

FACULTAD
DE
CIENCIAS

**Índice de separación en triangulaciones de
esferas de dos dimensiones.**

(Separation index on 2-dimensional sphere triangulations.)

Trabajo de fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Christian Piñera Diez

Director: Francisco Santos Leal

Octubre-2017

Índice general

1.	Introducción	1
2.	Abstract	2
3.	Preliminares.	2
3.1.	Grafos	2
3.2.	Complejos simpliciales	5
3.3.	Grafos planos. Triangulaciones	8
4.	Índice de separación	10
4.1.	Definiciones	10
4.2.	Resultados sobre el índice de separacion	13
4.3.	El vector de separación	19
5.	Implementación	22
6.	Resultados experimentales	27
6.1.	Tiempo de cálculo	27
6.2.	Estudio experimental del índice de separación de esferas con pocos vértices	30

1. Introducción

En este trabajo estudiamos un nuevo invariante combinatorio introducido por Benjamin A. Burton, Basudeb Datta, Nitin Singh y Jonathan Spreer [BDSS15]. Los autores lo llaman el *índice de separación* de un grafo e intenta medir cuán conexos son, en media, los subgrafos inducidos de un grafo dado.

Aunque el invariante se puede definir para un grafo arbitrario, el artículo de Burton et al., así como esta memoria, están dedicados a estudiar en detalle el caso de *triangulaciones de esferas*, es decir, grafos dibujados en la esfera \mathbb{S}^2 y que la dividen en regiones (topológicamente) triangulares. Estos grafos coinciden con los *grafos planos maximales* y han sido muy estudiados. Por ejemplo, hay un artículo clásico de W. Tutte [Tu] que calcula el número de triangulaciones de la esfera con n vértices. Entre estos grafos existen ciertos movimientos “locales” que permiten ir de cualquier esfera a cualquier otra, y buena parte del trabajo está dedicada a estudiar cómo cambia el índice de separación a través de estos movimientos.

Aunque nuestro trabajo se centra en el caso de la esfera \mathbb{S}^2 y sigue bastante de cerca el artículo mencionado, es interesante señalar que las motivaciones de Burton et al. para estudiar este caso provienen de el estudio de triangulaciones de variedades topológicas de dimensión tres.

La Sección 3 recoge algunos resultados preliminares de teoría de grafos, en especial relacionados con planaridad (teorema de Kuratowski, número máximo de aristas de un grafo plano, etc), así como todos los conocimientos previos que son necesarios para el seguimiento del trabajo prácticamente en su totalidad. Después de esto nuestro trabajo tiene dos partes fundamentales: en la Sección 4 hacemos un estudio teórico del índice de separación, repitiendo la demostración del resultado principal de [BDSS15] (Teorema 4.13 de esta memoria) pero también añadiendo algunos resultados propios en la Subsección 4.3. Por ejemplo, el Lema 4.14 y el Teorema 4.15 son versiones más finas de resultados del artículo. En ellas, en vez de dar las fórmulas para el índice de separación global como se hace en [BDSS15], las calculamos y demostramos para una versión estratificada en la que el índice de separación se divide en componentes según el tamaño de los subgrafos.

Después en las secciones 5 y 6, hacemos un estudio experimental. La sección 5 describe nuestra implementación en Sage del cálculo del índice de separación de un grafo dado, utilizando las fórmulas recursivas al respecto que se han demostrado en la sección 4; además de algoritmos para realizar los diversos movimientos biestelares y algunos algoritmos para la creación de grafos apilados y la comprobación de si un grafo es o no apilado.

En la Sección 6 resumimos los resultados experimentales que hemos obtenido. El algoritmo para calcular el índice de separación es de orden exponencial porque necesita calcular los subgrafos inducidos por todos los subconjuntos de vértices, y el número de ellos es 2^n si tenemos n vértices. Para intentar mejorar su velocidad probamos a calcular el número de componentes conexas de los subgrafos inducidos de dos maneras distintas: mediante los procedimientos propios de teoría de grafos y mediante el determinante de la matriz de incidencia. Como explicaremos más adelante,

este segundo intento no tiene mucho éxito.

Para las triangulaciones apiladas (es decir, las que se pueden obtener desde un tetraedro usando solo 0-movimientos) la situación es mucho mejor: el cambio que los 0-movimientos producen en el índice de separación depende solo del número de vértices, lo cual lleva a una fórmula explícita para el índice de separación de estos grafos (Corolario 4.12). Por otro lado, el algoritmo que comprueba si un grafo es apilado o no tiene tiempo polinómico.

En cambio, la observación 4.11 muestra que una fórmula similar no puede existir para los 1-movimientos. De hecho, el principal problema abierto sobre este invariante es si existe o no algún algoritmo polinómico para calcularlo.

Por último, realizamos unos experimentos para crear una lista de todos los índices de separación de esferas con pocos vértices y ver cómo varían al aplicarles los movimientos biestelares.

Palabras clave: Triangulación, Combinatoria, Invariante, Grafo, Complejos simpliciales.

2. Abstract

We study a new combinatorial invariant, separation index. It pretends to size how much connected or not is a graph. Even if it can be define for any graph, on Burton et al. article and on this paper we study it only on 2-sphere triangulations. On section 3 we explain some necessary graph theory results for undertand the rest of the paper. Then on the section 4 we study the separation index, proving the most important results on the article of Burton et al. but also, we include new and original results like Lemma 4.14 and Theorem 4.15. On the following sections, we do an experimental study with the algorithmics implementations on Sage.

Key words: Triangulation, Combinatoric, Invariant, Graph, Simplicial complexes.

3. Preliminares.

Vamos a comenzar esta sección con la definición más básica de la que partiremos, los grafos. Son un elemento de la matemática discreta que tienen mucha presencia en este trabajo, pues todos los elementos y estructuras que aquí se verán pueden entenderse como grafos y relacionarlos entre ellos.

3.1. Grafos

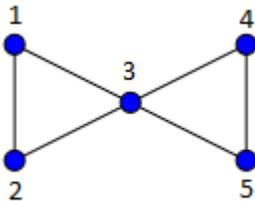
Definición 3.1. *Un grafo G es un par ordenado (V, E) donde:*

- V es un conjunto de vértices
- E es un conjunto de parejas de vértices. A cada pareja se le denomina arista.

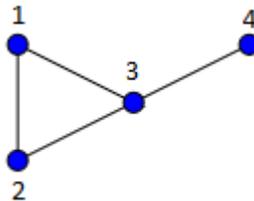
Una propiedad sencilla y práctica de los grafos es que contienen y/o son parte de otros grafos. Como los grafos vienen definidos por aristas y vértices, si añadimos vértices y aristas nuestro

grafo es parte de otro y si le quitamos vértices y aristas, obtenemos grafos que están contenidos en éste.

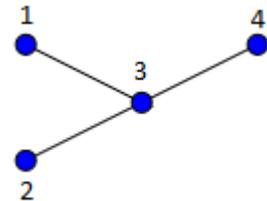
Definición 3.2. Dado un grafo G , decimos que H es **subgrafo** de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Decimos que el subgrafo H es un **subgrafo inducido** de G si para cualquier par de vértices $v, w \in V(G)$ la arista $\{v, w\}$ pertenece a $E(H)$ si y solo si pertenece a $E(G)$ es decir, cada subconjunto $U \subseteq V$ define un subgrafo inducido $G(U)$ cuyo conjunto de vértices es U y cuyas aristas son $\{e \in E : e \subseteq U\}$. Para simplificar la notación, escribiremos las aristas como vw en vez de $\{v, w\}$



(a) Ejemplo de grafo



(b) Subgrafo inducido en los vértices $\{1, 2, 3, 4\}$



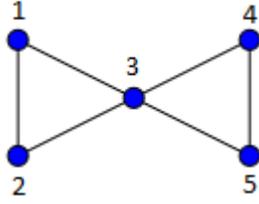
(c) Subgrafo no inducido en los vértices $\{1, 2, 3, 4\}$

El elemento fundamental de un grafo es el vértice. Como tal, es necesario dar algunas nociones básicas y relaciones entre vértices.

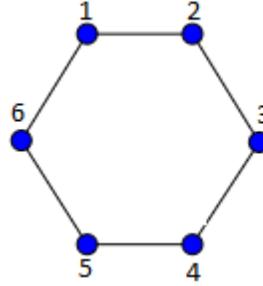
Definición 3.3. Dado un grafo $G = (V, E)$, decimos que dos vértices $v, w \in V$ son **vecinos** si la arista vw pertenece a E . Además, definimos el **grado de un vértice** v , $gr(v)$, como el número de vecinos que tiene v en G .

Aunque la definición y las aplicaciones de los grafos son sobre todo combinatorias, un grafo se puede interpretar también como un objeto topológico (al igual que los complejos simpliciales de los que hablaremos en la sección 2.2). En particular, se puede estudiar su conexión, solo que en el caso de grafos la conexión y el número de componentes admite una definición también muy combinatoria.

Definición 3.4. Dado un grafo G llamamos **camino** a una secuencia de vértices distintos tales que existe una arista entre cada vértice y el siguiente. Decimos que un grafo es **conexo** si dados dos vértices cualesquiera, $v, w \in V$ podemos encontrar un camino que los conecte. Llamamos **componente conexa de G** a un subgrafo conexo maximal de G . Decimos que G es **k -conexo** si $V(G) > k$ y $\forall U \subseteq V$ con $|U| < k$, se tiene que $G(V \setminus U)$ es conexo (es decir, el número mínimo de vértices que hay que quitar para desconectar G es mayor que k).



(d) Ejemplo de grafo conexo pero no 2-conexo



(e) Los ciclos de longitud 4 o más son 2-conexos pero no 3-conexos

Una propiedad atractiva de los grafos es que, dada su naturaleza, es posible representar la información de su estructura mediante matrices. En este trabajo vamos a trabajar con grafos en forma matricial para motivos bastante concretos y necesitamos dejar claro qué matriz usamos y qué representan sus filas y columnas.

Definición 3.5. Dado un grafo $G = (V, E)$ definimos su **matriz de incidencia binaria** como una matriz binaria $I \in \mathbb{Z}_2^{|V| \times |E|}$ que representa las relaciones entre vértices y aristas, donde las filas de I son los vértices, las columnas las aristas y el elemento $I_{i,j}$ es 1 si el vértice i y la arista j están conectados.

Aunque a primera vista la matriz de incidencia puede parecer solo una manera de representar las relaciones de vecindad entre grafos, hay resultados como el que damos a continuación que relacionan propiedades algebraicas de la matriz (en este caso su rango) con propiedades intrínsecas del grafo (en este caso su número de componentes conexas).

Lema 3.6. Sean $G = (V, E)$ un grafo e I su matriz de incidencia binaria. Entonces:

$$\text{Rango}(I) = |V| - \text{número componentes conexas de } G$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer G conexo. Si G no fuera conexo, entonces la matriz de incidencia binaria sería:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} I_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_n \end{array} \right).$$

Y por tanto, el rango sería la suma de los rangos de las submatrices I_i , correspondientes a cada componente conexo.

Entonces, nos basta demostrar para el caso de G conexo, que sería:

$$\text{Rango}(I) = |V| - 1.$$

Es decir, el rango de la matriz es 1 menos que el número de vértices. En efecto, si sumamos los vectores fila de la matriz de incidencia binaria, obtenemos el vector $(0, \dots, 0)$ (módulo 2). Por lo

tanto, el rango de la matriz de incidencia binaria es menor que el número de vértices. Nos falta ver ahora que esa dependencia lineal entre las filas es la única que existe o, lo que es lo mismo, la dimensión del núcleo por la izquierda es 1.

$$\text{Ker}(I) = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda \cdot I = 0\}$$

Cada columna, (arista de G) tiene dos unos, y por tanto implica $\lambda_i = \lambda_j$ para los vértices i y j de esa arista. Como G es conexo, tenemos $\lambda_i = \lambda_j \forall i, j$. Es decir:

$$\text{Ker}(I) = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n\}$$

□

3.2. Complejos simpliciales

La sección continúa con la noción de símplex, el elemento sobre el que trabajaremos directamente en este trabajo.

Definición 3.7. Un *símplex* σ es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos afínmente independientes A en \mathbb{R}^d . Los puntos de A se llaman *vértices* de σ . La *dimensión* de σ es $\dim \sigma := |A| - 1$. Así, cada ***k*-símplex** (símplex de dimensión k) tiene $k + 1$ vértices. Llamamos ***cara*** a la envolvente convexa de un subconjunto arbitrario de vértices de un símplex σ . Así, cada cara de un símplex es un símplex.

