, dependen de k .

• **Gráficas obtenidas con $u_0 = 0$, $u_1 = \sin(k\pi x)$ para distintos valores de k y ε :**

En estas gráficas se muestra el efecto de aplicar una condición inicial no nula para la derivada.

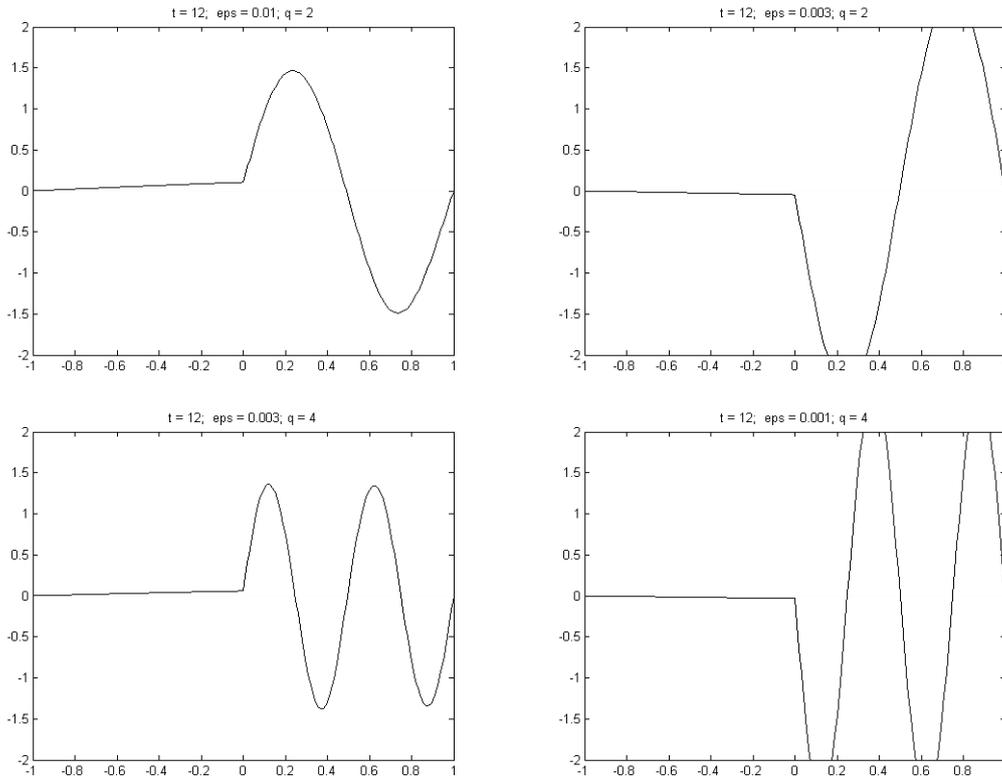


Figura 22: Distintas gráficas obtenidas cuando $u = 0$, $u_1 = \sin(k\pi x)$.

Las 2 gráficas superiores son para $k = 2$, tomándose la izquierda con $\varepsilon = 0.01$ y la derecha con $\varepsilon = 0.003$. En las 2 gráficas inferiores, tomamos $k = 4$, siendo $\varepsilon = 0.003$ y $\varepsilon = 0.001$. La amplitud en el lado derecho aumenta al reducir ε (ver fórmula (3.45)). En todos los casos se ha tomado $t = 12$.

• **Gráficas obtenidas con $u_0 = \alpha \sin(2\pi x)$, $u_1 = \beta \sin(2\pi x)$ y $\varepsilon = 0.01$:**

En el primer caso, $\alpha = -0.5$, $\beta = 0.6$; en el segundo caso $\alpha = 1.2$, $\beta = -0.1$. En ambos casos, se ha tomado $t = 30$.

