Facultad de Ciencias

La fórmula de la coárea

(The coarea formula)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Manuel Lainz Valcázar

Director: Carlos Beltrán Álvarez

Octubre - 2017

Índice general

Resumen

La fórmula de la coárea fue inicialmente introducida por Federer [5]. En este trabajo discutiremos su demostración y algunas de sus aplicaciones en el contexto de la geometría riemanniana.

Sea $f : M \to N$ es una función diferenciable sobreyectiva sobre entre variedades riemannianas. La fórmula de la coárea permite relacionar la integral de una función en M con una integral doble en N y en las fibras de f. Dicha fórmula generaliza la fórmula de cambio de variable y el teorema de Fubini, y permite calcular fácilmente diversas integrales.

Este trabajo está dividido en tres secciones. En la primera, exponemos la teoría de integración en variedades diferenciables. Esto nos requerirá enunciar los resultados y definiciones básicos de geometría diferencial y teoría de la medida.

La segunda sección está dedicada al enunciado y demostración de la fórmula de la coárea.

En la última sección, calcularemos diversas integrales valiéndonos de dicha fórmula.

Aunque trabajaremos con variedades riemannianas abstractas, la fórmula de la coárea originalmente se enunció para subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. El trabajo cuenta con un apéndice en el que se discute la fórmula en este contexto.

Palabras clave: *geometría diferencial, variedades riemannianas, integración en variedades, fórmula de la coárea*.

Abstract

The coarea formula was initially introduced by Federer [5]. In this dissertation we discuss su its proof and some of its applications in the context of Riemannian geometry.

Let $f : M \to N$ be a surjective map between Riemannian manifolds. The coarea formula relates the intergral of a real function in M with a double integral in N y and in the fibres of f. This formula generalices the change of variables formula and Fubini's theorem, allowing us to easily compute several integrals.

This dissertation is divided in three sections. In the first one, we explain the theory of integration on differentiable manifolds. This will require us to state some basic results and definitions in measure theory and differential geometry.

The second section is committed to the statement and proof of the coarea formula.

In the last section, we will compute some integrals using the aforementioned formula.

Although we work in abstract Riemannian manifolds, the coarea formula was originally stated for subsets of $\mathbb{R}^n$. In the first appendix, we explain the formula in that context.

Keywords: *differential geometry, Riemannian manifolds, integration on manifolds, coarea formula*.

1. Preliminares

Introduciremos los conceptos básicos sobre geometría diferencial y teoría de la medida que necesitaremos a lo largo de este trabajo. Asumiremos los conceptos y resultados básicos de topología (espacios compactos, recubrimientos por abiertos), análisis real (regla de la cadena, diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$, etc.), y álgebra lineal (propiedades de aplicaciones lineales, formas bilineales, determinante, valores singulares).

En este capítulo, especialmente en las dos primeras secciones, tratamos en su mayoría de conceptos estudiados durante el curso. Por ello, omitiremos ejemplos y demostraciones, aportando las referencias bibliográficas pertinentes.

Denotaremos por $\mathscr{C}^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ el conjunto de aplicaciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciables p veces con continuidad.

1.1. Geometría diferencial

Repasaremos los conceptos y resultados básicos de geometría diferencial. Utilizaremos principalmente el capítulo 0 de [3] y el libro [10].

Definición 1.1 (Variedad diferenciable de dimensión n)**.** Sea M un espacio topológico Hausdorff cuya topología tiene una base numerable. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Una *carta* es un par (U, ϕ), donde U es un abierto de M y $\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo, donde V es un abierto. Decimos que dos cartas (U, ϕ), (V, ψ) son $\mathscr{C}^p$ *compatibles* si, las *funciones de transición* $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ son $\mathscr{C}^p$ (como funciones de variable real). Notamos que si $U \cap V = \emptyset$ las cartas son trivialmente compatibles.

Un *atlas de clase* p, $\mathscr{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ es un conjunto de cartas (U_i, ϕ_i) compatibles dos a dos de modo que $\{U_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento por abiertos de M. Dos atlas se denominan *compatibles* si su unión es un atlas, es decir, si sus cartas son compatibles dos a dos. Como consecuencia de la regla de la cadena, es fácil ver (y puede consultarse en los libros antes citados) que «ser compatibles» es una relación de equivalencia.

Una *estructura diferenciable* es una clase de equivalencia de atlas sobre M con la relación «ser compatibles».

El espacio M junto a una estructura diferenciable se denomina *variedad diferenciable* de dimensión n y clase p.

Nota. Es posible tomar definiciones más generales de variedades, como eliminar la hipótesis de que M tenga una base numerable y sea Hausdorff. Sin embargo, para la teoría de integración será imprescindible, ya que dichas hipótesis son necesarias la existencia de particiones de la unidad (teorema 1.5). De hecho, una variedad en un sentido más general (sin imponer restricciones a la topología de M) tiene particiones de la unidad diferenciables si y sólo si cada una de sus componentes conexas es una variedad en nuestro sentido (ver [1, Cap. 3]).

También notamos que, bajo estas hipótesis, M es *σ-compacto* (unión numerable de compactos). Esto se debe a que M es unión numerable de abiertos homeomorfos a $\mathbb{R}^n$, cada uno de los cuales puede cubrirse con una cantidad numerable de compactos. Además, al ser localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, es *localmente compacto* (todo punto tiene un entorno abierto contenido en un compacto).

Extenderemos a continuación varios conceptos de cálculo diferencial en $\mathbb{R}^n$ a variedades.

Definición 1.2 (Aplicaciones diferenciables)**.** Sean M, N variedades $\mathscr{C}^p$ de dimensión m y n, respectivamente. Sea $x \in M$. Una aplicación $f : M \to N$ continua dice que es *de clase p en x* ($f \in \mathscr{C}^p_x(M, N)$), donde $p \leq k$ si existen cartas (U, ϕ) de M y (V, ψ) de N tal que $x \in U, f(x) \in V$ de modo que $\psi \circ f \circ \phi^{-1} \in \mathscr{C}^p(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

Diremos que f es una aplicación *de clase p* ($f \in \mathscr{C}^p(M, N)$) si es una aplicación de clase p en todos sus puntos.

Si f tiene una aplicación inversa diferenciable, diremos que es un *difeomorfismo*.

Llamaremos $\mathscr{C}^p_c(M, N) \subset \mathscr{C}^p(M, N)$ a las funciones de clase p con soporte compacto ($\operatorname{supp} f := \operatorname{Cl}(f^{-1}(\{0\}))$ es compacto, donde Cl es la clausura topológica). Si $K \subseteq M$, denotaremos $\mathscr{C}^p_K(M, N)$ a las aplicaciones con soporte en K. En el caso de que $N = \mathbb{R}$, escribiremos $\mathscr{C}^p_*(M)$, omitiendo «$\mathbb{R}$».

Denotamos $\operatorname{DIF}(M)$ al grupo de difeomorfismos de M.

En adelante, asumiremos que todas las variedades diferenciables son $\mathscr{C}^\infty$ a no ser que se indique lo contrario.

Definición 1.3 (Espacio tangente)**.** Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Sea $\epsilon > 0$. Una *curva* en un entorno de $p \in M$ es una aplicación diferenciable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$. Sea $x = \alpha(0) \in M$. Decimos que el *vector tangente* a la curva α en x es la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \partial_\alpha : \mathscr{C}^\infty_x(M) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto (f \circ \alpha)'(0). \end{aligned} \tag{1.1}$$

El *espacio tangente* de M en x (que denotaremos T_xM) es el conjunto de vectores tangentes. Como puede verse en [3, págs. 14-15], este conjunto tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n.

Dada una carta (U, ϕ) con $x = \phi^{-1}(y)$ existe una base natural $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ asociada a las curvas $\alpha_i(t) = \phi^{-1}(y_1, ..., y_{i-1}, y_i + t, ..., y_n)$, que llamamos base coordenada. Estos vectores verifican:

$$\partial_i f = \partial_i (f \circ \phi^{-1}), \tag{1.2}$$

donde, en el lado derecho de la igualdad, ∂_i es la i-ésima derivada parcial para funciones de variable real.

Definición 1.4 (Fibrado tangente y campos de vectores)**.** El *fibrado tangente* de una variedad diferenciable M de dimensión n es la unión disjunta de todos los espacios tangentes:

$$TM := \coprod_{x\in M} T_xM = \bigcup_{x\in M} \{x\} \times T_xM. \tag{1.3}$$

Dotamos a TM se de una estructura diferenciable natural, que hace que la proyección $\pi : TM \to M$ tal que $\pi(x, v) = v$ sea diferenciable. Para ello tomamos las cartas (U, ϕ) de M, y definimos cartas $(\pi^{-1}(U), \bar{\phi})$ tal que $\bar{\phi}(x, v) = (\phi(x), d_x\phi(v))$. Con estas cartas, TM es una variedad de dimensión $2n$ ([10, Lem. 4.2]).

Un *campo vectorial diferenciable* es una *sección* de TM, es decir, una aplicación $\mathscr{C}^p$, $X : M \to TM$ tal que $\pi \circ X = \mathrm{Id}_M$. Denotamos como $\Gamma(M)$ el conjunto de campos vectoriales. Considerando la suma y la multiplicación punto a punto, $\Gamma(M)$ es un $\mathscr{C}^p(M)$-módulo (es cerrado ante la suma de campos vectoriales y el producto por funciones $\mathscr{C}^x(M)$.)

Podemos generalizar esta construcción si en lugar de T_pM colocamos un espacio vectorial en cada punto, obteniendo un (caso particular de) *fibrado vectorial* (ver [10]).

Definición 1.5 (Diferencial de una aplicación)**.** Sea $f \in \mathscr{C}^p_x(M, N)$, donde $x \in M$ y $p \geq 1$. Definimos el *diferencial* de f en x:

$$\begin{aligned} d_xf : T_xM &\to T_{f(x)}N \\ \partial_\alpha &\mapsto \partial_{f\circ\alpha}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Como puede comprobarse fácilmente (ver [3, Prop. 2.7, Cap. 0]), dicha aplicación es lineal y está bien definida (no depende de la curva α que se haya usado para definir el vector tangente).

Si el diferencial de la aplicación es inyectivo, dicha aplicación se denomina *inmersión*. Una inmersión que sea además un homeomorfismo entre su dominio y su imagen se llama *embebimiento*.

Por su importancia en la teoría de integración, definiremos lo que es una orientación y una variedad orientable.

Definición 1.6 (Variedad orientable)**.** Sea V un espacio vectorial. Decimos que dos bases *tienen la misma orientación* si el determinante de la matriz de cambio de base es positivo. Una *orientación* $[e_1, \dots, e_n]$ es una clase de equivalencia de bases de V con la relación «tener la misma orientación». Decimos que una aplicación lineal *preserva la orientación* si su determinante es positivo y que *revierte la orientación* en caso contrario.

Sea M una variedad. Decimos que un atlas de M está *orientado* si el diferencial de las funciones de transición preserva la orientación en todos los puntos. Si M admite un atlas orientado, diremos que M es *orientable*. Decimos que dos atlas orientables son *compatibles con orientación* si su unión es un atlas orientado. Una variedad orientable se dice que está *orientada* si se ha elegido una clase de equivalencia de atlas compatibles con orientación. Puede verse que hay dos orientaciones posibles para variedades conexas [3, cap. 0, def. 4.4]. Elegir una orientación en una variedad equivale a elegir una orientación en los espacios tangentes de modo que las bases $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ asociadas a las cartas estén orientadas positivamente.

A continuación presentaremos algunos teoremas sobre subvariedades, que son necesarios para dar sentido a la fórmula de la coárea y nos serán útiles para las aplicaciones.

Definición 1.7 (Subvariedad)**.** Sea M una variedad diferenciable. $M' \subset M$ es una subvariedad de dimensión $k \leq n$ si para todo $x \in M'$ existe una carta (U, ϕ) tal que $\phi(M' \cap U) = \mathbb{R}^k \times \{0\}^n$. Esto nos permite construir un atlas para M', dándole una estructura de variedad de dimensión k.

Equivalentemente, M' es una subvariedad si y sólo si la inclusión $\iota : M' \to M$ es un embebimiento (ver [10, Tma. 8.2]).

Podemos identificar T_xM' con el subespacio $d_x\iota(T_xM') \subseteq T_xM$.

No encontramos una demostración de la siguiente proposición en los libros que utilizamos en esta sección, por lo que la incluimos nosotros.

Proposición 1.1. *Todo abierto no vacío $U \subseteq M$, donde M es una variedad, es una subvariedad de dimensión* $\dim M$. *Además, si M es orientable, entonces U también lo es.*

Demostración. Simplemente se restringen las cartas de M a U. Es decir, si (V, ϕ) es una carta de M, $(U \cap V, \phi|_{U \cap V})$ es una carta, de U. De este modo construimos un atlas de U.

Es claro que si tomamos un atlas orientado de M, también obtendremos un atlas orientado de U después de restringir las cartas. $\square$

Los siguientes teoremas generalizan los teoremas de la función inversa e implícita al caso de variedades. Puede consultarse una demostración en [10, Tmas. 7.11, 7.13 y 8.8].

Teorema 1.2 (Función inversa)**.** *Sea $f \in \mathscr{C}^1(M, N)$ una aplicación entre variedades, y sea $x \in M$ tal que $d_xf : T_xM \to T_{f(x)}M$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Entonces existe un entorno $U \ni x$ tal que $f : U \to f(U)$ es un difeomorfismo.*

Teorema 1.3 (Rango constante)**.** *Sean M, N variedades de dimensión m y n, y sea $f \in \mathscr{C}^1(M, N)$ cuya diferencial tiene rango k en un entorno de $x \in M$. Entonces existen cartas (U, ψ) de M y (V, ψ) de N tal que $\phi(x) = 0$, $\psi(f(x)) = 0$ y hacen que el siguiente diagrama conmute:*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] & V \arrow[d, "\psi"] \\ \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k} \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \end{tikzcd}, \tag{1.5}$$

donde $\pi(u, v) = (u, 0)$.

Además, en el caso de que el rango sea constante en un entorno de un conjunto de nivel $f^{-1}(y)$, dichos conjuntos son subvariedades de dimensión $m - k$, donde $y \in N$. En esta situación, identificaremos su espacio tangente con el núcleo de df.

Es fácil ver que si $d_x f$ tiene rango k, entonces su rango será mayor o igual en un entorno de x. La matriz de $d_x f$ en algunas bases coordenadas tendría un menor no nulo de orden k, que, por continuidad, sera no nulo en un entorno. Por ello, si el rango es máximo, como en el caso de que la diferencial sea sobreyectiva, será suficiente comprobar que el rango es constante en el conjunto de nivel $f^{-1}(y)$, en lugar de en un entorno de ésta.

Incluimos un corolario de este teorema junto a su demostración, que, de nuevo, no hemos encontrado en los libros que hemos usado en esta sección.

Corolario 1.4. *Sea $f \in \mathscr{C}^1(M,N)$ tal que su diferencial es sobreyectiva. Entonces, f es una aplicación abierta (si U es un abierto de M, $f(U)$ es un abierto de N).*

Demostración. Sea $y \in f(U)$. Como la diferencial es sobreyectiva, su rango es n. Por tanto, la aplicación $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^n$ del teorema anterior sería una proyección, en un entorno V, que podemos tomar tal que esté contenido en U. Recordamos que las proyecciones son abiertas [12, cap. 2.15]. Dado que las cartas son homeomorfismos, $f(V) \ni y$ también será abierto. □

El siguiente teorema es imprescindible para la teoría de integración en variedades, ya que nos permite descomponer una función diferenciable en suma de funciones diferenciables con soporte compacto contenido en una carta, de modo que podremos recurrir a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ para definir la integral. Puede encontrarse una demostración en [10, Tma. 2.25].