Definición 3.8. Se denomina **complejo simplicial geométrico** a una familia Δ de símplexes si cumplen:

- Cada cara de cada símplex $\sigma \in \Delta$ es un símplex de Δ .
- Dados dos símplexes $\sigma_1, \sigma_2 \in \Delta$ la intersección $\sigma_1 \cap \sigma_2$ es una cara de σ_1 y σ_2 .

Además, denotamos como $||\Delta||$ a la unión de los símplexes. $||\Delta||$ es un espacio topológico con la topología euclídea de \mathbb{R}^m .

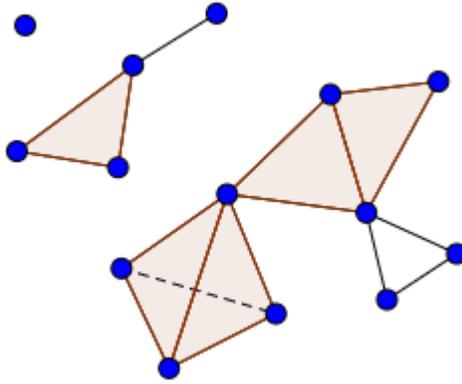
Muchas veces es conveniente mirar solo a una parte del complejo simplicial. Las definiciones de estrella y enlace nos sirven para eso y vienen a ser el análogo de los entornos en un espacio topológico.

Definición 3.9. Sea Δ un complejo simplicial geométrico. Sea $\sigma \in \Delta$ un símplex. Definimos:

- La **estrella** de un símplex σ es el conjunto de símplexes que tienen una cara en σ .
- El **enlace** de σ , denotado por $Lk(\sigma)$ es el subcomplejo definido por:

$$Lk(\sigma) := \{\tau \in \Delta : \tau \cap \sigma = \emptyset, \tau \cup \sigma \in \Delta\}$$

Dado $k \leq \dim(\Delta)$, llamamos ***k*-esqueleto** de Δ a $\{\sigma \in \Delta : \dim \sigma \leq k\}$.



(f) Complejo simplicial con 14 puntos (0-símplices), 18 segmentos (1-símplices), 7 triángulos (2-símplices) y 1 tetraedro (3-símplice)

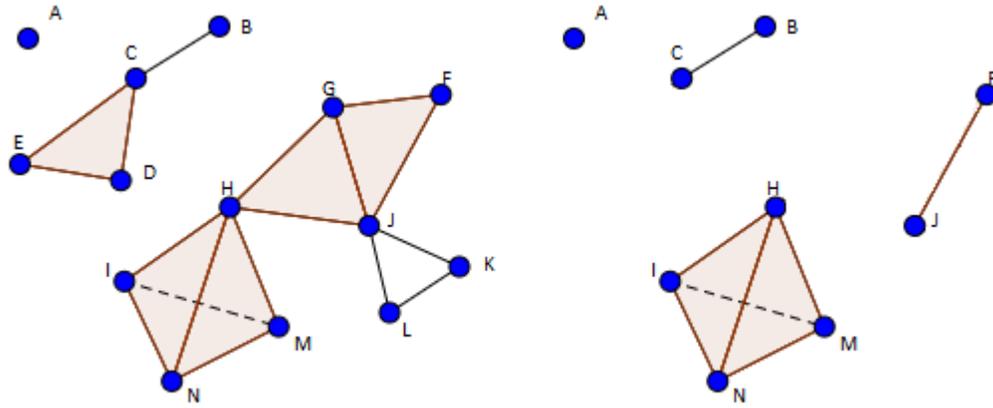
Notemos que si tomamos el 1-esqueleto de un complejo simplicial geométrico, obtenemos un grafo, pues tenemos los elementos de dimensión 0, que son los vértices, y los elementos de dimensión 1, que son las aristas.

Existe otra noción de complejo simplicial más topológica en el sentido de que trabaja más con los elementos como partes de conjuntos finitos.

Definición 3.10. Se denomina **complejo simplicial abstracto** a un par (V, K) , donde V es un conjunto finito y $K \subseteq \mathcal{P}(V)$ es un sistema hereditario de subconjuntos de V ; esto es, si $F \in K$ y $G \subseteq F$ entonces $G \in K$. Los conjuntos de K se denominan *símplices (abstractos)*. Además, se define la **dimensión** del complejo simplicial como $\dim(K) := \max\{|F| - 1 : F \in K\}$. De ahora en adelante, denotaremos por K a un complejo simplicial abstracto y $V(K)$ su conjunto de vértices.

Definición 3.11. Sea K un complejo simplicial abstracto. Un **subcomplejo** $F \subset K$ es un complejo simplicial abstracto cuyos vértices y símplices son subconjuntos de los vértices y símplices de K . Dado un subconjunto de vértices A de V , $X[A]$ denota el complejo simplicial formado por todas las caras de X que están contenidas en A . Decimos que $X[A]$ es el subcomplejo **inducido** por el conjunto A . Decimos que un complejo simplicial de dimensión d es **puro** si todas sus caras maximales son de dimensión d .

Tanto para un complejo simplicial abstracto como para uno geométrico, tenemos diferentes símplices de diversas dimensiones, definidas como correspondan en cada caso. Es posible codificar esa información en un vector y además, dicho vector nos determina un invariante muy útil de la topología algebraica, que es la característica de Euler. No vamos a necesitar esto en el desarrollo del trabajo, así que no nos detendremos mucho en ello, sin embargo merece ser mencionado dada su importancia.



(g) Complejo simplicial a la izquierda y el complejo simplicial inducido en los vértices $A, B, C, F, H, I, M, N, J$

Definición 3.12. El f -vector de un complejo simplicial K de dimensión d es el vector $f(K) = (f_0, f_1, \dots, f_d)$ donde

$$f_i = \text{número de símplices de } K \text{ de dimensión } i.$$

La característica de Euler de K es

$$\chi(K) := \sum_{i=0}^d (-1)^i f_i.$$

Observación 3.13. Notemos que cada complejo simplicial geométrico determina un complejo simplicial abstracto. Los puntos del complejo simplicial abstracto son todos los vértices de los símplices de Δ , así que definimos $V := V(\Delta)$ y los símplices en el complejo simplicial abstracto son los conjuntos de vértices de los símplices de Δ . El sistema (V, K) obtenido es claramente un complejo simplicial abstracto. Además, es fácil ver que todo complejo simplicial abstracto tiene una realización geométrica, es decir, cada complejo simplicial abstracto determina un complejo simplicial geométrico. Sea (V, K) un complejo simplicial abstracto. Tomemos $n := |V|$ e identificamos V con el conjunto de vértices de un símplice $(n-1)$ -dimensional σ^{n-1} . Definimos el subcomplejo Δ de σ^{n-1} como $\Delta := \{\text{conv}(F) : F \in K\}$. Esto es un complejo simplicial geométrico y su complejo simplicial abstracto asociado es K . Así, cada complejo simplicial abstracto en n vértices tiene una realización geométrica en \mathbb{R}^{n-1} . Esto nos da, entre otras cosas, una definición para el enlace y la estrella de un complejo simplicial abstracto.

Esta construcción no siempre es óptima; por ejemplo, es posible demostrar que todo complejo simplicial abstracto de dimensión d admite una representación como complejo simplicial geométrico en \mathbb{R}^{2d+1} y que hay complejos que no admiten representación en ningún $\mathbb{R}^{d'}$ con $d' < 2d + 1$. Por ejemplo, con $d = 1$, en la siguiente sección vamos a ver que algunos grafos no se pueden representar geoméricamente en \mathbb{R}^2 .

Observación 3.14. *Notemos, además, que todo grafo $G = (V, E)$ es un complejo simplicial abstracto (V, K) definiendo K como E junto con los conjuntos individuales de vértices y el conjunto vacío. Es decir:*

$$K = E \cup \{\{v\} : v \in V\} \cup \{\emptyset\}.$$

En particular, tiene sentido hablar del espacio topológico $\|G\|$.

Por otro lado, cada complejo simplicial abstracto (V, K) define un grafo $G = (V, E)$ donde $V(G) = V$ y $E = \{\sigma \in K : \dim(\sigma) = 1\}$.

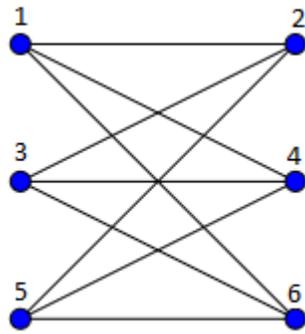
3.3. Grafos planos. Triangulaciones

Nuestro trabajo se va a centrar principalmente en las triangulaciones de esferas de dimensión dos. En esta parte de la sección vamos a definir este concepto partiendo de los grafos.

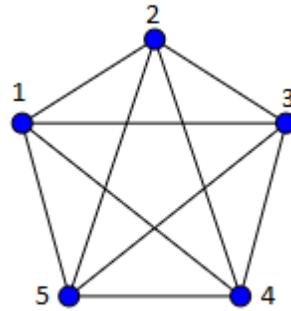
Definición 3.15. *Decimos que G es **plano** si $\|G\|$ es homeomorfo a un subconjunto de \mathbb{R}^2 ; equivalentemente, a un subconjunto de la esfera \mathbb{S}^2*

Un resultado muy conocido en la planaridad de los grafos es el teorema de Kuratowski. Es complejo de demostrar, sin embargo el resultado en sí es sencillo y por eso lo incluimos.

Teorema 3.16. *Un grafo G es plano si y solo si no contiene ningún subgrafo homeomorfo a K_5 (Grafo completo de 5 vértices) o a $K_{3,3}$ (grafo bipartito completo de 3 + 3 vértices).*



(h) Grafo $K_{3,3}$



(i) Grafo K_5

El siguiente resultado nos da unas propiedades interesantes de los grafos planos que vamos a utilizar más adelante.

Teorema 3.17. *Sea $G = (V, E)$ un grafo plano con $|V| \geq 3$. Entonces son equivalentes:*

1. $|E(G)| = 3|V(G)| - 6$.
2. G es el grafo de una triangulación de la esfera \mathbb{S}^2 .

3. G es plano maximal, esto es, $\forall u, v \in V$ con $uv \notin E$ el grafo $(V, E \cup \{uv\})$ ya no es plano.

Observación 3.18. Gracias a esto, podemos abusar de notación y llamar a una triangulación de \mathbb{S}^2 como el grafo G .

Definición 3.19. Sea M un espacio topológico. Abusando de notación llamamos **triangulación del espacio topológico** M a la descomposición inducida por el homeomorfismo entre M y $\|K\|$, donde K es un complejo simplicial abstracto. Nos referimos como **d -variedad triangulada** (resp. **d -esfera**) a una triangulación de una variedad topológica (resp. esfera) de dimensión d .

Corolario 3.20. Si K es una triangulación de la esfera con n vértices, entonces K tiene $2n - 4$ triángulos.

Del Teorema 3.17 se deducen un par de propiedades sencillas sobre las triangulaciones. Entre ellas, el Corolario 3.21, que usaremos más adelante.

Demostración. Sabemos que $|E|$ es $3n - 6$ y por la fórmula de Euler el número de triángulos es

$$|E| - |V| + 2 = 3n - 6 - n + 2 = 2n - 4.$$

□

Corolario 3.21. Si G es un grafo plano, entonces algún vértice de G tiene grado menor que seis.

Demostración. Sean E y V las aristas y vértices de G . En todo grafo, se tiene que $2|E|$ es igual a la suma de los grados de los vértices. Esto se debe a que cada arista está en dos vértices, luego cada arista contribuye en aumentar el grado a dos vértices distintos. Como en nuestro caso, G es plano tenemos que:

$$\sum_{v \in V} \text{grado}(v) = 2|E| \leq 3|V(G)| - 6 < 6|V|.$$

Por tanto, el grado mínimo en G es menor que 6.

□

4. Índice de separación

4.1. Definiciones

En esta sección resumimos el artículo de Benjamin A. Burton, Basudeb Datta, Nitin Singh y Jonathan Spreer [BDSS15] (de ahora en adelante Burton et al.) donde hablan del índice de separación, su definición y demostración de algunas propiedades interesantes.

