Introducción a la teoría de nudos

Luping Wang Xiao

Trabajo Dirigido en Matemática Fundamental

Dirigido por: Fernando Etayo Gordejuela

Universidad de Cantabria
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación

Índice

Índice de figuras

Resumen

El concepto de nudo matemático es una abstracción del objeto físico de mismo nombre. La teoría de nudos es una rama muy joven de la topología: se comienza a estudiar en los siglos XVIII y XIX y se desarrolla en su mayor parte a lo largo del siglo XX. Este campo tiene un gran interés científico debido a su carácter interdisciplinar. De hecho, una de las primeras motivaciones del estudio de los nudos fue la propuesta de una teoría sobre los átomos en los que éstos tenían forma de nudo. Finalmente esta teoría fue desechada pero el interés por los nudos continuó en activo y hoy en día se conocen muchas aplicaciones a otras ramas científicas como la química y biología molecular, la física cuántica, la criptología, etc.

A lo largo del trabajo estudiaremos conceptos básicos comenzando por la definición formal de nudo y continuando por su representación mediante diagramas planos, los movimientos de Reidemeister, equivalencia de nudos, etc. y analizaremos algunas de las técnicas utilizadas para abordar uno de los grandes problemas, la clasificación de nudos. Además de eso se mencionan algunos de los problemas que a día de hoy continúan abiertos a la espera de su resolución.

1. Introducción

A pesar de la juventud de los nudos matemáticos, los nudos como objeto físico son un elemento que forma parte de la historia de la humanidad desde tiempos prehistóricos. Llama la atención especialmente cómo aparecen en el arte en esculturas y pinturas, así como simbolizando una religión. Hoy en día sigue habiendo un uso extendido de los nudos: los famosos nudos marineros, nudos en costura y bisutería además de su uso como objeto cotidiano. Además estos nudos son distinguidos fácilmente los especialistas de cada materia y reciben distintos nombres.

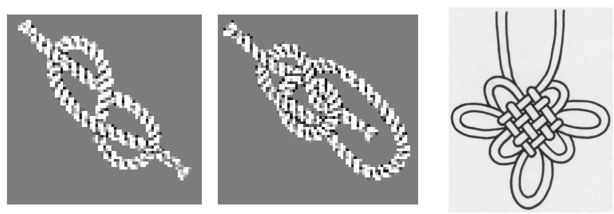


Figura 1: Ejemplo de dos nudos marineros y de un nudo chino ornamental.

Sin embargo lo que aquí estudiamos son los nudos matemáticos. Para imaginarnos lo que es un nudo matemático basta con hacer un nudo cualquiera con un trozo de cuerda y pegar los dos extremos. Así nuestra cuerda queda anudada, no pudiendo desatarse y donde los movimientos de la cuerda realizados posteriormente no afectan al nudo de forma global y no cambian su topología.

El nacimiento de la teoría de nudos se dio a finales del siglo XVIII. El primer tratado escrito que tuvo relación con la teoría de nudos fue un estudio de las órbitas de planetas escrito por Gauss, en el que se describe el primer invariante de los enlaces (nudos enredados entre sí). Gauss estudia los nudos junto a su alumno Listing quien, posteriormente, influenciado por su maestro continúa estudiando los nudos en sus escritos de topología.

Pero no fue hasta el año 1860, año en el que Lord Kelvin formula su teoría de que los átomos son nudos anudados en un espacio relleno de éter, cuando se producen más avances. La idea de Lord Kelvin originó un interés en Peter G. Tait, quien motivado por esa teoría realizó la primera tabulación de nudos llegando a los nudos de hasta diez cruces, aunque sin detenerse a demostrar que no sobrara ninguno de la lista. También formula las conjeturas de Tait, que son resultados aplicables a nudos alternados que no habían sido demostrados hasta muy recientemente, en los años 1987 y 1991 (de ahí que aún se sigan denominando conjeturas).

Cuando la teoría de Lord Kelvin se rechaza, el estudio de los nudos no tiene interés más que el puramente matemático. A lo largo del siglo XX con figuras como Alexander, Kauffman y Reidemeister se desarrolla la mayor parte de la teoría de nudos y se establecen nuevas conexiones con otras disciplinas científicas, haciendo de esta rama un campo de investigación con múltiples posibilidades.

2. Definiciones previas

Un nudo matemático no es más que la idea abstracta de un nudo normal y corriente en el que pegamos los extremos de la cuerda. Por esto último no todos los nudos puedan deshacerse, algo que sí ocurre en nuestros nudos reales. Bajo esta idea podemos desarrollar una amplia teoría que abarca tanto un estudio topológico como el estudio de las numerosas aplicaciones de estos objetos en biología, química y física.

Para estudiar los nudos primero tenemos que introducir una definición formal de los mismos:

Definición 1 *Un nudo es un subconjunto de* $\mathbb{R}^3$ *homeomorfo a* $\mathbb{S}^1$*, esto es, una curva conexa, compacta y sin borde vista dentro de un espacio de tres dimensiones.*

En la siguiente figura podemos ver tres ejemplos de nudos. El nudo trivial es simplemente una cuerda sin anudar. El nudo de trébol es el nudo más sencillo no trivial y tiene tres cruces (no existen nudos no triviales con menos de tres cruces).

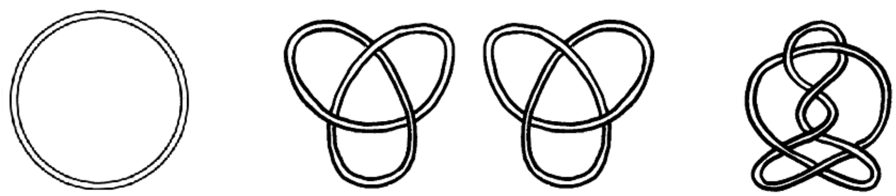


Figura 2: Nudo trivial, nudos de trébol y un nudo de 7 cruces

2.1. Diagramas planos

La mejor forma de representar los nudos es mediante una proyección en un plano, dibujando los cruces de forma que se vea qué trozo del nudo pasa por debajo y cuál pasa por encima. Siempre se puede proyectar de forma que los únicos puntos múltiples sean puntos dobles y haya un número finito de ellos. Es similar a lo que veríamos si tuviéramos un nudo hecho con cuerda y lo dejáramos caer sobre una superficie plana con las correspondientes restricciones. Estas representaciones se conocen como proyecciones regulares o diagramas planos del nudo. Por supuesto la cuerda puede caer de varias formas distintas, así que es necesario saber cuándo dos proyecciones representan el mismo nudo[1]. En principio adoptamos la norma principal de la topología: nuestra cuerda es elástica, se puede estirar y deformar todo lo que queramos. Así cubrimos algunos de los casos sencillos, por ejemplo nos da lo mismo una cuerda desanudada con forma de círculo que con forma de cuadrado, porque topológicamente son lo mismo. Sin embargo los movimientos que hacemos con la cuerda en el espacio que suponen nuevas intersecciones en su proyección son algo más complicado de trasladar a dos dimensiones, ya que para realizarlos debemos pasar por una de las posiciones prohibidas de las proyecciones regulares. Para ello existen lo que se conocen como "movimientos de Reidemeister", que son las operaciones que se permite realizar de forma local sobre el diagrama del nudo y que pasan de una posición a otra saltándose la posición intermedia problemática.

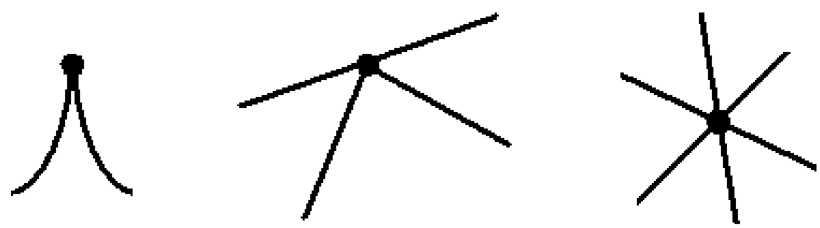


Figura 3: Posiciones no permitidas en una proyección regular, que son el punto de paso de cada uno de los movimientos de Reidemeister

Estas operaciones en las proyecciones equivaldrían a los movimientos que se puede hacer con nuestra cuerda con los extremos pegados. Dos representaciones planas se corresponden con el mismo nudo si se puede pasar de una a otra mediante los movimientos de Reidemeister (Figura 4).

Además el recíproco también es cierto: si dos nudos son equivalentes existe una combinación finita de movimientos de Reidemeister que permiten pasar de uno a otro (resultado demostrado independientemente por el propio Reidemeister y por Alexander y Briggs).

En la Figura 5 podemos ver paso a paso cómo deshacemos un nudo utilizando los tres movimientos de Reidemeister para llegar al nudo trivial.

En realidad tener distintas proyecciones para un mismo nudo es equivalente a poder enredar el nudo (sin cortes ni autointersecciones) en el espacio tridimensional

[1]Se comete un abuso del lenguaje al llamar con el mismo nombre a un nudo y a su clase de equivalencia, dos objetos matemáticos diferentes. No obstante no da lugar a error, ya que el contexto nos permite deducir en qué caso nos encontramos.

