



Facultad de Educación

MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

**SISTEMAS DE GEOMETRÍA DINÁMICA COMO HERRAMIENTAS
EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE
TRIGONOMETRÍA EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA**

*Geometry Dynamics Systems as tools for the process of teaching and learning
trigonometry during the Secondary Education*

Alumno: Daniel Gutiérrez Gallo

Especialidad: Matemáticas

Director: Mario Fioravanti Villanueva

Curso Académico: 2015/16

VºBº DIRECTOR

Fecha: Octubre 2016

RESUMEN

En pleno siglo XXI e inmersos en la denominada Sociedad 2.0, es razonable asumir que los avances tecnológicos que nos rodean deben ser utilizados como herramientas activas en la práctica docente.

Las TIC hoy en día son una realidad en los centros educativos, por lo tanto, apoyándonos en ellas, podremos llegar de maneras más atractivas y eficientes a nuestros alumnos. El Software de Geometría Dinámica, Geogebra, puede constituir una herramienta para ayudarnos en el proceso de enseñanza y aprendizaje con cuestiones matemáticas como la trigonometría, que tradicionalmente, resultan complejas y entrañan serias dificultades de asimilación a los alumnos de secundaria.

Palabras Clave: *TIC, Geogebra, enseñanza, aprendizaje, trigonometría.*

ABSTRACT

In the XXI Century and immersed in the colloquially called Society 2.0, it is reasonable to assume that technological advances around us should be used as active tools in teaching. Technologies for the Information and the Communication (TIC) today are a reality in schools, therefore relying on them, we can get more attractive and efficient ways our students. Dynamic Geometry Software, Geogebra, can be a tool to help in the process of teaching and learning mathematics issues, like trigonometry, that traditionally are complex and involve serious difficulties of assimilation to students in secondary education.

Key words: *TIC, Geogebra, teaching, learning, trigonometry.*

ÍNDICE DE CONTENIDO

1.	INTRODUCCIÓN	3
2.	JUSTIFICACIÓN	6
2.1	Contextualización	7
3.	MARCO TEÓRICO	11
3.1	Sistemas de Geometría Dinámica	11
3.1.2	Impacto del Dinamismo	13
3.1.3	Aspectos cognitivos	18
3.2	Trigonometría.	21
3.2.1	Repaso histórico. De la antigüedad hasta nuestros días.	22
3.2.2	Curriculum y justificación.	27
3.2.3	Competencias Básicas.	29
3.2.4	Contribución de las Matemáticas a las competencias.	33
4.	PROPUESTA DE ACTIVIDADES	35
4.1	Objetivos.....	36
4.2	El Protagonismo de Geogebra.....	37
4.3	Metodología	38
4.4	Ejemplos de actividades a través de Geogebra	40
5.	CONCLUSIONES	49
6.	BIBLIOGRAFÍA	50

1. INTRODUCCIÓN

Desde mi perspectiva como estudiante del Master de Formación del profesorado de secundaria y de forma más especial y significativa, en mi faceta de profesor en prácticas, he podido observar que hay alumnos que en matemáticas se encuentran desmotivados por la dificultad del área y, que hay otros alumnos, que simplemente se sienten aburridos porque la metodología siempre es la misma. Por ello, creo que es necesario buscar nuevos caminos que me ayuden a evolucionar en mi forma de enseñar, con el fin de mejorar el aprendizaje de los alumnos y transformar esta mala concepción que algunos tienen de la asignatura.

Es importante que como docentes nos planteemos temas de investigación como éste, en el que analizar cómo poder ayudar a nuestros alumnos a enfrentarse a esa materia de fama dura y difícil. Una buena forma de conseguir este objetivo es la utilización de las tecnologías de la información y comunicación o TIC, en el aula puesto que pueden transformar positivamente las actitudes de los alumnos relacionadas con las matemáticas, así como desarrollar sus competencias en esta área.

En concreto, me he centrado en el análisis y trabajo con un software específico de geometría dinámica (SGD) denominado Geogebra, desde la creencia de que este incidirá en mayor grado en el desarrollo de actitudes y competencias matemáticas tras una correcta, tutelada y provechosa utilización por parte de nuestros alumnos.

En un SGD, la geometría en su forma tradicional estática deja paso una geometría con capacidad de movimiento, que permite a los alumnos mediante el cambio en los objetos geométricos, descubrirlos a medida que los transforman y relacionan entre sí.

La necesaria regeneración y modernización de los métodos y formas de enseñanza llevan inevitablemente adscritos, y más en pleno siglo XXI, la

inclusión y el uso en los procesos educacionales de los avances en tecnología de los que la comunidad docente tenga acceso.

Cada vez más presentes en cualquier ámbito de la vida, disponemos a nuestro alcance un gran número de herramientas tecnológicas de vanguardia de las que valernos para el desarrollo y logro de una gran variedad de acciones y procesos en distintos ámbitos, tanto personales como profesionales.