Definición 4.1. *El complejo frontera de un $(d + 1)$ -símplice es una d -variedad triangulada con $d + 2$ vértices y que triangula la d -esfera \mathbb{S}^d . Se le llama **d -esfera estándar** y se denota por \mathbb{S}_{d+2}^2 .*

Definición 4.2. *Sea K un complejo simplicial abstracto puro de dimensión d y sea $v \notin V(K)$. Decimos que J se obtiene de K mediante una **subdivisión estelar** del vértice v en la d -cara σ de K , si:*

$$J = (K \setminus \{\sigma\}) \cup \{\tau \cup \{v\} : \tau \subsetneq \sigma\}$$

*Un complejo simplicial es llamado **d -esfera apilada** si se obtiene de \mathbb{S}_{d+2}^d mediante una secuencia finita de subdivisiones estelares.*

Las subdivisiones estelares son una manera de modificar un complejo simplicial K sin cambiar el espacio topológico subyacente $\|K\|$. Esto se puede generalizar mediante los i -movimientos estelares que definimos a continuación, donde $i \in \{0, 1, 2\}$ es un parámetro que indica la dimensión de una cara que introducimos (y, por otro lado, eliminamos una cara de dimensión $2 - i$). Estas definiciones pueden generalizarse a complejos puros de cualquier dimensión d ; en esta generalización un i -movimiento biestelar elimina una cara de dimensión $d - i$ e inserta una cara de dimensión i . Pueden verse los detalles en [BL00].

Definición 4.3. *Sea K un complejo simplicial puro de dimensión dos. Si J es obtenido de K mediante una subdivisión estelar del vértice v en la cara abc , decimos que J se obtiene de K mediante un **0-movimiento biestelar**. Decimos, además que K se obtiene de J mediante un **2-movimiento biestelar**.*

Definición 4.4. *Sea K un complejo simplicial puro de dimensión dos y sean abd y bdc dos caras adyacentes de K tal que ac no es una arista de K . Si $J = (K \setminus \{abd, bdc, bd\}) \cup \{abc, acd, ac\}$ entonces J y K triangulan el mismo espacio y decimos que J es obtenido de K mediante un **1-movimiento biestelar** $bd \rightarrow ac$. Notemos, además que K es obtenido de J mediante un **1-movimiento biestelar** $ac \rightarrow bd$.*

Observación 4.5. *Para abreviar, en la definición anterior y en el resto de la memoria denotaremos a cada símplice de un complejo por la lista de sus vértices. Así, por ejemplo, abd denota al triángulo $\{a, b, d\}$.*

Un par de casos particulares de 1-movimientos biestelares son los que definimos a continuación como 1A y 1B movimientos biestelares. La particularidad que tienen es que toman en cuenta los grados de los vértices, lo cuál es muy útil para los siguientes lemas y teoremas, donde para demostrarlos, dividimos en casos según los grados de los vértices.

Definición 4.6. *Sea K un complejo simplicial puro de dimensión dos. Sean a, b, c, d vértices de K tales que abd, bdc son dos caras adyacentes y ac no es una arista. Entonces el 1-movimiento biestelar $bd \rightarrow ac$ se dice de tipo 1A si uno de los vértices a y c es de grado 3 en K . Del mismo modo, decimos que el 1-movimiento biestelar $bd \rightarrow ac$ es de tipo 1B si el grado de uno de los vértices a y c es 4 y el grado del otro es al menos 4.*

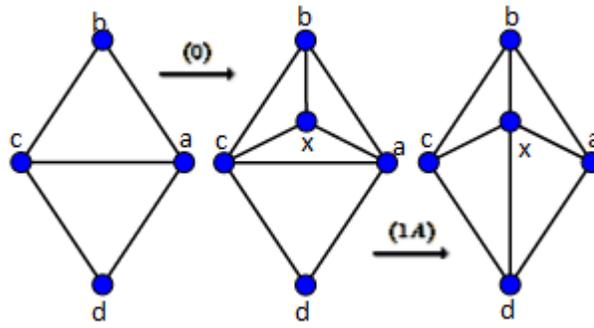
Lema 4.7. *Sea K una 2-esfera triangulada. Entonces K se puede obtener de \mathbb{S}_4^2 mediante una secuencia finita de 0-movimientos, 1A-movimientos, 1B-movimientos biestelares.*

Demostración. Procedemos por inducción en el número de vértices de K , esto es, en $n = V(K)$. El lema es trivial para $n = 4$, por ser K necesariamente un tetraedro, así que asumimos que $n \geq 5$ y que el lema es cierto para todas las 2-esferas trianguladas J tal que $V(J) < n$. Sea $V(K) = n$. Como el 1-esqueleto de K es un grafo plano, K debe tener un vértice de grado como mucho 5 por el Corolario 3.21. Tenemos los siguientes casos:

Caso 1. K tiene un vértice de grado 3. Sea v el vértice de grado 3 en K . Sean a, b, c los vecinos de v en K . Como cada arista está exactamente en 2 triángulos, deducimos que los triángulos xab, xbc, xac son caras de K . Sin embargo abc no puede ser una cara de K porque entonces $K[\{a, b, c, x\}] \cong \mathbb{S}_4^2$ (recordemos que estamos suponiendo $n \geq 5$). Consideremos ahora $J := K[V(K) \setminus \{x\}] \cup \{abc\}$. Se ve fácil que K se obtiene de J mediante un 0-movimiento biestelar y J tiene $n - 1$ vértices.

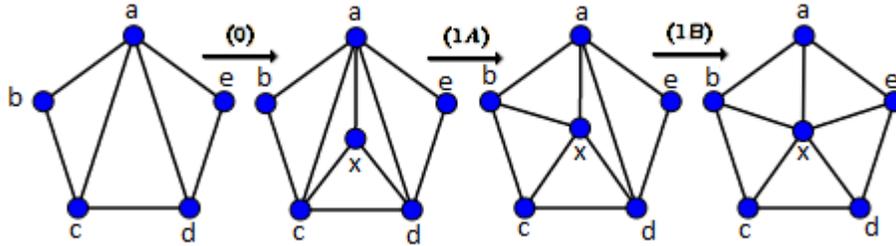
Caso 2. K tiene un vértice de grado 4. Sea x el vértice de grado 4 y sean a, b, c, d sus vecinos en K tales que $lk_K(x)$ es el 4-ciclo $C_4(a, b, c, d)$. Si ac y bd fueran ambas aristas de K , tendríamos un K_5 contenido en K , lo cual es imposible por el Teorema 3.16. Por tanto (al menos) uno de los dos no es una arista y suponemos que ac no es una arista de K . Definimos $J := K[V(K) \setminus \{x\}] \cup \{abc, acd, ac\}$. Entonces J es una 2-esfera y K se puede obtener de J mediante un 0-movimiento seguido de un 1A-movimiento biestelares.

Caso 3. Todos los vértices de K tienen grado 5 o mayor. Sea x un vértice de grado 5 en K . Sean a, b, c, d, e sus vecinos tales que $lk_K(x)$ es el ciclo $C_5(a, b, c, d, e)$. Como el subgrafo inducido en los vértices $\{a, b, c, d, e, x\}$ es plano, por la cota de Euler (Teorema 3.17) puede tener como máximo $3 \cdot 6 - 6 = 12$ aristas. Como tenemos ya las cinco que van de x a a, b, c, d y e y las cinco del ciclo $C_5(a, b, c, d, e)$, hay como mucho otras dos entre los vértices a, b, c, d y e . En particular, alguno de los cinco vértices no se usa en esas dos aristas. Supongamos que es el a , es decir, que ni la arista ac ni ad están en K . Consideremos $J := K[V(K) \setminus \{x\}] \cup \{abc, acd, ade, ac, ad\}$. Entonces J es una 2-esfera



(j) Secuencia de 0-movimiento y 1A-movimiento

y K se puede obtener de J mediante una secuencia de 0-movimiento, 1A-movimiento y 1B-movimiento biestelares.



(k) Secuencia de 0-movimiento, 1A-movimiento y 1B-movimiento

□

A continuación vamos a la definición principal del trabajo, el índice de separación. Todos los resultados y definiciones previos han sido necesarios para crear el marco adecuado donde encajar este invariante y donde poder demostrar, con relativa facilidad, los resultados principales.

Definición 4.8. Sea $G = (V, E)$ un grafo con $|V| = n$. Definimos el **índice de separación** de G , $s(G)$, como:

$$s(G) := \sum_{A \subseteq V(G)} \frac{q(G(A)) - 1}{\binom{n}{|A|}} = \sum_{i=0}^n s_i(G)$$

donde

$$s_i(G) := \frac{1}{\binom{n}{i}} \sum_{A \subseteq V(G), |A|=i} (q(G(A)) - 1)$$

esto es, $s_i(G)$ es uno menos que el número medio de componentes conexas en un subgrafo inducido con i vértices. Al vector formado por los s_i lo llamaremos vector de separación.

4.2. Resultados sobre el índice de separación

Antes de dar el siguiente Lema, necesitamos una propiedad combinatoria sobre números binomiales para la demostración. Se trata de la siguiente fórmula, que aparece sin demostración en [BDSS15].

Proposición 4.9.

$$\sum_{j=0}^{n-3} (j+1) \binom{n-j}{3} = \binom{n+2}{5}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-3} (j+1) \binom{n-j}{3} &= \sum_{j=0}^{n-3} \frac{(j+1)(n-j)!}{3!(n-j-3)!} = \sum_{j=0}^{n-3} \frac{[(n+2) - (n-j+1)](n-j)!}{3!(n-j-3)!} = \\ &= (n+2) \sum_{j=0}^{n-3} \frac{(n-j)!}{3!(n-j-3)!} - \sum_{j=0}^{n-3} \frac{(n-j+1)!}{3!(n-j-3)!} = (n+2) \sum_{j=0}^{n-3} \binom{n-j}{3} - \sum_{j=0}^{n-3} \frac{4!(n-j+1)!}{4!3!(n-j-3)!} = \\ &= (n+2) \sum_{j=3}^n \binom{j}{3} - 4 \sum_{j=0}^{n-3} \binom{n-j+1}{4} =^* (n+2) \binom{n+1}{4} - 4 \binom{n+2}{5} = \\ &= \frac{(n+2)!}{4!(n-3)!} - \frac{4(n+2)!}{5!(n-3)!} = \frac{(n+2)!}{(n-3)!} \left(\frac{5-4}{5!} \right) = \binom{n+2}{5} \end{aligned}$$

* Para este paso, recordemos que $\sum_{i=k}^l \binom{i}{k} = \binom{l+1}{k+1}$. Esto es, la suma de los l primeros elementos de la diagonal k del Triángulo de Pascal es el elemento $l+1$ de la diagonal $k+1$. \square

En el siguiente lema demostramos una fórmula para, conociendo el índice de separación de una esfera con $n-1$ vértices, obtener el índice de separación de una esfera con n vértices obtenida de la anterior mediante un 0-movimiento.

