



*FACULTAD
DE
CIENCIAS*

**CAOS EN SISTEMAS
DINÁMICOS DISCRETOS**

(Chaos in discrete dynamical systems)

Trabajo de fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autora: María Fátima Fomperosa Briz

Director: Luis Alberto Fernández Fernández

Octubre-2017

Índice general

1. Introducción	5
2. Caos en sistemas dinámicos discretos	10
2.1. Definiciones	10
2.2. Algunos teoremas importantes	11
2.3. Estabilidad	11
2.4. Definición de función caótica	14
2.5. Periodo 3 implica caos	17
3. Estudio de algunos sistemas dinámicos discretos	31
3.1. Ecuación logística	31
3.2. Tent map	36
4. Control del Caos	45
A. Propiedades del sistema de Lorenz	52
B. El teorema de Euler	55
C. Los números diádicos	57
D. Código Matlab para control del caos	58

Resumen.

La teoría del caos es una rama de las matemáticas que estudia sistemas dinámicos con unas características muy especiales. A pesar de que están dados por ecuaciones deterministas su comportamiento no se puede predecir a largo plazo porque cambios muy pequeños en las condiciones iniciales hacen que sus soluciones (inicialmente muy próximas) diverjan al cabo de cierto tiempo, aunque sin salirse nunca de un determinado rango de valores. Su estudio comenzó con el artículo “Deterministic nonperiodic flow”, escrito por E. Lorenz en 1963. A día de hoy continua siendo un campo de investigación abierto, con aplicaciones interesantes a otras ramas de la ciencia.

En este trabajo nos vamos a centrar en sistemas dinámicos discretos que presentan comportamiento caótico. En primer lugar daremos dos definiciones de función caótica: la dada por Li y Yorke en 1975 y posteriormente la formulada por Devaney en 1989. A continuación enunciaremos y demostraremos el famoso teorema “Periodo tres implica caos”, probado por Li y Yorke en 1975. Se trata de un resultado fundamental en el estudio del caos y es de gran utilidad a la hora de determinar si una función presenta comportamiento caótico. Después pasaremos a estudiar dos sistemas caóticos discretos clásicos: la ecuación logística y el “tent map”. Por último veremos que sorprendentemente existen técnicas para controlar ciertos sistemas caóticos, lo cual tiene aplicaciones útiles en otras ramas de la ciencia, y presentaremos uno de ellas mediante un ejemplo.

Palabras clave: función caótica, sistemas dinámicos discretos, sensibilidad de la solución con respecto de las condiciones iniciales, puntos periódicos, estabilidad.

Abstract.

Chaos theory is a branch of mathematics that studies dynamic systems with some very special characteristics. Although they are given by deterministic equations their behavior can not be predicted at long term, because very small changes in the initial conditions make that the solutions (initially very close) diverge after a certain time, although they never leave a certain range of values. His study began with the paper “Deterministic nonperiodic flow” written by E.Lorenz in 1963. Nowadays, it continues to be an open field of research with interesting applications to other branches of science.

In this work we will focus on discrete dynamical systems with chaotic behavior. First we will give two definitions of chaotic function: the one given by Li and Yorke in 1975 and later the one formulated by Devaney in 1989. Next, we will state and demonstrate the famous theorem “Period three implies chaos”, proved by Li and Yorke in 1975. It is a fundamental result in the study of chaos and is very useful in determining whether a function exhibits chaotic behavior. Then we will study two classical discrete chaotic systems: the logistic equation and the tent map. Finally we will see that surprisingly there are techniques to control some chaotic systems, which has useful applications in other branches of science, and we will introduce one example of them.

Key words: chaotic function, discrete dynamical systems, sensibility of the solution with respect to the initial conditions, periodic points, stability.

Capítulo 1

Introducción

El término *caos* siempre ha tenido connotaciones negativas en el lenguaje ordinario. Si buscamos la palabra en el diccionario, vemos que lo define como “desorden o confusión absolutos”. Sin embargo, este uso no tiene nada que ver con su significado en el contexto matemático. Para comprender el concepto de *caos* dentro de las Matemáticas y a qué se dedica la Teoría del Caos, nos remontaremos a sus orígenes (ver [1]).

En el año 1963, Edward Lorenz, meteorólogo del MIT (Massachusetts Institute of Technology), estudiaba un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que trataba de predecir el movimiento de las nubes a partir de un intercambio de calor efectuado entre la biosfera terrestre y el resto de las capas atmosféricas. La computadora con la que contaba Lorenz procesaba datos a una velocidad muy lenta, por lo tanto decidió intentar ahorrar tiempo de computación y para ello introdujo datos previamente calculados, queriendo comprobar los resultados. Sin embargo, los resultados que obtuvo en esta nueva computación diferían completamente de los que ya estaban calculados. Al principio creyó que se trataba de un error, pero al observar más detenidamente se dio cuenta de que al introducir manualmente las condiciones iniciales había omitido cifras decimales. Al iterarse la función con esta pequeña variación inicial, se obtenían unos cambios radicales en las soluciones.

A raíz de este descubrimiento, Lorenz escribió el artículo “Deterministic Non-periodic Flow” para la revista *Journal of the Atmospheric Sciences* (ver [2]). En él sentaba las bases de lo que se conocería posteriormente como “Teoría del Caos”.

Así pues, ya podemos definir la Teoría del Caos como una rama de las matemáticas que se dedica al estudio de sistemas sensibles a pequeños cambios de las condiciones iniciales. Como idea intuitiva, Lorenz acuñó el término “Efecto mariposa”, según el cual el aleteo de una mariposa en Brasil pue-

de provocar un tornado en Tejas. Desde luego, esto no puede entenderse de forma literal, sino que se trata de una forma de ilustrar la idea de que variaciones muy pequeñas en las condiciones de un sistema pueden provocar grandes cambios en los resultados a largo plazo. Por lo tanto, una característica de un sistema caótico es que no se puede predecir su comportamiento a largo plazo. Sin embargo, a lo largo del trabajo veremos que esto no implica un comportamiento al azar, sino que datos que parecen generados de forma aleatoria en realidad vienen dados por un proceso ordenado y determinista. Para ilustrar esto, presentaremos a continuación las ecuaciones diferenciales ordinarias del sistema de Lorenz y una representación gráfica de sus soluciones para determinadas condiciones iniciales.

El sistema de Lorenz

Lo presentaremos como hizo Lorenz en [2]. Se trata de un sistema autónomo no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias dado por:

$$\begin{cases} x'(t) = \sigma(y(t) - x(t)) \\ y'(t) = rx(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ z'(t) = x(t)y(t) - bz(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

donde $\sigma > 0$, $r > 0$, $b > 0$ son parámetros.

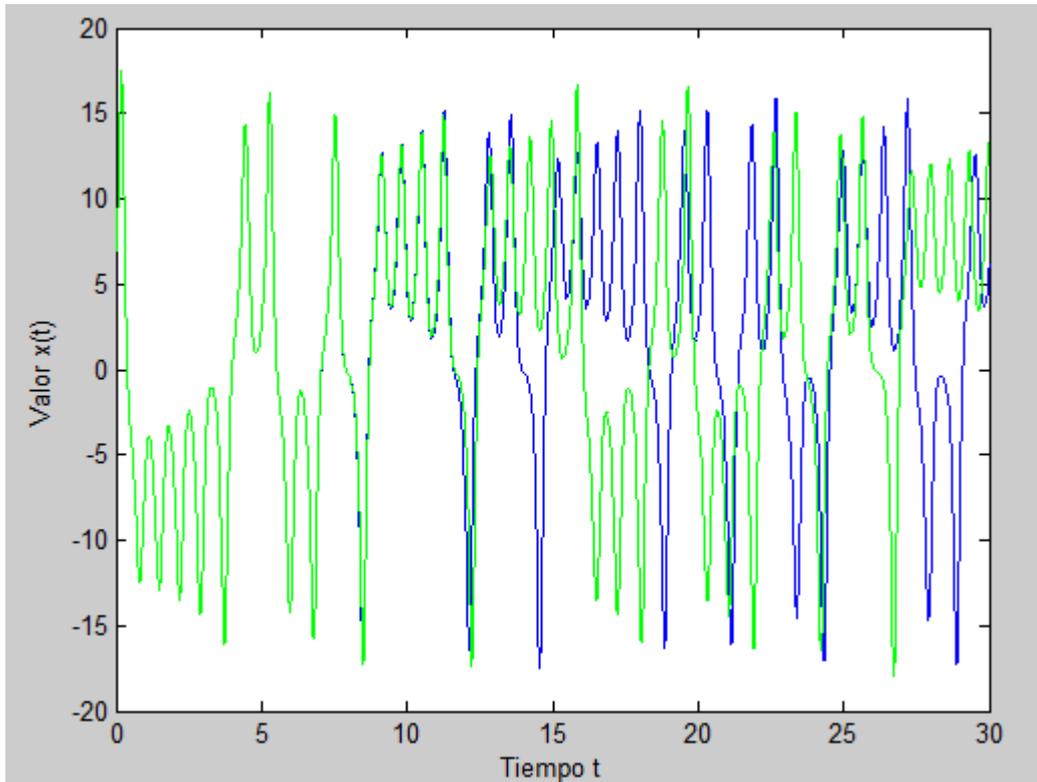
Las variables a las que Lorenz se refiere en su sistema son:

x que es proporcional a la intensidad del movimiento convectivo.

y que es proporcional a la diferencia de temperatura entre las corrientes ascendentes y descendentes.

z que es proporcional a la distorsión de la temperatura vertical respecto del valor de equilibrio.

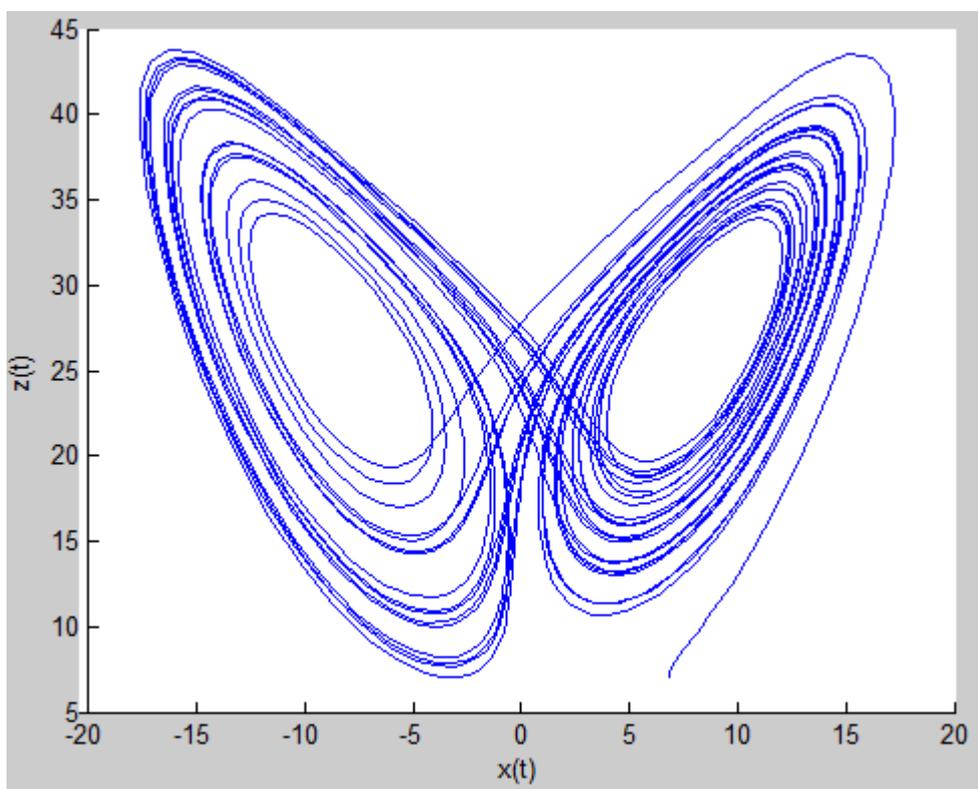
A continuación vamos a presentar las soluciones numéricas del sistema usando para los parámetros los mismos valores con los que Lorenz realizó su estudio: $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$.



En azul la solución de x para condición inicial $(x_0, y_0, z_0) = (7, 7, 7)$. En verde, solución de x para condición inicial $(x_0, y_0, z_0) = (7, 001, 7, 7)$

Como podemos observar en la gráficas, en un principio las soluciones con distintas condiciones iniciales coinciden, pero a medida que el tiempo avanza los resultados comienzan a diferir hasta alcanzar valores opuestos. A esto se debe que las previsiones meteorológicas sean válidas solamente para unos pocos días y no para largos periodos de tiempo.

Si visualizamos la solución como una trayectoria en el espacio tridimensional $(x(t), y(t), z(t))$ obtenemos la siguiente figura.



Atractor de Lorenz representado sobre el plano xz

Si observamos la figura, podemos ver que las trayectorias se mueven en espirales alrededor de dos puntos del espacio, sin salirse nunca de una determinada región. También parece que hay una relación de simetría entre las soluciones. Esta figura recibe el nombre de atractor de Lorenz y presenta una forma parecida a la de una mariposa. De ahí viene el nombre tan conocido de *Efecto mariposa*. Otras propiedades interesantes del sistema se estudian en el Anexo I.

Como acabamos de ver, Lorenz estudió el comportamiento caótico de un sistema continuo de ecuaciones diferenciales ordinarias. En este trabajo lo que vamos a hacer es estudiar el caos para sistemas discretos. De hecho utilizando aproximación por diferencias finitas se puede pasar de un modelo continuo a uno discreto. Vamos a presentar como ejemplo la ecuación logística, cuyo comportamiento estudiaremos más adelante (ver Capítulo 3). Se trata de un modelo continuo que aparece al estudiar el crecimiento de poblaciones y viene dado por la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky(1 - y).$$

Vamos a ver cómo pasar de este modelo continuo al discreto. Para ello utilizaremos el método de Euler con paso $\Delta t = t_{n+1} - t_n$:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = ky_n(1 - y_n) \Rightarrow y_{n+1} = y_n(1 + k\Delta t - k\Delta ty_n).$$

Si definimos $x_n = \frac{k\Delta t}{1 + k\Delta t}y_n$ y $r = 1 + k\Delta t$ nos queda que

$$x_{n+1} = \frac{k\Delta t}{1 + k\Delta t}y_n(1 + k\Delta t - k\Delta ty_n) = rx_n(1 - x_n)$$

y así hemos obtenido la ecuación logística en su forma discreta.

En el presente trabajo vamos a centrarnos en el estudio de sistemas dinámicos discretos que presentan comportamiento caótico. En el capítulo 2 nos dedicaremos a la parte teórica del estudio del caos. En primer lugar presentaremos definiciones y teoremas bien conocidos y que necesitaremos a lo largo del trabajo. También presentaremos el concepto de estabilidad y un método sencillo para comprobar si una solución es estable. Después formularemos dos definiciones de función caótica, ambas muy utilizadas en los estudios sobre el caos. Por último enunciaremos el teorema de Li y Yorke conocido como “Periodo tres implica caos”, y analizaremos su demostración.

En el capítulo 3 pasaremos a estudiar las propiedades de dos sistemas dinámicos clásicos. El primero será la ecuación logística en su forma discreta: estudiaremos su estabilidad y veremos que a partir de un determinado valor de su parámetro es caótica en el sentido de Li y Yorke. A continuación realizaremos el mismo estudio para el “tent map” probaremos de forma explícita que es caótico en el sentido de Devaney.

En el último capítulo presentaremos un campo que puede resultar muy sorprendente y útil: el control del caos. Daremos un método para controlar el comportamiento de sistemas caóticos unidimensionales y veremos un ejemplo que lo ilustre.

Capítulo 2

Caos en sistemas dinámicos discretos

2.1. Definiciones

Para comenzar vamos a dar una serie de definiciones de conceptos que manejaremos durante todo el trabajo.

En todo lo que sigue tomaremos $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto, $x \in I$ y $f : I \rightarrow I$ una función continua.

Denotaremos por $f^n(x)$ la composición de f consigo misma n veces, $\forall n \in \mathbb{N}$, es decir, $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$. Por ejemplo, $f^2(x) = f(f(x))$.

Definición 2.1.1 1. La **órbita** de x , a la que denotaremos como $O(x)$, es la sucesión $\{x_n\}$ con $x_0 = x$, $x_1 = f(x), \dots, x_n = f^n(x)$.

2. x es un **punto fijo** de f si $x = f(x)$.

3. x es un **punto de periodo n** para f si $x = f^n(x)$ y $x \neq f^k(x)$ para $1 \leq k < n$.

4. Se dice que x es un **punto periódico** para f si es un punto de periodo n para algún n .

5. Un **p -ciclo** de f es un conjunto de p elementos $\{a_1, \dots, a_p\}$ tales que

$$f(a_1) = a_2, f(a_2) = a_3, \dots, f(a_p) = a_1.$$

2.2. Algunos teoremas importantes

A continuación vamos a enunciar una serie de teoremas muy conocidos y vistos a lo largo del Grado en Matemáticas, que nos serán de utilidad en este trabajo.

Teorema 2.2.1 (*Teorema del Valor Medio para funciones continuas, [13]*)
 Si f es continua en $[a, b]$ y si $r \in (f(a), f(b))$, existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = r$.