Por lo tanto, es inevitable, pues, que la tecnología esté unida a la educación, y que el uso de las tecnologías de la información y comunicación, formen parte de la actividad docente. En el caso de las matemáticas, cada vez son más los docentes que emplean este tipo de herramientas para la enseñanza de la materia, aunque aún hay muchas trabas, tanto estructurales (ordenadores en el aula) como de procedimiento (desempeño de los docentes), que impiden su uso habitual.

Podemos afirmar que la introducción de diversas herramientas tecnológicas en el aula de matemáticas facilita el aprendizaje. Las TIC potencian aspectos como la visualización de conceptos matemáticos y permiten experimentar con dichos conceptos.

De este modo, teniendo en cuenta la realidad en la que nos encontramos, el sistema educativo no puede seguir utilizando, exclusivamente, los métodos de enseñanza del pasado, sin considerar todos los estímulos e influencias que afectan directa e indirectamente al estudiante.

Ante esta perspectiva de enormes cambios en cuanto a la forma de comunicación, obtención de información y formación del conocimiento, se hace imprescindible que el sistema educativo genere nuevos ambientes de aprendizaje, en los cuales se propicie el contacto, el intercambio, la experimentación y la participación de los estudiantes de forma activa.

Desde hace ya bastantes años resultan abundantes las publicaciones de carácter pedagógico que versan sobre la revolución que está suponiendo la integración de las TIC en la enseñanza.

Se habla de los cambios de perfiles y de rol del profesor, de las nuevas estrategias de gestión de la clase, del papel activo de los alumnos en el desarrollo de su propio aprendizaje e incluso de profundos cambios curriculares.

Sin embargo cuando se pretende profundizar en la situación real de la integración de las TIC en la enseñanza, de su repercusión en los resultados académicos, cuando se quiere cuantificar el uso de recursos tecnológicos en distintas materias, incluso cuando se pretende tener una visión desde la práctica cotidiana del uso de las TIC, es decir, cuando hay que evaluar hechos y datos concretos, la información parece difuminarse, quedando reducida casi exclusivamente a cifras: números de ordenadores por centro, de ratios de alumnos por ordenador, de conexiones a Internet...

Entre las asignaturas del currículo, generalmente las matemáticas han sido un dolor de cabeza para educadores, padres y estudiantes.

Es notorio que un alto porcentaje de estudiantes sienten temor y falta de motivación cuando se enfrentan a esta asignatura. Como algunos autores mencionan, en este caso en referencia a uno de los grandes bloques de la geometría, *“El estudio de la trigonometría puede convertirse en un proceso memorístico, rutinario y mecánico, sin sentido ni utilidad si no se brindan las condiciones suficientes para ello”*. (Fiallo J. A, Gutiérrez A., 2006), aunque esta afirmación tal vez, podría extenderse a toda la asignatura y debería servir para la reflexión general del docente.

Por este motivo es necesario propiciar un cambio en la forma de enseñar las matemáticas que es la de potenciar el uso de los recursos y de medios que facilitan las TIC, de manera que permita a los docentes y estudiantes mejorar sus conocimientos, pues la manipulación de dichas herramientas hará que los estudiantes se interesen más y se motiven en el aprendizaje, como una de las manifestaciones de la conexión entre la matemática y la realidad.

Con todo lo anterior lo que pretendemos es apoyar y facilitar el trabajo del docente, el cual debe estar preparado en el manejo de las diferentes herramientas que nos facilitan los medios informáticos, procurando así un espacio didáctico, metodológico y de contenidos temáticos que lleven al docente

a elaborar un proyecto creativo e interactivo que despierte el interés de esta asignatura en el aula desde la incorporación de las TIC.

2. JUSTIFICACIÓN

La justificación de este trabajo se basa en las dificultades que encontramos los docentes a la hora de transmitir a los alumnos de secundaria el “gusto” por las matemáticas y en lograr hacer significativo y satisfactorio su aprendizaje, con las consiguientes dificultades que los alumnos encuentran y que les pueden llevar a un cierto fracaso en esta área.

La introducción de un nuevo Software de Geometría Dinámica (SGD) en el aula ayudará a que los alumnos aprendan de una manera diferente, divertida y motivadora y romperá con la estructura rígida del aprendizaje a través de los libros.

En este apartado se pretende dar a conocer, en líneas generales, una vez visto lo expuesto anteriormente, cómo se pueden dar un uso docente a ciertas herramientas tecnológicas en las aulas de secundaria para llevar a cabo con éxito la experiencia docente de enseñanza-aprendizaje.

En este trabajo focalizaremos nuestro análisis en el uso del software de Geometría Dinámica, más concretamente de Geogebra, para la enseñanza de la trigonometría en las clases de matemáticas en la educación secundaria.

2.1 Contextualización

Antes de comenzar con los pormenores del tema a tratar, contextualizaremos de forma global este trabajo.

- ¿Por qué centrarnos en el estudio de la trigonometría?

Habitualmente la enseñanza de la trigonometría se justifica mediante situaciones que se pueden modelar con triángulos rectángulos y en las que se necesita conocer la medida de algunos de sus lados, pero que no son accesibles para medir directamente, como alturas de montañas, pirámides o en Astronomía y hasta cierto punto, si nos estancamos en estos ejemplos típicos, nos quedamos en la superficie y no conseguimos llegar a dar sentido y significado de los conocimientos para los alumnos.

