

FACULTAD DE CIENCIAS

Resolución de la Ecuación de Poisson usando RBF

(Solving Poisson Equation using RBF)

Trabajo de fin de Máster para acceder al

MÁSTER EN MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Autora: Marina Esgueva Ruiz

Directores: Luis Alberto Fernández Fernández y Cecilia Pola Méndez

Julio-2017

Índice general

1	Resum	$en \dots \dots$	4				
2	Abstract						
3	Introd	$\operatorname{ucci}{\circ}{\mathrm{n}}$	4				
	3.1	Métodos de colocación	5				
	3.2	Funciones de base radial	6				
4	Resolu	ción numérica utilizando RBF gaussiana y MCI	8				
	4.1	Primeros experimentos numéricos	12				
	4.2	Elección del parámetro de forma	19				
	4.3	Variando el parámetro de forma en el dominio	22				
	4.4	Elección de centros	24				
5	Métod	o de las soluciones fundamentales	33				
	5.1	Transformación del problema	33				
	5.2	Soluciones fundamentales de algunos operadores	34				
	5.3	Determinación del número de puntos de colocación y del radio de la cir-					
		cunferencia de los centros	37				

1 Resumen

En los últimos años ha crecido el interés por los métodos de resolución de ecuaciones en derivadas parciales libres de malla, ya que presentan numerosas ventajas frente a los métodos tradicionales basados en mallados (diferencias finitas y elementos finitos). Este trabajo se centra en la resolución numérica de problemas de contorno tipo Dirichlet para la ecuación de Poisson utilizando dos métodos de colocación basados en funciones radiales básicas: el primero usando RBF gaussianas y multicuádricas inversas y el segundo utilizando soluciones fundamentales del operador. En ambos casos llevamos a cabo diferentes experimentos numéricos con el objetivo de determinar la influencia de algunos factores en la calidad del resultado.

2 Abstract

The interest in meshfree methods for solving PDE has grown considerably in recent years because of the numerous advantages that they have over traditional methods based on meshes (such as finite differences or finite elements). In this work we focus on the numerical resolution of Dirichet boundary value problems involving Poisson equation using two collocations methods based on radial basis functions. The first one uses gaussian and inverse multiquadric RBF and the second one uses fundamental solutions of the operator. In both cases, we perform different numerical experiments in order to show the influence that some factors have on the quality of the result.

3 Introducción

Los métodos de resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales (EDP) más utilizados tradicionalmente son los métodos de diferencias finitas o elementos finitos, que se basan en la discretización del dominio mediante un mallado. En general, la generación de una malla adecuada para el problema requiere gran esfuerzo computacional, sobre todo en dimensiones mayores que 2. Además, el orden de convergencia de estos métodos obliga a utilizar discretizaciones muy finas, lo que conlleva el uso de mallados con un gran número de elementos.

Las desventajas asociadas a estos métodos de resolución de EDP han suscitado un gran interés durante los últimos décadas por los métodos libres de malla, especialmente en las aplicaciones en ingeniería. El éxito de estos métodos en la práctica, a pesar de la ausencia de una teoría matemática completa con resultados de convergencia para situaciones muy generales (que se ha iniciado muy recientemente, ver [11]), ha motivado la aparición de numerosos trabajos dedicados fundamentalmente a la experimentación computacional. Esta situación es similar a la que se vivió con el método de elementos finitos en su momento. Este trabajo sigue esa línea y se centra en la resolución numérica de problemas de contorno tipo Dirichlet para la ecuación de Poisson utilizando dos métodos de colocación basados en funciones radiales básicas, RBF por sus siglas en inglés. El primero es el método de colocación propuesto por Kansa en 1990 ([8]) en

un intento de extender el uso de las RBF, tipo gaussiana o multicuádrica inversa, del ámbito de la interpolación a la resolución de EDP. Estas funciones habían demostrado ser de gran utilidad para resolver problemas de interpolación en varias variables, como se estudió en [4]. El segundo es el método de soluciones fundamentales ya conocido con anterioridad ([6]).

3.1 Métodos de colocación

Los métodos de colocación son métodos libres de malla para la resolución de problemas de contorno. Dado un conjunto de funciones $\{B_1, \ldots, B_N\}$, denominadas funciones básicas, la idea del método es buscar soluciones de la forma:

$$\hat{u}(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i B_i(x),$$
(3.1)

donde $\alpha_i \in \mathbb{R}, \ 1 \leq i \leq N$.

Además de las funciones básicas se escoge un conjunto de puntos en el dominio a los que se denominará **puntos de colocación**: $\{x_1, \ldots, x_N\}$. La elección de estos puntos es libre y no se basa en la generación de mallas. La idea del método es buscar soluciones que verifiquen la EDP y las condiciones frontera en los puntos de colocación.

Consideramos el siguiente problema de contorno:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$
(3.2)

La solución se determina resolviendo un sistema de ecuaciones lineales. En efecto, si $\{x_1, \ldots, x_{n_i}\}$ son los puntos de colocación en el dominio, Ω , y $\{x_{n_i+1}, \ldots, x_N\}$ son los puntos de colocación en la frontera, el sistema es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}B_{1}(x_{1}) & \dots & \mathcal{L}B_{N}(x_{1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{L}B_{1}(x_{n_{i}}) & \dots & \mathcal{L}B_{N}(x_{n_{i}}) \\ B_{1}(x_{n_{i}+1}) & \dots & B_{N}(x_{n_{i}+1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1}(x_{N}) & \dots & B_{N}(x_{N}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1} \\ \vdots \\ \alpha_{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_{1}) \\ \vdots \\ f(x_{n_{i}}) \\ g(x_{n_{i}+1}) \\ \vdots \\ g(x_{N}) \end{pmatrix}.$$
(3.3)

Cada ecuación está asociada a la verificación de la EDP o de las condiciones frontera en cada uno de los puntos de colocación, según corresponda, y las variables del sistema son los coeficientes de la solución candidata (3.1).

Otra de las ventajas de los métodos de colocación, además de la ausencia de malla, es la sencillez de su implementación, sobre todo si las condiciones frontera son de tipo Dirichlet.

La solución que proporcionan los métodos de colocación es regular siempre que los datos del problema, \mathcal{L} , f, g y Ω , también lo sean.

3.2 Funciones de base radial

Definición 3.1 Dada $\Phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, se dice que Φ es una **función de base radial** (o RBF) si existe una función $\varphi : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ tal que:

$$\Phi(x) = \varphi(r),$$

donde r = ||x|| y ||.|| es cualquier norma en \mathbb{R}^n .

En este trabajo, las RBF se han definido utilizando la norma euclídea.

A la definición de las RBF se añade un parámetro $\epsilon > 0$ al que se denominará **parámetro de forma** y tiene como objetivo dotar de más flexibilidad a la forma de las RBF. Se define:

$$\varphi_{\epsilon}(r) = \varphi(\epsilon r).$$

Existen numerosas familias de RBF, pero en el trabajo se han utilizando estas dos:

• Funciones gaussianas:

$$\varphi_{\epsilon}(r) = e^{-(\epsilon r)^2}$$

• Funciones multicuádricas inversas (MCI):

$$\varphi_{\epsilon}(r) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\epsilon r)^2}}.$$



Figura 1: RBF gaussianas tomando diferentes valores de $\epsilon = 0.3$ (arriba a la izquierda), $\epsilon = 1$ (arriba a la derecha), $\epsilon = 2$ (abajo).



Figura 2: RBF multicuádrica tomando para diferentes valores de $\epsilon = 0.3$ (arriba a la izquierda), $\epsilon = 1$ (arriba a la derecha), $\epsilon = 2$ (abajo).

Las funciones de ambas familias alcanzan el máximo en el origen y tienden a cero a medida que nos alejamos de éste. El parámetro de forma influye en los dos tipos de RBF de la misma manera. Las funciones son más suaves y tienden más lentamente a cero para valores pequeños de ϵ . A medida que este parámetro aumenta el decrecimiento de la función es más rápido y la zona del máximo es más pronunciada. La principal diferencia entre ambas familias de RBF es la velocidad con que las funciones tienden a cero. Las gaussianas decrecen más rapidamente que las multicuádricas inversas.

El trabajo se estructura en dos partes bien diferenciadas:

- En la primera parte se presenta el método de colocación para resolver problemas de contorno utilizando RBF gaussianas y multicuádricas inversas. Nos centramos en el estudio del problema de Poisson y llevamos a cabo diferentes experimentos numéricos con el objetivo de determinar la influencia de algunos factores en la calidad del resultado.
- La segunda parte está dedicada al método de soluciones fundamentales para resolver problemas de contorno involucrando EDP homogéneas. También estudiamos su aplicación al problema de Poisson y la influencia que tienen otros factores en los resultados obtenidos.

La experimentación numérica ha sido una parte fundamental del trabajo y en cada sección se presenta un resumen con los resultados más relevantes de todos los que se han obtenido. Se han llevado a cabo utilizando MATLAB y todos los códigos han sido desarrollados de forma

autónoma. Además de la implementación de los métodos incluidos en el trabajo, también se han desarrollado algoritmos de elección de algunos parámetros propios de cada método y estimadores del error cometido en la aproximación, entre otros. Para resolver los problemas de optimización que han surgido en el desarrollo de la experimentación se han utilizado funciones de la "Toolbox" de optimización de MATLAB.