Teorema 2.2.2 (*Teorema del Punto Fijo*)
 Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Sea I un intervalo compacto y supongamos $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $I \subset f(I)$.
 Entonces existe un punto $p \in I$ tal que $f(p) = p$.

Demostración: Sea $I = [a, b]$ y como $[a, b] \subset f([a, b]) \Rightarrow \exists c, d \in [a, b]$ tales que $f(a) = c$ y $f(b) = d$.

Ahora vamos a definir $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ como $g(x) = x - f(x)$. Entonces

$$g(a) = a - f(a) = a - c \leq 0,$$

$$g(b) = b - f(b) = b - d \geq 0.$$

Así que por el Teorema del Valor Medio para funciones continuas, existe $p \in [a, b]$ tal que $g(p) = 0 \Rightarrow p - f(p) = 0 \Rightarrow p = f(p)$. ■

Teorema 2.2.3 (*Teorema del valor medio para derivadas, [14]*)
 Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

2.3. Estabilidad

En esta sección daremos la definición de estabilidad de un punto fijo y veremos un criterio que nos sirve para comprobar si un punto fijo es estable o inestable. Seguiremos lo hecho en [4].

Definición 2.3.1 Sea x_0 un punto fijo de una función f .
 Se dice que x_0 es **estable** si existe un entorno U de x_0 tal que si $y \in U$, $f^n(y) \in U \forall n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = x_0$.
 Por otro lado, diremos que x_0 es **inestable** si para cada y de un entorno U de x_0 con $y \neq x_0$, se tiene que $f^n(y) \notin U$ para algún n .

A continuación veremos una proposición que nos proporciona un método muy simple para determinar la naturaleza de los puntos fijos.

Proposición 2.3.1 *Sea f una función de clase C^1 y sea x_0 un punto fijo de f . Entonces:*

- a) x_0 es estable si $|f'(x_0)| < 1$,
 b) x_0 es inestable si $|f'(x_0)| > 1$.

Demostración:

a) Sea $|f'(x_0)| = v < 1$. Como f' es continua, tenemos:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = I \Rightarrow |f'(x) - f'(x_0)| < \varepsilon$.

Como

$\varepsilon > |f'(x) - f'(x_0)| \geq ||f'(x)| - |f'(x_0)|| = ||f'(x)| - v| \Rightarrow ||f'(x)| - v| < \varepsilon$.

Así que $-\varepsilon < |f'(x)| - v < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon + v < |f'(x)| < \varepsilon + v$ y tomando $K = \varepsilon + v < 1$ nos queda $|f'(x)| < K$.

Por el teorema del valor medio para las derivadas, para cualquier $x \in I$, tenemos

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - x_0}{x - x_0} = f'(c),$$

con $c \in I$.

Así que

$$|f(x) - x_0| = |f'(c)||x - x_0| < K|x - x_0| < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \in I.$$

Ahora, repetimos el mismo argumento cambiando x por $f(x)$:

$$|f^2(x) - x_0| < K|f(x) - x_0| < K^2|x - x_0| < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f^2(x) \in I.$$

Por inducción obtenemos que

$$|f^n(x) - x_0| < K^n|x - x_0| < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f^n(x) \in I \forall n$$

y además, como $K^n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$, nos queda que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(x)| = x_0.$$

b) Sea $|f'(x_0)| = v > 1$ y escogemos K tal que $1 < K < v$.

Como f' es continua, de manera análoga al apartado anterior, $\exists \delta > 0$ tal que si $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] = I \Rightarrow |f'(x)| > K$.

Por el teorema del valor medio para las derivadas, tenemos que para cualquier $x \in I$ existe $c \in I$ tal que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - x_0}{x - x_0} = f'(c).$$

Entonces

$$|f(x) - x_0| = |f'(c)||x - x_0| > K|x - x_0|$$

y por inducción nos queda

$$|f^n(x) - x_0| > K^n|x - x_0|$$

y como $K > 1$, $K^n \rightarrow +\infty$ cuando $n \rightarrow +\infty$. Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - x_0| = +\infty. \blacksquare$$

Por último, debemos resaltar que cuando nos encontramos en el caso crítico $|f'(x_0)| = 1$ este criterio no nos aporta información sobre la estabilidad de x_0 . Vamos a tomar un ejemplo de [9] para ilustrar esto.

Consideramos la función $f(x) = 3x(1 - x)$.

Sus puntos fijos son $x_1 = 0$ y $x_2 = 2/3$. Si aplicamos el criterio anterior nos queda:

$$f'(x) = 3 - 6x \Rightarrow \begin{cases} |f'(0)| = 3 > 1 \Rightarrow \text{inestable,} \\ |f'(2/3)| = 1 \Rightarrow \text{el criterio no aporta información.} \end{cases}$$

En esta situación utilizaremos la definición. Vamos a tomar un punto y que se encuentre en un entorno del punto fijo $x = 2/3$. En este caso consideramos $y = 0,7$. Mediante resolución numérica, después de 100 iteraciones, vemos que los valores de la función se encuentran dentro del intervalo $[0,63, 0,7]$, por lo tanto está claro que $f^n(y)$ no abandona el entorno de x . Así que el punto $x = 2/3$ es estable.

Vamos a considerar ahora la función

$$f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1] \text{ dada por } f(x) = -x.$$

El único punto fijo de esta función es $x = 0$. Además

$$f'(x) = -1 \Rightarrow |f'(0)| = 1,$$

así que no podemos utilizar el criterio para ver si es estable o inestable. Utilizando la definición, sin embargo observamos que si tomamos un y en un

entorno de $x = 0$, los valores de la función se alternan entre y y $-y$, pero no tienden hacia el punto $x = 0$. Por lo tanto en este caso el punto fijo no es estable ni inestable.

Por lo tanto, la conclusión que sacamos de estos dos ejemplos es que cuando nos encontramos en el caso crítico $|f'(x)| = 1$ podemos tener puntos estables o que no sean ni estables ni inestables.

2.4. Definición de función caótica

Podemos encontrar diferentes definiciones para el concepto de función caótica. En este trabajo utilizaremos dos de ellas: la que formularon Li-Yorke en 1975 en su famoso artículo “Periodo tres implica caos” (ver [6]) y la dada por el matemático R. Devaney en 1989 (ver [11]).

Definición 2.4.1 *Sea f una función de un intervalo $I = [a, b]$ en sí mismo. Se dice que f es una **función caótica en el sentido de Li-Yorke** si cumple las siguientes condiciones:*

1. *Los puntos periódicos de f son densos en I .*

2. **Dependencia sensible de las condiciones iniciales**

Para cada $x \in I$, $\exists \varepsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ existen $y \in I$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$|x - y| < \delta \text{ y } |f^n(x) - f^n(y)| > \varepsilon.$$

Definición 2.4.2 *Sea f una función de un intervalo $I = [a, b]$ en sí mismo. Se dice que f es una **función caótica en el sentido de Devaney** si lo es en el sentido de Li-Yorke y además cumple la condición:*

f es topológicamente transitiva, es decir, dados dos subintervalos abiertos cualesquiera U_1, U_2 de I , hay un punto $x_0 \in U_1$ y un $n \in \mathbb{N}$ tales que $f^n(x_0) \in U_2$.

Está claro que toda función caótica en el sentido de Devaney lo es también en el sentido de Li y Yorke, sin embargo el recíproco no es cierto (al final de este Capítulo veremos un contraejemplo).

La transitividad de f garantiza que dados dos subintervalos cualesquiera de I , existe un punto en el primero de forma que, para algún k , uno de los puntos de su órbita se encontrará en el segundo.

La dependencia sensible de las condiciones iniciales nos dice que para cada punto x existe un punto y tan cercano a x como queramos de forma que para algún m , la distancia de $f^m(y)$ a $f^m(x)$ es mayor que ε . En la práctica esto significa que cuando iteramos valores próximos a x podemos obtener resultados que difieran bastante de los que obtendríamos al iterar exactamente x . Esto es lo que comentamos antes, condiciones iniciales muy próximas pueden dar lugar a resultados muy distintos.

Una pregunta que nos podría surgir al ver la definición de función caótica es si la dependencia de las condiciones iniciales no contradice el hecho de que f sea continua. Vamos a ver que no es así.

La dependencia de las condiciones iniciales nos dice que dados $x \in I$ y $\varepsilon > 0$, $\forall \delta > 0$ podemos encontrar $\tilde{y} \in I$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$|x - \tilde{y}| < \delta \text{ y } |f^n(x) - f^n(\tilde{y})| > \varepsilon.$$

Por otro lado tenemos que f es continua, por lo tanto f^n también lo es y entonces $\exists \delta_n > 0$ tal que si

$$y \in I, |x - y| < \delta_n \Rightarrow |f^n(x) - f^n(y)| < \varepsilon.$$

Así que para que no haya contradicción entre ambas definiciones tiene que verificarse $\delta_n < |x - \tilde{y}| < \delta$.

Un hecho que debemos destacar es que si f es topológicamente transitiva y tiene puntos periódicos densos entonces tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales, lo cual vamos a probar siguiendo [12].

Teorema 2.4.1 *Si $f : I \rightarrow I$ es topológicamente transitiva y tiene puntos periódicos densos entonces tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales.*

Demostración:

Por tener puntos periódicos densos podemos asegurar que existe ε_0 tal que $\forall x \in I$ existe un punto periódico $q \in I$ cuya órbita $O(q)$ cumple que $d(x, O(q)) = \min_{y \in O(q)} |x - y| \geq \varepsilon_0/2$. Veámoslo.

Vamos a escoger dos puntos periódicos cualesquiera q_1 y q_2 con órbitas disjuntas $O(q_1)$ y $O(q_2)$ tales que

$$d(O(q_1), O(q_2)) = \min_{y_1 \in O(q_1), y_2 \in O(q_2)} |y_1 - y_2| = \varepsilon_0.$$

Entonces, para $y_1 \in O(q_1)$, $y_2 \in O(q_2)$, por la desigualdad triangular tenemos:

$$|y_1 - y_2| = |y_1 - x + x - y_2| \leq |y_1 - x| + |x - y_2|.$$

Tomando mínimos nos queda

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 = d(O(q_1), O(q_2)) &\leq d(O(q_1), x) + d(x, O(q_2)) \Rightarrow \\ \Rightarrow d(O(q_1), x) &\geq \varepsilon_0/2 \text{ ó } d(O(q_2), x) \geq \varepsilon_0/2.\end{aligned}$$

Vamos a probar que f tiene dependencia sensible de las condiciones para el valor $\varepsilon = \varepsilon_0/8$.

Consideramos ahora $x \in I$ y U_1 un entorno de x . Consideramos también $U = U_1 \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Como los puntos periódicos de f son densos tiene que existir un punto periódico $p \in U$ con periodo n . Además ya hemos visto que existe un punto periódico $q \in I$ cuya órbita $O(q)$ cumple que $d(O(q), x) \geq 4\varepsilon$. Sea

$$V = \bigcap_{i=0}^n f^{-i}(f^i(q) - \varepsilon, f^i(q) + \varepsilon).$$

V es intersección de conjuntos abiertos, por lo tanto es abierto. Además es no vacío ya que $q \in V$. Como f es topológicamente transitiva, existen $y \in U$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $f^k(y) \in V$.

Sea ahora j la parte entera de $\frac{k}{n} + 1 \Rightarrow 1 \leq nj - k \leq n$. Por construcción tenemos que

$$f^{nj}(y) = f^{nj-k}(f^k(y)) \in f^{nj-k}(V) \subseteq (f^{nj-k}(q) - \varepsilon, f^{nj-k}(q) + \varepsilon).$$

Ahora, como $f^{nj}(p) = p$, por la desigualdad triangular tenemos

$$\begin{aligned}|f^{nj}(p) - f^{nj}(y)| &= |p - f^{nj}(y)| = |x - f^{nj-k}(q) + f^{nj-k}(q) - f^{nj}(y) + p - x| \geq \\ &\geq |x - f^{nj-k}(q)| - |f^{nj-k}(q) - f^{nj}(y)| - |p - x|.\end{aligned}$$

Así que como $p \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ y $f^{nj}(y) \in (f^{nj-k}(q) - \varepsilon, f^{nj-k}(q) + \varepsilon)$, nos queda que

$$|f^{nj}(p) - f^{nj}(y)| > 4\varepsilon - \varepsilon - \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Además, usando de nuevo la desigualdad triangular tenemos que

$$\begin{aligned}|f^{nj}(p) - f^{nj}(y)| &= |f^{nj}(p) - f^{nj}(x) + f^{nj}(x) - f^{nj}(y)| \leq \\ &\leq |f^{nj}(p) - f^{nj}(x)| + |f^{nj}(x) - f^{nj}(y)| \Rightarrow \\ \Rightarrow |f^{nj}(p) - f^{nj}(x)| &> \varepsilon \text{ ó } |f^{nj}(x) - f^{nj}(y)| > \varepsilon.\end{aligned}$$

De esta forma queda probado para ambos casos que f tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales. ■

2.5. Periodo 3 implica caos

A continuación vamos a presentar un resultado fundamental que es de utilidad a la hora de determinar cuándo una función presenta comportamiento caótico. Fue enunciado y demostrado por T.Y. Li y J.A. Yorke en el artículo “Period three implies chaos”, [6]. Se trata de un teorema que consta de dos partes: la primera es la más sencilla de demostrar y lo haremos siguiendo [7]. La segunda parte es más compleja y para llevar a cabo la demostración hemos seguido la referencia [8]. Además hemos incluido algunos ejemplos que faciliten la comprensión y hemos completado los pasos que no se habían desarrollado en el artículo inicial.

Teorema 2.5.1 *Sea I un intervalo y sea $f : I \rightarrow I$ una función continua. Supongamos que existe $a \in I$ un punto de periodo 3 para f .*

Entonces:

T1) *Para cada $m = 1, 2, \dots$ hay un punto periódico de f de periodo m en I . Además,*

T2) *Existe un subconjunto no numerable $S \subset I$ (que contiene puntos no periódicos), y satisface las siguientes condiciones:*

a) *Para cada $p, q \in S$ con $p \neq q$ se cumple*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| > 0, \quad (2.1)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| = 0. \quad (2.2)$$

b) *Para cada $p \in S$ y cada punto periódico $q \in I$*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| > 0. \quad (2.3)$$

Este teorema dio lugar a la definición de función caótica en el sentido de Li y Yorke. La parte T2 hace referencia a que f tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales.

Demostración de T1:

Queremos probar que “periodo 3 implica periodo m , $\forall m \in \mathbb{N}$ ”.

Enunciaremos previamente dos lemas que utilizaremos en la demostración.

Lema 2.5.1 *Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Para cada intervalo compacto $I_1 \subset f(I)$ hay un intervalo compacto $Q \subset I$ tal que $f(Q) = I_1$.*

Demostración: Sean $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y $I_1 = [f(p), f(q)] \subset f(I)$ con $p, q \in I$. Sin pérdida de generalidad suponemos $p < q$.

Ahora tomamos

$$r = \max\{x \in [p, q] : f(x) = f(p)\},$$

$$s = \min\{y \in [r, q] : f(y) = f(q)\},$$

y consideramos el intervalo $Q = [r, s] \subset I$.

Entonces, por el Teorema del Valor Medio, se tiene que

$$I_1 = f(Q). \blacksquare$$

Lema 2.5.2 *Sea $f : I \rightarrow I$ continua e I_0 un intervalo compacto tal que $I_0 \subset f(I_0)$. Entonces existen intervalos cerrados $I_n \subset I_{n-1}$ tales que $f(I_n) = I_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

En particular, $f^n(I_n) = I_0$.

Demostración:

Para $n = 1$ se cumple por el lema 2.5.1:

$$I_0 \subset f(I_0) \Rightarrow \exists I_1 \subset I_0 \text{ tal que } f(I_1) = I_0.$$

Para $n = 2$, como $I_1 \subset f(I_1)$ de nuevo por el lema 2.5.1, $\exists I_2 \subset I_1$ tal que $f(I_2) = I_1$ y el caso general se obtiene por inducción. ■

Ahora pasaremos a demostrar **T1**.

Sea $a \in I$ un punto de periodo 3, con $f(a) = b$, $f^2(a) = f(b) = c$ y $f^3(a) = f(c) = a$. Entonces

$$f^3(b) = f^2(c) = f(a) = b \Rightarrow b \text{ es punto de periodo 3 para } f,$$

$$f^3(c) = f^2(a) = f(b) = c \Rightarrow c \text{ es punto de periodo 3 para } f.$$

Sin pérdida de generalidad, supondremos $a < b < c$.

Por el Teorema del Valor Medio para funciones continuas tenemos:

$$\text{para cada } r \in [f(a), f(b)] = [b, c], \exists k \in [a, b] \text{ tal que } f(k) = r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [b, c] \subset f([a, b]).$$

Por otro lado

$$\text{para cada } r \in [f(b), f(c)] = [a, c], \exists k \in [b, c] \text{ tal que } f(k) = r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [a, c] \subset f([b, c]).$$

Ahora, como $[b, c] \subset [a, c] \subset f([b, c])$, por el Teorema del Punto Fijo sabemos que f tiene un punto fijo en $[b, c]$.