Los alumnos de la Educación Secundaria Obligatoria tienen contacto con la Geometría desde 1º hasta 3º de la ESO, a través del mismo bloque que lleva el nombre en el currículo establecido por la legislación estatal. Pero no es hasta 4º de la ESO cuando se les introduce específicamente y por primera vez en la trigonometría.

Uno de los principales obstáculos con los que se encuentran los estudiantes en el proceso del aprendizaje en la trigonometría, que refleja muy bien Flores Gil, F.L., (2008), es que *“pese a ser una rama muy visual, es una de las más técnicas”*.

Al ser gráfica debería ser más fácil de entender para los alumnos porque es 'visible', y sin embargo no es así porque a la hora de dibujar e interpretar se encuentran con varios obstáculos: la geometría basada en el uso de lápiz y papel genera en el alumno poco margen de creación y sobre todo de poder evitar su intrínseco carácter estático, lo que resulta realmente fundamental a la hora de interpretar, por ejemplo, las razones trigonométricas que son uno de los aspectos capitales de la trigonometría, o a la hora de realizar figuras que son básicas para establecer las bases de esta parte de la geometría.

Por ello se considera importante buscar herramientas que permitan evitar este carácter estático, generando en el alumno la capacidad de interpretar correctamente los conceptos asociados a la trigonometría y pudiéndose centrar en asimilarlos y adquirirlos, de esta forma nos centraríamos en la problemática relacionada con las cuestiones teóricas y prácticas del tema.

- ¿Por qué centrarnos en el estudio del Software de Geometría Dinámica?

Para que los alumnos logren una comprensión profunda, dinámica y significativa de todos los conceptos trigonométricos, el uso adecuado de Geogebra puede convertirse en la herramienta que les permita explorar, relacionar, conjeturar, demostrar y experimentar. Por lo tanto, el software de geometría dinámica puede desempeñar un papel clave en este contexto.

En el caso concreto de las matemáticas, el aprendizaje de esta materia conlleva procesos complejos que requieren de una gran diversidad de metodologías para lograr la máxima eficacia posible. El uso de las TIC se adapta especialmente bien a esta materia: la utilización de imágenes, gráficas, hojas de cálculo, etc. en calculadoras y ordenadores permite avanzar con suma rapidez y lo más importante, comprender y retener la información necesaria. Asimismo, las TIC abren la posibilidad de crear nuevos ambientes de aprendizaje y, por tanto, de desarrollar nuevas metodologías que permitan aprovechar al máximo los recursos de los que disponemos.

Las metodologías asociadas al uso de TIC en el aula de matemáticas comparten entre sí el hecho de fomentar que los estudiantes experimenten, manipulen, corrijan, conjeturen, etc. Las TIC ponen a disposición de los estudiantes verdaderos 'laboratorios de matemáticas' en los que conceptos matemáticos muy abstractos se materializan y el estudiante experimenta con ellos. Con lo dicho hasta ahora, hay varios aspectos que debemos considerar y tener en cuenta:

- El SGD posibilita que los estudiantes interactúen con las matemáticas, lo que facilita su comprensión y mejoran su aprendizaje.
- La observación de conceptos matemáticos a través de una imagen que puede ser manipulada y que reacciona a las acciones del alumnado ayuda en su comprensión. Por ejemplo, no es lo mismo dibujar la mediatriz de un segmento en papel que dibujarla usando Geogebra, pudiendo en este último caso mover el segmento y que el alumno pueda observar cómo se desplaza también la mediatriz de dicho segmento, al tiempo que se mantienen las propiedades esenciales de la misma.
- Mejora la capacidad del alumnado en tareas como organizar y analizar datos, así como en la realización de cálculos de forma eficaz. Un ejemplo claro es el uso de la parte algebraica del software, con la que realizar operaciones complejas con datos y crear gráficas que ayudan a su representación.
- Las TIC se pueden emplear en la enseñanza de los números, las medidas como la longitud, la superficie, el volumen,... visualizando los planos o cuerpos geométricos de todo tipo de construcciones e iniciando al alumnado en la geometría espacial, de manera que, a través de la visualización, comiencen a observar e indagar sobre diferentes objetos como conos, cilindros, esferas, pirámides, cubos, distintos poliedros, etc.
- También se pueden aplicar a la estadística mediante la visualización de distintas gráficas con el propósito de comprender cómo se resumen grandes cantidades de datos, para después extraer, mediante el análisis, conclusiones muy precisas que de otra forma sería mucho más laborioso y problemático conseguir.
- Aumentan la capacidad del alumnado para tomar decisiones y comenzar a resolver problemas, permitiendo que los estudiantes interactúen entre ellos mismos y su profesor/a, aportando su opinión o punto de vista sobre el objeto visualizado. Por ejemplo, sobre el tipo de gráfica, qué es lo que representa, cómo varía al cambiar algún dato, etc., es decir, posibilita también desarrollar el pensamiento crítico.

