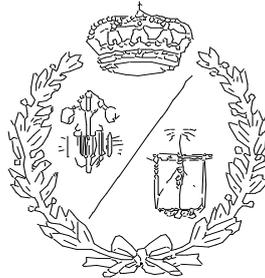


**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS
INDUSTRIALES Y DE TELECOMUNICACIÓN**

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA



Trabajo Fin de Grado

**Herramienta de simulación para el diseño
de sistemas de aislamiento de vibraciones
sísmicas en equipos**

**(Computer tool to design seismic vibrations
isolation systems for electronic equipment)**

Para acceder al Título de

**GRADUADO EN INGENIERÍA EN
TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES**

Autor: Miguel Prieto Lastra

**Febrero
2017**



**Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales y de
Telecomunicación**



ÍNDICE

1. MEMORIA	5
1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	5
1.2 OBJETO.....	5
1.3 ALCANCE Y DESCRIPCION DEL ENTORNO	6
1.4 JUSTIFICACIÓN	6
1.5 INTRODUCCIÓN A LA TRANSMISIBILIDAD DE VIBRACIONES.....	7
1.6 VIBRACIONES EN LOS CENTROS DE SERVIDORES.....	8
1.7 FRECUENCIA NATURAL DEL SISTEMA Y SOLUCIONES DE AISLAMIENTO DE VIBRACIONES.....	11
2. METODOLOGIA DEL MODELO MATEMATICO	16
2.1 INTRODUCCION AL MODELO.....	16
2.2 MODELO EN EL PLANO CON TRES GRADOS DE LIBERTAD	17
2.2.1 Movimiento en el eje X	18
2.2.2 Movimiento en el eje Y	19
2.2.3 Rotación θ	20
2.3 MODELO EN EL ESPACIO CON SEIS GRADOS DE LIBERTAD.....	23
2.3.1 Movimiento en el eje X	24
2.3.2 Movimiento en el eje Y	26
2.3.3 Movimiento en el eje Z	29
2.3.4 Rotacion en el eje X.....	31
2.3.5 Rotación en el eje Y.....	33
2.3.6 Rotación en el eje Z.....	35
3. VALIDACIÓN.....	41
3.1 Validación del modelo como sistema de un grado de libertad.....	41
3.2 Ensayo del modelo espacial ante una entrada impulsional	50
4. ANEXOS.....	57
4.1 ANEXO A - Archivos de Matlab y estructura	57
4.2 ANEXO B - Descripción de las funciones de Matlab	60
4.3 ANEXO C - Proceso de funcionamiento	62
BIBLIOGRAFIA	71

ÍNDICE DE FIGURAS

Ilustración 1 Aislador tipo muelle.....	11
Ilustración 2 Señal filtrada al servidor debido a vibraciones en el suelo	12
Ilustración 3 Ejemplo de un marco metálico anti vibraciones	13
Ilustración 4 Eficiencia de aislamiento de los marcos metálicos	14
Ilustración 5 Ejemplo de un sistema de losas flotantes	15
Ilustración 6 Esquema de magnitudes del modelo	16
Ilustración 7 Esquema del modelo en el plano de 3 grados de libertad.....	18
Ilustración 8 Esquema del modelo espacial en el eje X. Planta.	24
Ilustración 9 Esquema del modelo espacial en el eje Y. Planta.....	26
Ilustración 10 Esquema del modelo espacial en el eje Y. Planta.....	29
Ilustración 11 Introducción de parámetros para prueba de sistema libre sin amortiguamiento.....	42
Ilustración 12 Desplazamiento vertical en estado libre sin amortiguamiento	43
Ilustración 13 Parámetros para la prueba de resonancia	44
Ilustración 14 Resultados de la prueba de resonancia.....	45
Ilustración 15 Desplazamiento vertical en el caso subamortiguado.....	46
Ilustración 16 Desplazamiento vertical. Caso críticamente amortiguado	47
Ilustración 17 Desplazamiento vertical para el caso de movimiento sobreamortiguado	48
Ilustración 18 Parámetros introducidos para la prueba de equilibrio	49
Ilustración 19 Desplazamiento nulo en la prueba de equilibrio	50
Ilustración 20 Modelo a comparar, obtenido de (ver referencia [4])	51
Ilustración 21 Parámetros para la realización de la prueba de impacto.....	52
Ilustración 22 Señal de impulso para el ensayo de impacto	53
Ilustración 23 Aceleración del modelo a comparar en el eje Y.....	54
Ilustración 24 Aceleración del modelo presentado ante el impulso en el eje Y.....	54



Ilustración 25 Desplazamiento de la esquina Y1 del modelo presentado en m	55
Ilustración 26 Aceleración del modelo presentado ante el impulso en el eje Y. Segundo ensayo.....	56
Ilustración 27 Desplazamiento de la esquina Y1 del modelo presentado en m	56
Ilustración 28 Diagrama de funcionamiento del modelo.....	59
Ilustración 29 Interfaz de introducción de datos	63
Ilustración 30 Opciones para la introducción de los valores de rigidez y amortiguamiento.....	64
Ilustración 31 Selección de introducción de los valores de rigidez y amortiguamiento	65
Ilustración 32 Opción 1: aisladores de idénticas características.....	66
Ilustración 33 Opción 2: Aisladores de características independientes.....	67
Ilustración 34 Introducción de las condiciones iniciales y del tiempo de simulación....	68
Ilustración 35 Introducción de los parámetros de excitación	69
Ilustración 36 Ejecución de la simulación.....	70
Ilustración 37 Numeración de las esquinas para la lectura de resultados.....	71

1 MEMORIA

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El trabajo de fin de grado que se va a presentar a continuación consiste en la creación de una herramienta informática en MATLAB, que permita realizar un análisis dinámico del movimiento de un sistema ante excitaciones externas. Concretamente se va a tratar de simular la reacción de un rack de servidores, separado del soporte mediante amortiguadores y sometido a una excitación sísmica. El programa deberá permitir simular para distintos valores de amortiguamiento con el objetivo de seleccionar aquellos que proporcionen el aislamiento necesario.

1.2 OBJETO

El objetivo final es obtener una herramienta en Matlab que permita simular al usuario el comportamiento de su sistema formado por el rack de servidores, los amortiguadores, y el movimiento del soporte, de manera que el usuario pueda introducir los parámetros de su sistema real como las dimensiones de su estructura, la masa, posición de los aisladores, su rigidez y amortiguamiento, y la excitación externa a la que el sistema se va a ver sometido. La herramienta debe aportar como resultados la posición del sistema y concretamente el movimiento de las esquinas de la estructura para identificar posibles problemas debidos a impactos con el entorno.

1.3 ALCANCE Y DESCRIPCION DEL ENTORNO

Para llevar a cabo este trabajo, se va a comenzar planteando el sistema que se va a modelar, qué elementos va a incluir y qué valores deben ser personalizados por el usuario acorde con su problema concreto, realizando las simplificaciones necesarias y asumibles.

Posteriormente se va a desarrollar el modelo matemático, así como los cálculos que se deban realizar. Se va a avanzar gradualmente en la complejidad del modelo, partiendo de una simplificación en el plano, hasta llegar al modelo real en el espacio.

El siguiente punto de trabajo es la implementación en Matlab del modelo matemático, y su resolución. Será necesario especificar adecuadamente las funciones que conformen la herramienta, variables involucradas, así como recoger los datos y soluciones necesarias para tener bien definido el comportamiento del sistema.

Por último, se realizarán las comprobaciones y validaciones necesarias de los resultados que proporciona la herramienta, para dar certeza del grado de precisión de las soluciones que puede aportar.

1.4 JUSTIFICACIÓN

La necesidad de este trabajo surge del encargo de una empresa que desea proteger los servidores de sus centros de datos de los daños que puedan producir vibraciones externas en ellos, concretamente provenientes de ondas sísmicas. La herramienta les permitirá ensayar el comportamiento de sus sistemas probando distintos tipos de amortiguadores disponibles en el mercado, para así seleccionar aquel que les proporcione el aislamiento necesario con el precio más económico.

1.5 INTRODUCCIÓN A LA TRANSMISIBILIDAD DE VIBRACIONES

Se conoce como aislamiento de vibraciones a todo aquel procedimiento que permite reducir los efectos indeseables asociados a toda vibración. Esto supone introducir un elemento elástico, llamado aislante, entre la masa vibrante y la fuente de vibración, de forma que se reduzca la respuesta dinámica del sistema ante esta excitación externa.

Los sistemas de aislamiento de vibraciones pueden ser activos o pasivos, según si su funcionamiento requiere de una fuente externa de energía o no para su actuación respectivamente.

Un control pasivo está formado por un elemento elástico, que nos aporta una rigidez al sistema, y un elemento disipador de energía, que aporta un amortiguamiento. Algunos ejemplos de este tipo de aisladores pueden ser muelles metálicos, corchos, fieltros, resortes neumáticos, o elastómeros.

Un control activo de vibraciones está formado por un servomecanismo que incluye un sensor, un procesador de señal y un actuador. Este tipo de control mantiene constante una distancia entre la masa vibrante y un plano de referencia. Si la fuerza externa que se aplica al sistema varía esta distancia, el sensor lo detecta y produce una señal proporcional a la magnitud de la excitación, y por tanto a la respuesta del sistema. La señal se envía a un procesador, que a su vez envía una orden al actuador, para que desarrolle un movimiento o fuerza proporcional a la excitación, regulando así el sistema.

A la hora de valorar qué aisladores son más efectivos que otros, surge el concepto de la transmisibilidad, la magnitud que nos permite compararlos. La transmisibilidad se define como el cociente entre la amplitud de la fuerza transmitida al sistema, y la fuerza de la excitación.

Principalmente se encuentran dos situaciones en las que se va a querer aislar las vibraciones producidas por la excitación:



Aislar un sistema que vibra respecto de la base que lo soporta, para que ésta no reciba o transmita la vibración a su entorno:

En este caso, las fuerzas que excitan al sistema dando lugar a la vibración, pueden tener su origen en desequilibrios, desalineamientos... Cuando se trata de sistemas mecánicos con elementos de carácter alternativo o rotativo, pueden producir fuerzas de carácter impulsivo, como sistemas de prensa, estampación, explosiones.

Aislar el sistema mecánico respecto de la base que lo soporta y que está vibrando:

En este caso se trata de proteger un instrumento o equipo delicado del movimiento de su contenedor o base soporte. Este es el caso que refleja la intención de este trabajo, ya que se va a tratar de aislar sistemas informáticos delicados, como son los servidores, de posibles perturbaciones externas en su soporte debidas a excitaciones sísmicas.

1.6 VIBRACIONES EN LOS CENTROS DE SERVIDORES

Las vibraciones en los centros de servidores se pueden producir por labores de construcción cercanos a la zona, tráfico elevado, trenes, o incluso las propias unidades de refrigeración dentro o próximos a la sala, y cualquier otro equipamiento del centro que introduzca ruido y vibraciones en la sala. Adicionalmente, los peligros sísmicos son otra de las causas más importantes.

Estas vibraciones provocan efectos negativos en los discos duros. Según los datos siguientes, aceleraciones con picos mayores a 0.5 g ($1 \text{ g} = 10 \text{ m/s}^2$) en los servidores, pueden causar daños permanentes y pérdida de los datos utilizables, como se ve en la siguiente tabla:

Manufacturer's Model #	Max. g / Operating	Max. g / Non-Operating	Frequency Range
DEC - Alpha Server - #8200	-0.5 g (f@0.01)	0.5 g - 1.0 g	2-22 hz / 22-500 hz
DEC - Alpha Server - #4100	1.0 g	N / A	10-500 hz
DEC - RZ 26 Drive Unit	0.2 g	N / A	5 hz / 5-22 hz
DEC - RZ 28 Drive Unit	0.5 g (f@0.01)	0.5 g	5-22 hz
DEC - RZ 29 Drive Unit	0.5 g (f@0.04)	0.5 g	58-22 hz / 5-400 hz
HP - Model 20 Drive Unit	0.25g	N / A	5-2000 hz
HP - Enterprise 9000	0.2-0.5 g	0.5 g - 1.0 g	5-500 hz
SGI - Origin Fibre Vault	0.25 g	N / A	5-2000 hz
SUN - Class III Drive	0.25 g (all axis)	1.0 g (all axis)	5-500 hz

Tabla 1 Aceleraciones máximas soportadas por distintos modelos de servidor

Las fuerzas generadas por ondas sísmicas de baja frecuencia son generalmente más destructivas que las de alta frecuencia por sus largos periodos generados con altas amplitudes.

Según varios fabricantes, las unidades de disco duro tienen un límite incluso menor que el de los servidores. Si miramos por ejemplo los valores de la Unidad de Disco HITACHI 9900 (anteriormente SUN 9900), vemos que su límite es 0.49 m/s^2 , considerando que en operación normal tiene un valor de 0.10 m/s^2 .

Item	Condition		
	Operating (*1)	Non-operation (*2)	Shipping & Storage (*3)
Temperature (°C)	16 ~ 32	-10 ~ 43	-25 ~ 60
Relative Humidity (%) (*4)	20 ~ 80	8 ~ 90	5 ~ 95
Max. Wet Bulb (°C)	26	27	29
Temperature Deviation (°C/hour)	10	10	20
Vibration (*5)	5 ~ 10Hz: 0.25mm 10 ~ 300Hz: 0.49 m/s^2	5 ~ 10Hz: 2.5mm 10 ~ 70Hz: 4.9 m/s^2 70 ~ 99Hz: 0.05mm 99 ~ 300Hz: 9.8 m/s^2	4.9 m/s^2 , 15min. At four most severe resonance between 5~200Hz (*6)
Shock	—	78.4 m/s^2 , 15ms	Horizontal: Incline Impact 1.22 m/s (*7) Vertical: Rotational Edge 0.1 m (*8)
Acoustic level (*9)	65dB	—	—

Tabla 2 Comportamiento y daños del modelo HITACHI 9900

A continuación, se observa en un estudio de la latencia en las unidades de disco duro SUN, el efecto producido después de sufrir vibraciones dentro del rango aceptado por el fabricante, obteniéndose, en pérdida de tiempo, donde los discos están buscando posiciones para leer o escribir datos. Algunos estudios informan de las horas perdidas en 1-10-50 TB.

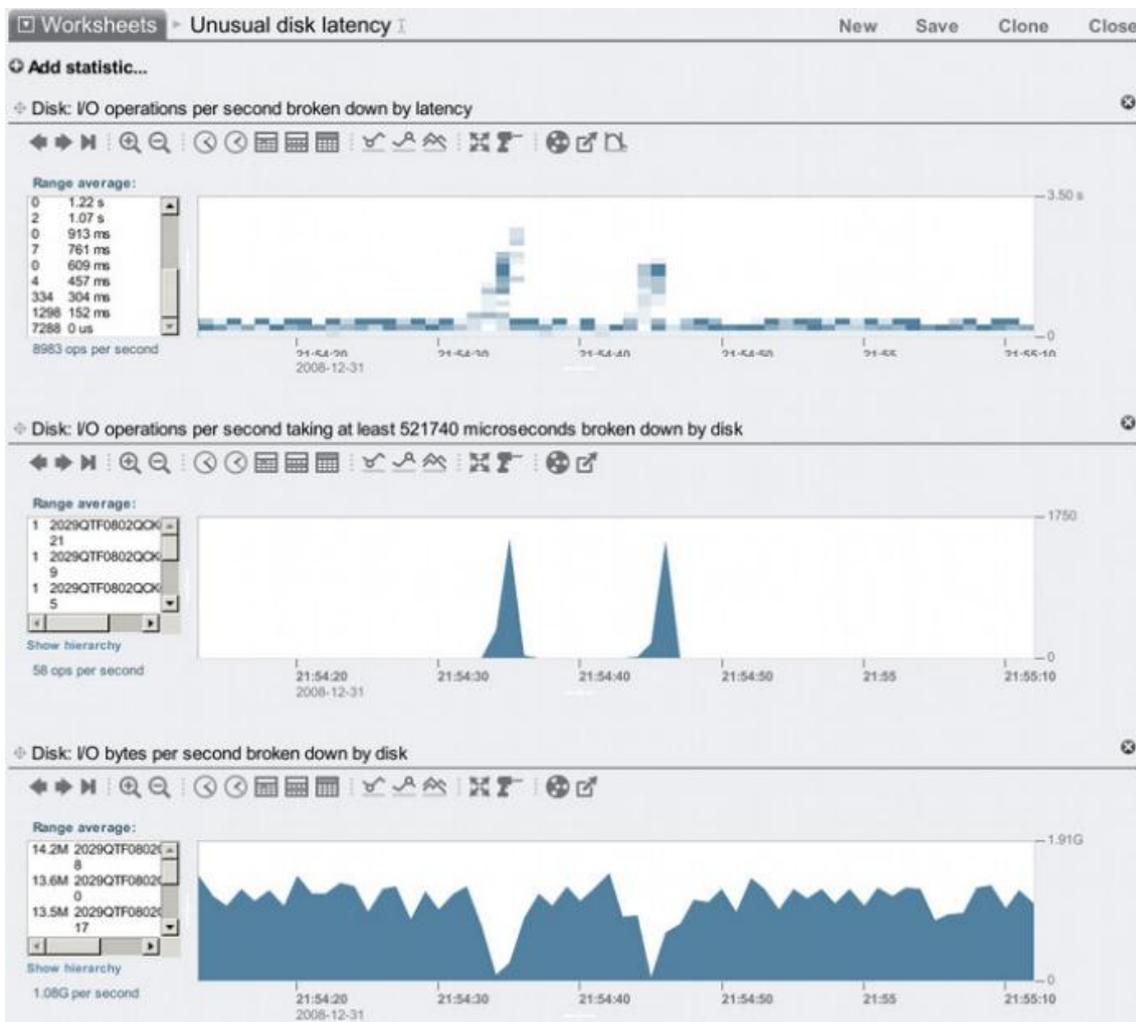


Tabla 3 Estudios de latencia en unidades de disco duro SUN

1.7 FRECUENCIA NATURAL DEL SISTEMA Y SOLUCIONES DE AISLAMIENTO DE VIBRACIONES

Las vibraciones hacen que el sistema oscile a su propia frecuencia natural (cada tiempo de oscilación o periodo corresponde a la inversa de la propia frecuencia). Si el periodo (o frecuencia) de la estructura es la misma que la del edificio o terreno donde se soporta, se produce el fenómeno llamado “resonancia”, en el cual el efecto de las vibraciones se incrementa, y las oscilaciones se vuelven más grandes debido a la acumulación de energía cinética en el interior de la masa oscilatoria.

Diseñar un sistema anti vibraciones adecuado consiste en determinar el mínimo y máximo peso del sistema para saber la masa que absorben los elementos de diseño teniendo en cuenta la frecuencia de resonancia de estos mismos elementos.

Dependiendo de las características de la habitación, se pueden escoger sistemas de protección como muelles individuales, estructuras metálicas, o losas de hormigón, tanto de vibración como sísmicas.

Muelles individuales:

Una de las soluciones propuestas son los sistemas basados en muelles, catalogados para un peso máximo del servidor, lo cual puede representar un problema de efectividad en racks con la mitad o menos densidad.