Fijamos $m > 1$ y sea $I_0 = [b, c]$. Entonces, por el lema 2.5.2, existen intervalos cerrados $I_n \subset [b, c]$ tales que $f(I_n) = I_{n-1}, \forall n \geq 1$.

Como $I_{m-2} \subset [b, c] \subset f([a, b])$ entonces, por el lema 2.5.1, existe $[a', b'] \subset [a, b]$ tal que $f([a', b']) = I_{m-2}$. Así que

$$[a', b'] \subset [a, b] \subset [a, c] \subset f([b, c]) = f^{m-1}(I_{m-2}) = f^m([a', b'])$$

y por el Teorema del Punto Fijo, f^m tiene un punto fijo $x_0 \in [a', b']$.

Con esto hemos probado que para cada $m > 1$ existe $x_0 \in I$ tal que $x_0 = f^m(x_0)$. Nos queda ver que $f^i(x_0) \neq x_0$ para $i < m$.

Como $f^i([a', b']) = f^{i-1}(I_{m-2}) = I_{m-i-1} \subset [b, c]$ y $[a', b'] \subset [a, b]$ son disjuntos para $i < m$, entonces $f^i(x_0) \neq x_0$ para $i < m$.

De esta manera queda probado que x_0 es un punto de periodo m . ■

Demostración de T2:

En primer lugar daremos una definición y un lema necesarios para la demostración de este apartado.

Definición 2.5.1 Sea $\{s_n\}$ una sucesión de números reales. Sea E el conjunto de números $x \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tal que $s_{n_k} \rightarrow x$ para alguna subsucesión $\{s_{n_k}\}$. Sean $s^* = \sup E$, $s_* = \inf E$. Los números s^* y s_* son los límites superior e inferior de $\{s_n\}$ respectivamente. Usaremos la notación $\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n = s^*$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} s_n = s_*$.

Lema 2.5.3 Sea $f : I \rightarrow I$ continua y sea $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de intervalos compactos con $I_n \subseteq I$, $I_{n+1} \subseteq f(I_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Entonces existe una sucesión de intervalos compactos Q_n tales que $Q_{n+1} \subseteq Q_n \subseteq I_0$ y $f^n(Q_n) = I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Para cada $x \in Q = \bigcap_{n=0}^{\infty} Q_n$ tenemos que $f^n(x) \in f^n(Q_n) = I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Definimos $Q_0 = I_0 \Rightarrow f^0(Q_0) = I_0$.

Supongamos por hipótesis de inducción que tenemos Q_{n-1} definido de forma que $f^{n-1}(Q_{n-1}) = I_{n-1}$. Entonces

$$I_n \subseteq f(I_{n-1}) = f^n(Q_{n-1}).$$

Por el lema 2.5.1 aplicado a $f^n(Q_{n-1})$

$$\exists Q_n \subseteq Q_{n-1} \text{ tal que } f^n(Q_n) = I_n.$$

Para la última parte, supongamos $x \in Q$. Esto implica que $f^0(x) = x \in Q_0 = I_0$. Además, como $x \in Q_{n+1} \Rightarrow f^{n+1}(x) \in f^{n+1}(Q_{n+1}) = I_{n+1}$. Así que $f^n(x) \in I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. ■

Ahora pasaremos a demostrar **T2**.

Denotaremos a partir de aquí $K = [a, b]$ y $L = [b, c]$.

Sea \mathcal{M} el conjunto de sucesiones $M = \{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ de intervalos compactos que cumplen las tres condiciones siguientes

$$M_n = K \text{ ó } M_n \subseteq L, \quad (2.4)$$

$$M_{n+1} \subseteq f(M_n), \quad (2.5)$$

y si $M_n = K$ entonces

$$n \text{ es el cuadrado de un número natural y } M_{n+1}, M_{n+2} \subseteq L. \quad (2.6)$$

Notemos que las condiciones $M_{n+1}, M_{n+2} \subseteq L$ son redundantes porque si n es el cuadrado de un número natural, $n+1$ y $n+2$ no lo van a ser.

Anteriormente hemos probado que

$$[b, c] \subset f([a, b]) \text{ , es decir, } L \subset f(K),$$

$$[a, c] \subset f([b, c]) \Rightarrow [a, b] \subset [a, c] \subset f([b, c]) \text{ , es decir, } K \subset f(L),$$

$$[a, c] \subset f([b, c]) \Rightarrow [b, c] \subset [a, c] \subset f([b, c]) \text{ , es decir, } L \subset f(L).$$

Para $M \in \mathcal{M}$, denotamos como $P(M, n)$ el número de índices i en $\{1, \dots, n\}$ para los cuales $M_i = K$. Para cada $r \in (3/4, 1)$, escogemos $M^r = \{M_n^r\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en \mathcal{M} tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(M^r, n^2)}{n} = r. \quad (2.7)$$

Para que se vea mejor cómo elegir M^r , vamos a dar algunos ejemplos. Distinguiremos dos casos:

1) r racional. Vamos a tomar por ejemplo $r = 4/5$.

Definimos:

$$M_n^{4/5} = \begin{cases} K & \text{si } n \text{ es el cuadrado de un número natural, salvo para los} \\ & \text{cuadrados múltiplos de 5,} \\ L & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así que $M^{4/5}$ es de la forma:

$$\begin{aligned} M^{4/5} = \{ & K, L, L, \\ & K, L, L, L, L, \\ & K, L, L, L, L, L, L, \\ & K, L, L, L, L, L, L, L, L, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&L, L, \\
&K, L, \\
&K, L, L, \dots\}
\end{aligned}$$

Observamos que el término número $5^2 = 25$ de la lista es igual a L por ser el cuadrado de 5. Lo que estamos haciendo es de cada bloque de cinco cuadrados perfectos escoger cuatro iguales a K y el restante igual a L . En general, cualquier sucesión M^r con $r = p/q$ racional se puede definir siguiendo ese proceso: de cada bloque de q cuadrados escogemos p iguales a K y el resto iguales a L .

Notemos que el número de índices $i \in \{1, \dots, n^2\}$ para los cuales i es el cuadrado de un número natural es n . Por tanto,

$$P(M^r, n^2) \leq n, \forall n \Rightarrow \frac{P(M^r, n^2)}{n} \leq 1, \forall n.$$

Así que es por eso que escogemos $r < 1$. Más adelante veremos por qué tomamos $r > 3/4$.

También hay que tener en cuenta que $\lim_{n \rightarrow \infty} P(M^r, n^2)$ debe ser infinito porque si no el límite (2.7) sería cero.

Ahora comprobaremos que se cumple (2.7).

$$\begin{aligned}
\text{Si } 1 \leq n < 5 &\Rightarrow \frac{P(M^{4/5}, n^2)}{n} = n/n. \\
\text{Si } 5 \leq n < 10 &\Rightarrow \frac{P(M^{4/5}, n^2)}{n} = \frac{n-1}{n}. \\
\text{Si } 10 \leq n < 15 &\Rightarrow \frac{P(M^{4/5}, n^2)}{n} = \frac{n-2}{n}. \\
\text{Si } 15 \leq n < 20 &\Rightarrow \frac{P(M^{4/5}, n^2)}{n} = \frac{n-3}{n}.
\end{aligned}$$

$$\text{En general, si } p = 5k \leq n < 5(k+1) \Rightarrow \frac{P(M^r, n^2)}{n} = \frac{n-p/5}{n}.$$

Por lo tanto, cuando $n \rightarrow \infty$ tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(M^{4/5}, n^2)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-n/5}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-n}{5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{5n} = 4/5.$$

2) r irracional. Vamos a tomar por ejemplo $r = 2\pi/7 \simeq 0,897597901\dots$. Tomamos M^r de forma que:

De los 10 primeros cuadrados elegimos 8 iguales a K y el resto iguales a L .

$$\text{Esto es, si } n = 10, \frac{P(M^{2\pi/7}, n^2)}{n} = \frac{8}{10} = 0,8.$$

De los 100 primeros cuadrados, elegimos 89 iguales a K y el resto iguales a L .

Esto es, si $n = 10^2$, $\frac{P(M^{2\pi/7}, n^2)}{n} = \frac{89}{100} = 0,89$.

De los 1000 primeros cuadrados, elegimos 897 iguales a K y el resto iguales a L .

Esto es, si $n = 10^3$, $\frac{P(M^{2\pi/7}, n^2)}{n} = \frac{897}{1000} = 0,897$.

En general, de los $n = 10^k$ primeros cuadrados, elegimos un número igual a las k primeras cifras decimales de $2\pi/7$ que sean iguales a K y el resto iguales a L .

De esta forma nos queda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(M^{2\pi/7}, n^2)}{n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{897597901\dots}^{k \text{ cifras decimales}}}{10^k} = 2\pi/7.$$

Sea ahora $\mathcal{M}_0 = \{M^r : r \in (3/4, 1)\} \subseteq \mathcal{M}$.

Supongamos $r_1, r_2 \in (3/4, 1)$ tales que $r_1 \neq r_2 \Rightarrow M^{r_1} \neq M^{r_2}$ (por construcción). Esto quiere decir que hay tantos posibles M^r como valores de r y como $(3/4, 1)$ es un conjunto no numerable, entonces \mathcal{M}_0 es no numerable.

Para cada $M^r \in \mathcal{M}_0$, por el lema 2.5.3, existe x_r con $f^n(x_r) \in M_n^r, \forall n$.

Sea $S = \{x_r : r \in (3/4, 1)\}$.

Para cada $x_r \in S$ sea $P(x_r, n)$ el número de i 's en $\{1, \dots, n\}$ para los cuales $f^i(x_r) \in K$.

Supongamos por reducción al absurdo que $f^k(x_r) = b$ para algún k . Entonces $f^{k+2}(x_r) = f^2(b) = a \in K$ y $f^{k+2}(x_r) \in M_{2+k}^r$. De aquí obtenemos que $M_{2+k}^r = K$.

Aplicamos $f^{3m+2+k}(x_r) = f^{3m}(a) = a \in K$ y $f^{3m+2+k}(x_r) \in M_{3m+2+k}^r$. De aquí tenemos que $M_{3m+2+k}^r = K, \forall m$. Con esto llegamos a una contradicción ya que no puede ser $M_i^r = K$ para un conjunto periódico de índices (el conjunto de cuadrados perfectos no es periódico). Así que $f^k(x_r) \neq b$ para cualquier $x_r \in S$ y $\forall k \in \mathbb{N}$.

Vamos a ver que como $f^k(x_r) \neq b$, si $r_1 \neq r_2 \Rightarrow x_{r_1} \neq x_{r_2}$.

Como $r_1 \neq r_2 \Rightarrow M^{r_1} \neq M^{r_2}$. Por la condición (2.7) tiene que existir al menos un índice $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$(1) M_{j_0}^{r_1} = K, M_{j_0}^{r_2} \subseteq L \text{ ó } (2) M_{j_0}^{r_1} \subseteq L, M_{j_0}^{r_2} = K.$$

Por ejemplo, si tomamos $r_1 = 4/5, r_2 = 5/6$, tenemos que $M_{25}^{4/5} = L, M_{25}^{5/6} = K$.

Entonces en el caso (1) tenemos $f^{j_0^2}(x_{r_1}) \in M_{j_0}^{r_1} = K = [a, b]$ y $f^{j_0^2}(x_{r_2}) \in$

$M_{j_0^2}^{r_2} \subseteq L = [b, c]$. Por reducción al absurdo, supongamos que $x_{r_1} = x_{r_2}$, entonces tendríamos $f^{j_0^2}(x_{r_1}) = f^{j_0^2}(x_{r_2}) \in K \cap L$, lo cual es una contradicción ya que $f^{j_0^2}(x_{r_1}) \neq b$ y $f^{j_0^2}(x_{r_2}) \neq b$. En el caso (2) se razona de forma análoga.

Por lo tanto, S es no numerable y $P(x_r, n) = P(M^r, n) \forall n$.

Definimos

$$\rho(x_r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(x_r, n^2)}{n} = r, \quad \forall r.$$

Por construcción (ver (2.4)) sabemos que $M_n^r = K$ ó $M_n^r \subseteq L, \forall n$.

Vamos a ver que para $p, q \in S, p \neq q$, existen infinitos n tales que $f^n(p) \in K$ y $f^n(q) \in L$ o viceversa.

Sin pérdida de generalidad, supongamos $\rho(p) > \rho(q)$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(p, n^2)}{n} > \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(q, n^2)}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(p, n^2) - P(q, n^2)}{n} > 0.$$

Como el denominador tiende a infinito, para que el límite no sea cero debe ser $\lim_{n \rightarrow \infty} P(p, n^2) - P(q, n^2) = \infty$.

Como la función P solo aumenta +1 ó 0 por cada unidad que incremente n y la única vez en la que $P(p, n^2)$ aumenta mientras $P(q, n^2)$ permanece igual es cuando $f^{n^2}(p) \in K, f^{n^2}(q) \in L$, debe haber infinitos n tales que $f^{n^2}(p) \in K, f^{n^2}(q) \in L$ para que se cumpla $\lim_{n \rightarrow \infty} P(p, n^2) - P(q, n^2) = \infty$.

Para entender mejor este proceso vamos a verlo con un ejemplo.

Consideramos $M^{4/5}$ (ya sabemos cómo es por el ejemplo anterior) y $M^{5/6}$ que viene dada por

$$M_n^{5/6} = \begin{cases} K \text{ si } n \text{ es el cuadrado de un número natural, salvo para los} \\ \text{cuadrados múltiplos de 6,} \\ L \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Así que $M^{5/6}$ es de la forma:

$$\begin{aligned} M^{5/6} = \{ & K, L, L, \\ & K, L, L, L, L, \\ & K, L, L, L, L, L, L, \\ & K, L, L, L, L, L, L, L, L, \\ & K, L, L, L, L, L, L, L, L, L, \\ & L, \end{aligned}$$

$K, L, L, \dots\}$

Tenemos que $5/6 > 4/5$ y sabemos que $P(x_r, n) = P(M^r, n)$.

Si $n^2 = 1$:

$$P(M^{4/5}, n^2) = 1 \text{ y } P(M^{5/6}, n^2) = 1.$$

Si $n^2 = 4$:

$$P(M^{4/5}, n^2) = 2 \text{ y } P(M^{5/6}, n^2) = 2.$$

Si $n^2 = 9$:

$$P(M^{4/5}, n^2) = 3 \text{ y } P(M^{5/6}, n^2) = 3.$$

Si $n^2 = 16$:

$$P(M^{4/5}, n^2) = 4 \text{ y } P(M^{5/6}, n^2) = 4.$$

Si $n^2 = 25$:

$$P(M^{4/5}, n^2) = 4 \text{ y } P(M^{5/6}, n^2) = 5.$$

Si $n^2 = 36$:

$$P(M^{4/5}, n^2) = 5 \text{ y } P(M^{5/6}, n^2) = 5.$$

Si $n^2 = 49$:

$$P(M^{4/5}, n^2) = 6 \text{ y } P(M^{5/6}, n^2) = 6.$$

Podemos continuar este proceso hasta llegar a $n^2 = 30^2$ que es a la vez múltiplo de 5 y de 6, por lo tanto a partir de ahí volveríamos a empezar el proceso que acabamos de describir. Comenzaríamos de nuevo teniendo $P(M^{4/5}, n^2) = 24$ y $P(M^{5/6}, n^2) = 25$, es decir, comenzaríamos con una diferencia de 1. Al repetir sucesivas veces la diferencia iría aumentando y cuando $n \rightarrow \infty$ nos quedaría $P(M^{5/6}, n^2) - P(M^{4/5}, n^2) \rightarrow \infty$.

Ahora como $f^2(a) = c$, $f^2(b) = a$ y f^2 es continua

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que si } |x - b| < \delta \Rightarrow |f^2(x) - f^2(b)| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 \text{ tal que } f^2(x) - f^2(b) < \frac{b - a}{2} \quad \forall x \in [b - \delta, b] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^2(x) < \frac{b - a}{2} + f^2(b) \Rightarrow f^2(x) < \frac{b - a}{2} + \frac{2a}{2} = \frac{b + a}{2} \quad \forall x \in [b - \delta, b].$$

Si $p \in S$ y $f^{n^2}(p) \in K \Rightarrow$ por (2.6) $f^{n^2+2}(p) \in L$.

Supongamos por reducción al absurdo que $f^{n^2}(p) \in [b - \delta, b] \Rightarrow f^2(f^{n^2}(p)) < \frac{b+a}{2}$ lo cual nos lleva a una contradicción ya que $a < b \Rightarrow \frac{b+a}{2} < b$.

Así que $f^{n^2}(p) \notin [b - \delta, b]$.

Como $f^{n^2}(q) \in L \Rightarrow f^{n^2}(p) < b - \delta < b < f^{n^2}(q)$.

Por lo tanto,

$$|f^{n^2}(p) - f^{n^2}(q)| = f^{n^2}(q) - f^{n^2}(p) > b - (b - \delta) = \delta.$$

Así que $|f^{n^2}(p) - f^{n^2}(q)| > \delta$ para los infinitos casos en los que $f^{n^2}(p) \in K$ y $f^{n^2}(q) \in L$.