Teorema 1.5 (Particiones de la unidad diferenciables.)**.** *Sea M una variedad y $\mathscr{U} = \{U_j\}_{j\in J}$ un recubrimiento por abiertos. Entonces existen funciones $\rho_i \in \mathscr{C}_c^\infty(M,\mathbb{R})$ con índices $i \in I$ y $\alpha : I \to J$ tal que:*

- $0 \leq \phi$.
- *El soporte de cada función está contenido en un abierto: $\forall i \in I$, $\operatorname{supp}(\phi_i) \subseteq U_{\alpha(i)}$.*
- $\sum_{i\in I} \phi_i = 1$.
- *La suma anterior es localmente finita, es decir, $\forall x \in M$ existe un entorno abierto $V \ni x$ tal que $\phi_i|_V = 0$ para todo $i \in I$ salvo un número finito.*

1.1.1. Métricas riemannianas y formas diferenciales

Necesitamos algunos conceptos de álgebra multilineal para definir los objetos que vamos a integrar. Se pretende dar solamente las definiciones necesarias para poder continuar con la teoría. Nos basaremos en los capítulos 11 y 12 de [10], a donde remitimos al lector para consultar las demostraciones que faltan, que, si bien son elementales, tienden a ser bastante pesadas y requieren trabajar con índices.

Los *tensores* son los objetos de estudio del álgebra multilineal, que generalizan los escalares, vectores, matrices y formas bilineales. En nuetro caso, sólo estaremos interesados dos clases de *tensores covariantes*: los 2-tensores simétricos (formas bilineales), que nos servirán para introducir las métricas riemannianas en variedades, y los tensores alternados, que nos permitirán introducir las formas diferenciales. Primero describiremos la teoría de tensores en espacios vectoriales y posteriormente definiremos campos de tensores sobre variedades.

Tensores en espacios vectoriales

Durante esta sección, V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n.

Definición 1.8 (Tensor covariante)**.** Un *tensor k-covariante* o k-tensor T es una aplicación multilineal (lineal en cada una de las k entradas) $T : V^k \to \mathbb{R}$, donde V^k es el producto cartesiano de k espacios vectoriales.

El espacio de los k-tensores sobre V se denota $T^k(V)$.

El espacio $T^0(V)$ es igual a $\mathbb{R}$ por convención.

El espacio $T^1(V) = V^*$ es el *espacio dual*. Dado una base $\{e_i\}_{i=1}^n$, llamamos *base dual* a los 1-tensores $\{e^i\}_{i=1}^n$ que cumplen

$$e^i(e_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{1.6}$$

La base dual es una base del espacio dual. Recordamos que no existe correspondencia natural entre V y V^*, a no ser que haya una estructura adicional, como un producto escalar.

Los 2-tensores son las *formas bilineales*. Las formas bilineales definidas positivas, son los productos escalares.

Aunque no vayamos a trabajar con ellos, ya que esto nos obligaría a tomar una definición más abstracta del producto tensorial, que no necesitamos para nuestros propósitos (definir el producto exterior de formas diferenciales), un (k, l)-tensor T es una aplicación lineal

$$T : V^k \times (V^*)^l \to \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Un vector es un $(0, 1)$-tensor y una matriz es un $(1, 1)$-tensor. Los $(0, l)$-tensores se denominan tensores l-contravariantes. Remitimos al lector a [10] para un tratamiento más completo.

Nota (Índices arriba y abajo). Habitualmente seguiremos la convención de escribir abajo los índices de las componentes de tensores covariantes y arriba las de tensores contravariantes. Llamaríamos v^i a las componentes de un vector v y m^i_j a la componente en la fila i columna j de la matriz M. Haremos alguna excepción en los casos en los que puedan confundirse los índices con potencias.

Definición 1.9 (Producto tensorial)**.** El *producto tensorial* es la una operación binaria $\otimes : T^k(V) \times T^l(V) \to T^{k+l}(V)$, tal que

$$\begin{aligned} T \otimes S : V^k \times V^l &\to \mathbb{R} \\ (u, v) &\to T(u)S(v). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Este producto es bilineal y asociativo. Denotaremos con $\bigotimes$ los productos de sucesiones finitas de elementos, de forma análoga a como hacemos con $+$ y $\sum$.

Proposición 1.6 (Base de $T^k(V)$)**.** *Sea $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V y sea $\mathscr{B}^* = \{e^1, \dots, e^n\}$ la base dual. Entonces el siguiente conjunto es una base de $T^k(V)$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial (con la definición estándar de suma y producto de aplicaciones):*

$$\left\{ \bigotimes_{i \in I} e^i \mid I \in \{1, \dots, n\}^k \right\}. \tag{1.9}$$

Es decir, los productos tensoriales de k vectores de la base dual son base de $T^k(V)$. Por tanto la dimensión de $T^k(V)$ es n^k.

Definición 1.10 (Tensores alternados y simétricos)**.** Sea S_k el grupo de permutaciones sobre un conjunto de k elementos. Decimos que un $T \in T^k(V)$ es *simétrico* si $T \circ \sigma = T$ y *alternado* si $T \circ \sigma = \operatorname{sgn}(\sigma) T$ para toda permutación σ, donde entendemos que σ actúa en V^k permutando las posiciones de los k vectores, y sgn es el signo de la permutación. Denotamos $\Lambda^k(V)$ al conjunto de los k-tensores alternados, que forma un subespacio vectorial de $T^k(V)$.

Definimos también la parte alternada Alt de un k-tensor como el promedio de todas las permutaciones ajustadas con el signo:

$$\operatorname{Alt}(T) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) T \circ \sigma. \tag{1.10}$$

Es fácil ver que $\operatorname{Alt} : T^k(V) \twoheadrightarrow \Lambda^k(V)$ es una proyección.

Definición 1.11 (Producto exterior)**.** El *producto exterior* $\wedge$ entre dos formas alternadas se define de la siguiente manera:

$$\wedge : \Lambda^k(V) \times \Lambda^l(V) \to \Lambda^{k+l}(\omega, \eta) \quad \mapsto \frac{(k+l)!}{k!\, l!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta). \tag{1.11}$$

Este producto es asociativo, bilineal y cumple $\omega \wedge \eta = (-1)^{k+l} \eta \wedge \omega$.

También utilizaremos el símbolo $\bigwedge$ para indicar productos de sucesiones finitas de elementos.

El coeficiente que aparece en la definición simplifica alguna de las fórmulas con formas diferenciales. De nuevo, recomendamos mirar [10] para más detalles.

Proposición 1.7 (Base de $\Lambda^k(V)$)**.** *Sea $\{e_i\}_{i=1}^n$, una base de V. El siguiente conjunto es una base de $\Lambda^k(V)$.*

$$\left\{ \bigwedge_{i=1}^k e^{\alpha_i} \mid (\alpha_i)_i \in \{1, \dots, n\}^k \text{ es una sucesión estrictamente creciente} \right\}. \tag{1.12}$$

Por tanto,

$$\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \tag{1.13}$$

Los n-tensores alternados son los que tendrán utilidad para el cálculo de volúmenes. Forman un espacio vectorial de dimensión 1, por tanto son proporcionales al determinante. Nos será de utilidad el teorema siguiente.

Proposición 1.8 (Determinantes y n-formas alternadas)**.** *[10, prop. 14.9] Sea $\omega \in \Lambda^n(V)$. Supongamos que $T : V \to V$ es una aplicación lineal y $v_1, \dots, v_n \in V$. Entonces,*

$$\omega(Tv_1, \dots, Tv_n) = \det(T)\omega(v_1, \dots, v_n). \tag{1.14}$$

Campos tensoriales en variedades

Definiremos varios fibrados y secciones, de modo análogo al caso del espacio tangente (definición 1.4).

Definición 1.12 (Campos tensoriales y formas diferenciales)**.** Sea M una variedad.

Denotamos $T^kM = \coprod_{x\in M} T^k_pM$ al fibrado de k-tensores sobre M.

Denotamos $\mathcal{T}^k(M)$ al $\mathcal{C}^p(M)$-módulo de campos de k-tensores sobre M (secciones de T^kM).

Análogamente pueden definirse fibrados y campos de k-tensores simétricos y alternados. Llamaremos *k-formas diferenciales* a los campos de k-tensores alternados, y las denotamos $\Omega^k(M)$.

En el caso de que $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ sea la base del espacio tangente asociada a una carta (definición 1.3), denotamos por $\{dx^i\}_{i=1}^n$ a la base dual.

Todas las operaciones que hemos definido anteriormente entre tensores, vectores y formas diferenciales (producto tensorial, producto exterior, aplicar un tensor a un vector, etc.) se definen para campos haciendo la operación punto a punto.

Estamos ahora en condiciones de introducir el concepto de variedad riemanniana, que son los objetos matemáticos sobre los que trata la fórmula de la coárea. Estas variedades diferenciables están equipadas con un producto escalar en cada espacio tangente que varía de forma diferenciable, lo que nos permitirá definir distancias, ángulos y volúmenes.

Definición 1.13 (Variedad riemanniana)**.** Una variedad riemanniana (M, g) es una variedad diferenciable M equipada con un campo de 2-tensores simétricos $g \in \mathcal{T}^2(M)$ de clase 2, tal que en cada punto $x \in M$, g_x es un producto escalar. Denominamos a g la *métrica* de la variedad.

Si tenemos una base del espacio tangente $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ se definen los coeficientes de la métrica $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$. La métrica está caracterizada por sus coeficientes en cualquier base.

Definición 1.14 (Isometría)**.** Sea $f : M \to N$ un difeomorfismo entre variedades riemannianas. Diremos que f es una *isometría* si es biyectiva y d_xF es una isometría lineal para todo $x \in M$. Denotaremos $\mathrm{ISO}(M)$ al grupo de isometrías de M en si mismo.

A continuación definiremos el pullback de un campo tensorial a través de una aplicación diferenciable $f : M \to N$. Esto permite definir un campo tensorial en M a partir de uno en en N. Esto nos permitirá enunciar la fórmula de cambio de variable, y definir métricas para subvariedades de variedades riemannianas.

Definición 1.15 (Pullback de campos de tensores)**.** Sean M, N variedades diferenciables, sea $f \in \mathscr{C}^\infty(M,N)$ y sea $T \in \mathscr{T}^k(N)$. El *pullback de T por f* es la aplicación $f^* : \mathscr{T}^k(N) \to \mathscr{T}^k(M)$ tal que:

$$(f^*T)(X_1, ..., X_n) = T(df(X_1), ..., df(X_n)). \tag{1.15}$$

Enunciaremos algunas de las propiedades básicas de los pullbacks ([10, Props. 11.8, 11.9 y 12.16]).

Proposición 1.9 (Propiedades del pullback)**.** *Sean M, N, P variedades diferenciables, $f \in \mathscr{C}^\infty(M,N)$, $g \in \mathscr{C}^\infty(M,N)$, $h \in \mathscr{C}^\infty(M)$, $T \in \mathscr{T}^k(N)$, $S \in \mathscr{T}^l(N)$, $\omega \in \Omega^k(N)$ y $\eta \in \Omega^l(N)$.*

1. *$f^* : \mathscr{T}^k(N) \to \mathscr{T}^k(M)$ es $\mathbb{R}$-lineal.*
2. *f^* conmuta con los productos tensoriales y, por tanto, con los exteriores: $f^*(T \otimes S) = f^*T \otimes f^*S$ y $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$.*
3. *$* : \mathscr{T}^k(N) \to \mathscr{T}^k(M)$ es un funtor contravariante:*
   - $(\mathrm{Id}_N)^* = \mathrm{Id}_{\mathscr{T}^k N}$.
   - $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
4. *$f^*(h\omega) = (h \circ f) f^*\omega$.*

Definición 1.16 (Tensores y métricas en subvariedades)**.** Sea $M' \subseteq M$ es una subvariedad diferenciable de una variedad M. Si $T \in \mathscr{T}^k(M)$, podemos definir el campo tensorial $\iota^*T \in \mathscr{T}^k(M')$ en M', donde $\iota : M' \to M$ es la inclusión.

En el caso de que M sea una variedad riemanniana, podemos dotar de una métrica a sus subvariedades mediante este proceso. Cuando M' esté equipada con la métrica ι^*g, diremos que es una *subvariedad riemanniana*. Normalmente nos referiremos a ellas simplemente como subvariedades, en caso de que no haya posibilidad de confusión.

1.2. Teoría de la medida e integración

En esta sección recordaremos los resultados relevantes de la teoría de la medida que utilizaremos para definir integrales en variedades y los teoremas clásicos de la integral de Lebesgue. En numerosos libros introductorios se utiliza la integral de Riemann, no obstante, sus desventajas son bien conocidas: tiene peores propiedades de paso al límite y no es posible definir la integral en conjuntos relativamente simples, como abiertos de $\mathbb{R}^n$ [10, apéndice C].

Utilizaremos las referencias [9, cap. 5 y 9] y [15, cap. 1, 2, y 5]. Esta última referencia considera funciones medibles más generales que las nuestras, con valores en espacios de Banach y llama *medidas positivas* a lo que nosotros llamamos simplemente *medidas*.

Definición 1.17 (Medidas)**.** Un *espacio medible* es una tupla $(X, \mathscr{M})$, y un *espacio de medida* es una terna $(X, \mathscr{M}, \mu)$, donde:

- X es un conjunto.
- $\mathscr{M}$ es una *σ-álgebra*, es decir, una familia de conjuntos que contiene el conjunto vacío y es cerrada bajo complementos, y uniones e intersecciones numerables. Si $A \in \mathscr{M}$, diremos que A es *μ-medible* (o simplemente *medible*, si no hay lugar a confusión).
- $\mu : \mathscr{M} \to [0, \infty]$ es una *medida*, es decir, una función tal que $\mu(\emptyset) = 0$ y es numerablemente aditiva: si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos:

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n). \tag{1.16}$$

Diremos que una función $f : X \to \mathbb{R}$ es *μ-medible* (o *medible*) si $f^{-1}(-\infty, a)$ es medible $\forall a \in \mathbb{R}$.

Un conjunto es *de medida nula* si está contenido en un conjunto medible con medida 0. Diremos que algo ocurre en *(μ)-casi todo punto* si ocurre en el complemento de un conjunto de medida nula.

Para nuestros propósitos, siempre supondremos que X es un espacio topológico localmente compacto, Hausdorff y σ-compacto (cosa que ocurre si X es una variedad).

Diremos que una medida es *de Borel* si los abiertos (y, por tanto, todos los conjuntos de Borel) son medibles. Diremos que es *de Radon* si además los compactos tienen medida finita y cumple la siguiente condición de regularidad. Sea B un conjunto de Borel de medida finita, entonces:

$$\mu(B) = \inf_{U\supseteq B} \mu(B) = \sup_{K\subseteq B} \mu(K), \tag{1.17}$$

donde los U son abiertos y los K, compactos.

Por último, una medida es *completa* si todo subconjunto de un conjunto de medida nula es medible.

La *medida de Lebesgue* en $\mathbb{R}^n$ es la medida que asocia a los rectángulos (productos cartesianos de n intervalos) el producto de las longitudes de los intervalos. Usado el teorema de Hahn-Kolmogorov puede verse que existe una única medida completa que cumpla estas características [9, Cap. 6.9]. Esta medida es de Radon.

Nota. Habitualmente, (como en $\mathbb{R}^n$), una medida que esté definida solamente en los conjuntos de Borel no es completa. Sin embargo, puede extenderse a una medida completa definiendo $\mu(A) := \mu(B)$ si $A \triangle B$ está contenido en un conjunto de medida nula, donde $A \subset X$, B es de Borel, y $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ es la diferencia simétrica [9, pág. 174].

Durante el resto de la sección $(X, \mathscr{M}, \mu)$ es un espacio de medida localmente compacto, σ-compacto y Hausdorff, y μ es de Radon y completa.