Ilustración 1 Aislador tipo muelle

La siguiente grafica muestra el efecto de un sistema de protección por muelles instalado individualmente en cada rack. En rojo, las vibraciones observadas en la tierra, producidas por unas obras de construcción cercanas, y en azul la señal filtrada en los racks, con un valor de 0.10 m/s^2 .

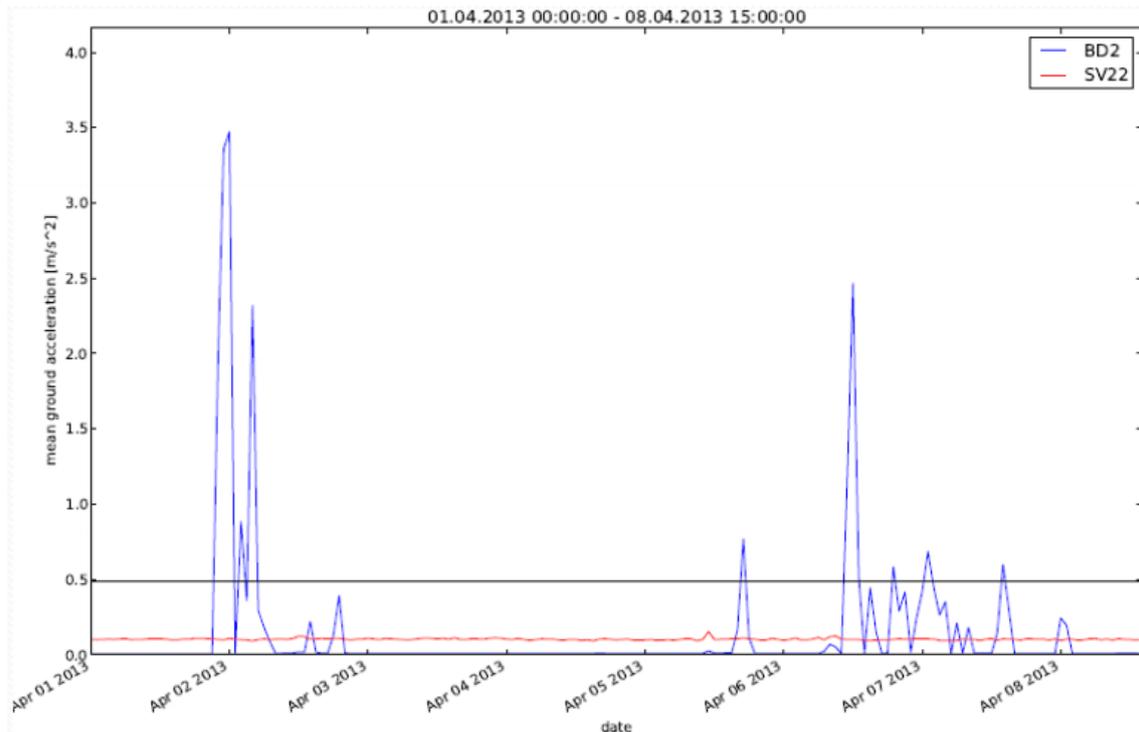


Ilustración ¡Error! No hay texto con el estilo especificado en el documento.2 Señal filtrada al servidor debido a vibraciones en el suelo

Marcos metálicos anti vibración:

Los marcos metálicos anti vibraciones son aisladores de resonancias de baja frecuencia con elementos contenedores y aisladores integrados en la propia estructura, y que aportan un grado de aislamiento de vibraciones significativo. Este tipo de suspensión es más adecuado para un caso en el que no haya un espectro real de vibraciones esperado que pueda producirse, y este marco tiene la capacidad de albergar un sistema con una frecuencia de resonancia o natural baja, mientras el peso esta mejor distribuido, permitiendo a los racks trabajar a media carga sin afectar a la eficacia.



Ilustración 3 Ejemplo de un marco metálico anti vibraciones

Sus características principales son:

- Capacidad de mantener una estabilidad global mientras se obtienen frecuencias de resonancia bajas, lo cual proporciona alto rendimiento anti vibraciones, gracias al hecho de reducir el centro de gravedad del sistema.
- Aumenta la estabilidad global al colocar apoyos más separados.
- Sistemas de transporte rápido integrados en el marco.
- Diferentes grosores de marco.
- Mantiene una frecuencia interna baja incluso con grandes variaciones de carga.
- Posibilidad de cambiar el espacio entre el marco y el suelo.

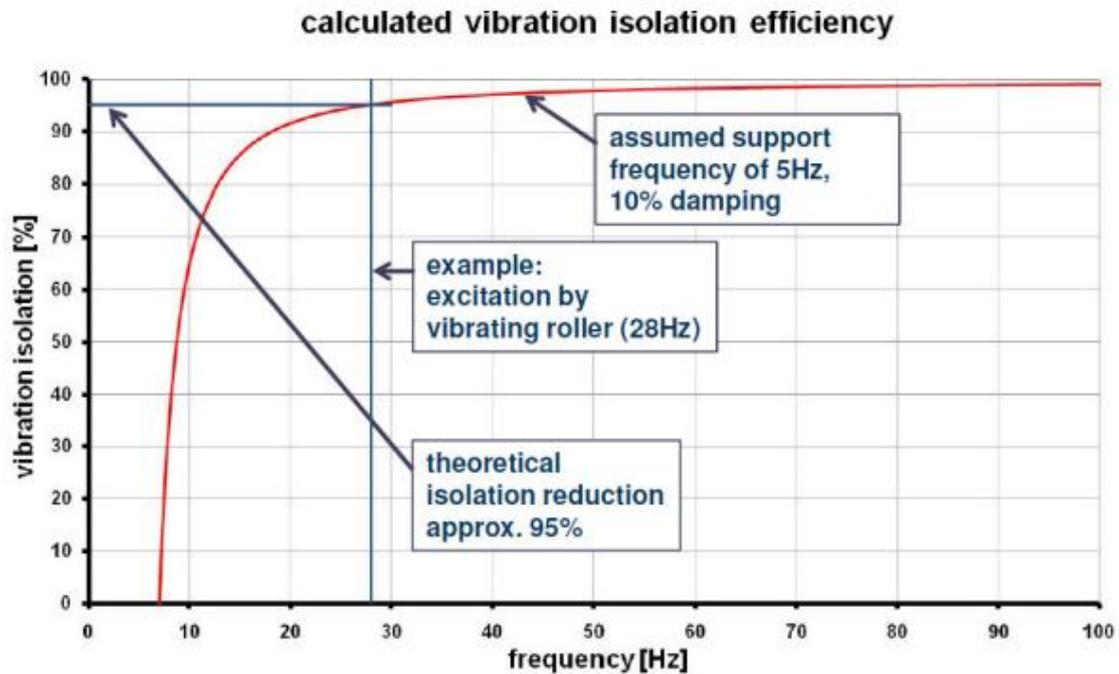


Ilustración 4 Eficiencia de aislamiento de los marcos metálicos

Sistema de losas flotantes:

Las losas flotantes de alto rendimiento son un sistema de aislamiento del suelo con baja frecuencia de resonancia y con aisladores integrados en los elementos contenedores en el interior de la losa de hormigón. Este tipo de amortiguación es el mejor para el tipo de entorno de los centros de almacenamiento de datos en servidores, en los cuales no se tiene ningún espectro real de vibraciones que puedan ocurrir en un seísmo o en obras cercanas.



Ilustración 5 Ejemplo de un sistema de losas flotantes

Estas losas también han sido utilizadas en otras aplicaciones de otros ámbitos de la industria, para absorber vibraciones y atenuar impactos: estudios de radio, televisión, grabación, máquinas de lavado industrial, equipos de refrigeración, transformadores eléctricos con tanques de aceite localizados entre la losa y el transformador, calderas, ascensores, gimnasios, boleras, imprentas, balanzas de precisión...

2 METODOLOGIA DEL MODELO MATEMATICO

2.1 INTRODUCCION AL MODELO

Para modelar el servidor se va a tomar un prisma rectangular, de dimensiones l_x , l_y y l_z , masa m , con cuatro aisladores situados en cada una de las esquinas de la base. Puesto que es un modelo real en el espacio, va a constar de seis grados de libertad, los cuales aparecen representados en la figura, estos son los desplazamientos del centro de gravedad x , y , z , además de la rotación alrededor de cada uno de los ejes θ_x , θ_y y θ_z .

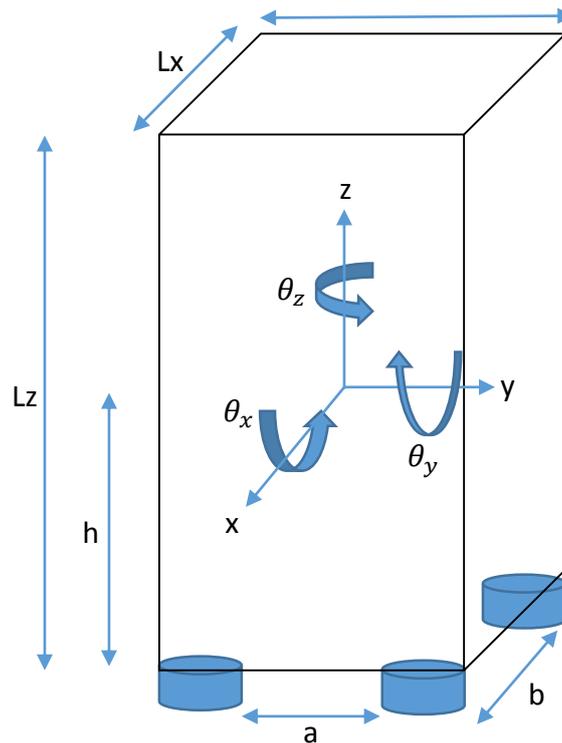


Ilustración 6 Esquema de magnitudes del modelo

Los amortiguadores se modelarán mediante un conjunto muelle-amortiguador. Se van a tener en cuenta una serie de hipótesis y simplificaciones siempre tratando de no comprometer la validez y precisión del modelo.



Aunque el servidor este apoyado sobre los aisladores, no solo aíslan en el eje vertical, sino que aportan cierto amortiguamiento transversal. Para modelar esto se va a suponer que el prisma tiene en cada una de sus esquinas tres conjuntos muelle-amortiguador, cada uno simulando el aislamiento posible en cada uno de los ejes.

Puesto que el servidor puede experimentar rotaciones respecto a los ejes de referencia, estas rotaciones pueden influir en la compresión o extensión que experimentan los aisladores, produciendo desequilibrios. Debido a que la amplitud de deformación de los aisladores es muy pequeña, del orden de un centímetro, y comparada con las dimensiones de un servidor que se miden en metros, se va a asumir la simplificación de que, para estos pequeños desplazamientos, la distancia recorrida por un punto al girar respecto a un centro, es la perpendicular al radio que va del centro a ese punto. De esta forma, se puede componer esa aportación del giro a la compresión de los aisladores como una distancia lineal fácilmente calculable mediante la rotación, y las dimensiones del servidor.

A la hora de hacer el modelado se ha partido de un modelo simple lineal de un grado de libertad, a partir del cual se ha avanzado en complejidad a un modelo en el plano de tres grados de libertad, el cual ha servido para comprender mejor el funcionamiento del problema y del programa, y así ser posible avanzar al modelo completo de forma más sencilla. Y por último el modelo en el espacio de 6 grados de libertad.

2.2 MODELO EN EL PLANO CON TRES GRADOS DE LIBERTAD

Este modelo está realizado en el plano, considerando el servidor como una superficie rectangular de dimensiones a , y b , masa m . Los grados de libertad del sistema son el desplazamiento en el eje X , el desplazamiento en el eje Y , y el giro θ . La excitación será producida por el movimiento del soporte en las direcciones X e Y , siendo su movimiento $X_o(t)$ e $Y_o(t)$.

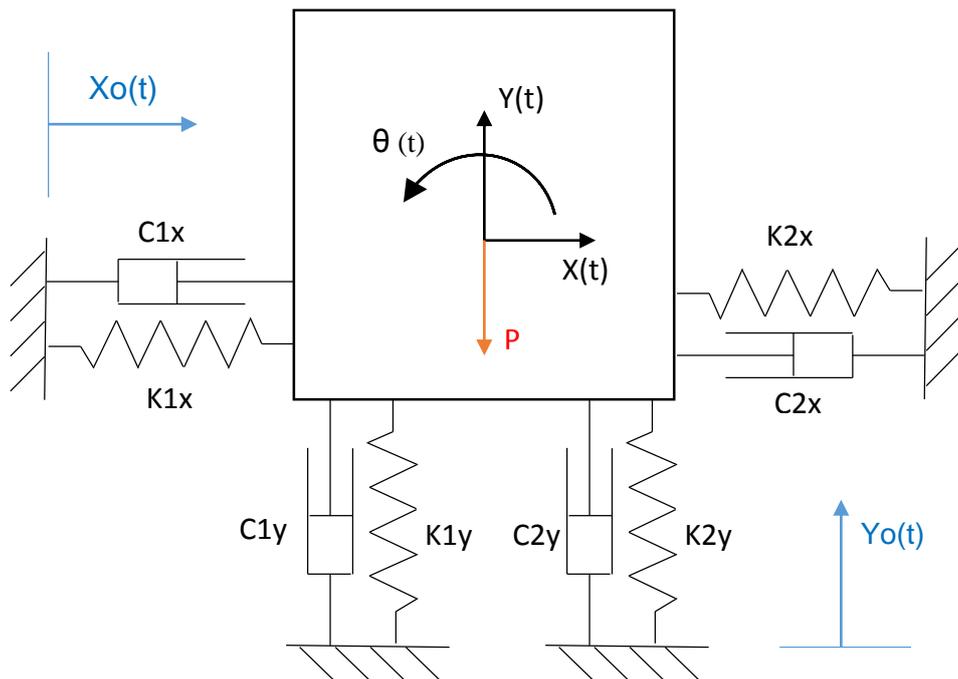


Ilustración 7 Esquema del modelo en el plano de 3 grados de libertad

Planteando las ecuaciones dinámicas del movimiento en los tres grados de libertad, X, Y y rotación θ :

2.2.1 Movimiento en el eje X:

$$M \cdot \ddot{x}(t) + F_{c1x} + F_{c2x} + F_{k1x} + F_{k2x} = 0$$

Siendo:

$$F_{c1x} = C_{1x} \cdot (\dot{x}(t) + \frac{h}{2} \dot{\theta}(t) - \dot{x}_0(t))$$

$$F_{c2x} = C_{2x} \cdot (\dot{x}(t) + \frac{h}{2} \dot{\theta}(t) - \dot{x}_0(t))$$

$$F_{k1x} = K_{1x} \cdot (x(t) + \frac{h}{2} \theta(t) - x_0(t))$$

$$F_{k2x} = K_{2x} \cdot (x(t) + \frac{h}{2} \theta(t) - x_0(t))$$

Sustituyendo, la ecuación resulta:

$$M \cdot \ddot{x}(t) + (C_{1x} + C_{2x}) \cdot \left(\dot{x}(t) + \frac{h}{2} \dot{\theta}(t) - \dot{x}_0(t) \right) \\ + (K_{1x} + K_{2x}) \cdot \left(x(t) + \frac{h}{2} \theta(t) - x_0(t) \right) = 0$$

Reordenando los términos:

$$M \cdot \ddot{x}(t) + (C_{1x} + C_{2x}) \cdot \dot{x}(t) + \frac{h}{2} (C_{1x} + C_{2x}) \cdot \dot{\theta}(t) + (K_{1x} + K_{2x}) \cdot x(t) \\ + \frac{h}{2} (K_{1x} + K_{2x}) \cdot \theta(t) = (C_{1x} + C_{2x}) \cdot \dot{x}_0(t) + (K_{1x} + K_{2x}) \cdot x_0(t)$$

2.2.2 Movimiento en el eje Y:

$$M \cdot \ddot{y}(t) + F_{c1y} + F_{c2y} + F_{k1y} + F_{k2y} = -P$$

Siendo:

$$F_{c1y} = C_{1y} \cdot (\dot{y}(t) - \frac{a}{2} \dot{\theta}(t) - \dot{y}_0(t))$$

$$F_{c2y} = C_{2y} \cdot (\dot{y}(t) + \frac{a}{2} \dot{\theta}(t) - \dot{y}_0(t))$$

$$F_{k1y} = K_{1y} \cdot (y(t) - \frac{a}{2} \theta(t) - y_0(t))$$

$$F_{k2y} = K_{2y} \cdot (y(t) + \frac{a}{2} \theta(t) - y_0(t))$$

$$P = m \cdot g$$

Sustituyendo, la ecuación resulta:

$$M \cdot \ddot{y}(t) + C_{1y} \cdot \left(\dot{y}(t) - \frac{a}{2} \dot{\theta}(t) - \dot{y}_0(t) \right) + C_{2y} \cdot \left(\dot{y}(t) + \frac{a}{2} \dot{\theta}(t) - \dot{y}_0(t) \right) \\ + \left(y(t) - \frac{a}{2} \theta(t) - y_0(t) \right) + K_{2y} \cdot \left(y(t) + \frac{a}{2} \theta(t) - y_0(t) \right) = -P$$

Reordenando los términos:

$$M \cdot \ddot{x}(t) + (C_{1y} + C_{2y}) \cdot \dot{y}(t) + \frac{a}{2} (C_{2y} - C_{1y}) \cdot \dot{\theta}(t) \\ + (K_{1y} + K_{2y}) \cdot y(t) + \frac{a}{2} (K_{2y} - K_{1y}) \cdot \theta(t) = \\ (C_{1y} + C_{2y}) \cdot \dot{y}_0(t) + (K_{1y} + K_{2y}) \cdot y_0(t) - P$$

2.2.3 Rotación θ :

$$I \cdot \ddot{\theta}(t) + M_{c1x} + M_{c2x} - M_{c1y} + M_{c2y} + M_{k1x} + M_{k2x} - M_{k1y} + M_{k2y} = 0$$

Siendo:

$$M_{c1x} = C_{1x} \cdot \frac{h}{2} (\dot{x}(t) + \frac{h}{2} \dot{\theta}(t) - \dot{x}_0(t))$$

$$M_{c2x} = C_{2x} \cdot \frac{h}{2} (\dot{x}(t) + \frac{h}{2} \dot{\theta}(t) - \dot{x}_0(t))$$

$$M_{c1y} = C_{1y} \cdot \frac{a}{2} (\dot{y}(t) - \frac{a}{2} \dot{\theta}(t) - \dot{y}_0(t))$$

$$M_{c2y} = C_{2y} \cdot \frac{a}{2} (\dot{y}(t) + \frac{a}{2} \dot{\theta}(t) - \dot{y}_0(t))$$

$$M_{k1x} = K_{1x} \cdot \frac{h}{2} (x(t) + \frac{h}{2} \theta(t) - x_0(t))$$

$$M_{k2x} = K_{2x} \cdot \frac{h}{2} (x(t) + \frac{h}{2} \theta(t) - x_0(t))$$

$$M_{k1y} = K_{1y} \cdot \frac{a}{2} (y(t) - \frac{a}{2} \theta(t) - y_0(t))$$

$$M_{k2y} = K_{2y} \cdot \frac{a}{2} (y(t) + \frac{a}{2} \theta(t) - y_0(t))$$

$$I = \frac{1}{12} \cdot m \cdot (a^2 + h^2)$$

Sustituyendo, la ecuación resulta:

$$\begin{aligned} I \cdot \ddot{\theta}(t) + C_{1x} \cdot \frac{h}{2} \left(\dot{x}(t) + \frac{h}{2} \dot{\theta}(t) - \dot{x}_0(t) \right) + C_{2x} \cdot \frac{h}{2} \left(\dot{x}(t) + \frac{h}{2} \dot{\theta}(t) - \dot{x}_0(t) \right) - C_{1y} \\ \cdot \frac{a}{2} \left(\dot{y}(t) - \frac{a}{2} \dot{\theta}(t) - \dot{y}_0(t) \right) + C_{2y} \cdot \frac{a}{2} \left(\dot{y}(t) + \frac{a}{2} \dot{\theta}(t) - \dot{y}_0(t) \right) + K_{1x} \\ \cdot \frac{h}{2} \left(x(t) + \frac{h}{2} \theta(t) - x_0(t) \right) + K_{2x} \cdot \frac{h}{2} \left(x(t) + \frac{h}{2} \theta(t) - x_0(t) \right) - K_{1y} \\ \cdot \frac{a}{2} \left(y(t) - \frac{a}{2} \theta(t) - y_0(t) \right) + K_{2y} \cdot \frac{a}{2} \left(y(t) + \frac{a}{2} \theta(t) - y_0(t) \right) = 0 \end{aligned}$$