Entonces el conjunto $\{|f^k(p) - f^k(q)| : \forall k \in \mathbb{N} \text{ y } f^k(p) \in K, f^k(q) \in L\}$ es infinito y posee al menos una subsucesión donde todos los valores son mayores que δ .

Así que por la definición 2.5.1 tenemos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| > 0.$$

Esto prueba (2.1).

Ahora vamos a probar (2.3), ya que su demostración es muy similar.

Supongamos $p \in S$ y sea $q \in I$ un punto periódico de periodo m . Como hemos visto en la prueba de (2.1), cuando $f^{n^2}(p) \in K \Rightarrow \exists \delta > 0$ tal que $f^{n^2}(p) < b - \delta$.

Ahora, por lo probado en T1, como q es un punto de periodo m se cumple que $f^{n^2}(q) \in L$ si $n^2 \neq m, 2m, 3m, \dots$. Pero como el conjunto de cuadrados perfectos es no periódico, entonces el conjunto de n 's donde $f^{n^2}(p) \in K$ y $f^{n^2}(q) \in L$ es infinito. Por lo tanto, razonando de forma análoga a lo hecho en la prueba de (2.1), tenemos que el conjunto

$$\{|f^k(p) - f^k(q)| : \forall k \in \mathbb{N} \text{ y } f^k(p) \in K, f^k(q) \in L\}$$

es infinito y todos los valores en el conjunto son mayores que δ . Entonces por la definición 2.5.1

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| > 0.$$

Por último vamos a probar (2.2).

En primer lugar tenemos que modificar nuestra definición de M_n^r . Tenemos $f(b) = c$, $f(c) = a < b$. Escogemos el conjunto de intervalos $[b_n, c_n]$, $n = 0, 1, 2, \dots$, de forma que $b = b_0$ y $c = c_0$. Definimos $b_1 = \max\{x \in [b_0, c_0] : f(x) = c_0\}$. Como $f[b_1, c_0] \supseteq [a, c_0] \ni b_0$ entonces por el Teorema del Valor Medio para funciones continuas $\exists \tilde{c}_1 \in [b_1, c_0]$ tal que $f(\tilde{c}_1) = b_0$. Definimos ahora $c_1 = \min\{x \in [b_1, c_0] : f(x) = b_0\}$. Por inducción, podemos escoger b_n, c_n tales que

$$b_{n+1} = \max\{x \in [b_n, c_n] : f(x) = c_n\},$$

$$c_{n+1} = \min\{x \in [b_{n+1}, c_n] : f(x) = b_n\}.$$

Esto implica que $[b, c] = [b_0, c_0] \supseteq [b_1, c_1] \supseteq \dots \supseteq [b_n, c_n] \supseteq \dots$, $f(x) \in [b_n, c_n]$, $\forall x \in (b_{n+1}, c_{n+1})$ y $f(b_{n+1}) = c_n$, $f(c_{n+1}) = b_n$. Como $b_n < c_n$, $\forall n$ y como b_n es creciente entonces existen los límites $b^* = \lim b_n$, $c^* = \lim c_n$.

Vamos a suponer que si $M_k = K$ para $k = n^2$ y $k = (n+1)^2$ entonces

$$M_k = [b_{2n-(2j-1)}, b^*] \text{ para } k = n^2 + (2j-1),$$

$$M_k = [c^*, c_{2n-2j}] \text{ para } k = n^2 + 2j,$$

con $j = 1, \dots, n$. Para los demás valores de k tomaremos $M_k = L$. Esto significa que si $M_k = K$ para $k = n^2$ y $k = (n+1)^2$, entonces para cada valor de k entre n^2 y $(n+1)^2$, M_k se corresponde con los intervalos antes definidos. Vamos a ver si esto cumple (2.5) y (2.6). Como $b_n, b^*, c_n, c^* \in L \Rightarrow [b_n, b^*] \subseteq L$ y $[c^*, c_n] \subseteq L, \forall n \in \mathbb{N}$.

Sea $M_k = K$ para $k = n^2$ y $k = (n+1)^2$. Entonces $M_{n^2+1} = [b_{2n-1}, b^*]$ y $M_{n^2+2} = [c^*, c_{2n-2}]$. Como n^2 y $(n+1)^2$ son ambos cuadrados de enteros, (2.6) se cumple.

Ahora, sabemos que $M_{n^2+2n} = [c^*, c_0]$. Para que se cumpla (2.5) tiene que ser $f(M_k) \supseteq M_{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}$. Vamos a ver que esto se verifica.

Tenemos:

Si $k = n^2$:

$$f(M_{n^2}) = f(K) \supseteq L \supseteq [b_{2n-1}, b^*] = M_{n^2+1}.$$

Si $k = n^2 + (2j - 1)$:

$$f(M_{n^2+2j-1}) = f[b_{2n-(2j-1)}, b^*] \supseteq [f(b^*), f(b_{2n-2j+1})] = [c^*, c_{2n-2j}] = M_{n^2+2j}.$$

Si $k = n^2 + 2j$:

$$f(M_{n^2+2j}) = f[c^*, c_{2n-2j}] \supseteq [f(c_{2n-2j}), f(c^*)] = [b_{2n-2j-1}, b^*] = M_{n^2+2j+1}.$$

Por último, si $k = (n+1)^2 - 1$:

$$f(M_{(n+1)^2-1}) = f(M_{n^2+2n}) = f[c^*, c_0] \supseteq [f(c_0), f(c^*)] = [a, b^*] \supseteq K = M_{(n+1)^2}.$$

Por lo tanto las nuevas condiciones son compatibles con (2.5). Además no afectan al número de $i \in \{1, \dots, n\}$ para el cual $M_i = K$, así que cumplen (2.5), (2.6) y (2.7).

Sean $r, r^* \in (3/4, 1)$ con $r \neq r^*$. Escogemos $M^r, M^{r^*} \in \mathcal{M}$ tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(M^r, n^2)/n = r,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(M^{r^*}, n^2)/n = r^*.$$

A partir de ahora vamos a considerar solamente los índices que son cuadrados perfectos. Sea el conjunto $B = \{B_n\}$ definido de forma que $B_k = 1$ si y solo si $M_{k^2}^r = K$, $B_k = 0$ en otro caso. De la misma forma, sea $B^* = \{B_n^*\}$ definido de forma que $B_k^* = 1$ si y solo si $M_{k^2}^{r^*} = K$, $B_k^* = 0$ en otro caso. Entonces por (2.7) y la definición de M^r tenemos

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\sum_{m=1}^n B_m \right) / n \right),$$

$$r^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\sum_{m=1}^n B_m^* \right) / n \right).$$

Entonces

$$\exists N \text{ tal que } \forall n \geq N, \sum_{m=1}^n B_m > rn \text{ y } \sum_{m=1}^n B_m^* > r^*n.$$

Vamos a probar que existen infinitos n tales que $M_{n^2}^r = M_{n^2}^{r^*} = K$ y $M_{(n+1)^2}^r = M_{(n+1)^2}^{r^*} = K$. Esto es, tenemos que ver que hay infinitos casos en los cuales $B_n = B_n^* = 1$ y $B_{n+1} = B_{n+1}^* = 1$. En primer lugar vamos a presentar un ejemplo que muestre que esto se cumple en el caso racional con $r > 3/4$. Consideramos las sucesiones $M^{4/5}$ y $M^{5/6}$ vistas anteriormente, siendo B la sucesión que corresponde al primero y B^* al segundo. Tenemos:

$$\begin{aligned} B &= \{1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, \\ &1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, \dots\}, \\ B^* &= \{1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, \\ &1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, \dots\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si sumamos nos queda

$$\begin{aligned} B + B^* &= \{2, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 1, \\ &2, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 0, \dots\}. \end{aligned}$$

Hasta $n = 30$, tenemos 12 casos en los que se cumple $B_k = B_k^* = 1$ y $B_{k+1} = B_{k+1}^* = 1$, es decir, hay doce pares de doses seguidos en la sucesión $B + B^*$. A partir de ese índice volvemos a repetir el mismo proceso y de esa forma, cuando k tiende a infinito, nos queda que se cumple para un número infinito de casos.

Vamos a ver ahora que el hecho de que $r > 3/4$ es relevante, ya que si no fuera así no se tiene por qué cumplir. Por ejemplo, consideramos $M^{2/3}$ y $M^{1/3}$, con B la sucesión que corresponde al primero y B^* al segundo. Tenemos:

$$\begin{aligned} B &= \{1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots\}, \\ B^* &= \{1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$B + B^* = \{2, 1, 0, 2, 1, 0, \dots\},$$

y vemos que no existe ningún caso que cumpla $B_k = B_k^* = 1$ y $B_{k+1} = B_{k+1}^* = 1$, es decir, no hay dos pares de doses seguidos en la sucesión $B + B^*$.

Ahora vamos a probarlo para el caso general. Consideraremos (sin pérdida de generalidad) que $N \leq 100$ y tomaremos bloques de 100 índices cuadrados perfectos.

Vamos a tomar la sucesión $B + B^*$ y probaremos que hay infinitos bloques de 100 índices donde hay al menos un par de doses seguidos. Esto es lo mismo que ver que hay infinitos bloques de 100 índices donde podemos encontrar al menos 51 elementos iguales a 2.

Por reducción al absurdo supongamos que solo hay un número finito de bloques que cumplen esa condición. Entonces a partir de un bloque k_0 , se cumplirá que el número de doses que hay en cada bloque es menor o igual que 50. Vamos a considerar el caso más desfavorable en el cual los k_0 primeros bloques de 100 tienen todos sus elementos iguales a 2 y a partir del bloque $k_0 + 1$ hasta el bloque k solamente hay 50 doses en cada uno. Por un lado tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{100k} (B_i + B_i^*) &= \sum_{i=1}^{100k_0} (B_i + B_i^*) + \sum_{i=100k_0+1}^{100k} (B_i + B_i^*) \leq \\ &\leq 200k_0 + (50 \cdot 2 + 50)(k - k_0) = 200k_0 + 150(k - k_0) = 50k_0 + 150k, \end{aligned}$$

y por otro sabemos que

$$100k(r + r^*) < \sum_{i=1}^{100k} (B_i + B_i^*).$$

Por lo tanto nos queda

$$100k(r + r^*) < 50k_0 + 150k \Rightarrow r + r_* < \frac{5k_0}{10k} + 1,5.$$

Si ahora pasamos al límite con $k \rightarrow \infty$ nos queda que

$$r + r^* \leq 1,5,$$

y a la vez

$$r + r^* > 3/4 + 3/4 = 3/2 = 1,5.$$

Por lo tanto hemos llegado una contradicción, para la cual es crucial que $r, r^* > 3/4$.

Así que existen infinitos n tales que $M_k^r = M_k^{r^*} = K$ tanto para $k = n^2$ como para $k = (n + 1)^2$. Sea $x_r \in S$ y $x_{r^*} \in S$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b^*$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c^*$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1$ con $|b_n - b^*| < \varepsilon$, $|c_n - c^*| < \varepsilon \forall n > N_1$.

Entonces, para cualquier $n > N_1$ y $M_k^r = M_k^{r^*} = K$ para ambos $k = n^2$ y $k = (n + 1)^2$, tenemos

$$f^{n^2+1}(x_r), f^{n^2+1}(x_{r^*}) \in M_k^r = [b_{2n-1}, b^*]$$

con $k = n^2 + 1$. Por lo tanto, $|f^{n^2+1}(x_r) - f^{n^2+1}(x_{r^*})| < \varepsilon$. Aplicando la definición 2.5.1 obtenemos

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| = 0. \blacksquare$$

Periodo 5 no implica periodo 3

Vamos a ver un ejemplo de una función que tiene un punto de periodo 5 y no tiene puntos de periodo 3.

Consideramos la función lineal a trozos $f : [1, 5] \rightarrow [1, 5]$ definida como

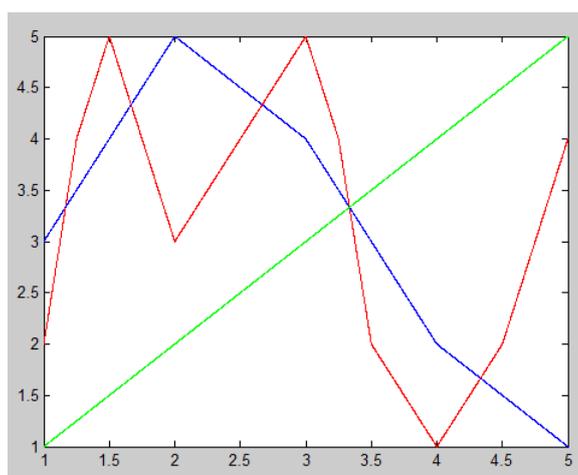
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ -x + 7, & \text{si } 2 \leq x \leq 3, \\ -2x + 10, & \text{si } 3 \leq x \leq 4, \\ -x + 6, & \text{si } 4 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que $x = 1$ es un punto de periodo 5:

$$f(1) = 3, f^2(1) = f(3) = 4, f^3(1) = f(4) = 2,$$

$$f^4(1) = f(2) = 5, f^5(1) = f(5) = 1.$$

Queremos ver que esta función no tiene puntos de periodo tres. Lo primero que vamos a hacer es dibujar las gráficas de f y f^3 y también la recta $y = x$, para ver cuáles son los puntos fijos de estas dos funciones.



En color azul está dibujada la gráfica de f , en color rojo la de f^3 y en verde la recta $y = x$.

Vemos que f^3 solo tiene un punto de intersección con la recta $y = x$, por lo tanto solo tiene un punto fijo. Ahora, como en ese mismo punto se intersecan con f tenemos que es punto fijo de f y por lo tanto no es un punto de periodo 3.

Vamos a calcular ese punto. Se encuentra en el intervalo $[3, 4]$ en el cual f viene dada por $f(x) = -2x + 10$.

Resolvemos $x = -2x + 10 \Rightarrow x = 10/3$.

Así que el único punto fijo de f^3 es $x = 10/3$, que es un punto fijo de f , por lo tanto no hay puntos de periodo 3.

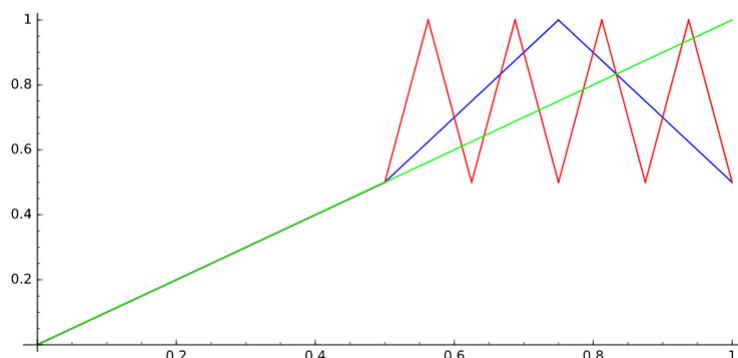
Caos en el sentido de Li y Yorke no implica caos en el sentido de Devaney

Para finalizar el Capítulo vamos a ver un ejemplo de una función que es caótica en el sentido de Li y Yorke pero no en el de Devaney.

Consideramos la función lineal a trozos $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 2x - 1/2, & \text{si } 1/2 < x \leq 3/4, \\ 5/2 - 2x, & \text{si } 3/4 < x \leq 1. \end{cases}$$

Vamos a ver que tiene puntos de periodo 3 y para ello representamos las gráficas de f y f^3 junto con la identidad:



En azul está representada la gráfica de f , en rojo la de f^3 y en verde la recta $y = x$.

Observando la imagen queda claro que f tiene 6 puntos de periodo 3, que son en donde se intersecan únicamente f^3 con $y = x$. Por lo tanto aplicando el teorema de Li y Yorke obtenemos que f es caótica en el sentido de su definición. Sin embargo, f no es caótica en el sentido de Devaney porque no es topológicamente transitiva: no podemos encontrar $x \in [0, 1/2]$ tal que $f^n(x) \in (1/2, 1]$ para algún n , ya que todos los puntos de $[0, 1/2]$ son fijos.

Capítulo 3

Estudio de algunos sistemas dinámicos discretos

En los siguientes apartados vamos a estudiar algunos sistemas dinámicos clásicos que presentan comportamiento caótico para determinados valores de sus parámetros.

3.1. Ecuación logística

En esta sección estudiaremos la ecuación logística, que como ya hemos visto viene dada en su forma discreta mediante la expresión:

$$f(x) = rx(1 - x). \quad (3.1)$$

Limitaremos nuestro análisis de la ecuación al caso $0 < r \leq 4$. Vamos a ver por qué. Tomamos $g(x) = x(1 - x)$ y calculamos su máximo:

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1/2.$$

Ahora calculamos el valor de $g(x)$ en $x = 1/2$ y nos queda $g(1/2) = 1/4$. Por lo tanto si tomamos $0 < r \leq 4$ podemos garantizar $f(x) = rg(x) \in [0, 1]$.

Puntos fijos y estabilidad

Vamos a seguir [3] y [4]. Para calcular los puntos fijos de f dada por (3.1) resolvemos

$$x = xr(1 - x) \Rightarrow rx^2 + (1 - r)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 1 - 1/r. \end{cases}$$

Así que f tiene dos puntos fijos, $x_1 = 0$ y $x_2 = 1 - \frac{1}{r}$.