Lema 4.10 (Lema 3.2 de [BDSS15]). *Sea K un complejo simplicial que se obtiene de J mediante un 0-movimiento biestelar. Si J triangula \mathbb{S}^2 y $V(J) = n$, entonces:*

$$s(K) = \frac{(n+2)s(J)}{n+1} + \frac{n+2}{20}$$

Demostración. Sea K un complejo simplicial obtenido mediante una subdivisión estelar del vértice v_0 en la cara $v_1v_2v_3$. Sean $G = \text{skel}_1(J)$ y $H = \text{skel}_1(K)$. Entonces H se obtiene de G introduciendo un vértice v_0 y uniéndolo a los vértices v_1, v_2, v_3 . Recordemos que v_1, v_2, v_3 son adyacentes en G . Sea $V = V(J)$. De la definición de índice de separación, tenemos:

$$s(H) = \sum_{S \subseteq V} \frac{q(H(S)) - 1}{\binom{n+1}{|S|}} + \sum_{S \subseteq V} \frac{q(H(S \cup \{v_0\})) - 1}{\binom{n+1}{|S|+1}}$$

Donde el primer sumatorio es la definición de índice de separación para el grafo G y el segundo sumatorio son los conjuntos que faltan para ser el índice de separación del grafo H , que son

todos los conjuntos que incluyen al v3rtice v_0 . Notemos entonces que $q(H(S)) = q(G(S))$ para $S \subseteq V$, $q(H(S \cup \{v_0\})) = q(G(S))$ cuando S tiene una intersecci3n no vac3a con los vecinos de $\{v_0\}$, $N(v_0) = \{v_1, v_2, v_3\}$; (que denotaremos como $S \leftrightarrow N(v_0)$) y $q(H(S \cup \{v_0\})) = q(G(S)) + 1$ cuando S no interseca con $N(v_0)$ (Que denotaremos por $S \nleftrightarrow N(v_0)$). Desarrollamos ahora el segundo sumatorio:

$$\begin{aligned}
s(H) &= \sum_{S \subseteq V} \frac{q(G(S)) - 1}{\binom{n+1}{|S|}} + \sum_{S \subseteq V} \frac{q(G(S \cup \{v_0\})) - 1}{\binom{n+1}{|S|+1}} = \\
&= \sum_{S \subseteq V} \frac{q(G(S)) - 1}{\binom{n+1}{|S|}} + \sum_{S \leftrightarrow N(v_0)} \frac{q(G(S))}{\binom{n+1}{|S|+1}} + \sum_{S \nleftrightarrow N(v_0)} \frac{q(G(S)) - 1}{\binom{n+1}{|S|+1}} = (1) \\
&= \sum_{S \subseteq V} \frac{q(G(S)) - 1}{\binom{n+1}{|S|}} + \sum_{S \subseteq V} \frac{q(G(S)) - 1}{\binom{n+1}{|S|+1}} + \sum_{S \leftrightarrow N(v_0)} \frac{1}{\binom{n+1}{|S|+1}} = (2) \\
&= \sum_{S \subseteq V} \frac{q(G(S)) - 1}{\binom{n}{|S|}} \left[\frac{n - |S| + 1}{n + 1} + \frac{|S| + 1}{n + 1} \right] + \sum_{S \leftrightarrow N(v_0)} \frac{1}{\binom{n+1}{|S|+1}} = (3) \\
&= \frac{n + 2}{n + 1} s(G) + \sum_{S \leftrightarrow N(v_0)} \frac{1}{\binom{n+1}{|S|+1}} = (4) \frac{(n + 2)s(G)}{n + 1} + \sum_{j=0}^{n-3} \frac{\binom{n-3}{j}}{\binom{n+1}{j+1}} = (5) \\
&= \frac{(n + 2)s(G)}{n + 1} + \frac{3!(n - 3)!}{(n + 1)!} \binom{n + 2}{5} = \frac{(n + 2)s(G)}{n + 1} + \frac{n + 2}{20}
\end{aligned}$$

Vamos a revisar algunas igualdades que pueden no parecer del todo claras:

$$\begin{aligned}
(1) \quad \sum_{S \leftrightarrow N(v_0)} \frac{q(G(S))}{\binom{n+1}{|S|+1}} &= \sum_{S \leftrightarrow N(v_0)} \frac{(q(G(S)) - 1) + 1}{\binom{n+1}{|S|+1}} = \\
&= \sum_{S \leftrightarrow N(v_0)} \frac{q(G(S)) - 1}{\binom{n+1}{|S|+1}} + \sum_{S \leftrightarrow N(v_0)} \frac{1}{\binom{n+1}{|S|+1}},
\end{aligned}$$

y por otro lado

$$\sum_{S \leftrightarrow N(v_0)} \frac{q(G(S)) - 1}{\binom{n+1}{|S|+1}} + \sum_{S \nleftrightarrow N(v_0)} \frac{q(G(S)) - 1}{\binom{n+1}{|S|+1}} = \sum_{S \subseteq V} \frac{q(G(S)) - 1}{\binom{n+1}{|S|+1}}.$$

Como vemos, el paso (1) no es m3s que sumar y restar 1 en el sumatorio de los no vecinos de v_0 para obtener en la suma de los no vecinos y la suma de los vecinos el mismo t3rmino, y as3 poder juntarlas en un suma, y si cogemos los subconjuntos de V que tienen a un vecino de v_0 y todos los que no tienen a ning3n vecino, la uni3n son todos los subconjuntos de V .

El paso (2) sale de aplicar la definici3n de coeficiente binomial y sacar factor com3n. Fij3ndonos en los denominadores de las dos sumas:

$$\binom{n + 1}{|S|} = \frac{(n + 1)!}{(|S|!(n + 1 - |S|)!)} = \frac{(n + 1)n!}{(n + 1 - |S|)(n - |S|)!} = \binom{n}{|S|} \frac{n + 1}{n + 1 - |S|}$$

Y en el otro denominador:

$$\binom{n + 1}{|S| + 1} = \frac{(n + 1)!}{(|S| + 1)!(n + 1 - (|S| + 1))!} = \frac{(n + 1)n!}{(|S| + 1)(|S|)!(n - |S|)!} = \binom{n}{|S|} \frac{n + 1}{|S| + 1}$$

El resto es sacar factor común a $\frac{q(G(S)) - 1}{\binom{n}{|S|}}$ en las dos sumas.

En el paso (3) operamos el corchete y nos fijamos que $\sum_{S \subseteq V} \frac{q(G(S)) - 1}{\binom{n}{|S|}}$ es la definición del índice de separación del grafo G , que tiene n vértices.

La igualdad (4) consiste en convertir una suma que recorre unos conjuntos en una suma que recorre un conjunto de números. Los conjuntos S tienen entre 0 (El vacío) y $n - 3$ elementos, por ser subconjuntos de V y por no tener a los vecinos de v_0 . El binomio del denominador, $\binom{n+1}{j+1}$ no es más que sustituir en la igualdad anterior $|S|$ por j , el índice nuevo de la suma. El numerador, $\binom{n-3}{j}$ son las maneras distintas de coger los conjuntos de S .

Vamos con la igualdad (5). Desarrollamos los binomios:

$$\sum_{j=0}^{n-3} \frac{\binom{n-3}{j}}{\binom{n+1}{j+1}} = \sum_{j=0}^{n-3} \frac{(n-3)!(j+1)!(n-j)!}{j!(n-3-j)!(n+1)!} = \frac{(n-3)!}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n-3} \frac{(j+1)!(n-j)!}{j!(n-3-j)!}$$

Nos damos cuenta que $\frac{(j+1)!}{j!} = (j+1)$ y que si tuviéramos $\frac{(n-j)!}{(n-3-j)!3!}$ entonces sería $\binom{n-j}{3}$. Así que multiplicamos numerador y denominador por $3!$, y obtenemos:

$$\frac{(n-3)!}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n-3} \frac{(j+1)!(n-j)!}{j!(n-3-j)!} = \frac{(n-3)!}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n-3} (j+1) \frac{(n-j)!3!}{(n-3-j)!3!} = \frac{(n-3)!3!}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n-3} (j+1) \binom{n-j}{3}$$

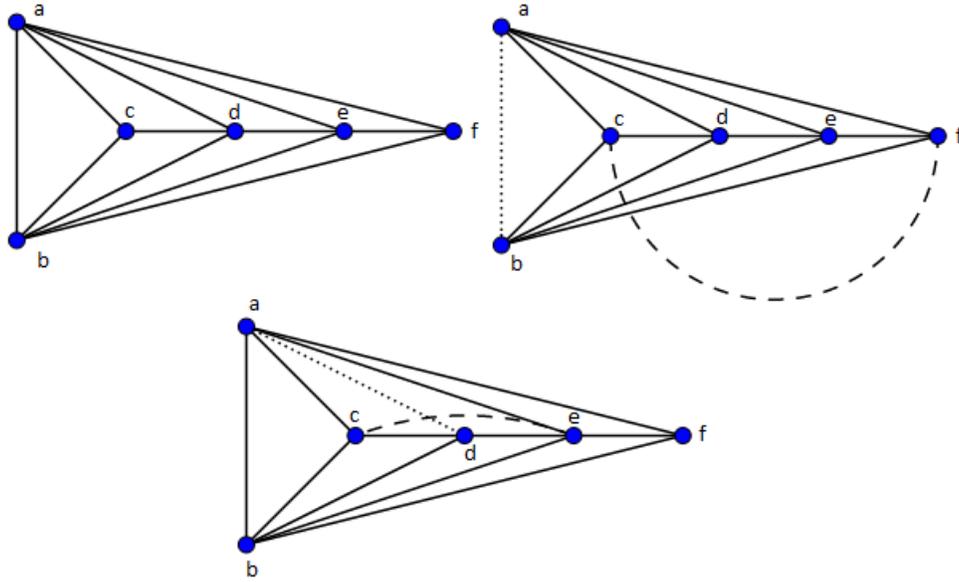
Y en función de la Proposición 4.9, tenemos:

$$\frac{(n-3)!3!}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n-3} (j+1) \binom{n-j}{3} = \frac{3!(n-3)!}{(n+1)!} \binom{n+2}{5}$$

□

Observación 4.11. *Para 1-movimientos no existe ninguna fórmula del estilo del Lema 4.10, como muestra el siguiente ejemplo: Sea K la esfera apilada con seis vértices, que se muestra en el dibujo (k). Haciendo un 1-movimiento de las aristas $ab \rightarrow cf$ se obtiene un octaedro, cuyo índice de separación es $-4/5$ mientras que haciendo un 1-movimiento de las aristas $ad \rightarrow ce$ se vuelve a obtener la triangulación apilada. Es fácil de comprobar, si quitamos las aristas f y d , que son de grado 3, obtenemos el tetraedro, luego esta esfera se obtiene al realizar dos 0-movimientos en el tetraedro. Por tanto, el segundo 1-movimiento no cambia el índice de separación mientras que en el primero sí. Ver la Figura (k).*

El siguiente corolario, como ya anticipamos, es muy importante porque nos da una fórmula cerrada para el índice de separación de esferas apiladas en función de su número de vértices, en vez de una fórmula recursiva.



(1) A la izquierda, una triangulación apilada de 6 vértices, a la derecha el 1-movimiento que hay que hacer para obtener el octaedro y abajo el 1-movimiento que hay que hacer para obtener otra esfera apilada.

Corolario 4.12 (Corolario 3.3 de [BDSS15]). *Sea K una 2-esfera apilada. Si $V(K) = n$ entonces:*

$$s(K) = \frac{(n-8)(n+1)}{20}$$

Demostración. Como toda 2-esfera apilada de n vértices se obtiene de \mathbb{S}_2^4 mediante una secuencia de $n-4$ 0-movimientos biestelares, el corolario se sigue por inducción a partir del Lema 4.10 \square

A continuación vemos un teorema que nos va a otorgar una cota superior para el índice de separación y además una caracterización en el caso de 2-esferas apiladas. El corolario de antes nos decía que si teníamos una esfera apilada, la fórmula nos daba el índice de separación, pero este teorema nos dice algo más fuerte: Dado el índice de separación, si coincide con la fórmula, es una esfera apilada, y si no, es menor y por tanto no es apilada.

Teorema 4.13 (Teorema 1.1 de [BDSS15]). *Sea K una 2-esfera triangulada de n vértices. Entonces:*

$$s(K) \leq \frac{(n-8)(n+1)}{20}.$$

La igualdad se da si y solo si K es una esfera apilada.

Demostración. Ya hemos probado en el Corolario 4.12 que si K es una esfera apilada, entonces $s(K) = \frac{(n-8)(n+1)}{20}$. Nos queda probar que $s(K) < \frac{(n-8)(n+1)}{20}$ cuando K no es una 2-esfera apilada. Procedemos por inducción. Los casos $n = 4$ y $n = 5$ son triviales, pues toda 2-esfera triangulada en como máximo 5 vértices es apilada. Supongamos que $n \geq 5$ y que el resultado es cierto para todas las 2-esferas trianguladas J con $V(J) \leq n$. Sea K una 2-esfera triangulada no

apilada con $n + 1$ vértices. Consideremos los siguientes casos:

Caso 1: K tiene un vértice de grado 3. Entonces, de la demostración del Lema 4.7 obtenemos que existe una 2-esfera triangulada con n vértices J tal que K se obtiene de J mediante un 0-movimiento biestelar. Como K es no apilada, entonces J es no apilada también. Entonces, por la hipótesis de inducción, $s(J) < \frac{(n-8)(n+1)}{20}$. Y ahora, por el Lema 4.10 tenemos que:

$$s(K) = \frac{(n+2)s(J)}{n+1} + \frac{n+2}{20} < \frac{n+2}{n+1} \left(\frac{(n-8)(n+1)}{20} \right) + \frac{n+2}{20} < \frac{(n-8)(n+1)}{20}$$

Caso 2: K tiene un vértice de grado 4 y ningún vértice de grado menor que 4. Por la demostración del Lema 4.7, existen vértices a, b, c, d, x y dos 2-esferas trianguladas J, H tales que: (i) $lk_K(x) = C_4(a, b, c, d)$, (ii) $J := K(V(K) \setminus \{x\})U\{abc, adc, ac\}$ y (iii) H se obtiene de J mediante un 0-movimiento biestelar del vértice x en la cara abc , y K se obtiene de H mediante un 1-movimiento $ac \rightarrow dx$. Por la hipótesis de inducción, $s(J) \leq \frac{(n-8)(n+1)}{20}$.