Reordenando términos:

$$\begin{aligned} I \cdot \ddot{\theta}(t) + \frac{h}{2} (C_{1x} + C_{2x}) \cdot \dot{x}(t) + \frac{a}{2} (C_{2y} - C_{1y}) \cdot \dot{y}(t) + \\ \left[\frac{h^2}{4} (C_{1x} + C_{2x}) + \frac{a^2}{4} (C_{1y} + C_{2y}) \right] \cdot \dot{\theta}(t) + \frac{h}{2} (K_{1x} + K_{2x}) \cdot x(t) \\ + \frac{a}{2} (K_{2y} - K_{1y}) \cdot y(t) + \left[\frac{h^2}{4} (K_{1x} + K_{2x}) + \frac{a^2}{4} (K_{1y} + K_{2y}) \right] \cdot \theta(t) = \\ \frac{h}{2} (C_{1x} + C_{2x}) \cdot \dot{x}_0(t) + \frac{a}{2} (C_{2y} - C_{1y}) \cdot \dot{y}_0(t) \\ + \frac{h}{2} (K_{1x} + K_{2x}) \cdot x_0(t) + \frac{a}{2} (K_{2y} - K_{1y}) \cdot y_0(t) \end{aligned}$$

Si se colocan las ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{pmatrix} \\
 & + \begin{pmatrix} C_{1x} + C_{2x} & 0 & \frac{h}{2}(C_{1x} + C_{2x}) \\ 0 & C_{1y} + C_{2y} & \frac{a}{2}(C_{2y} - C_{1y}) \\ \frac{h}{2}(C_{1x} + C_{2x}) & \frac{a}{2}(C_{2y} - C_{1y}) & \frac{h^2}{4}(C_{1x} + C_{2x}) + \frac{a^2}{4}(C_{1y} + C_{2y}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} \\
 & + \begin{pmatrix} K_{1x} + K_{2x} & 0 & \frac{h}{2}(K_{1x} + K_{2x}) \\ 0 & K_{1y} + K_{2y} & \frac{a}{2}(K_{2y} - K_{1y}) \\ \frac{h}{2}(K_{1x} + K_{2x}) & \frac{a}{2}(K_{2y} - K_{1y}) & \frac{h^2}{4}(K_{1x} + K_{2x}) + \frac{a^2}{4}(K_{1y} + K_{2y}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} C_{1x} + C_{2x} & 0 & \frac{h}{2}(C_{1x} + C_{2x}) \\ 0 & C_{1y} + C_{2y} & \frac{a}{2}(C_{2y} - C_{1y}) \\ \frac{h}{2}(C_{1x} + C_{2x}) & \frac{a}{2}(C_{2y} - C_{1y}) & \frac{h^2}{4}(C_{1x} + C_{2x}) + \frac{a^2}{4}(C_{1y} + C_{2y}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_0(t) \\ \dot{y}_0(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & + \begin{pmatrix} K_{1x} + K_{2x} & 0 & \frac{h}{2}(K_{1x} + K_{2x}) \\ 0 & K_{1y} + K_{2y} & \frac{a}{2}(K_{2y} - K_{1y}) \\ \frac{h}{2}(K_{1x} + K_{2x}) & \frac{a}{2}(K_{2y} - K_{1y}) & \frac{h^2}{4}(K_{1x} + K_{2x}) + \frac{a^2}{4}(K_{1y} + K_{2y}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones matriciales se implementará en MATLAB para ser resuelto mediante integración. Tras haber trabajado este modelo en dos dimensiones y haber comprendido su funcionamiento y comportamiento, se va a proceder a dar el salto al modelo en el espacio, representativo del modelo real sobre el que se quiere obtener esta herramienta.

2.3 MODELO EN EL ESPACIO CON SEIS GRADOS DE LIBERTAD

Por último, se realiza el modelo final que se va a implementar en Matlab. Este modelo está realizado en el espacio, considerando el servidor como un prisma rectangular de dimensiones l_x , l_y , l_z y masa m . Para aumentar la precisión posible del modelo se va a añadir las dimensiones a y b que indicarán la distancia entre la posición de los aisladores, ya que es posible que no estén colocados exactamente en las esquinas de la base. También se añade la dimensión h , que es la distancia desde la base del prisma hasta el centro de gravedad, así será posible tener en cuenta si un rack de servidores no está completamente lleno, ya que ésto puede causar un desequilibrio vertical de la masa y que el centro de gravedad cambie. Los grados de libertad del sistema son el desplazamiento en el eje X , el desplazamiento en el eje Y , desplazamiento en el eje Z , el giro θ_x , el giro θ_y y el giro θ_z . La excitación será producida por el movimiento del soporte en las direcciones X , Y , Z , siendo su movimiento $X_o(t)$, $Y_o(t)$ y $Z_o(t)$.

Se plantean las ecuaciones dinámicas del movimiento en los tres grados de libertad, X , Y , Z y rotaciones θ_x , θ_y y θ_z .

2.3.1 Movimiento en el eje X:

El esquema de fuerzas que toman parte en este movimiento es el siguiente:

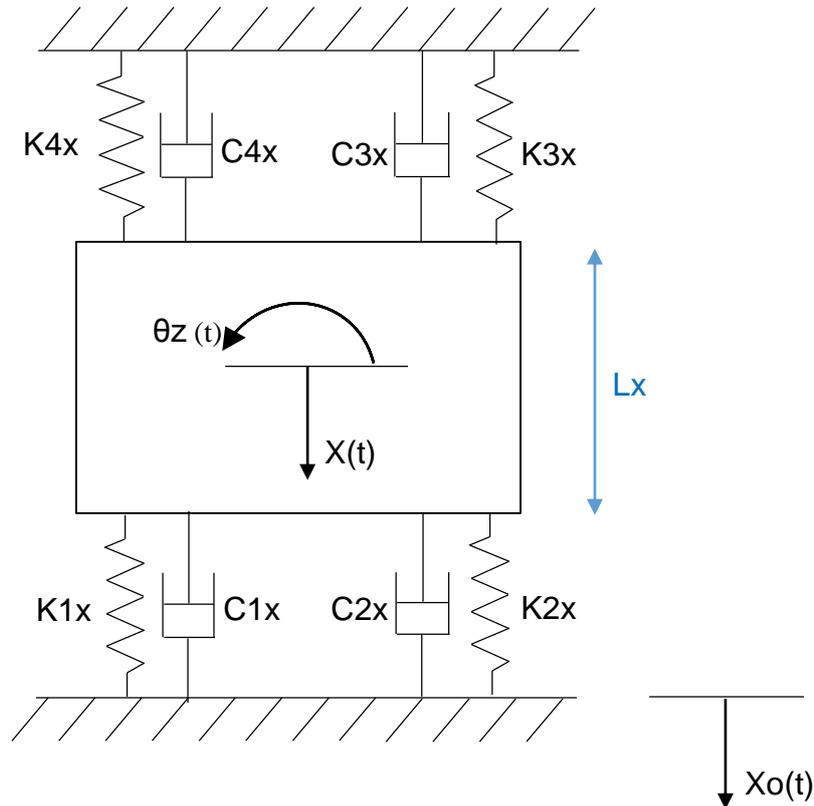


Ilustración 8 Esquema del modelo espacial en el eje X. Planta.

$$M \cdot \ddot{x}(t) + F_{c1x} + F_{c2x} + F_{c3x} + F_{c4x} + F_{k1x} + F_{k2x} + F_{k3x} + F_{k4x} = 0$$

Siendo:

$$F_{c1x} = C_{1x} \cdot (\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t) + \frac{h}{2} \dot{\theta}_y(t) + \frac{a}{2} \dot{\theta}_z(t))$$

$$F_{c2x} = C_{2x} \cdot (\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t) + \frac{h}{2} \dot{\theta}_y(t) - \frac{a}{2} \dot{\theta}_z(t))$$

$$F_{c3x} = C_{3x} \cdot (\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t) + \frac{h}{2} \dot{\theta}_y(t) - \frac{a}{2} \dot{\theta}_z(t))$$



$$F_{c4x} = C_{4x} \cdot (\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t) + \frac{h}{2}\dot{\theta}_y(t) + \frac{a}{2}\dot{\theta}_z(t))$$

$$F_{k1x} = K_{1x} \cdot (x(t) - x_0(t) + \frac{h}{2}\theta_y(t) + \frac{a}{2}\theta_z(t))$$

$$F_{k2x} = K_{2x} \cdot (x(t) - x_0(t) + \frac{h}{2}\theta_y(t) - \frac{a}{2}\theta_z(t))$$

$$F_{k3x} = K_{3x} \cdot (x(t) - x_0(t) + \frac{h}{2}\theta_y(t) - \frac{a}{2}\theta_z(t))$$

$$F_{k4x} = K_{4x} \cdot (x(t) - x_0(t) + \frac{h}{2}\theta_y(t) + \frac{a}{2}\theta_z(t))$$

Sustituyendo en la ecuación principal:

$$\begin{aligned} M \cdot \ddot{x}(t) + C_{1x} \cdot \left(\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t) + \frac{h}{2}\dot{\theta}_y(t) + \frac{a}{2}\dot{\theta}_z(t) \right) + C_{2x} \\ \cdot \left(\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t) + \frac{h}{2}\dot{\theta}_y(t) - \frac{a}{2}\dot{\theta}_z(t) \right) + C_{3x} \\ \cdot \left(\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t) + \frac{h}{2}\dot{\theta}_y(t) - \frac{a}{2}\dot{\theta}_z(t) \right) + C_{4x} \\ \cdot \left(\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t) + \frac{h}{2}\dot{\theta}_y(t) + \frac{a}{2}\dot{\theta}_z(t) \right) + K_{1x} \\ \cdot \left(x(t) - x_0(t) + \frac{h}{2}\theta_y(t) + \frac{a}{2}\theta_z(t) \right) + K_{2x} \\ \cdot \left(x(t) - x_0(t) + \frac{h}{2}\theta_y(t) - \frac{a}{2}\theta_z(t) \right) + K_{3x} \\ \cdot \left(x(t) - x_0(t) + \frac{h}{2}\theta_y(t) - \frac{a}{2}\theta_z(t) \right) + K_{4x} \\ \cdot \left(x(t) - x_0(t) + \frac{h}{2}\theta_y(t) + \frac{a}{2}\theta_z(t) \right) = 0 \end{aligned}$$

Reordenando términos:

$$\begin{aligned}
 &M \cdot \ddot{x}(t) + (C_{1x} + C_{2x} + C_{3x} + C_{4x}) \cdot \dot{x}(t) + \frac{h}{2}(C_{1x} + C_{2x} + C_{3x} + C_{4x}) \cdot \dot{\theta}_y(t) \\
 &+ \frac{a}{2}(C_{1x} + C_{4x} - C_{2x} - C_{3x}) \cdot \dot{\theta}_z(t) + (K_{1x} + K_{2x} + K_{3x} + K_{4x}) \cdot x(t) \\
 &+ \frac{h}{2}(K_{1x} + K_{2x} + K_{3x} + K_{4x}) \cdot \theta_y(t) + \frac{a}{2}(K_{1x} + K_{4x} - K_{2x} - K_{3x}) \\
 &\cdot \theta_z(t) \\
 &= (C_{1x} + C_{2x} + C_{3x} + C_{4x}) \cdot \dot{x}_0(t) + (K_{1x} + K_{2x} + K_{3x} + K_{4x}) \cdot x_0(t)
 \end{aligned}$$

2.3.2 Movimiento en el eje Y:

El esquema de fuerzas que toman parte en este movimiento es el siguiente:

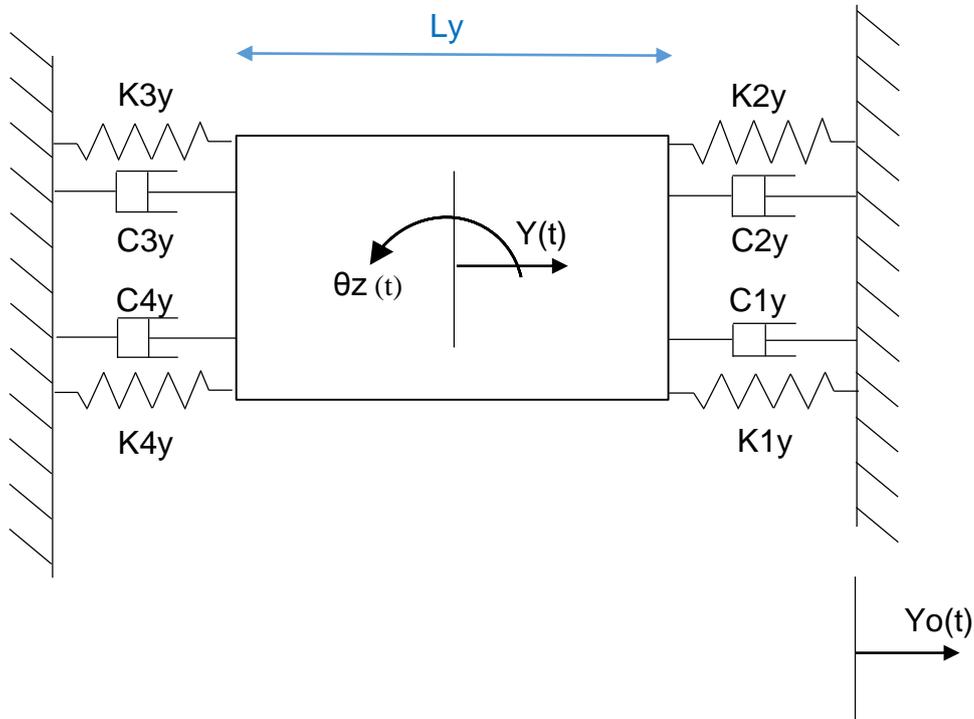


Ilustración 9 Esquema del modelo espacial en el eje Y. Planta.

$$M \cdot \ddot{y}(t) + F_{c1y} + F_{c2y} + F_{c3y} + F_{c4y} + F_{k1y} + F_{k2y} + F_{k3y} + F_{k4y} = 0$$

Siendo:

$$F_{c1y} = C_{1y} \cdot (\dot{y}(t) - \dot{y}_0(t) + \frac{h}{2} \dot{\theta}_x(t) + \frac{b}{2} \dot{\theta}_z(t))$$

$$F_{c2y} = C_{2y} \cdot (\dot{y}(t) - \dot{y}_0(t) + \frac{h}{2} \dot{\theta}_x(t) - \frac{b}{2} \dot{\theta}_z(t))$$

$$F_{c3y} = C_{3y} \cdot (\dot{y}(t) - \dot{y}_0(t) + \frac{h}{2} \dot{\theta}_x(t) - \frac{b}{2} \dot{\theta}_z(t))$$

$$F_{c4y} = C_{4y} \cdot (\dot{y}(t) - \dot{y}_0(t) + \frac{h}{2} \dot{\theta}_x(t) + \frac{b}{2} \dot{\theta}_z(t))$$

$$F_{k1y} = K_{1y} \cdot (y(t) - y_0(t) + \frac{h}{2} \theta_x(t) + \frac{b}{2} \theta_z(t))$$

$$F_{k2y} = K_{2y} \cdot (y(t) - y_0(t) + \frac{h}{2} \theta_x(t) - \frac{b}{2} \theta_z(t))$$

$$F_{k3y} = K_{3y} \cdot (y(t) - y_0(t) + \frac{h}{2} \theta_x(t) - \frac{b}{2} \theta_z(t))$$

$$F_{k4y} = K_{4y} \cdot (y(t) - y_0(t) + \frac{h}{2} \theta_x(t) + \frac{b}{2} \theta_z(t))$$

Sustituyendo en la ecuación principal:

$$\begin{aligned}
 M \cdot \ddot{y}(t) + C_{1y} \cdot \left(\dot{y}(t) - \dot{y}_0(t) + \frac{h}{2} \dot{\theta}_x(t) + \frac{b}{2} \dot{\theta}_z(t) \right) + C_{2y} \\
 \cdot \left(\dot{y}(t) - \dot{y}_0(t) + \frac{h}{2} \dot{\theta}_x(t) - \frac{b}{2} \dot{\theta}_z(t) \right) + C_{3y} \\
 \cdot \left(\dot{y}(t) - \dot{y}_0(t) + \frac{h}{2} \dot{\theta}_x(t) - \frac{b}{2} \dot{\theta}_z(t) \right) + C_{4y} \\
 \cdot \left(\dot{y}(t) - \dot{y}_0(t) + \frac{h}{2} \dot{\theta}_x(t) + \frac{b}{2} \dot{\theta}_z(t) \right) + K_{1y} \\
 \cdot \left(y(t) - y_0(t) + \frac{h}{2} \theta_x(t) + \frac{b}{2} \theta_z(t) \right) + K_{2y} \\
 \cdot \left(y(t) - y_0(t) + \frac{h}{2} \theta_x(t) - \frac{b}{2} \theta_z(t) \right) + K_{3y} \\
 \cdot \left(y(t) - y_0(t) + \frac{h}{2} \theta_x(t) - \frac{b}{2} \theta_z(t) \right) + K_{4y} \\
 \cdot \left(y(t) - y_0(t) + \frac{h}{2} \theta_x(t) + \frac{b}{2} \theta_z(t) \right) = 0
 \end{aligned}$$

Reordenando términos:

$$\begin{aligned}
 M \cdot \ddot{y}(t) + (C_{1y} + C_{2y} + C_{3y} + C_{4y}) \cdot \dot{y}(t) + \frac{h}{2} (C_{1y} + C_{2y} + C_{3y} + C_{4y}) \cdot \dot{\theta}_x(t) \\
 + \frac{b}{2} (C_{1y} + C_{4y} - C_{2y} - C_{3y}) \cdot \dot{\theta}_z(t) + (K_{1y} + K_{2y} + K_{3y} + K_{4y}) \cdot y(t) \\
 + \frac{h}{2} (K_{1y} + K_{2y} + K_{3y} + K_{4y}) \cdot \theta_x(t) + \frac{b}{2} (K_{1y} + K_{4y} - K_{2y} - K_{3y}) \\
 \cdot \theta_z(t) \\
 = (C_{1y} + C_{2y} + C_{3y} + C_{4y}) \cdot \dot{y}_0(t) + (K_{1y} + K_{2y} + K_{3y} + K_{4y}) \cdot y_0(t)
 \end{aligned}$$