- ¿Por qué utilizar Geogebra?

Geogebra es un sistema de geometría dinámica creado en 2001 como trabajo de fin de máster por el austriaco Markus Hohenwarter, el cual actualmente sigue involucrado en las tareas de gestión y dirección del programa.

El software dispone de una serie de aspectos y características que lo hacen especialmente útil para su uso en la educación secundaria:

1. Es un software libre y gratuito, además está disponible para varios sistemas operativos lo que le hace accesible a toda la comunidad educativa. Estas características han favorecido que en torno a Geogebra se genere una comunidad de profesionales y docentes que investigan y trabajan para la continua mejora e innovación de los recursos que ofrece tanto a nivel técnico como de educación. Algunas de estas comunidades son: Geometría Interactiva Interoperable en Europa (I2G), o a través de la propia página de Geogebra se encuentran foros y distintas comunidades. (<https://www.geogebra.org/>)
2. Es una herramienta diseñada específicamente para la enseñanza de la geometría en la educación secundaria, por lo tanto orientada al uso de los alumnos de la educación secundaria. Su interfaz es sencilla y fácil de manejar y esto facilita la realización de actividades.
3. Combina distintos elementos de Aritmética, Geometría, Álgebra, Análisis, Cálculo, Probabilidad y Estadística, además de estar provisto de un interfaz con “Vista Gráfica” y “Vista Algebraica”, lo que según Losada, R. (2011) *“establece una permanente conexión entre los símbolos algebraicos, los valores numéricos y las gráficas geométricas”*.

3. MARCO TEÓRICO

3.1 Sistemas de Geometría Dinámica

Actualmente pocas personas, ya sean integrantes activos o no de la comunidad educativa, se atreven a poner en tela de juicio que los avances en tecnología, en la escuela en general, y en la Enseñanza Secundaria en particular, ofrecen una nueva oportunidad de estimular el proceso de aprendizaje de los alumnos y que su utilización activa en las aulas, puede generar nuevas formas, vías y posibilidades en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

“La utilización del ordenador en la enseñanza ha de estar enmarcada en una metodología que se basa en un modelo constructivista de acceso al conocimiento” (Yábar, J.M., 2000).

Siguiendo con lo expuesto por Yábar, en este modelo, el alumno, a partir de sus descubrimientos, guiados por una ayuda pedagógica, construye sus conocimientos y los significa e interioriza. Puesto que en el modelo constructivista el verdadero artífice en la construcción del conocimiento no es el profesor, ni como podría pensarse en nuestro caso el ordenador, es el propio alumno quien construye el conocimiento y aprendizaje. Él experimenta sobre objetos de su entorno.

El uso de software para la enseñanza de la geometría comenzó tímidamente a comienzos de los años 80 con la aparición del Logo. Varios años más tarde, surgió el software de geometría dinámica, tal y como lo entendemos hoy en día (la presentación internacional del software “Cabri” tuvo lugar en 1988).

Desde entonces, numerosos investigadores se han volcado en explorar las posibilidades del software de geometría dinámica en la enseñanza de la geometría y a conjeturar e investigar sobre las distintas maneras de introducirlo en las aulas y que sirva de herramienta útil y práctica para dar significado en la docencia de la geometría y Matemática en general.

Dentro de esta línea de investigación, ha resultado especialmente importante, tanto por el volumen de investigaciones, como por su importancia en el contexto

del aprendizaje de las matemáticas, la dedicada al análisis de los procesos de aprendizaje de la demostración matemática en contextos de software de geometría dinámica. (Gutiérrez, A. 2005)

Como he mencionado, los Sistemas de Geometría Dinámica (SGD) se han ido introduciendo progresiva y paulatinamente como recursos útiles en las aulas de educación secundaria desde su creación, consecuentemente, se han multiplicado los cursos y seminarios para profesores de secundaria en los centros de formación. Por causa de esta gran difusión, han ido evolucionando, siendo hoy en día una herramienta habitual en la labor docente.

“Los Sistemas de Geometría Dinámica (Cabri, Geometer's Sketchpad, The Geometry Inventor, The Geometric Supposers, etc.), aparecidos durante los años 80 y propuestos desde entonces como recursos y herramientas útiles para la enseñanza de la Geometría principalmente han tenido una gran difusión internacional, especialmente en los niveles de Primaria y Secundaria. Esta buena acogida ha hecho que se fueran desarrollando nuevas versiones, incluyendo cada vez más sofisticación en los contenidos, y ha propiciado la aparición de nuevos paquetes de software, con la promesa de superar los logros obtenidos por los anteriores”. (González-López, M.J., 2001).

Geogebra es un software libre, de matemática para educación en todos sus niveles. Reúne de forma dinámica, aritmética, geometría, álgebra y cálculo e incluso recursos de probabilidad y estadística, en un único conjunto tan sencillo a nivel operativo como potente. Ofrece representaciones diversas de los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas: vistas gráficas, algebraica general y simbólica, estadísticas y de organización en tablas, planillas y hojas de datos dinámicamente vinculadas.