A partir de una medida puede construirse una integral. La construcción clásica de la integral sigue los siguientes pasos [15, Cap. 2]:

1. Definición de la integral para funciones características de conjuntos medibles de medida finita $\int \chi_A d\mu := \mu(A)$ y extensión por linealidad a las funciones simples (combinaciones lineales con coeficientes positivos de funciones características).

2. Extensión a funciones medibles no negativas:

$$\int f d\mu := \sup_g \int g d\mu, \tag{1.18}$$

donde $g \leq f$, y g es acotada y simple.

3. Por último, extender a funciones absolutamente integrables (cuyo valor absoluto tiene integral finita):

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu, \tag{1.19}$$

donde $f^+(x) := \max\{f(x), 0\}$ y $f^-(x) := \max\{-f(x), 0\}$.

Definición 1.18 (Integral)**.** Llamamos *integral respecto a la medida* μ al resultado de la anterior construcción. Llamaremos a dicha integral *integral de Lebesgue* si μ es la medida de Lebesgue. Denotaremos dicha integral por los símbolos

$$\int f, \quad \int_A f, \quad \int f d\mu \quad \int_{x \in A} f(x) dx \quad \text{ó} \quad \int_{x \in A} f(x), \tag{1.20}$$

o combinaciones de los anteriores, dependiendo si puede haber confusión respecto a la medida, el conjunto o la variable que se está integrando.

Diremos que una función es *integrable* si su valor absoluto tiene integral finita.

Denominamos $\mathscr{L}^p(\mu)$ (o $\mathscr{L}^p(X)$) al conjunto de funciones tales que $|f|^p$ es integrable. Denotamos:

$$\|f\|_{\mathscr{L}^p(\mu)} := \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.21}$$

Proposición 1.10 (Propiedades de la integral)**.** *Enunciamos algunas propiedades básicas de la integral [15, Prop. 1.6]:*

1. *Si* $f = g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ *en casi todo punto, entonces* $\int f = \int g$.
2. $\int : \mathscr{L}^1(\mu) :\to \mathbb{R}$ *es lineal.*
3. $\int : \mathscr{L}^1(\mu) :\to \mathbb{R}$ *es creciente: si* $f \leq g$*, entonces* $\int f \leq \int g$.
4. *Si* $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ *y* $|f| \leq |g|$*, entonces* $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$.
5. *Si* $\|f\|_{\mathscr{L}^1(\mu)} = 0$*, entonces* $f = 0$ *en casi todo punto.*

Nota (Espacios $\mathscr{L}^p$). Normalmente se considera que que los elementos de $\mathscr{L}^p$ son clases de equivalencia de funciones iguales en casi todo punto, de este modo $(\mathscr{L}^1(\mu), \|\cdot\|_{\mathscr{L}^1(\mu)})$ sería un espacio de Banach. No obstante, este detalle no será de gran importancia para nosotros.

Presentamos ahora una caracterización de la definición de integral. Tenemos una correspondencia entre medidas de Borel y regulares y $\mathscr{C}_c^0$-funcionales positivos, lo cual nos da una vía alternativa (y a menudo más sencilla) para definir medidas e integrales.

Definición 1.19 ($\mathscr{C}_c^0$-funcional)**.** Un $\mathscr{C}_c^0$*-funcional* es una aplicación lineal $L : \mathscr{C}_c^0(X) \to \mathbb{R}$ de modo que $L|_{\mathscr{C}_c^0(K)}$ es continua para todo K compacto con la norma del supremo:

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|. \tag{1.22}$$

Recordamos que una aplicación lineal entre espacios de Banach (como en este caso) es continua si y sólo si es acotada.

Se dice que $L \in \mathscr{C}^0(X)$ es *positivo* si $L(f) \geq 0$ cuando $f \geq 0$.

Teorema 1.11 (de representación de Riesz)**.** *[16, Tma. 1.10.11] Sea $(X, \mathscr{M})$ un espacio medible localmente compacto, σ-compacto y Hausdorff. Entonces existe una correspondencia entre medidas de Radon μ y $\mathscr{C}_c^0$-funcionales lineales positivos L_μ tal que:*

$$L_\mu(f) = \int f d\mu. \tag{1.23}$$

A continuación presentaremos los teoremas clásicos de convergencia de la integral de Lebesgue [15, pág. 275], y el teorema de Fubini.

Teorema 1.12 (Convergencia monótona)**.** *Sea $f_n : X \to [0, \infty]$ una sucesión creciente de funciones medibles. Sea f el límite punto a punto:*

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x). \tag{1.24}$$

Entonces f es medible y

$$\int f_n \to \int f, \tag{1.25}$$

donde la integral se interpreta en el sentido de una integral de funciones positivas y puede valer ∞.

Teorema 1.13 (Convergencia dominada)**.** *Sea f_n una sucesión de funciones integrables tales que $|f_n| \leq g$ para todo n y algún $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$. Sea f el límite punto a punto. Entonces f es integrable y*

$$\int f_n \to \int f. \tag{1.26}$$

Definición 1.20 (Medida producto)**.** [9, Tma. 8.2]. Sean $(X, \mathscr{M}, \mu)$, $(Y, \mathscr{M}', \nu)$ espacios de medida (con las hipótesis habituales de regularidad) y supondremos que las medidas son Radon. Hay una única medida de Radon y completa $\mu \times \nu$ en $X \times Y$ tal que:

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \tag{1.27}$$

donde $A \in \mathscr{M}$ y $B \in \mathscr{M}'$. Llamamos *medida producto* a dicha medida.

El producto de medidas de Lebesgue da la medida de Lebesgue de la dimensión correspondiente.

Teorema 1.14 (Fubini)**.** *[9, Tma. 8.4] Sea $f \in \mathscr{L}^1(\mu \times \nu)$, en las condiciones de la definición anterior. Entonces, la aplicación $x \to \int_{y\in Y} f(x,y)d\nu$ está en $\mathscr{L}^1(\mu)$ para casi todo $x \in X$. Además, tenemos:*

$$\int_{X\times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_{x\in X}\int_{y\in Y} f(x,y)d\nu d\mu. \tag{1.28}$$

Por último recordamos el teorema de cambio de variable en $\mathbb{R}^n$:

Teorema 1.15 (Cambio de variable)**.** *[9, Cap. 21, Tma. 2.6] Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abiertos, sea $f : U \to f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo y sea $h \in \mathscr{L}^1(f(U))$. Entonces, $(h\circ f)|\det df| \in \mathscr{L}^1(U)$ y*

$$\int_{f(U)} h = \int_U (h \circ f)|\det df|, \tag{1.29}$$

donde ambas integrales son respecto a la medida de Lebesgue.

1.3. Integración en variedades

En esta sección estudiaremos como extender la integral de Lebesgue al caso de variedades. Para ello, necesitaremos utilizar las cartas de la variedad para pasar el problema a $\mathbb{R}^n$ mediante un «cambio de variable». Usaremos las referencias [10, cap. 16] para la definición de densidades y [9, cap. 23] para la definición de integrales en variedades.

Para definir una integral en una variedad diferenciable necesitamos alguna estructura adicional. Una posibilidad es utilizar n-formas alternadas, que cumplen las propiedades que podemos esperar de *volúmenes orientados* de paralepípedos en espacios vectoriales. Esta noción coincide con la de *volumen* salvo por el signo, que se debe a la orientación de la base. Por la proposición 1.8, cumple las familiares propiedades:

1. $\omega(v_1 + w, \ldots, v_n) = \omega(v_1, \ldots, v_n) + \omega(w, \ldots, v_n)$.
2. $\omega(\alpha v_1, \ldots, v_n) = \alpha\omega(v_1, \ldots, v_n)$.
3. $\omega(v_1.v_2, \ldots, v_n) = -\omega(v_2, v_1, \ldots, v_n)$.

Definición 1.21 (Forma de Volumen)**.** Sea M una variedad de dimensión n. Una *forma de volumen ω* es una n-forma diferencial. Debido a que según el proposición 1.7 el espacio de dichas formas tiene dimensión 1, dada una carta (U, ϕ) de M puede escribirse:

$$(\phi^{-1})^*\omega = \alpha dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n, \tag{1.30}$$

con $\alpha \in \mathscr{C}^\infty(\phi(U))$.

Una forma de volumen que no se anule en ningún punto nos da una orientación en la variedad. Decimos que una base está orientada positivamente si $\omega(e^1, \ldots, e^n) > 0$. La proposición 1.8 nos asegura que esto define una orientación.

Como corolario de este hecho, las formas de volumen que no se anulan en ningún punto existen únicamente en variedades orientables. Si queremos que nuestra teoría sea válida para el caso no orientable, tenemos que considerar unos objetos ligeramente distintos. Observamos que en el caso de espacios vectoriales, el valor absoluto del *volumen orientado* tiene las propiedades que esperaríamos de un *volumen*. Introduciremos ahora el concepto de forma de densidad.

1.3.1. Integración de formas de densidad en variedades

Definición 1.22 (Forma de densidad)**.** Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Decimos que una aplicación $\eta : V^n \to \mathbb{R}$ es una *densidad* si cumple $\eta(Te_1, \ldots, Te_n) = |\det T|\eta(e_1, \ldots, e_n)$ para toda aplicación lineal $T : V \to V$. Llamamos $|\Lambda^n|(V)$ al conjunto de densidades sobre V. Puede verse fácilmente ([10, Prop. 16.35]) que $|\Lambda^n|(V)$ es un espacio vectorial de dimensión 1. Por la definición es evidente que una forma de densidad es siempre positiva, siempre negativa o nula evaluada en cualquier conjunto de vectores independientes (basta con considerar la aplicación T de cambio de base). Diremos que η es una *densidad positiva* en el primer caso.

Por la proposición 1.8, si ω es un n-tensor alternado, entonces su valor absoluto $|\omega|$ es una forma de densidad. Dado que $|\Lambda^n|(V)$ tiene dimensión 1, siempre podemos escribir $\eta = |\omega|$ o $\eta = -|\omega|$ para algún $\omega \in \Lambda^n(V)$.

Sea M una variedad de dimensión n. Llamamos $|\Lambda^n|(M) = \coprod_{x\in M}|\Lambda^n|(T_xM)$ al fibrado de densidades. Una *forma de densidad* es una sección de $|\Lambda^n|(M)$ y llamamos $|\Omega^n|(M)$ al $\mathscr{C}^\infty(M)$-módulo de formas de volumen. Decimos que una forma de densidad η es *positiva* si las densidades correspondientes son positivas en todos los puntos.

El *pullback* de una forma de densidad se define de la misma forma que en el caso de tensores. Algunas de sus propiedades pueden obtenerse trivialmente a partir de la correspondiente de las formas diferenciales tomando el valor absoluto.

Nota. Según [10, Lem. 14.28], toda variedad admite una forma de densidad positiva, al contrario que el caso de formas de volumen.

A continuación definiremos la integral de formas en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.23 (Integral de formas en $\mathbb{R}^n$)**.** Sea ω una forma de densidad positiva en $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces podemos escribir $\omega = \alpha|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n|$ para cierta función positiva α. Definimos

$$\int_U \alpha|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n| := \int_U \alpha d\mu, \tag{1.31}$$

donde μ es la medida de Lebesgue.

Proposición 1.16 (Cambio de variable para formas en $\mathbb{R}^n$)**.** *Sean $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos, sea $\eta = \alpha|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n| \in |\Omega|(f(U))$ y sea $f : U \to f(U)$ un difeomorfismo. Entonces:*

$$\int_{f(U)} \eta = \int_U f^*\eta \tag{1.32}$$

Demostración. Es una consecuencia inmediata del teorema de cambio de variable para funciones.

$$\int_{f(U)} \eta = \int_{f(U)} \alpha = \int_U (\alpha \circ f)|\det(df)| = \int_U f^*\eta \tag{1.33}$$

□

Ya tenemos todas las herramientas necesarias para definir la integral en variedades.

Definición 1.24 (Integral de una función respecto a una forma de densidad)**.** Sea M una variedad diferenciable de dimensión n (no necesariamente orientable) equipada con una forma de densidad positiva η. Sea $h \in \mathscr{C}_c^0(M)$ tal que $\operatorname{supp} h \subseteq U$, donde (U, ϕ) es una carta. Sea $(\phi^{-1})^* \eta = \alpha |dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n|$. Entonces existe un único $\mathscr{C}_c^(M)$-funcional positivo (por el teorema de representación de Riesz, una única integral respecto a una medida de Radon) tal que:

$$\int_M h\eta = \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^*(h\eta) = \int_{\phi(U)} (h \circ \phi^{-1}) \alpha d\mu, \tag{1.34}$$

para cada carta (U, ϕ) de un atlas de la variedad, donde μ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

Esta integral puede definirse para densidades no positivas, pero en tal caso no obtenemos una medida positiva. Esto no es relevante para el caso de variedades riemannianas, que es el que nos interesa.

Nota. Es habitual definir ahora la integral de funciones cualquiera utilizando particiones de unidad (ver, por ejemplo [10]). Para ello, tendríamos que probar que el resultado no depende de la partición de la unidad elegida. Entonces tendríamos que comprobar que se verifican uno a uno los teoremas clásicos de la integral de Lebesgue. En lugar de eso, siguiendo a [9], probaremos que existe un único $\mathscr{C}_c^0$-funcional lineal positivo que satisface la definición anterior. Con ello, definiremos una integral mediante el teorema de representación de Riesz. Esto nos asegura que nuestra integral es realmente una integral en el sentido de la teoría de la medida, y obtendríamos automáticamente todos los teoremas relacionados. La fórmula con las particiones de la unidad será para nosotros un corolario del teorema de la convergencia dominada.

Utilizaremos el siguiente lema para garantizar que la integral está bien definida. En [9, Cap. 6, Tma. 5.1] viene la demostración para un caso más general del que estamos tratando (espacios localmente compactos y Hausdorff). Este resultado nos será útil también en la demostración de la fórmula de la coárea y hace uso de las particiones de la unidad. Incluimos la demostración a continuación.

Lema 1.17. *Sea M una variedad. Sea $\mathscr{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ un recubrimiento por abiertos de M y sea L_j un $\mathscr{C}_c^0(U_j)$-funcional para todo $j \in J$ tal que L_i coincida con L_j en $\mathscr{C}_c^0(U_i \cap U_j)$ para todas las parejas de índices. Entonces existe un único $\mathscr{C}_c^0(M)$-funcional tal que $L|_{\mathscr{C}_c^0(U_j)} = L_j$.*

Además, si los L_j son positivos, entonces L también lo es.

Demostración. Primero probamos la existencia. Sea $L = \sum_{i \in I} \psi_i L_{\alpha(i)}$ donde $(\psi_i)_{i \in I}$ es una partición de la unidad subordinada a $\mathscr{U}$. Es claro que esto es una aplicación lineal y que si los L_i son positivos, entonces L es positivo. Gracias a la condición de compatibilidad en las intersecciones de los abiertos, podemos ver fácilmente que $L|_{\mathscr{C}_c^0(U_j)} = L_j$. Demostremos ahora que es un $\mathscr{C}_c^0(M)$-funcional.

Sea $K \subseteq M$ un compacto. Tenemos que probar que L está acotado en K con la norma del supremo. Sea $h \in \mathscr{C}^0(K)$. Veamos que existe $I' \subseteq I$ finito tal que $\psi_i|_K = 0$ si $i \notin I'$. Para cada $x \in K$ existe un entorno en el que un número finito tal de ψ_i no nulos. Dado que K es compacto existe un recubrimiento $\mathscr{V}$ de K por finitos abiertos de ese tipo, por lo tanto $I' = \{i \mid \exists V \in \mathscr{V},\ \psi_i|_V \neq 0\}$ es finito. De este modo,

$$|Lh| = \left|\sum_{i\in I} L_{\alpha(i)}(\psi_i h)\right| = \left|\sum_{i\in I'} L_{\alpha(i)}(\psi_i h)\right| \leq \sum_{i\in I'} \|\psi_i h\|_\infty \leq N\|h\|_\infty, \tag{1.35}$$

donde $N = \#(I')$.