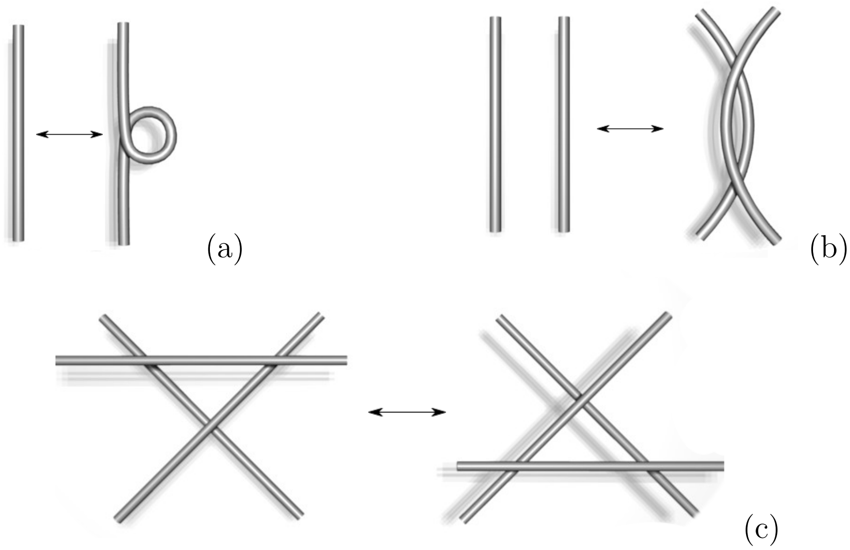


Figura 4: Movimientos de Reidemeister (a) Tipo I (b) Tipo II (c) Tipo III

y obtener un objeto que, aunque a simple vista no se parezca al original, se puede manipular para llegar a él. El problema de determinar si un nudo se puede transformar en otro es el tema central de este trabajo y, aunque todavía queda mucha teoría por desarrollar, existen numerosas técnicas para abordarlo. Para ello es útil trasladar el problema a una dimensión menor y trabajar con los diagramas planos. En los siguientes capítulos trataremos de explicar algunos de los métodos más conocidos para resolver dicho problema.

En este punto debemos hacer una distinción entre dos tipos de nudos según puedan o no representarse mediante un diagrama con un número finito de cruces o no. En caso afirmativo tenemos un tipo de nudo llamado nudo dócil, un objeto que aparece de forma natural y del que tratan la mayoría de los libros dedicados a nudos. Si se da el caso contrario, es decir, la única representación que admite el nudo tiene infinitos cruces, entonces se trata de un nudo salvaje.

La definición de nudo que hemos dado permite este tipo de nudos. Para evitar estos casos singulares se pueden añadir propiedades a la definición que distinguen los nudos dóciles de los salvajes. Por ejemplo podemos pedir que el nudo sea equivalente a un nudo poligonal (un nudo poligonal es una línea poligonal cerrada simple), lo cual implicaría que es equivalente a un nudo con un número finito de cruces, o podemos exigir que el nudo sea diferenciable para eliminar todos aquellos nudos que tengan punto salvaje ya que en esos puntos no hay diferenciabilidad.

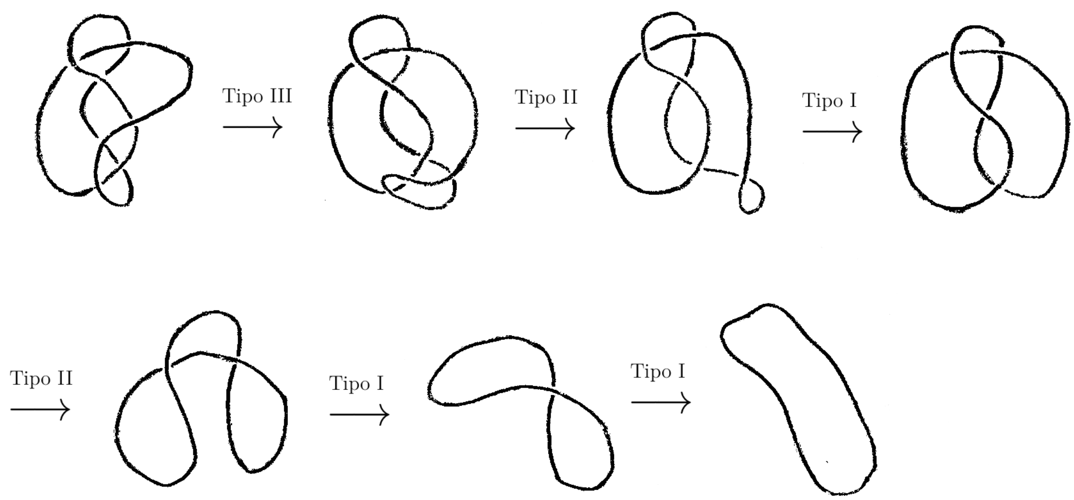


Figura 5: Obtención del nudo trivial mediante los movimientos de Reidemeister

Estos nudos son un caso especial, la mayor parte de las herramientas de las que disponemos para clasificar los nudos no funcionan aquí.

2.2. Equivalencia de nudos

Un problema típico en cualquier rama matemática es la clasificación de los objetos estudiados. Ésta fue la cuestión a la que quiso dar respuesta Pete G. Tait con sus primeras tablas de nudos y en general muchos de los resultados de teoría de nudos están enfocados a este problema.

Aunque los nudos sean objetos topológicos, no podremos hacer una clasificación por homeomorfismos ya que toda 1-variedad compacta y sin borde es homeomorfa a $\mathbb{S}^1$ y por tanto todos los nudos son homeomorfos entre sí. Existen dos definiciones diferentes de equivalencia de nudos:

Definición 2 *Dos nudos son equivalentes si existe un homeomorfismo de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ que transforme un nudo en el otro.*

La alternativa es una definición de equivalencia más estricta, que concuerda con la idea física de una cuerda anudada con los extremos pegados que podemos manipular sin que se atraviese a sí misma ni se haga cortes. La idea intuitiva es una deformación continua en el tiempo que pase de un nudo a otro y que en cada instante de tiempo

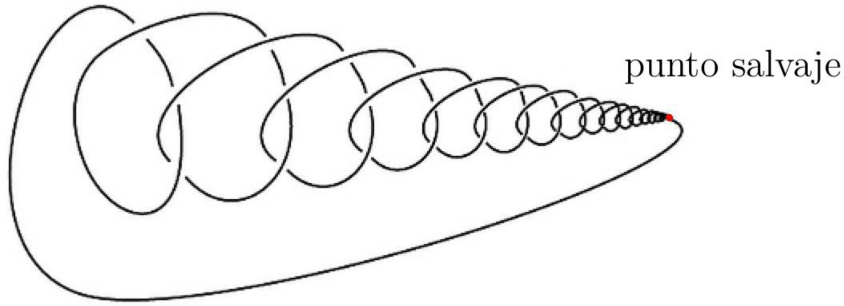


Figura 6: Nudo salvaje

el objeto de paso sea un nudo. Este tipo de aplicación se llama isotopía. Según el nudo va pasando por las posiciones intermedias a lo largo del tiempo su proyección va cambiando acorde a los movimientos de Reidemeister.

Definición 3 *Una isotopía del ambiente entre dos aplicaciones continuas f y g es otra aplicación continua $F : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ que cumpla $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^3$ y tal que si $t_0 \in [0,1]$ entonces $F(x,t_0)$ es un homeomorfismo.*

Definición 4 *(Definición alternativa de equivalencia de nudos) Se dice que dos nudos K_1 y K_2 son equivalentes si existe una isotopía del ambiente entre la identidad y un homeomorfismo h que transforme K_1 en K_2, es decir, una isotopía $F : \mathbb{R}^3 \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de forma que $F(x,0) = x$ y $F(x,1) = h(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^3$ y $h(K_1) = K_2$.*

Las dos definiciones anteriores no son iguales, nos proporcionan dos clasificaciones distintas. Por ejemplo considerando la primera definición el nudo de trébol y su imagen especular son equivalentes (es fácil de ver suponiendo el nudo situado en el semiespacio de coordenada z positiva y aplicando la función $(x,y,z) \mapsto (x,y,-z)$). Sin embargo estos dos nudos no son isotópicos (fue demostrado por Max Dehn en 1914 utilizando técnicas algebraicas avanzadas), es decir, si tenemos un nudo de trébol de cuerda por mucho que manipulemos no podremos pasar al nudo reflejado sin hacer cortes a la cuerda. Realmente los nudos que cumplían la segunda definición se dice que tienen el mismo tipo de isotopía, que también es una forma válida de realizar una clasificación de nudos, pero se nombra también como equivalencia de nudos por el uso extendido de este término para este concepto dentro de la teoría de nudos. Suelen utilizarse las dos definiciones dependiendo del caso en el que nos encontremos. Por ejemplo en las tablas de nudos primos un nudo y su imagen especular se incluyen en la misma clase de nudo en la clasificación, así que se estaría haciendo uso de la primera definición. Por otro lado existen algunos invariantes de nudos, como por ejemplo los polinomios, que sí distinguen entre el nudo de trébol a derecha y a izquierda (y en general cualquier nudo quiral[2] de su reflejo).

¿Cómo determinar cuándo dos nudos son equivalentes? Normalmente es muy complicado dar un homeomorfismo o una isotopía de forma explícita y también demostrar que no existe, por tanto haremos uso de otras herramientas. De la misma forma que a un espacio topológico le podemos asociar propiedades u objetos algebraicos invariantes por homeomorfismo que nos ayuden a detectar si dos espacios son o no homeomorfos, con los nudos se hace de la misma forma. La propiedad que acabamos de mencionar, la quiralidad, es un invariante de nudos, es decir, no depende del nudo escogido para representar una clase de equivalencia de nudos. En las siguientes secciones estudiaremos más invariantes, algunos partiendo de ideas más simples, como la tricolorabilidad, y otros de ideas más complejas.