También Geogebra tiene una faceta de software de algebra computacional o CAS. Estos programas de ordenador permiten el cálculo numérico y simbólico. Geogebra posibilita que introduzcamos directamente expresiones numéricas, puntos, vectores, funciones, ecuaciones de rectas, etc.

A partir de estas expresiones, es capaz de resolver los sistemas planteados, hallar las raíces de una función, o incluso puede representar la función derivada.

La entrada de los comandos u órdenes, se realiza a través de una ventana de una sola línea, situada horizontalmente en la parte inferior de la pantalla. Casi todos los comandos están en español. La salida se presenta en la llamada “ventana algebraica”, situada en la parte izquierda de la pantalla. Esta ventana algebraica no sólo es de salida, sino también de reentrada, es decir, podemos editar en ella cualquiera de los objetos (ecuaciones, funciones, vectores, etc.) previamente generados. (Losada, R., 2007)

3.1.2 Impacto del Dinamismo

Hemos definido ya al programa Geogebra como nuestro ejemplo de SGD, a través del cual los alumnos con acceso a un ordenador pueden crear y manipular sus propias construcciones geométricas. Dentro de este amplio abanico de sistemas que constituyen los SGD, la mayoría, como Geogebra, se limitan a trabajar y estudiar la geometría en el plano. El modus operandi es común a todos ellos y consiste en situar unos cuantos objetos geométricos (puntos, rectas, círculos, polígonos...) en la ventana gráfica. Es sobradamente conocida la importancia del sistema de representación que proporcionan los esquemas o dibujos.

“La visualización, es muy útil en el razonamiento matemático y debemos entrenar a los estudiantes para desarrollar su capacidad de visualización, pero ¿cuál es su papel en el aprendizaje de las matemáticas?”

Según la literatura, distingue varias funciones de las representaciones gráficas en el proceso de resolución de problemas:

- *Ilustrar el enunciado del problema.*
- *Resumir informaciones (por ejemplo, “la representación gráfica de la función...”, “la figura de un problema de Geometría...”).*

- *Estructurar el pensamiento (esquemas conjuntistas, tablas de doble entrada, diagramas en árbol).*
- *Ayudar a conjeturar (dibujos geométricos).*
- *Ayudar a probar (contra-ejemplos, dibujos geométricos...).*”

(Ibañes, M. y Ortega, T., 1998).

Los objetos iniciales del sistema, son libres, es decir, independientes y podremos ir añadiendo más durante el proceso de construcción de nuestro sistema. Así mismo y como ya he mencionado en el punto anterior, estos objetos podrán ser editados sin ningún tipo de problema, con posterioridad a su creación. Basándonos en nuestros objetos iniciales, podemos agregar nuevos objetos geométricos dependientes de ellos, como puntos medios, mediatrices y lugares geométricos en general.

También podemos realizar comprobaciones, como pueden ser mediciones sobre los objetos ya construidos e incluso usar estas mediciones para la creación de nuevos objetos adicionales.

En cualquier momento podremos editar, bastará con resituar los puntos de partida, es decir, modificar las condiciones iniciales, para visualizar y analizar en consecuencia, los cambios que produce esta nueva ubicación en toda la construcción de forma global. Como ya he mencionado, todos estos procesos se realizan, fundamentalmente, con pulsaciones y arrastrando el ratón.

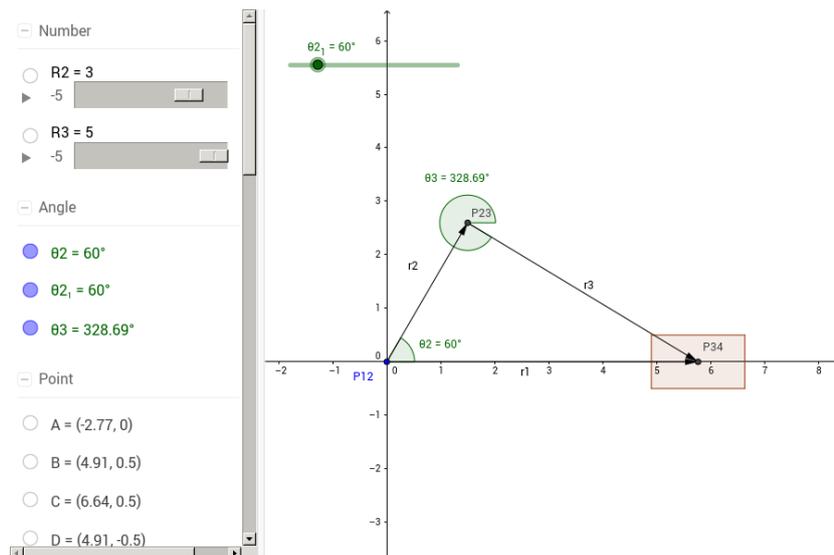


Figura 1. Imagen mecanismo biela manivela.

Un buen ejemplo de aplicación del Dinamismo, podemos verlo en la construcción formada por estas barras cinemáticas de la *Figura 1*, a modo de mecanismo de biela-manivela, debidamente colocadas en el lugar adecuado y estableciendo relaciones entre ellas, fácil e intuitivamente los alumnos pueden simular el movimiento real del mecanismo.