Ahora tenemos los siguientes casos:

Subcaso 2a: bd no es una arista de H . Sea $U = V(K) \setminus \{a, b, c, d, x\}$. Sean V^+ (respectivamente V^-) la familia de los subconjuntos S de $V(K)$ tales que $q(K(S)) > q(H(S))$ (respectivamente $q(K(S)) < q(H(S))$). Como añadiendo (respectivamente quitando) una arista aumenta (respectivamente disminuye) el número de componentes conexas como máximo en uno, tenemos que $V^+ = \{S \subseteq V(K) : q(K(S)) = q(H(S)) + 1\}$, y $V^- = \{S \subseteq V(K) : q(K(S)) = q(H(S)) - 1\}$. Para $S \in V^+$, como $q(K(S)) > q(H(S))$, $E(K(S)) < E(H(S))$. Esto implica que, dado que la única arista en H que no está en K es ac , $\{a, c\} \subseteq S$ para $S \in V^+$. Análogamente, $S \in V^- \Rightarrow \{d, x\} \subseteq S$. Definamos ahora la aplicación $\phi : V^+ \rightarrow V^-$ tal que $\phi(A \cup \{a, c\}) = A \cup \{d, x\}$. Por contrucción, es una aplicación inyectiva que conserva el tamaño de los conjuntos. Por lo tanto, $\#V^- \geq \#V^+$ y así $s(K) \leq s(H)$. Falta ver que en efecto, la aplicación está bien definida.

Sea $A \cup \{a, c\}$ un conjunto en V^+ . Entonces A no contiene ningún vecino común de a y c (En otro caso, $q(K(A \cup \{a, c\})) = q(H(A \cup \{a, c\}))$). Así, $b, d, x \notin A$ y por tanto $A \subseteq U$. Entonces, $\phi(A \cup \{a, c\}) = A \cup \{d, x\}$. Como $H(A \cup \{d, x\})$ no tiene un camino entre d y x y dx es una arista en K , tenemos $q(K(A \cup \{d, x\})) = q(H(A \cup \{d, x\})) - 1$, y así $\phi(A \cup \{a, c\}) = A \cup \{d, x\} \in V^-$. Consideremos el conjunto $S = \{b, d, x\}$. Como bd no es una arista, tenemos $S \in V^-$. Como $S \notin \phi(V^+)$, entonces tenemos que $\#V^- > \#V^+$ y por el Lema 4.10, tenemos: $s(K) < s(H) = \frac{(n+2)s(J)}{n+1} + \frac{n+2}{20} \leq \frac{(n+2)(n-8)}{20} + \frac{n+2}{20} = \frac{(n+2)(n-7)}{20}$

Subcaso 2b: bd es una arista en H . Supongamos que J es una esfera apilada. Entonces J tiene al menos dos vértices de grado 3. Como $d_K(u) = d_J(u) \forall u \in U$, deducimos que al menos dos vértices entre a, b, c, d tienen grado 3 en J . Como $\mathbb{K}_4 \subseteq J(\{a, b, c, d\})$, esto implica que $J(\{a, b, c, d\}) \approx \mathbb{S}_4^2$. Así, $\mathbb{S}_4^2 \subseteq J$. Esto es imposible dado que J es una 2-esfera triangulada y $V(J) \geq 5$. Por tanto, J no es una esfera apilada y por hipótesis de inducción para J , $s(J) < \frac{(n-8)(n+1)}{20}$. Entonces, por el Lema 4.10, $s(K) \leq s(H) = \frac{(n+2)s(J)}{n+1} + \frac{n+2}{20} <$

$$\frac{(n+2)(n-8)}{20} + \frac{n+2}{20} = \frac{(n+2)(n-7)}{20}$$

Caso 3: Todos los vértices en K tienen grado 5 o mayor. Por la demostraci3n del Lema 4.7 existen vértices a, b, c, d, e y x en K y 2-esferas trianguladas J, H tales que (i) $lk_K(x) = C_5(a, b, c, d, e)$, (ii) $J := K(V(K) \setminus \{x\}) \cup \{abc, acd, ade, ac, ad\}$, H se obtiene de J mediante un 0-movimiento biestelar del vértice x en la cara acd , y (iii) K se obtiene de H mediante un 1A-movimiento ($ac \rightarrow bx$) seguido por un 1B-movimiento ($ad \rightarrow ex$). Notemos que para cualquier vértice $u \in V(J)$, $d_J(u) \geq d_K(u) - 1$. Así $d_J(u) \geq 4$ para cada $u \in V(J)$. Por tanto, J no es una esfera apilada. Por hip3tesis de inducci3n, $s(J) < \frac{(n-8)(n+1)}{20}$.

Probamos ahora que $s(K) \leq s(H)$. Llamemos $V^+ := \{S \subseteq V(K) : q(K(S)) > q(H(S))\}$ y $V^- := \{S \subseteq V(K) : q(K(S)) < q(H(S))\}$. Igual que en el caso (2), nuestro objetivo es construir una aplicaci3n inyectiva de V^+ en V^- , para lo cual primero vamos a entender un poco mejor la estructura de los elementos de V^+ .

Sea S un elemento de V^+ . Como las únicas aristas en H que no están en K son ac y ad , para que $K[S]$ tenga más componentes conexas que $H[S]$ (que es lo que significa $S \in V^+$), es necesario que S contenga a a y a al menos uno de c o d . Si $\{a, c, d\} \subseteq S$, vemos que $b, e, x \notin S$ (de otro modo, no se reduce el número de componentes conexas en el subgrafo inducido por S al retirar las aristas ac y ad). Por tanto, $S = A \cup \{a, c, d\}$ para algún $A \subseteq V(K) \setminus \{a, b, c, d, e, x\}$. Ahora supongamos $\{a, c\} \subseteq S$ pero $d \notin S$. Entonces S no contiene un camino de a a c en K , por lo tanto $b, x \notin S$. Así tenemos dos posibilidades, $S = A \cup \{a, c\}$ o $S = A \cup \{a, c, e\}$ para algún $A \subseteq V(K) \setminus \{a, b, c, d, e, x\}$. En el caso $\{a, d\} \subseteq S$ pero $c \notin S$, S no contiene un camino de a a d en K , por lo tanto $e, x \notin S$, quedando dos posibilidades, $S = A \cup \{a, d\}$ y $S = A \cup \{a, b, d\}$ para algún A . Definamos ahora la siguiente aplicaci3n $\phi : V^+ \rightarrow V^-$

$$\begin{aligned} \phi(A \cup \{a, c, d\}) &= A \cup \{b, e, x\}, & \phi(A \cup \{a, c\}) &= A \cup \{b, x\}, \\ \phi(A \cup \{a, c, e\}) &= A \cup \{c, e, x\}, & \phi(A \cup \{a, d\}) &= A \cup \{e, x\}, \\ \phi(A \cup \{a, b, d\}) &= A \cup \{b, d, x\} \end{aligned}$$

Por construcci3n, la ϕ así definida en V^+ es inyectiva y conserva el tamaño de los conjuntos. Nos falta ver que su imagen está contenida en V^- . Veamos los casos por separado.

Subcaso 3a: $S = A \cup \{a, c, d\}$. Entonces $\phi(S) = A \cup \{b, e, x\}$. Observemos que no hay un x - b o x - e -camino en $H(A \cup \{b, e, x\})$. Pero b, e, x pertenecen a la misma componente conexa en K . Así, $q(K(\phi(S))) < q(H(\phi(S)))$, y $\phi(S) \in V^-$.

Subcaso 3b: $S = A \cup \{a, c\}$. En este caso $\phi(S) = A \cup \{b, x\}$. Como no hay un b - x -camino en $H(\phi(S))$ y bx es una arista de K , tenemos $\phi(S) \in V^-$.

Subcaso 3c: $S = A \cup \{a, c, e\}$. Como $S \in V^+$, deducimos que no hay ningún c - e -camino en $K(A)$. Entonces $\{x, c\}$ están separados de e en H pero en la misma componente de K . Por tanto,

$$\phi(S) = A \cup \{c, e, x\} \in V^-.$$

Los otros dos casos, $S = A \cup \{a, d\}$ y $S = A \cup \{a, b, d\}$ son simétricos a los casos **3b** y **3c** respectivamente. Así tenemos $s(K) \leq s(H)$.

Como obtenemos H de J mediante un 0-movimiento, por el Lema 4.10, tenemos $s(Z) = \frac{(n+2)s(J)}{n+1} + \frac{n+2}{20}$. Entonces, con el mismo argumento que en el **Subcaso 2b**, $s(K) < \frac{(n+2)(n-7)}{20}$.

Tenemos por tanto una aplicación inyectiva $\phi : V^+ \rightarrow V^-$. Pero además, para un conjunto $S \in V^+$, $q(K(S)) = q(H(S)) + 1$ mientras que para un conjunto $S \in V^-$, $q(K(S))$ puede ser $q(H(S)) - 1$ o $q(H(S)) - 2$. Esto prueba el teorema. \square

4.3. El vector de separación

Los resultados de la sección anterior están todos tomados de [BDSS15]. En esta sección damos una versión de algunos de ellos estratificada en función de las componentes $s_i(K)$ del vector de separación. Todas las fórmulas y demostraciones de esta sección son originales.

El siguiente resultado lo podemos entender como un corolario del Lema 4.10, dado que nos da una fórmula recursiva para, en este caso, calcular los elementos del vector de separación.

Lema 4.14. *Bajo las mismas condiciones del Lema 4.10:*

$$s_i(H) = \frac{n-i+1}{n+1} s_i(G) + \frac{i}{n+1} s_{i-1}(G) + \frac{\binom{n-3}{i-1}}{\binom{n+1}{i}}$$

Demostración. La demostración sigue las mismas ideas de la demostración del Lema 4.10. Sea K un complejo simplicial obtenido mediante una subdivisión estelar del vértice v_0 en la cara $v_1 v_2 v_3$. Sean $G = \text{skel}_1(J)$ y $H = \text{skel}_1(K)$. Entonces H se obtiene de G introduciendo un vértice v_0 y uniéndolo a los vértices v_1, v_2, v_3 . Recordemos que v_1, v_2, v_3 son adyacentes en G . Sea $V = V(G)$.

$$\begin{aligned} s_i(H) &= \sum_{|S|=i, S \subseteq V} \frac{q(H(S)) - 1}{\binom{n+1}{i}} + \sum_{|S|=i-1, S \subseteq V} \frac{q(H(S \cup \{v_0\})) - 1}{\binom{n+1}{i}} = \\ &= \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i}} \sum_{|S|=i, S \subseteq V} \frac{q(H(S)) - 1}{\binom{n}{i}} + \sum_{|S|=i-1, S \subseteq V} \frac{q(H(S \cup \{v_0\})) - 1}{\binom{n+1}{i}} = \\ &= \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i}} s_i(G) + \sum_{|S|=i-1, S \leftrightarrow N(v_0)} \frac{q(G(S))}{\binom{n+1}{i}} + \sum_{|S|=i-1, S \leftrightarrow N(v_0)} \frac{q(G(S)) - 1}{\binom{n+1}{i}} = \\ &= \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i}} s_i(G) + \sum_{|S|=i-1, S \subseteq V} \frac{q(G(S)) - 1}{\binom{n+1}{i}} + \sum_{|S|=i-1, S \leftrightarrow N(v_0)} \frac{1}{\binom{n+1}{i}} = \\ &= \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i}} s_i(G) + \frac{\binom{n}{i-1}}{\binom{n+1}{i}} s_{i-1}(G) + \sum_{|S|=i-1, S \leftrightarrow N(v_0)} \frac{1}{\binom{n+1}{i}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i}} s_i(G) + \frac{\binom{n}{i-1}}{\binom{n+1}{i}} s_{i-1}(G) + \frac{\binom{n-3}{i-1}}{\binom{n+1}{i}} = \\
&= \frac{n-i+1}{n+1} s_i(G) + \frac{i}{n+1} s_{i-1}(G) + \frac{\binom{n-3}{i-1}}{\binom{n+1}{i}}
\end{aligned}$$

□

El siguiente teorema, al igual que el Corolario 4.12, nos da una fórmula cerrada en función del número de vértices, en este caso, para las coordenadas s_i del vector de separación.