Ahora vamos a ver para qué valores de r son estables. Como ya hemos visto antes, tenemos que comprobar cuándo se cumple:

$$|f'(x_i)| = |r - 2rx_i| < 1.$$

Para $x_1 = 0$, tenemos

$$|f'(x_1)| = r.$$

Así que x_1 estable cuando $r < 1$.

Para $x_2 = 1 - 1/r$, tenemos

$$|f'(x_2)| = |-r + 2|,$$

y queremos que $|-r + 2| < 1$, así que nos queda que $1 < r < 3$.

Nos queda determinar la naturaleza de los puntos fijos para $r = 1$ y $r = 3$.

Para $r = 3$ tenemos que $|f'(x_1)| = 3 > 1$ por lo tanto $x_1 = 0$ es inestable, y $|f'(x_2)| = 1$, así que el criterio no nos aporta información. Sin embargo ya

estudiamos este caso en la sección sobre estabilidad del Capítulo 2 y vimos que aplicando la definición obteníamos que el punto $x_2 = 2/3$ es estable.

Para $r = 1$ tenemos un único punto fijo que es $x_1 = 0 = x_2$. Nos queda que $|f'(x_1)| = 1$ por lo tanto el criterio no nos aporta información, pero de forma análoga al caso anterior si aplicamos la definición vemos que es estable.

Nos preguntamos ahora, ¿qué ocurre cuando $r > 3$?

Veremos que aparece un 2-ciclo, es decir, las sucesivas iteraciones de la función se alternan entre dos puntos fijos.

En primer lugar, calcularemos $f^2(x)$ (esto es, $f(f(x))$):

$$f^2(x) = f(rx(1-x)) = r^2x(1-x)(1-rx(1-x)). \quad (3.2)$$

Ahora calcularemos los puntos fijos no nulos de f^2 :

$$x = r^2x(1-x)(1-rx(1-x)) \Rightarrow r^2(1-x)(1-rx(1-x)) - 1 = 0,$$

y desarrollando la expresión obtenemos:

$$x^3 - 2x^2 + \left(1 + \frac{1}{r}\right)x + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r}\right) = 0.$$

Ahora, como sabemos que los puntos fijos de f son también puntos fijos de f^2 , podemos sacar el factor $x - \left(1 - \frac{1}{r}\right)$ y obtenemos:

$$\left(x - \left(1 - \frac{1}{r}\right)\right) \left(x^2 - \left(1 + \frac{1}{r}\right)x + \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}\right)\right) = 0.$$

Así que el 2-ciclo estará formado por las soluciones de

$$x^2 - \left(1 + \frac{1}{r}\right)x + \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}\right) = 0.$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado nos queda:

$$x_{3,4} = \frac{r + 1 \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}.$$

Además, $x_{3,4}$ son reales y distintos cuando $r > 3$.

Ahora que ya tenemos calculados los dos puntos que forman el 2-ciclo, veamos cuándo son estables.

Hay que evaluar $\frac{df^2}{dx}$ en x_3 y x_4 . En primer lugar, utilizando la Regla de la Cadena obtenemos:

$$\frac{df^2}{dx}(x) = f'(f(x))f'(x).$$

Evaluamos en x_3 y en x_4 , teniendo en cuenta que $f(x_3) = x_4$ y $f(x_4) = x_3$

$$\begin{aligned} \frac{df^2}{dx}(x_3) &= f'(f(x_3))f'(x_3) = f'(x_4)f'(x_3), \\ \frac{df^2}{dx}(x_4) &= f'(f(x_4))f'(x_4) = f'(x_3)f'(x_4). \end{aligned}$$

Por lo tanto, después de operar nos queda

$$\frac{df^2}{dx}(x_3) = (r - 2rx_3)(r - 2rx_4) = -r^2 + 2r + 4 = \frac{df^2}{dx}(x_4).$$

Nos queda comprobar cuándo se cumple que

$$|-r^2 + 2r + 4| < 1,$$

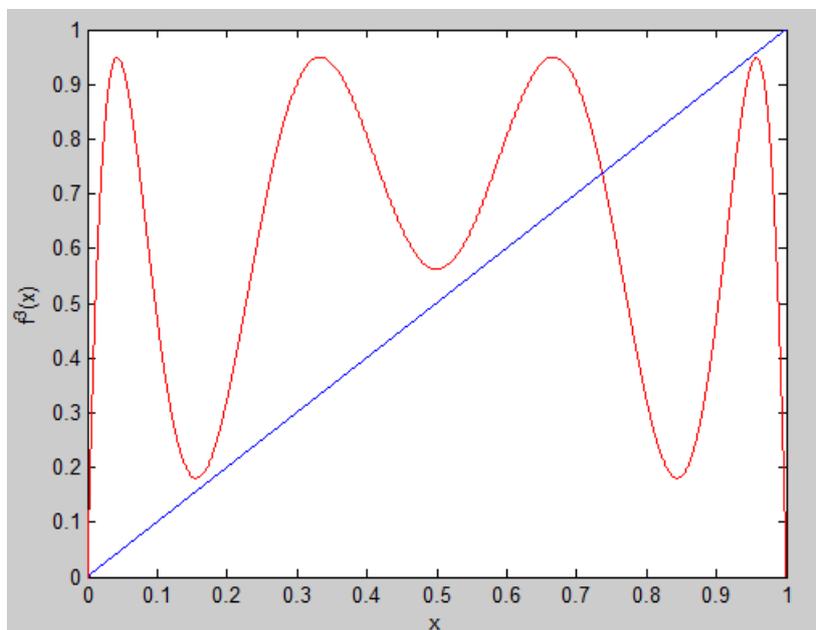
y es fácil ver que esto ocurre cuando $3 < r < 1 + \sqrt{6}$.

Por último, vamos a ver para qué valores de r existen puntos de periodo 3 de f . Tenemos:

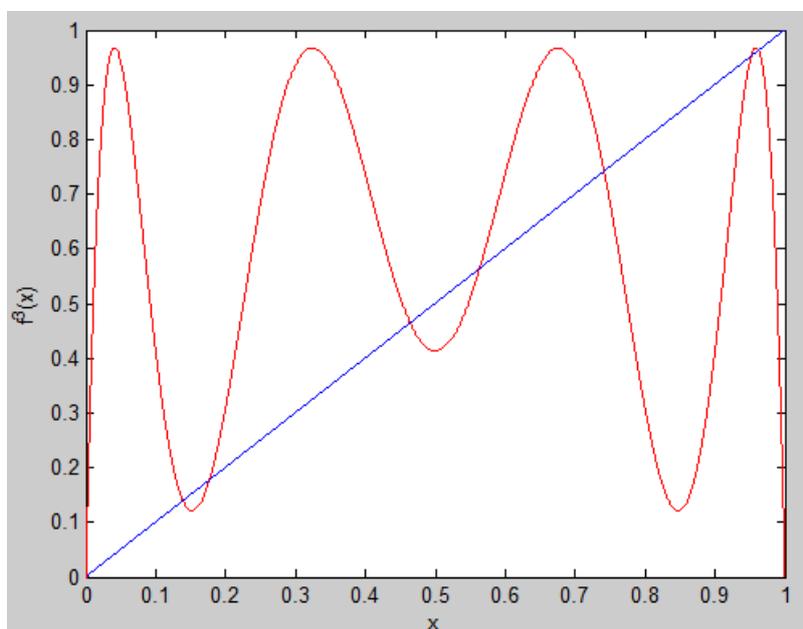
$$\begin{aligned} f^3(x) &= -r^7x^8 + 4r^7x^7 - (6r^7 + 2r^6)x^6 + (4r^7 + 6r^6)x^5 - (r^7 + 6r^6 + r^5 + r^4)x^4 \\ &\quad + (2r^6 + 2r^5 + 2r^4)x^3 - (r^5 + r^4 + r^3)x^2 + r^3x. \end{aligned}$$

Vamos a representar gráficamente $f^3(x)$ para distintos valores de r junto con la identidad para ver cuántos puntos fijos tiene f^3 en cada caso.

Para $r = 3,8$:



Para $r = 3,87$:



Observando estas dos gráficas, vemos que en la primera $f^3(x)$ tiene solo dos puntos fijos, que se corresponden con los puntos fijos de f , así que para $r = 3,8$ no hay puntos de periodo 3. En la segunda gráfica, tenemos ocho

puntos fijos, dos de ellos son los de f y los seis restantes son los de f^3 . Por lo tanto, para $r = 3,87$ tenemos puntos de periodo 3. Así que de momento sabemos que la función logística comienza a tener periodo tres para un valor r^* en el intervalo $(3,8, 3,87]$. Los puntos de periodo 3 son los que cumplen $x = f^3(x)$, esto es, $x - f^3(x) = 0$. Vamos a llamar $g(x) = x - f^3(x)$. Queremos calcular las raíces de $g(x)$. En primer lugar, sabemos que los puntos fijos de f son también puntos fijos de f^3 , así que podemos factorizar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{g(x)}{rx(x - (1 - 1/r))} = \\ &= -r^6x^6 + (3r^6 + r^5)x^5 - (3r^6 + 4r^5 + r^4)x^4 + (r^6 + 5r^5 + 3r^4 + r^3)x^3 \\ &\quad - (2r^5 + 3r^4 + 3r^3 + r^2)x^2 + (r^4 + 2r^3 + 2r^2 + r)x - (r^2 + r + 1). \end{aligned}$$

Los puntos de periodo 3 son las raíces de $h(x)$. Se trata de un polinomio de grado 6 y no contamos con software matemático que calcule sus raíces de manera exacta en función de r . Por lo tanto lo que vamos a hacer es estudiar para qué parámetros existen puntos de periodo 3 de f de forma numérica. Vamos a tomar distintos valores de r en el intervalo $(3,8, 3,87]$ y veremos cuándo h tiene raíces reales.

Después de probar con varios valores obtenemos que:

Para $r = 3,82842$, h tiene las raíces complejas y para $r = 3,82843$, h tiene raíces reales. Por lo tanto vamos a tomar $r = 3,82843$ como el valor para el cual comienza a haber puntos de periodo 3. Así que aplicando el teorema de Li y Yorke podemos afirmar que la ecuación logística con parámetro $r \geq 3,82843$ es caótica en el sentido de su definición en el intervalo $[0, r/4]$.

Por último, como resumen presentamos el diagrama de bifurcación de la ecuación logística. El eje de abscisas se corresponde con los valores del parámetro r . Para cada uno de ellos, se representa el valor de los puntos periódicos estables de f . De esta manera, para $r \in [1, 3]$, representamos el punto $x = 1 - 1/r$ que es el único punto fijo estable de f para esos valores del parámetro r . Para $r \in (3, 1 + \sqrt{6})$, representamos los puntos del 2-ciclo, que son estables en ese rango de r , y así sucesivamente para el resto de valores de parámetro. Las bifurcaciones representan el paso de un n -ciclo a un $2n$ -ciclo.

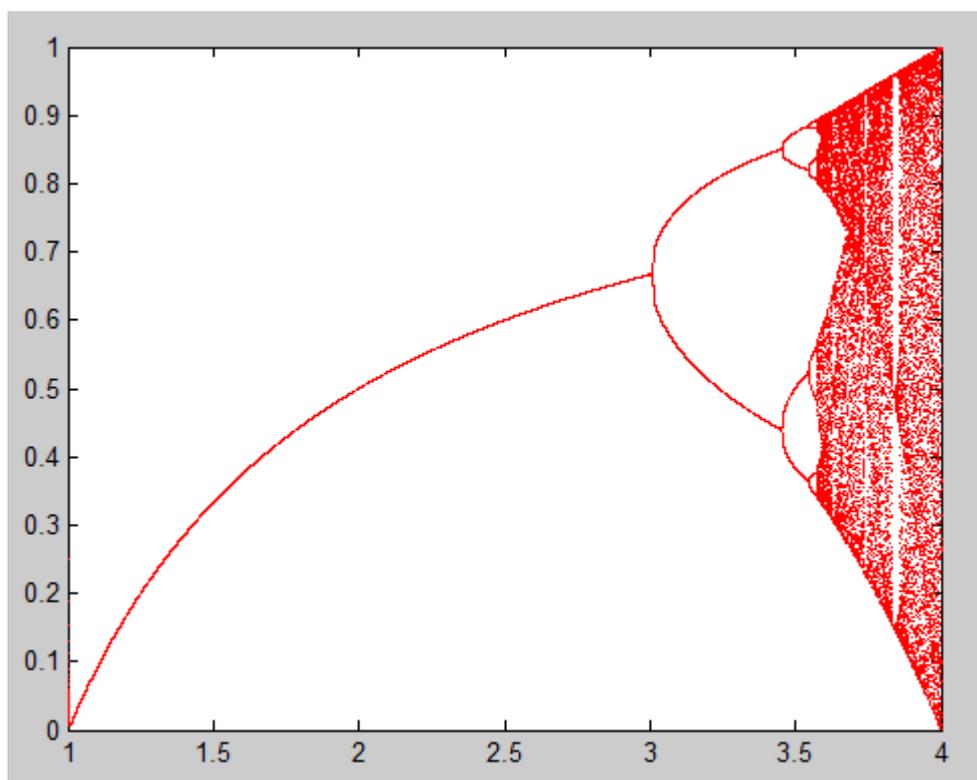


Diagrama de bifurcación de la ecuación logística.

3.2. Tent map

En esta sección vamos a seguir lo hecho en [5]. Dado $r \in [0, 1]$, consideramos la aplicación

$$f_r(x) = \begin{cases} 2rx, & \text{si } 0 \leq x < 1/2, \\ 2r(1-x), & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

que se conoce como *Tent Map* debido a que su forma recuerda a una tienda de campaña.

Comenzaremos calculando sus puntos fijos. Para ello hacemos $x = f_r(x)$:

$$x = 2rx \Rightarrow x = 0 \text{ si } r \neq 1/2,$$

$$x = 2r(1-x) \Rightarrow x = \frac{2r}{1+2r}.$$

Además, como el punto fijo $x = \frac{2r}{1+2r}$ existe cuando $1/2 \leq x \leq 1$, tiene que ser $r \geq 1/2$.

Vamos a estudiar el comportamiento de $f_r(x)$ en función de los distintos valores que puede tomar r . Para ello distinguimos los siguientes casos:

1) Si $0 \leq r < 1/2$, como ya hemos visto, $f_r(x)$ tiene un único punto fijo que es $x = 0$. Como $|f'_r(0)| = |2r| < 1$ cuando $r < 1/2$ tenemos que $x = 0$ es estable.

2) Si $r = 1/2$ nos queda

$$f_{1/2}(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < 1/2, \\ 1 - x, & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Así que todo punto $x_0 \in [0, 1/2]$ es un punto fijo de $f_{1/2}(x)$.

3) Si $1/2 < r < 1$ hay dos puntos fijos, $x = 0$ y $x = \frac{2r}{1+2r}$. Ya sabemos que en este caso $x = 0$ es inestable. Además, como $|f'_r(\frac{2r}{1+2r})| = |-2r| = 2r > 1$ ya que nos encontramos en el caso $1/2 < r < 1$, tenemos que $x = \frac{2r}{1+2r}$ es también inestable.

Además cuando $r > 1/2$ comienzan a existir puntos de periodo 2, esto es, que forman un 2-ciclo. Vamos a calcularlos.

En primer lugar calculamos $f_r^2(x)$:

$$f_r^2(x) = \begin{cases} 4r^2x, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{4r}, \\ 2r - 4r^2x, & \text{si } \frac{1}{4r} \leq x < 1/2, \\ 2r - 4r^2(1-x), & \text{si } 1/2 \leq x < 1 - \frac{1}{4r}, \\ 4r^2(1-x), & \text{si } 1 - \frac{1}{4r} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Ahora igualamos a x cada rama de $f_r^2(x)$:

$$x = 4r^2x \Rightarrow x = 0,$$

$$x = 2r - 4r^2x \Rightarrow x(1 + 4r^2) = 2r \Rightarrow x = \frac{2r}{1 + 4r^2},$$

$$x = 2r - 4r^2(1-x) \Rightarrow x = \frac{2r}{1 + 2r},$$

$$x = 4r^2(1-x) \Rightarrow x = \frac{4r^2}{1 + 4r^2}.$$

Sabemos que $x = 0$ y $x = \frac{2r}{1+2r}$ son puntos fijos de $f_r(x)$, así que los puntos que forman el 2-ciclo son:

$$\left\{ \frac{2r}{1 + 4r^2}, \frac{4r^2}{1 + 4r^2} \right\}.$$

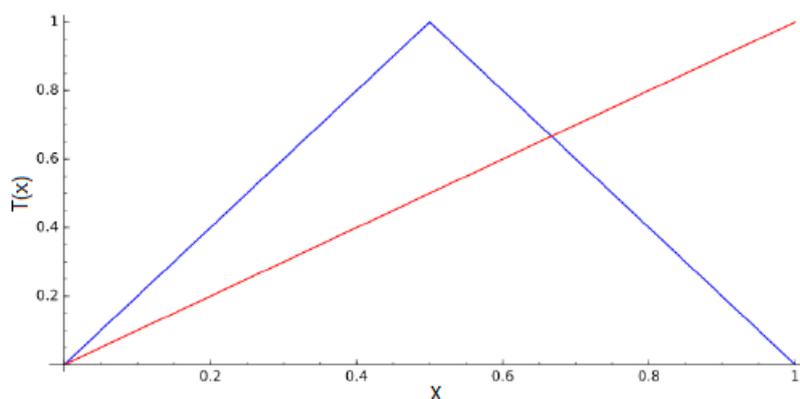
Además, como $\left| \frac{df_r^2}{dx} \left(\frac{2r}{1+4r^2} \right) \right| = |-4r^2| = 4r^2 = \left| \frac{df_r^2}{dx} \left(\frac{4r^2}{1+4r^2} \right) \right|$ tenemos que ambos puntos son inestables, ya que $4r^2 > 1$ cuando $r > 1/2$.