3. Clasificación de nudos

En esta sección estudiaremos dos conceptos básicos en la clasificación de nudos: las tablas de nudos primos y los invariantes de nudos. En las tablas empleamos la notación de Conway, que explicaremos en el apartado correspondiente. Respecto a los invariantes existen muchos y muy diversos, algunos más sencillos que otros, pero nos limitaremos a estudiar los invariantes más elementales y omitiendo las demostraciones pertinentes en cada caso, que podrán consultarse en los textos incluídos en la bibliografía.

3.1. Tablas de nudos

La primera tabla de nudos fue realizada por Peter G. Tait motivado por la idea de Lord Kelvin de pensar en los elementos químicos como nudos y enlaces rodeados de éter, una sustancia que se creía que ocupaba los huecos vacíos. Dicha tabla contenía los nudos de hasta nueve cruces, aunque no conformaba una tabla con rigor matemático, puesto que no se había demostrado formalmente que no hubiera ningún nudo repetido, tarea efectuada por Alexander y Briggs en 1927 ayudándose del polinomio

[2]Definición de nudo quiral en la sección 3.2.1

de Alexander. Hasta entonces no se había vuelto a dar ninguna lista completa de nudos de ese tipo. Algunos matemáticos se habían limitado a estudiar los nudos no alternados (Little) o los anfiqueirales (Mary Haseman) -conceptos que veremos más adelante. Fue Conway en 1969 quien dio el siguiente paso llegando a los nudos de hasta once cruces, además de los enlaces de hasta diez cruces, gracias a la creación de la notación que lleva su nombre. En 1974 Kenneth Perko (que no era matemático sino abogado) se dio cuenta de la equivalencia dos nudos de 10 cruces que aparecían en las listas como nudos distintos, hecho que había sido omitido tanto por Little como por Conway.

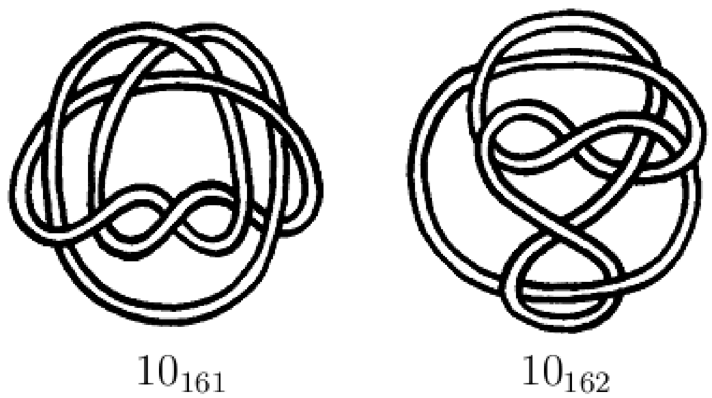


Figura 7: La pareja de nudos descubierta por Perko.

En las tablas de nudos aparecen los nudos primos. Veamos qué significa que un nudo sea primo.

3.1.1. Nudos primos

Dados dos nudos se puede hacer su suma conexa (suma o composición de nudos), que consiste en eliminar un arco en cada nudo que no pase por ningún cruce y unir los puntos extremos de esos arcos mediante caminos que no se crucen entre ellos. Observemos que esta operación posee elemento neutro, que es el nudo trivial.

Se dice que un nudo es compuesto si se puede escribir como la suma conexa de dos nudos no triviales y en caso contrario se dice que es primo. Esta definición es análoga a la de número compuesto y número primo referente a los números naturales. Un resultado de Horst Schubert[3] afirma que todo nudo no trivial posee una

[3]Resultado probado por Schubert en su tesis doctoral *Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten* (1949)

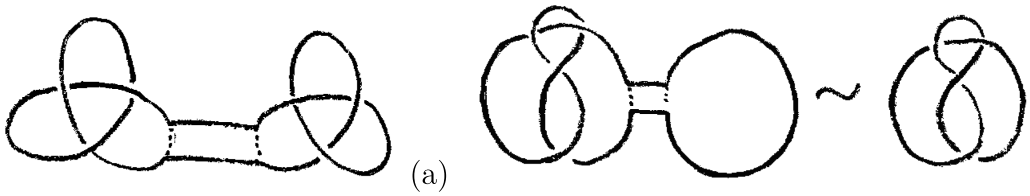


Figura 8: (a) Composición de dos nudos de trébol (b) El nudo trivial es el elemento neutro de la composición de nudos

descomposición única en nudos primos. Sin embargo no es todo tan sencillo, ya que la definición de nudo primo automáticamente nos plantea la cuestión de cómo determinar si un nudo es primo o no, igual que nos lo preguntamos para un número natural. En general esta pregunta es difícil de responder. Para un número pequeño de cruces existen tablas de nudos, pero a partir de cierto número la cantidad de nudos con ese determinado número de cruces tiene un tamaño considerable. La siguiente tabla, en la que aparece el número de nudos primos con n cruces frente al número de cruces n hasta el valor 16, refleja la complejidad del problema:

Número de cruces n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nudos primos con n cruces	0	0	1	1	2	3	7	21	49	165	552	2176

Número de cruces n	13	14	15	16
Nudos primos con n cruces	9988	46972	253293	1388705

Otra cuestión que plantea Colin Adams en [3] es si el nudo trivial es compuesto. Debemos ir con cuidado porque de ser compuesto sería necesario modificar las definiciones previas ya que nos encontraríamos con el problema de que entonces cualquier nudo es compuesto, por ser la composición de él mismo y el nudo trivial, y en ese caso el concepto de nudo primo deja de tener sentido. ¿Y cómo puede ser compuesto el nudo trivial? Al ver la imagen de una cuerda sin cruces nos parece imposible que pueda serlo, pero debemos tener en cuenta que cada nudo tiene formas distintas de representarse, equivalentes entre ellas, sí, pero en el momento de realizar composiciones pueden dar resultados diferentes[4]. ¿Es posible que la composición de dos nudos

[4]La composición de dos nudos puede dar dos resultados distintos. En primer lugar se da una orientación a cada nudo y dependiendo de si al componerlos las orientaciones se acoplan bien o no tenemos una clase de equivalencia u otra. Si se da el caso de que uno de los factores es invertible,

no triviales pueda deshacerse hasta quedar desanudado por completo? La respuesta es que no, pero no es un problema sencillo, igual que no es sencillo saber si un nudo es trivial o no. Para demostrarlo se introduce una nueva técnica de estudio de los nudos utilizando superficies.

En la Figura 9 vemos una tabla de nudos primos con menos de 8 cruces, aunque se conocen más. Los números que aparecen a la derecha de cada imagen se le asignan a cada nudo para diferenciarlos del resto. El número de arriba indica el número de cruces mínimo del diagrama plano del nudo, y el subíndice es una forma de numerar los nudos con el mismo número de cruces que carece de significado. El número de abajo se corresponde con la notación de Conway que explicamos en el siguiente apartado. Estas tablas no distinguen un nudo de su imagen especular.

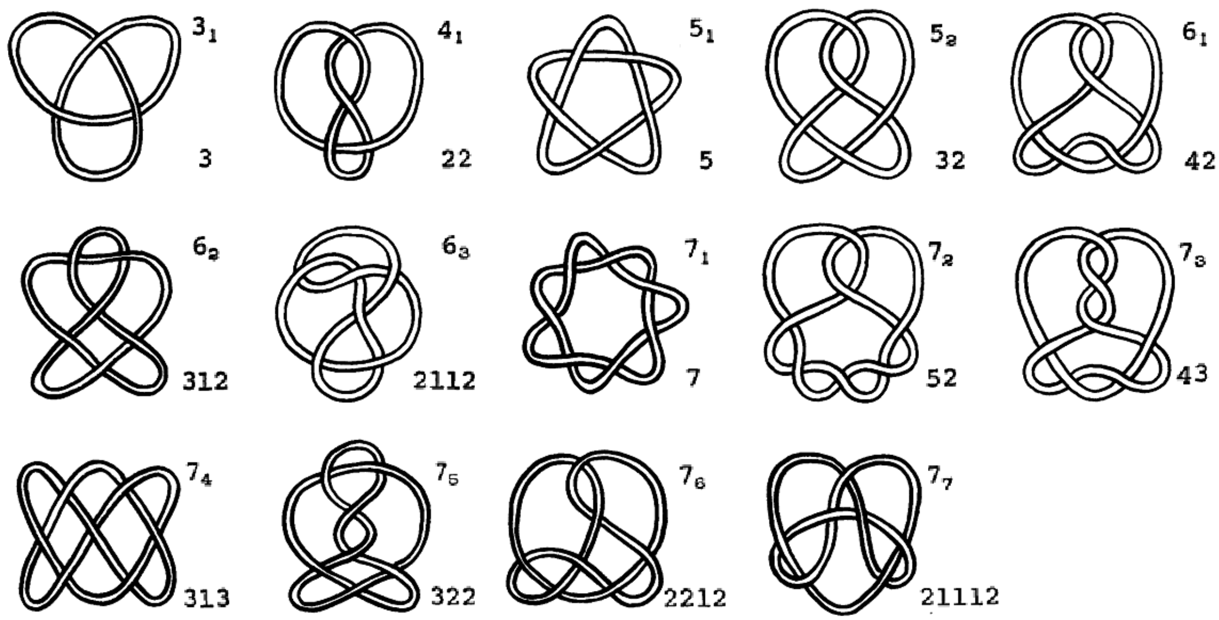


Figura 9: Tabla de nudos con número de cruces menor o igual que 7

3.1.2. Notación de Conway

A continuación describiremos y explicaremos una notación introducida por John H. Conway en 1969 con la que fue capaz de identificar los nudos de hasta 11 cruces y

entonces ambas clases coinciden.

los enlaces de hasta 10 cruces, cuando hasta entonces sólo se conocía la lista completa de nudos con rigor de hasta 9 cruces. La notación de Conway precisa de unos objetos llamados enredos (traducido del inglés *tangle*). Un enredo es la proyección de dos cuerdas enredadas (de ahí el nombre), normalmente representadas en el interior de una bola, de forma que los extremos de las cuerdas apunten en las direcciones NO, SO, NE, SE. Esta definición es independiente de la definición de nudo, pero se puede suponer que los enredos son trozos de nudos. De hecho luego construiremos los nudos a partir de enredos y eso nos proporcionará la notación de Conway de los nudos.