Teorema 4.15. *Si K es una 2-esfera apilada con n vértices, entonces para cada $i = 0, \dots, n$ se tiene que*

$$s_i(K) = (i-1) \frac{\binom{n-i}{3}}{\binom{n}{3}}.$$

Demostración. Sea K un complejo simplicial obtenido mediante un 0-movimiento biestelar en el complejo simplicial J que triangula la esfera \mathbb{S}^2 . Sea $H := \text{skel}_1(K)$ y sea $G := \text{skel}_1(J)$ y sea $n = V(K)$. Procedamos a demostrar el enunciado por inducción. Probemos primero el caso base de la inducción, $n = 4$. La única triangulación con 4 vértices es el tetraedro \mathbb{S}_4^2 , que es una esfera apilada. Su vector de separación tiene $s_0(\mathbb{S}_4^2) = -1$ (porque el subgrafo inducido en 0 vértices tiene 0 componentes conexas) y $s_i(\mathbb{S}_4^2) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, 4$ (porque todos los subgrafos inducidos no vacíos de \mathbb{S}_4^2 son conexos). Esto coincide con la fórmula que queremos probar:

$$s_i(\mathbb{S}_4^2) = (i-1) \frac{\binom{4-i}{3}}{\binom{4}{3}} = \frac{(4-i)(3-i)(2-i)(i-1)}{4 \cdot 3 \cdot 2} = -\binom{4-i}{4},$$

que vale -1 para $i = 0$ y 0 para $i > 0$.

Ahora, supongamos que el teorema es cierto para todo complejo simplicial Z con $V(Z) < n$. Por el Lema 4.14, tenemos que:

$$s_i(H) = \frac{n-i}{n} s_i(G) + \frac{i}{n} s_{i-1}(G) + \frac{\binom{n-4}{i-1}}{\binom{n}{i}},$$

Como $V(G) = n-1$, por hipótesis de inducción $s_i(G) = (i-1) \frac{\binom{n-i-1}{3}}{\binom{n-1}{3}}$ y $s_{i-1}(G) = (i-2) \frac{\binom{n-i-2}{3}}{\binom{n-1}{3}}$.

Sustituyendo y operando, tenemos:

$$\begin{aligned}
s_i(H) &= \frac{n-i}{n} \frac{(i-1)(n-i-1)(n-i-2)(n-i-3)}{(n-1)(n-2)(n-3)} + \frac{i}{n} \frac{(i-2)(n-i)(n-i-1)(n-i-2)}{(n-1)(n-2)(n-3)} + \\
&\quad + \frac{i(n-i)(n-i-1)(n-i-2)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}
\end{aligned}$$

Sacamos factor común a $\frac{(n-i)(n-i-1)(n-i-2)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$, y tenemos:

$$\begin{aligned}
s_i(H) &= \frac{(n-i)(n-i-1)(n-i-2)[(i-1)(n-i-3) + i(i-2) + i]}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \\
&= \frac{(n-i)(n-i-1)(n-i-2)(i-1)(n-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \\
&= \frac{(n-i)(n-i-1)(n-i-2)(i-1)}{n(n-1)(n-2)} = (i-1) \frac{\binom{n-i}{3}}{\binom{n}{3}}
\end{aligned}$$

□

En el teorema y corolario previos hemos demostrado dos fórmulas referentes al vector de separación, pero recordemos que la suma del vector de separación es el índice de separación. Por tanto, sumando las fórmulas para las coordenadas del vector de separación nos debe dar el mismo resultado que teníamos para el índice de separación. Esto es lo que remarcamos en la siguiente observación.

Observación 4.16. *Sea G una esfera apilada con n vértices. Vamos a comprobar que el resultado del Teorema 4.15 para el vector $(s_i(G))_{i=0}^n$ es consistente con el Teorema 4.13 para $s(G)$. Es decir, vamos a sumar las componentes del vector de separación y ver que da el valor del índice de separación. Para simplificar la suma, evitamos sumar el elemento correspondiente al s_0 que sabemos que es -1 , y los correspondientes al $s_1, s_n, s_{n-1}, s_{n-2}$ que sabemos que son 0 , y por tanto, tenemos que sumar solo el resto. Es decir:*

$$\sum_{i=0}^n s_i(G) + 1 = \sum_{i=1}^n s_i(G) = \sum_{i=2}^{n-3} (i-1) \frac{\binom{n-i}{3}}{\binom{n}{3}}$$

Nos damos cuenta que el denominador no depende de i , así que lo podemos sacar fuera del sumatorio y centrarnos en lo que queda:

$$\sum_{i=2}^{n-3} (i-1) \binom{n-i}{3}$$

Para hacer esta suma, vamos a utilizar la proposición 4.9, de la cual deducimos que:

$$\sum_{i=0}^{n-3} (i-1) \binom{n-i}{3} + 2 \sum_{i=0}^{n-3} \binom{n-i}{3} = \binom{n+2}{5}$$

Por otro lado, tenemos:

$$\sum_{i=2}^{n-3} (i-1) \binom{n-i}{3} = \binom{n}{3} + \sum_{i=0}^{n-3} (i-1) \binom{n-i}{3}$$

De esta forma, tenemos que:

$$\sum_{i=2}^{n-3} (i-1) \binom{n-i}{3} = \binom{n}{3} + \sum_{i=0}^{n-3} (i-1) \binom{n-i}{3} = \binom{n}{3} + \binom{n+2}{5} - 2 \sum_{i=0}^{n-3} \binom{n-i}{3} =$$

$$= \binom{n}{3} + \binom{n+2}{5} - 2 \sum_{i=3}^n \binom{i}{3} = \binom{n}{3} + \binom{n+2}{5} - 2 \binom{n+1}{4}$$

Ahora tenemos que dividir por $\binom{n}{3}$, que lo habíamos sacado de la suma para simplificar:

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{n-3} (i-1) \frac{\binom{n-i}{3}}{\binom{n}{3}} &= \frac{\binom{n}{3} + \binom{n+2}{5} - 2 \binom{n+1}{4}}{\binom{n}{3}} = 1 + \frac{\binom{n+2}{5}}{\binom{n}{3}} - 2 \frac{\binom{n+1}{4}}{\binom{n}{3}} = \\ &= 1 + \frac{(n+2)!}{5!(n-3)!} - 2 \frac{(n+1)!}{4!(n-6)!} = 1 + \frac{(n+2)(n+1)}{20} - 2 \frac{n+1}{4} = \frac{(n-3)(n-4)}{20} \end{aligned}$$

Y ahora, recordemos el -1 que habíamos quitado para hacer más sencilla la suma. Si se lo añadimos, obtenemos:

$$\sum_{i=0}^n s_i(G) = \frac{(n-3)(n-4)}{20} - 1 = \frac{n^2 - 7n + 12}{20} - 1 = \frac{n^2 - 7n - 8}{20} = \frac{(n-8)(n+1)}{20} = s(G),$$

como queríamos demostrar.

5. Implementación

En esta sección explicamos cómo hemos implementado los diferentes métodos para calcular tanto el índice de separación como para realizar los diferentes movimientos.

El primero en implementar es el método para realizar el cálculo del índice de separación. Recordemos la definición:

$$s(G) := \sum_{A \subseteq V(G)} \frac{q(G(A)) - 1}{\binom{n}{|A|}},$$

donde $q(X)$ denota el número de componentes conexas de un complejo X , y la suma recorre todos los subgrafos inducidos de G .

De la definición se ve claro que necesitamos calcular todos los subgrafos inducidos y el número de componentes conexas de los mismos. Por eso, lo primero es crear un método que obtenga todos los subgrafos inducidos de un grafo dado. Investigando en la documentación de Sage, encontramos el método `subgraph()`. Este método, entre una de sus funciones, nos permite obtener un subgrafo a partir de una lista de vértices. Entonces, la implementación es sencilla:

Método 1.

`ObtenerSubgrafosDeTamannoFijo(grafo, tamanno):`

`todosLosSubgrafos = Vacío`

```

Para CadaLista en Combinaciones(Vertices,tamanno):
    Añadir a todosLosSubgrafos el output de subgraph(CadaLista)
Retornar: todosLosSubgrafos

```

Ya tenemos un método que nos da todos los subgrafos de un una cantidad determinada de vértices de un grafo dado. Vamos a calcular ahora lo que aportan dichos subgrafos al índice de separación. Para ello, necesitamos calcular el número de componentes conexas de un grafo. Utilizamos para ello el método `connected_components_Number()` de Sage, que nos retorna el número de componentes conexas de un grafo.

Método 2.

```

CalcularIndiceSeparacionParcial(listaSubgrafos,numeroVertices):\
    ccn = 0\
    para cadaGrafo en listaSubgrafos:\
        numeroVerticesSubgrafo = N\'umero de v\'ertices de cadaGrafo\
        ccn = ccn +  $\frac{(cadaGrafo.connected\_Components\_Number() - 1)}{binomial(numeroVertices, numeroVerticesSubgrafo)}$ 
Retornar: ccn

```

Método 3.

```

CalcularIndiceSeparacionParcial(listaSubgrafos,numeroVertices):
    ccn = 0
    para cadaGrafo en listaSubgrafos:
        numeroVerticesSubgrafo = Número de vértices de cadaGrafo
        ccn = ccn +  $\frac{(cadaGrafo.connected\_Components\_Number() - 1)}{binomial(numeroVertices, numeroVerticesSubgrafo)}$ 
Retornar: ccn

```

Por último, hace falta un método que calcule el índice de separación, que será el que llame a estos dos. Para esto, obtenemos el vector de separación, y así el índice de separación será la suma de las coordenadas del vector.

Método 4.

```

ObtenerVectorSeparacion(grafo):
    Lista = Vacío
    Para i desde 0 hasta numeroVerticesGrafo:
        Subgrafos = obtenerSubgrafosdeTamannoFijo(grafo,i)
        Añadir a Lista (calcularIndiceSeparacionParcial(Subgrafos,
            numeroVerticesGrafo))
    Retornar: Lista

```

De manera alternativa, podemos usar el Lema 3.6 para calcular las componentes conexas a partir de la matriz de incidencia bipartita. Lo único que hay que cambiar es cómo calcular el índice de separación y cómo obtener los subgrafos, que en este caso, son submatrices. Veamos el método para obtener las submatrices:

Método 5.

```

ObtenerSubgrafosDeTamannoFijoIncidencia(matriz,i):
    todosLosSubgrafosMatricialmente = Vacío
    listaDeVertices = [0,...,filas(matriz)]
    Para cadaLista en Combinaciones(listaDeVertices,i):
        matrizNueva = submatriz de matriz con columnas y filas de cadaLista
        vectorColumnas = vacío
        Para cadaColumna en (columnas de matrizNueva):
            Si (la suma de la columna distinto de 1):
                Añadir cadaColumna a vectorColumnas
        Añadir a todosLosSubgrafosMatricialmente la submatriz de matrizNueva con las...
        ... columnas de vectorColumnas
    Retornar todosLosSubgrafosMatricialmente

```

Y el método restante, calcular el índice de separación. Para ello, utilizamos el Lema 3.6.

Método 6.

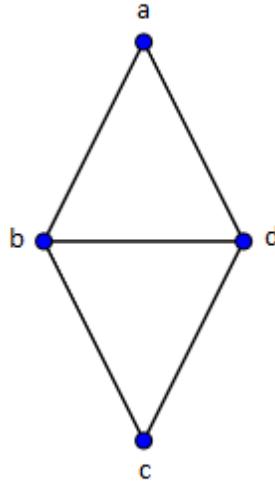
```

CalcularIndiceSeparacionParcialMatrices(listaMatrices,numeroVertices):
    ccn=0
    Para cadaMatriz en listaMatrices:
        
$$ccn = ccn + \frac{(\text{numero de vertices de cada Matriz}) - (\text{rangode cada Matriz}) - 1}{\text{binomial}(\text{numero Vertices}, \text{numero de vertices de cada Matriz})}$$


```

El análisis de tiempo de ejecución de ambos algoritmos lo dejamos para el apartado de resultados experimentales.