4) Si $r = 1$ tenemos

$$f_1(x) = T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 2(1-x), & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (3.3)$$

Los puntos fijos son: $x = 0, x = 2/3$.

Además como $|T'(x)| = 2 > 1 \forall x \in [0, 1], x \neq 1/2$ tenemos que ambos puntos fijos son inestables.



Gráfica de $T(x)$

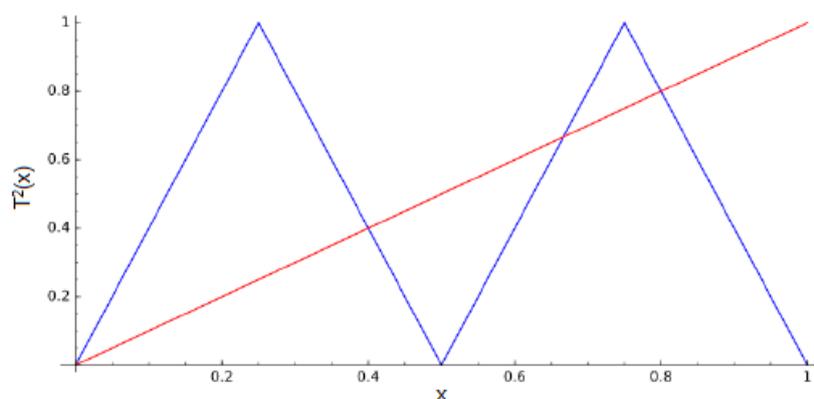
Ahora vamos a calcular los puntos fijos de periodo dos.

$$T^2(x) = \begin{cases} 4x, & \text{si } 0 \leq x < 1/4, \\ 2-4x, & \text{si } 1/4 \leq x < 1/2, \\ 4x-2, & \text{si } 1/2 \leq x < 3/4, \\ 4(1-x), & \text{si } 3/4 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (3.4)$$

Los puntos fijos son:

$$x = 0, x = 2/5, x = 2/3, x = 4/5.$$

Como $x = 0$ y $x = 2/3$ son puntos fijos de $T(x)$, el 2-ciclo está formado por $\{2/5, 4/5\}$.

Gráfica de $T^2(x)$

Por último vamos a calcular los puntos de periodo 3. Tenemos:

$$T^3(x) = \begin{cases} 8x, & \text{si } 0 \leq x < 1/8, \\ 2 - 8x, & \text{si } 1/8 \leq x < 1/4, \\ 8x - 2, & \text{si } 1/4 \leq x < 3/8, \\ 4 - 8x, & \text{si } 3/8 \leq x < 1/2, \\ 8x - 4, & \text{si } 1/2 \leq x < 5/8, \\ 6 - 8x, & \text{si } 5/8 \leq x < 3/4, \\ 8x - 6, & \text{si } 3/4 \leq x < 7/8, \\ 8(1 - x), & \text{si } 7/8 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (3.5)$$

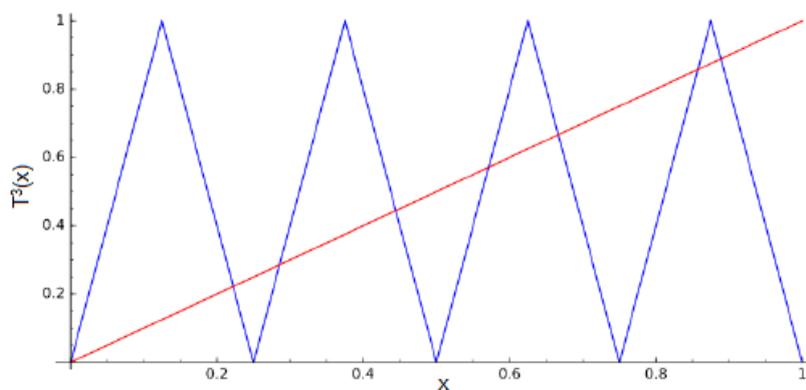
Los puntos fijos son:

$$x = 0, x = 2/9, x = 2/7, x = 4/9, x = 4/7, x = 2/3, x = 6/7, x = 8/9.$$

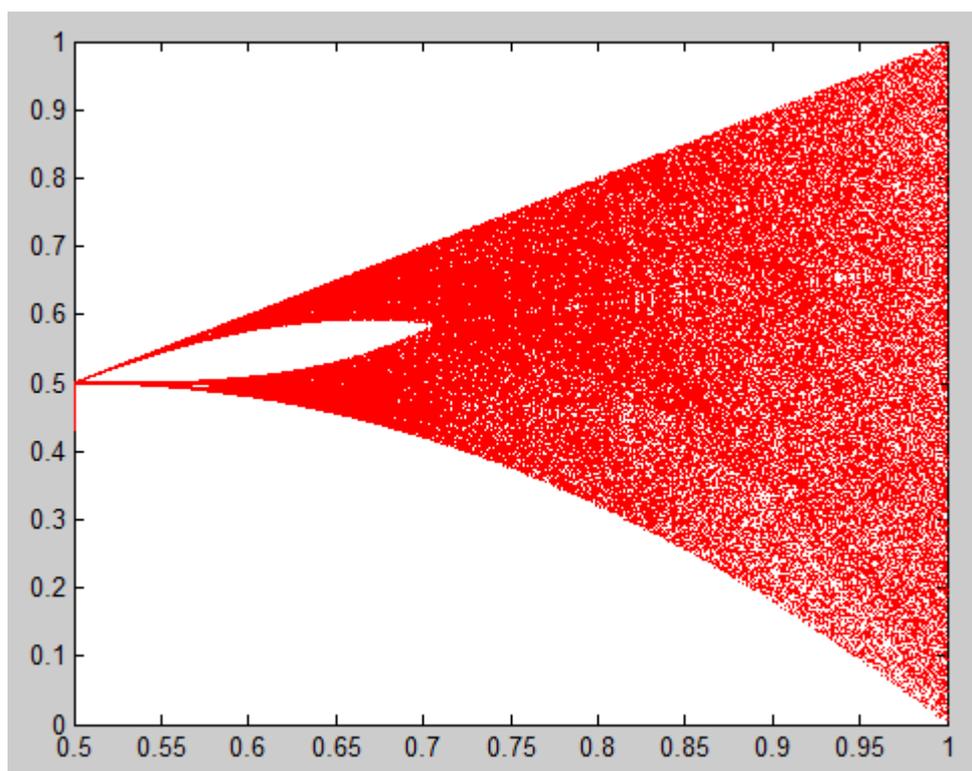
Como ya sabemos, $x = 0$ y $x = 2/3$ son puntos fijos de $T(x)$, así que los puntos restantes son los de periodo 3. Nos quedan dos 3-ciclos:

$$\{2/7, 4/7, 6/7\} \text{ y } \{2/9, 4/9, 8/9\}.$$

Por lo tanto, como la función T tiene puntos de periodo 3 podemos afirmar que es caótica en el sentido de Li y Yorke.

Gráfica de $T^3(x)$

Por último, al igual que hicimos con la ecuación logística, presentamos el diagrama de bifurcación de la función Tent map.



Propiedades de T

En este apartado vamos a probar de forma directa que la función T es caótica en el sentido de Devaney. Vamos a seguir [4] y [5].

En primer lugar calcularemos de forma explícita los puntos periódicos de T .

Teorema 3.2.1 *Un punto $x \in [0, 1]$ es un punto periódico de T si y solo si x es un número racional de la forma m/p con m par y p impar, $0 < m < p$.*

Demostración

\Rightarrow) Sea $n \in \mathbb{N}$.

En general, tenemos

$$T^n(x) = \begin{cases} 2^n x - 2i, & \text{si } x \in \left[\frac{2i}{2^n}, \frac{2i+1}{2^n} \right], \\ 2(i+1) - 2^n x, & \text{si } x \in \left[\frac{2i+1}{2^n}, \frac{2i+2}{2^n} \right], \end{cases}$$

donde $i = 0, 1, \dots, 2^{n-1}$.

Los puntos periódicos de T son las soluciones de:

$$x = 2^n x - 2i \text{ ó } x = 2(i+1) - 2^n x \text{ con } i = 0, 1, \dots, 2^{n-1}.$$

Resolvemos:

$$x = 2^n x - 2i \Rightarrow (2^n - 1)x = 2i \Rightarrow x = \frac{2i}{2^n - 1},$$

$$x = 2(i+1) - 2^n x \Rightarrow (2^n + 1)x = 2(i+1) \Rightarrow x = \frac{2(i+1)}{2^n + 1}.$$

Por lo tanto hemos obtenido que los puntos periódicos de T son de la forma:

$$x = \frac{2i}{2^n - 1} \text{ ó } x = \frac{2(i+1)}{2^n + 1} \text{ con } i = 0, 1, \dots, 2^{n-1},$$

y claramente ambos son números racionales de la forma m/p con m par y p impar.

\Leftarrow) Supongamos $x = m/p \in [0, 1]$ con $m = 2k$ y p impar. Queremos probar que x es un punto periódico de T y sabemos que los puntos periódicos de T son de la forma $\frac{2i}{2^n - 1}$ ó $\frac{2(i+1)}{2^n + 1}$ con $i = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1$, así que lo que tenemos que probar es que x se puede expresar de una de esas formas.

Por el Teorema de Euler, $2^{\varphi(p)} = 1 \pmod{p} \Rightarrow \exists t \in \mathbb{N}$ tal que $2^{\varphi(p)} = pt + 1 \Rightarrow 2^{\varphi(p)} - 1 = pt$. Por tanto

$$x = \frac{m}{p} = \frac{mt}{2^{\varphi(p)} - 1} = \frac{2kt}{2^{\varphi(p)} - 1},$$

con $k < p/2$. Además

$$kt = \frac{k}{p}(2^{\varphi(p)} - 1) < \frac{2^{\varphi(p)} - 1}{2} \leq 2^{\varphi(p)-1} - 1.$$

Por lo tanto, tenemos que x es de la forma $\frac{2i}{2^n - 1}$ con $n = \varphi(p)$ e $i = kt \leq 2^{n-1} - 1 = 2^{\varphi(p)-1} - 1$. Así queda probado que x es un punto periódico de T . ■

Vamos a probar que T cumple las condiciones requeridas en la definición de función caótica dada por Devaney.

Proposición 3.2.1 *T tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales en $[0, 1]$.*

Demostración:

En primer lugar veremos que si v es un número de la forma $v = \frac{j}{2^m}$ con $j, m \in \mathbb{N}$, es decir, un número diádico (ver Anexo C) y w es un número irracional, ambos en $[0, 1]$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$|T^n(v) - T^n(w)| > 1/2.$$

Si $v = \frac{j}{2^m}$ irreducible, j no puede ser un número par, por lo tanto tiene que ser $j = 2i + 1$.

Así que tenemos:

$$T^m(v) = j - 2i = 2i + 1 - 2i = 1.$$

Así que $T^m(v) = 1 \Rightarrow T^{m+k}(v) = 0$.

(Si $T^m(v) = 1 \Rightarrow T^{m+1}(v) = 2(1 - 1) = 0 \Rightarrow T^{m+k}(v) = 0, k > 0$).

Por otro lado, si $w \in [0, 1]$ es un número irracional, tiene que existir $n > m$ tal que $T^n(w) > 1/2$. Vamos a verlo.

Supongamos que $T^m(w) = p < 1/2 \Rightarrow T^{m+1}(w) = T(T^m(w)) = 2p$.

Si $2p > 1/2$ ya hemos encontrado $n = m + 1$.

Si $2p < 1/2$ seguimos aplicando T :

$$T^{m+2}(w) = T(T^{m+1}(w)) = T(2p) = 4p,$$

$$T^{m+3}(w) = T(T^{m+2}(w)) = T(4p) = 8p,$$

y así sucesivamente hasta alcanzar un índice i para el cual $T^{m+i}(w) > 1/2$ y así tendremos $n = m + i$.

Por otro lado, si $T^m(w) = q > 1/2 \Rightarrow T^{m+1}(w) = T(T^m(w)) = 2(1 - q)$.

Si $2(1 - q) > 1/2$, ya tenemos $n = m + 1$.

Si $2(1 - q) < 1/2$ seguimos un proceso análogo al caso anterior hasta obtener $T^{m+i}(w) > 1/2$.

Como $n > m$, tenemos que $T^n(v) = 0$, así que se cumple

$$|T^n(v) - T^n(w)| > 1/2.$$

Ahora, sean $x \in [0, 1]$ y $\delta > 0$. Entonces, por la densidad de los diádicos, existen un número diádico v y un irracional w en $[0, 1]$ tales que

$$|x - v| < \delta \text{ y } |x - w| < \delta.$$

Como $|T^n(v) - T^n(w)| > 1/2$ tenemos que

$$|T^n(x) - T^n(v)| > 1/4 \text{ ó } |T^n(x) - T^n(w)| > 1/4,$$

ya que:

$$\begin{aligned} 1/2 < |T^n(v) - T^n(x) + T^n(x) - T^n(w)| &\leq |T^n(v) - T^n(x)| + |T^n(x) - T^n(w)| \\ &= |T^n(x) - T^n(v)| + |T^n(x) - T^n(w)| \Rightarrow \\ |T^n(x) - T^n(v)| > 1/4 \text{ ó } |T^n(x) - T^n(w)| > 1/4. \end{aligned}$$

Así que si tomamos $\varepsilon = 1/4$ hemos probado la dependencia de las condiciones iniciales de T en $[0, 1]$. ■

Proposición 3.2.2 *Los puntos periódicos de T son densos en $[0, 1]$.*

Demostración:

Sea $(a, b) \subset [0, 1]$ un intervalo abierto cualquiera. Queremos probar que existe un punto periódico de T en (a, b) , es decir, que $\exists \frac{m}{p}$ con $m, p \in \mathbb{N}$, m par y p impar, tal que $a < \frac{m}{p} < b$.

Sea p un entero positivo impar lo suficientemente grande para que $\frac{1}{p} < \frac{b-a}{2}$ y tomamos un entero positivo m tal que $\frac{m}{p} \in (a, \frac{a+b}{2})$.

Si m es par tenemos que $\frac{m}{p}$ es un punto periódico de T y se cumple $a < \frac{m}{p} < b$.

Si m es impar, tomamos $\frac{m+1}{p}$ un punto periódico de T y nos queda que $\frac{m+1}{p} < \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} = b \Rightarrow a < \frac{m+1}{p} < b$. ■

Proposición 3.2.3 *T es topológicamente transitiva en $[0, 1]$.*

Demostración:

Sean $U_1, U_2 \subset [0, 1]$ dos subintervalos abiertos cualesquiera. Para n suficientemente grande y para algún k , U_1 contiene un intervalo de la forma $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$. Por lo tanto T^n hace corresponder U_1 con $[0, 1]$ que contiene a U_2 . Por otro lado, ya hemos visto que los puntos periódicos de T son densos. Veamos que esto implica que los puntos periódicos de T^n también lo son. Si x es un punto periódico de T^n , entonces existe m tal que $T^{nm}(x) = x$ y $x \neq T^{nk}(x)$ para

$1 \leq k < m$. Esto es lo mismo que decir que x es un punto periódico de T de periodo nm . Por lo tanto los puntos periódicos de T^n son densos. Así que por la densidad de los puntos periódicos de T^n tiene que existir un punto periódico $x \in U_1$ tal que $T^n(x) \in U_2$.■

Así que T cumple las tres condiciones necesarias para que una función sea caótica. Por lo tanto

Teorema 3.2.2 *T es una función caótica en $[0,1]$ en el sentido de Devaney.*

Capítulo 4

Control del Caos

Como ya hemos visto a lo largo de este trabajo, los resultados proporcionados por un sistema caótico no son aleatorios, sino que vienen dados por un proceso ordenado y determinista. Los sistemas dinámicos se utilizan para modelar procesos de la ciencia, tanto naturales como tecnológicos. En un principio, la presencia de comportamiento caótico se consideraba una desventaja y se trataba de evitarlo por todos los medios. Sin embargo, estudios recientes han demostrado que en ciertos sistemas la presencia de comportamiento caótico es incluso deseable. En la última década ha habido un avance considerable en el campo del control del caos y han surgido métodos con aplicaciones a diversas áreas, como la física, química o medicina (circuitos eléctricos, reacciones químicas oscilatorias, cardiología,...). Como ejemplo podemos presentar el control aplicado a las arritmias. Se han implementado formas de monitorizar el corazón de manera que mediante pequeños pulsos eléctricos se controle la fibrilación y el corazón vuelva a su estado normal. De hecho, se conjetura que un corazón con comportamiento caótico es más saludable que uno que late de forma periódica.