Una parte básica de la experimentación numérica ha sido la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y llama la atención que durante todo el trabajo las matrices involucradas en estos sistemas tienen condicionamientos elevados, llegando a ser del orden de 10^{17} o incluso superiores. Sin embargo, sorprendentemente se obtienen soluciones de gran calidad.

4 Resolución numérica utilizando RBF gaussiana y MCI

Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ consideramos el siguiente problema de contorno:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$
(4.1)

donde \mathcal{L} es un operador diferencial lineal.

El método de colocación propuesto por Kansa ([8]) consiste en buscar soluciones de la forma:

$$\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \varphi(||x - c_j||).$$
(4.2)

El conjunto $C = \{c_1, \ldots, c_N\}$ se denomina conjunto de **centros de las RBF**. El aproximante \hat{u} es una combinación lineal de RBF centradas en diferentes puntos.

Para resolver la ecuación se selecciona un conjunto de centros $C = \{c_1, \ldots, c_N\}$ y un conjunto de puntos de colocación $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_N\}$. Aunque estos conjuntos pueden tomarse diferentes, en este trabajo los elegimos iguales. Los n_i primeros puntos de colocación están en el dominio y los restantes en la frontera.

Una vez fijados los centros, los coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ se determinan resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$A\alpha = b. \tag{4.3}$$

La matriz A se denomina **matriz de colocación** y es de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\mathcal{L}} \\ \tilde{A} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \tag{4.4}$$

 \cos

$$(\tilde{A}_{\mathcal{L}})_{ij} = \mathcal{L}\varphi(||x - c_j||)|_{x = x_i} \text{ si } 1 \le i \le n_i,$$

 $\tilde{A}_{ij} = \varphi(||x_i - c_j||) \text{ si } n_i + 1 \le i \le N.$

$$b = \begin{bmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{g} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N \tag{4.5}$$

 \cos

$$f_i = f(x_i), \text{ si } 1 \le i \le n_i,$$

 $\tilde{g}_i = g(x_i), \text{ si } n_i + 1 \le i \le N$

Como es bien conocido, el sistema (4.3) tiene solución única siempre que la matriz A sea regular. Para el problema de interpolación en varias variables, en [4] se demuestra que bajo ciertas condiciones se puede garantizar la existencia y unicidad del sistema lineal asociado. Sin embargo, no se puede garantizar que la matriz de colocación sea inversible en el caso de la resolución de problemas de contorno. Los resultados de interpolación no se pueden generalizar, ya que ahora las filas de la matriz se construyen a partir de diferentes funciones dependiendo de si el punto de colocación está en el interior del dominio o en la frontera. Además, dependiendo del operador \mathcal{L} , puede que $\mathcal{L}\varphi(||x - c_j||)$ ni siquiera sea una función radial. Aunque en la práctica se observa que en la mayor parte de los casos las matrices de colocación son inversibles, se pueden construir ejemplos académicos para los que no lo son, como se demuestra en [7]. Algunos autores como Fasshauer ([5]) han presentado una modificación del método de Kansa para garantizar la simetría de las matrices de colocación, pero el método simétrico no se estudia en este trabajo. También podría contemplarse que el número de puntos de colocación sea mayor que el número de centros. En ese caso la matriz (4.4) no sería cuadrada y el problema se podría resolver utilizando técnicas de mínimos cuadrados. En este trabajo no se incluye este tema.

Como las RBF que vamos a considerar tienden a cero cuando $||x|| \to \infty$, el valor que toma un aproximante en un punto depende, principalmente, de los valores que tomen las RBF asociadas a los centros cercanos. Además, cuanto menor es el parámetro de forma las RBF tienen influencia sobre una región más amplia alrededor de su centro. Por lo tanto, parece que cuanto más pequeño se tome el parámetro de forma, un mayor número de puntos de colocación influirá en el valor que tome el aproximante en un punto. Por otra parte, se puede comprobar que utilizar parámetros de forma pequeños aumenta el condicionamiento de las matrices de colocación, pudiendo ser grande el error cometido al resolver el sistema (4.3). Este fenómeno, que se conoce como **principio de incertidumbre**, quedará de manifiesto en los experimentos numéricos llevados a cabo más adelante. Sin embargo, en nuestros experimentos hemos obtenido siempre resultados de buena calidad a pesar de trabajar con condicionamientos grandes.

Algo similar sucede con la elección del número de centros. Si se utilizan muchos, dado un punto del dominio, éste tendrá más centros a su alrededor y por lo tanto utilizará más información y se cometerá un error menor. Por otra parte, la existencia de centros cercanos entre sí aumenta el condicionamiento de las matrices de colocación.

Por lo tanto, a la hora de seleccionar el número de centros y el parámetro de forma hay que tener

en cuenta este principio de incertidumbre y elegirlos de forma que se garantice la calidad de la solución pero evitando que las matrices de colocación tengan un condicionamiento desorbitado.

La calidad de las soluciones aproximadas obtenidas con el método de las RBF depende fuertemente de diversos parámetros que influyen en el mismo. Algunos de estos parámetros son la distribución de centros y su número, el tipo de RBF utilizadas como funciones básicas y el parámetro de forma de dichas funciones. Para medir la calidad de las aproximaciones calculadas, se utiliza el error cuadrático medio, denotado por ECM, que se calcula de la siguiente forma:

$$ECM = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \left(\frac{u(y_i) - \hat{u}(y_i)}{\max\{|u(y_i)|, 1\}}\right)^2},$$

donde, y_1, \ldots, y_M son puntos distribuidos en una rejilla uniforme en el dominio, u es la solución exacta del problema y \hat{u} es la solución aproximada. En los diferentes experimentos numéricos que se han llevado a cabo en el trabajo hemos tomado 1600 puntos para determinar el error y se han distribuido en una rejilla uniforme en $[0, 1] \times [0, 1]$.

Sin embargo, en la práctica, no disponemos de la solución exacta del problema de contorno, por lo que más adelante se definirá una función que estime el error y que pueda ser calculada sin más datos que la ecuación y sus condiciones frontera.

Durante la experimentación numérica trabajamos con los siguientes problemas de contorno, definidos en $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$:

Primer ejemplo

$$\begin{cases} \Delta u(x_1, x_2) = -\frac{5}{4} \pi^2 \sin(\pi x_1) \cos(\frac{\pi x_2}{2}), & (x_1, x_2) \in \Omega, \\ u(x_1, x_1) = \sin(\pi x_1), & (x_1, x_2) \in \Gamma_1, \\ u(x_1, x_2) = 0, & (x_1, x_2) \in \Gamma_2, \end{cases}$$
(4.6)

donde $\Gamma_1 = \{(x_1, x_2) : 0 \le x_1 \le 1, x_2 = 0\}$ y $\Gamma_2 = \partial \Omega \setminus \Gamma_1$. Se puede verificar fácilmente que la solución del problema es:

$$u(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1) \cos\left(\frac{\pi x_2}{2}\right).$$



Figura 3: Solución exacta del problema (4.6)

Segundo ejemplo

$$\begin{cases} \Delta u(x_1, x_2) = 8e^{2x_1 + 2x_2}, & (x_1, x_2) \in \Omega, \\ u(x_1, x_2) = e^{2x_1 + 2x_2}, & (x_1, x_2) \in \partial\Omega. \end{cases}$$
(4.7)

Es fácil ver que la solución del problema es $u(x_1, x_2) = e^{2x_1 + 2x_2}$.



Figura 4: Solución exacta del problema (4.7)

Se han elegido dos ecuaciones de Poisson con condiciones frontera Dirichlet. Sus soluciones son funciones regulares y la diferencia principal entre ambas es que la segunda alcanza el máximo en una de las esquinas del dominio mientras que la primera lo alcanza en el punto medio del segmento Γ_1 . También se diferencian en el rango de valores de su imagen: mientras que la primera toma valores en el intervalo [0, 1], la segunda lo hace en el intervalo $[0, e^4]$.

Aunque en este trabajo consideramos problemas de contorno con ecuación de Poisson y condiciones de frontera Dirichlet, el método se puede aplicar también a problemas con otros operadores o con condiciones frontera más complejas. Además, se puede generalizar a dimensiones mayores.

4.1 Primeros experimentos numéricos

En los primeros experimentos llevados a cabo se trabaja con un parámetro de forma fijo, $\epsilon = 3$, tomando como RBF las multicuádricas inversas y variando el número de centros, N. Además se distingue entre situar todos los centros en $\overline{\Omega}$ o desplazar los de la frontera ligeramente fuera de $\overline{\Omega}$. Los centros en $\overline{\Omega}$ se distribuyen en una rejilla uniforme en el dominio como muestra la siguiente figura:



Figura 5: Distribución de los centros. A la izquierda, todos los centros en $\overline{\Omega}$ y a la derecha, algunos centros desplazados fuera de $\overline{\Omega}$.

En las tablas 1 y 2 se recoge el ECM cometido con cada aproximación así como el condicionamiento de la matriz de colocación utilizada.