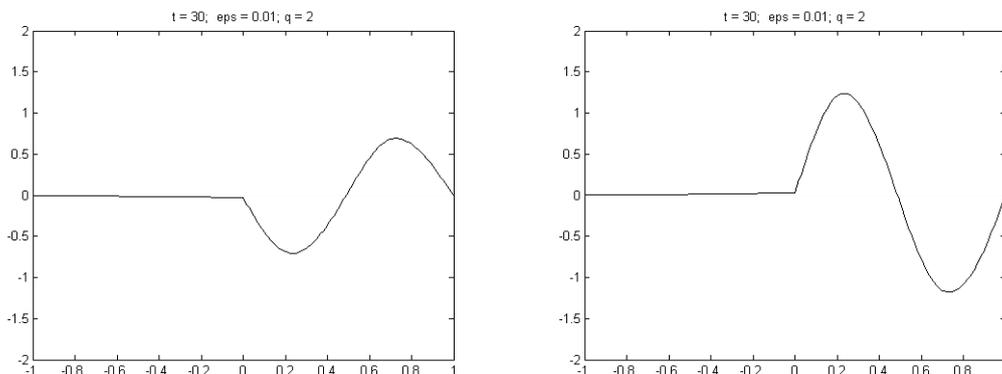


Figura 23: Distintas gráficas obtenidas cuando $u_0 = \alpha \sin(k\pi x)$, $u_1 = \beta \sin(k\pi x)$.

En lo que respecta a los datos iniciales para la función y la derivada ($u_0 = \alpha \sin(k\pi x)$, $u_1 = \beta \sin(k\pi x)$), el valor de los parámetros α y β afecta a la amplitud de las soluciones, sobre todo si $\beta \neq 0$ (ver (3.45)). Por simplicidad, en el caso de la membrana tomaremos $\alpha = 1$ y $\beta = 0$.

Gráficas obtenidas para el problema de la membrana

En lo que sigue q_1 y q_2 son dos números naturales.

• Gráficas obtenidas para la membrana para distintos valores de t y $q_1 = q_2$:

En las siguientes gráficas mostramos el comportamiento de las soluciones numéricas $\mathbf{u}(x, y, t)$ cuando $u_0 = \sin(q_1\pi x) \sin(q_2\pi y)$, $u_1 = 0$, para distintos valores de q_1 , q_2 y t cuando $\varepsilon = 0.1$.

En la Figura 24, las dos gráficas superiores muestran el comportamiento aproximado de la solución cuando $q_1 = q_2 = 1$, la gráfica de la izquierda para $t = 4$, y la de la derecha para $t = 25$. Las dos gráficas inferiores muestran lo propio cuando $q_1 = q_2 = 2$, para los tiempos $t = 4$ y $t = 25$, respectivamente.