2.3.3 Movimiento en el eje Z:

El esquema de fuerzas que toman parte en este movimiento es el siguiente:

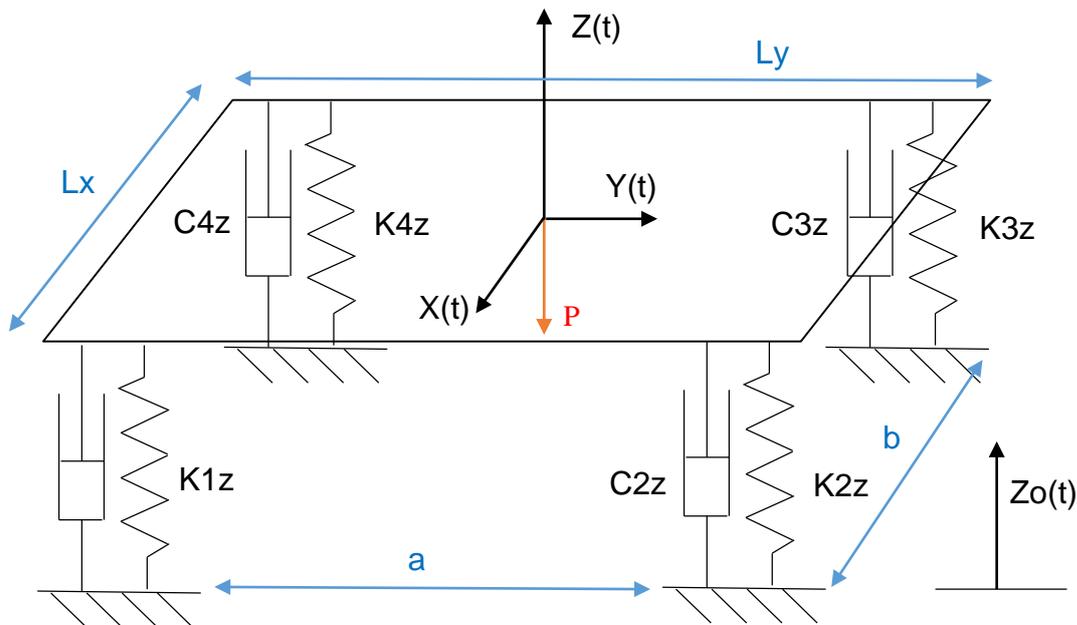


Ilustración 10 Esquema del modelo espacial en el eje Y. Planta.

$$M \cdot \ddot{z}(t) + F_{c1z} + F_{c2z} + F_{c3z} + F_{c4z} + F_{k1z} + F_{k2z} + F_{k3z} + F_{k4z} - P = 0$$

Siendo:

$$F_{c1z} = C_{1z} \cdot (\dot{z}(t) - \dot{z}_0(t) + \frac{a}{2} \dot{\theta}_x(t) - \frac{b}{2} \dot{\theta}_y(t))$$

$$F_{c2z} = C_{2z} \cdot (\dot{z}(t) - \dot{z}_0(t) - \frac{a}{2} \dot{\theta}_x(t) - \frac{b}{2} \dot{\theta}_y(t))$$

$$F_{c3z} = C_{3z} \cdot (\dot{z}(t) - \dot{z}_0(t) - \frac{a}{2} \dot{\theta}_x(t) + \frac{b}{2} \dot{\theta}_y(t))$$

$$F_{c4z} = C_{4z} \cdot (\dot{z}(t) - \dot{z}_0(t) + \frac{a}{2} \dot{\theta}_x(t) + \frac{b}{2} \dot{\theta}_y(t))$$

$$F_{k1z} = K_{1z} \cdot (z(t) - z_0(t) + \frac{a}{2} \theta_x(t) - \frac{b}{2} \theta_y(t))$$

$$F_{k_{2z}} = K_{2z} \cdot (z(t) - z_0(t) - \frac{a}{2}\theta_x(t) - \frac{b}{2}\theta_y(t))$$

$$F_{k_{3z}} = K_{3z} \cdot (z(t) - z_0(t) - \frac{a}{2}\theta_x(t) + \frac{b}{2}\theta_y(t))$$

$$F_{k_{4z}} = K_{4z} \cdot (z(t) - z_0(t) + \frac{a}{2}\theta_x(t) + \frac{b}{2}\theta_y(t))$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} M \cdot \ddot{z}(t) + C_{1z} \cdot \left(\dot{z}(t) - \dot{z}_0(t) + \frac{a}{2}\dot{\theta}_x(t) - \frac{b}{2}\dot{\theta}_y(t) \right) + C_{2z} \\ \cdot \left(\dot{z}(t) - \dot{z}_0(t) - \frac{a}{2}\dot{\theta}_x(t) - \frac{b}{2}\dot{\theta}_y(t) \right) + C_{3z} \\ \cdot \left(\dot{z}(t) - \dot{z}_0(t) - \frac{a}{2}\dot{\theta}_x(t) + \frac{b}{2}\dot{\theta}_y(t) \right) + C_{4z} \\ \cdot \left(\dot{z}(t) - \dot{z}_0(t) + \frac{a}{2}\dot{\theta}_x(t) + \frac{b}{2}\dot{\theta}_y(t) \right) + K_{1z} \\ \cdot \left(z(t) - z_0(t) + \frac{a}{2}\theta_x(t) - \frac{b}{2}\theta_y(t) \right) + K_{2z} \\ \cdot \left(z(t) - z_0(t) - \frac{a}{2}\theta_x(t) - \frac{b}{2}\theta_y(t) \right) + K_{3z} \\ \cdot \left(z(t) - z_0(t) - \frac{a}{2}\theta_x(t) + \frac{b}{2}\theta_y(t) \right) + K_{4z} \\ \cdot \left(z(t) - z_0(t) + \frac{a}{2}\theta_x(t) + \frac{b}{2}\theta_y(t) \right) - P = 0 \end{aligned}$$

Reordenando términos:

$$\begin{aligned}
 M \cdot \ddot{z}(t) + (C_{1z} + C_{2z} + C_{3z} + C_{4z}) \cdot \dot{z}(t) + \frac{a}{2}(C_{1z} - C_{2y} - C_{3y} + C_{4y}) \cdot \dot{\theta}_x(t) \\
 + \frac{b}{2}(C_{3z} + C_{4z} - C_{1z} - C_{2z}) \cdot \dot{\theta}_y(t) + (K_{1z} + K_{2z} + K_{3z} + K_{4z}) \cdot z(t) \\
 + \frac{a}{2}(K_{1z} - K_{2z} - K_{3z} + K_{4z}) \cdot \theta_x(t) + \frac{b}{2}(K_{3z} + K_{4z} - K_{1z} - K_{2z}) \\
 \cdot \theta_y(t) \\
 = (C_{1z} + C_{2z} + C_{3z} + C_{4z}) \cdot \dot{z}_0(t) + (K_{1z} + K_{2z} + K_{3z} + K_{4z}) \cdot z_0(t) \\
 + P
 \end{aligned}$$

2.3.4 Rotación en el eje X

$$\begin{aligned}
 I_x \cdot \ddot{\theta}_x(t) + \frac{h}{2}(F_{c1y} + F_{c2y} + F_{c3y} + F_{c4y} + F_{k1y} + F_{k2y} + F_{k3y} + F_{k4y}) \\
 + \frac{a}{2}(F_{c1z} + F_{c4z} + F_{k1z} + F_{k4z} - F_{c2z} - F_{c3z} - F_{k2z} - F_{k3z}) = 0
 \end{aligned}$$

Siendo cada fuerza, la misma de los casos anteriores, y:

$$I_x = m \cdot \frac{ly^2 + lz^2}{12}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
 I_x \cdot \ddot{\theta}_x(t) + \frac{h}{2} \left(C_{1y} \cdot \left(\dot{y}(t) - \dot{y}_0(t) + \frac{h}{2} \dot{\theta}_x(t) + \frac{b}{2} \dot{\theta}_z(t) \right) + C_{2y} \cdot (\dot{y}(t) - \dot{y}_0(t)) \right. \\
 + \frac{h}{2} \dot{\theta}_x(t) - \frac{b}{2} \dot{\theta}_z(t) + C_{3y} \cdot (\dot{y}(t) - \dot{y}_0(t) + \frac{h}{2} \dot{\theta}_x(t) - \frac{b}{2} \dot{\theta}_z(t)) + C_{4y} \\
 \cdot (\dot{y}(t) - \dot{y}_0(t) + \frac{h}{2} \dot{\theta}_x(t) + \frac{b}{2} \dot{\theta}_z(t)) + K_{1y} \cdot (y(t) - y_0(t) + \frac{h}{2} \theta_x(t) \\
 + \frac{b}{2} \theta_z(t)) + K_{2y} \cdot (y(t) - y_0(t) + \frac{h}{2} \theta_x(t) - \frac{b}{2} \theta_z(t)) + K_{3y} \cdot (y(t) \\
 - y_0(t) + \frac{h}{2} \theta_x(t) - \frac{b}{2} \theta_z(t)) + K_{4y} \cdot (y(t) - y_0(t) + \frac{h}{2} \theta_x(t) \\
 \left. + \frac{b}{2} \theta_z(t)) \right) \\
 + \frac{a}{2} \left(C_{1z} \cdot (\dot{z}(t) - \dot{z}_0(t) + \frac{a}{2} \dot{\theta}_x(t) - \frac{b}{2} \dot{\theta}_y(t)) + C_{4z} \cdot (\dot{z}(t) - \dot{z}_0(t)) \right. \\
 + \frac{a}{2} \dot{\theta}_x(t) + \frac{b}{2} \dot{\theta}_y(t) + K_{1z} \cdot (z(t) - z_0(t) + \frac{a}{2} \theta_x(t) - \frac{b}{2} \theta_y(t)) + K_{4z} \\
 \cdot (z(t) - z_0(t) + \frac{a}{2} \theta_x(t) + \frac{b}{2} \theta_y(t)) - C_{2z} \cdot (\dot{y}(t) - \dot{y}_0(t) + \frac{h}{2} \dot{\theta}_x(t) \\
 - \frac{b}{2} \dot{\theta}_z(t)) - C_{3z} \cdot (\dot{z}(t) - \dot{z}_0(t) - \frac{a}{2} \dot{\theta}_x(t) + \frac{b}{2} \dot{\theta}_y(t)) - K_{2z} \cdot (z(t) \\
 - z_0(t) - \frac{a}{2} \theta_x(t) - \frac{b}{2} \theta_y(t)) - K_{3z} \cdot (z(t) - z_0(t) - \frac{a}{2} \theta_x(t) \\
 \left. + \frac{b}{2} \theta_y(t)) \right) = 0
 \end{aligned}$$

Reordenando términos:

$$\begin{aligned}
 I_x \cdot \ddot{\theta}_x(t) &+ \frac{h}{2}(C_{1y} + C_{2y} + C_{3y} + C_{4y}) \cdot \dot{y}(t) + \frac{a}{2}(C_{1z} - C_{2z} - C_{3z} + C_{4z}) \cdot \dot{z}(t) \\
 &+ \left[\frac{h^2}{4}(C_{1y} + C_{2y} + C_{3y} + C_{4y}) + \frac{a^2}{4}(C_{1z} + C_{2z} + C_{3z} + C_{4z}) \right] \cdot \dot{\theta}_x(t) \\
 &+ \frac{ab}{4}(C_{2z} + C_{4z} - C_{1z} - C_{3z}) \cdot \dot{\theta}_y(t) + \frac{bh}{4}(C_{1y} - C_{2y} - C_{3y} + C_{4y}) \\
 &\cdot \dot{\theta}_z(t) + \frac{h}{2}(K_{1y} + K_{2y} + K_{3y} + K_{4y}) \cdot y(t) \\
 &+ \frac{a}{2}(K_{1z} - K_{2z} - K_{3z} + K_{4z}) \cdot z(t) \\
 &+ \left[\frac{h^2}{4}(K_{1y} + K_{2y} + K_{3y} + K_{4y}) + \frac{a^2}{4}(K_{1z} + K_{2z} + K_{3z} + K_{4z}) \right] \cdot \theta_x(t) \\
 &+ \frac{ab}{4}(K_{2z} + K_{4z} - K_{1z} - K_{3z}) \cdot \theta_y(t) + \frac{bh}{4}(K_{1y} - K_{2y} - K_{3y} + K_{4y}) \\
 &\cdot \theta_z(t) \\
 &= \frac{h}{2}(C_{1y} + C_{2y} + C_{3y} + C_{4y}) \cdot \dot{y}_0(t) + \frac{a}{2}(C_{1z} - C_{2z} - C_{3z} + C_{4z}) \\
 &\cdot \dot{z}_0(t) + \frac{h}{2}(K_{1y} + K_{2y} + K_{3y} + K_{4y}) \cdot y_0(t) \\
 &+ \frac{a}{2}(K_{1z} - K_{2z} - K_{3z} + K_{4z}) \cdot z_0(t)
 \end{aligned}$$

2.3.5 Rotación en el eje Y:

$$\begin{aligned}
 I_y \cdot \ddot{\theta}_y(t) &+ \frac{h}{2}(F_{c1x} + F_{c2x} + F_{c3x} + F_{c4x} + F_{k1x} + F_{k2x} + F_{k3x} + F_{k4x}) \\
 &+ \frac{b}{2}(F_{c3z} + F_{c4z} + F_{k3z} + F_{k4z} - F_{c1z} - F_{c2z} - F_{k1z} - F_{k2z}) = 0
 \end{aligned}$$

Siendo cada fuerza, la misma de los casos anteriores, y:

$$I_y = m \cdot \frac{lx^2 + lz^2}{12}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
 I_y \cdot \ddot{\theta}_y(t) + \frac{h}{2} & \left(C_{1x} \cdot (\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t) + \frac{h}{2} \dot{\theta}_y(t) + \frac{a}{2} \dot{\theta}_z(t)) + C_{2x} \cdot (\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t) \right. \\
 & + \frac{h}{2} \dot{\theta}_y(t) - \frac{a}{2} \dot{\theta}_z(t)) + C_{3x} \cdot (\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t) + \frac{h}{2} \dot{\theta}_y(t) - \frac{a}{2} \dot{\theta}_z(t)) + C_{4x} \\
 & \cdot (\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t) + \frac{h}{2} \dot{\theta}_y(t) + \frac{a}{2} \dot{\theta}_z(t)) + K_{1x} \cdot (x(t) - x_0(t) + \frac{h}{2} \theta_y(t) \\
 & + \frac{a}{2} \theta_z(t)) + K_{2x} \cdot (x(t) - x_0(t) + \frac{h}{2} \theta_y(t) - \frac{a}{2} \theta_z(t)) + K_{3x} \cdot (x(t) \\
 & - x_0(t) + \frac{h}{2} \theta_y(t) - \frac{a}{2} \theta_z(t)) + K_{4x} \cdot (x(t) - x_0(t) + \frac{h}{2} \theta_y(t) \\
 & \left. + \frac{a}{2} \theta_z(t)) \right) \\
 & + \frac{b}{2} \left(C_{3z} \cdot (\dot{z}(t) - \dot{z}_0(t) - \frac{a}{2} \dot{\theta}_x(t) + \frac{b}{2} \dot{\theta}_y(t)) + C_{4z} \cdot (\dot{z}(t) - \dot{z}_0(t) \right. \\
 & + \frac{a}{2} \dot{\theta}_x(t) + \frac{b}{2} \dot{\theta}_y(t)) + K_{3z} \cdot (z(t) - z_0(t) - \frac{a}{2} \theta_x(t) + \frac{b}{2} \theta_y(t)) + K_{4z} \\
 & \cdot (z(t) - z_0(t) + \frac{a}{2} \theta_x(t) + \frac{b}{2} \theta_y(t)) - C_{1z} \cdot (\dot{z}(t) - \dot{z}_0(t) + \frac{a}{2} \dot{\theta}_x(t) \\
 & - \frac{b}{2} \dot{\theta}_y(t)) - C_{2z} \cdot (\dot{z}(t) - \dot{z}_0(t) - \frac{a}{2} \dot{\theta}_x(t) - \frac{b}{2} \dot{\theta}_y(t)) - K_{1z} \cdot (z(t) \\
 & - z_0(t) + \frac{a}{2} \theta_x(t) - \frac{b}{2} \theta_y(t)) - K_{2z} \cdot (z(t) - z_0(t) - \frac{a}{2} \theta_x(t) \\
 & \left. - \frac{b}{2} \theta_y(t)) \right) = 0
 \end{aligned}$$

Reordenando términos:

$$\begin{aligned}
 I_y \cdot \ddot{\theta}_y(t) &+ \frac{h}{2}(C_{1x} + C_{2x} + C_{3x} + C_{4x}) \cdot \dot{x}(t) + \frac{b}{2}(C_{3z} + C_{4z} - C_{1z} - C_{2z}) \cdot \dot{z}(t) \\
 &+ \frac{ab}{4}(C_{2z} + C_{4z} - C_{1z} - C_{3z}) \cdot \dot{\theta}_x(t) \\
 &+ \left[\frac{h^2}{4}(C_{1x} + C_{2x} + C_{3x} + C_{4x}) + \frac{b^2}{4}(C_{1z} + C_{2z} + C_{3z} + C_{4z}) \right] \cdot \dot{\theta}_y(t) \\
 &+ \frac{ah}{4}(C_{1x} - C_{2x} - C_{3x} + C_{4x}) \cdot \dot{\theta}_z(t) + \frac{h}{2}(K_{1x} + K_{2x} + K_{3x} + K_{4x}) \\
 &\cdot x(t) + \frac{b}{2}(K_{3z} + K_{4z} - K_{1z} - K_{2z}) \cdot z(t) \\
 &+ \frac{ab}{4}(K_{2z} + K_{4z} - K_{1z} - K_{3z}) \cdot \theta_x(t) \\
 &+ \left[\frac{h^2}{4}(K_{1x} + K_{2x} + K_{3x} + K_{4x}) + \frac{b^2}{4}(K_{1z} + K_{2z} + K_{3z} + K_{4z}) \right] \cdot \theta_y(t) \\
 &+ \frac{ah}{4}(K_{1x} - K_{2x} - K_{3x} + K_{4x}) \cdot \theta_z(t) \\
 &= \frac{h}{2}(C_{1x} + C_{2x} + C_{3x} + C_{4x}) \cdot \dot{x}_0(t) + \frac{b}{2}(C_{3z} + C_{4z} - C_{1z} - C_{2z}) \\
 &\cdot \dot{z}_0(t) + \frac{h}{2}(K_{1x} + K_{2x} + K_{3x} + K_{4x}) \cdot x_0(t) \\
 &+ \frac{b}{2}(K_{3z} + K_{4z} - K_{1z} - K_{2z}) \cdot z_0(t)
 \end{aligned}$$