Nos falta probar la unicidad. En la demostración citada anteriormente se demuestra que L es independiente de la partición de la unidad elegida, pero esto no es necesario. Primero consideramos el caso $L_i = 0$ para todo i. Sean L un $\mathscr{C}^0_c(M)$-funcional lineal que extiende los L_i. Sea $h \in \mathscr{C}^0_c(M)$. Entonces,

$$Lh = L\sum_{i\in I} \psi_i h_i \sum_{i\in I} L_i(\psi_i h_i) = 0. \tag{1.36}$$

En el caso general, consideramos L, K $\mathscr{C}^0_c(M)$-funcionales lineales que extienden los L_i. Entonces $L - K$ es 0 en cada $U \in \mathscr{U}$. Por lo tanto, $L - K = 0$, luego $L = K$. □

Corolario 1.18. *Sean $L, K : \mathscr{C}^0_c(M) \to \mathbb{R}$ tales que dado un recubrimiento $\mathscr{U}$ por abiertos de M, $L|_{\mathscr{C}^0_c(U)} = K|_{\mathscr{C}^0_c(U)}$ son $\mathscr{C}^0_c(U)$-funcionales lineales para todo $U \in \mathscr{U}$. Entonces $L = K$.*

Proposición 1.19. *La integral de una función en una variedad equipada con una forma de volumen positiva η (definición 1.24) está bien definida y es una integral con respecto a una medida de Radon que denotaremos μ_η.*

Demostración. Por el teorema de representación de Riesz, es equivalente demostrar que la integral define un único $\mathscr{C}^0_c$-funcional positivo.

Utilizaremos el lema anterior. Sea $\{(U_i, \phi_i)\}$ un atlas de M y definimos las siguientes aplicaciones:

$$\begin{aligned} L_i : \mathscr{C}^0(U_i) &\to \mathbb{R} \\ h &\mapsto \int_{\phi_i(U_i)} (\phi_i^{-1})^*(h|\omega|) \end{aligned} \tag{1.37}$$

A continuación vemos que los L_i son $\mathscr{C}^0_c$-funcionales positivos. Es evidente que L_i son lineales y positivos. Nos falta ver que son continuos (acotados) en compactos con la norma del supremo. Sea $K \subseteq U_i$ un compacto y sea $h \in \mathscr{C}^0_c(K)$:

$$\begin{aligned} |L_i h| &\leq \int_{\phi_i(U_i)} |h \circ \phi_i^{-1}|\alpha_i \\ &\leq \mu(\phi_i(K))\|h \circ \phi_i^{-1}\alpha_i\|_\infty \\ &\leq \mu(\phi_i(K))\|h\|_\infty \|\alpha_i|_{\phi_i(K)}\|_\infty = C\|h\|_\infty, \end{aligned} \tag{1.38}$$

donde $(\phi^{-1})^* = \alpha_i |dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n|$, α_i está acotada en $\phi_i(K)$ por el teorema de Weirestrass, y $\mu(\phi_i(K))$ es finito por ser $\phi_i(K)$ compacto, por lo que $C \in \mathbb{R}$, L_i es acotado y, por tanto, es continuo.

Comprobaremos que se cumple la condición de compatibilidad del lema anterior. Sean (U,ϕ), (V,ψ) dos cartas y $h \in \mathscr{C}^0(K)$, con $K \subset W \subseteq U \cap V$ compacto. Utilizamos el teorema de cambio de variable.

$$\begin{aligned}\int_{\phi(W)} (\phi^{-1})^*(h\eta) &= \int_{(\phi\circ\psi^{-1})(\psi(W))} (\phi^{-1})^*(h\eta) \\ &= \int_{\psi(W)} (\phi\circ\psi^{-1})^*(\phi^{-1})^*(h\eta) = \int_{\psi(W)} (\psi^{-1})^*(h\eta).\end{aligned} \tag{1.39}$$

□

Corolario 1.20. *Sea M una variedad equipada con una forma de volumen positiva η, $h \in \mathscr{L}^1(M)$ y $\{\psi_i\}_{i\in I}$ una partición de la unidad subordinada a abiertos $\{U_i\}_{j\in J}$. Entonces*

$$\int_M h\mu_\eta = \sum_{i\in I}\int_{U_{\alpha(i)}} \psi_i h\mu_\eta. \tag{1.40}$$

Demostración. Aplicar el teorema de la convergencia dominada a las sumas parciales de $\sum_{i\in I}\psi_i h$:

$$|\sum_{i=1}^N \psi_i h| \leq \sum_{i=1}^N \psi_i |h| \leq |h|. \tag{1.41}$$

□

1.3.2. Integración de formas de volumen en variedades orientadas

En el caso de variedades orientadas puede definirse la integral de formas diferenciales. Es probablemente la forma más común de definir integrales en variedades y tienen un gran interés (ver, por ejemplo, el teorema de Stokes). Mencionamos brevemente cómo se definen y su relación con las integrales de formas de densidad.

Definición 1.25 (Integral de formas de volumen wn)**.** Sea M una variedad diferenciable orientada de dimensión n equipada con una forma de volumen ω. Sea $h \in \mathscr{C}_c^0(M)$ tal que $\operatorname{supp} h \subseteq U$, donde (U,ϕ) es una carta. Sea $(\phi^{-1})^*\omega = \alpha|dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n|$. Entonces existe un único $\mathscr{C}_c^0(M)$-funcional positivo (por el teorema de representación de Riesz, una única integral respecto a una medida de Radon) tal que:

$$\int_M h\omega = \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^*(h\omega) = \int_{\phi(U)} (h\circ\phi^{-1})\alpha d\mu, \tag{1.42}$$

para cada carta (U,ϕ) de un atlas orientado de la variedad, donde μ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Es similar al caso anterior. La condición de que la variedad sea orientable es necesaria para que los determinantes jacobianos de las funciones de transición sean positivos y, por tanto, iguales a su valor absoluto, pudiendo aplicar entonces la fórmula de cambio de variable. Puede verse una demostración completa en [9, Cap. 23, Tma. 3.2].

□

El siguiente teorema explica la relación entre integrales de formas de volumen y formas de densidad en variedades diferenciables.

Proposición 1.21 (Integrales de formas de densidad y formas de volumen)**.** *Sea M una variedad orientada, existe una biyección que asocia a cada forma de densidad η una forma de volumen ω, de modo que:*

$$\int_M h\omega = \int_M h\eta, \tag{1.43}$$

para todo $h \in \mathscr{L}^1(M)$

Demostración. La demostración puede verse en [9, Cap. 23]. Tomando una carta (U, ϕ) tal que $(\phi^{-1})^*\eta = \alpha|dx_1 \wedge ... \wedge dx_n|$, podemos definir localmente:

$$(\phi^{-1})^*\omega = \alpha dx^1 \wedge ... \wedge dx^n. \tag{1.44}$$

Esta definición funciona bien porque las funciones de transición tienen determinante positivo.

Que ambas integrales son iguales es evidente a partir de la definición de la integral. □

Esta proposición justifica la elección de las formas de densidad como los objetos fundamentales de la teoría de integración en variedades. Al elegir una orientación en la variedad, hay una correspondencia natural entre formas de volumen y de densidad, lo que permite integrar las primeras.

Incluimos la fórmula de cambio de variable para variedades. La demostración es trivial a partir de la proposición 1.16 y puede consultarse en [10, Cap. 14].

Teorema 1.22 (Cambio de variables para formas en variedades)**.** *Sean M y N variedades diferenciables y $f : M \to N$ un difeomorfismo. Sea η una forma de densidad en N. Entonces,*

$$\int_N \eta = \int_M f^*\eta. \tag{1.45}$$

Supongamos que M y N orientables, y sea ω una forma de volumen en N. Entonces,

$$\int_N \omega = \begin{cases} \int_M f^*\omega & f \text{ conserva la orientación.} \\ -\int_M f^*\omega & f \text{ revierte la orientación.} \end{cases} \tag{1.46}$$

El signo «−» en el caso de aplicaciones que revierten la orientación se debe a que aparece a que en la definición del pullback aparece un determinante mientras que en la fórmula de cambio de variable aparece su valor absoluto.

1.3.3. Integración en variedades riemannianas

Por último definiremos la integrales para variedades riemannianas, que obtenemos al tomar una forma de densidad compatible con la métrica.

Definición 1.26 (Integral de Lebesgue en variedades riemannianas)**.** Sea (M, g) una variedad riemanniana de dimensión n.Existe una única forma de densidad η_M de modo que $\eta_M(e_1, ..., e_n) = 1$ cuando los e_i son ortonormales (respecto al producto escalar g), que denominaremos *forma de densidad riemanniana*. Es claro que esta condición no depende de la base que se tome por proposición 1.8. En coordenadas, dicha forma viene dada por:

$$\eta_M = \sqrt{|\det g_{ij}|}|dx^1 \wedge ... \wedge dx^n|. \tag{1.47}$$

Llamamos *integral de Lebesgue* a la integral con respecto a la densidad riemanniana. Denotamos μ_M a la medida correspondiente.

En el caso $n = 0$, $\mu_M = \#$ es el cardinal del conjunto.

2. La fórmula de la coárea

En este capítulo enunciaremos y demostraremos la fórmula de la coárea. Antes de comenzar, tenemos que introducir algunos conceptos y resultados más. Para dar sentido a la integral sobre la fibra para ello usaremos el siguiente teorema [10, tma. 6.10].

Definición 2.1 (Puntos y valores singulares y regulares)**.** Sean M y N variedades diferenciables y $f : M \to N$ diferenciable.

Se dice que $x \in M$ es un *punto regular* de f si $d_x f$ es sobreyectiva.

$y \in N$ es un *valor regular* si para todo $x \in f^{-1}(y)$, x es regular.

En caso contrario, se dice que $x \in M$ es un *punto singular* e $y \in N$, un *valor singular*. Evidentemente, si $f^{-1}(y) = \emptyset$, y es un valor regular.

Teorema 2.1 (Morse-Sard)**.** *Sea $f \in \mathscr{C}^\infty(M,N)$ tal que* $\dim(M) \geq \dim(N)$*. Entonces, el conjunto de los valores singulares tiene medida* 0 *(en N).*

Este teorema, junto con el teorema de rango constante, implica que $f^{-1}(y)$, con $y \in N$ es una variedad de dimensión $\dim M - \dim N$, o bien $f^{-1}(y) = \emptyset$ salvo para un conjunto de medida nula.

Definición 2.2 (Espacio horizontal)**.** Sean M y N variedades diferenciables, $f : M \to N$ diferenciable, y sea $x \in M$ tal que $d_x f$ es sobreyectiva. Entonces el *espacio horizontal en x* se define como

$$H_x := \ker(d_x f)^\perp. \tag{2.1}$$

De este modo, $\dim H_x = \dim N$.

Definición 2.3 (Jacobiano normal)**.** Sean M y N variedades diferenciables y $f : M \to N$ diferenciable con $\dim M \geq \dim N$, y sea $x \in M$ un punto regular. Sea η_N la forma de densidad de N. Definimos el *jacobiano normal de f en x*:

$$\mathrm{NJ}_x f := f^* \eta_N(e_1, \ldots, e_n) = |\det(d_x f|_{H_x})|, \tag{2.2}$$

donde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base ortonormal de H_x. Por la definición de forma de densidad, no importa la base elegida.

Si x es un punto singular, entonces $\mathrm{NJ}_x f := 0$.

Presentamos a continuación la fórmula de la coárea.

Teorema 2.2 (Fórmula de la coárea)**.** *Sean M, N variedades riemannianas, con dimensiones m y n, respectivamente de forma que $m \geq n$. Sea $f \in \mathscr{C}^\infty(M,N)$ y $h : M \to \mathbb{R}$ una función medible positiva. Entonces:*

$$\int_{x\in M} h(x)\, \mathrm{NJ}_x f \, d\mu_M = \int_{y \in N} \int_{x \in f^{-1}(y)} h(x) d\mu_{f^{-1}(y)}\, d\mu_N \tag{2.3}$$

Antes de proceder con la demostración haremos algunos comentarios sobre la fórmula.

Primero señalamos que la integral de la derecha tiene sentido porque $f^{-1}(y)$ es una variedad para casi todo $y \in N$.

La fórmula puede escribirse alternativamente de la siguiente manera:

$$\int_{x\in M} h(x) d\mu_M = \int_{y\in N}\int_{x\in f^{-1}(y)} h(x)/\operatorname{NJ}_x f \, d\mu_{f^{-1}(y)}\, d\mu_N, \tag{2.4}$$

tomando $\hat{h}(x) = h(x)/\operatorname{NJ}_x f$.

La fórmula también es válida si h es integrable, de modo que todas las integrales que aparecen sean finitas. Puede verse fácilmente usando $h = h^+ + h^-$.

La fórmula de la coárea generaliza dos resultados básicos del cálculo integral: el teorema de Fubini y la fórmula de cambio de variable. En el caso de que $f : M \times N \twoheadrightarrow N$ sea la proyección $f(x, y) = y$, si identificamos $T_{(x,y)}(M\times N) \simeq T_x M \oplus T_y N$, tenemos que $d_{(x,y)} f(u, v) = u$, luego $H_x = T_y N$, $\operatorname{NJ}_x f = 1$ y $f^{-1}(y) = M \times \{y\}$. Por tanto se tiene:

$$\int_{(x,y)\in M\times N} h(x) d\mu_{M\times N} = \int_{y\in N}\int_{x\in M} h(x, y) d\mu_M\, d\mu_N, \tag{2.5}$$

que es el teorema de Fubini,.

En el caso de que $m = n$, y f sea un difeomorfismo se tiene que $\operatorname{NJ}_x f = |\det d_x f|$, ya que $H_x = T_x M$. Además $f^{-1}(y)$ es sólo un punto, por lo que

$$\int_{x\in M} h(x)|\det d_x f| d\mu_M = \int_{y\in N}\int_{x\in f^{-1}(y)} h(x) d\mu_{f^{-1}(y)}\, d\mu_N = \int_{y\in N} (h\circ f^{-1})(y) d\mu_N, \tag{2.6}$$

que es el teorema de cambio de variable.

Según el enunciado $f \in \mathscr{C}^\infty(M, N)$. Podríamos preguntarnos si el teorema sigue siendo válido para $f \in \mathscr{C}^p(M, N)$ para algún $p \in \mathbb{N}$. El principal problema que nos encontramos para extender esta demostración es el teorema de Morse-Sard [14]. El teorema es cierto para funciones $\mathscr{C}^p$ con $p \geq \max(1, \dim(M) - \dim(N) + 1)$, pero no puede extenderse a funciones menos regulares. Esto nos impide extender el teorema con esta formulación, ya que no hemos definido la integral en $f^{-1}(y)$ si dicho conjunto no es una variedad. Esto puede arreglarse utilizando la medida de Hausdorff, y puede probarse que el teorema es cierto cuando f es Lipschitz (en particular, $p = 1$), como explicaremos en el apéndice.

Comenzamos la demostración de la fórmula de la coárea. Primero probaremos la afirmación en un caso sencillo y luego lo extenderemos al caso general. La demostración está basada en el apéndice del artículo [8], completando varios detalles técnicos que deja como ejercicio para el lector.

Lema 2.3. *Sean M y N variedades, $h \in \mathscr{C}^0_c(M)$ positiva, y $f \in \mathscr{C}^\infty$ sobreyectiva, tal que existen cartas ϕ y ψ que hacen que el siguiente diagrama conmute:*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad f \quad} & N \\ \Big\downarrow \phi & & \Big\downarrow \psi \\ \mathbb{R}^{m-n}\times\mathbb{R}^n & \xrightarrow{\quad \pi \quad} & \mathbb{R}^n \end{array}, \tag{2.7}$$

siendo π la proyección. Entonces la fórmula de la coárea es cierta.