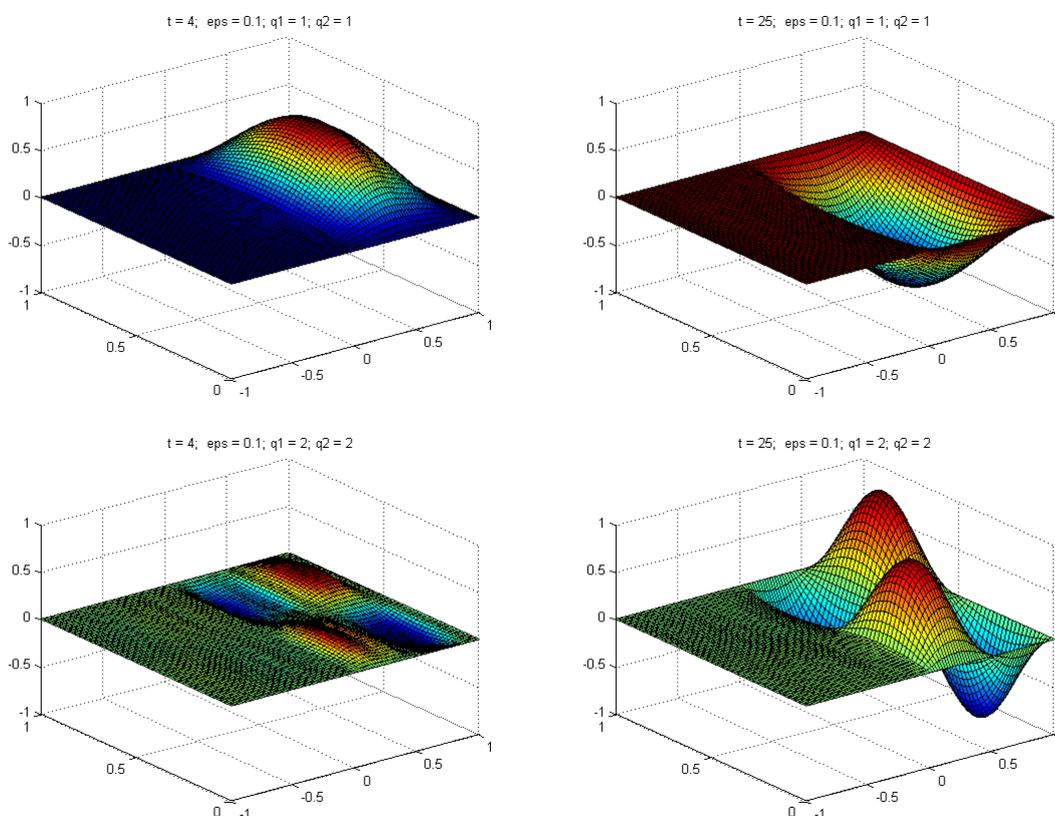


Figura 24: Distintas gráficas de $\mathbf{u}(x, y, t)$ cuando $t = 4$ y $t = 25$ con condición inicial $u_0 = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ o $u_0 = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$. Aunque el tiempo aumenta, no se observan desplazamientos significativos en el lado izquierdo.

• Gráficas obtenidas para la membrana con distintos q_2 y ε , $q_1 = 2$, $t = 15$:

En la Figura 25 se ha tomado $\varepsilon = 0.1$, con $q_1 = 2$, $q_2 = 1$ (gráfica izquierda), y $q_1 = 2$, $q_2 = 6$ (gráfica derecha). En la Figura 26 se toman $q_1 = 2$ y $q_2 = 1$, pero se reduce el valor de ε a 0.02 (izquierda) o a 0.005 (derecha). Se observa que al reducir ε la amplitud de las vibraciones en el lado izquierdo de la membrana tiende a desaparecer cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

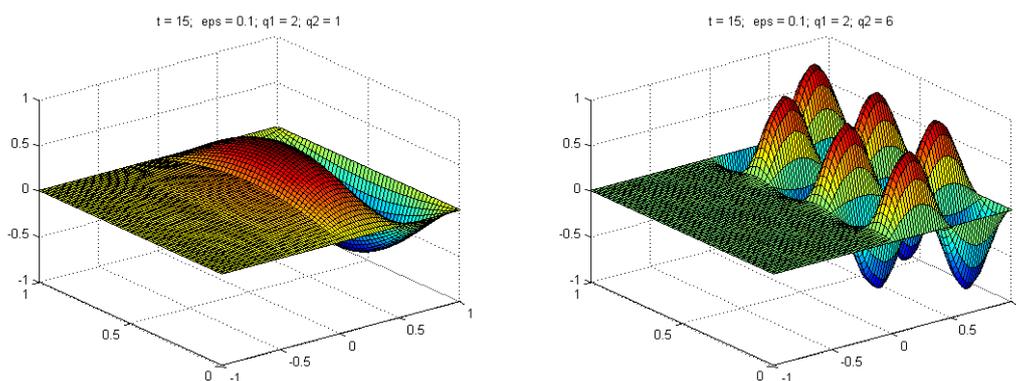


Figura 25: Gráficas de $\mathbf{u}(x, y, t)$ obtenidas cuando $q_1 = 2$, $t = 15$, y $\varepsilon = 0.01$, comparando $q_2 = 1$ (izquierda) y $q_2 = 6$ (derecha).