El mecanismo biela-manivela, es un sistema cinemático creado para transformar un movimiento giratorio en uno rectilíneo alternativo y viceversa, es decir, que es capaz de funcionar también a la inversa, transformando un movimiento rectilíneo alternativo en uno de rotación.

Muchas construcciones dependen de una serie de parámetros ocultos, predefinidos por el programador, por lo que la construcción adquiere mayor libertad y consistencia.

En este tipo de programas existe el riesgo de que una serie de pasos que teóricamente nos debería devolver a la misma posición inicial no lo consiga, pero este problema parece estar resuelto en Geogebra.

“La estética es muy importante en geometría, en donde la belleza de las formas y sus propiedades han llamado la atención del mundo intelectual desde hace siglos. Sin llegar a la calidad excepcional de los mejores programas de

representación de gráficos vectoriales, Geogebra ofrece una estética digna. Dispone de varios tipos de estilos aplicables a los objetos, como grosor, color y transparencia.

Geogebra también permite importar imágenes (gif, jpg, tif o png) y tratarlas como mapas de bits. Esto significa que podemos usar fotos, patrones visuales o dibujos no sólo para integrarlos en el escenario (como imagen de fondo, por ejemplo) sino como propios objetos geométricos susceptibles de transformaciones (traslación, homotecia, reflexión, rotación o distorsión). Las imágenes importadas también disponen de índice de transparencia.” (Losada, R. 2007).

La utilización más frecuente de la Geometría Dinámica en la clase de matemáticas se hace por dos vías principalmente:

1. Por los alumnos que estudian matemáticas utilizando el ordenador como si fuera una herramienta de dibujo para ayudarse en la resolución de problemas, para el desarrollo en sus proyectos de investigación o simplemente para seguir correctamente lecciones ya diseñadas previamente.
2. Por el profesor para realizar sus explicaciones magistrales mediante presentaciones de conceptos y/o procedimientos (generalmente con ayuda de applets de Geogebra) a través de un proyector conectado a su ordenador. (Mora, J.A., 2007).

Actualmente tenemos a nuestra disposición una extensa variedad de ejemplos en varias publicaciones contrastadas de Internet, donde la utilización de Geogebra que puede sernos de mucha utilidad para preparar adecuadamente nuestras clases de matemáticas y puede valerlos así de Geogebra como herramienta docente en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

“Los programas de geometría dinámica son útiles para que el alumno descubra por sí mismo conceptos y procedimientos mediante la exploración de situaciones

prácticas. El problema es que en muchos casos, basta con una acción de ratón para que se desvelen todas las propiedades de la figura y ya no haya que pensar más: la imagen es muy poderosa y nos convence.

Desde ese punto de vista el trabajo del profesor consiste en convencer a los estudiantes de que deben pensar antes de actuar”. (Mora, J.A., 2007).

Con frecuencia, la secuencia de trabajo que se reproduce en una clase “típica” de matemáticas es:

- *Haz.*
- *Discute.*
- *Descubre.*

Pero cuando el alumno piensa de antemano en la situación, la planifica y analiza las distintas posibilidades a su alcance, y es capaz de imaginar lo que va a ocurrir a continuación, entonces la secuencia correcta podría pasar a ser la siguiente:

- *Discute.*
- *Haz.*
- *Descubre.*

Aunque tal vez la secuencia más interesante podría ser la siguiente secuencia:

- *Discute.*
- *Descubre.*
- *Haz.*

Cuando lo que se quiere es que genere su hipótesis y después la confirme o no, pero siempre a través de sus propias ideas. (Mora, J.A., 2007).

“Uno de los objetivos fundamentales de la enseñanza de la Geometría es favorecer el pensamiento visual, pero no en oposición al pensamiento analítico, sino integrando ambos en un plan de colaboración para obtener una simbiosis que, de forma global, favorezca el desarrollo del pensamiento matemático”. (Ibañes, M. y Ortega, T., 1998).

3.1.3 Aspectos cognitivos

Resulta importante hacer un pequeño análisis sobre algunos de los aspectos que intervienen en el proceso de generación de conocimiento en los alumnos. En el proceso educativo intervienen dos aspectos tan fuertemente relacionados que en la mayoría de los casos tienden a ser considerados equivalentes, como son la enseñanza y el aprendizaje.

Cuando hablamos de *aprendizaje* hacemos referencia a lo que se aprende y de qué forma se aprende, mientras que la *enseñanza* se centra en los procesos utilizados por un agente externo al alumno (podríamos ser por ejemplo nosotros mismos en nuestro rol de profesor) para que el aprendizaje se genere.

Si se trata de establecer un marco de referencia desde una perspectiva teórica para el análisis de los procesos de enseñanza-aprendizaje, resulta imprescindible contemplarlos desde el ámbito de las Ciencias de la Educación, a saber, la Psicología y la Pedagogía, y desde el de la propia materia estudiada, las Matemáticas. (Font Moll, V., 1994).