En esta última sección vamos a presentar de forma breve un método para sencillo el control del caos, aplicable a sistemas discretos unidimensionales.

La ventaja que tienen los sistemas caóticos a la hora de controlar su comportamiento es que por su dependencia de las condiciones iniciales mediante pequeñas perturbaciones podemos alcanzar nuestro objetivo.

Lo que buscamos es dirigir la órbita de un punto inicial x_0 a nuestro objetivo b lo más rápido que sea posible y utilizando solo pequeñas perturbaciones en los parámetros. Para ello, consideramos un parámetro inicial r_0 y restringiremos su perturbación al rango $(r_0 - \delta r_{max}, r_0 + \delta r_{max})$, donde δr_{max} representa la máxima variación que vamos a permitir al valor del parámetro r_0 .

La forma en la que vamos a hallar el $r \in (r_0 - \delta r_{max}, r_0 + \delta r_{max})$ que buscamos es la siguiente:

En primer lugar tenemos que encontrar el mínimo $m \in \mathbb{N}$ de forma que $b \in [\alpha, \beta]$ donde

$$\alpha = \min\{f_{r_0}^m(f_{r_0-\delta r_{max}}(x_0)), f_{r_0}^m(f_{r_0+\delta r_{max}}(x_0))\}.$$

$$\beta = \max\{f_{r_0}^m(f_{r_0-\delta r_{max}}(x_0)), f_{r_0}^m(f_{r_0+\delta r_{max}}(x_0))\}.$$

Después, tendremos que resolver la ecuación

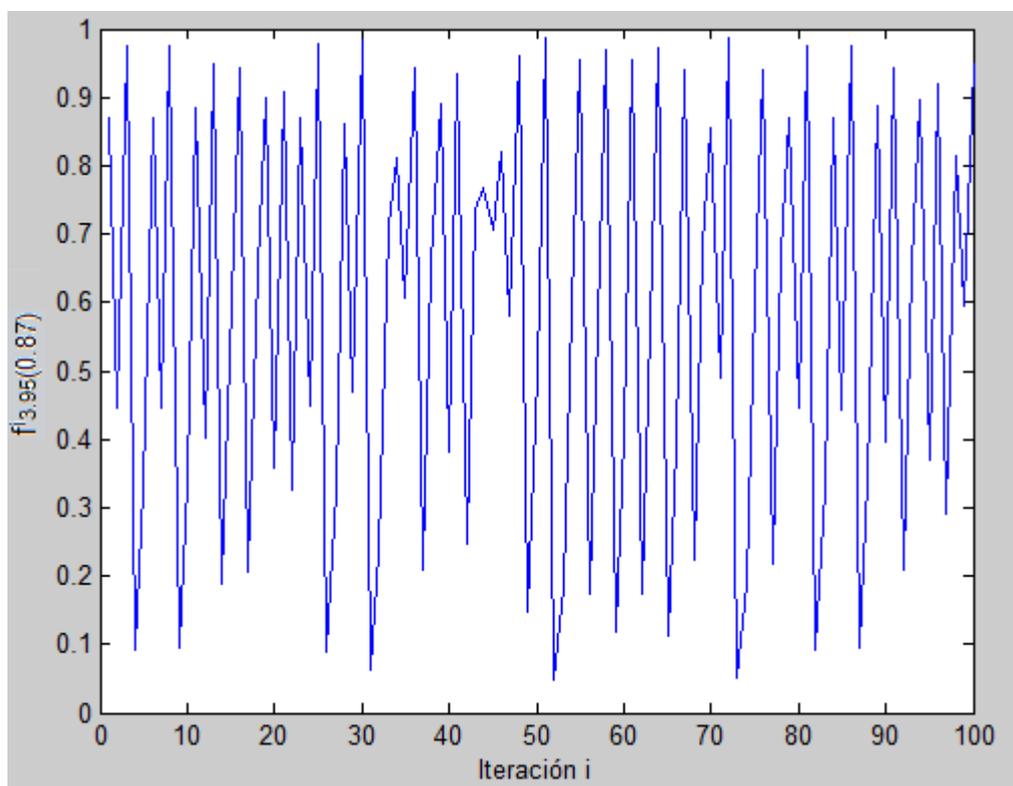
$$f_{r_0}^m(f_r(x_0)) = b,$$

y de esta forma tendremos calculado el parámetro r que buscamos.

Vamos a presentar el método mediante un ejemplo práctico, siguiendo los pasos dados en [15]. Tomaremos la función logística, dada por:

$$f_r = rx(1 - x),$$

con punto inicial $x_0 = 0,87$ y parámetro $r_0 = 3,95$. Según lo que hemos estudiado anteriormente, para este valor del parámetro la función logística tiene comportamiento caótico. A continuación presentamos la gráfica de sus resultados a lo largo de 100 iteraciones.



Ahora vamos a ver cómo controlar el comportamiento de esta función. Nos marcaremos el siguiente objetivo:

Comenzando con el punto inicial $x_0 = 0,87$, queremos controlar su órbita para que alcance un 2-ciclo tan rápido como sea posible, usando una única perturbación $\delta r \leq 0,02$ del parámetro $r_0 = 3,95$.

Primera fase

Realizaremos el proceso en una serie de pasos:

0) Calculamos el rango de perturbación

$$r \in (r_0 - \delta r_{max}, r_0 + \delta r_{max}) = (3,95 - 0,02, 3,95 + 0,02) = (3,93, 3,97).$$

1) Hallamos los puntos que forman el 2-ciclo

De acuerdo a lo estudiado en la sección de la ecuación logística, un 2-ciclo está formado por los puntos:

$$\frac{r_0 + 1 \pm \sqrt{(r_0 - 3)(r_0 + 1)}}{2r_0}$$

y sustituyendo con los valores de nuestro ejemplo obtenemos los puntos:

$$0,3520854628... \text{ y } 0,9010790942...$$

2) Escogemos uno de los puntos del 2-ciclo como objetivo

No importará cuál de los dos puntos elijamos porque si conseguimos que la órbita de x_0 se aproxime a uno de ellos, en la siguiente iteración de la función se aproximará al otro. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, vamos a tomar como objetivo $b = 0,3520854628...$

3) Encontrar un intervalo que contenga a b usando una única perturbación inicial δr

Lo haremos de la siguiente manera:

Calculamos los valores de $f(x_0)$ para $r = 3,93$ y $r = 3,97$, esto es, para los extremos del rango de perturbación:

$$f_{3,93}(0,87) = 0,444483,$$

$$f_{3,97}(0,87) = 0,449007.$$

Como $b \notin (0,444483, 0,449007)$ no hemos encontrado una buena cota para la perturbación del parámetro.

Continuamos con el siguiente proceso:

Calculamos los valores de $f_{r_0 - \delta r_{max}}(x_0)$ y $f_{r_0 + \delta r_{max}}(x_0)$ y vemos si b

se encuentra en el intervalo dado por esos dos valores. Si no es así, iteramos hasta conseguir un intervalo al que pertenezca $b = 0,3520854628\dots$

De esta forma, tenemos:

$$f_{3,95}(f_{3,93}(0,87)) = 0,9753255577\dots \text{ y } f_{3,95}(f_{3,97}(0,87)) = 0,9772288701\dots \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{ no contiene a } b.$$

$$f_{3,95}^2(f_{3,93}(0,87)) = 0,09505917605\dots \text{ y } f_{3,95}^2(f_{3,97}(0,87)) = 0,08789779187\dots \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{ no contiene a } b.$$

$$f_{3,95}^3(f_{3,93}(0,87)) = 0,3397905699\dots \text{ y } f_{3,95}^3(f_{3,97}(0,87)) = 0,3166784917\dots \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{ no contiene a } b.$$

Seguimos iterando y obtenemos finalmente que

$$b \in (f_{3,95}^8(f_{3,93}(0,87)), f_{3,95}^8(f_{3,97}(0,87))) = (0,1881983001\dots, 0,6287084802\dots).$$

Así que por el teorema del Valor Medio, tiene que existir un valor para δr tal que $r = r_0 + \delta r$ y $r \in (r_0 - \delta r_{max}, r_0 + \delta r_{max})$ para el cual $f_{r_0}^8(f_r(x_0))$ alcance exactamente el valor b , debido a la continuidad de la función respecto del parámetro r .

Así que tenemos que resolver la ecuación

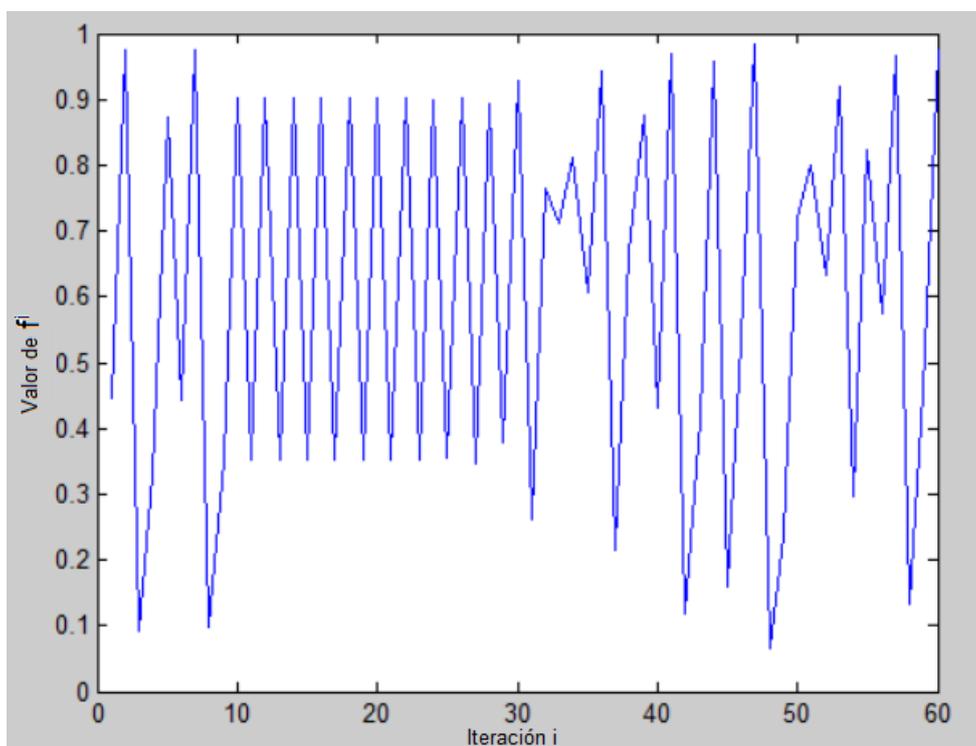
$$f_{3,95}^8(f_r(0,87)) = 0,3520854628\dots,$$

para obtener el parámetro r que buscamos.

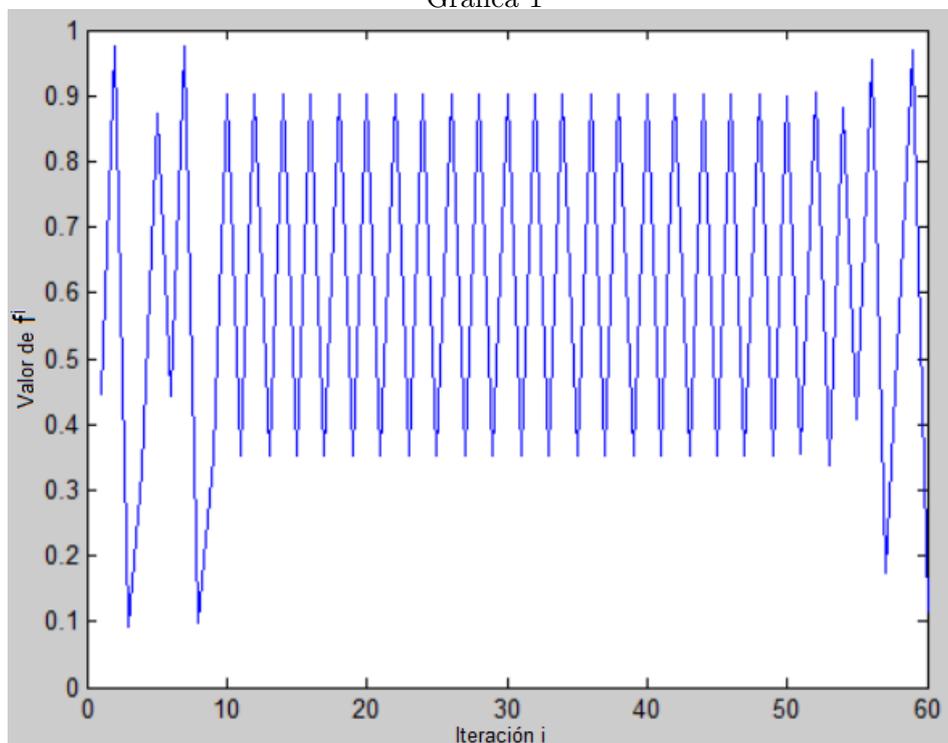
Resolvemos con Matlab mediante el método numérico *f solve*, usando como semilla el valor $r_0 = 3,95$, ya que sabemos que el parámetro r que estamos buscando tiene que ser muy cercano al valor de r_0 . Obtenemos:

$$r = 3,9489232466323\dots$$

A continuación vamos a presentar dos gráficas. En el eje de abcisas representamos el número de iteraciones y en el de ordenadas el valor que toma la función en cada iteración. Al perturbar el valor inicial del parámetro $r_0 = 3,95$ a $r = 3,9489232466323\dots$, conseguimos que la función con el punto inicial $x_0 = 0,87$ alcance el punto $b = 0,3520854628\dots$ en nueve iteraciones. Esto es común en ambas gráficas, sin embargo vamos a ver que entre ellas hay diferencias en cuanto al número de iteraciones en el que se mantiene estable el 2-ciclo:



Gráfica 1



Gráfica 2

En la gráfica 1, una vez que se alcanza el 2-ciclo, se mantiene estable hasta la iteración 25 aproximadamente, mientras que en la gráfica 2 se mantiene casi hasta la iteración 60. Esto se debe al comportamiento caótico de la función logística y al error que viene asociado a los cálculos realizados de forma numérica. En la gráfica 1, hemos tomado 10^{-6} como tolerancia para el valor de x y de f , que es el que utiliza Matlab por defecto. Como ya hemos visto, el resultado que hemos obtenido no es demasiado bueno. En la gráfica 2, hemos tomado 10^{-14} como tolerancia para el valor de x y de f . Por lo tanto hemos reducido el error más del doble que en el caso anterior. Esta es una manera muy clara de ver cómo los cambios en las condiciones iniciales, aunque sean muy pequeños, influyen en los resultados, haciendo que difieran en gran medida unos de otros.

Segunda fase: estabilización

Hemos conseguido que nuestro punto inicial $x_0 = 0,87$ alcance el punto objetivo b en nueve iteraciones. Sin embargo, como ya hemos observado en las gráficas anteriores, al cabo de un número determinado de iteraciones la función abandona el 2-ciclo. Esto se debe a que los puntos que forman el 2-ciclo son inestables (ya vimos en la sección de la ecuación logística que los puntos que forman un 2-ciclo son inestables para $r > 1 + \sqrt{6} \simeq 3,449489\dots$, lo cual es nuestro caso). Lo que vamos a ver en esta sección es cómo podemos ir reajustando el valor de nuestro parámetro para que el 2-ciclo que hemos alcanzado se mantenga estable durante todo el tiempo que queramos.

Vamos a trabajar con los valores de la Gráfica 2, que es la que nos da el mejor resultado. En primer lugar vamos a tomar como punto inicial para nuestro reajuste uno que esté cercano al punto b que nos habíamos marcado como objetivo. En este caso vamos a tomar el valor de la función en la iteración $i = 49$: $x_{49} = 0,351915323282502$. Ahora que ya tenemos el punto inicial x_{49} y el objetivo b , vamos a realizar el mismo proceso que en el paso **3**) de la primera fase.

$$f_{3,93}(x_{49}) = 0,896318749089394\dots$$

$$f_{3,97}(x_{49}) = 0,905441586230253\dots$$

y como $b \notin (0,896318749089394\dots, 0,905441586230253\dots)$ hacemos:

$$f_{3,95}(f_{3,93}(x_{49})) = 0,367079224024862\dots$$

$$f_{3,95}(f_{3,97}(x_{49})) = 0,338187624612631\dots$$

y tenemos que $b \in (0,338187624612631\dots, 0,367079224024862\dots)$.