2.3.6 Rotación en el eje Z:

$$\begin{aligned}
 I_z \cdot \ddot{\theta}_z(t) &+ \frac{a}{2}(F_{c1x} - F_{c2x} - F_{c3x} + F_{c4x} + F_{k1x} - F_{k2x} - F_{k3x} + F_{k4x}) \\
 &+ \frac{b}{2}(F_{c1y} - F_{c2y} - F_{c3y} + F_{c4y} + F_{k1y} - F_{k2y} - F_{k3y} + F_{k4y}) = 0
 \end{aligned}$$

Siendo cada fuerza, la misma de los casos anteriores, y:

$$I_z = m \cdot \frac{lx^2 + ly^2}{12}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
 I_z \cdot \ddot{\theta}_z(t) + \frac{a}{2} & \left(C_{1x} \cdot (\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t) + \frac{h}{2} \dot{\theta}_y(t) + \frac{a}{2} \dot{\theta}_z(t)) - C_{2x} \cdot (\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t) \right. \\
 & + \frac{h}{2} \dot{\theta}_y(t) - \frac{a}{2} \dot{\theta}_z(t)) - C_{3x} \cdot (\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t) + \frac{h}{2} \dot{\theta}_y(t) - \frac{a}{2} \dot{\theta}_z(t)) + C_{4x} \\
 & \cdot (\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t) + \frac{h}{2} \dot{\theta}_y(t) + \frac{a}{2} \dot{\theta}_z(t)) + K_{1x} \cdot (x(t) - x_0(t) + \frac{h}{2} \theta_y(t) \\
 & + \frac{a}{2} \theta_z(t)) - K_{2x} \cdot (x(t) - x_0(t) + \frac{h}{2} \theta_y(t) - \frac{a}{2} \theta_z(t)) - K_{3x} \cdot (x(t) \\
 & - x_0(t) + \frac{h}{2} \theta_y(t) - \frac{a}{2} \theta_z(t)) + K_{4x} \cdot (x(t) - x_0(t) + \frac{h}{2} \theta_y(t) \\
 & \left. + \frac{a}{2} \theta_z(t)) \right) \\
 & + \frac{b}{2} \left(C_{1y} \cdot (\dot{y}(t) - \dot{y}_0(t) + \frac{h}{2} \dot{\theta}_x(t) + \frac{b}{2} \dot{\theta}_z(t)) - C_{2y} \cdot (\dot{y}(t) - \dot{y}_0(t) \right. \\
 & + \frac{h}{2} \dot{\theta}_x(t) - \frac{b}{2} \dot{\theta}_z(t)) - C_{3y} \cdot (\dot{y}(t) - \dot{y}_0(t) + \frac{h}{2} \dot{\theta}_x(t) - \frac{b}{2} \dot{\theta}_z(t)) + C_{4y} \\
 & \cdot (\dot{y}(t) - \dot{y}_0(t) + \frac{h}{2} \dot{\theta}_x(t) + \frac{b}{2} \dot{\theta}_z(t)) + K_{1y} \cdot (y(t) - y_0(t) + \frac{h}{2} \theta_x(t) \\
 & + \frac{b}{2} \theta_z(t)) - K_{2y} \cdot (y(t) - y_0(t) + \frac{h}{2} \theta_x(t) - \frac{b}{2} \theta_z(t)) - K_{3y} \cdot (y(t) \\
 & - y_0(t) + \frac{h}{2} \theta_x(t) - \frac{b}{2} \theta_z(t)) + K_{4y} \cdot (y(t) - y_0(t) + \frac{h}{2} \theta_x(t) \\
 & \left. + \frac{b}{2} \theta_z(t)) \right) = 0
 \end{aligned}$$

Reordenando términos:

$$\begin{aligned}
 & I_z \cdot \ddot{\theta}_z(t) + \frac{a}{2}(C_{1x} - C_{2x} - C_{3x} + C_{4x}) \cdot \dot{x}(t) + \frac{b}{2}(C_{1y} - C_{2y} - C_{3y} + C_{4y}) \cdot \dot{y}(t) \\
 & + \frac{bh}{4}(C_{1y} - C_{2y} - C_{3y} - C_{4y}) \cdot \dot{\theta}_x + \frac{ah}{4}(C_{1x} - C_{2x} - C_{3x} + C_{4x}) \\
 & \cdot \dot{\theta}_y(t) + \left[\frac{a^2}{4}(C_{1x} + C_{2x} + C_{3x} + C_{4x}) + \frac{b^2}{4}(C_{1y} + C_{2y} + C_{3y} + C_{4y}) \right] \\
 & \cdot \dot{\theta}_z(t) + \frac{a}{2}(K_{1x} - K_{2x} - K_{3x} + K_{4x}) \cdot x(t) \\
 & + \frac{b}{2}(K_{1y} - K_{2y} - K_{3y} + K_{4y}) \cdot y(t) + \frac{bh}{4}(K_{1y} - K_{2y} - K_{3y} - K_{4y}) \\
 & \cdot \theta_x + \frac{ah}{4}(K_{1x} - K_{2x} - K_{3x} + K_{4x}) \cdot \theta_y(t) \\
 & + \left[\frac{a^2}{4}(K_{1x} + K_{2x} + K_{3x} + K_{4x}) + \frac{b^2}{4}(K_{1y} + K_{2y} + K_{3y} + K_{4y}) \right] \cdot \theta_z(t) \\
 & = \frac{a}{2}(C_{1x} - C_{2x} - C_{3x} + C_{4x}) \cdot \dot{x}_0(t) + \frac{b}{2}(C_{1y} - C_{2y} - C_{3y} + C_{4y}) \\
 & \cdot \dot{y}_0(t) + \frac{a}{2}(K_{1x} - K_{2x} - K_{3x} + K_{4x}) \cdot x_0(t) \\
 & + \frac{b}{2}(K_{1y} - K_{2y} - K_{3y} + K_{4y}) \cdot y_0(t)
 \end{aligned}$$

Ahora que las 6 ecuaciones están definidas, es posible elaborar las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento para resolver el sistema mediante integración. Todas son de 6x6, aunque las de rigidez y amortiguamiento se representan en dos líneas debido al tamaño de la hoja.

La matriz de masa M es la siguiente:

$$\begin{pmatrix}
 m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & m \cdot \frac{ly^2 + lz^2}{12} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & m \cdot \frac{lx^2 + lz^2}{12} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m \cdot \frac{lx^2 + ly^2}{12}
 \end{pmatrix}$$

La de amortiguamiento C:

$$\begin{pmatrix}
 C_{1x} + C_{2x} + C_{3x} + C_{4x} & 0 & 0 \\
 0 & C_{1y} + C_{2y} + C_{3y} + C_{4y} & 0 \\
 0 & 0 & C_{1z} + C_{2z} + C_{3z} + C_{4z} \\
 0 & \frac{h}{2}(C_{1y} + C_{2y} + C_{3y} + C_{4y}) & \frac{a}{2}(C_{1z} - C_{2z} - C_{3z} + C_{4z}) \\
 \frac{a}{2}(C_{1z} - C_{2z} - C_{3z} + C_{4z}) & 0 & \frac{b}{2}(-C_{1z} - C_{2z} + C_{3z} + C_{4z}) \\
 \frac{a}{2}(C_{1x} - C_{2x} - C_{3x} + C_{4x}) & \frac{b}{2}(C_{1y} - C_{2y} - C_{3y} - C_{4y}) & 0 \\
 0 & \frac{h}{2}(C_{1x} + C_{2x} + C_{3x} + C_{4x}) & \frac{a}{2}(C_{1x} - C_{2x} - C_{3x} + C_{4x}) \\
 \frac{h}{2}(C_{1y} + C_{2y} + C_{3y} + C_{4y}) & 0 & \frac{b}{2}(C_{1y} - C_{2y} - C_{3y} - C_{4y}) \\
 \frac{a}{2}(C_{1z} - C_{2z} - C_{3z} + C_{4z}) & \frac{b}{2}(-C_{1z} - C_{2z} + C_{3z} + C_{4z}) & 0 \\
 \left[\frac{h^2}{4}(\sum C_{iy}) + \frac{a^2}{4}(\sum C_{iz}) \right] & \frac{ab}{4}(-C_{1z} + C_{2z} - C_{3z} + C_{4z}) & \frac{bh}{4}(C_{1y} - C_{2y} - C_{3y} + C_{4y}) \\
 \frac{ab}{4}(-C_{1z} + C_{2z} - C_{3z} + C_{4z}) & \left[\frac{h^2}{4}(\sum C_{ix}) + \frac{b^2}{4}(\sum C_{iz}) \right] & \frac{ah}{4}(C_{1x} - C_{2x} - C_{3x} + C_{4x}) \\
 \frac{bh}{4}(C_{1y} - C_{2y} - C_{3y} + C_{4y}) & \frac{ah}{4}(C_{1x} - C_{2x} - C_{3x} + C_{4x}) & \left[\frac{a^2}{4}(\sum C_{ix}) + \frac{b^2}{4}(\sum C_{iy}) \right]
 \end{pmatrix}$$

Y por último la de rigidez K:

$$\begin{pmatrix}
 K_{1x} + K_{2x} + K_{3x} + K_{4x} & 0 & 0 \\
 0 & K_{1y} + K_{2y} + K_{3y} + K_{4y} & 0 \\
 0 & 0 & K_{1z} + K_{2z} + K_{3z} + K_{4z} \\
 0 & \frac{h}{2}(K_{1y} + C_{2y} + C_{3y} + C_{4y}) & \frac{a}{2}(K_{1z} - K_{2z} - K_{3z} + K_{4z}) \\
 \frac{a}{2}(K_{1z} - K_{2z} - K_{3z} + K_{4z}) & 0 & \frac{b}{2}(-K_{1z} - K_{2z} + K_{3z} + K_{4z}) \\
 \frac{a}{2}(K_{1x} - K_{2x} - K_{3x} + K_{4x}) & \frac{b}{2}(K_{1y} - K_{2y} - K_{3y} - K_{4y}) & 0
 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
 0 & \frac{h}{2}(K_{1x} + K_{2x} + K_{3x} + K_{4x}) & \frac{a}{2}(K_{1x} - K_{2x} - K_{3x} + K_{4x}) \\
 \frac{h}{2}(K_{1y} + K_{2y} + K_{3y} + K_{4y}) & 0 & \frac{b}{2}(K_{1y} - K_{2y} - K_{3y} - K_{4y}) \\
 \frac{a}{2}(K_{1z} - K_{2z} - K_{3z} + K_{4z}) & \frac{b}{2}(-K_{1z} - K_{2z} + K_{3z} + K_{4z}) & 0 \\
 \left[\frac{h^2}{4}(\sum K_{iy}) + \frac{a^2}{4}(\sum K_{iz}) \right] & \frac{ab}{4}(-K_{1z} + K_{2z} - K_{3z} + K_{4z}) & \frac{bh}{4}(K_{1y} - K_{2y} - K_{3y} + K_{4y}) \\
 \frac{ab}{4}(-K_{1z} + K_{2z} - K_{3z} + K_{4z}) & \left[\frac{h^2}{4}(\sum K_{ix}) + \frac{b^2}{4}(\sum K_{iz}) \right] & \frac{ah}{4}(K_{1x} - K_{2x} - K_{3x} + K_{4x}) \\
 \frac{bh}{4}(K_{1y} - K_{2y} - K_{3y} + K_{4y}) & \frac{ah}{4}(K_{1x} - K_{2x} - K_{3x} + K_{4x}) & \left[\frac{a^2}{4}(\sum K_{ix}) + \frac{b^2}{4}(\sum K_{iy}) \right]
 \end{pmatrix}$$

Los términos independientes debido a la excitación del movimiento del soporte también se pueden expresar en forma matricial con las matrices que se van a denominar C_0 y K_0 , que son iguales a las tres primeras columnas de C y K respectivamente ya que en el movimiento del soporte no se considera la rotación, de forma que quedan de la siguiente manera:

La matriz C_0 :

$$\begin{pmatrix}
 C_{1x} + C_{2x} + C_{3x} + C_{4x} & 0 & 0 \\
 0 & C_{1y} + C_{2y} + C_{3y} + C_{4y} & 0 \\
 0 & 0 & C_{1z} + C_{2z} + C_{3z} + C_{4z} \\
 0 & \frac{h}{2}(C_{1y} + C_{2y} + C_{3y} + C_{4y}) & \frac{a}{2}(C_{1z} - C_{2z} - C_{3z} + C_{4z}) \\
 \frac{a}{2}(C_{1z} - C_{2z} - C_{3z} + C_{4z}) & 0 & \frac{b}{2}(-C_{1z} - C_{2z} + C_{3z} + C_{4z}) \\
 \frac{a}{2}(C_{1x} - C_{2x} - C_{3x} + C_{4x}) & \frac{b}{2}(C_{1y} - C_{2y} - C_{3y} - C_{4y}) & 0
 \end{pmatrix}$$

Y la matriz K_0 :

$$\begin{pmatrix}
 K_{1x} + K_{2x} + K_{3x} + K_{4x} & 0 & 0 \\
 0 & K_{1y} + K_{2y} + K_{3y} + K_{4y} & 0 \\
 0 & 0 & K_{1z} + K_{2z} + K_{3z} + K_{4z} \\
 0 & \frac{h}{2}(K_{1y} + K_{2y} + K_{3y} + K_{4y}) & \frac{a}{2}(K_{1z} - K_{2z} - K_{3z} + K_{4z}) \\
 \frac{a}{2}(K_{1z} - K_{2z} - K_{3z} + K_{4z}) & 0 & \frac{b}{2}(-K_{1z} - K_{2z} + K_{3z} + K_{4z}) \\
 \frac{a}{2}(K_{1x} - K_{2x} - K_{3x} + K_{4x}) & \frac{b}{2}(K_{1y} - K_{2y} - K_{3y} - K_{4y}) & 0
 \end{pmatrix}$$

De forma que la ecuación matricial que se va a resolver en MATLAB queda de la siguiente manera:

$$(M) \cdot \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \\ \ddot{\theta}_x(t) \\ \ddot{\theta}_y(t) \\ \ddot{\theta}_z(t) \end{pmatrix} + (C) \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \\ \dot{\theta}_x(t) \\ \dot{\theta}_y(t) \\ \dot{\theta}_z(t) \end{pmatrix} + (K) \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ \theta_x(t) \\ \theta_y(t) \\ \theta_z(t) \end{pmatrix} = (Co) \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} + (Ko) \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

3 VALIDACIÓN

3.1 Validación del modelo como sistema de un grado de libertad

El estudio de este modelo del rack de servidores presentado utiliza una aproximación completamente basada en el ordenador. Los resultados de simulación del modelo dinámico de 6 grados de libertad, están basados en datos derivados de catálogos de vendedores de aisladores. En ausencia de un ensayo experimental de una suspensión real, no es seguro hasta qué grado de precisión el modelo puede predecir el verdadero comportamiento dinámico del sistema.

Algunas de las hipótesis y simplificaciones introducidas en el modelo no van a poder ser adecuadamente validadas hasta que se comience a ensayar con un prototipo. Sin embargo, se van a llevar a cabo algunos pasos para comparar los resultados de simulación del modelo respecto a otros medios no experimentales. Aunque este acercamiento no verifica las suposiciones del modelo, proporciona la confianza de que las ecuaciones del movimiento calculadas e implementadas en MATLAB son correctas.

Utilizando datos reales de rigidez de los aisladores a utilizar, obtenidos mediante ensayos de laboratorio, se van a realizar una serie de pruebas numéricas para comprobar que el comportamiento del modelo efectivamente sigue los patrones lógicos que debiera seguir. Para ello se va a realizar una serie de ensayos.

Los valores de rigidez a analizar, para 5 modelos distintos de aislador son los siguientes:

Modelo A (N/m)	Modelo B (N/m)	Modelo C (N/m)	Modelo D (N/m)	Modelo E (N/m)
31335	49727	61318	72346	82388

La primera comprobación que se va a hacer es verificar el comportamiento del sistema ante una caída libre en un estado en el que la compresión de los aisladores sea nula, utilizando como datos de entrada los siguientes:

%INTRODUCCION DE DATOS

%Dimensiones y masa del servidor (consultar esquemas)

%lx, ly, lz, a, b, h, m

lx=2; ly=1.5; lz=3;

a=2; b=1.5; h=3; m=150;

%Valores de rigidez y amortiguamiento de los aisladores

%1) Aisladores iguales en las cuatro esquinas:

%kxe kye kze cxe cye cze

kxe=0; kye=0; kze=82388;

cxe=0; cye=0; cze=0;

Ilustración 11 Introducción de parámetros para prueba de sistema libre sin amortiguamiento

Para este ensayo no se tiene en cuenta el movimiento del soporte, de forma que el sistema actúa en su estado natural.

Se obtiene el siguiente desplazamiento en el eje Z:

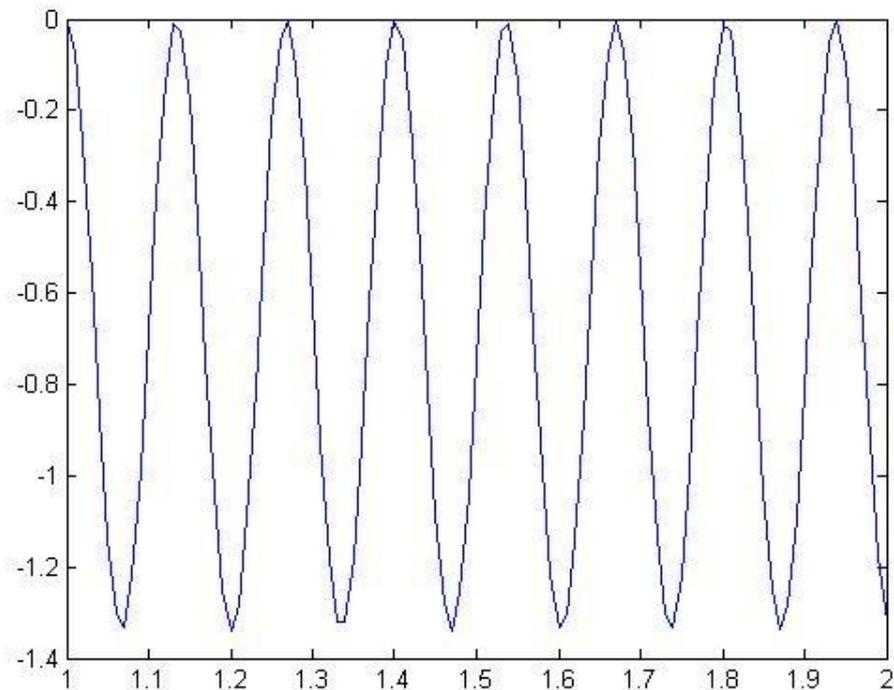


Ilustración 12 Desplazamiento vertical en estado libre sin amortiguamiento

Puesto que el sistema no tiene amortiguamiento, no hay disipación de energía y oscila infinitamente como se ve en la figura.