Aprendizaje

La *Psicología del Desarrollo* estudia el desarrollo humano, es decir, los cambios que se producen en el individuo y las características que permanecen estables, y dentro de ella podemos encontrar dos teorías del aprendizaje, el conductismo y el constructivismo. En cuanto a la primera de ellas, el *conductismo*, este defiende que los cambios que se producen en la conducta de un individuo son debidos al aprendizaje y no tiene en cuenta los procesos cognitivos. El hombre se presenta como un organismo pasivo, que únicamente reacciona a los estímulos del entorno. Aunque uno de sus representantes más conocidos es Paulov, con su condicionamiento clásico, es importante destacar el condicionamiento instrumental u operante de Skinner, quien afirma que la conducta depende de las consecuencias que esta provoca y está orientada a la consecución de un resultado. Es interesante por la teoría de reforzadores que

implementa (refuerzos/castigos positivos/negativos), y se utiliza en el aula de una manera más o menos consciente.

Pero a lo que se pretende aproximarse es a la segunda, el *constructivismo*. En este caso, se entiende que las modificaciones de las conductas son provocadas por cambios en el conocimiento y en la capacidad intelectual de la persona. Tienen en cuenta los procesos cognitivos y consideran al hombre como un organismo activo, protagonista de la construcción de su conocimiento como resultado de la interacción y elaboración de la información que recibe del entorno. Podemos destacar algunos autores importantes como Piaget, quien preconiza que el origen de la inteligencia está en la acción; o Vygotski, con su modelo social y su denominada “Zona de Desarrollo Próximo” (ZDP), en la que se basan las técnicas de andamiaje y tutoría.

Estos autores defienden el hecho de aprender a aprender, y que el alumno sea autónomo y capaz de autorregularse con el apoyo de la figura del profesor como mediador, siendo consciente de sus propios procesos cognitivos. (Ileana Enesco, 2001).

Desarrollo cognitivo en la adolescencia

No podemos olvidar que los alumnos con los que vamos a trabajar en las aulas de secundaria, se encuentran en plena adolescencia, etapa en la que producen sustanciales cambios en múltiples facetas de sus vidas, tanto en aspectos físicos, como sociales, emocionales, etc...

Estos cambios dan lugar a diversos desarrollos que se van produciendo en el adolescente de manera paralela, como son el desarrollo físico, cerebral, de la personalidad y socio-emocional.

Los adolescentes experimentan profundos cambios intelectuales, incluso llegando a mejorar sus habilidades cognitivas como puedan ser la memoria, la atención, el propio lenguaje, comenzando así mismo a conformar su pensamiento social, es decir, todo aquello que tiene que ver con la empatía, la identidad y el juicio moral.

Además, empieza a desarrollar procesos metacognitivos y las denominadas funciones ejecutivas (actualización, inhibición, flexibilidad, planificación y toma de decisiones). Entre los cambios fundamentales que se producen encontramos:

- Capacidad de pensar en abstracto y despegarse de la realidad.
- Capacidad de formular hipótesis, utilización del método hipotético-deductivo para evaluar alternativas.
- Capacidad para concebir lo posible, entendiendo la realidad como una opción más.
- Uso de la combinatoria, organizando todos los elementos.
- Uso de la lógica proposicional y desarrollo del lenguaje complejo.

Así mismo, los rasgos cognitivos que predominan en la personalidad adolescente son la tendencia a discutir y la indecisión, el egocentrismo, entendiéndose a ellos mismos como el centro de atención, seres únicos y a salvo de todo riesgo.

El control y supervisión de todos estos cambios no resulta banal, ya que podrían derivar en problemáticas más complejas y graves como los trastornos depresivos, suicidio, trastornos alimenticios o el consumo de sustancias.

Siendo plenamente consciente de todo lo anterior, la planificación didáctica se antoja como la principal competencia del profesor de Matemáticas, es decir, *saber qué enseñar y cómo enseñarlo*.

En cuanto a qué enseñar, la respuesta son las llamadas Matemáticas escolares, que son el resultado de la transposición didáctica del conocimiento técnico que posee el profesor, siempre tratando de ser consecuente a las líneas docentes trazadas en la legislación vigente y lo estipulado en los curriculum de cada curso.

Por el contrario, para decidir cómo enseñarlo el docente debe recurrir a sus competencias didácticas para diseñar la unidad didáctica en cada caso, la cual intentará aplicar satisfactoriamente en el aula.

Una herramienta de planificación eficaz en este caso es el *análisis didáctico*, un procedimiento cíclico que se estructura en cuatro fases:

1. Análisis del *conocimiento*: definir contenidos, objetivos y competencias.
2. Análisis *cognitivo*: anticipar la respuesta de los alumnos.
3. Análisis de *instrucción*: diseño de la acción didáctica.
4. Análisis de la *actuación*: verificación de lo conseguido. Punto de partida del tema siguiente.

(Ileana Enesco, 2001).

3.2 Trigonometría.

El origen de la palabra Trigonometría proviene de los términos griegos, "*trigonos*" (triángulo) y "*metros*" (medida).

La trigonometría es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos, siendo su significado etimológico "medida de triángulos".