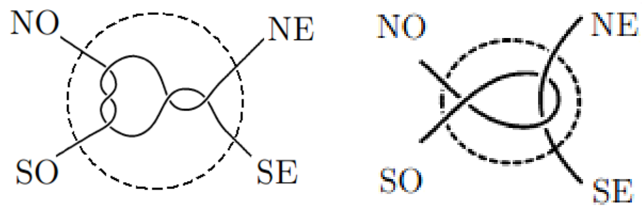


Figura 10: Ejemplos de enredos

Dos enredos son equivalentes si se puede pasar de uno a otro utilizando los movimientos de Reidemeister siempre que en cada paso los cuatro extremos de las cuerdas se mantengan fijos.

Los enredos más sencillos, aparte de los que no se cruzan, son los denominados "enteros", que se numeran según el número de cruces que tengan y llevan signo negativo o positivo dependiendo de si la cuerda que pasa por encima tiene pendiente negativa o positiva.

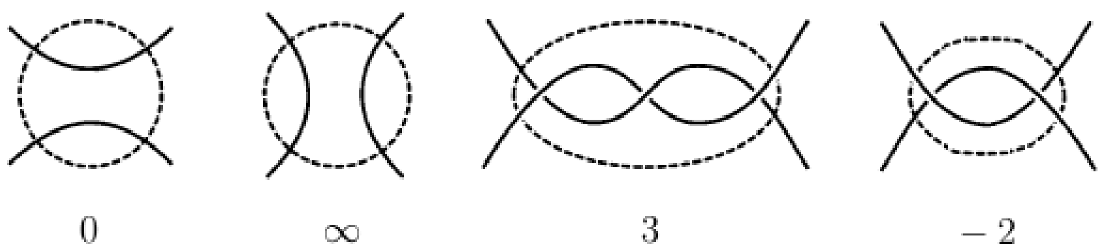


Figura 11: Enredos sencillos

Para representar un enredo general como parte de un nudo dibujaremos simplemente una circunferencia de la que salen cuatro cuerdas en las direcciones mencionadas con una L en su interior[5]

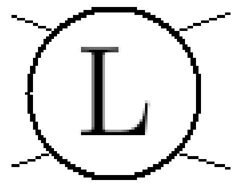
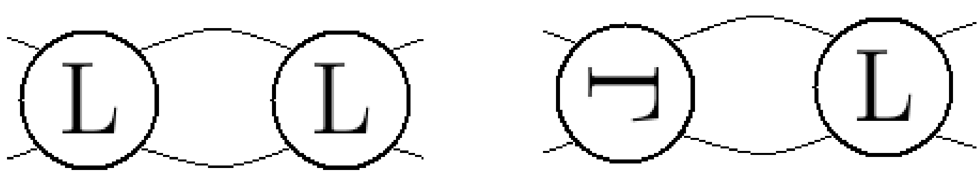


Figura 12: Un enredo en general

Además de los enredos se pueden sumar y multiplicar. La suma consiste en unir los extremos NE y SE del primer enredo con los NO y SO del segundo. La multiplicación consiste en reflejar el primer enredo respecto del eje NO-SE y luego hacer una suma. La reflexión no cambia el signo de los cruces, es decir, si la cuerda de arriba tenía pendiente positiva o negativa, después de la operación seguirá teniendo pendiente positiva o negativa respectivamente. Las dos operaciones se aclaran con la siguiente ilustración:



(a) (b)

Figura 13: (a) Suma a+b (b) Multiplicación ab

Esta operación se comporta igual que la suma aritmética en el caso de los enredos enteros, es decir, si sumamos los enredos enteros 2 y 3, el resultado es 5, que es lo esperado.

Utilizando la multiplicación es como podremos pasar de los enredos sencillos a otros más complejos, llamados racionales, y nombrarlos en consecuencia. Hay una forma alternativa de realizar esta operación: si tenemos una multiplicación de un

[5]Nos vale cualquier imagen que no tenga ninguna simetría para poder describir en cada momento cuál es la posición concreta del enredo

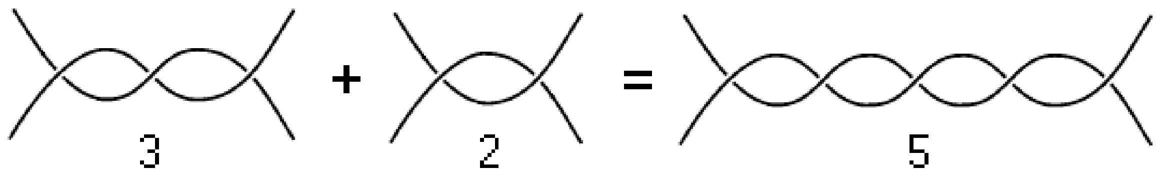


Figura 14: Suma de dos enredos enteros

número par de enredos enteros comenzamos con un par de cuerdas en la posición del enredo ∞, es decir, en vertical. El primer enredo se realiza con los extremos SO-SE hacia abajo con cuidado de que la cuerda que pasa por encima tenga la pendiente correspondiente al signo del enredo. El siguiente enredo se elabora con los extremos de cuerdas NE-SE bajo las mismas directrices, el siguiente de nuevo con los extremos SO-SE, y así sucesivamente. Si el número de factores es impar comenzaremos con las cuerdas en horizontal, en la posición del enredo 0, y procederemos del mismo modo.

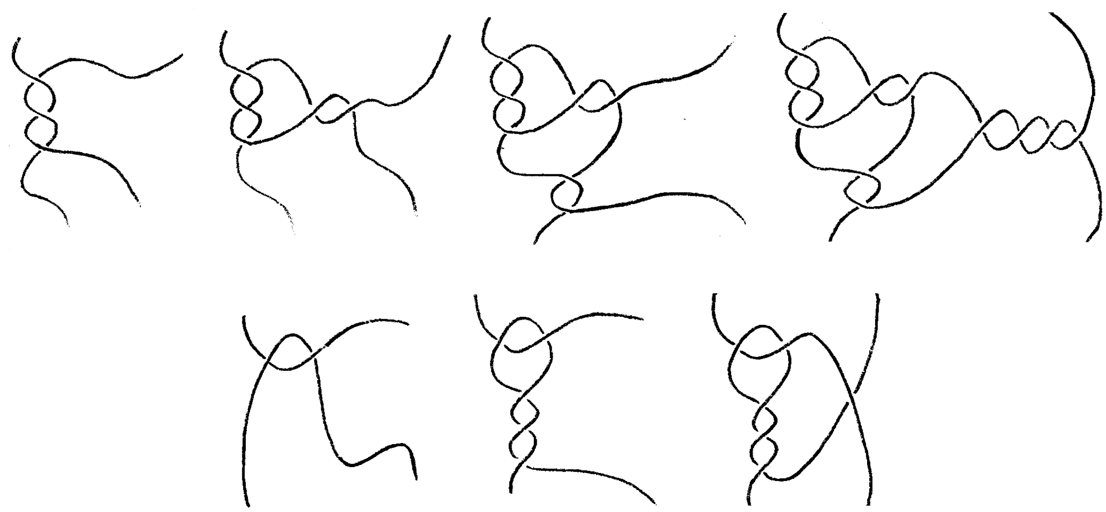


Figura 15: Realización paso a paso de los enredos -32-24 y 23-1

Los enredos que se obtienen de combinar estas dos operaciones se llaman enredos algebraicos.

Aparte de la caracterización de la equivalencia de enredos por los movimientos de Reidemeister tenemos un resultado muy útil de Conway que nos da una condición necesaria y suficiente para la equivalencia de enredos racionales mediante las fracciones continuas.

Definición 5 *Una fracción continua es una expresión del tipo*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots\, a_n}}}$$

con $a_i \in \mathbb{Z}\ \forall i = 0, 1, 2..., n$.

La fracción continua escrita en la definición se correspondería con el enredo $a_0a_1a_2a_3...a_n$. En general una fracción continua puede continuar hasta tener infinitos denominadores, pero como trabajamos con nudos con un número finito de cruces sólo vamos a trabajar con fracciones continuas finitas.

El resultado nos dice que dos enredos racionales son equivalentes si y sólo si sus fracciones continuas asociadas valen lo mismo. Esto implica también que existe una biyección entre los números racionales y las clases de equivalencia de enredos racionales.