A continuación, veamos cómo es el algoritmo para realizar el 1-movimiento. Para realizar un 1-movimiento necesitamos encontrar en el grafo objetivo el siguiente subgrafo:



Para ello, primero hay que crear el grafo y luego buscarlo dentro del grafo sobre el cuál queremos realizar un 1-movimiento. Una vez encontrado el subgrafo, hay que realizar el movimiento. Para ello, necesitamos encontrar una característica que determine de forma unívoca los vértices para saber qué arista quitar y cuál poner. Tenemos dos vértices de grado 3 y la arista que los une es la que queremos quitar; y tenemos dos vértices de grado 2, que son los que queremos unir. Una vez tenemos claro qué aristas hay que quitar y qué aristas hay que poner, hay que tener en cuenta otro detalle. Es posible que hagamos el movimiento en un triángulo del grafo que no sea triángulo de la triangulación, y entonces no nos vale. Para asegurarnos que no ocurre esto, basta con quitar el triángulo a, b, d y comprobar que el grafo sigue siendo conexo. Quitar un triángulo de la triangulación no cambia el número de componentes conexas del grafo. Una vez tenemos claro la base del algoritmo, recordemos el propósito por el cuál programamos el algoritmo, queremos obtener cómo se comporta el índice de separación al realizar los 1-movimientos en las triangulaciones. Si realizásemos en varias triangulaciones un 1-movimiento, es posible que no quedasen bien reflejados los datos, pues es posible que se quedaran movimientos sin hacer y por tanto no se pasara de unos grafos a otros, que de hecho, es lo que ocurre, pues siguiendo esta metodología de buscar un subgrafo dentro de un grafo, sage siempre encuentra el mismo cada vez que empieza a buscar. Por tanto no nos basta con buscar y hacer un 1-movimiento en muchas triangulaciones, tenemos que hacer todos los 1-movimientos de cada triangulación para estar seguros que los datos que obtenemos sobre el cambio del índice de separación son más fiables. Entonces, el algoritmo queda así:

Método 7.

RealizarTodos1Move(grafo):

```

G =Ciclo de 4 vértices
Añadir arista (0,2) de G
listaGrafos = ListaVacía
inducidos = subgrafos inducidos de G2 en grafo
Para cadaGrafo en inducidos:
    grafoAuxiliar = copia de grafo
    G2 = subgrafo de grafo igual a inducidos
    verticesGrado2 = lista vacía
    verticesGrado3 = listaVacía
    Para cadaVértice en vértices de G2:
        Si grado de cadaVértice es 2:
            Añdimos cadaVértice a verticesGrado2
        Si grado de cadaVértice es 3:
            Añdimos cadaVértice a verticesGrado3
    listaComplemento = vértices de grafo
    Para cadaVertice en vertices de G2:
        Quitar cadaVertice a listaComplemento
    G4 = subgrafo de grafo inducido por listaComplemento
    Si G4 es conexo:
        Quitar arista entre verticesGrado3 a grafoAuxiliar
        Añadir arista entre vérticesGrado2 a grafoAuxiliar
        Añadir grafoAuxiliar a listaGrafos

```

Método 8.

esApilado(grafo):

```

grafoAuxiliar = grafo
numeroVertices = numero de vertices de grafo
para cada i entre 0 y numeroVertices
    matrizIncidencia = matriz de incidencia de grafoAuxiliar
    gradosVertices = grado de vertices de grafoAuxiliar
    numeroVertices = numero vertices de grafoAuxiliar
    numeroAristas = numero de aristas de grafoAuxiliar
    si numeroVertices es 4 y numero aristas es 6:

```

```

    Retornar True
Si no, si en gradoVertices hay al menos 1 de grado 3:
    Quitar ese vertice a grafoAuxiliar
    Continuar
Si no
    Retornar False

```

6. Resultados experimentales

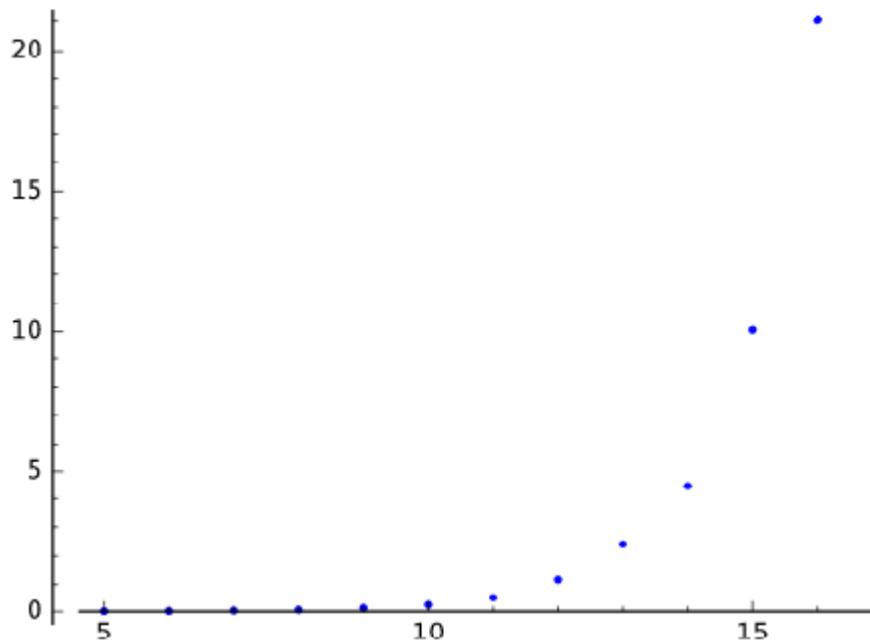
En esta sección vamos a exponer los resultados obtenidos de la aplicación de los algoritmos ya expuestos.

6.1. Tiempo de cálculo

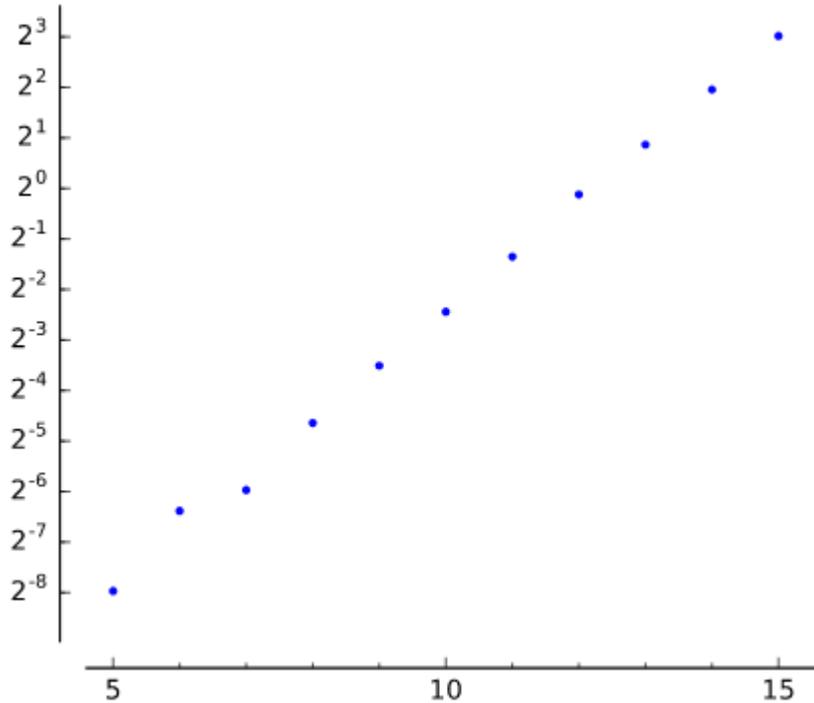
Lo primero, veamos cuánto tiempo tarda el algoritmo de cálculo del índice de separación en realizar los cálculos. Para ello, usamos la función `timeit` de Sage y le pedimos que nos de, para cada n entre 5 y 16 el tiempo medio que tarda en calcular el índice de separación de 100 triangulaciones aleatorias de n vértices. El resultado es la tabla siguiente:

Puntos	Tiempo	Puntos	Tiempo
5	0.008	11	0.480
6	0.012	12	1.160
7	0.028	13	2.412
8	0.052	14	4.500
9	0.116	15	10.060
10	0.224	16	21.036

Veámoslo en forma de gráfica:



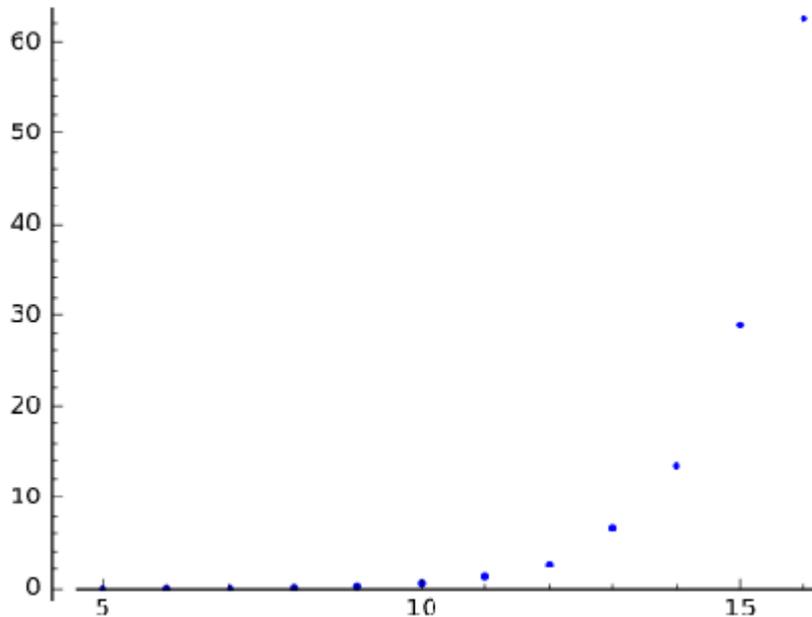
A primera vista, parece que el tiempo que tarda en hacer el cálculo crece de forma exponencial al número de vértices del grafo. Una revisión del algoritmo revela que, para calcular el índice de separación, es necesario obtener primero todos los subgrafos y calcular el las componentes conexas en cada una de ellas, lo que provoca que el algoritmo sea esponencial. Se ve más claramente si representamos la gráfica en escala semilogarítmica.



Como ya explicamos en la Sección 4, hemos también implementado una versión de este algoritmo en la que el número de componentes conexas se calcula a partir de la matriz de incidencia, en vez

de usar la función de teoría de grafos. El algoritmo seguirá siendo exponencial, porque seguimos teniendo que hacer 2^n cálculos, pero nuestra exsperanza era que el álgebra lineal sobre \mathbb{Z}_2 en que se basa este nuevo método fuera más rápida que la función combinatoria. Desafortunadamente, los siguientes resultados dicen que no es así:

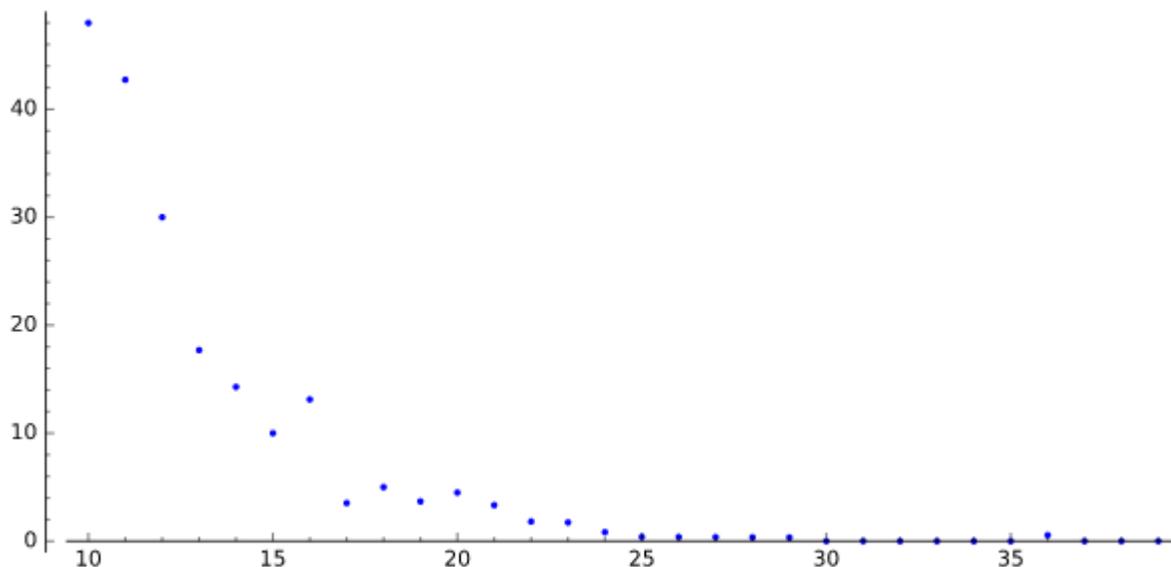
Puntos	Tiempo
5	0.036
6	0.032
7	0.056
8	0.124
9	0.268
10	0.580
11	1.248
12	2.708
13	6.680
14	13.460
15	28.908
16	62.552



Es muy posible que se pueda rebajar el tiempo del algoritmo depurando el código, pero la diferencia es tan grande con respecto al otro que incluso así seguramente seguiría sin ser más eficiente.