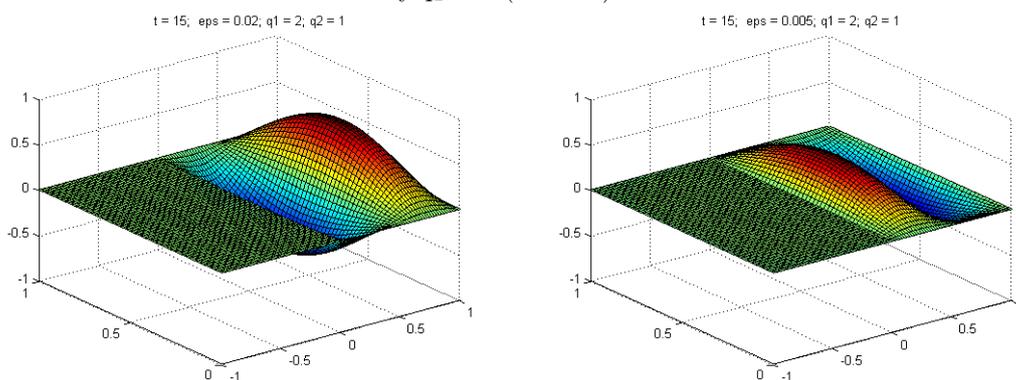


Figura 26: Gráficas de $\mathbf{u}(x, y, t)$ obtenidas cuando $q_1 = 2$, $q_2 = 1$ y $t = 15$, para $\varepsilon = 0.02$ (izquierda) y $\varepsilon = 0.005$ (derecha).

• Otras gráficas obtenidas para la membrana con distintos valores de q_1 , ε y t :

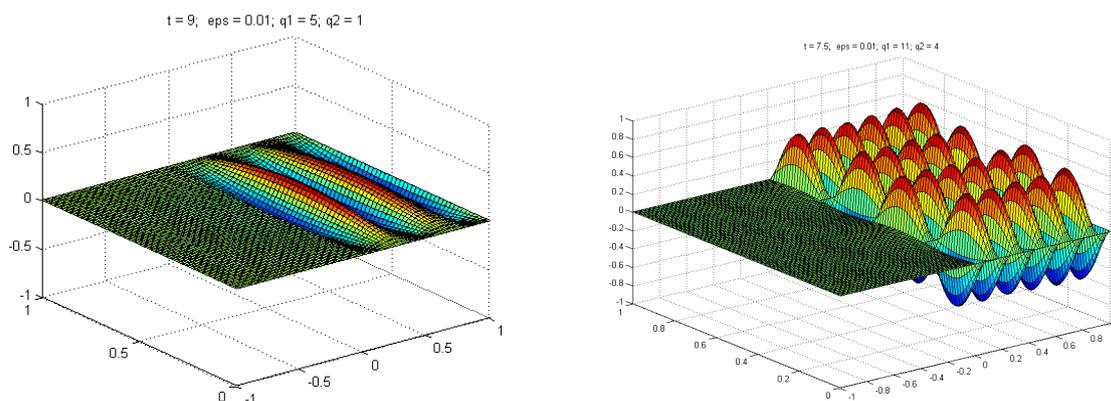


Figura 27: Distintas gráficas de $\mathbf{u}(x, y, t)$ para distintos valores de q_1 , q_2 y t .

En la gráfica izquierda de la Figura 27 se han tomado $t = 9$, $q_1 = 5$, $q_2 = 1$ y $\varepsilon = 0.01$. En la gráfica derecha, $t = 7.5$, $q_1 = 11$, $q_2 = 4$ y $\varepsilon = 0.01$. En la figura 28, se ha tomado $q_1 = 11$ y $q_2 = 1$ en ambos casos; en la gráfica izquierda, $t = 7.5$ y $\varepsilon = 0.01$, mientras en la derecha, $t = 15$ y $\varepsilon = 0.001$. Se comprueba nuevamente que la amplitud de las vibraciones en el lado izquierdo tienden a desaparecer cuando ε tiende a 0, para todos los valores de t elegidos.