Demostración. En las condiciones del enunciado, es claro que M, N y $f^{-1}(y)$ para todo $y \in M$ son orientables (estas últimas son homeomorfas a hiperplanos), y f no tiene puntos singulares.

En una variedad orientable, la integral anterior es equivalente a la integral de las formas de volumen asociadas:

$$\int_{x\in M} h(x)\, \mathrm{NJ}_x f \omega_M = \int_{y\in N} \int_{x\in f^{-1}(y)} h(x)\omega_{f^{-1}(y)}\omega_N \tag{2.8}$$

Elegimos una base ortonormal orientada $e_1, ..., e_m$ de T_xM tal que los n últimos vectores sean una base de H_x, para cada $x \in M$ que varíe de forma diferenciable (puede obtenerse utilizando Gram-Schmidt con la base coordenada). De este modo $d_xf e_{m-n+1}, ..., d_xf e_m$ es una base orientada de T_yN, donde $y = f(x)$. Elegimos la orientación a la subvariedad $f^{-1}(y)$ de modo que $e_1, ...e_{m-n+1}$ sea una base orientada del espacio tangente.

Sean $e^1, ..., e^m$ las 1-formas duales a $e_1, \ldots, e_m$. Definimos las siguientes formas diferenciales:

$$\begin{aligned} \alpha &= e^1 \wedge \ldots \wedge e^{m-n} \\ \beta &= e^{m-n+1} \wedge \ldots \wedge e^m. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Tenemos que $\alpha \wedge \beta = \omega_M$ y $\alpha|_{f^{-1}(y)} = \omega_{f^{-1}(y)}$.

Además tenemos que

$$\begin{aligned} f^*\omega_N(e_{m-n+1}, ..., e_m) &= \mathrm{NJ}_x f \\ f^*\omega_N(e_{i_1}, ..., e_{i_n}) &= \omega_N(d_xf e_{i_1}, ..., d_xf e_{i_n}) = 0, \quad \text{si algún } i_k > m-n+1, \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde la primera igualdad se debe a la definición del jacobiano normal. Esto implica $f^*\omega_M = (\mathrm{NJ}\, F)\beta$. Tenemos, por tanto, la siguiente igualdad:

$$\omega_{f^{-1}(y)} \wedge f^*\omega_N = \alpha \wedge (\mathrm{NJ}_x\, F)\beta = \mathrm{NJ}_x\, F\omega_M. \tag{2.11}$$

De este modo, la fórmula de la coárea se reduce a probar la siguiente igualdad:

$$\int_{x\in M} h(x)(\alpha \wedge f^*\omega_N)_x = \int_{y\in N}\int_{x\in f^{-1}(y)} h(x)\alpha_x(\omega_N)_y. \tag{2.12}$$

Este último paso se conoce como «Lemma on fiber integration», según el artículo [8], pero su demostración no se detalla. Utilizando las cartas, veremos que esto es consecuencia del teorema de Fubini. Para reducir la complejidad de la notación llamaremos $\beta := \omega_N$. Hacemos cambios de variable por ψ^{-1} y ϕ^{-1}, obteniendo:

$$\begin{aligned} &\int_{y\in N}\int_{x\in f^{-1}(y)} h(x)\alpha_x\beta_y = \\ &\int_{y\in\mathbb{R}^n}\int_{x\in(f^{-1}\circ\psi^{-1})(y)} h(x)\alpha_x(\psi^{-1})^*\beta_y = \\ &\int_{y\in\mathbb{R}^n}\int_{x\in(\phi^{-1}\circ\pi^{-1})(y)} h(x)\alpha_x(\psi^{-1})^*\beta_y = \\ &\int_{y\in\mathbb{R}^n}\int_{x\in\pi^{-1}(y)} (h\circ\phi^{-1})(\phi^{-1})^*\alpha_x(\psi^{-1})^*\beta_y = \\ &\int_{y\in\mathbb{R}^n}\int_{x\in\mathbb{R}^{m-n}} (h\circ\phi^{-1})(\phi^{-1})^*\alpha_{(y,x)}(\psi^{-1})^*\beta_y. \end{aligned} \tag{2.13}$$

En el último paso se ha usado que $\pi^{-1}(y) = \{y\} \times \mathbb{R}^{m-n}$. Por el teorema de Fubini, tenemos que la integral es igual a

$$\begin{aligned}\int_{(y,x)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} (h\circ\phi^{-1})(\phi^{-1})^*\alpha_{(y,x)}(\psi^{-1})^*\beta_y &= \\ \int_{z:=(y,x)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} (h\circ\phi^{-1})(\phi^{-1})^*\alpha_z(\psi^{-1})^*\beta_{\pi(z)} &= \\ \int_{z\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} (h\circ\phi^{-1})(\phi^{-1})^*\alpha_z\pi^*\circ(\psi^{-1})^*\beta_z &= \\ \int_{z\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} (h\circ\phi^{-1})(\phi^{-1})^*\alpha_z(\phi^{-1})^*\circ f^*\beta_z&,\end{aligned} \tag{2.14}$$

donde la última igualdad se debe a que $\pi^*\circ(\psi^{-1})^* = (\psi^{-1}\circ\pi)^* = (f\circ\phi^{-1})^* = (\phi^{-1})^*\circ f^*$. La última expresión es la que se obtiene al realizar un cambio de variables en la integral original mediante ϕ^{-1}. □

Por último demostraremos la fórmula de la coárea en el caso general. Veremos que podemos ir eliminando todas las hipótesis adicionales. Muchos de los argumentos no vienen detallados en [8], como es el caso de ver que es suficiente tomar $h \in \mathscr{C}_c^0(M)$ («the general case follows by a standard approximation argument») y que las variedades pueden ser orientables sin pérdida de generalidad («by use of a partition of unity, the problem is local and we can asume that both M and N are oriented»). Detallaremos dichos argumentos.

Demostración de la fórmula de la coárea. Denotamos de la siguiente forma a las aplicaciones lineales que aparecen en la fórmula:

$$\begin{aligned} I : h &\mapsto \int_{x\in M} h(x)\,\mathrm{NJ}_x f\,d\mu_M, \\ J : h &\mapsto \int_{y\in N}\int_{x\in f^{-1}(y)} h(x)\,d\mu_{f^{-1}(y)}\,d\mu_N. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Escribiremos I_M y $J_{M,N}$ cuando queramos especificar las variedades en las que estamos integrando.

Primero veamos que podemos eliminar los puntos singulares de f. Sea M^* el conjunto de los puntos regulares de M. Dado que $\mathrm{NJ}_x f = 0$ si x es singular:

$$\int_{x\in M} h(x)\,\mathrm{NJ}_x f\,d\mu_M = \int_{x\in M^*} h(x)\,\mathrm{NJ}_x f\,d\mu_{M^*}, \tag{2.16}$$

y por el teorema de Morse-Sard (teorema 2.1), tenemos que:

$$\int_{y\in N}\int_{x\in f^{-1}(y)\cap M} h(x)\,d\mu_{f^{-1}(y)}\,d\mu_N = \int_{y\in N}\int_{x\in f^{-1}(y)\cap M^*} h(x)\,d\mu_{f^{-1}(y)}\,d\mu_N, \tag{2.17}$$

ya que por definición y es un valor regular de f si y sólo si $f^{-1}(y) = f^{-1}(y)\cap M^*$. Así pues, cambiando M por M^*, podemos simplemente considerar que f no tiene puntos singulares.

Es claro que es suficiente demostrar el caso de que f sea sobreyectiva. Se tiene que $J_{M,N} = J_{M,f(M)}$ dado que la integral interior vale 0 si $y \notin f(M)$ y $f(M)$ es una subvariedad abierta de N por la corolario 1.4. De modo que podemos cambiar N por $f(N)$ y suponer que f es sobreyectiva.

Nos queda ver que podemos tomar $h \in \mathscr{C}_c^0(M)$ y que M, N pueden tomarse de modo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] & N \arrow[d, "\psi"] \\ \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd} \tag{2.18}$$

Probaremos ambas cosas a la vez utilizando el corolario 1.18 con un recubrimiento adecuado. Sea $\mathscr{U}$ un recubrimiento por abiertos de M tal que para cada abierto U existan cartas (U, ϕ) y $(f(U), \psi)$ que hagan que el diagrama anterior conmute (existe por el teorema 1.3). Aplicando el corolario 1.18, sólo es necesario demostrar la igualdad $I|_{\mathscr{C}_c^0(U)} = J|_{\mathscr{C}_c^0(U)}$ para todo $U \in \mathscr{U}$. Para poder hacerlo, necesitamos demostrar que $J|_{\mathscr{C}_c^0(U)}$ y $J|_{\mathscr{C}_c^0(U)}$ son $\mathscr{C}_c^0(U)$-funcionales.

Comprobaremos que I y J son $\mathscr{C}_c^0(U)$-funcionales lineales. Sea $K = \operatorname{supp} h \subseteq U$. Es fácil ver que I es acotado:

$$|Ih| \leq \|\mathrm{NJ}_x f\|_{\mathscr{L}^1(K)} \|h\|_\infty \tag{2.19}$$

donde $\|\mathrm{NJ}_x f\|_{\mathscr{L}^1(K)} \leq \|\mathrm{NJ}_x f\|_{\infty,K} \mu(K)$ está acotado por el teorema de Weirestrass y porque $\mu_M(\operatorname{supp}(h))$ es finito por ser μ_M de Radon.

Por el lema anterior (tomando $M = U$, $N = f(U)$), $I|_{\mathscr{C}_c^0(U)} = J|_{\mathscr{C}_c^0(U)}$, concluyendo la demostración de la fórmula de la coárea. $\square$

3. Aplicaciones

En esta sección se calcularán diversas integrales en variedades a través de la fórmula de la coárea. Antes de comenzar, enunciaremos algunos resultados que nos ayudarán en nuestros cálculos, principalmente para calcular $\mathrm{NJ}f$, que es para lo que habitualmente hemos tenido más problemas en la práctica. Las primeros dos proposiciones provienen de [2, lem. 1.1.10, y prop. 1.1.11]. Son, esencialmente, resultados de álgebra lineal.

Proposición 3.1. *Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable entre variedades de dimensión m y n, respectivamente, con $m \geq n$. Sea $x \in M$ Entonces:*

$$\mathrm{NJ}_x f = \sqrt{\det(d_x f \circ d_x f^{\top})}. \tag{3.1}$$

Podemos escribir la última ecuación con coordenadas, sea $\partial_i = d_x f e_i$ y sea $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$, donde.$e_1, \ldots, e_n$ es una base ortonormal de $T_x M$. Entonces:

$$\mathrm{NJ}_x f = \sqrt{\det g_{ij}}. \tag{3.2}$$

Demostración. Se desprende del siguiente resultado de álgebra lineal, que es evidente a partir de la descomposición en valores singulares. Sea $A : V \to W$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales con producto escalar y sea $H = \ker(A)^{\perp}$, entonces:

$$|\det(A)| = \sqrt{\det(AA^{\top})}. \tag{3.3}$$

Notamos además que el jacobiano normal no es más que el producto de los valores singulares de la diferencial. $\square$

Proposición 3.2 (Regla de la cadena para el jacobiano normal.)**.** *Sean M_1, M_2, M_3 variedades diferenciables con dimensiones $m_1 \geq m_2 \geq m_3$, sea $f : M_1 \to M_2$, $g : M_2 \to M_3$ y $x \in M_1$. Supongamos además que se da uno de los siguientes casos:*

1. *f es una isometría en x.*

2. *$m_2 = m_3$.*

Entonces se cumple la siguiente «regla de la cadena»:

$$\mathrm{NJ}_x(g \circ f) = \mathrm{NJ}_{f(x)}\, g\, \mathrm{NJ}_x f. \tag{3.4}$$

Demostración. Llamamos D_1 a la matriz de $d_x f$ y D_2 a la de $d_{f(x)}g$ en alguna base. Utilizando la regla de la cadena para la diferencial, tenemos que la matriz de $d_x(g \circ f)$ en las mismas bases es $D_2 D_1$. Por la proposición anterior,

$$\begin{aligned} \mathrm{NJ}_x f &= (\det D_1 {D_1}^{\intercal})^{1/2} \\ \mathrm{NJ}_{f(x)}\, g &= \det(D_2 {D_2}^{\intercal})^{1/2} \\ \mathrm{NJ}_x(f \circ g) &= \det(D_2 D_1 (D_2 D_1)^{\intercal})^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Por tanto, tenemos que ver cuando es cierta la siguiente afirmación,

$$\det(D_1 {D_1}^{\intercal}) \det(D_2 {D_2}^{\intercal}) = \det(D_2 D_1 {D_1}^{\intercal} {D_2}^{\intercal}). \tag{3.6}$$

En el caso de que f sea una isometría, D_1 también lo es, luego $D_1 {D_1}^{\intercal}$ es la identidad.

En el caso de que $m_2 = m_3$, D_2 es cuadrada, y entonces

$$\det(D_2 D_1 {D_1}^{\intercal} {D_2}^{\intercal}) = \det(D_2) \det(D_1 {D_1}^{\intercal}) \det({D_2}^{\intercal}) = \det(D_1 {D_1}^{\intercal}) \det(D_2 {D_2}^{\intercal}). \tag{3.7}$$

□

Nota. La regla de la cadena para el jacobiano normal no es cierta en general. Por ejemplo, si tomamos

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, 0) \\ g : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\to x, \end{aligned} \tag{3.8}$$

Podemos ver que $\mathrm{NJ}_0 f = 0$ porque su diferencial no es sobreyectivo, pero la función compuesta es la proyección en la primera componente y $\mathrm{NJ}_0 f \circ g = 1$.

En las aplicaciones trataremos con problemas que presentan varios tipos de simetría. Hemos desarrollado los siguientes resultados que permiten simplificar los cálculos en muchas situaciones. Utilizaremos el lenguaje de las acciones de grupo. Introducimos la siguiente terminología:

Definición 3.1. Sean M, N variedades diferenciables, $f : M \to N$, $\phi : M \to \mathbb{R}$. Sea $G \subseteq \mathrm{DIF}(M)$, $I \subseteq \mathrm{DIF}(M) \times \mathrm{DIF}(N)$ subgrupos.

Decimos que f es *I-invariante* si para todo $(g, h) \in I$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & N \arrow[d, "h"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd} \tag{3.9}$$

Decimos que ϕ es *G-invariante* si $\phi \circ g = \phi$ para todo $g \in G$.

En el caso de producto de grupos, denotaremos π_i a la proyección en la componente i-ésima.

La *órbita* de $x \in M$ por G es el conjunto $\{g(x) \mid g \in G\}$. Puede verse fácilmente que «estar en la misma órbita» es una relación transitiva y el conjunto de órbitas, que se denota M/G forma una partición de G (las órbitas son la clase de equivalencia por dicha relación). Si todos los puntos de M están en la misma órbita, diremos que la acción de G en M es *transitiva*.