	С	entros en $\overline{\Omega}$	Centros	fuera del dominio
N	ECM Condicionamiento		ECM	Condicionamiento
9	1.55e-01	5.55e + 01	1.68e-01	$6.01e{+}01$
25	3.41e-02	5.76e + 02	2.40e-02	6.18e + 02
81	5.73e-03	1.50e + 05	3.28e-03	1.27e + 05
169	1.47e-03	3.46e + 07	8.29e-04	1.97e + 07
289	4.17e-04	7.64e + 09	2.34e-04	2.99e + 09
1089	3.69e-06	8.37e + 19	2.15e-06	5.97e + 18

Tabla 1: Comparación de la distribución de centros. $\epsilon = 3$. RBF: MCI. Ejemplo (4.6)

	C	entros en $\overline{\Omega}$	Centros fuera del dominio	
N	ECM	Condicionamiento	ECM	Condicionamiento
9	1.17e-01	4.88e + 02	1.28e-01	3.77e + 02
25	1.08e-02	6.81e + 05	1.53e-02	3.75e + 05
81	2.82e-04	1.14e + 12	1.32e-03	8.76e + 11
169	4.10e-05	8.07e + 17	1.07e-03	1.13e + 18
289	5.08e-05	2.78e + 19	2.62e-05	1.24e + 19
1089	9.20e-05	5.57e + 20	1.49e-04	1.59e + 20

Tabla 2: Comparación de la distribución de centros. $\epsilon = 3$. RBF: MCI. Ejemplo (4.7)

En la tabla 1, asociada al ejemplo (4.6), observamos que aumentar el número de centros, N, mejora la calidad de las soluciones aproximadas a pesar de que el condicionamiento de las matrices de colocación aumenta. En la mayoría de los casos, el error cometido en la aproximación es menor si desplazamos los centros correspondientes a la frontera fuera de $\overline{\Omega}$. Sin embargo, estas diferencias no son significativas. En la tabla 2, asociada al ejemplo (4.7), no siempre disminuye el error al aumentar el número de centros. Este aumento del error se produce para valores de N superiores a 250, por lo que el condicionamiento de las matrices de colocación puede ser la causa de este fenómeno. Además, en este caso no se cumple que la calidad de la aproximación sea mayor al desplazar los centros fuera del dominio. De aquí en adelante los centros se sitúan en $\overline{\Omega}$.

Las figuras 6, 7, 8 y 9 muestran algunos ejemplos de las funciones recuperadas y de la distribución del ECM cometido con la aproximación. Se han utilizado funciones multicuádricas inversas para obtener los resultados y los centros se han situado en $\overline{\Omega}$.



Figura 6: Funciones recuperadas. Ejemplo (4.6) (izquierda) y (4.7) (derecha). N = 9



Figura 7: Funciones recuperadas. Ejemplo (4.6) (izquierda) y (4.7) (derecha). N = 25



Figura 8: Error relativo. Ejemplo (4.6) (izquierda) y (4.7) (derecha). N = 9



Figura 9: Error relativo. Ejemplo (4.6) (izquierda) y (4.7) (derecha). N = 25

En las figuras 6 y 7 se observa que con pocos centros se recupera el perfil de la solución exacta del problema (4.6). Sin embargo, los resultados no son igualmente satisfactorios para la solución de (4.7), ya que con 9 centros no es posible recuperar el perfil en la zona del máximo, aunque elevando el número de centros a 25 los resultados obtenidos son mucho mejores.

En cuanto a la distribución del error, en las figuras 8 y 9 se observa de nuevo que la zona del máximo es la parte más difícil de aproximar en el ejemplo (4.7). También observamos que los mayores errores se acumulan en zonas cercanas a la frontera, sobre todo en el caso N = 25 (figura 9). En [4] también se observaba la acumulación del error en la frontera, de ahí que se plantee la posibilidad de situar algunos centros ligeramente fuera de $\overline{\Omega}$ para tratar de atenuar los errores en esta zona.

En la siguiente tabla comparamos el uso de dos RBF diferentes: la gaussiana y la multicuádrica inversa. Los experimentos se han llevado a cabo fijando el valor del parámetro de forma, $\epsilon = 1$, y situando los centros en $\overline{\Omega}$. Comparamos el error cometido en la resolución y el condicionamiento de las matrices de colocación utilizando cada uno de los dos tipos de RBF.

		MCI		Gaussiana	
İ	N	ECM	Condicionamiento	ECM	Condicionamiento
	9	3.73e-02	4.88e + 02	1.22e-02	1.04e + 03
2	25	3.74e-03	6.81e + 05	6.53e-04	9.13e + 08
8	81	1.08e-04	1.14e + 12	6.21 e- 07	$3.85e{+}19$
1	69	4.16e-06	4.14e + 17	1.28e-06	1.67e + 19
2	89	5.68e-06	4.58e + 19	1.25e-06	1.88e + 19
10)89	1.76e-06	4.27e + 21	1.22e-06	7.68e + 20

Tabla 3: Comparación de diferentes RBF. $\epsilon = 1$. Centros en $\overline{\Omega}$. Ejemplo (4.6)

Se observa que las aproximaciones obtenidas utilizando funciones gaussianas cometen un error menor que las que utilizan las multicuádricas inversas. Sin embargo, utilizando estas últimas, el condicionamiento de las matrices de colocación crece más lentamente al aumentar el número de centros.

Ahora variamos el parámetro de forma para ver cómo afecta a la calidad de los resultados. Fijamos 289 centros distribuidos uniformemente y medimos el ECM para distintos valores del parámetro de forma ϵ . Situamos los centros de la frontera ligeramente fuera de $\overline{\Omega}$.

		MCI	Gaussiana	
ϵ	ECM	Condicionamiento	ECM	Condicionamiento
1	5.68e-06	$4.58e{+}19$	1.26e-06	1.88e + 19
3	4.17e-04	7.64e + 09	2.12e-06	2.32e + 19
6	2.95e-03	$8.01e{+}05$	1.38e-03	$1.01e{+}12$
9	6.07e-03	4.72e + 04	7.71e-03	3.40e + 06

Tabla 4: Variación del parámetro de forma. N = 289. Ejemplo (4.6)

Tabla 5: Variación del parámetro de forma. N = 289. Ejemplo (4.7)

		MCI	Gaussiana		
ϵ	ECM	Condicionamiento	ECM	Condicionamiento	
1	6.76e-05	$3.19e{+}19$	9.17e-04	6.03e + 19	
3	6.15e-04	2.99e + 09	5.92e-04	7.24e + 20	
6	2.39e-03	1.99e + 06	4.49e-03	$5.91e{+}11$	
9	3.16e-03	2.98e + 05	2.00e-02	1.14e + 06	

Se observa que el ECM aumenta considerablemente al aumentar el valor del parámetro de forma, por lo que podemos afirmar que la calidad de la aproximación es muy sensible al parámetro utilizado. Sin embargo, el condicionamiento de la matriz de colocación sigue la tendencia contraria, y es mayor para valores pequeños del parámetro. Por otra parte, en estos experimentos, al variar el parámetro de forma el error no siempre es menor al utilizar gaussianas como RBF.



Figura 10: Evolución del ECM al variar el parámetro de forma. Comparación entre RBF multicuádrica inversa (izquierda) y gaussiana (derecha). Ejemplo (4.6). N = 25



Figura 11: Evolución del condicionamiento de las matrices de colocación al variar el parámetro de forma. Comparación entre RBF multicuádrica inversa (izquierda) y gaussiana (derecha). Ejemplo (4.6). N = 25.

Junto con la Tabla 4, las figuras 10, 11, 12 y 13 reflejan la importancia que tiene el parámetro de forma en la calidad de los aproximantes obtenidos. El condicionamiento de las matrices de colocación sigue una tendencia clara, independientemente del tipo de RBF o del número de centros empleados, disminuyendo a medida que crece el valor de ϵ . En cambio, el ECM no es

monótono. Comienza disminuyendo rápidamente hasta alcanzar su valor mínimo, a partir del cual crece aunque más lentamente. El tipo de RBF, el problema considerado o el número de centros son factores que influyen en el parámetro de forma óptimo, como muestran las figuras 10, 12 y 13.



Figura 12: Evolución del ECM. Ejemplo (4.6) a la izquierda y ejemplo (4.7) a la derecha. RBF: MCI. N=169



Figura 13: Evolución del ECM. N = 25 a la izquierda y N = 169 a la derecha. Ejemplo (4.6). RBF: MCI

Como se observa en todos estos experimentos, la calidad de los resultados depende de diferentes aspectos como el número y la distribución de los centros o de parámetro de forma de las RBF. Aumentar el número de centros disminuye el error en la aproximación aunque el condicionamiento del problema aumente. Por lo tanto, merece la pena elegir una buena distribución de los centros que permita obtener buenos resultados sin utilizar demasiados. Más adelante se presentará un algoritmo con este objetivo. Por otra parte, también se deben estudiar diferentes estrategias para determinar el parámetro de forma.

4.2 Elección del parámetro de forma

Hemos visto en la tablas 4 y 5 que el ECM varía en varios órdenes de magnitud al emplear diferentes valores del parámetro ϵ . Por lo tanto, es conveniente disponer de un método para la elección de un parámetro de forma adecuado a la hora de resolver un problema. Dedicaremos esta sección a ese fin. En [4], en el ámbito de la interpolación, utilizamos el algoritmo de Rippa ([9]), que usa técnicas de validación cruzada suponiendo conocido el valor de la función en cada nodo de interpolación. Para la resolución de problemas de contorno no es posible generalizar este algoritmo porque solo conocemos la solución exacta en la frontera y la información de la que disponemos en el interior es sobre la EDP.