Al estar considerando un sistema simplificado de un grado de libertad es posible saber su frecuencia natural de vibración fácilmente:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Al someter al modelo a una perturbación externa cuya pulsación coincida con la frecuencia natural del sistema simplificado de un grado de libertad:



```

36 %Entorno de simulacion
37
38 %Tiempo a simular:
39 - duracion=2;      intervalo=0.01;
40
41 %Condiciones iniciales:
42 - xo=0;   yo=0;   zo=0;   giroxo=0;   giroyo=0;   girozo=0;
43 - vxo=0;  vyo=0;  vzo=0;  vgiroxo=0;  vgiroyo=0;  vgirozo=0;
44
45
46 %Excitacion
47
48 %Amplitudes del desplazamiento del soporte:
49 - amp_x=0;   amp_y=0;   amp_z=1;
50 - amp=[amp_x, amp_y, amp_z];
51
52 %Pulsacion
53 - puls=46.87;
54

```

Ilustración 13 Parámetros para la prueba de resonancia

Se obtienen los siguientes resultados:

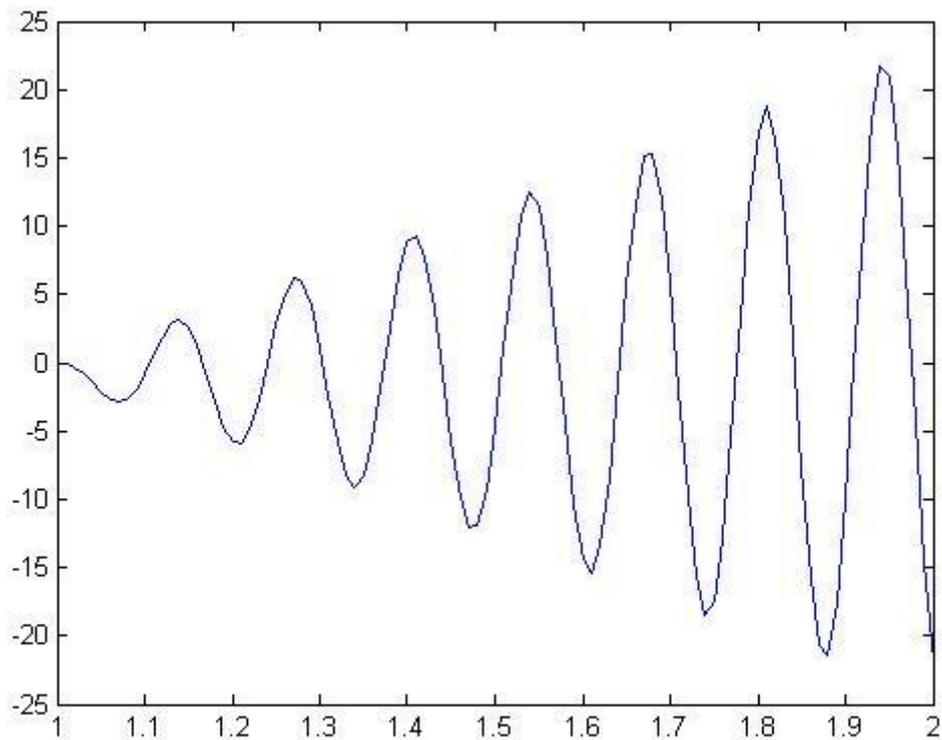


Ilustración 14 Resultados de la prueba de resonancia

Como se ve en la figura el sistema entra en resonancia, aumentando su amplitud de oscilación con cada periodo.

Ahora se va a realizar un ensayo de caída libre con distintos valores de amortiguamiento C aproximados para comprobar el comportamiento del modelo y ver si cumple con las expectativas. De nuevo, no se tiene en cuenta el movimiento externo del soporte. Teniendo en cuenta la forma del amortiguamiento relativo:

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

Hay que a calcular los valores de c que hacen que el sistema se comporte según los tres casos de vibración: subamortiguado, críticamente amortiguado, y sobreamortiguado.

	ζ	c
Subamortiguado	0.1	351.54
Críticamente amortiguado	1	3515.4
sobreamortiguado	2	7030.845

Las gráficas del resultado de los anteriores casos respectivamente son las siguientes:

Subamortiguado (c=351.54):

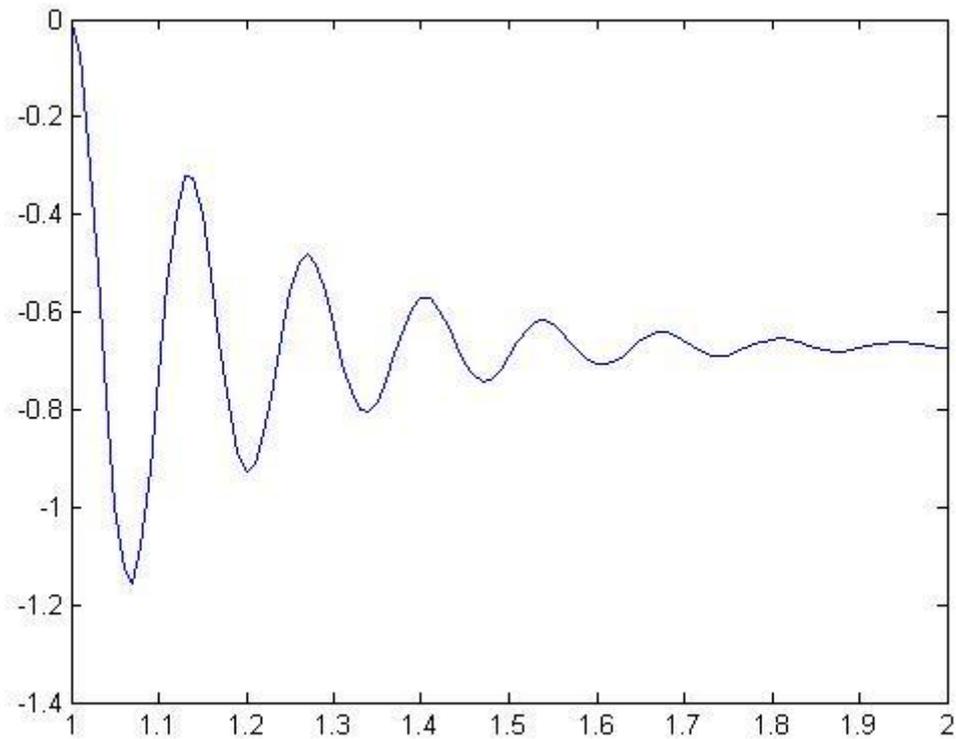


Ilustración 15 Desplazamiento vertical en el caso subamortiguado

Críticamente amortiguado ($C=3515.4$):

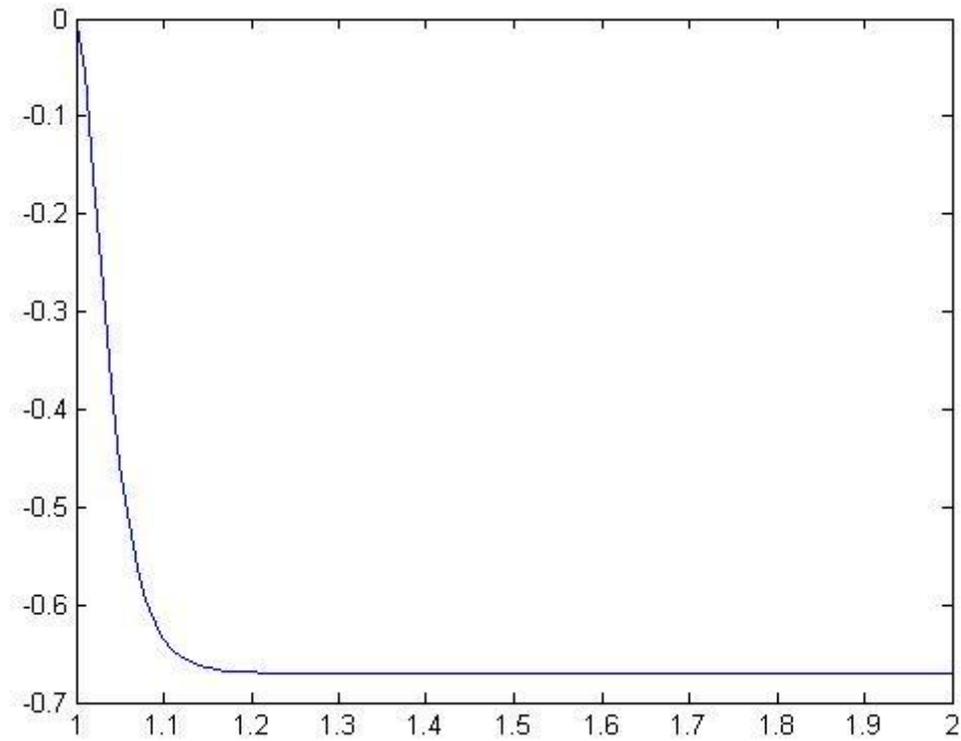


Ilustración 16 Desplazamiento vertical. Caso críticamente amortiguado

Sobreamortiguado ($C=7030.845$):

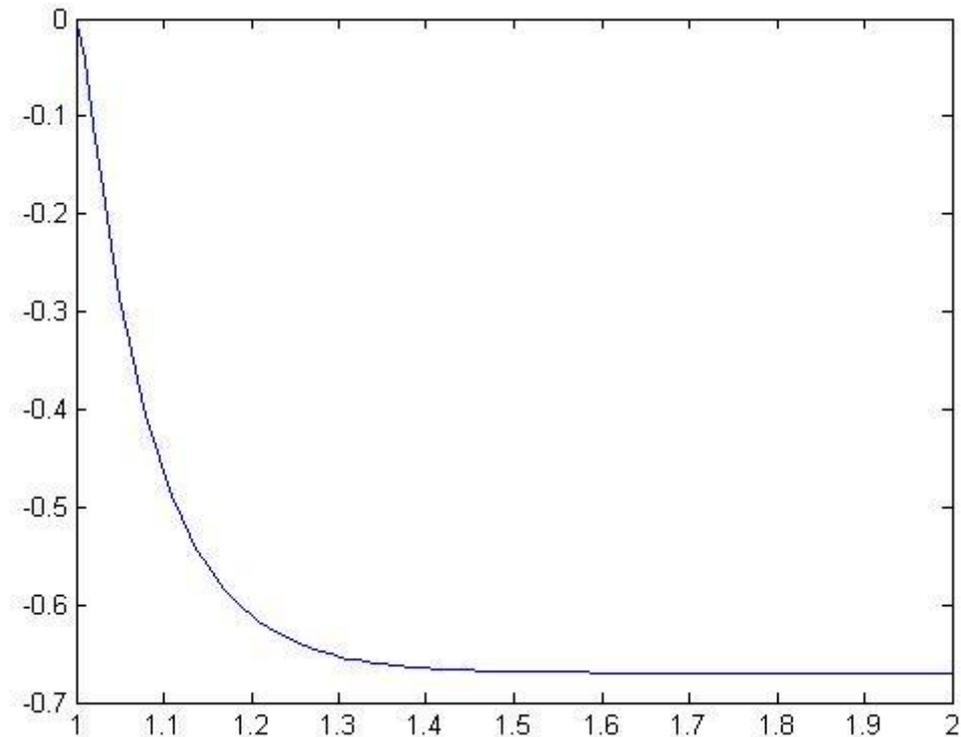


Ilustración 17 Desplazamiento vertical para el caso de movimiento sobreamortiguado

Como se puede comprobar, el sistema se comporta dinámicamente de forma correcta según los modelos de vibración que dependen del amortiguamiento relativo del sistema.

Por último, se va a realizar la prueba de la posición inicial.

En todas las pruebas con amortiguamiento, el sistema tiende a detenerse en una misma posición, la posición de equilibrio, que no depende del amortiguamiento, sólo de la rigidez del muelle y la masa. Si esa posición es conocida y se introduce en el modelo como una condición inicial, el modelo debería permanecer inmóvil en la situación de sistema libre.

```
36 %Entorno de simulacion
37
38 %Tiempo a simular:
39 - duracion=2; intervalo=0.01;
40
41 %Condiciones iniciales:
42 - xo=0; yo=0; zo=-0.66977; giroxo=0; giroyo=0; girozo=0;
43 - vxo=0; vyo=0; vzo=0; vgiroxo=0; vgiroyo=0; vgirozo=0;
44
45
46 %Excitacion
47
48 %Amplitudes del desplazamiento del soporte:
49 - ampX=0; ampY=0; ampZ=0;
50 - amp=[ampX,ampY,ampZ];
51
52 %Pulsacion
53 - puls=0;
```

Ilustración 18 Parámetros introducidos para la prueba de equilibrio

El resultado obtenido es el siguiente:

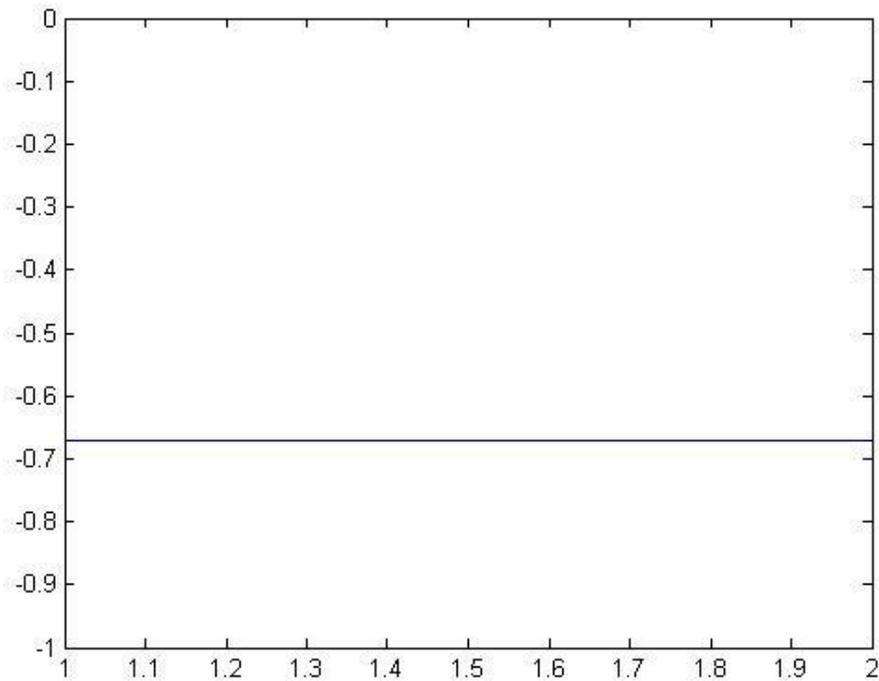


Ilustración 19 Desplazamiento nulo en la prueba de equilibrio

Como se puede ver se comprueba la situación de equilibrio del sistema. Es recomendable realizar esta prueba previamente a realizar cualquier ensayo ya que, en una situación real, el rack de servidores se encontrará completamente apoyado y en equilibrio sobre los aisladores.

3.2 Ensayo del modelo espacial ante una entrada impulsional

Una vez superadas estas pruebas básicas para comprobar el comportamiento del modelo según un modelo simplificado en un grado de libertad, se va a realizar una prueba de impacto para demostrar las posibilidades de la herramienta. Como referencia se van a comparar los resultados con un modelo parecido al presentado, ya que, aunque los resultados difieran debido a que ambos modelos no son exactamente iguales, puede servir para observar comportamientos similares en ambos sistemas. El modelo con el que se va a comparar el de este trabajo es el siguiente

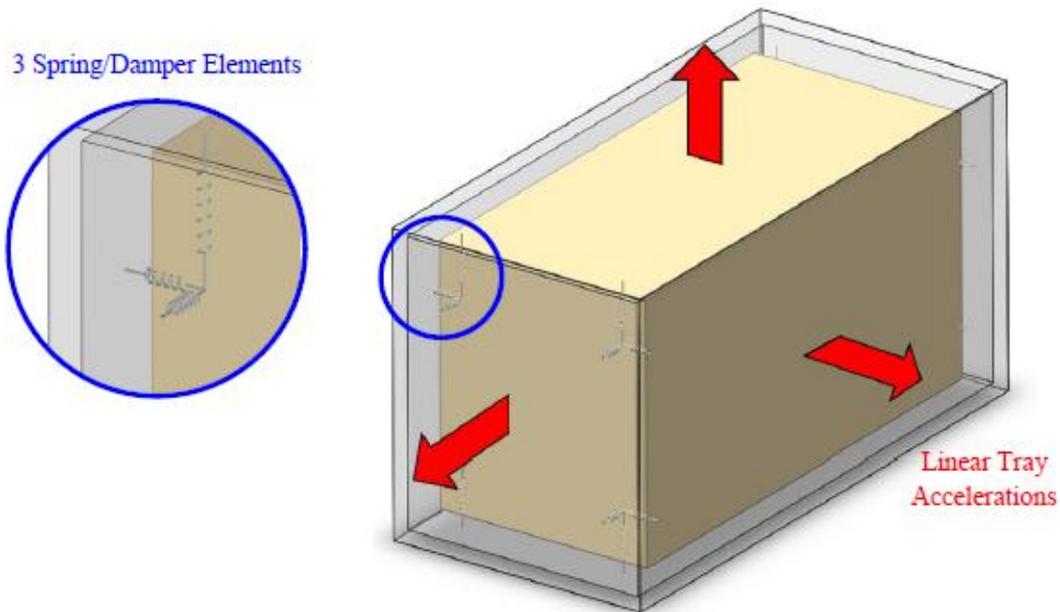


Ilustración 20 Modelo a comparar, obtenido de (ver referencia [4])

A continuación, se incluye una tabla de los datos a utilizar para el ensayo:

Parámetro	Valor	Unidad
m	150	kg
c	410.5	N-s/m
k	163568	N/m
Amplitud	0.018	m
Pulsación	50	Rad/s

Previamente se ha realizado la prueba de equilibrio, para obtener la posición inicial para el ensayo.

```

6      %Dimensiones y masa del servidor (consultar esquemas)
7      %lx, ly, lz, a, b, h, m
8 -    lx=2;    ly=1.5;    lz=3;
9 -    a=2;    b=1.5;    h=3;    m=150;
10
11     %Valores de rigidez y amortiguamiento de los aisladores
12
13     %1) Aisladores iguales en las cuatro esquinas:
14     %kxe kye kze cxe cye cze
15
16 -    kxe=163568;    kye=163568;    kze=163568;
17 -    cxe=410.5;    cye=410.5;    cze=410.5;
18
19 -    k1x=kxe;k2x=kxe;k3x=kxe;k4x=kxe;
20 -    k1y=kye;k2y=kye;k3y=kye;k4y=kye;
21 -    k1z=kze;k2z=kze;k3z=kze;k4z=kze;
22 -    c1x=cxe;c2x=cxe;c3x=cxe;c4x=cxe;
23 -    c1y=cye;c2y=cye;c3y=cye;c4y=cye;
24 -    c1z=cze;c2z=cze;c3z=cze;c4z=cze;
25

```

Ilustración 21 Parámetros para la realización de la prueba de impacto

El sistema se va a someter a la entrada impulsional siguiente, un medio seno de amplitud y periodo definidos en la tabla anterior:

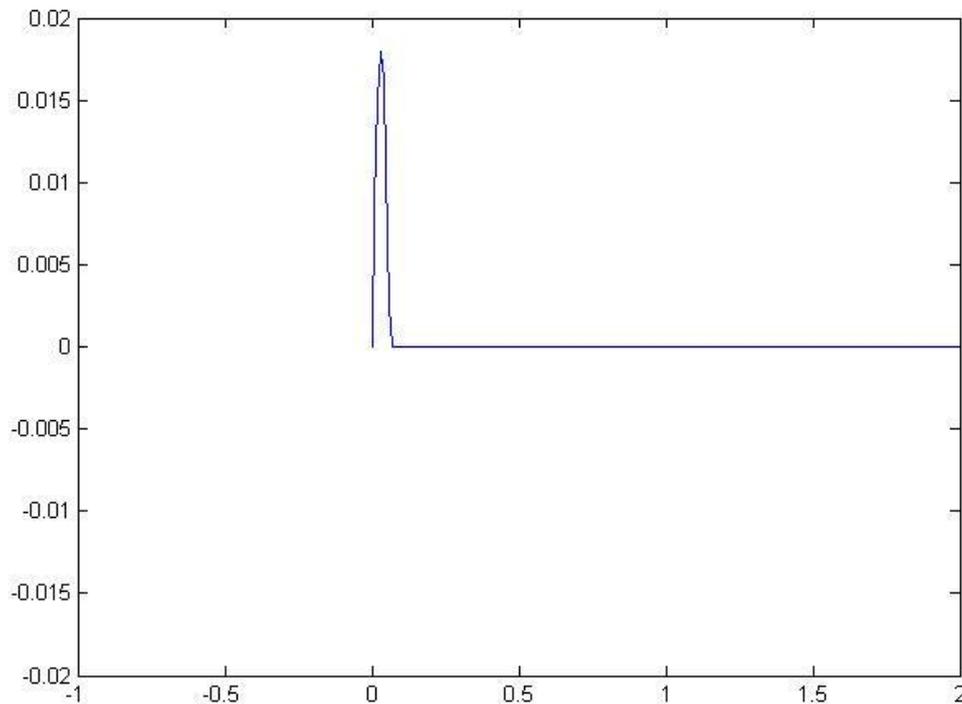


Ilustración 22 Señal de impulso para el ensayo de impacto

Primero se va a aplicar este impulso como una excitación horizontal en el eje Y como lo realiza el modelo a comparar para obtener los valores de aceleración del modelo y el desplazamiento de una de sus esquinas. Posteriormente se van a modificar los parámetros del sistema para obtener una respuesta más aceptable para los equipos a aislar, de la forma que se pretende que este modelo sea útil. Los resultados obtenidos son los siguientes:

Aceleración sufrida por el centro de gravedad en el eje Y (medida en g):

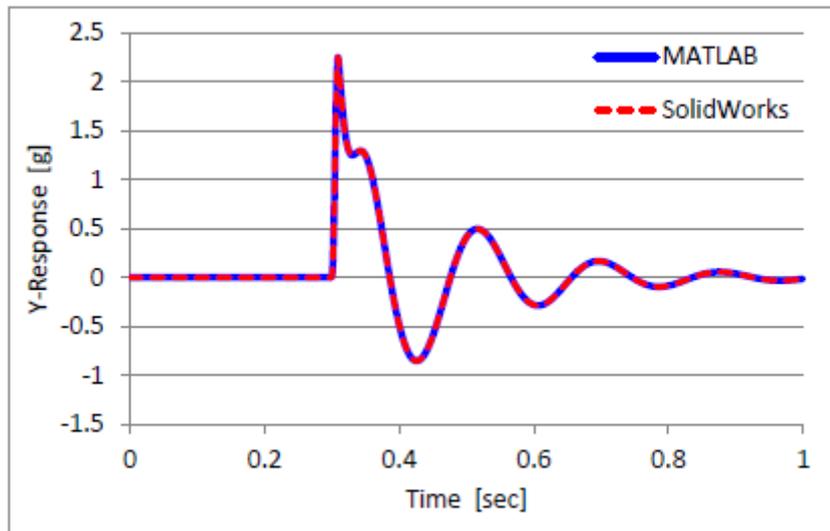


Ilustración 23 Aceleración del modelo a comparar en el eje Y

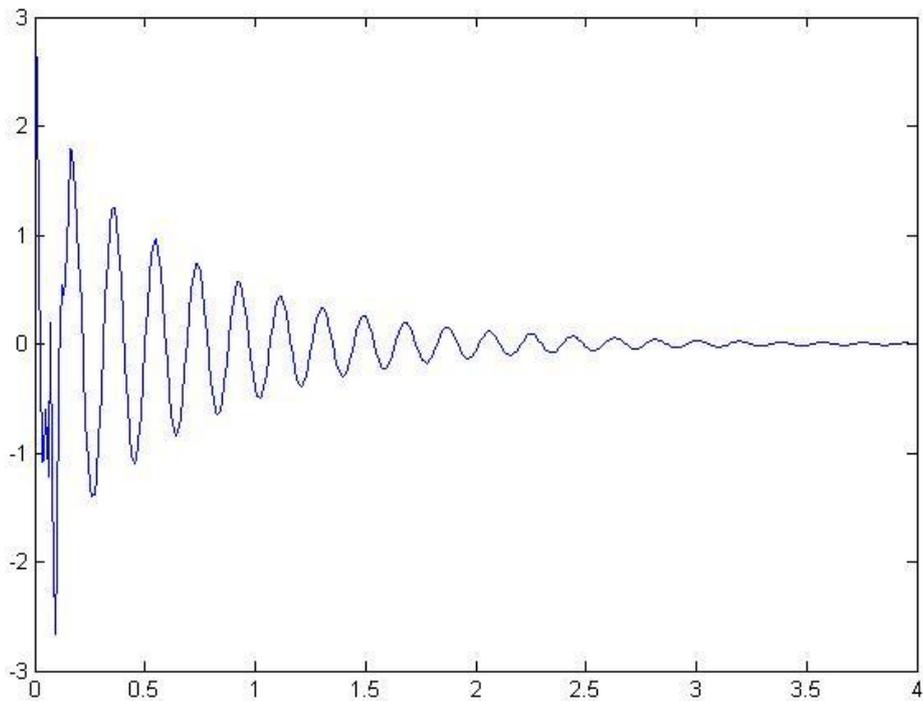


Ilustración 24 Aceleración del modelo presentado ante el impulso en el eje Y

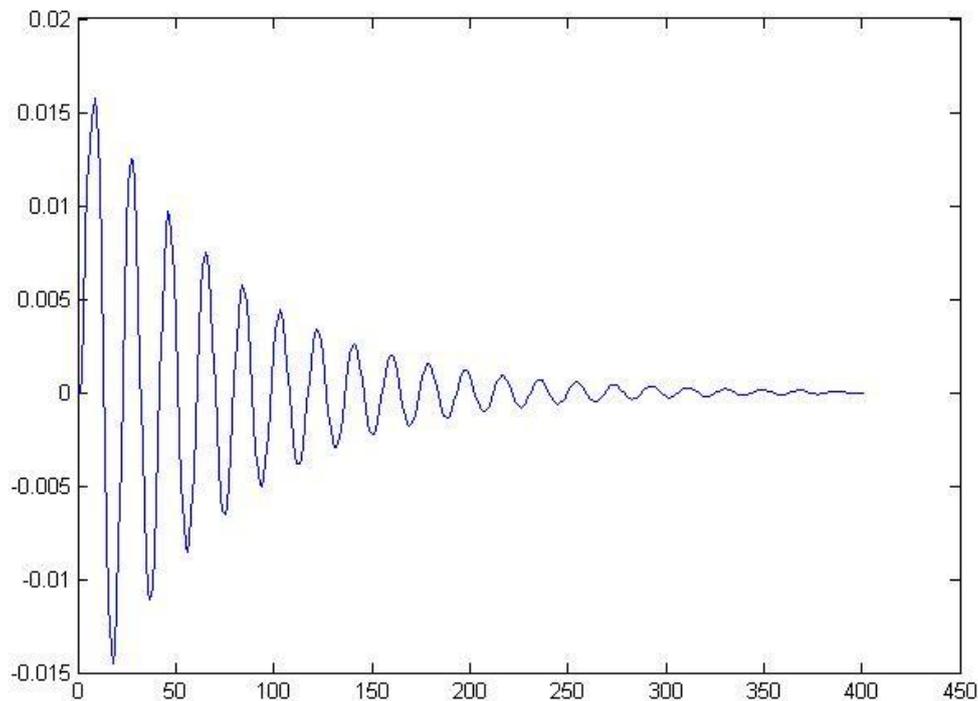


Ilustración 25 Desplazamiento de la esquina Y1 del modelo presentado en m

Se puede apreciar que ambos resultados alcanzan valores de aceleración muy parecidos. Además, se pueden obtener gráficas del movimiento de cada una de las ocho esquinas del modelo, aunque solo se va a recoger una a efectos de demostración. Conociendo los valores límite de espacio que el usuario disponga, podrá determinar a partir de esta grafica si su equipo va a sufrir un impacto con alguna de las paredes. Como se ve en las gráficas de la aceleración, estos valores son muy superiores a los soportados por un servidor. A continuación, se repite el disminuyendo los valores de rigidez a 2000 N/m ya que estos son demasiado elevados. Los resultados obtenidos representan una disminución notable en los valores de aceleración y desplazamiento.

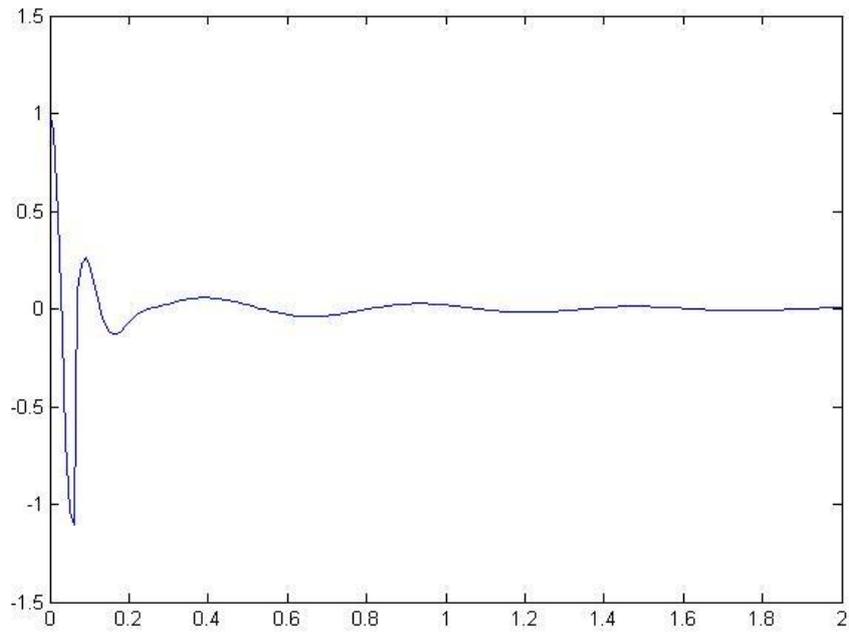


Ilustración 26 Aceleración del modelo presentado ante el impulso en el eje Y. Segundo ensayo

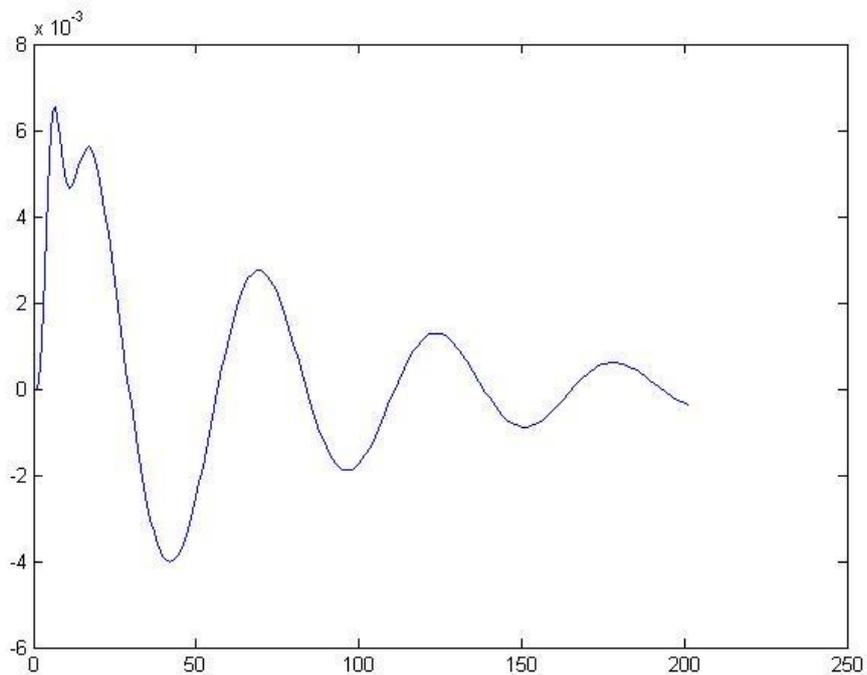


Ilustración 27 Desplazamiento de la esquina Y1 del modelo presentado en m

Como se puede apreciar, tanto los valores de aceleración como de desplazamiento se han reducido, aumentando la seguridad del sistema. De esta forma el usuario puede simular la respuesta ante distintas configuraciones



de aisladores que tenga disponibles en el mercado para así hallar su solución más económica.

4 ANEXOS

4.1 ANEXO A – Archivos de Matlab y estructura

El modelo dinámico de 6 grados de libertad se implementa en MATLAB. Este software ofrece un control completo para la incorporación de las complejidades necesarias para la precisión del modelo, así como la versatilidad en el análisis de los resultados.

También permite una estructura modular que permita intercambiar fácilmente los ficheros de Matlab, facilitando así si fuera necesario la adaptación a otros modelos o diseños, o realizando ajustes necesarios para una mayor precisión.

La estructura del modelo consiste en un fichero principal de simulación en el que el usuario introduzca las condiciones de su sistema real, múltiples funciones que corresponden a transformaciones y cálculos de variables de entrada para obtener otras de salida, y una función para obtener resultados más detallados del movimiento de la estructura y analizar posibles colisiones.

	Nombre del Fichero	Tipo	Variables de entrada	Variables de salida
1	modespacio.m	script	-	-
2	datos6.m	Función	lx,ly,lz,a,b,h,m,k1x,k2x,k3x,k4x, k1y,k2y,k3y,k4y,k1z,k2z,k3z,k4z, c1x,c2x,c3x,c4x,c1y,c2y,c3y,c4y, c1z,c2z,c3z,c4z	A, B, P, K, C, M, Ko, Co
3	force6.m	Función	t, amp, puls	ft
4	prueba6.m	Función	t, y, A, B, P, amp, puls	fy
5	resultados.m	Función	pos,lx,ly,lz,h	x1,x2,x3,x4,x5,x6, x7,x8,y1,y2,y3,y4, y5,y6,y7,y8,z1,z2, z3,z4,z5,z6,z7,z8

Diagrama de funcionamiento:

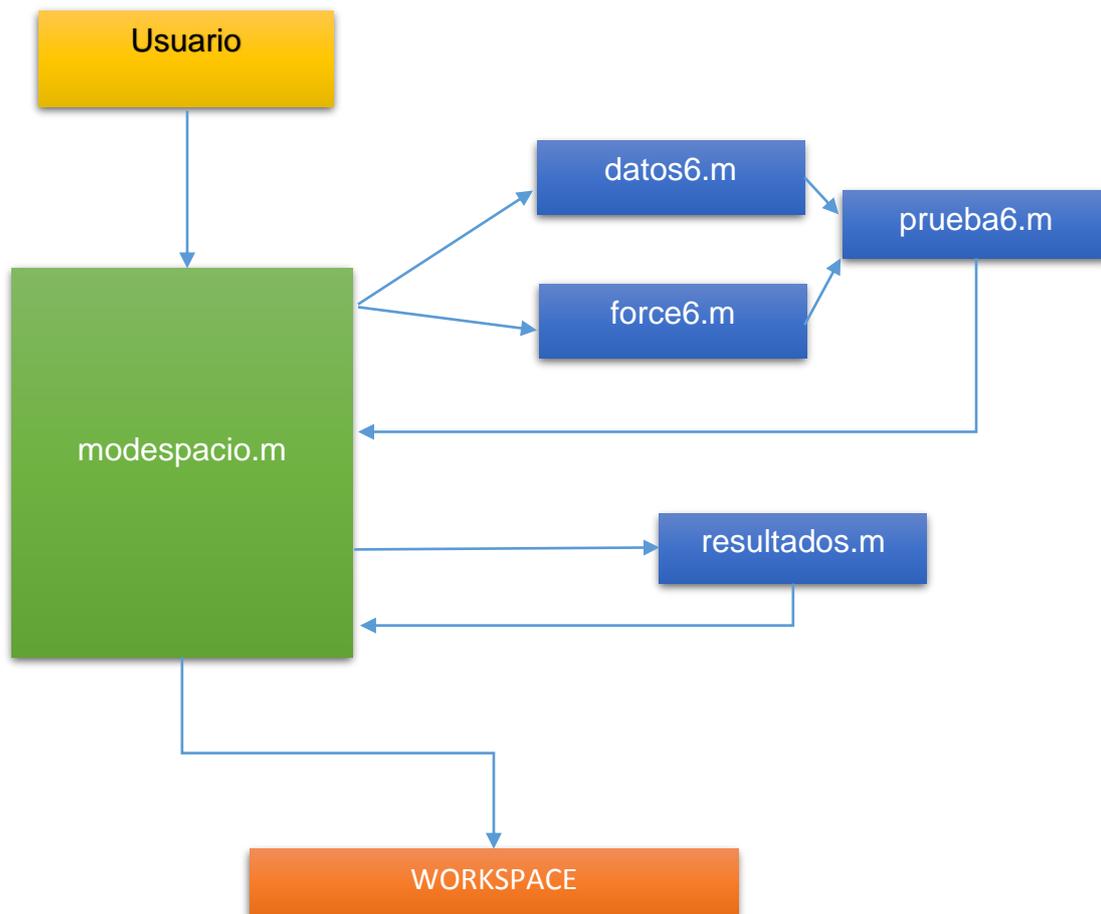


Ilustración 28 Diagrama de funcionamiento del modelo

4.2 ANEXO B - Descripción de las funciones de Matlab

Modespacio.m:

Es el script principal que se encarga de recoger los datos de partida que el usuario quiere analizar, los convierte al formato necesario para su procesado, y actúa como base para el resto de funciones.

Está dividido en dos partes principales:

- La primera parte es la adquisición de datos del usuario, aquí es donde se introducen los valores a partir de los que se va a realizar la simulación. El usuario debe rellenar las variables que aparecen acorde a los parámetros de su modelo real, como son las dimensiones y peso del rack de servidores, la posición de los aisladores respecto a estas dimensiones, las constantes de rigidez y amortiguamiento de los aisladores a comprobar, el intervalo de tiempo y la precisión con la que se quiere simular, información acerca de la excitación a la que se quiere someter al sistema, así como las condiciones de partida del sistema en el instante inicial. Esta es la parte en la que el usuario debe interactuar con el modelo.
- La segunda parte se encarga de ordenar los datos que el usuario ha introducido de forma más intuitiva y explícita, en variables más condensadas y aptas para su exportación a las funciones intermedias de cálculo y procesado. Aquí se llama al resto de funciones enviándoles las variables que deben procesar, devolviendo los resultados últimos de comportamiento del modelo. En esta parte del script, el usuario no debe interactuar con el código.

Datos6.m:

Esta función se encarga de transformar los valores de entrada de las características físicas del sistema que el usuario ha introducido en el script

modespacio.m en las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento que posteriormente serán utilizadas para crear el sistema de ecuaciones diferenciales.