Ahora veremos cómo estos objetos, que no son nudos, pueden utilizarse para clasificar nudos. Si unimos el extremo NO con el NE y el SO con el SE como indica la Figura 16 obtendremos un enlace. Dependiendo de cómo sea el enredo este enlace puede ser un nudo, como en los construidos en la Figura 15, que dan lugar a los nudos de la Figura 17.

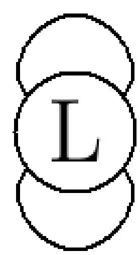


Figura 16: Nudo asociado a un enredo.

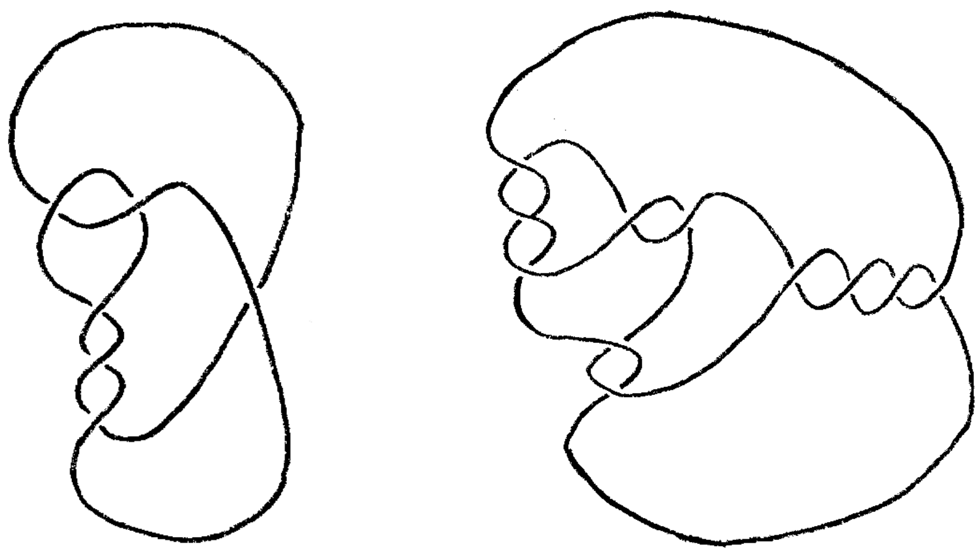


Figura 17: Nudos asociados a los enredos -32-24 y 23-1 construidos anteriormente

3.2. Invariantes clásicos

En este apartado estudiaremos propiedades de los nudos, cada uno de los cuales constituye un invariante de nudos en sí mismo, e invariantes con forma de función que asocia un número entero a cada nudo de forma que a dos nudos equivalentes les corresponde el mismo número.

3.2.1. Quiralidad

Como hemos dicho en párrafos anteriores hay dos nudos de trébol, uno a derecha y otro a izquierda, pudiendo pasar de un diagrama a otro cambiando la posición de los cruces (el nudo se atravesaría a sí mismo en cada cruce y los trozos de nudo que están por encima pasarían a estar por debajo y viceversa). También podemos obtener uno a partir del otro reflejándolo en un espejo. Esa operación es válida como un homeomorfismo de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ que transforma un nudo en su reflejo, pero no es válida como una isotopía entre ellos. Esta propiedad se conoce como quiralidad:

Definición 6 *Un nudo es quiral si no es isotópico a su imagen especular. En caso contrario se dice que es anfiqueiral.*

En la Figura 2 podemos ver los dos nudos de trébol. También se puede ver fácilmente que el nudo de ocho es anfiqueiral utilizando los movimientos de Reidemeister.

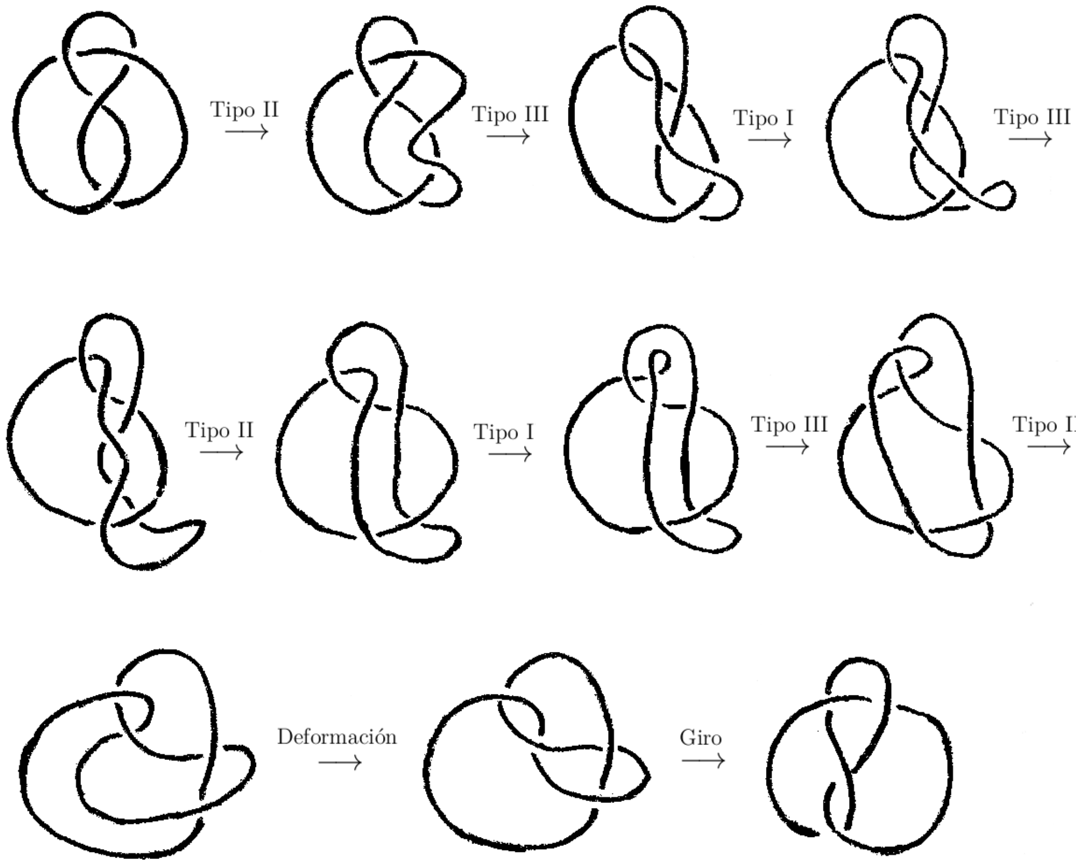


Figura 18: Prueba de que el nudo de ocho es anfiqueiral

La quiralidad es un invariante de nudos. Es fácil de deducir de la propiedad transitiva de las relaciones de equivalencia.

3.2.2. Nudos invertibles

A un nudo se le puede añadir una orientación simplemente escogiendo una dirección de su recorrido. Es fácil de denotar, sólo hay que señalar en el diagrama en qué sentido avanzamos. Asociada a la orientación hay una propiedad interesante que tienen muchos nudos, que es la de ser invertibles y que además es un invariante de nudos:

Definición 7 *Un nudo orientado es invertible si es equivalente a sí mismo con la* *orientación opuesta.*

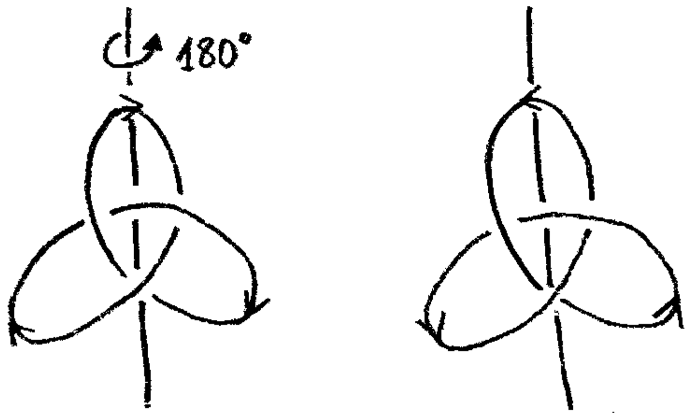


Figura 19: El nudo de trébol es invertible.

Actualmente no hay ningún método general para decidir si un nudo es invertible o no. Hasta hace relativamente poco ni siquiera estaba demostrado que hubiera nudos no invertibles, aunque se sospechaba de su existencia y finalmente en 1964 Hale F. Trotter halló una cantidad infinita de nudos no invertibles. Es normal que se tardara tanto en descubrir, pues todos los nudos de siete cruces o menos son invertibles. El nudo más sencillo no invertible tiene ocho cruces y a partir de ahí la proporción de nudos no-invertibles con un determinado número de cruces aumenta a medida que crece el número de cruces.

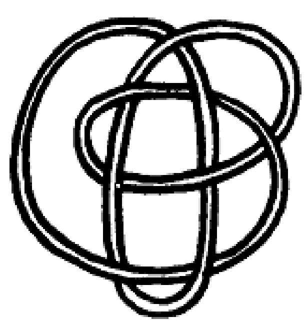


Figura 20: El nudo 8_{17} es el primer nudo primo no invertible de la lista.