Desde el punto de vista teórico definimos el parámetro de forma óptimo como el valor $\bar{\epsilon}$ solución del problema:

$$\left\{\min_{\epsilon \in (0, +\infty)} ECM(\epsilon) \right.$$
(4.8)

Sin embargo, habitualmente no es posible calcular el ECM ya que no disponemos de la solución exacta del problema. Con el objetivo de poder determinar en la práctica un parámetro de forma adecuado vamos a definir una estimación del ECM, que llamaremos \overline{ECM} y elegiremos como estimación del parámetro óptimo el valor de $\tilde{\epsilon}$ solución de:

$$\left\{\min_{\epsilon \in [0,10]} \overline{ECM}(\epsilon) \right.$$

$$(4.9)$$

Para definir la función \overline{ECM} aprovechamos que se conoce el valor de solución en la frontera, g, y el del término fuente, f, en el interior del dominio. Tomamos M puntos, $\{y_1, \ldots, y_M\}$, distribuidos en una malla uniforme en $\overline{\Omega}$. Los m primeros puntos están en el interior y los restantes en la frontera. En los experimentos numéricos llevados a cabo hemos tomado M = 1600. Definimos \overline{ECM} como:

$$\overline{ECM}(\epsilon) = \sqrt{\left(\frac{1}{M} \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{f(y_i) - \mathcal{L}\hat{u}_{\epsilon}(y_i)}{\max\{1, |f(y_i)|\}}\right)^2 + \sum_{i=m+1}^{M} \left(\frac{(g(y_i) - \hat{u}_{\epsilon}(y_i))}{\max\{1, |g(y_i)|\}}\right)^2\right]}.$$
(4.10)

A continuación, se comprueba que la función \overline{ECM} es realmente un buen estimador del ECM. Para ello representamos ambas funciones conjuntamente para los dos ejemplos considerados, variando el número de centros y el tipo de RBF utilizado en la aproximación. La curva roja se corresponde con la estimación del error y la azul con el ECM.



Figura 14: ECM y \overline{ECM} . Ejemplo (4.6). RBF: MCI. N = 9 (izquierda), 169 (derecha)



Figura 15: ECM y \overline{ECM} Ejemplo (4.6). RBF: gaussiana. N = 9 (izquierda), 169 (derecha)

En las figuras 14 y 15 se observa que la función \overline{ECM} sobreestima el ECM pero que ambas tienen el mismo perfil y alcanzan el mínimo global en puntos cercanos. Por lo tanto, esta estimación parece adecuada para determinar el parámetro de forma óptimo, para los ejemplos propuestos. En la siguiente tabla comparamos el valor óptimo del parámetro de forma con el estimado y los correspondientes errores.

N	$\overline{\epsilon}$	$ECM(\bar{\epsilon})$	${ ilde\epsilon}$	$ECM(\tilde{\epsilon})$
25	2.93e-01	1.34e-04	2.90e-01	1.36e-04
81	4.39e-01	1.05e-06	4.08e-01	1.54e-06
169	6.53e-01	2.52e-07	9.63e-01	3.35e-06
289	1.05e+00	2.67 e- 07	9.02 e- 01	3.36e-07
1089	2.44e+00	4.44e-07	9.93e-01	1.04e-06

Tabla 6: Comparación del parámetro óptimo con el estimado. RBF: MCI. Ejemplo (4.6)

Observamos que, en general, a medida que aumenta el número de centros, los valores estimados para ϵ se alejan más del óptimo aunque los errores cometidos con ambos parámetros son similares. Ahora que se ha definido una estrategia para seleccionar el parámetro de forma óptimo para cada problema concreto, se pueden volver a realizar algunos de los experimentos llevados a cabo anteriormente. Por ejemplo, en la siguiente tabla, se compara el uso de RBF gaussianas o multicuádricas inversas, pero en lugar de utilizar el mismo parámetro para las dos bases de funciones se estima el óptimo para cada una de ellas.

Tabla 7: Comparación de RBF con la estimación del parámetro de forma óptimo. Ejemplo (4.6)

N	MCI		Gaussianas	
	ECM	Condicionamiento	ECM	Condicionamiento
9	1.95e-02	3.46e + 03	3.98e-01	1.10e+02
25	1.36e-04	$6.61e{+}12$	9.65e-05	$2.27e{+}11$
81	1.54e-06	7.18e + 18	2.23e-07	1.93e + 18
169	3.35e-06	5.36e + 17	1.01e-07	7.93e + 19
289	3.36e-07	$4.11e{+}19$	1.73e-07	1.38e + 20
1089	1.04e-06	1.71e + 20	1.76e-07	4.94e + 20

Tabla 8: Comparación de RBF con la estimación del parámetro de forma óptimo. Ejemplo (4.7)

N	MCI		Gaussianas	
	ECM Condicionamiento		ECM	Condicionamiento
9	4.74e-02	5.72e + 09	6.81e-02	5.76e + 10
25	1.84e-03	1.86e + 11	3.91e-03	$2.71e{+}17$
81	2.53e-05	4.28e + 16	6.49e-05	$8.92e{+}17$
169	2.91e-05	1.80e + 16	4.28e-05	1.80e + 19
289	8.35e-06	5.70e + 18	3.46e-05	2.54e + 19
1089	1.45e-05	2.21e+20	7.22e-05	6.32e + 21

En general, se han mejorado los resultados de las tablas 1, 2 y 3, con centros en $\overline{\Omega}$ y $\epsilon \in \{1, 3\}$.

Además, en la tabla 7 se observa que las funciones gaussianas cometen menor error que las inversas multicuádricas (excepto en el caso N = 9). En la tabla 8 se observa en cambio que son las RBF multicuádricas inversas las que cometen un error menor y con las que el condicionamiento de la matriz de colocación es más pequeño. Por lo tanto, no se puede afirmar que una base de funciones sea mejor que otra. En cada problema concreto, unas funciones darán mejores resultados que otras, aunque tomando una buena estimación del parámetro de forma, con cualquiera de ellas se obtienen buenos resultados. En las secciones siguientes, todos los resultados numéricos presentados corresponden a la RBF multicuádrica inversa.

4.3 Variando el parámetro de forma en el dominio

La elección del parámetro de forma tiene gran influencia en la calidad de los resultados, como hemos comprobado en los experimentos previos. Por lo tanto, además de una estimación del parámetro óptimo, se pueden llevar a cabo otras estrategias con el objetivo de mejorar la calidad del resultado. En [10] y [13] se introduce la idea de tomar diferentes parámetros de forma para los distintos centros, es decir, que el aproximante \hat{u} tenga la forma:

$$\hat{u}(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi_{\epsilon_i}(||x - c_i||),$$

donde los valores ϵ_i asociados a los centros pueden ser diferentes. Por ejemplo, se puede tomar un valor del parámetro de forma para los centros de Ω y otro valor diferente para los de $\partial\Omega$. Ya hemos observado que tomando valores pequeños de ϵ se cometen errores menores. Dada la especial importancia de las condiciones frontera del problema, donde se conoce la solución de manera exacta, podemos elegir un parámetro de forma menor para los centros situados en la frontera y, que de esta forma, los valores que la función toma en la misma tengan mayor influencia en el aproximante. Considerar diferentes valores del parámetro de forma introduce diferencias entre las filas y columnas de la matriz de colocación, eliminando cualquier estructura especial que ésta pueda tener y dificultando así su análisis teórico.

Hemos llevado a cabo experimentos numéricos para ver la eficacia del uso de un parámetro de forma variable. En primer lugar, utilizamos únicamente dos valores diferentes: uno asociado a los centros del interior del dominio y otro a los de su frontera. Comenzamos estimando el parámetro de forma óptimo para todo el dominio utilizando el algoritmo definido en la sección 4.2 y lo fijamos en el interior, estimando el óptimo para la frontera de forma que sea menor que en el interior. Los resultados obtenidos son los siguientes:

N	ϵ interior	ϵ frontera	ECM	Condicionamiento
9	6.97 e- 01	6.80e-01	1.86e-02	3.94e + 03
25	2.89e-01	2.61e-01	1.01e-03	9.38e + 10
81	4.08e-01	3.26e-01	7.40e-07	2.54e + 18
169	9.63e-01	5.81e-01	6.68e-07	4.23e + 18
289	9.02e-01	6.71e-01	5.95e-08	9.11e + 18
1089	9.92e-01	2.94e-01	4.73e-07	5.73e + 20

Tabla 9: Estimación del parámetro de forma óptimo para el ejemplo (4.6) distinguiendo entre interior y frontera. RBF: MCI.

Al comparar las tablas 7 y 9 se puede comprobar que, excepto en el caso N = 25, la calidad de las soluciones obtenidas es mayor si distinguimos el valor del parámetro de forma en el interior y en la frontera. Cuando se trabaja con un número reducido de centros las diferencias en el error que cometen cada una de las estrategias es menor, pero a partir de 81 centros estas diferencias son bastantes significativas.