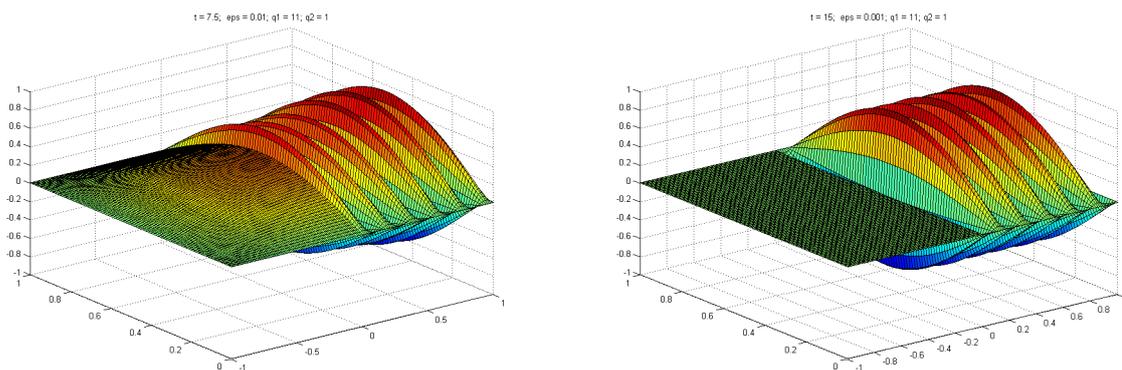
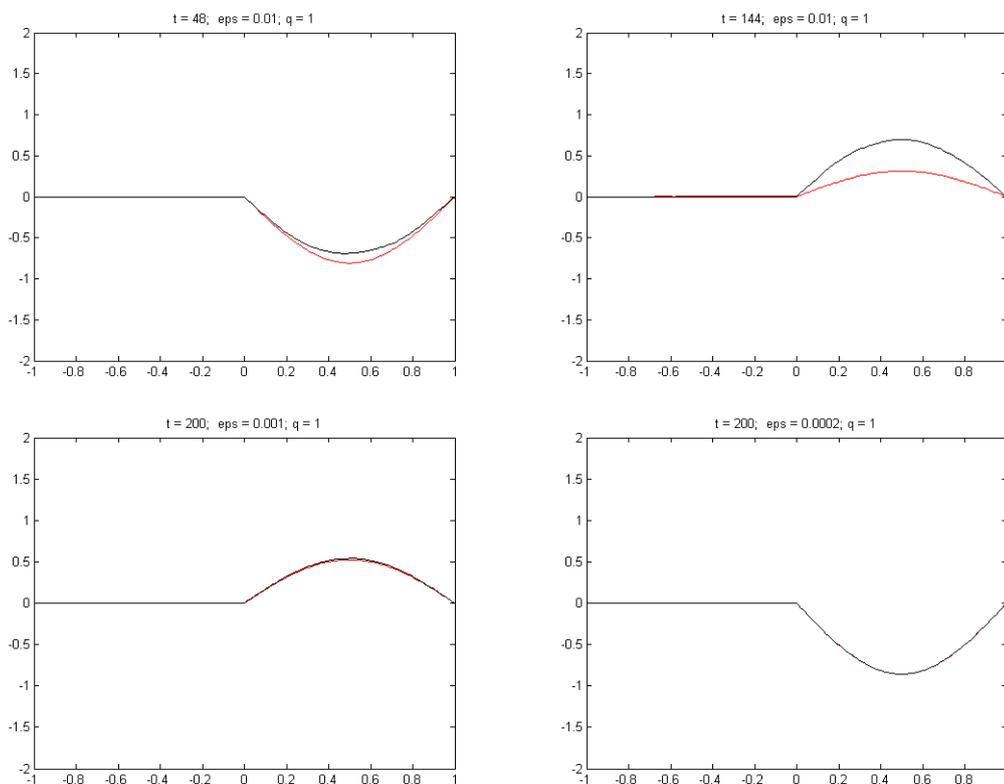


Figura 28: Distintas gráficas de $u(x, y, t)$ para distintos valores de q_1 , q_2 y t .