3.2.3. Crossing number

El “crossing number” es el mínimo número de cruces con el que podemos dibujar el diagrama de un nudo y se denota por c(K). Es difícil de calcular para un nudo en general, aunque es un invariante a tener en cuenta por su sencillez en algunos casos particulares en los que combinados con otros resultados nos proveen de un método fácil y eficaz para distinguir entre dos nudos. Por ejemplo cuando los nudos son alternados existe un resultado conjeturado por Peter G. Tait y demostrado por Thistlethwaite, Kauffman y Murasagi que dice que todo diagrama reducido de un nudo alternado tiene el mínimo número de cruces posible (aparece más adelante en la página 27). Los nudos de las tablas están representados con el mínimo número de cruces, del que obtienen su nombre.

Un problema muy sencillo de enunciar pero que continúa abierto es el siguiente, relativo a la aditividad del número mínimo de cruces

Dados dos nudos K_1 y K_2, ¿es cierto que $c(K_1 \sharp K_2) = c(K_1) + c(K_2)$?

La desigualdad $c(K_1 \sharp K_2) \leq c(K_1) + c(K_2)$ es trivial. Se sabe también que si los dos nudos son alternados, la igualdad es cierta. Además se conoce una cota inferior para $c(K_1 \sharp K_2)$ (en general para una cantidad finita de nudos n):

Teorema 1 *Sean K_1,K_2,...,K_n nudos orientados en el espacio, entonces se tiene:*

$$\frac{c(K_1)+c(K_2)+...+c(K_n)}{152} \leq c(K_1 \sharp K_2 \sharp ... \sharp K_n) \leq c(K_1) + c(K_2) + ... + c(K_n)$$

3.2.4. Unknotting number

Dado un cruce de un diagrama plano, podemos cambiar la disposición de la cuerda de forma que el arco que pasa por debajo pase por encima y viceversa. Obviamente estos cambios no son un movimiento lícito para la equivalencia de nudos porque estamos autointersecando la cuerda, pero si consideramos el número mínimo de este tipo de cambios necesarios para desanudar un nudo ya tenemos un invariante de nudos denotado por $u(K)$.

Veamos que en cualquier nudo existe un número finito de cambios de cruces que lo convierten en un nudo trivial. Si seguimos los siguientes pasos: fijamos un punto en el nudo y avanzamos a partir de él en el sentido que escojamos. Cuando nos encontremos con un cruce tenemos dos opciones:

- Si no hemos pasado por ese cruce anteriormente lo cambiamos o lo dejamos igual de forma que el camino que recorremos pase por encima del cruce.

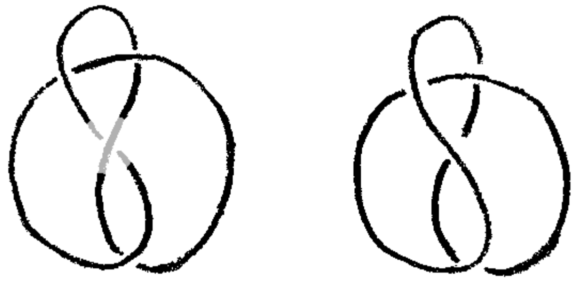


Figura 21: Al cambiar un cruce en el nudo de ocho obtenemos un nudo equivalente al trivial, tal y como habíamos visto en la Figura 5

- Si ya habíamos pasado por ese cruce, lo dejamos como está.

El nudo que obtenemos por este procedimiento es trivial (véase [4]). De este procedimiento no sólo deducimos que es un número finito sino que además está acotado por c(K): $u(K) \leq c(K)$.

Por otro lado también nos gustaría saber cómo se comporta la función $u(K)$ con la suma conexa de nudos, es decir, qué relación hay entre $u(K_1 \sharp K_2)$ y $u(K_1)+u(K_2)$. De entrada es evidente que $u(K_1 \sharp K_2) \leq u(K_1) + u(K_2)$, ya que al hacer una suma conexa no se añaden cruces, y se conjetura que la desigualdad contraria también es cierta puesto que no disponemos de ningún contraejemplo que la contradiga, aunque tampoco contamos con ninguna demostración. Lo que sí tenemos es un resultado que dice que si $u(K) = 1$ entonces el nudo K es primo, dicho de otra forma, un nudo compuesto no puede tener número de desanudamiento menor que 2, lo cual se ajusta a la desigualdad que queda sin comprobar:

$$u(K_1 \sharp K_2) \geq^? u(K_1) + u(K_2) \geq 2$$

(Al hacer la suma conexa de los dos nudos estamos dando por hecho que ninguno de ellos es trivial así que cada uno de ellos tendrá número de desanudamiento mayor o igual que 1).

3.2.5. Tricolorabilidad

Uno de los invariantes más elementales es el de la tricolorabilidad. No es muy útil, pues sólo distingue entre nudos tricoloreables y no tricoloreables, y la tricolorabilidad en sí no es una propiedad con el interés que puede llegar a tener la quiralidad, por ejemplo, pero es la técnica más sencilla para demostrar la existencia de nudos no

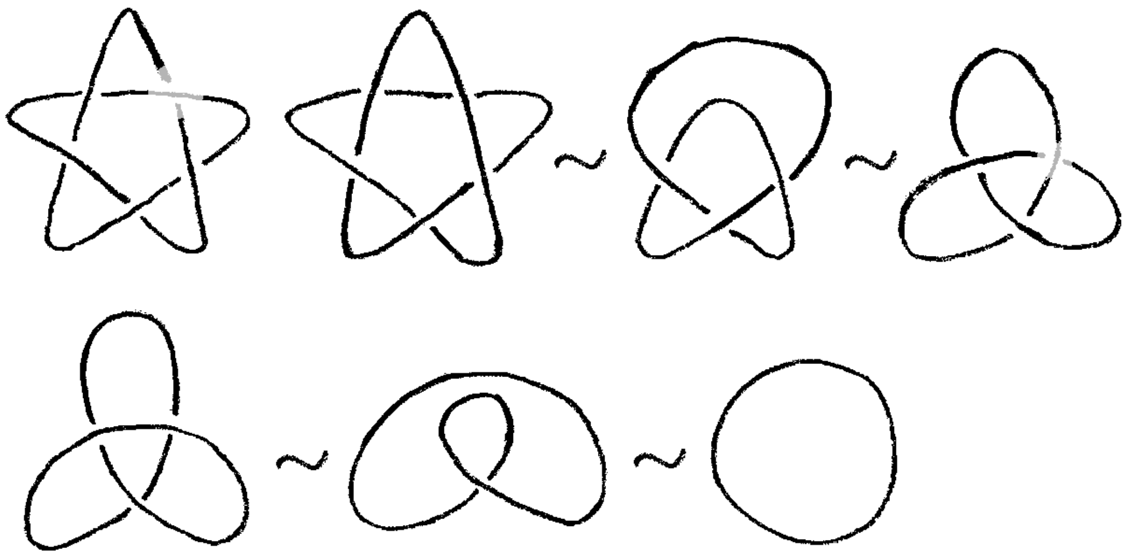


Figura 22: El nudo 5_1 necesita atravesarse a sí mismo dos veces para desanudarse.

triviales. Hasta ahora habíamos dado por supuesto que los nudos que utilizábamos eran no triviales y sin embargo, a pesar de lo evidente que pueda parecer, debemos demostrarlo; el hecho de que no seamos capaces de desanudar un nudo de trébol no nos sirve como justificación de la imposibilidad de ello.

Definición 8 *Se dice que un nudo es tricoloreable si se pueden colorear los arcos de su diagrama utilizando tres colores y con las siguientes condiciones:*

1. *Los tres arcos que inciden en cada cruce son de tres colores distintos o todos del mismo color.*

2. *Se deben utilizar al menos dos colores.*

Obviamente el nudo trivial no es tricoloreable ya que al no tener ningún cruce no se puede utilizar más de un color con él. Ahora bastará encontrar un nudo no tricoloreable para usarlo como ejemplo de nudo no trivial, pero primero veamos que esta propiedad no depende del diagrama del nudo, es decir, es un invariante de nudos. Para ello veamos que no se ve afectada por los movimientos de Reidemeister, que equivale a probar que es invariante por isotopía:

En el movimiento de tipo II debemos distinguir dos casos dependiendo de si las dos cuerdas son del mismo o de distinto color. Ambos casos son muy sencillos.

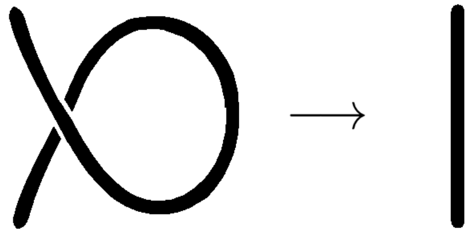


Figura 23: Movimiento de tipo I

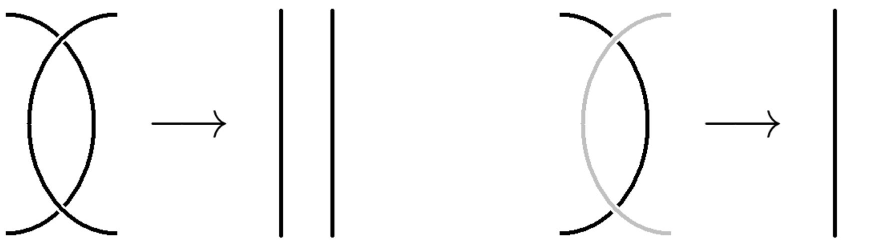


Figura 24: Movimiento de tipo II

Para el movimiento de tipo III se han tenido en cuenta todas las posibles coloraciones iniciales (salvo permutación de los colores).