En [10] introducen otras estrategias en las que cada centro tiene asociado un parámetro de forma diferente. Éste se puede determinar con expresiones como las siguientes:

$$\epsilon_j = \bar{\epsilon} \frac{1}{\sqrt{1 + K(-1)^j}},\tag{4.11}$$

$$\epsilon_j = \sqrt{\epsilon_{min}^2 \left(\frac{\epsilon_{max}^2}{\epsilon_{min}^2}\right)^{\frac{j-1}{N-1}}}.$$
(4.12)

En (4.11) el parámetro de forma varía alrededor del valor $\bar{\epsilon}$, que es el óptimo estimado para el problema. En (4.12) varía entre unos valores máximos y mínimos: ϵ_{max} y ϵ_{min} . En ambas estrategias el parámetro de forma elegido para cada centro depende de la numeración que se elija para éstos. En la primera, solo toma dos valores en función de si un centro es par o impar de acuerdo a la numeración elegida. Con la segunda estrategia se toma un valor diferente para cada centro pero, nuevamente, cambiar la numeración de los centros modifica la asignación de parámetros de forma. Para asociar un parámetro diferente a cada centro, parece más adecuado utilizar algún método en el que no influya el orden de los mismos.

Se puede estimar un valor óptimo del parámetro de forma para el interior y otro para la frontera y se calcula el parámetro asociado a cada centro con la siguiente expresión:

$$\epsilon = \tilde{\epsilon} \times (0.5 + a), \tag{4.13}$$

donde a sigue una distribución uniforme en el intervalo (0, 1) y $\tilde{\epsilon}$ es el óptimo estimado para el interior o la frontera según corresponda.

N	ECM	Condicionamiento
9	6.29e-02	2.84e + 03
25	3.94e-03	1.63e + 09
81	3.88e-05	1.31e + 18
169	2.74e-07	1.14e + 19
289	3.99e-08	5.76e + 18
1089	7.67e-10	1.46e + 20

Tabla 10: Estrategia aleatoria de elección de ϵ . RBF: MCI. Ejemplo (4.6)

Al comparar las tablas 9 y 10, se observa que las técnicas aleatorias para la elección del parámetro de forma proporcionan buenos resultados, especialmente cuando el número de centros es elevado.

4.4 Elección de centros

La elección del parámetro de forma es uno de los aspectos a tener en cuenta para mejorar la calidad de las soluciones obtenidas en la resolución numérica de problemas de contorno utilizando RBF, pero no es el único. Como se observa en las tablas 1, 2 y 3, el aumento del número de centros tiende a disminuir el ECM pero también provoca un aumento del tamaño de las matrices de colocación y del condicionamiento. Por ello, merece la pena diseñar algoritmos con el objetivo de encontrar una distribución óptima de los centros en el dominio disminuyendo así la talla del sistema. Hasta ahora, en los experimentos numéricos llevados a cabo, los centros se distribuían en una malla uniforme que cubría todo el dominio. Sin embargo, parece más adecuado que la distribución de los centros se adapte a cada problema concreto. En las zonas en las que los datos del problema ($f \ge g$) presenten gradientes pronunciados o alcancen extremos, parece, intuitivamente, que se necesitará situar más centros, mientras que las zonas más suaves se pueden aproximar con pocos.

Para definir un algoritmo adaptativo de elección de centros es necesario definir una función que estime el error de la aproximación de la solución en cada punto.

En los experimentos hemos utilizado diferentes funciones como estimadores:

• Estimador 1

Dado un aproximante \hat{u} de la función u, solución del problema (4.1), y $x \in \overline{\Omega}$, definimos la función Est_1 :

$$Est_{1}(x) = \begin{cases} \frac{|f(x) - \mathcal{L}(\hat{u})(x)|}{max\{1, |f(x)|\}}, & \text{si } x \in \Omega, \\ \frac{|g(x) - \hat{u}(x)|}{max\{1, |g(x)|\}}, & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$
(4.14)

Este estimador sigue la misma filosofía que el utilizado para calcular el parámetro de forma óptimo. Los estimadores que se presentan continuación siguen una estrategia diferente.

• Estimador 2

Dada una solución aproximada de (4.1), \hat{u} , asociada a los centros $\{c_1, \ldots, c_N\}$, se considera el aproximante \tilde{u} obtenido con los centros $\{\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_N\}$, generados al desplazar ligeramente los anteriores. A partir de ambas funciones, definimos Est_2 como:

$$Est_{2}(x) = \frac{|\hat{u}(x) - \tilde{u}(x)|}{max\{1, |\hat{u}(x)|\}}, \quad x \in \overline{\Omega}.$$
(4.15)

La figura 16 muestra cómo se desplazan los centros utilizados en la aproximación inicial para obtener el nuevo aproximante \tilde{u} . Los puntos azules son los centros iniciales y los verdes los desplazados. La longitud del desplazamiento es menor cuanto menor sea la distancia mínima entre centros.



Figura 16: Ejemplo del desplazamiento del conjunto de centros.

El objetivo de resolver el problema con dos conjuntos de centros similares es captar las zonas donde se producen mayores diferencias entre los aproximantes al realizar pequeñas modificaciones en el conjunto de centros. Es en esas zonas de mayor sensibilidad donde añadiremos nuevos centros.

Este estimador no utiliza la información que se tiene de la solución exacta en la frontera. Por lo que proponemos un tercer estimador:

• Estimador 3

$$Est_{3}(x) = \begin{cases} Est_{2}(x), & \text{si } x \in \Omega, \\ \max\left\{Est_{2}(x), \frac{|g(x) - \hat{u}(x)|\}}{\max\{1, |g(x)|\}}\right\}, & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

$$(4.16)$$

Una vez elegido uno de los estimadores, fijamos un conjunto inicial con pocos centros (10 aproximadamente) y una rejilla uniforme en el dominio. Los puntos de esta rejilla son los centros potenciales del aproximante. El tamaño de la malla dependerá de la distancia mínima que estemos dispuestos a asumir entre los centros (en nuestro caso 0.05). Si alguno de estos centros se encuentra cerca de alguno de los iniciales lo eliminamos de los candidatos para evitar el crecimiento del condicionamiento de la matriz de colocación. El algoritmo de selección de centros es iterativo: calcula el aproximante asociado a los centros de la etapa i y evalúa el estimador seleccionado en el conjunto de centros potenciales para la etapa i + 1, añadiendo al conjunto de centros el punto en el que este estimador tome el valor máximo. Además, en cada iteración se actualiza el valor del parámetro de forma óptimo, que puede ser el mismo en todo el dominio o podemos tomar un valor para los centros del interior y otro para los de la frontera. Este proceso se repite hasta que la estimación del ECM, \overline{ECM} , sea lo suficientemente pequeña o hasta que se alcance el máximo número de centros permitido.

A continuación, se recogen los resultados de los experimentos numéricos que se han llevado a cabo empleando el algoritmo anterior para nuestros dos ejemplos, (4.6) y (4.7), para los que hemos tomado inicialmente los siguientes centros:



Figura 17: Distribución inicial de centros para los problemas (4.6) (izquierda) y (4.7) (derecha).

Para la elección de estas distribuciones hemos tenido en cuenta el término fuente, f, de las EDP de cada problema.



Figura 18: Términos fuente de los problemas (4.6) (izquierda) y (4.7) (derecha)

En el caso del problema (4.6), hemos tomado varios centros alrededor del máximo y otros en la zona de mayor gradiente. En el segundo hemos repartido los centros en las dos diagonales del dominio.

	Estimador 1		Estimador 2		Estimador 3	
N	ϵ fijo	ϵ variable	ϵ fijo	ϵ variable	ϵ fijo	ϵ variable
20	8.65e-03	5.69e-03	2.46e-03	2.57e-03	2.46e-03	2.83e-03
25	5.48e-03	2.27 e- 03	9.85e-05	1.09e-03	9.48e-05	9.60e-04
30	8.03e-03	2.25e-03	6.30e-04	6.86e-04	6.20e-04	2.49e-04
35	3.03e-04	2.31e-03	2.61e-05	5.50e-04	2.97e-05	1.14e-04
40	6.70e-04	3.76e-04	8.80e-06	2.17e-05	1.71e-05	1.46e-05
50	2.48e-04	3.68e-04	2.13e-06	2.71e-05	2.20e-06	2.56e-06

Tabla 11: Comparación de ECM para un método adaptativo. RBF: MCI. Ejemplo (4.6).

Tabla 12: Comparación de ECM para un método adaptativo. RBF: MCI. Ejemplo (4.7).

		Estimador 1		Estimador 2		Estimador 3	
ľ	N	ϵ fijo	ϵ variable	ϵ fijo	ϵ variable	ϵ fijo	ϵ variable
2	20	7.07e-02	1.81e-02	3.26e-02	8.71e-03	4.96e-03	7.22e-03
2	15	1.11e-02	1.28e-03	4.95e-03	2.13e-03	1.36e-03	4.69e-03
3	0	2.63e-02	2.59e-03	3.07e-04	1.00e-03	5.91e-04	7.27 e-04
3	5	1.01e-02	2.32e-04	2.17e-03	1.84e-04	9.05e-04	3.95e-04
4	0	3.09e-03	4.30e-05	1.43e-04	1.47e-04	3.05e-04	2.40e-04
5	0	1.41e-04	3.22e-05	4.66e-05	1.19e-04	2.75e-04	6.25 e- 05

Las tablas 11 y 12 recogen el ECM de la solución numérica calculada para los problemas (4.6) y (4.7) con los tres estimadores considerados y para diferente número de centros finales, N. Para cada uno de ellos se presentan los resultados de dos estrategias de elección del parámetro de forma: " ϵ fijo" significa que se usa la estimación del parámetro óptimo en todo $\overline{\Omega}$ y " ϵ variable", que se estima un parámetro óptimo en el interior y otro en la frontera. Se observa que los estimadores 2 y 3 han dado resultados mejores que el estimador 1, no siendo significativas las diferencias entre ellos. En cuanto al uso de dos parámetros de forma diferentes en el interior y en la frontera, esta estrategia solo mejora los resultados con el primer estimador para ambos problemas.