Lema 3.3 (Jacobiano normal e isometrías). *Sean M y N variedades riemannianas. Sea $I \subseteq \mathrm{ISO}(M) \times \mathrm{ISO}(N)$ un subgrupo. Sea $f : M \to N$ una función diferenciable e I-invariante. Entonces $\mathrm{NJ}_x f = \mathrm{NJ}_{x'} f$ si x está en la órbita de x' por $\pi_1(I)$*

Demostración. Si x está en la órbita de x' por $\pi_1(I)$, entonces existe $(g, h) \in I$ tal que $x' = g(x)$ y $f = h^{-1} \circ f \circ g$. Dado que g y h^{-1} son isometrías, por la regla de la cadena (proposición 3.2), tenemos

$$\mathrm{NJ}_x f = \mathrm{NJ}_x(h^{-1} \circ f \circ g) = \mathrm{NJ}_{f(g(x))} h^{-1} \, \mathrm{NJ}_{g(x)} f \mathrm{NJ}_x g = \mathrm{NJ}_{x'} f. \tag{3.10}$$

□

Lema 3.4 (Integral en las fibras de variedades simétricas). *Sean M y N variedades riemannianas. Sean $I \subseteq \mathrm{ISO}(M) \times \mathrm{ISO}(N)$ un grupo de isometrías diferenciables. Sea $f : M \to N$ una función diferenciable I-invariante y sea $\phi \in \mathscr{L}^1(M)$ una función $\pi_1(I)$-invariante.*

Entonces, para cualesquiera, $y, y' \in N$ que estén el la misma órbita por $\pi_2(I)$:

$$\int_{f^{-1}(y)} \phi = \int_{f^{-1}(y')} \phi. \tag{3.11}$$

Demostración. Sea $(g, h) \in I$ tal que $h(y) = y'$.

Tenemos que $f^{-1}(y') = f^{-1}(h(y)) = g(f^{-1}(y))$. Dado que g es una isometría, como consecuencia de la fórmula de cambio de variable:

$$\int_{f^{-1}(y')} \phi = \int_{g(f^{-1}(y))} \phi = \int_{f^{-1}(y)} \phi \circ g = \int_{f^{-1}(y)} \phi. \tag{3.12}$$

□

Corolario 3.5 (Volumen de variedades simétricas). *Sean M y N variedades riemannianas. Sean $I \subseteq \mathrm{ISO}(M) \times \mathrm{ISO}(N)$ un grupo de isometrías diferenciables. Sea $f : M \to N$ una función diferenciable I-invariante y sea $\phi \in \mathscr{L}^1(M)$ una función $\pi_1(I)$-invariante. Si además la acción de las dos proyecciones de I son transitivas, entonces, para cualquier, $(x', y') \in M \times N$:*

$$\mathrm{NJ}_{x'} f \int_M \phi = \mu(N) \int_{f^{-1}(y')} \phi. \tag{3.13}$$

Demostración. Inmediato al aplicar la fórmula de la coárea a f y utilizar los dos lemas anteriores. Por el primero,

$$\int_{x \in M} \phi(x) \, \mathrm{NJ}_x f \, d\mu_M = \mathrm{NJ}_{x'} f \int_M \phi, \tag{3.14}$$

y por el segundo,

$$\int_{y \in N} \int_{x \in f^{-1}(y)} \phi(x) d\mu_{f^{-1}(y)} \, d\mu_N = \mu(N) \int_{f^{-1}(y')} \phi. \tag{3.15}$$

□

Lema 3.6 (Subvariedades simétricas)**.** *Sean M y N variedades diferenciables y $a \in N$. Sea $I \subseteq \mathrm{DIF}(M) \times \mathrm{DIF}(N)$ un grupo de difeomorfismos. Sea $f : M \to N$ una función diferenciable e I-invariante.*

Si $d_a f$ tiene rango máximo y $\pi_1(I)$ restringido a $f^{-1}(a)$ es transitivo (para todo $x, x' \in f^{-1}(a)$, existe $g \in \pi_1(I)$ tal que $g(x) = x'$). Entonces $f^{-1}(a)$ es una variedad diferenciable.

Demostración. Haremos un razonamiento similar al lema anterior, aplicando la regla de la cadena. Sean $x, x' \in f^{-1}(a)$, sea $(g, h) \in I$. Entonces:

$$d_x f = d_x(h^{-1} \circ f \circ g) = d_{f(x')} h^{-1} \circ d_{x'} f \circ d_x g \tag{3.16}$$

Dado que g y h son difeomorfismos, sus diferenciales son isomorfismos lineales y, por tanto, $d_x f$ y $d_{x'} f$ tienen el mismo rango. Por el teorema del rango constante (teorema 1.3), $f^{-1}(a)$ es una variedad. □

3.1. Integrales en $\mathbb{S}^n$

Utilizaremos la fórmula de la coárea para calcular ciertas integrales en $\mathbb{S}^n$. Numeraremos las coordenadas de los vectores de $\mathbb{R}^{n+1}$ con índices entre 0 y n.

Lema 3.7 (Integrales en la esfera)**.** *Sea $h \in \mathscr{L}^1(\mathbb{S}^n)$ una función diferenciable que sólo dependa de la última coordenada, es decir, tal que $h(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \bar{h}(x_n)$. Entonces:*

$$\int_{\mathbb{S}^n} h = \sigma_{n-1} \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{n/2-1} \bar{h}(x) dx, \tag{3.17}$$

donde $\sigma_n := \mu(\mathbb{S}^k)$ es el volumen de la esfera como subvariedad de $\mathbb{R}^{k+1}$.

Demostración. Sea $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ la proyección en la componente n-ésima. Usaremos la fórmula de la co-área con esta función. Para ello, tenemos que calcular su jacobiano normal.

Para simplificar los cálculos usaremos el lema 3.3. Sea $G \simeq \mathrm{SO}(n)$ el subgrupo de $\mathrm{SO}(n+1)$ que fija el eje x_n. Tomamos $I = G \times \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\}$. Claramente, f es I-invariante y h es G-invariante.

Podemos ver que $\mathbb{S}^n / G = \{[z] : z \in [0, 1]\}$, donde $[z] = \mathbb{S}^n \cap \{x_n = z\}$, ya que G fija $[z]$ y es transitivo en $[z]$ (es el grupo de rotaciones de $[z]$).

Por el lema 3.3, necesitamos calcular el jacobiano normal solamente en los puntos $p_z = \sqrt{1 - z^2} e_0 + z e_n$, con $z \in (-1, 1)$. Podemos despreciar los polos porque son sólo 2 puntos y tienen medida 0.

Calcularemos ahora el jacobiano normal. Sea $v = (v_0, \ldots, v_n) \in T_{p_z} = \langle p_z \rangle^{\perp} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Entonces

$$d_{p_z} f(v) = v_n. \tag{3.18}$$

Ahora obtenemos espacio horizontal H_z en p_z. Según hemos calculado, $\ker(d_{p_z} f) = \{v \mid v_n = 0\}$. Intentaremos encontrar el complemento ortonormal. El núcleo de f tiene dimensión $n - 1$, por lo que su complemento tiene dimensión 1. Los vectores $\{e_i\}_{i=1}^{n-1} \subseteq$

$T_{p_z}\mathbb{S}^n = \langle p_z \rangle^\perp$ forman una base del núcleo. Sea $q_z = -ze_0 + \sqrt{1-z^2}e_n$. Tenemos que $\langle q_z, p_z \rangle = 0$ (de modo que $q_z \in T_{q_z}\mathbb{R}^n$), y q_z es ortogonal a todos los vectores de la base del núcleo, luego $H_z = \langle q_z \rangle$.

Finalmente, calculamos el jacobiano normal.

$$\mathrm{NJ}_{p_z} f = |\det(\mathrm{NJ}_{p_z} f|_{H_z})| = |\mathrm{NJ}_{p_z} f(q_z)| = \sqrt{1-z^2}. \tag{3.19}$$

Por la fórmula de la coárea:

$$\int_{\mathbb{S}^n} h = \int_{z\in(-1,1)} \left(\int_{x\in f^{-1}(z)} \frac{1}{\mathrm{NJ}_x f} h(x) \right) = \int_{z\in(-1,1)} \bar{h}(z)(1-z^2)^{-\frac{1}{2}} \mu\left(f^{-1}(z)\right). \tag{3.20}$$

A continuación, estudiaremos las fibras de f. Sea $z \in N$. Vemos que

$$f^{-1}(z) = \mathbb{S}^n \cap \{x_n = z\} \simeq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 = 1 - z^2\} = \sqrt{1-z^2}\mathbb{S}^{n-1}, \tag{3.21}$$

es decir, las fibras son las $(n-1)$-esferas de radio $\sqrt{1-z^2}$. Haciendo el cambio de variable por la homotecia de razón $\sqrt{1-z^2}$, vemos que $\mu(f^{-1}(z)) = (1-z^2)^{(n-1)/2}\,\mu(\mathbb{S}^{n-1})$. Introduciendo esto en la ecuación anterior, obtenemos la fórmula buscada. □

Teorema 3.8 (Volumen de la esfera). *Sea $\sigma_n := \mu(\mathbb{S}^n)$ el volumen de la esfera unidad. Entonces:*

$$\sigma_n = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \tag{3.22}$$

Demostración. Aplicamos lema 3.7 a la función constante 1.

$$\frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}} = 2\int_0^1 (1-x^2)^{n/2-1}dx = \int_0^1 t^{1/2-1}(1-t)^{n/2-1}dt = \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}, \tag{3.23}$$

donde se ha usado el cambio de variable $x = \sqrt{t}$, B es la función beta y la integral está tabulada en [4, Ec. 5.12.1]:

$$\mathrm{B}\,(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt = \frac{\Gamma\,(a)\,\Gamma\,(b)}{\Gamma\,(a+b)}. \tag{3.24}$$

Demostramos el teorema por inducción. El caso $n = 1$, la longitud de la circunferencia unidad es $\sigma_1 = 2\pi$. Suponemos que la fórmula es cierta para σ_{n-1}.

$$\sigma_n = \sigma_{n-1}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}. \tag{3.25}$$

□

Hemos representado esta función en figura 3.1.

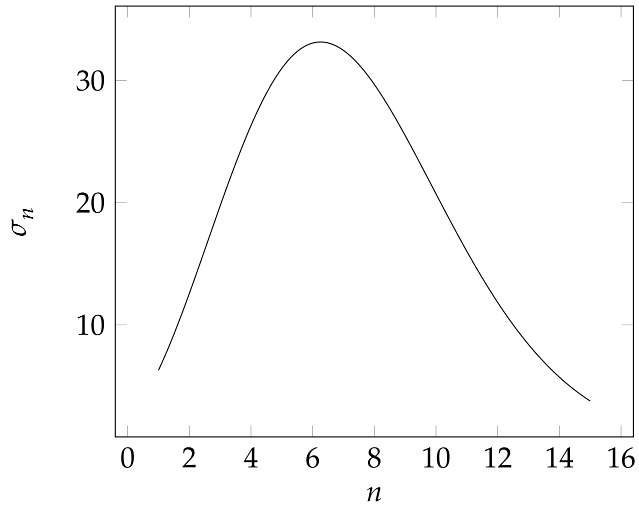

Figura 3.1.: Volumen de la esfera n-dimensional. Representamos la continuación analítica de la función. Como vemos, esta función tiene un máximo en $n = 7$ y luego tiende a 0 como $e^{-n\log(n)+O(n)}$.

Teorema 3.9 (Valor esperado de potencias del producto escalar en $\mathbb{S}^n$).

$$\mathop{\mathbb{E}}_{x,y\in\mathbb{S}^n}[|\langle x,y\rangle|^p] = \frac{\mathrm{B}\left(\frac{p+1}{2},\frac{n}{2}\right)}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)}. \tag{3.26}$$

Demostración. Vamos a calcular ahora el valor esperado de las potencias del producto escalar entre dos vectores unitarios. Usando la simetría de la esfera y el teorema de Fubini, podemos simplificar la integral.

$$\mathop{\mathbb{E}}_{x,y\in\mathbb{S}^n}[|\langle x,y\rangle|^p] = \frac{1}{\sigma_n^2}\int_{(x,y)\in\mathbb{S}^n\times\mathbb{S}^n}|\langle x,y\rangle|^p dxdy = \frac{1}{\sigma_n^2}\int_{y\in\mathbb{S}^n}\left(\int_{x\in\mathbb{S}^n}|\langle x,y\rangle|^p dx\right)dy \tag{3.27}$$

Nos fijamos en la integral interior. Sea $R \in \mathrm{SO}(n)$ una rotación tal que $Ry = e_n$. Haciendo el cambio de variable $z = Rx$:

$$\int_{x\in\mathbb{S}^n}|\langle x,y\rangle|^p dx = \int_{z\in\mathbb{S}^n}|\langle R^\intercal z,y\rangle|^p dx = \int_{z\in\mathbb{S}^n}|\langle z,Ry\rangle|^p dx = \int_{z\in\mathbb{S}^n}|\langle z,e_n\rangle|^p dx \tag{3.28}$$

De modo que $\mathbb{E}_{x,y\in\mathbb{S}^n}[|\langle x,y\rangle|^p] = \mathbb{E}_{x,y\in\mathbb{S}^n}[|x_n|^p]$. Utilizamos el lema 3.7 y el cambio $x =$

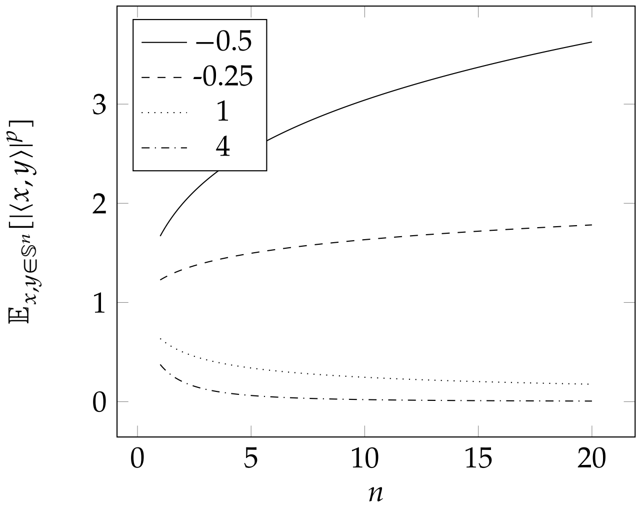

Figura 3.2.: Promedio del producto escalar de dos vectores en $\mathbb{S}^n$ elevado a una potencia p. Se aprecia el comportamiento asintótico de la función $\mathbb{E}_{x,y\in\mathbb{S}^n}[|\langle x,y\rangle|^p] \sim n^{-p/2}$ cuando $n \to \infty$. El valor promedio del producto escalar entre dos vectores tiende a 0 en dimensiones grandes. Intuitivamente, dos vectores escogidos aleatoriamente de forma uniforme en una esfera de gran dimensión serán casi ortogonales.

$\sqrt{t}$ para la siguiente cadena de igualdades,

$$\begin{aligned} \mathop{\mathbb{E}}_{x,y\in\mathbb{S}^n}[|\langle x,y\rangle|^p] = \mathop{\mathbb{E}}_{x,y\in\mathbb{S}^n}[|x_n|^p] = \frac{1}{\sigma_n}\int_{x\in\mathbb{S}^n}|x_n|^p dx = \\ 2\frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}\int_0^1 |x|^p(1-x^2)^{n/2-1} = \\ \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}\int_0^1 t^{\frac{p-1}{2}}(1-t)^{n/2-1}dt = \\ \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}\mathrm{B}\left(\frac{p+1}{2},\frac{n}{2}\right) = \frac{\mathrm{B}\left(\frac{p+1}{2},\frac{n}{2}\right)}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

□

Esta integral converge si $\mathrm{Re}(p) > -1$. Está representada para varios valores de p en figura 3.2.