Hemos obtenido que la tricolorabilidad es un invariante de nudos y que el nudo trivial es no tricoloreable. Esto, junto con la siguiente imagen en la que se muestra que el nudo de trébol tiene dicha propiedad, nos prueba la existencia de nudos tricoloreables y en consecuencia, no triviales.

Esta propiedad es aplicable también a los enlaces.

3.3. Nudos alternados

En este apartado estudiaremos un caso particular de nudos del que hay resultados que facilitan su estudio. Es el caso de los diagramas alternados, que aparecen casi desde el principio de la historia de la teoría de nudos, como indican las conjeturas hechas por Pete G. Tait, cuyo nombre ya nos resulta familiar.

Decimos que un diagrama es alternado cuando partiendo de un punto y avanzando en una dirección determinada los cruces se van alternando entre cruces por arriba y cruces por debajo hasta llegar de nuevo al punto inicial. Como ya hemos dicho los

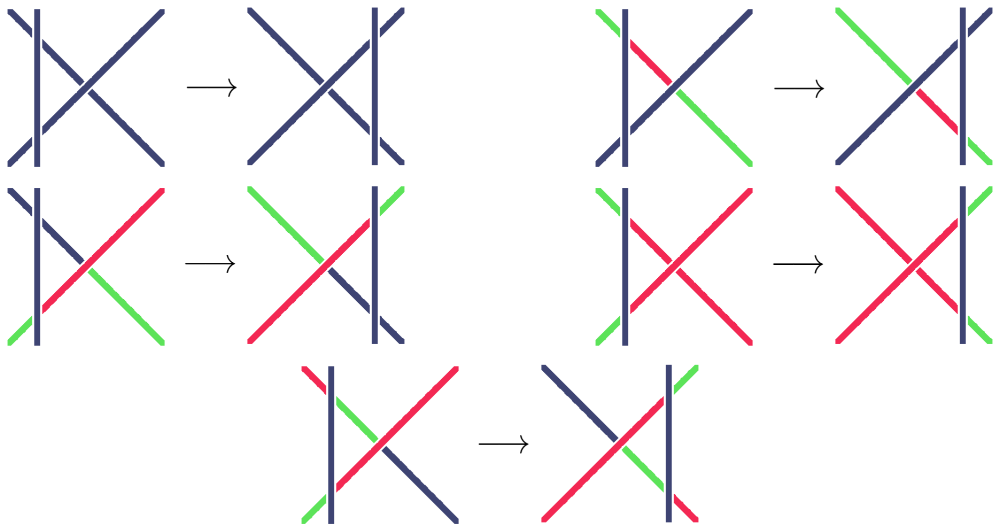


Figura 25: Movimiento de tipo III

nudos pueden tener varios diagramas planos que los representen, así que diremos que un nudo es alternado si tiene una representación por un diagrama alternado.

Igual que ocurría con los nudos invertibles, es difícil encontrar un nudo no alternado con número bajo de cruces. El nudo mas pequeño no alternado tiene de 8 cruces.

El interés que tienen estos nudos es que son un caso más fácil de manejar que cualquier nudo en general gracias a las tres conocidas conjeturas de Tait, que son las siguientes:

1. Si tenemos un nudo alternado y un diagrama alternado reducido suyo, el número de cruces del diagrama es el número mínimo de cruces con el que podemos representar el nudo. De esta forma en este tipo de nudos es muy sencillo hallar $c(K)$. Además cualquier representación plana con ese número de cruces mínimo será alternada. En el caso de los nudos primos se da la equivalencia, es decir, un diagrama de un nudo primo es reducido si y sólo si es alternado.

2. Fijemos una orientación en el nudo. Un cruce decimos que es positivo o negativo si al apuntar las orientaciones de los arcos que inciden en él hacia arriba, el arco que cruza por encima tiene pendiente positiva (negativa respectivamente). Ahora restamos los cruces positivos menos los negativos y obtenemos un número que es invariante por los movimientos de Reidemeister de tipo II y III,

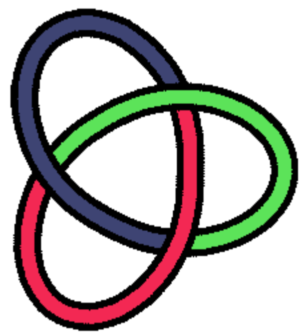


Figura 26: El nudo de trébol es tricoloreable

no siendo así para los de tipo I. Por ello si restringimos el estudio a los nudos alternados reducidos sí que obtenemos un invariante. El número obtenido se denomina “writhe” y se utiliza con frecuencia en las aplicaciones de la teoría de nudos a la biología.

3. Si tenemos dos diagramas alternados de un mismo nudo, se puede pasar de uno a otro por medio de una cantidad finita de unos movimientos que consisten en hacer un giro de 180como indica la Figura 27, de forma que traslada el cruce a lo largo del nudo.

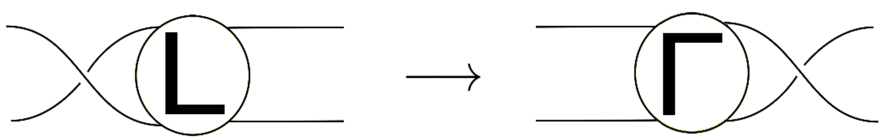


Figura 27:

Este tipo de movimiento no aumenta el número de cruces del nudo, al contrario que algunos de los movimientos de Reidemeister. Por tanto la conjetura implica que todos los diagramas alternados de un mismo nudo tienen el mismo número de cruces.

Nota: un cruce de un diagrama es reducible si no existe ninguna bola que corte al nudo en un sólo punto conteniendo en su interior parte del nudo (no sirven las bolas tangentes al nudo). Por ejemplo en la posición del movimiento de Reidemeister de tipo I se da la situación descrita. Un nudo es reducido si no tiene ningún cruce reducible.

Realmente estas tres conjeturas no son tal, pues fueron demostradas en los años 1987, 1987 y 1991 respectivamente por Kauffman, Thistlethwaite, Murasugi las dos primeras y por Menasco y Thistlethwaite la tercera.

3.4. El grupo del nudo

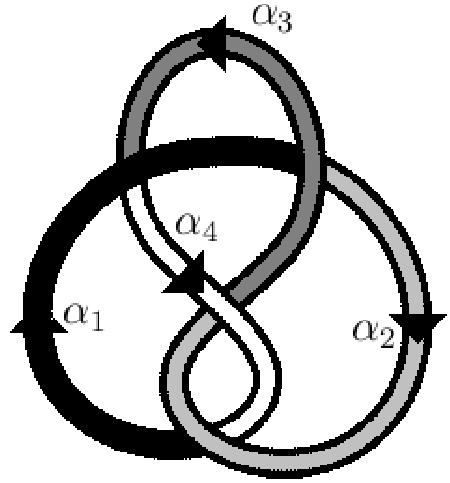
En topología un invariante muy popular es el grupo fundamental, que es el conjunto de las clases de equivalencia por homotopía de los lazos en un espacio topológico. Obviamente no tiene sentido estudiar el grupo fundamental del nudo porque como hemos dicho todos los nudos son homeomorfos entre sí y por tanto el grupo fundamental de cualquier nudo será isomorfo a $\mathbb{Z}$. A su vez conocemos algo que sí caracteriza a un nudo, que es el espacio complementario del nudo ($\mathbb{R}^3 - K$) como espacio topológico. Ya que se utiliza el grupo fundamental para tratar de clasificar los espacios topológicos podemos estudiar el grupo fundamental del espacio complementario del nudo, que sí nos puede dar información útil para determinar si dos nudos son equivalentes o no. Este grupo se llama directamente el grupo del nudo.

Este invariante puede obtenerse utilizando un algoritmo sobre el diagrama plano del nudo, simplemente con la información que nos proporcionan los cruces. El procedimiento a seguir fue ideado por Wilhelm Wirtinger y nos proporciona la presentación del grupo del nudo, que obtenida así recibe el nombre de presentación de Wirtinger.

3.4.1. Presentación de Wirtinger

A continuación describiremos los pasos para obtener la presentación de Wirtinger de un nudo K a partir de su diagrama ilustrándolos con un ejemplo.

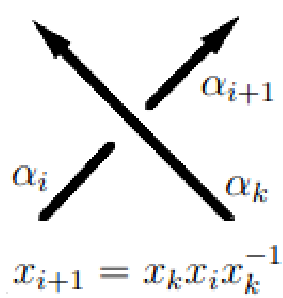
En primer lugar dotaremos al nudo de una orientación (la que nosotros queramos). Dividiremos el nudo en la unión de tantos arcos como cruces tenga el diagrama del nudo, considerando los arcos cuyo inicio y final sean un cruce por debajo (un túnel). Como en los diagramas señalamos este tipo de cruces dejando un trozo de nudo sin dibujar bastará con fijarse en cada una de las componentes conexas de nuestro dibujo. Les asignamos el nombre α_i siguiendo el orden que la orientación nos indica. Los α_i tienen también una orientación que heredan de la del nudo.

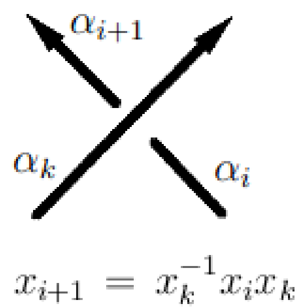


Para cada i consideramos un lazo con base en el punto $(0,0,z_0)$ con $z_0 \geq z$ $\forall(x,y,z) \in K$ -o suponer directamente que la base del lazo es el ojo del lector- que pase por debajo de α_i de derecha a izquierda.