Una vez estas matrices han sido creadas, se recogen en las variables definidas y están listas para ser utilizadas por los ficheros posteriores de la secuencia.

Force6.m:

En esta función se prepara el vector de posición y velocidad de la excitación externa. Recoge el vector de tiempos creado a partir de los parámetros de simulación que el usuario ha introducido en el script modespacio.m. Para nuestro modelo, estamos considerando que la excitación del sistema se produce debido al movimiento del soporte, modelado mediante una función seno, pero es posible modificar este fichero en el futuro si se quisiera adaptar a otro tipo de modelos. Por ejemplo, se puede convertir con un sencillo bucle “if” en una señal de entrada tipo escalón para realizar análisis de impacto.

Prueba6.m:

Esta función recoge las variables creadas en los ficheros Datos6.m y Force6.m para plantear el sistema de ecuaciones diferenciales que se va a integrar para obtener la solución del sistema y por tanto el comportamiento del modelo.

El fichero principal modespacio.m llama a esta función para ser integrada por la función predeterminada de Matlab ode45.

Resultados.m:

Esta función recoge las variables del movimiento del modelo una vez que el sistema de ecuaciones diferenciales ha sido resuelto en el fichero principal modespacio.m. A partir de esas variables se componen los movimientos de cada



una de las 8 esquinas del prisma para su posterior análisis o representación gráfica según lo que necesite el usuario.

4.3 ANEXO C – Proceso de funcionamiento

El usuario sólo debe interactuar con el fichero modespacio.m. Sin embargo, hay mucha información que introducir. A continuación, se va a hacer una guía detallada de los pasos que el usuario debe seguir para realizar una correcta simulación, especificando qué parámetros deben ser modificados y dónde se encuentran en el código. Por defecto todos los valores a modificar están puestos a “cero”. El usuario deberá sustituir ese valor por los datos de su modelo a simular.

Preparación de “modespacio.m”

Paso 1 – Especificar las dimensiones del sistema.

Las primeras variables que deben ser seleccionadas son las dimensiones físicas del sistema. En la sección de código aparecen en color negro las variables en las que introducir los parámetros. Como se ven en la figura, son lx, ly, lz, a, b, h, y m. El usuario debe sustituir los ceros por los valores correspondientes. Para más información sobre la representación, consultar la ilustración 6.

```

4      %INTRODUCCION DE DATOS
5
6      %Dimensiones y masa del servidor (consultar esquemas)
7      %lx, ly, lz, a, b, h, m
8 -    lx=0;    ly=0;    lz=0;
9 -    a=0;    b=0;    h=0;    m=0;
10

```

Ilustración 29 Interfaz de introducción de datos

Paso 2 – Especificar los valores de amortiguamiento y rigidez de los aisladores.

Este paso tiene una complicación extra añadida, ya que el usuario tiene dos opciones para realizar la simulación. En el primer caso se considera que todos los aisladores colocados en el modelo tienen las mismas características. En el segundo caso se pueden definir las características de cada uno de forma independiente. Inicialmente esta sección del código aparece como se representa en la siguiente figura:

```

11      %Valores de rigidez y amortiguamiento de los aisladores
12
13      %1) Aisladores iguales en las cuatro esquinas:
14      %kxe kye kze cxe cye cze
15
16      % kxe=0;   kye=0;   kze=0;
17      % cxe=0;   cye=0;   cze=0;
18      %
19      % k1x=kxe;k2x=kxe;k3x=kxe;k4x=kxe;
20      % k1y=kye;k2y=kye;k3y=kye;k4y=kye;
21      % k1z=kze;k2z=kze;k3z=kze;k4z=kze;
22      % c1x=cxe;c2x=cxe;c3x=cxe;c4x=cxe;
23      % c1y=cye;c2y=cye;c3y=cye;c4y=cye;
24      % c1z=cze;c2z=cze;c3z=cze;c4z=cze;
25
26      %2) Aisladores independientes:
27
28      % k1x=0;   k2x=0;   k3x=0;   k4x=0;
29      % k1y=0;   k2y=0;   k3y=0;   k4y=0;
30      % k1z=0;   k2z=0;   k3z=0;   k4z=0;
31      % c1x=0;   c2x=0;   c3x=0;   c4x=0;
32      % c1y=0;   c2y=0;   c3y=0;   c4y=0;
33      % c1z=0;   c2z=0;   c3z=0;   c4z=0;
34

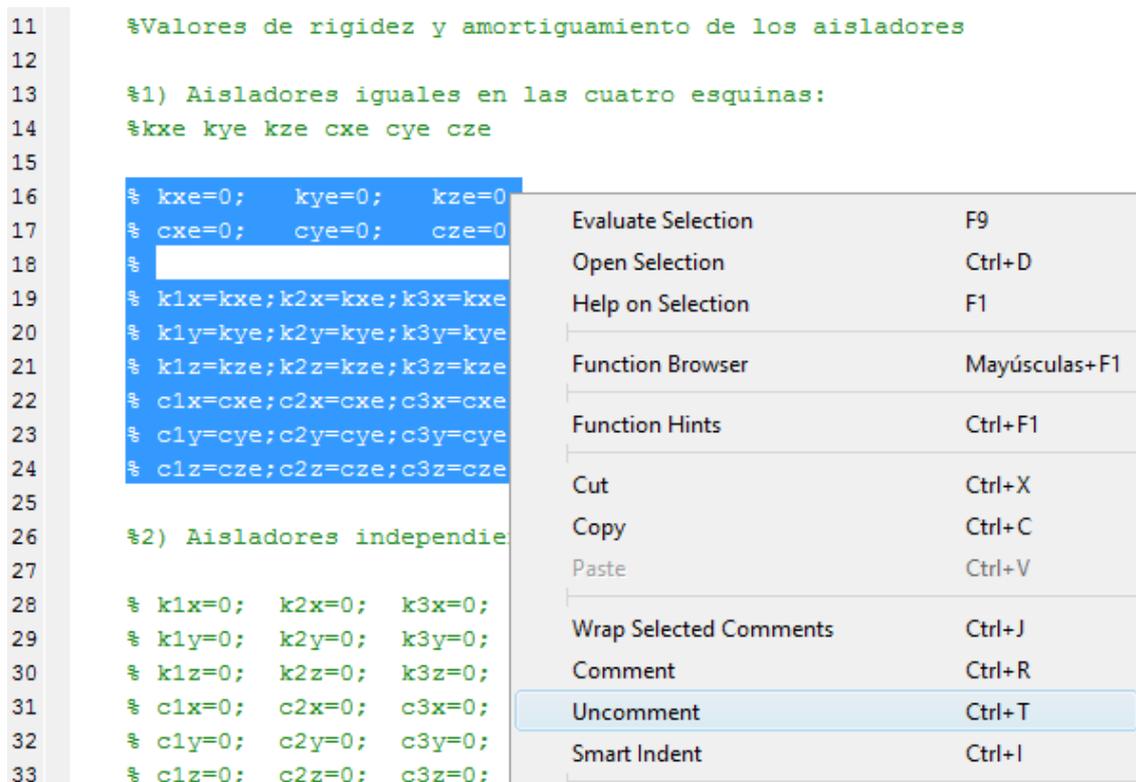
```

Ilustración 30 Opciones para la introducción de los valores de rigidez y amortiguamiento

Como se puede ver aparecen las dos opciones anteriormente citadas en 1) y 2). A continuación, se detalla cómo proceder en cada uno de los casos:

Paso 2.1 – Todos los aisladores son iguales.

Inicialmente todo el código aparece como líneas de comentario en verde que Matlab ignora a la hora de procesar el script. Si el usuario quiere realizar la simulación siguiendo la primera opción, deberá seleccionar esa sección de código y desactivar la opción de comentario simplemente haciendo clic derecho y seleccionando “Uncomment” como se ve en la figura.



```

11 %Valores de rigidez y amortiguamiento de los aisladores
12
13 %1) Aisladores iguales en las cuatro esquinas:
14 %kxe kye kze cxe cye cze
15
16 % kxe=0; kye=0; kze=0
17 % cxe=0; cye=0; cze=0
18
19 % k1x=kxe; k2x=kxe; k3x=kxe
20 % k1y=kye; k2y=kye; k3y=kye
21 % k1z=kze; k2z=kze; k3z=kze
22 % c1x=cxe; c2x=cxe; c3x=cxe
23 % c1y=cye; c2y=cye; c3y=cye
24 % c1z=cze; c2z=cze; c3z=cze
25
26 %2) Aisladores independie
27
28 % k1x=0; k2x=0; k3x=0;
29 % k1y=0; k2y=0; k3y=0;
30 % k1z=0; k2z=0; k3z=0;
31 % c1x=0; c2x=0; c3x=0;
32 % c1y=0; c2y=0; c3y=0;
33 % c1z=0; c2z=0; c3z=0;

```

Evaluate Selection	F9
Open Selection	Ctrl+D
Help on Selection	F1
Function Browser	Mayúsculas+F1
Function Hints	Ctrl+F1
Cut	Ctrl+X
Copy	Ctrl+C
Paste	Ctrl+V
Wrap Selected Comments	Ctrl+J
Comment	Ctrl+R
Uncomment	Ctrl+T
Smart Indent	Ctrl+I

Ilustración 31 Selección de introducción de los valores de rigidez y amortiguamiento

Finalmente, el código quedará marcado en negro, y se podrán introducir los valores de rigidez y amortiguamiento en cada una de las variables que aparecen igualadas a cero por defecto.

```

11      %Valores de rigidez y amortiguamiento de los aisladores
12
13      %1) Aisladores iguales en las cuatro esquinas:
14      %kxe kye kze cxe cye cze
15
16      kxe=0;   kye=0;   kze=0;
17      cxe=0;   cye=0;   cze=0;
18
19      k1x=kxe;k2x=kxe;k3x=kxe;k4x=kxe;
20      k1y=kye;k2y=kye;k3y=kye;k4y=kye;
21      k1z=kze;k2z=kze;k3z=kze;k4z=kze;
22      c1x=cxe;c2x=cxe;c3x=cxe;c4x=cxe;
23      c1y=cye;c2y=cye;c3y=cye;c4y=cye;
24      c1z=cze;c2z=cze;c3z=cze;c4z=cze;
25
26      %2) Aisladores independientes:
27
28      % k1x=0;   k2x=0;   k3x=0;   k4x=0;
29      % k1y=0;   k2y=0;   k3y=0;   k4y=0;
30      % k1z=0;   k2z=0;   k3z=0;   k4z=0;
31      % c1x=0;   c2x=0;   c3x=0;   c4x=0;
32      % c1y=0;   c2y=0;   c3y=0;   c4y=0;
33      % c1z=0;   c2z=0;   c3z=0;   c4z=0;
34

```

Ilustración 32 Opción 1: aisladores de idénticas características

Paso 2.2 – Aisladores independientes.

Este caso se utiliza para realizar simulaciones en el que se coloquen aisladores de distintas características en cada esquina. Para utilizarlo hay que hacer el mismo procedimiento que para el caso anterior, pero esta vez desactivando el comentario en la parte del código de la opción 2) y quedará tal como se representa en la siguiente figura, permitiendo al usuario introducir de forma independiente todos los valores de rigidez y amortiguamiento de cada aislador en cada eje.

```

11 %Valores de rigidez y amortiguamiento de los aisladores
12
13 %1) Aisladores iguales en las cuatro esquinas:
14 %kxe kye kze cxe cye cze
15
16 % kxe=0; kye=0; kze=0;
17 % cxe=0; cye=0; cze=0;
18 %
19 % k1x=kxe;k2x=kxe;k3x=kxe;k4x=kxe;
20 % k1y=kye;k2y=kye;k3y=kye;k4y=kye;
21 % k1z=kze;k2z=kze;k3z=kze;k4z=kze;
22 % c1x=cxe;c2x=cxe;c3x=cxe;c4x=cxe;
23 % c1y=cye;c2y=cye;c3y=cye;c4y=cye;
24 % c1z=cze;c2z=cze;c3z=cze;c4z=cze;
25
26 %2) Aisladores independientes:
27
28 - k1x=0; k2x=0; k3x=0; k4x=0;
29 - k1y=0; k2y=0; k3y=0; k4y=0;
30 - k1z=0; k2z=0; k3z=0; k4z=0;
31 - c1x=0; c2x=0; c3x=0; c4x=0;
32 - c1y=0; c2y=0; c3y=0; c4y=0;
33 - c1z=0; c2z=0; c3z=0; c4z=0;
34

```

Ilustración 33 Opción 2: Aisladores de características independientes

Es importante que, tras la introducción de datos, esta sección de código quede representada como en una de las dos figuras, y nunca desactivar la opción de comentario en las dos secciones de código a la vez, es decir, sólo una de ellas puede aparecer escrita en negro, ya que, si no provocaría errores en el resultado, o directamente en el funcionamiento, y la simulación no tendría lugar.

Paso 3 – Especificar el entorno de simulación

En esta sección el usuario debe de seleccionar durante cuánto tiempo quiere realizar la simulación y el intervalo de toma de medidas en las variables “duración” e “intervalo”, así como las condiciones iniciales de posición y velocidad del sistema en las variables “xo, yo, zo, giroxo, giroyo, girozo, vxo, vyo, vzo, vgiroxo, vgiroyo, vgirozo”.

Es importante considerar hacer un análisis de caída libre, dejando los valores del apartado 4 a cero para obtener la posición de equilibrio, y reintroducirla en la variable “zo” en este apartado para realizar la simulación de forma más correcta.

```

36      %Entorno de simulacion
37
38      %Tiempo a simular:
39 -    duracion=0;      intervalo=0;
40
41      %Condiciones iniciales:
42 -    xo=0;   yo=0;   zo=0;   giroxo=0;   giroyo=0;   girozo=0;
43 -    vxo=0;  vyo=0;  vzo=0;  vgiroxo=0;  vgiroyo=0;  vgirozo=0;
44

```

Ilustración 34 Introducción de las condiciones iniciales y del tiempo de simulación

Paso 4 – Parámetros de la excitación

Por último, se introducen los datos de la excitación externa que va a afectar al sistema. Los parámetros a modificar son “ampx, ampy y ampz”, que son las amplitudes del movimiento del soporte en cada uno de los ejes, así como “puls”, la frecuencia de esta vibración.

Es posible dejar a cero los valores de alguna de las amplitudes para realizar simulaciones del movimiento en una sola dirección, así como para realizar el ensayo en reposo para obtener la posición de equilibrio que utilizar como condición inicial anteriormente mencionado.

Una vez acabada la simulación con éxito, sin errores aparentes en la “command window” de MATLAB, el usuario podrá obtener desde esa ventana los resultados llamando a las siguientes variables, que se podrán verificar en el “workspace”:

pos: matriz de 6 columnas y tantas filas como instantes se hallan definido en el vector de tiempo. Se recogen los valores de desplazamiento del centro de gravedad del modelo. Cada columna indica un grado de desplazamiento en este orden: X, Y, Z, giro θ_x , giro θ_y y giro θ_z .

vel: matriz de 6 columnas y tantas filas como instantes se hallan definido en el vector de tiempo. Se recogen los valores de velocidad del centro de gravedad del modelo. Cada columna indica la velocidad en cada uno de los grados de libertad en este orden: velocidad en X, en Y, en Z, velocidades angulares $\dot{\theta}_x$, $\dot{\theta}_y$ y $\dot{\theta}_z$.

acel: matriz de 6 columnas y tantas filas como instantes se hallan definido en el vector de tiempo. Se recogen los valores de aceleración del centro de gravedad del modelo. Cada columna indica la aceleración en cada uno de los grados de libertad en este orden: aceleración en X, en Y, en Z, aceleraciones angulares $\ddot{\theta}_x$, $\ddot{\theta}_y$ y $\ddot{\theta}_z$.

El desplazamiento de cada una de las esquinas del prisma en una dirección está guardado en una variable nombrada mediante la dirección en la que se desplaza y la numeración de las esquinas representada a continuación. Por ejemplo, x5 representaría el desplazamiento en el eje X de la esquina número 5; z7 representaría el desplazamiento en el eje Z de la esquina número 7, etc.

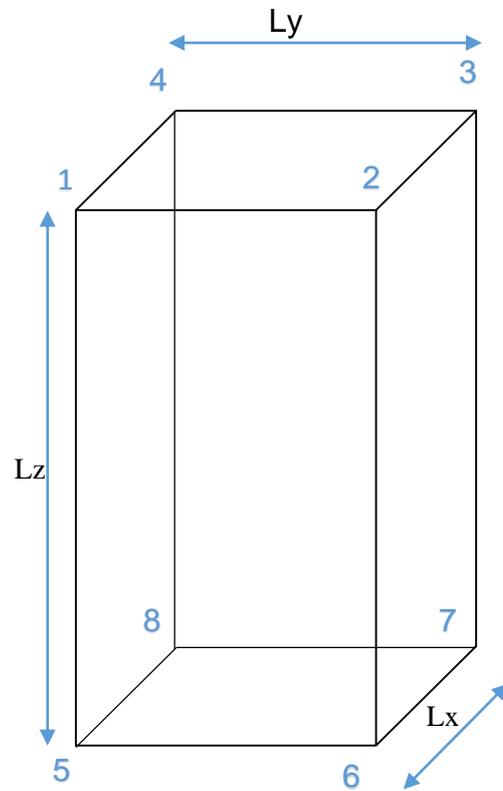


Ilustración 37 Numeración de las esquinas para la lectura de resultados

Bibliografía

- [1] Vibration isolation in Data Centers. – *Secure Technical Rooms*. Emilio Sapiña. Enero de 2014.
<http://www.securetechnicalrooms.com/presentaciones/Vibration%20Isolation.pdf>
- [2] Control de Vibraciones. – *Departamento de Ingeniería Mecánica, Energética y de Materiales. Universidad de Navarra*.
http://www.imem.unavarra.es/EMyV/pdfdoc/vib/vib_control.pdf
- [3] Aislamiento de Vibraciones. Transmisibilidad. – *Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Minas de Madrid*.
<https://vibraciones.wikispaces.com/4-+AISLAMIENTO+DE+VIBRACIONES.+TRANSMISIBILIDAD>
- [4] Design, Modeling and Simulation of Battery Pack Suspensions for Off-Road Electric Vehicles. – *The Pennsylvania State University*. Daniel L. Aglione. Mayo de 2014.
- [5] Medida del amortiguamiento en sistemas con 1 grado de libertad. Transmisibilidad. – *Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Cantabria*. Dr. Fernando Viadero Rueda.
- [6] Modello Dinamico Di una Pompa Ad Ingranaggi Per Servosterzo. – *Università degli studi di Bologna*. Enrico Lo Greco. 2001-2002.
- [7] Simulazione del Comportamento Dinamico di una Pompa ad Ingranaggi. – *Università degli Studi di Ferrara*. Ferrari Paolo. 2001-2002.
- [8] Modello Ad Elementi Finiti Dell'Ingranamento Di Ruote Dentate A Denti Diritti. – *Università degli studi di Ferrara*. Francesca Marchini. 2004-2005.



- [9] Model Validation and Verification. – *The University of Edinburgh*. Jane Hillston. Septiembre 2003.
<http://www.inf.ed.ac.uk/teaching/courses/ms/notes/note14.pdf>
- [10] MATLAB Answers. – *MathWorks*.
<https://es.mathworks.com/matlabcentral/answers/index>