Las siguientes gráficas reflejan cómo se han ido distribuyendo los centros en estos experimentos. También se representa la distribución del error relativo por medio de las curvas de nivel.



Figura 19: Distribución de centros. Ejemplo (4.6). Est_1 . N = 25 (izquierda), N = 40 (derecha)



Figura 20: Error relativo. Ejemplo (4.6). Est_1 . N = 25 (izquierda), N = 40 (derecha)



Figura 21: Distribución de centros. Ejemplo (4.6). Est_2 . N = 25 (izquierda), N = 40 (derecha)



Figura 22: Error relativo. Ejemplo (4.6). $Est_2.\ N=25$ (izquierda), N=40 (derecha)



Figura 23: Distribución de centros. Ejemplo (4.6). Est_3 . N = 25 (izquierda), N = 40 (derecha)



Figura 24: Error relativo. Ejemplo (4.6). Est_2 . N = 25 (izquierda), N = 40 (derecha)

El proceso adaptativo con el primero de los estimadores (figura 19) tiende a situar la mayor parte de centros alrededor de la frontera. No sitúa ninguno de los 25 primeros centros en la zona del máximo de la solución y solamente uno de los primeros 40. Tras distribuir los 25 primeros centros, el mayor error se localiza en la zona donde no se ha situado ningún centro (ver figura 20). Con 40 centros, uno de ellos en esa zona, el mayor error se ha trasladado a la frontera. Con los estimadores 2 y 3 (figuras 21 y 23, respectivamente), se reparten los centros de forma más uniforme por todo el dominio, aunque la mayor parte de los centros sigue estando en la frontera o cerca de ésta. Los dos estimadores producen distribuciones de los centros similares. En este caso, con solo 25 centros los errores más grandes están en la frontera y con 40 se encuentran en la zona interior, como se puede observar en las figuras 22 y 24.



Figura 25: Distribución de centros. Ejemplo (4.7). Est_1 . N = 25 (izquierda), N = 40 (derecha)



Figura 26: Error relativo. Ejemplo (4.7). Est_1 . N = 25 (izquierda), N = 40 (derecha)



Figura 27: Distribución de centros. Ejemplo (4.7). Est_2 . N = 25 (izquierda), N = 40 (derecha)



Figura 28: Error relativo. Ejemplo (4.7). Est_2 . N = 25 (izquierda), N = 40 (derecha)



Figura 29: Distribución de centros. Ejemplo (4.7). Est_3 . N = 25 (izquierda), N = 40 (derecha)



Figura 30: Error relativo. Ejemplo (4.7). Est_3 . N = 25 (izquierda), N = 40 (derecha)

En el caso del ejemplo (4.7), el proceso adaptativo con el primer estimador sitúa los primeros centros en la frontera o cerca de ella y a continuación, hasta llegar a 40, los acumula cerca del origen (ver figura 25). Los estimadores 2 y 3 (ver figuras 27 y 29) vuelven a proporcionar distribuciones de centros similares. Colocan menos centros en la frontera y, aunque también acumulan varios centros cerca del origen (sobre todo el tercer estimador), sitúan algunos centros en la zona en la que la solución crece rápidamente. En la mayor parte de los casos, los mayores errores se acumulan en la frontera, como se observa en las figuras 26, 28 y 30.

También se han realizado experimentos numéricos con otros algoritmos. En estos experimentos se fijaba una malla de posibles centros a añadir y se evaluaba el estimador del error en todos ellos. Se añadían todos los centros en los que la estimación del error resultaba superior a una tolerancia fijada. En la siguiente iteración la malla de centros potenciales se refinaba, evaluando la función estimador en más puntos que en la iteración anterior. Con esta estrategia, recogida

en [3], se obtenían resultados mucho peores que los presentados en este trabajo.

Con estos experimentos ha quedado ilustrada la importancia de seleccionar una buena distribución de los centros de las RBF para cada problema concreto. Si comparamos los resultados obtenidos utilizando algoritmos adaptativos para la selección de centros (tablas 11 y 12) con los errores que se cometían al distribuir los centros uniformemente en el dominio (tablas 1, 2, 3 y 4), se observa una clara disminución en los errores. En el caso del problema (4.6), utilizando el segundo estimador y con 50 centros, se obtiene un error del orden de 10^{-6} , mientras que en los primeros experimentos, en los que no se elegía la disposición de los centros o el parámetro de forma, se necesitaban más de 150 centros para alcanzar este nivel de error. En el caso del problema (4.7) el estimador proporciona un error del orden de 10^{-5} utilizando 50 centros y en los primeros experimentos también se necesitaba más del triple de centros para obtener ese resultado. Por lo tanto, merece la pena escoger una buena distribución de los centros que permita trabajar con un número más reducido sin perder calidad en las aproximaciones. Utilizar menos centros reduce el tamaño de los problemas que se resulven y mejora el condicionamiento de las matrices de colocación.

5 Método de las soluciones fundamentales

El método de las soluciones fundamentales es otro método numérico libre de malla para la resolución de problemas de contorno. En la práctica, este método ha dado muy buenos resultados y su implementación es realmente sencilla. De hecho, para algunos autores ([1]) es el método más preciso y más sencillo de implementar para resolver este tipo de problemas. Su principal limitación reside en el hecho de que solamente sirve para resolver problemas con EDP homogéneas y que es necesario conocer una solución fundamental de la EDP para poder aplicarlo. En general, no es sencillo calcular una solución fundamental, que varía con el operador y con la dimensión, aunque un teorema clásico asegura que existe siempre en el caso de un operador sea lineal de coeficientes constantes (Teorema de Ehrenpreis y Malgrange, ver [2]). La idea del método es aproximar la solución del problema por una combinación lineal de soluciones fundamentales centradas en diferentes puntos fuera del dominio y utilizar la condición frontera Dirichlet.

5.1 Transformación del problema

Siempre que sea posible encontrar una solución particular, bien de la EDP o bien verificando la condición frontera, podemos transformar el problema en uno con EDP homogénea o con condición frontera nula. Más concretamente, si \tilde{u} es una solución particular de la EDP

$$\mathcal{L}(\tilde{u}) = f,\tag{5.1}$$

realizando el cambio $v = u - \tilde{u}$ obtenemos el siguiente problema con EDP homogénea:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[v(x)] = 0 & \text{si } x \in \Omega, \\ v(x) = g(x) - \tilde{u}(x) & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$
(5.2)

Mientras que si \overline{u} es una función que verifica la condición frontera

$$\overline{u}(x) = g(x), \text{ si } x \in \partial\Omega, \tag{5.3}$$

realizando el cambio $v = u - \overline{u}$ obtenemos el siguiente problema con condición frontera nula:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[v(x)] = f(x) - \mathcal{L}[\overline{u}(x)] & \text{si } x \in \Omega, \\ v(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$
(5.4)

5.2 Soluciones fundamentales de algunos operadores

Definición 5.1 Se dice que $E : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ es una solución fundamental del operador \mathcal{L} si

 $\mathcal{L}(E(x)) = \delta(x)$

donde $\delta(x)$ es la Delta de Dirac centrada en el origen y la EDP se satisface en el sentido de las distribuciones.

Si $\mathcal{L}(F(x)) = 0$ entonces E + F también es solución fundamental. Así que existen infinitas soluciones fundamentales para cada operador \mathcal{L} .

Vamos a ilustrar las diferentes expresiones que pueden tomar las soluciones fundamentales de un mismo operador variando la dimensión y uno de sus coeficientes. Para ello elegimos el operador clásico de Helmholtz:

$$\mathcal{L}(E) = \Delta E + kE. \tag{5.5}$$

Teniendo en cuenta la expresión del operador nos planteamos buscar soluciones fundamentales de base radial:

$$E(x) = \varphi(||x||), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Operando, resulta que la función φ debe verificar

$$\Delta E(x) + kE(x) = \varphi''(||x||) + \frac{n-1}{||x||}\varphi'(||x||) + k\varphi(||x||) = \delta(x).$$

Por lo tanto, si r = ||x|| > 0,

$$\varphi''(r) + \frac{n-1}{r}\varphi'(r) + k\varphi(r) = 0$$

у

$$\lim_{r \to 0^+} |\varphi(r)| = +\infty.$$

A continuación distinguimos distintos casos para diferentes valores de $n \neq k$.