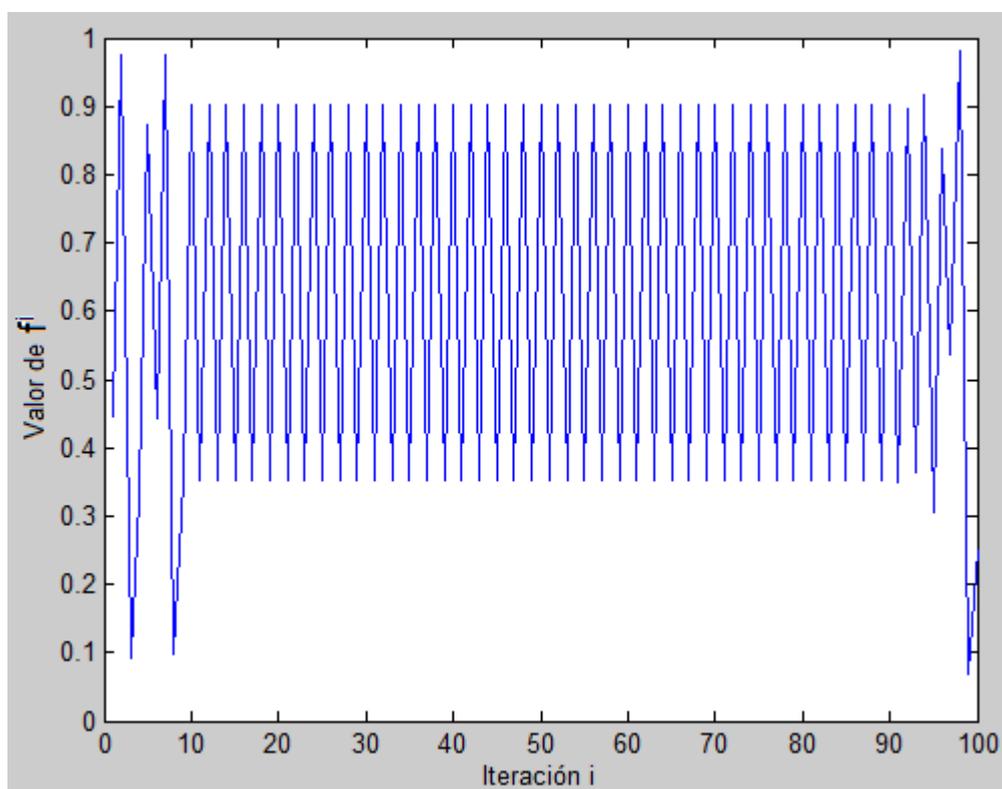
Por lo tanto, de forma análoga a la primera fase, tenemos que resolver la

ecuación

$$f_{3,95}(f_r(x_{49})) = 0,3520854628\dots,$$

para calcular el nuevo parámetro r . Utilizamos de nuevo *fsolve* de Matlab y obtenemos $r = 3,950872213510738\dots$

A continuación vamos a presentar la gráfica que une los pasos de la primera fase y de la segunda. Vamos a ver que el 2-ciclo que alcanzamos en la primera fase se va a mantener estable hasta aproximadamente la iteración 90, mientras que antes se desestabilizaba en torno a la iteración 50.



Gráfica 3, unión de la primera y segunda fase

En el Anexo D presentamos el programa Matlab con el que se ha realizado numéricamente el proceso descrito en este capítulo.

Anexo A

Propiedades del sistema de Lorenz

A continuación vamos a realizar un estudio de alguna de las propiedades que presenta el sistema de Lorenz siguiendo [4] y también lo visto en la asignatura “Teoría cualitativa de EDO” del Grado en Matemáticas.

Proposición A.0.1 *Sus soluciones son simétricas.*

Si $(x(t), y(t), z(t))$ es una solución, también lo es $(-x(t), -y(t), z(t))$.

Demostración: Sea $(x(t), y(t), z(t))$ una solución. Entonces

$$x'(t) = \sigma(y(t) - x(t)) \Rightarrow -x'(t) = \sigma(-y(t) - (-x(t))),$$

$$y'(t) = rx(t) - y(t) - x(t)z(t) \Rightarrow -y'(t) = r(-x(t)) - (-y(t)) - (-x(t)z(t)),$$

$$z'(t) = x(t)y(t) - bz(t) \Rightarrow z'(t) = -x(t)(-y(t)) - b(z(t)).$$

Así que $(-x(t), -y(t), z(t))$ también es solución del sistema. ■

Ahora vamos a calcular los puntos críticos del sistema de Lorenz.

$$x' = \sigma(y - x) = 0 \Rightarrow y = x,$$

$$y' = rx - y - xz = 0 \Rightarrow x(r - 1 - z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ z = r - 1, \end{cases}$$

$$z' = xy - bz = 0 \Rightarrow x^2 = bz \Rightarrow x = \pm\sqrt{bz}.$$

Así que nos queda:

Si $x = 0 \Rightarrow y = 0$ y $z = 0$.

Si $z = r - 1 \Rightarrow x = y = \pm\sqrt{b(r - 1)}$, que es real cuando $r > 1$.

Por lo tanto, cuando $r < 1$ el único punto crítico es el origen y cuando $r > 1$

hay tres puntos críticos:

$$p_1 = (0, 0, 0),$$

y

$$p_{2,3} = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1).$$

Veamos cuándo es estable el origen.

En primer lugar linealizamos el sistema:

$$JF = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix} \Rightarrow JF(p_1) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Vamos a calcular el polinomio característico y veremos cuándo es estable.

$$\begin{aligned} |\lambda I - JF(p_1)| &= \begin{vmatrix} \lambda + \sigma & -\sigma & 0 \\ -r & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + b \end{vmatrix} = (\lambda + \sigma)(\lambda + 1)(\lambda + b) - r\sigma(\lambda + b) = \\ &= (\lambda + b)(\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)). \end{aligned}$$

Para que sea estable, todas sus raíces deben tener parte real negativa.

$\lambda + b = 0 \Rightarrow \lambda = -b$ que es siempre negativo ya que $b > 0$. Por otro lado tenemos el factor $\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)$ que tiene grado dos y sabemos que un polinomio de grado dos es estable si y solo si todos sus coeficientes tienen el mismo signo. En nuestro caso:

$a_2 = 1 > 0$, $a_1 = \sigma + 1 > 0$ ya que $\sigma > 0$ y solo nos queda $a_0 = \sigma(1 - r) > 0 \iff 1 - r > 0 \iff r < 1$.

Por lo tanto, el origen es estable cuando $0 < r < 1$. Ahora vamos a ver cuándo son estables p_2 y p_3 . En primer lugar linealizamos el sistema:

$$JF(p_2) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}.$$

Ahora vamos a calcular el polinomio característico:

$$\begin{aligned} |\lambda I - JF(p_2)| &= \begin{vmatrix} \lambda + \sigma & -\sigma & 0 \\ -1 & \lambda + 1 & \sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} & -\sqrt{b(r-1)} & \lambda + b \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1). \end{aligned}$$

Vamos a utilizar el criterio de Routh-Hurwitz para ver cuándo es estable este polinomio característico.

Consideramos la matriz de Routh-Hurwitz:

$$A = \begin{pmatrix} \sigma + b + 1 & 1 & 0 \\ 2b\sigma(r - 1) & b(\sigma + r) & \sigma + b + 1 \\ 0 & 0 & 2b\sigma(r - 1) \end{pmatrix}.$$

Tenemos que ver para qué valores de r son positivos todos los menores principales de A .

$|A_1| = \sigma + b + 1 > 0$ ya que $\sigma > 0$ y $b > 0$.

$$|A_2| = \begin{vmatrix} \sigma + b + 1 & 1 \\ 2b\sigma(r - 1) & b(\sigma + r) \end{vmatrix} = b(\sigma^2 + (r + b + 1)\sigma + r(b + 1)) - 2b\sigma(r - 1).$$

Si operamos para ver cuándo nos queda mayor que cero, resulta que

$$A_2 > 0 \text{ cuando } r < \sigma \left(\frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1} \right).$$

Por último

$$|A_3| = |A| = 2b\sigma(r - 1)|A_2|,$$

y como $|A_2| > 0$, entonces tiene que ser $2b\sigma(r - 1) > 0 \Rightarrow r > 1$.

Así que nos queda que p_2 es estable cuando $1 < r < \sigma \left(\frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1} \right)$.

Análogamente se prueba que p_3 es estable para los mismos valores de r .

Con esto hemos obtenido mayor información sobre el atractor de Lorenz.

Las trayectorias se mueven en espiral alrededor de los puntos críticos p_2 y p_3 . Además también hemos probado que efectivamente las soluciones son simétricas con eje de simetría z .

Anexo B

El teorema de Euler

En Teoría de Números, este Teorema afirma una proposición sobre la divisibilidad de números enteros.

Función φ de Euler

Si n es un número entero positivo, se define $\varphi(n)$ como el número de enteros positivos menores o iguales a n y primos relativos con n , esto es:

$$\varphi(n) = |\{m \in \mathbb{N} : m \leq n \text{ y } \text{mcd}(n, m) = 1\}|.$$

De acuerdo con esta definición, tenemos las siguientes propiedades:

1. La función φ viene dada de la siguiente forma:

$$\varphi(p) = \begin{cases} p - 1, & \text{si } p \text{ es primo,} \\ (q - 1)q^{k-1}, & \text{si } p = q^k \text{ con } q \text{ primo.} \end{cases}$$

2. Es una función multiplicativa, esto es, si m y n son primos relativos, $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

Vamos a ver con un ejemplo que esto se cumple.

Tomamos $n = 18 = 2 \cdot 3^2$. Los enteros positivos menores que 18 y primos relativos con él son $\{1, 5, 7, 11, 13, 17\}$, entonces utilizando la definición nos queda que $\varphi(18) = 6$. Ahora vamos a ver que obtenemos lo mismo utilizando las propiedades de la función.

$$\varphi(18) = \varphi(2)\varphi(3^2) = (2 - 1)(3 - 1)3^{2-1} = 6.$$

Ahora que ya conocemos la función φ podemos pasar a enunciar el teorema.

Teorema B.0.1 (*Teorema de Euler, [10]*)

Si a y n son enteros primos relativos, entonces $a^{\varphi(n)} - 1$ es divisible por n , esto es, $a^{\varphi(n)} = 1 \pmod{n}$.

Una aplicación de Teorema de Euler es la resolución de ecuaciones de congruencia. En teoría de números, se dice que dos números a, b son congruentes respecto a un módulo n , cuando n divide al entero $a - b$.

Veamos un ejemplo que ilustre esto.

Tenemos la ecuación $2x \equiv 5 \pmod{7}$ y queremos hallar sus soluciones.

El Teorema de Euler nos dice que $2^{\varphi(7)} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 2^6 \equiv 1 \pmod{7}$.

Ahora, tomamos nuestra ecuación y multiplicamos a ambos lados por 2^5 :

$$2^5 2x = 2^5 5 = 160 \equiv 6 \pmod{7} \Rightarrow 2^6 x \equiv 6 \pmod{7} \Rightarrow x \equiv 6 \pmod{7}.$$

Vamos a verificar el resultado con un caso concreto:

$$\text{Tomamos } x = 27 \equiv 6 \pmod{7} \Rightarrow 2 \cdot 27 = 54 \equiv 5 \pmod{7}.$$

Como caso particular del teorema de Euler podemos presentar el pequeño teorema de Fermat.

Teorema B.0.2 (*Pequeño teorema de Fermat*)

Si p es un número primo, entonces para cada número natural a primo relativo con p se cumple que $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Claramente se trata de un caso particular del teorema de Euler, ya que en este caso al ser p un número primo, $\varphi(p) = p - 1$ y entonces $a^{\varphi(p)} = a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Una de las aplicaciones más interesantes de este teorema es el test de primalidad de Fermat. Este teorema establece una condición necesaria para que un número sea primo: es necesario que $\forall a \in \mathbb{N}$, $a < p$, $a^{p-1} - 1$ sea divisible por p (es decir, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$). Por lo tanto, si p es primo la congruencia se cumplirá siempre, mientras que si para algún valor a la congruencia no se cumple entonces p no es primo.

Anexo C

Los números diádicos

Un número diádico es un número real que se puede expresar como cociente de dos números naturales, donde el denominador es potencia de 2. El conjunto de los números diádicos en $[0, 1]$ se denota por D y tiene la siguiente forma:

$$D = \left\{ \frac{m}{2^k} : k \in \mathbb{N}, m = \{0, 1, 2, \dots, 2^k\} \right\}.$$

Vamos a probar que D es denso en $[0, 1]$.

Tenemos que probar que $\forall a, b \in [0, 1]$ tales que $a < b$, $\exists m \in \{0, 1, 2, \dots, 2^k\}$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $a < \frac{m}{2^k} < b$.

Tomamos k suficientemente grande para que $\frac{1}{2^k} < b - a$. Sea n_0 el menor entero tal que $n_0 > 2^k a \Rightarrow \frac{n_0}{2^k} > a$.

Falta probar que $\frac{n_0}{2^k} < b$. Por reducción al absurdo supongamos que no es así, entonces tendríamos $\frac{n_0}{2^k} \geq b$. Luego

$$\frac{(n_0 - 1)}{2^k} = \frac{n_0}{2^k} - \frac{1}{2^k} \geq b - \frac{1}{2^k} \geq b - (b - a) = a.$$

Así que hemos obtenido que $(n_0 - 1) > 2^k a$ y esto es una contradicción ya que definimos n_0 como el menor entero que cumple $n_0 > 2^k a$.

Por lo tanto $\frac{n_0}{2^k} < b$ y entonces $a < \frac{n_0}{2^k} < b$. ■

Así queda probado que el conjunto D es denso en $[0, 1]$.

Anexo D

Código Matlab para control del caos

A continuación presentamos el código en Matlab que hemos utilizado para realizar la primera y segunda fase de control del comportamiento de la ecuación logística visto en el Capítulo 4.

Listing D.1: Control Caos

```
x0=0.87; r0=3.95;
tol=1e-14;
opciones=optimoptions('fsolve','TolFun',tol,'TolX',tol)
x(1)=fsolve('f9',r0,opciones)*x0*(1-x0);
%Primera fase
for i=1:48
    x(i+1)=r0*x(i)*(1-x(i));
end
%Segunda fase
x(50)=fsolve('f2',r0,opciones)*x(49)*(1-x(49));
for i=1:50
    x(i+50)=r0*x(i+49)*(1-x(i+49));
end
plot(x)
```

Las funciones que hemos utilizado son las siguientes:

Listing D.2: f9

```
function f9=f9(r)
x0=0.87;
r0=3.95;
b=(r0+1-sqrt((r0-3)*(r0+1)))/(2*r0);
f9=logistic(x0,r);
for i=1:8
    f9=logistic(f9,r0);
end
f9=f9-b;
```

Listing D.3: f2

```
function f2=f2(r)

r0=3.95;
b=(r0+1-sqrt((r0-3)*(r0+1)))/(2*r0);
f2=logistic(0.351915323282502,r);
f2=logistic(f2,r0)-b;
```

Listing D.4: logistic

```
function f= logistic(x,r)
f=r.*x.*(1-x);
```

Bibliografía

- [1] M.P. RAMÍREZ TACHIQUÍN, *Teoría del Caos: una visión de su historia y actualidad*, Revista del Centro de Investigación. Universidad La Salle, Vol. 9, No. 34, pp. 41-47, 2010.
- [2] E.LORENZ, *Deterministic nonperiodic flow*, Journal of the Atmospheric Sciences, Vol. 20, pp. 130-141, 1963.
- [3] D. GONZE, *The logistic equation*, 2015,
<http://homepages.ulb.ac.be/~dgonze/TEACHING/logistic.pdf>.
- [4] J. GUO, *Analysis of chaotic systems*, 2014,
<http://math.uchicago.edu/~may/REU2014/REUPapers/Guo.pdf>.
- [5] W.F. HASSAN AL-SHAMERI, M. ABDULKAWI MAHIUB, *Some Dynamical Properties of the Family of Tent Maps*, International Journal of Mathematical Analysis, Vol. 7, No. 29, pp. 1443-1449, 2013.
- [6] T.Y. LI, J.A. YORKE, *Period Three Implies Chaos*, The American Mathematical Monthly, Vol.82, No. 10, pp. 985-992, 1975.
- [7] J.P. MUTANGUHA, *Period three implies chaos*, 2016,
<http://euler.geneppeer.com/period-three/>.
- [8] N. DEWAELE, *An explanation of Period Three implies Chaos*, 2011,
http://www.siue.edu/~aweyhau/teaching/seniorprojects/dewaele_final.pdf.
- [9] J.L. LÓPEZ FERNÁNDEZ, *Un criterio de estabilidad para las soluciones constantes de $x_{n+1} = f(x_n)$ basado en el estudio de f'* , 2011,
<http://www.ugr.es/~jllopez/Clase5.pdf>.
- [10] J.B. FRALEIGH, *A first course in abstract algebra*, 1999, Ed.Addison Wesley, 6ª edición.

- [11] R.L.DEVANEY, *An introduction to chaotic dynamical systems*, 1989, Ed.Addison Wesley.
- [12] J.BANKS, J.BROOKS, G.CAIRNS, G.DAVIS, P.STACEY, *On Devaney's definition of chaos*, The American Mathematical Monthly, Vol. 99, No.4, pp. 332-334, 1992.
- [13] S.L. SALAS, E. HILLE, G.J. ETGEN, *Calculus, una y varias variables, volumen I*, 2002, Ed. Reverté, 4^a edición.
- [14] M. SPIVAK, *Calculus, cálculo infinitesimal*, 1990, Ed. Reverté, 2^a edición.
- [15] E.M. BOLLT, *Controlling the chaotic logistic map*, Primus, Vol. 7, No. 1, pp. 1-17, 1997.