Teorema 3.10 (Potencial promedio)**.**

$$\mathop{\mathbb{E}}_{x,y\in\mathbb{S}^n}[\|x-y\|^p] = 2^{p+n-1}\frac{\mathrm{B}\left(\frac{p+n}{2},\frac{n}{2}\right)}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)}. \tag{3.30}$$

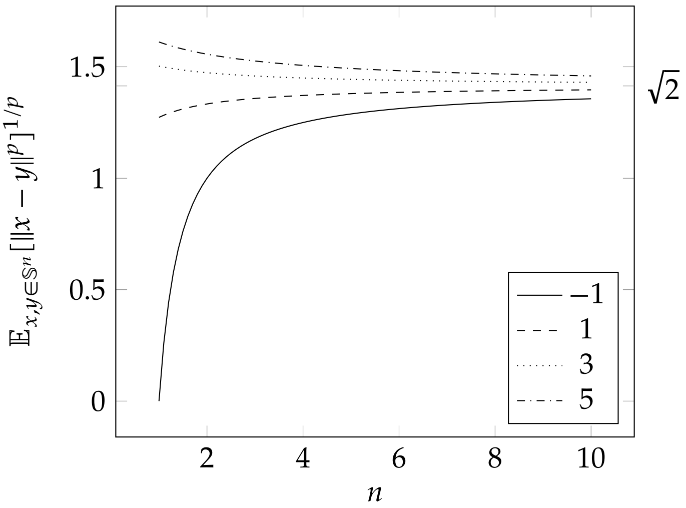

Figura 3.3.: Raíz p-ésima del promedio de las distancias de dos vectores en $\mathbb{S}^n$ elevado a una potencia p, representada para varios valores de p. Esta función tiende a $\sqrt{2}$ cuando $n \to \infty$ con p constante. La interpretación es igual que en el caso anterior: los vectores son aproximadamente ortogonales y su distancia tiende a $\sqrt{2}$.

Demostración. De modo análogo al caso anterior, es posible argumentar usando la simetría de la esfera que la distancia media entre dos vectores unitarios es igual a la distancia media de un vector a otro dado, como e_n. Aplicamos el lema 3.7, teniendo en cuenta que

$$\|x - e_n\|^2 = \|x\|^2 + \|e_n\|^2 - 2\langle x, e_n\rangle = 2 - 2x_n, \tag{3.31}$$

tenemos:

$$\begin{aligned}\mathop{\mathbb{E}}_{x,y\in\mathbb{S}^n}[\|x-y\|^p] = \mathop{\mathbb{E}}_{x\in\mathbb{S}^n}[\|x-e_n\|^p] = \frac{2^{p/2}}{\sigma_n}\int_{x\in\mathbb{S}^n}(1-x_n)^{p/2}dx = \\ 2^{p/2}\frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}\int_{-1}^{1}(1-x)^{p/2}(1-x^2)^{n/2-1}dx = \\ 2^{p/2}\frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}\int_{-1}^{1}(1-x)^{\frac{p+n}{2}-1}(1+x)^{n/2-1}dx = \\ 2^{p+n-1}\frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}\int_{0}^{1}t^{\frac{p+n}{2}-1}(1-t)^{n/2-1}dt = \\ 2^{p+n-1}\frac{\mathrm{B}\left(\frac{p+n}{2},\frac{n}{2}\right)}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)},\end{aligned} \tag{3.32}$$

donde se ha hecho el cambio $1 - x = 2t$. ☐

La integral converge si $\mathrm{Re}(p) > -n$. La función está representada en figura 3.3.

3.2. Variedades de Stiefel

La variedad de Stiefel $V_k(\mathbb{R}^n)$ (con $k \leq n$ enteros) es el conjunto de k-tuplas de vectores unitarios ortonormales en $\mathbb{R}^n$, con la estructura de subvariedad de $\mathbb{R}^{n\times k}$. Equivalentemente, podemos considerar que es el subconjunto de matrices reales $M \in \mathscr{M}_n(k)(\mathbb{R})$ tal que $M^{\intercal}M = \mathbb{I}_k$, donde $\mathbb{I}_k \in \mathscr{M}_k(\mathbb{R})$ es la matriz identidad.

Sean $M, N \in \mathscr{M}_n(k)(\mathbb{R})$. Denotaremos $\|M\|_F$ y $\langle M, N\rangle_F$ al producto y norma de Frobenius, esto es el producto y la norma estándar al considerar las matrices como vectores en $\mathbb{R}^{nk}$. El conjunto de matrices simétricas y antisimétricas tendrán la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}_k(\mathbb{R}) &:= \{M \in \mathscr{M}_k(\mathbb{R}) \mid M^{\intercal} = M\}, \\ \mathrm{Asym}_k(\mathbb{R}) &:= \{M \in \mathscr{M}_k(\mathbb{R}) \mid M^{\intercal} = -M\}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Proposición 3.11 (Variedades de Stiefel)**.** *$V_k(\mathbb{R}^n)$ es una variedad diferenciable. Además $T_{\mathbb{I}}V_k(\mathbb{R}^n) \simeq \mathrm{Asym}_k(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{M}_{n-k,k}(\mathbb{R})$, y, por tanto, tiene dimensión $k(k-1)/2 + (n-k)k$.*

Demostración. Primero demostraremos que $V_k(\mathbb{R}^n)$ es una variedad usando el lema 3.6. Consideramos la aplicación $\phi : \mathscr{M}_{n,k}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}_k\mathbb{R}$ tal que $M \mapsto M^{\intercal}M$, de modo que $V_k(\mathbb{R}^n) = \phi^{-1}(\mathbb{I}_k)$.

Veamos que si tomamos $G = \{g_U : M \to UM \mid U \in \mathrm{O}(n)\}$, y $I = G \times \{\mathrm{Id}_{\mathrm{Sym}_k\mathbb{R}}\}$, estamos en las condiciones del lema.

Se comprueba inmediatamente que g_U es un difeomorfismo. Además, es isometría (conserva la norma de Frobenius de las matrices por conservar la norma de cada columna). También se cumple que

$$(\phi \circ g_U)(M) = (UM)^{\intercal}UM = M^{\intercal}M = \phi(M), \tag{3.34}$$

de modo que ϕ es I-invariante.

Además $G = \pi_1(I)$ es transitivo en $V_k(\mathbb{R}^n)$, ya que si $O \in V_k(\mathbb{R}^n)$, tomamos $O' \in \mathrm{O}(n)$ completando las columnas de O para formar una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ y tenemos que $O = g_{O'}(\mathbb{I}_{n\times k})$. Por ultimo veremos que la diferencial es sobreyectiva (de este modo podremos aplicar el lema) y calcularemos el espacio tangente.

Por el teorema del rango constante, $T_OV_k(\mathbb{R}^n) = \ker d_O\phi$. Calcularemos la derivadas direccionales de ϕ en $\mathbb{I}_{n\times k} \in V_k(\mathbb{R}^n)$, que es la matriz identidad de dimensión k completada con ceros.

Sea $M \in \mathscr{M}_{n,k}(\mathbb{R})$. Denotaremos $M = M' \oplus M''$, entendiendo que $M \in \mathscr{M}_k(\mathbb{R})$ es la submatriz formada por las primeras k filas y $M'' \in \mathscr{M}_{n-k,k}(\mathbb{R})$, las filas restantes.

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{I}_{n\times k}}\phi(M) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbb{I}_{n\times k} + hM) - f(\mathbb{I}_{n\times k})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(\mathbb{I}_{n\times k} + hM)^{\intercal}(\mathbb{I}_{n\times k} + hM) - \mathbb{I}_k}{h} \\ &= \mathbb{I}_{k\times n}M + (\mathbb{I}_{k\times n}M)^{\intercal} = M' + M'^{\intercal} \end{aligned} \tag{3.35}$$

Es claro que el diferencial es sobreyectivo (basta con tomar las imágenes de las $k(k+1)/2$ matrices que tienen un 1 en el triángulo superior). También tenemos que

$M \in \ker d_{\mathbb{I}_{n\times k}}\phi(M)$ si y sólo sí M' es antisimétrica. El espacio de matrices antisimétricas M' tiene dimensión $k(k-1)/2$, mientras no hay restricción para la submatriz $M'' \in \mathscr{M}_{n-k}(k)$, por lo que la dimensión del espacio tangente es $k(k-1)/2 + (n-k)k$.
□

Teorema 3.12 (Volumen de $V_k(\mathbb{R}^n)$)**.** *Denotando por σn el volumen de la n-esfera unidad, tenemos:*

$$\mu(V_k(\mathbb{R}^n)) = \prod_{i=1}^{k}(2^{\frac{i-1}{2}}\sigma_{n-i}) = 2^{\frac{k(k-1)}{4}}\prod_{i=1}^{n}\sigma_{n-i} \tag{3.36}$$

Demostración. Usaremos la siguiente aplicación. Sea

$$\begin{aligned} f : V_k(\mathbb{R}^n) &\twoheadrightarrow V_{k-1}(\mathbb{R}^n) \\ O &\mapsto O\mathbb{I}_{n\times k-1}, \end{aligned} \tag{3.37}$$

es decir, $f(O)$ es la submatriz que contiene todas las columnas salvo la última. En lugar de aplicar directamente la fórmula de la coárea, usaremos el corolario 3.5. Con ello, obtendremos que:

$$\mu(V_k(\mathbb{R}^n))\,\mathrm{NJ}_{\mathbb{I}_{n\times k}}f = \mu(V_{k-1}(\mathbb{R}^n))\,\mu(f^{-1}(\mathbb{I}_{n\times k-1})). \tag{3.38}$$

Consideramos de nuevo los grupos de isometrías

$$\begin{aligned} G &= \{g_U : M \to UM \mid U \in \mathrm{O}(n)\} \subseteq \mathrm{ISO}(V_k(\mathbb{R}^n)), \\ H &= \{h_U : M \to UM \mid U \in \mathrm{O}(n)\} \subseteq \mathrm{ISO}(V_{k-1}(\mathbb{R}^n)). \end{aligned} \tag{3.39}$$

Utilizaremos el grupo $I = \{(g_U, h_U) \mid U \in \mathrm{O}(n)\} \subseteq \mathrm{ISO}(V_k(\mathbb{R}^n))$.

Las proyecciones de I son G y H, que en la demostración de la proposición anterior comprobamos que son transitivas. Se comprueba inmediatamente f es I-invariante. Sea $O \in V_k(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{tikzcd} O \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[d, mapsto, "g_U"] & O\mathbb{I}_{n\times k-1} \arrow[d, mapsto, "h_U"] \\ UO \arrow[r, mapsto, "f"] & UO\mathbb{I}_{n\times k-1}. \end{tikzcd} \tag{3.40}$$

Por tanto cumplimos las hipótesis del corolario 3.5.

Calcularemos el jacobiano normal en $\mathbb{I}_{n\times k}$. Notamos que

$$d_{\mathbb{I}_{n\times k}}f : T_{\mathbb{I}_{n\times k}}V_k(\mathbb{R}^n) \to T_{\mathbb{I}_{n\times(k-1)}}V_{k-1}(\mathbb{R}^n) \tag{3.41}$$

$$M \mapsto M\mathbb{I}_{n\times k-1} \tag{3.42}$$

es la aplicación que elimina la última columna de M. Consideramos la base ortonormal $\mathscr{B}$ de $T_{\mathbb{I}_{n\times k}}V_k(\mathbb{R}^n) \simeq \mathrm{Asym}_k(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ formada por dos clases de matrices $\mathscr{B} = \mathscr{B}' \cup \mathscr{B}''$. $\mathscr{B}' = \{e'^i_j\}_{i<j\leq k}$ con $e'^i_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^i_j - e^j_i)$ y $\mathscr{B}'' = \{e^i_j\}_{j\leq k<i\leq n}$, donde e^i_j es la base

canónica de $\mathscr{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ formada por matrices con un 1 en la posición (i,j) y 0 en el resto. Gráficamente:

$$e'^i_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & k \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ k \\ \hline k+1 \\ \vdots \\ n \end{array} & \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \end{array}, \tag{3.43}$$

$$e^i_j = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & \cdots & j & \cdots & k \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ k \\ \hline k+1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n \end{array} & \left(\begin{array}{ccccc} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Llamamos f^i_j, f'^i_j a los elementos de la base de $T_{\mathbb{I}_{n\times k-1}} V_{k-1}(\mathbb{R}^n)$ correspondiente: $\mathscr{C} = \mathscr{C}' \cup \mathscr{C}''$. Procederemos a calcular la matriz de la diferencial en dichas bases ortonormales (respecto al producto de Frobenius).

- En $\mathscr{B}'$, con $i < j \leq k$, distinguimos dos casos:
  - Si $j < k$, $d_{\mathbb{I}_{n\times k}} f(e'^i_j) = f'^i_j \in \mathscr{C}'$.
  - Si $j = k$, $d_{\mathbb{I}_{n\times k}} f(e'^i_k) = -\frac{1}{\sqrt{2}} f^k_i$. Recordamos que $f^k_i \in \mathscr{C}''$.
- En el caso de $\mathscr{B}''$, con $j \leq k < i$, tenemos que
  - Si $j = k$, $d_{\mathbb{I}_{n\times k}} f(e^i_k) = 0$.
  - Si $j > k$, $d_{\mathbb{I}_{n\times k}} f(e^i_j) = f^i_j \in \mathscr{C}''$.

Por ello, tenemos que $\ker(d_{\mathbb{I}_{n\times k}} f) = \langle \{e^i_k\}_{k<i\leq n} \rangle$ (el resto de elementos tienen imágenes linealmente independientes). Sea $H = \ker(d_f \mathrm{Id}_k)^{\perp} = \langle \mathscr{B}_H \rangle$, con $\mathscr{B}_H = \mathscr{B} \setminus \{e^i_k\}_{k<i\leq n}$.

Observamos que la matriz D de la diferencial restringida al espacio horizontal H en las bases $\mathscr{B}_H$ y $\mathscr{C}$ es diagonal, con $-2^{-1/2}$ en las $k-1$ entradas correspondientes a los e'^i_k, $i < k$ y 1 en el resto. Con ello,

$$\mathrm{NJ}_{\mathbb{I}_{n\times m}} f = |\det(D)| = 2^{-\frac{k-1}{2}} \tag{3.44}$$

El único ingrediente de la ecuación (3.38) que falta es determinar las fibras de f. Vemos que $f^{-1}(\mathbb{I}_{n\times k-1}) \simeq \mathbb{S}^{n-k}$, son las matrices cuyas primeras $k-1$ columnas son $\mathbb{I}_{n\times k-1}$ y la última columna $u \in \mathbb{R}^n$ es cualquier vector unitario ortogonal a las $k-1$ columnas anteriores, de modo que $u^1, ...u^{k-1} = 0$. La proyección sobre las $n-k+1$ últimas coordenadas nos da una isometría con $\mathbb{S}^{n-k}$.

Tenemos ya la siguiente fórmula inductiva:

$$\mu(V_k(\mathbb{R}^n)) = 2^{\frac{k-1}{2}}\,\mu(V_{k-1}(\mathbb{R}^n))\sigma_{n-k}. \tag{3.45}$$

De esta fórmula, sigue la expresión del volumen de la variedad de Stiefl por inducción, teniendo en cuenta que $V_1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{S}^{n-1}$. La segunda expresión se obtiene a través de la primera realizando la siguiente suma,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{i-1}{2} = \frac{k(k-1)}{4}. \tag{3.46}$$

□

3.3. Matrices de norma de Frobenius 1 y determinante 0.

Proposición 3.13 (Matrices con norma de Frobienius 1 y determinante 0)**.** *El conjunto*

$$\Sigma = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det M = 0 \wedge \|M\|_F = 1\} \tag{3.47}$$

es una subvariedad de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de dimensión 2. Además, Σ es también el conjunto de matrices con valores singulares 0 y 1.

Demostración. Sea $M \in \Sigma$ y sean $\sigma_1 \leq \sigma_2$ sus valores singulares. Dado que $\det(M) = 0$, $\sigma_1 = 0$. Como $\|M\|_F = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 1$, entonces $\sigma_2 = 1$.