Aproximación numérica versus aproximación simbólica, para tiempos grandes, en dimensión 1

En las gráficas superiores se ha tomado $k = 1$ y $\varepsilon = 0.01$, con $t = 48$ en la gráfica izquierda y $t = 144$ en la derecha. En las gráficas centrales se reduce ε a 0.001 y 0.0002, tomando en ambos casos $t = 200$. En las 2 gráficas inferiores se muestra el efecto de incrementar k ($k = 4$ en la gráfica izquierda y $k = 10$ en la derecha, $t = 200$, $\varepsilon = 0.001$). En todos los casos $u_0 = \sin(k\pi x)$ y $u_1 = 0$. La gráfica roja es la aproximación simbólica obtenida en (3.44)



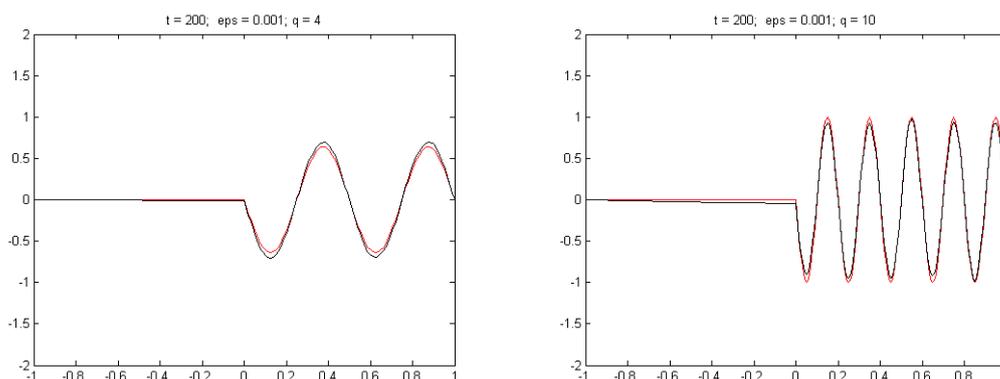


Figura 29: Comparación entre las soluciones obtenidas mediante diferencias finitas (negro) y la función aproximante definida en (3.44).

Se observa que el valor del tiempo t y $(\sqrt{\lambda_k^\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon\lambda_k^*})$ juegan un papel importante en la aproximación, y que además esta depende del número del valor propio k .

Observación 1: Las gráficas se han realizado con un método numérico explícito basado en diferencias finitas. En dimensión 1, un programa con elementos finitos para el cálculo de valores propios y funciones propias de (3.9) se encuentra en el capítulo 10 de la referencia [9] de la bibliografía.

Observación 2: Una forma de mejorar las aproximaciones consideradas en este capítulo es usar desarrollos asintóticos de los autovalores y autofunciones obtenidas como solución de (3.4). Por ejemplo, ver sección VII.6 de la referencia [10] de la bibliografía. Para más información sobre el efecto que tienen las altas frecuencias en Ω_0 , ver referencia [5] de la bibliografía.

Bibliografía

- [1] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext, Springer (2010).
- [2] E. Casas, *Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales*. Universidad de Cantabria (1992).
- [3] D. Gómez, M. Lobo, E. Pérez, *Sobre vibraciones de un sistema con masa concentrada*. In: XV CEDYA/ V Congress of Applied Mathematics, Universidad de Vigo, pp 453-458 (1998).
- [4] F.K. Kneobühl, *Oscillations and Waves*. Springer (1997).
- [5] M. Lobo, E. Pérez, *High frequency vibrations in a stiff problem*. Mathematical, Models and Methods in Applied Sciences, Vol.7, N°2, pp 291-311 (1996).
- [6] T. Myint-U, L. Debnath, *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Birkhäuser (2007).
- [7] E. Pérez, *Altas frecuencias en un problema "stiff" relativo a la vibración de una cuerda*. In: XIV CEDYA/IV Congress of Applied Mathematics, Universidad de Barcelona, (electronic) pp 7 (1995).
- [8] E. Pérez, *Long time approximations for solutions of wave equations via standing waves from quasimodes*. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Vol. 90, pp 387-411 (2008).
- [9] M.E. Pérez, *Cálculo Simbólico y Numérico en Ecuaciones Diferenciales*, OCW. Universidad de Cantabria (2014). <https://ocw.unican.es/course/view.php?id=59>
- [10] J. Sanchez-Hubert, E. Sanchez-Palencia, *Vibration and Coupling of Continuous Systems. Asymptotic Methods*. Springer-Verlag (1989).
- [11] H.F. Weinberger, *A First Course in Partial Differential Equations with Complex Variables and Transform Methods*. Dover Publications, INC (1965).