Los lazos descritos se llamarán x_i y serán los generadores del grupo de K.

Las relaciones nos la proporcionan los cruces. Tenemos dos posibilidades de cruce, cuya relación correspondiente es la que se indica:





En nuestro caso tenemos cuatro cruces que nos dan las siguientes relaciones:

- $x_2 = x_4^{-1} x_1 x_4$
- $x_4 = x_2^{-1} x_3 x_2$
- $x_1 = x_3 x_4 x_3^{-1}$

- $x_3 = x_1 x_2 x_1^{-1}$

El hecho de que el grupo de un nudo se suela definir por medio de su presentación por generadores y relaciones nos conduce a otros problemas relacionados con la presentación de grupos, como son el problema de la palabra, el de la conjugación y el del isomorfismo. El problema de la palabra consiste en encontrar un algoritmo que determine, dadas dos palabras cualesquiera, si son equivalentes o no (traducido al lenguaje topológico, si dos lazos son equivalentes o no). El problema del isomorfismo es el problema de decidir si dos presentaciones determinan grupos isomorfos, es decir, dados dos nudos, decidir si sus grupos son isomorfos o no.

Aun así para los nudos primos anteriormente explicados se tiene una clasificación completa por medio de la presentación de Wirtinger, es decir, dos nudos primos son equivalentes si y sólo si su grupo es isomorfo cuando en general sólo se da la implicación directa.

3.5. Otros invariantes

Otros ejemplos famosos de invariantes algebraicos son los polinomios de Jones, Alexander y Alexander-Conway, que se pueden calcular mediante un algoritmo recursivo sobre los diagramas planos de los nudos. Estos invariantes fueron los que permitieron en su día perfeccionar las tablas de nudos. El primero que apareció, el de Alexander, fue utilizado por el propio Alexander y por Briggs para demostrar de forma rigurosa la no equivalencia de los nudos de las tablas de Tait. 50 años más tarde comenzaron a aparecer otros polinomios más complejos y variantes de los mismos.

4. Algunas aplicaciones

Una de las aplicaciones más conocidas de la teoría de nudos es el estudio de la estructura del ADN. El ADN (ácido desoxirribonucleico) es una molécula que contiene nuestro código genético y que se encuentra en el núcleo de cada una de nuestras células. Tiene forma de dos cuerdas que enrolladas formando una doble hélice. El ADN puede realizar cambios o movimientos como la replicación (reproducción), la transcripción (copia segmentos del ADN) o la recombinación (que modifica la molécula). Para que se den estos cambios es necesario manipular las moléculas de alguna manera, función de la que se encargan otras moléculas llamadas enzimas, en concreto una denominada topoisomerasa, que tiene la capacidad de modificar la topología del ADN con movimientos como los descritos en la sección 3.2.4, es decir, el nudo se atraviesa a sí mismo y el cruce cambia de signo.

Además las moléculas de ADN pueden encontrarse de forma lineal o cerradas con los extremos unidos. En este último caso formarían un nudo, que podría estudiarse con las técnicas estudiadas.

La química también juega un papel importante aquí. De entrada una de las motivaciones del estudio de la teoría de nudos fue la teoría del científico Lord Kelvin (en 1860) en la que los átomos son cuerdas anudadas en éter, una supuesta sustancia que rellenaba los huecos en el espacio. Así el problema de clasificar los elementos químicos se trasladaba al problema matemático de clasificar nudos y enlaces. Esta fue la causa de que Peter Tait se dedicara a enumerar todos los nudos de hasta diez cruces (aunque no de forma rigurosa), lista que se publicó en 1885 y que fue la primera tabla de nudos conocida. Años más tarde esta teoría se rechaza por no haber evidencias de la existencia de éter y la teoría de nudos pierde el interés que tenía en el mundo físico y químico. Sin embargo más adelante tras su desarrollo matemático vuelven a aparecer aplicaciones a la química, esta vez válidas. Un claro ejemplo es el estudio de la quiralidad de las moléculas: al igual que a los nudos a las moléculas también se les puede atribuir la característica de ser quirales o anfiqueirales, y cada uno de los dos tipos tiene propiedades y comportamientos distintos. Un nudo puede ser un buen modelo matemático de la estructura de una molécula que nos permitirá distinguir, en algunos casos, el tipo de molécula que es. Aunque todavía no hay un método definitivo para determinar si un nudo es quiral o no, hay resultados parciales, como el siguiente:

Resultado: *Si un nudo es alternado y su número mínimo de cruces es impar, entonces es quiral. Dicho de otro modo, todo nudo alternado anfiqueiral tendrá un número mínimo de cruces par.*

Este resultado es una consecuencia de la tercera conjetura de Tait.

De este modo la teoría de nudos tiene relación con varias disciplinas de la ciencia aparte de las matemáticas, por ejemplo como ya hemos visto en la biología del ADN y en la química de las moléculas además de la física cuántica y la criptología. Aun así cabe también mencionar el interés que produce dentro de la propia matemática al poder estudiarse desde varios puntos de vista dentro de esta ciencia. Así los nudos aparte de ser un objeto de estudio dentro de la topología hace uso de otras ramas matemáticas como las siguientes:

- Hace uso de objetos algebraicos tales como los grupos, las matrices y los polinomios, utilizados como invariantes (el grupo del nudo, los polinomios de Jones, Alexander, Kauffman, el polinomio HOMFLY, que debe su nombre a las iniciales de sus descubridores, la matriz de Alexander, etc.), que son imprescindibles dentro del estudio de la clasificación de nudos.

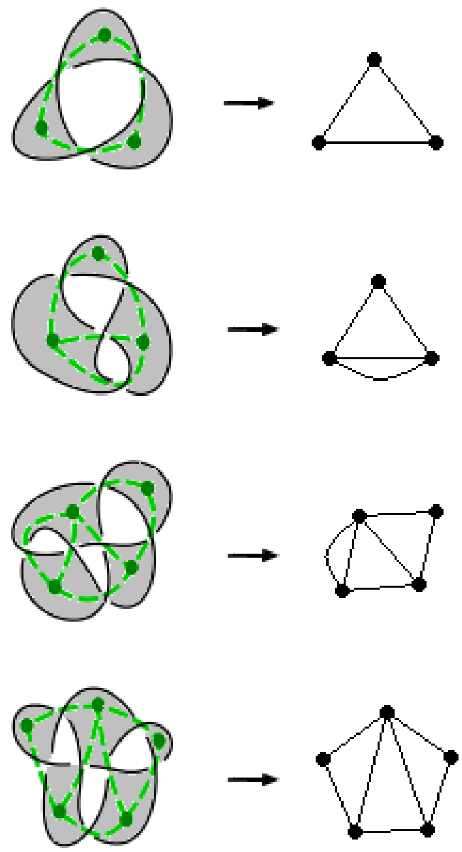


Figura 28: Transformación de nudos en su grafo correspondiente.

- Aunque los nudos sean una variedad unidimensional también pueden relacionarse con objetos de una dimensión mayor: las superficies. Existe un algoritmo ideado por Seifert para obtener a partir de un nudo una superficie cuyo borde sea el propio nudo. Gracias a ello y a propiedades de ya conocidas, como por ejemplo el género de una superficie, podemos obtener nuevos resultados.

- Es sencillo pasar de un diagrama de un nudo a un grafo (véase la Figura 28). Todo nudo o enlace admite una "coloración" en blanco y negro como la de la figura. Comenzamos añadiendo un vértice en el interior de cada una de las regiones adyacentes al exterior del nudo, pasamos una arista por cada cruce del nudo y añadimos los vértices que falten. Si además el nudo tiene una orientación y en cada arista indicamos si el cruce correspondiente es positivo o negativo podemos dar marcha atrás, es decir, pasar de grafo a nudo.

El hecho de que un nudo y un grafo (con etiquetas en las aristas) se puedan relacionar en las dos direcciones implica una conexión entre la teoría de nudos y teoría de grafos: problemas de nudos se pueden plantear en términos de grafos y problemas de grafos en términos de teoría de nudos.

- Por último la computación también está presente en la teoría de nudos. Por ejemplo es necesario implementar algoritmos que computen los polinomios invariantes de un nudo. Además es interesante saber en qué clase de complejidad se encuentran ciertos problemas: saber si dos nudos son equivalentes, cuándo un nudo es primo, el problema de tabular los nudos primos, etc.

Bibliografía

[1] Richard H. Crowell, Ralph H. Fox: *Introduction to Knot Theory.* Springer-Verlag, New York (1963).

[2] Dale Rolfsen: *Knots and Links.* AMS Chelsea Publishing, Providence (2003).

[3] Colin C. Adams: *The knot book: an elementary introduction to the mathematical theory of knots.* W. H. Freeman and Company, New York (1994).

[4] John H. Conway: *An Enumeration of Knots and Links, and Some of Their Algebraic Properties.* En J. Leech (editor), Computational Problems in Abstract Algebra (329-358). Pergamon Press, Oxford (1970)

[5] Kunio Murasugi: *Knot Theory and its Applications.* Birkhäuser, Boston (1996).

[6] Marc Lackenby: *The crossing number of composite knots*, Journal of Topology Vol. 2, num. 4 (747-768). Oxford Univerty Press, London (2009).