Veamos que es una variedad diferenciable utilizando el teorema del rango constante. Consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} \phi : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R}^2 \\ M &\mapsto (\|M\|_F{}^2, \det(M)) \end{aligned} \tag{3.48}$$

Entonces $\phi^{-1}(1,0) = \Sigma$. Veamos que $d_M\phi$ es sobreyectivo para $M \in \Sigma$.

$$\phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2, ad-bc) \tag{3.49}$$

Sea e_i la base canónica con $i \in \{1,2,3,4\}$, por filas (es decir, e_2 tiene 1 en la posición $(1,2)$). Comprobamos que el rango del diferencial del determinante es siempre 2. Llamamos $\partial_i = d_M\phi(e_i)$. Sea $M \in \Sigma$. Como $\det(M) = 0$, podemos escribir

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & t\alpha \\ \beta & t\beta, \end{pmatrix} \tag{3.50}$$

suponiendo que la primera columna sea no nula. No perdemos generalidad al no comprobar este caso, ya que es equivalente al $t = 0$ cambiando el orden de las columnas (ϕ es invariante ante esta transformación, salvo por el signo).

Con esta notación tenemos:

$$\begin{aligned} \partial_1 &= (2\alpha, t\beta), \\ \partial_2 &= (2t\alpha, -\beta), \\ \partial_3 &= (2\beta, -t\alpha), \\ \partial_4 &= (2t\beta, \alpha), \\ \det(\partial_1, \partial_2) &= -2\alpha\beta - 2t^2\alpha\beta, \\ \det(\partial_2, \partial_3) &= -2t^2\alpha^2 + 2\beta^2. \end{aligned} \tag{3.51}$$

El primer determinante tan solo se anula si $\alpha = 0$ ó $\beta = 0$. Sin pérdida de generalidad suponemos $\alpha = 0$ (de nuevo, podríamos intercambiar el orden de las filas). Entonces $\beta \neq 0$, para que $\|M\|_F = 1$, por lo que el segundo determinante no se anula. Hemos probado así que el rango de $d\phi$ es 2. □

Teorema 3.14 (Volumen de Σ)**.**

$$\mu(\Sigma) = 2\pi^2. \tag{3.52}$$

Demostración. Utilizando la descomposición de valores singulares $\exists U, V \in \mathrm{O}(2)$ tal que $S = UJV^{\intercal}$ con $J = \mathrm{diag}(1, 0)$, para cualquier $S \in \Sigma$. Por ello, es natural considerar esta aplicación:

$$\begin{aligned} f : \mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(2) &\twoheadrightarrow \Sigma \\ (U, V) &\mapsto UJV^{\intercal}. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Comprobemos que podemos aplicar el corolario 3.5. Sean $U, V \in \mathrm{O}(2)$ Consideramos las siguientes isometrías:

$$\begin{aligned} g_{(U,V)} : \mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(2) &\to \mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(2) \\ (X, Y) &\to (UX, YV), \end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned} h_{(U,V)} : \Sigma &\to \Sigma \\ S &\to USV^{\intercal}. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Consideramos el grupo $I = \{(g_{(U,V)}, h_{(U,V)}) \mid (U, V) \in \mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(2)\}$. Veamos que se cumplen las hipótesis del corolario 3.5.

- $\pi_1(I)$ es transitivo. Para cualquier $(U, V) \in \mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(2)$, $(U, V) = g_{(U,V)}(\mathbb{I}, \mathbb{I})$.
- $\pi_2(I)$ es transitivo por el teorema de descomposición en valores singulares que explicamos anteriormente.

- f es I-invariante como mostramos en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(X,Y) \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[d, mapsto, "g_{(U,V)}"] & XJY^{\intercal} \arrow[d, mapsto, "h_{(U,V)}"] \\
(UX,VY) \arrow[r, mapsto, "f"] & UXJ(VY)^{\intercal}.
\end{tikzcd} \tag{3.56}$$

Aplicando el *corolario* 3.5, obtenemos:

$$\mu(\Sigma) = \mathrm{NJ}_{(\mathbb{I},\mathbb{I})} f (\mu(\mathrm{O}(2)))^2 / \mu(f^{-1}(J)). \tag{3.57}$$

Comenzaremos con $\mu\,(\mathrm{O}(2))$. Recordamos que $\mathrm{O}(2) = V_2(\mathbb{R}^2)$. Como calculamos en el teorema 3.12,

$$\mu(\mathrm{O}(2)) = 2 \times 2^{1+\frac{1}{2}}\pi = 2^{5/2}\pi. \tag{3.58}$$

A continuación, calcularemos $\mu(f^{-1}(J))$. Sea $(U,V) \in \mu(f^{-1}(J))$. Denotamos u^i_j, v^i_j a las componentes de las matrices.

$$UJV^{\intercal} = \begin{pmatrix} u^1_1 v^1_1 & u^1_1 v^2_1 \\ u^2_1 v^1_1 & u^2_1 v^2_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.59}$$

Esto implica que los vectores columna $u_1 = v_1 = (\pm 1, 0)$. Una vez elegido u_1 y v_1 hay 2 opciones para u_2 y 2 para v_2: $(0, \pm 1)$, ya que tienen que ser unitarios y ortogonales a u_1, v_1. Por ello, $\mu(f^{-1}(J)) = \#(f^{-1}(J)) = 2^3 = 8$.

Por último, calcularemos el jacobiano normal. Para ello, hallaremos diferencial de f. Sea $T_{(U,V)}\,\mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(2) \simeq T_U\,\mathrm{O}(2) \oplus T_V\,\mathrm{O}(2)$. Como demostramos en el apartado de las variedades de Stiefel, el espacio tangente de la variedad de matrices ortogonales son las matrices antisimétricas. Por tanto una base de $T_{(U,V)}\,\mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(2)$ es $\{(M,0),(0,M)\}$, con

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculando la diferencial obtenemos:

$$\begin{aligned}
\partial_1 &= d_{(\mathbb{I},\mathbb{I})}\phi(M,0) = MJ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
\partial_2 &= d_{(\mathbb{I},\mathbb{I})}\phi(0,M) = JM^{\intercal} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

A partir de esto, podemos calcular la métrica:

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle_F = \begin{cases} \frac{1}{2}, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{3.61}$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{NJ}_{(\mathbb{I},\mathbb{I})} f = \sqrt{\det g_{ij}} = \frac{1}{2}. \tag{3.62}$$

Introduciendo todos los cálculos en ecuación (3.57), obtenemos:

$$\mu(\Sigma) = \frac{1}{2}(2^{5/2}\pi)^2/8 = 2\pi^2. \tag{3.63}$$

□

A. La fórmula de la coárea de Federer

En esta sección presentamos la fórmula de la coárea en el contexto original del artículo de Federer [5]. En dicha fórmula, no se integra sobre variedades diferenciables, si no sobre subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. El teorema del embebimiento de Nash [13] nos garantiza que para toda variedad riemanniana M de dimensión n existe un embebimiento isométrico $\iota : M \to \mathbb{R}^N$ con N suficientemente grande (según el artículo original, es suficiente $N \geq n(n+1)(3n+11)/2$), por tanto trabajar en subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ es más general, en este sentido, que trabajar con variedades riemannianas. En esta discusión utilizaremos el libro [6] y el más elemental [11].

Para nuestros propósitos, la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ (que denotaremos μ^n en este capítulo) no es suficiente, ya que solo permite trabajar con con objetos n-dimensionales, lo cual excluye muchos de los conjuntos más elementales. Necesitamos una medida que permita asignar un volumen a objetos k-dimensionales, con $0 \leq k \leq n$. Esto es posible hacerlo incluso en el caso en que k no sea un entero. Una posibilidad es usar la medida de Hausdorff $\mathscr{H}^k$ que definimos a continuación. Para obtener más información y encontrar demostraciones de los resultados que enunciaremos a continuación, puede leerse [11, cap. 2].

Debido a que conceptualmente es más sencillo, supondremos que $n = 3$ y $A \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie. Para aproximar la superficie de A, podríamos cubrir A eficientemente con conjuntos S_i. Si dichos conjuntos son bolas suficientemente pequeñas, podríamos aproximar la superficie de $A \cap S_i$ por $\alpha_2 r_i^2$, donde $\alpha_i =$ es el volumen de la bola n-dimensional de radio 1 y r_i es el radio de S_i. Generalizando este razonamiento, consideraremos conjuntos $S_j \subseteq \mathbb{R}^n$ y recordamos que el diámetro de un conjunto se define de la siguiente manera:

$$\operatorname{diam}(A) := \sup_{x,y \in A} \|x - y\|. \tag{A.1}$$

Entonces,

$$\mathscr{H}^k(A) := \lim_{\delta \to 0} \inf_{\substack{A \subseteq \bigcup_j S_j \\ \operatorname{diam} S_j < \delta}} \sum_j \alpha_m \left(\frac{\operatorname{diam}(S_j)}{2} \right)^m. \tag{A.2}$$

Esta fórmula es válida también cuando k no es entero (aunque no será necesario para nosotros) utilizando la continuación analítica de α_k:

$$\alpha_k = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(k/2+1)}. \tag{A.3}$$

Dichos factores no son imprescindibles (son sólo un factor constante), pero se utilizan para coincidir con las medidas habituales. Si $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{H}^k$ coincide con la medida de Lebesgue de las subvariedades riemannianas k-dimensionales, y si $k = n$, $\mu^n = \mathscr{H}^n$.

Esta medida nos permite definir la dimensión de un conjunto de la siguiente manera,

$$\dim(A) = \sup_{k\geq 0}\{k \mid \mathscr{H}^k(A)\}. \tag{A.4}$$

Diremos que A es un fractal si $\dim(A) \notin \mathbb{N}$.

Trabajando en este contexto, también podemos permitirnos trabajar con funciones más generales que las funciones diferenciables. Para que la fórmula de la coárea tenga sentido, no necesitamos que la diferencial de la función esté definida en todo punto ya que podemos despreciar un conjunto de medida 0.

Recordamos que una función $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es Lipschitz si existe $C > 0$ tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|$. Su uso en la fórmula de la coárea queda justificado por el siguiente teorema [6, tma. 3.1.6]

Teorema A.1 (Rademacher)**.** *Si $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es Lipscitz, entonces f es diferenciable en μ^m-casi todo punto.*

Finalmente estamos en disposición de enunciar la fórmula de la coárea original (ver [6, tma. 3.2.12] ó [5, tma. 3.1]),

Teorema A.2 (Fórmula de la coárea)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz y sea $h \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces,*

$$\int_{x\in\mathbb{R}^m} h(x)\,\mathrm{NJ}_x f\,d\,\mu^m = \int_{y\in\mathbb{R}^n}\int_{x\in f^{-1}(y)} h(x) d\mathscr{H}^{m-n} d\,\mu^n\,. \tag{A.5}$$

Donde las integrales anteriores están bien definidas (salvo la integral interior, que puede no estarlo en un conjunto de medida nula).

B. Notación

Sean X e Y espacios topológicos, V un espacio vectorial de dimensión m, $f : X \to Y$ y sean M y N variedades de dimensión m y n, respectivamente. Sea $x \in M$.

A continuación presentamos una lista no exhaustiva de la notación que se utiliza habitualmente en el trabajo:

$\subseteq$ Contenido de conjuntos.

$\subset$ Contenido estricto de conjuntos.

$\#(X)$ Cardinal de un conjunto.

$\mathrm{Cl}(A)$ Clausura topológica del conjunto $A \subseteq X$.

$\mathrm{supp} f$ $:= \mathrm{Cl}(f^{-1}(\{0\}))$. Soporte de $f : X \to Y$.

Id_X Aplicación identidad en X.

$\mathscr{C}^p(M, N)$ Funciones de M en N que son p veces diferenciables con continuidad (definición 1.2).

$\mathscr{C}^p_x(M, N)$ Funciones de M en N que son p veces diferenciables con continuidad en un entorno de x (definición 1.2).

$\mathscr{C}^p_c(M, N)$ Funciones p veces diferenciables con continuidad y con soporte compacto (definición 1.2).

$\mathscr{C}^p(K, M)N$ Funciones p veces diferenciables con continuidad y con soporte en $K \subseteq M$. (definición 1.2).

$\mathscr{C}^k_*(M)$ $:= \mathscr{C}^k_*(M, \mathbb{R})$.

$\mathrm{DIF}(M)$ Grupo de difeomorfismos de M.

$\mathrm{ISO}(M)$ Grupo de funciones $\mathscr{C}^\infty(M, M)$ que son isometrías de M (definición 1.14).

$d_x f$ Diferencial de f en x (definición 1.5).

f^* Pullback por f de un campo de tensores ($definicin$ 1.15).

$\Lambda^k(V)$ k-tensores alternadas sobre V (definición 1.10).

$\Omega^k(M)$ k-formas diferenciales sobre M (definición 1.12).

$|\Lambda^m|(V)$ densidades alternadas sobre V (definición 1.22).

$\lvert\Omega^m\rvert(M)$	formas densidad sobre V (definición 1.22).
$\mathscr{L}^k(M)$	Funciones medibles $\phi : M \to (-\infty, \infty)$ tal que $\int_M \lvert\phi\rvert^p < \infty$, (definición 1.18).
$\mathscr{C}_c^0$-funcional	Definición 1.19.
σ_n	$:= \mu(\mathbb{S}_n^n)$ Volumen de la esfera.
$\mathscr{M}_{n,k}(R)$	Matrices $n \times k$ sobre el anillo R.
$\mathscr{M}_n(R)$	$:= \mathscr{M}_{n,n}(R)$.
$\mathbb{I}_k$	Matriz identidad de dimensión k.
$\mathbb{I}_{n\times k}$	Matriz identidad completada con ceros de dimensión $n \times k$.
$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$	Matrices simétricas de dimensión n.
$\mathrm{Asym}_n(\mathbb{R})$	Matrices antisimétricas de dimensión n.
$V_m(\mathbb{R}^n)$	Variedad de Stiefel.
Σ	Matrices de norma de Frobenius 1 y determinante 0.

Bibliografía

[1] Frederick Brickell y Ronald Sydney Clark. *Differentiable manifolds: an introduction*. Van Nostrand, 1970.

[2] Carlos Beltrán Álvarez. «Sobre el Problema 17 de Smale: Teoría de la intersección y geometría integral». Tesis doct. Santander: Universidad de Cantabria, 2006.

[3] Manfredo Perdigão do Carmo. *Riemannian geometry*. Boston: Birkhäuser, 1992.

[4] *NIST Digital Library of Mathematical Functions*. Release 1.0.15 of 2017-06-01. F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller and B. V. Saunders, eds. URL: `http://dlmf.nist.gov/`.

[5] Herbert Federer. «Curvature measures». En: *Transactions of the American Mathematical Society* 93.3 (1 de mar. de 1959), págs. 418-418.

[6] Herbert Federer. *Geometric measure theory*. 1996.

[7] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin y Jacques Lafontaine. *Riemannian Geometry*. Universitext. Springer Berlin Heidelberg, 2004.

[8] Ralph Howard. *The kinematic formula in Riemannian homogeneous spaces*. American Mathematical Society, 1993.

[9] Serge Lang. *Real and Functional Analysis*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1993.

[10] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012.

[11] Frank Morgan. *Geometric measure theory: a beginner's guide*. 3rd ed. Academic Press, 2000.

[12] James R. Munkres. *Topology*. 2nd ed. Prentice Hall, Inc, 2000.

[13] John Nash. «The Imbedding Problem for Riemannian Manifolds». En: *The Annals of Mathematics* 63.1 (ene. de 1956), pág. 20.

[14] Arthur Sard. «The measure of the critical values of differentiable maps». En: *Bulletin of the American Mathematical Society* 48.12 (1 de dic. de 1942), págs. 883-891.

[15] Elias M. Stein y Rami Shakarchi. *Real analysis: measure theory, integration, and Hilbert spaces*. Vol. 3. Princeton lectures in analysis. Princeton University Press, 2005.

[16] Terence Tao. *Epsilon of Room, One*. Vol. 1. American Mathematical Soc., 2010.