• Caso n = 2 y k = 0:

$$\forall r > 0, \ \varphi''(r) + \frac{\varphi'(r)}{r} = 0 \Leftrightarrow r\varphi''(r) + \varphi'(r) = (r\varphi'(r))' = 0$$

por lo que

$$\varphi'(r) = \frac{A}{r}, \quad A \in \mathbb{R},$$

у

$$\varphi(r) = Alog(r) + B, \quad \forall A, B \in \mathbb{R}$$

Como la singularidad está en el término logarítmico, se puede tomar B = 0 y en [2] se demuestra que tomando $A = \frac{1}{2\pi}$,

$$E(x) = \frac{1}{2\pi} log(||x||)$$

es solución fundamental.

• Caso n = 3 y k = 0:

$$\forall r > 0, \ \varphi''(r) + \frac{2}{r}\varphi'(r) = 0 \Leftrightarrow r^2\varphi''(r) + 2r\varphi'(r) = (r^2\varphi'(r))' = 0,$$

por lo que

$$\varphi'(r) = \frac{A}{r^2}, \quad \forall A \in \mathbb{R}$$

у

$$\varphi(r) = -\frac{A}{r} + B, \ \forall A, B \in \mathbb{R}.$$

En este caso se demuestra en [2] que tomando $A = \frac{1}{4\pi}$ y B = 0,

$$E(x) = \frac{-1}{4\pi ||x||}$$

es solución fundamental.

• Caso n = 2 y k > 0:

$$\forall r > 0, \ \varphi''(r) + \frac{1}{r}\varphi'(r) + k\varphi(r) = 0 \Leftrightarrow r^2\varphi''(r) + r\varphi'(r) + kr^2\varphi(r) = 0.$$

Esta es la ecuación paramétrica de Bessel de orden 0, por lo que

$$\varphi(r) = AJ_0(\sqrt{k}r) + BY_0(\sqrt{k}r), \ \forall A, B \in \mathbb{R},$$

donde J_0 es la función de Bessel de 1^a clase y de orden 0 e Y_0 es la función de Bessel de 2^a clase y de orden 0.

Tomando A = 0, se puede probar que existe un valor de B tal que

$$E(x) = BY_0(\sqrt{k}||x||)$$

es solución fundamental. Para implementar el método, el valor de B es irrelevante ya que va incluido en las constantes.

• Caso n = 3 y k > 0:

$$\forall r > 0, \ \varphi''(r) + \frac{2}{r}\varphi'(r) + k\varphi(r) = 0 \Leftrightarrow r^2\varphi''(r) + 2r\varphi'(r) + r^2k\varphi(r) = 0.$$

Tomando $h(r) = r\varphi(r),$

$$h''(r) + kh(r) = 0,$$

y por lo tanto

$$h(r) = A\cos(\sqrt{k}r) + B\sin(\sqrt{k}r), \ \forall A, B \in \mathbb{R},$$
$$\varphi(r) = A\frac{\cos(\sqrt{k}r)}{r} + B\frac{\sin(\sqrt{k}r)}{r}, \ \forall A, B \in \mathbb{R}.$$

Como la singularidad está en el término $\frac{\cos(\sqrt{k}r)}{r}$, se puede demostrar que tomando B = 0 y $A = \frac{-1}{4\pi}$,

$$E(x) = \frac{-\cos(\sqrt{k}||x||)}{4\pi||x||}$$

es solución fundamental (ver [2]).

Dado un problema de contorno

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(x) = 0, & \text{si } x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), & \text{si } x \in \partial\Omega \end{cases}$$
(5.6)

con solución fundamental φ conocida, el método consiste en buscar soluciones de la forma

$$\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \varphi(||x - c_j||), \quad x \in \Omega,$$
(5.7)

donde $\{c_1, \ldots, c_N\}$ es un conjunto de centros tomados en una curva $\Sigma \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Ya se ha comentado cuál es la solución fundamental de la ecuación de Laplace bidimensional:

$$\varphi(||x||) = \frac{\log||x||}{2\pi}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$
(5.8)

En este caso las soluciones aproximadas se buscan de la forma:

$$\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \log ||x - c_j||, \quad x \in \Omega.$$
 (5.9)

Las funciones del tipo (5.9) son armónicas salvo en los centros y por lo tanto en $\overline{\Omega}$, por lo que satisfacen el Principio del Máximo, que afirma que todas las funciones armónicas no constantes alcanzan el valor máximo y mínimo en la frontera, $\partial\Omega$. Por lo tanto, si u es la solución exacta y \hat{u} su aproximación, dado que ambas son armónicas se verifica

$$||u - \hat{u}||_{\infty,\Omega} \le ||u - \hat{u}||_{\infty,\partial\Omega}.$$
(5.10)

36

Así, podemos centrarnos en la búsqueda de \hat{u} , que sea una buena aproximación de la solución exacta en la frontera del dominio. Para ello, tomamos N puntos de colocación en $\partial \Omega$: $\{x_1, \ldots, x_N\}$. Para determinar \hat{u} , basta calcular los coeficientes $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$ resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \log ||x_k - c_j|| = g(x_k), \quad 1 \le k \le N.$$
(5.11)

El sistema tendrá solución única siempre que la matriz asociada:

$$\begin{pmatrix} log||x_1 - c_1|| & \dots & log||x_1 - c_N|| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ log||x_N - c_1|| & \dots & log||x_N - c_N|| \end{pmatrix}$$

$$(5.12)$$

sea regular. No se conoce una demostración que pruebe esta propiedad en general. Aunque en las aplicaciones se cumple casi siempre, se han construido algunos ejemplos académicos donde dicha matriz es singular.

5.3 Determinación del número de puntos de colocación y del radio de la circunferencia de los centros

Se ha comprobado experimentalmente que es conveniente situar los centros en una circunferencia que deje al dominio Ω en su interior (ver [1] y [12]). Los principales factores que influyen en la calidad del resultado son el número de puntos de colocación y la disposición de los centros. La distribución de los centros depende principalmente de la distancia a la que los mismos se situen de la frontera.

Para medir el error cometido en la resolución del problema, tomamos M puntos $\{y_1, \ldots, y_M\}$ en la frontera del dominio con M suficientemente grande y definimos:

$$\overline{ECM} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \left(\frac{\hat{u}(y_i) - g(y_i)}{\max\{1, |g(y_i)|\}}\right)^2}.$$
(5.13)

Para la experimentación numérica consideramos dos problemas de la forma (5.6).

Primer ejemplo

Hemos tomado como solución particular para la ecuación de Poisson:

$$\Delta u(x_1, x_2) = -\frac{5}{4}\pi^2 \sin(\pi x_1) \cos\left(\frac{\pi x_2}{2}\right)$$
(5.14)

la función

$$\tilde{u}(x_1, x_2) = sen(\pi x_1) cos\left(\frac{\pi x_2}{2}\right) + sen(\pi x_1)e^{-\pi x_2}.$$
(5.15)

Procediendo como comentamos anteriormente obtenemos el problema homogéneo

$$\begin{aligned}
\Delta v(x_1, x_2) &= 0, & \text{si } (x_1, x_2) \in \Omega, \\
v(x_1, x_2) &= -sen(\pi x_1), & \text{si } (x_1, x_2) \in \Gamma_1, \\
v(x_1, x_2) &= -sen(\pi x_1)e^{-\pi x_2}, & \text{si } (x_1, x_2) \in \Gamma_2.
\end{aligned}$$
(5.16)

Segundo ejemplo

Hemos tomado como solución particular a la ecuación de Poisson:

$$\Delta u(x_1, x_2) = 8e^{2x_1 + 2x_2} \tag{5.17}$$

la función:

$$\tilde{u}(x_1, x_2) = e^{2x_1 + 2x_2} - sen(2\pi x_1)e^{-2\pi x_2}$$
(5.18)

para obtener el problema homogéneo:

$$\begin{cases} \Delta v(x_1, x_2) = 0, & \text{si } (x_1, x_2) \in \Omega, \\ v(x_1, x_2) = sen(2\pi x_1)e^{-2\pi x_2}, & \text{si } (x_1, x_2) \in \partial\Omega. \end{cases}$$
(5.19)

Para resolver los problemas planteados, utilizando el método de las soluciones fundamentales, tomamos N puntos de colocación igualmente espaciados a lo largo de la frontera y N centros repartidos equidistantemente en una circunferencia de radio r situada fuera de $\overline{\Omega}$.

En las tablas 13 y 14 se recogen los resultados obtenidos al aplicar este método a los problemas (5.16) y (5.19) utilizando diferentes valores de r y N.