Sin embargo, como ya hemos mencionado previamente, es posible realizar este cálculo tan costoso en ciertas triangulaciones, las apiladas, de forma mucho más eficiente utilizando la fórmula del Teorema 4.13. Simplemente necesitamos saber de antemano si una triangulación es apilada, y esto lo sabemos gracias al método 8. Este método, en cada iteración mira los grados de los vértices y si hay de grado 3, lo quita hasta que llegamos al tetraedro, que sería apilado o que no

haya de grado 3, que sería no apilado. Como mirar los grados de los vértices y quitar vértices son acciones que se pueden hacer en tiempo polinómico, este algoritmo es también de ese orden, y por tanto, comprobar si un triangulación es apilada, y si lo es, calcular su índice de separación con la fórmula es más eficiente que hacerlo con la definición. Sin embargo, puede ocurrir que las triangulaciones apiladas sean escasas, y por tanto no valga la pena comprobar si una triangulación es apilada o no. En la siguiente gráfica representamos, en %, la cantidad de triangulaciones apiladas desde 10 hasta 40 vértices.



En la gráfica se ve que la cantidad de triangulaciones apiladas decrece rápidamente a medida que aumenta el número de vértices, lo cual era de esperar, pues el número de triangulaciones distintas crece de forma exponencial, según la fórmula de Tutte [Tu] (pág. 35, (8.1)). Aún con esto, es bastante razonable hacer el intento de comprobar si es apilado o no, pues el ahorro en tiempo supera el gasto en hacer la comprobación.

6.2. Estudio experimental del índice de separación de esferas con pocos vértices

Una vez revisada la complejidad del algoritmo y vista su limitación a grafos pequeños, pasemos a estudiar el comportamiento del índice de separación en ciertas triangulaciones de pocos vértices. Empecemos con 5 vértices. Como solo existe una única triangulación con 5 vértices, no podemos ver el efecto que tienen los movimientos en el índice de separación y es muy sencillo calcular el índice de separación, $-9/10$. Pasemos al caso con 6 vértices. En este caso, existen dos triangulaciones, una de ellas es el octaedro, que también tiene un cálculo fácil, que resulta en $-4/5$. La otra triangulación resulta de realizar un 1-movimiento en el octaedro. El índice de separación de esta triangulación también es sencilla de calcular, y obtenemos $-7/10$. A partir de 7 vértices ya es más complicado hacerlo manualmente, pero podemos saber algunos índices antes de recurrir

al algoritmo para calcular los que nos queden. Sabemos los índices de separación para 6 vértices y gracias al Lema 4.10 podemos saber algunos índices de separación para 7 vértices. Según la fórmula y haciendo 0-movimientos en las dos triangulaciones de 6 vértices, sabemos que de la triangulación con índice de separación $-4/5$, el octaedro; se obtiene una triangulación con índice de separación $-18/35$. Y la otra es la esfera apilada, que sabemos que es $-2/5$. Por tanto, además, sabemos que las triangulaciones correspondientes al índice de separación restante no pueden tener ningún vértice de grado 3.

Esferas con 7 vértices

Como es el primer caso que tratamos más experimentalmente, vamos a detenernos un poco más para que todo quede más claro. En la siguiente tabla vemos los índices para grafos a partir de 7 vértices.

7 vértices	$-\frac{4}{7}$	$-\frac{18}{35}$	$-\frac{2}{5}$
------------	----------------	------------------	----------------

Como podemos ver, hay 3 índices de separación distintos, donde $-\frac{2}{5}$ corresponde a las triangulaciones apiladas y $-\frac{18}{35}$ corresponde a hacer un 0-movimiento en un octaedro. En todas las tablas donde se enumeran los índices de separación, están ordenados de menor a mayor siendo, por tanto, el último índice de separación de la tabla el correspondiente a una triangulación apilada.

Para esta tabla hemos hecho miles de veces la operación de calcular el índice de separación en miles de triangulaciones aleatorias, por lo que es casi seguro que son los únicos índices de separación distintos. En la siguiente tabla representamos cómo cambia el índice de separación en grafos aleatorios con un índice de separación común al aplicarle 1-movimientos. Para lo cual, realizamos todos los 1-movimientos posibles

Índice separación = $-18/35$	% de cambio a $-4/7 = 25\%$	% de cambio a $-2/5 = 75\%$
Índice separación = $-4/7$	% de cambio a $-18/35 = 66.66\%$	% de cambio a $-2/5 = 33.33\%$
Índice separación = $-2/5$	% de cambio a $-4/7 = 4.3\%$	% de cambio a $-18/35 = 22.5\%$

Características a resaltar de la tabla anterior. Las esferas apiladas (las correspondientes a un índice de separación igual a $-2/5$) cambian muy pocas veces a pesar de aplicarles los 1-movimientos, es decir, al aplicarle un 1-movimiento a una esfera apilada de 7 vértices lo más probable es que obtengas otra esfera apilada. Sin embargo, en el caso de las otras dos triangulaciones de esferas siempre hemos obtenido una de las otras dos, es decir, podemos conjeturar, con bastante acierto por ahora, que los 1-movimientos afectan mucho menos al índice de separación en esferas apiladas respecto a las no apiladas.

Esferas con 8 a 11 vértices

Como ya dijimos antes, en los siguientes resultados no vamos a dar tanto detalle, principalmente porque el volumen de datos empieza a crecer bastante rápido. Por este motivo, vamos a cambiar el formato de la tabla donde representamos los cambios en el índice de separación al aplicar los movimientos. Para que sea más compacto, en la primera columna irá el índice de separación estudiado y en las siguientes columnas, el % de ocasiones en las que el índice de separación dado se transforma en el índice de separación indicado en la primera fila.

Lista de índices	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{8}{35}$	$-\frac{27}{140}$	$-\frac{9}{70}$	0
-2/7	22.22 %	0 %	44.44 %	33.33 %	0 %
-8/35	0 %	0 %	66.66 %	0 %	33.33 %
-27/140	13.33 %	6.66 %	0 %	53.33 %	26.66 %
-9/70	4.48 %	0 %	32.09 %	5.97 %	57.46 %
0	0 %	0.71 %	4.83 %	27.73 %	66.73 %

Al igual que antes, tenemos 3 triangulaciones que se obtienen de las de 7 vértices mediante un 0-movimiento en alguna cara. Éstas son la de índice de separación 0, la apilada, que se obtiene de la de $-2/5$; la de $-27/140$, que se obtiene de la de $-4/7$; y la de $-9/7$, que se obtiene de la de $-18/35$.

Lista índices	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{8}{63}$	$\frac{23}{126}$	$\frac{3}{14}$
1/21	14.29 %	28.58 %	0 %	57.13 %	0 %
2/21	9.52 %	0 %	19.05 %	38.1 %	4.76 %
8/63	0 %	19.05 %	0 %	28.57 %	0 %
23/126	3 %	8.12 %	5.55 %	19.23 %	0 %
3/14	0 %	14.29 %	0 %	0 %	0 %
2/9	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
31/126	0 %	0 %	11.11 %	0 %	0 %
2/7	0 %	2.35 %	1.32 %	16.74 %	0 %
5/14	0 %	0 %	1 %	7.64 %	1.13 %
1/2	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %

Lista índices	$\frac{2}{9}$	$\frac{31}{126}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{2}$
1/21	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
2/21	0 %	0 %	28.57 %	0 %	0 %
8/63	0 %	19.05 %	14.28 %	19.05 %	0 %
23/126	0 %	0 %	36.32 %	27.78 %	0 %
3/14	0 %	0 %	0 %	85.71 %	0 %
2/9	0 %	66.67 %	0 %	0 %	33.33 %
31/126	5.55 %	0 %	55.56 %	0 %	27.28 %
2/7	0 %	8.28 %	5.46 %	43.93 %	21.92 %
5/14	0 %	0 %	29.26 %	13.91 %	47.06 %
1/2	0.14 %	1.24 %	8.16 %	25.07 %	65.39 %

Esta última tabla la hemos tenido que partir en dos para ajustarla al tamaño de la página, puesto que el número de índices de separación distintos crece rápidamente cuando crece el número de vértices. Es por eso por lo que en los siguientes dos casos no vamos a realizar los 1-movimientos. Es computacionalmente muy costoso realizar todos los 1-movimientos, calcular todos los índices de separación y de una cantidad suficiente de grafos como para que los datos obtenidos sean fiables.

10 vértices	$\frac{101}{210}$	$\frac{11}{21}$	$\frac{347}{630}$	$\frac{253}{420}$	$\frac{206}{315}$	$\frac{55}{84}$	$\frac{869}{1260}$	$\frac{99}{140}$	$\frac{473}{630}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{11}{14}$	$\frac{143}{180}$	$\frac{517}{630}$	$\frac{121}{140}$	$\frac{33}{35}$	$\frac{11}{10}$
-------------	-------------------	-----------------	-------------------	-------------------	-------------------	-----------------	--------------------	------------------	-------------------	---------------	-----------------	-------------------	-------------------	-------------------	-----------------	-----------------

11 vértices	$\frac{157}{165}$	$\frac{163}{165}$	$\frac{1168}{1155}$	$\frac{181}{165}$	$\frac{431}{385}$	$\frac{432}{385}$	$\frac{433}{385}$	$\frac{263}{231}$	$\frac{1327}{1155}$	$\frac{449}{385}$	$\frac{41}{35}$
	$\frac{1387}{1155}$	$\frac{1409}{1155}$	$\frac{1411}{1155}$	$\frac{95}{77}$	$\frac{131}{105}$	$\frac{1451}{1155}$	$\frac{44}{35}$	$\frac{295}{231}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{1517}{1155}$	
	$\frac{46}{35}$	$\frac{142}{105}$	$\frac{48}{35}$	$\frac{149}{105}$	$\frac{51}{35}$	$\frac{22}{15}$	$\frac{157}{105}$	$\frac{54}{35}$	$\frac{57}{35}$	$\frac{9}{5}$	

Bibliografía

- [BDSS15] Benjamin A. Burton, Basudeb Datta, Nitin Singh, Jonathan Spreer, Separation index of graphs and stacked 2-spheres, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, Volume 136, November 2015, 184–197. DOI: 10.1016/j.jcta.2015.07.001
- [BL00] Anders Björner, Frank H. Lutz, Simplicial Manifolds, Bistellar Flips and a 16-Vertex Triangulation of the Poincaré Homology 3-Sphere, *Experimental Mathematics*, Vol. 9 (2000), No. 2.
- [Wiki] en.wikipedia.org, se han usado sobretodo las páginas:
[https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_\(discrete_mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_(discrete_mathematics)),
https://en.wikipedia.org/wiki/Simplicial_complex
- [Tu] Willian Thomas Tutte. A census of planar triangulations. *Canadian Journal of Mathematics*, Vol. 14, 1962,21-38.
<http://dx.doi.org/10.4153/CJM-1962-002-9>
- [Mat] Matousek, Jiri, Using the Borsuk-Ulam theorem: Lectures on topological methods in combinatorics and geometry. Springer-Verlargo, 2013.
- [Har] Frank Harary, Graph Theory. Addison-Weasley, 1969.