Tabla 13: Comparación del ECM con diferentes radios. Ejemplo (5.16)

	N = 10		N = 30		N = 50	
r	ECM	Cond.	ECM	Cond.	ECM	Cond.
1.1	4.13e-03	$4.65e{+}01$	1.59e-07	$1.17e{+}05$	9.61e-12	$2.11e{+}08$
2	2.58e-03	$2.33e{+}03$	6.28e-10	$2.36e{+}09$	7.38e-15	$1.67e{+}15$
2.5	3.40e-03	$9.40e{+}03$	3.76e-10	8.87e + 10	3.15e-13	$3.31e{+}17$
3	3.82e-03	$2.81e{+}04$	2.13e-10	$1.64e{+}12$	1.60e-12	$5.56e{+}17$
4	4.24e-03	$1.49e{+}05$	4.59e-11	$1.55e{+}14$	9.35e-11	$2.00e{+}18$
6	4.54e-03	$1.46e{+}06$	3.51e-09	$7.86e{+}16$	2.56e-08	$7.46e{+}17$

En las tablas 13 y 14 se observa que los resultados obtenidos son muy buenos teniendo en cuenta la precisión de la máquina. También se observa que el radio de la circunferencia de centros, r, influye en la calidad de los resultados obtenidos. En la literatura, existen algunos resultados de convergencia en el caso de datos analíticos (ver [6]). En particular si Ω es un dominio circular de radio r_0 y los centros están situados en una circunferencia de radio $r > r_0$ que contiene a Ω en su interior, se sabe que una cota del error (en norma infinito) es del orden de $\left(\frac{r_0}{r}\right)^N$, teniéndose por lo tanto convergencia exponencial. Sin embargo, cuando la regularidad de los datos ($\Omega \ge f$) es menor, la convergencia se ralentiza e incluso puede llegar a perderse. Por otra parte, también se

r	N = 10		N = 30		N = 50	
	ECM	Cond.	ECM	Cond.	ECM	Cond.
1.1	1.73e-01	$4.65e{+}01$	3.64e-06	1.17e + 05	1.30e-10	$2.11e{+}08$
2	1.57e-01	$2.33e{+}03$	7.54e-06	$2.36\mathrm{e}{+09}$	1.53e-12	$1.67e{+}15$
3	1.54e-01	$2.81e{+}04$	7.45e-06	$1.64e{+}12$	3.30e-09	$5.56e{+}17$
4	1.53e-01	$1.49e{+}05$	7.39e-06	$1.55e{+}14$	1.81e-06	$2.00e{+}18$
5	1.53e-01	5.28e + 05	7.60e-06	$5.23e{+}15$	1.00e-05	$3.05e{+}18$
6	1.52e-01	1.46e + 06	2.48e-05	7.85e + 16	2.60e-05	7.47e + 17

Tabla 14: Comparación del ECM con diferentes radios. Ejemplo (5.19)

observa en las tablas 13 y 14 cómo crece el condicionamiento de la matriz A en función de r y N. De hecho, en el caso de dominio circular también se ha probado que el condicionamiento crece de forma exponencial como $r^{N/2}$ (ver [6]). Por lo tanto, merece la pena definir un algoritmo para determinar este radio de manera óptima. Para ello, procedemos de forma similar a como lo hacíamos en el caso del parámetro de forma de las otras RBF consideradas en este trabajo. Establecemos un estimador del error cometido en la aproximación: \overline{ECM} definido en (5.13). Tomamos como radio óptimo el valor del r que minimice \overline{ECM} en el intervalo [0, 10].



Figura 31: ECM (azul) y \overline{ECM} (rojo) en función de r para N = 10 (izquierda), 30 (derecha), 50 (abajo). Ejemplo (5.16).



Figura 32: ECM (azul) y \overline{ECM} (rojo) en función de r para N = 10 (izquierda), 30 (derecha), 50 (abajo). Ejemplo (5.19).

Las figuras 31 y 32 representan conjuntamente el ECM y \overline{ECM} en función del radio. Se observa que ambas gráficas tienen un perfil muy parecido, por lo que parece adecuado utilizar \overline{ECM} como estimador para determinar el valor de óptimo de r. A medida que aumenta el valor de N las gráficas presentan mayores oscilaciones, aunque en todos los casos el mínimo global de la función está bien diferenciado de otros mínimos locales. Salvo para N = 10 y N = 30 en la figura 32, las gráficas siguen una tendencia similar: el ECM desciende bruscamente hasta alcanzar su valor mínimo, a partir del cual comienza a crecer aunque más lentamente. Si comparamos la evolución del error en función del radio con la del error en función del parámetro de forma de las otras RBF (ver figuras 14 y 15), se comprueba que siguen un comportamiento similar.

En cuanto al condicionamiento de las matrices (5.12), se observa en la figura 33 que aumenta cuando lo hace r. A partir de cierto punto el condicionamiento comienza a oscilar (para valores de N mayores que 10) y deja de crecer tan rápidamente.

En las tablas 15 y 16 añadimos un resumen de los resultados obtenidos al aplicar el método de las soluciones fundamentales buscando el radio óptimo. Se observa que utilizando solamente 20 centros, se obtienen soluciones con errores del orden de 10^{-6} . El radio óptimo varía en cada caso y el condicionamiento de las matrices como mucho es del orden 10^{17} .

A continuación, representamos la distribución del error relativo de la solución numérica utilizando este método aplicado a los problemas (5.16) y (5.19).



Figura 33: Condicionamiento de las matrices (5.12) para N = 10 (izquierda), 20 (derecha) y 50 (abajo).



Figura 34: Error relativo. Ejemplo (5.16). N = 10 (izquierda), 20 (derecha)

N	ECM	Condicionamiento	r
10	2.57e-04	1.99e+02	1.41
20	2.10e-06	1.34e + 17	3.20
30	5.75e-11	$1.09e{+}15$	4.53
40	2.09e-14	1.98e + 13	2.27
50	4.01e-14	$2.25e{+}17$	2.45

Tabla 15: ECM con estimación del radio óptimo. Problema (5.16)

Tabla 16: ECM con estimación del radio óptimo. Problema (5.19)

Ν	ECM	Condicionamiento	r
10	1.51e-01	2.42e + 07	9.99
20	5.11e-06	2.06e + 05	1.58
30	7.35e-06	7.92e + 14	4.44
40	4.08e-09	$1.97e{+}16$	3.20
50	3.76e-13	6.40e + 12	1.62



Figura 35: Error relativo. Ejemplo (5.19). N = 10 (izquierda), 20 (derecha)

Observamos que el error máximo se alcanza en la frontera, coincidiendo con lo esperado teóricamente por el principio del máximo.

Aunque los resultados obtenidos para el método de las soluciones fundamentales han sido muy buenos, su calidad depende de la función \tilde{u} que se haya utilizando para realizar la transformación inicial del problema. Si para (4.7) hubiésemos considerado otro cambio con una función más oscilante del tipo:

$$\tilde{u}(x_1, x_2) = e^{2x_1 + 2x_2} - sen(20\pi x_1)e^{-20pix_2}$$

dando lugar al problema

$$\begin{cases} \Delta v(x_1, x_2) = 0, & \text{si } (x_1, x_2) \in \Omega, \\ v(x_1, x_2) = sen(20\pi x_1)e^{-20\pi x_2}, & \text{si } (x_1, x_2) \in \partial\Omega. \end{cases}$$
(5.20)

la calidad de los resultados empeorará considerablemente, como se muestra en la siguiente tabla:

N	ECM	Condicionamiento
10	1.13e-01	2.80e + 04
20	1.12e-01	$1.03e{+}17$
30	1.86e-01	3.05e + 05
40	1.12e-01	5.82e + 14
50	1.86e-01	8.64e + 17

Tabla 17: ECM y condicionamiento para diferentes valores de N. Problema (5.20)

Aunque aumentemos el número de centros no se consigue mejorar el ECM. A continuación, representamos el aproximante obtenido y la solución exacta del problema (5.20).



Figura 36: Solución aproximada y exacta de (5.20)

Bibliografía

- [1] ALVES, C. J. S. On the choice of source points in the method of fundamental solutions. Engineering Analysis with Boundary Elements 33 (2009), 1348–1361.
- [2] CASAS, E. Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales. Universidad de Cantabria, 1992.
- [3] DRISCOLL, T. A., AND HERYUDONO, A. R. Adaptive residual subsampling methods for radial basis function interpolation and collocation problems. *Computers & Mathematics* with Applications 53 (2007), 927–939.
- [4] ESGUEVA, M. Aproximándose con RBF (Trabajo fin de grado). Universidad de Cantabria, 2016.
- [5] FASSHAUER, G. E. Meshfree Approximation Methods with Matlab. World Scientific, 2007.
- [6] GOLBERG, M. A., AND CHEN, C. S. The method of fundamental solutions for potential, Helmholtz and diffusion problems. In *Boundary integral methods: numerical and mathematical aspects*, vol. 1 of *Comput. Eng.* WIT Press, 1999, pp. 103–176.
- [7] HON, Y. C., AND SCHABACK, R. On unsymmetric collocation by radial basis functions. Applied Mathematics and Computation 119 (2001), 177–186.
- [8] KANSA, E. J. Multiquadrics—a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. Computers & Mathematics with Applications 19 (1990), 147–161.
- [9] RIPPA, S. An algorithm for selecting a good value for the parameter c in radial basis function interpolation. Advances in Computational Mathematics 11, 2-3 (1999), 193–210.
- [10] SARRA, S. A., AND STURGILL, D. A random variable shape parameter strategy for radial basis function approximation methods. *Engineering Analysis with Boundary Elements 33* (2009), 1239–1245.
- [11] SCHABACK, R. Convergence of unsymmetric kernel-based meshless collocation methods. SIAM Journal on Numerical Analysis 45, 1 (2007), 333–351.

- [12] SCHABACK, R. Adaptive numerical solution of MFS systems. In *The Method of Fun*damental Solutions-A Meshless Method, Y. S. C.S. Chen, A. Karageorghis, Ed. Dynamic Publishers, 2008, pp. 1–27.
- [13] WERTZ, J., KANSA, E. J., AND LING, L. The role of the multiquadric shape parameters in solving elliptic partial differential equations. *Computers & Mathematics with Applications* 51 (2006), 1335–1348.