Se divide en dos vertientes:

- *Trigonometría plana*: Se ocupa de las figuras bidimensionales, o sea, las contenidas en un plano (2D).
- *Trigonometría esférica*: Se ocupa de los triángulos que forman parte de la superficie esférica, (3D).

El estudio de la trigonometría es muy interesante ya que permite resolver una gran cantidad de situaciones y cuestiones de la vida real, resultando capital para la resolución de problemas fundamentados en cuestiones geométricas y de cálculo de distancias. Históricamente, una de sus primeras aplicaciones fue en el ámbito de la astronomía, la navegación y la geodesia; todos ellos, produciéndose en situaciones en las que no es posible hacer mediciones directamente o donde las distancias no son alcanzables físicamente por el hombre.

En el campo de la Física, así mismo, se realizan otras aplicaciones interesantes de la trigonometría o en la propia Ingeniería (en casi todas sus ramas), siendo muy importante en el estudio de fenómenos cíclicos, como es para la ingeniería eléctrica, el flujo de corriente alterna.

“En la E.S.O. los alumnos han ido adquiriendo conocimientos geométricos en cada curso. Ya desde 1º se intenta que conceptos como ángulos, rectas, mediatriz, bisectriz, relaciones angulares, ángulos en polígonos, simetrías en figuras planas, triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares, circunferencia, teorema de Pitágoras, teorema de Thales, poliedros, áreas, volúmenes, etc. sean familiares para los alumnos. Pero no será hasta 4º curso de la E.S.O. cuando los alumnos vean en qué consiste la trigonometría. Pronto descubrirán la utilidad de la misma para todo tipo de cálculos geométricos como la obtención de áreas, medidas de lados y ángulos en figuras geométricas, hallar tamaños de manera indirecta, etc. Posteriormente, en Bachillerato, los alumnos continuarán ampliando sus conocimientos y aplicaciones sobre la trigonometría, tal y como viene recogido en los currículos vigentes”. (Flores Gil, F.L., 2008)

3.2.1 Repaso histórico. De la antigüedad hasta nuestros días.

Uno de los objetivos de la enseñanza de las Matemáticas, es la integración de estas dentro de la cultura del alumno, desde un punto de vista histórico, considerando su papel en el desarrollo de la sociedad actual.

Pero, ¿cómo podemos incorporar la Historia de las Matemáticas en el aula? He aquí algunas ideas:

- Hacer descubrir a los alumnos la relación de las Matemáticas con la cultura de la época y cómo ambas han ido evolucionando y nutriéndose una de la otra, dando respuesta a los problemas y a las necesidades de la sociedad. Dar a conocer la Historia a los alumnos puede favorecer el

desarrollo de su juicio crítico en los problemas que se plantean en su vida diaria.

- Utilizar los grandes problemas matemáticos para contextualizar la introducción de ciertos temas. Resulta fundamental hacer ver a los alumnos que las Matemáticas son una ciencia en constante evolución y que son creadas por y para la sociedad.
- Tratar de “humanizar” las Matemáticas a través de la vida de los principales matemáticos, con el fin de acercar a las personas y jugar en un plano más afectivo. Es decir, dar a conocer la época en la que vivieron, las vicisitudes que sufrieron, los problemas de distinta índole a los que tuvieron que hacer frente para desarrollar su trabajo...
- Abordar la evolución a lo largo de la historia de los conceptos y símbolos que se utilizan actualmente y que hoy son objeto de estudio.

En nuestro tema en particular, veremos que los comienzos de la trigonometría se remontan a las matemáticas de la antigüedad. A continuación, haré un breve repaso sobre su evolución por los distintos pueblos y culturas donde se ha ido desarrollando a lo largo de la Historia.

Babilonia y Egipto

Los babilonios y egipcios, hace ya más de 3.000 años, empleaban los ángulos de un triángulo y las razones trigonométricas para realizar medidas con aplicaciones en la agricultura. Los egipcios, se ayudaron de la trigonometría en la construcción de sus famosas pirámides.

También se aplicaron en los primeros estudios de astronomía para el cálculo de la posición de cuerpos celestes y la predicción de sus órbitas, en los calendarios y el cálculo del tiempo, y por supuesto en navegación para mejorar la exactitud de la posición y de las rutas.

Fueron los egipcios quienes establecieron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos, criterio que se ha mantenido hasta la actualidad.

Grecia antigua

Los conocimientos de los pueblos anteriores pasaron a Grecia, donde destacó el matemático y astrónomo Hiparco de Nicea en el S.II, a.C, siendo uno de los principales desarrolladores de la trigonometría. Hiparco construyó las tablas de “cuerdas” para la resolución de triángulos planos, que fueron las precursoras de las tablas de las funciones trigonométricas de la actualidad. En ellas iba relacionando las medidas angulares con las lineales.

Para confeccionar dichas tablas fue recorriendo una circunferencia de radio r desde los 0° hasta los 180° e iba apuntando en la tabla la longitud de la cuerda delimitada por los lados del ángulo central y la circunferencia a la que corta. Esa tabla es similar a la moderna tabla del seno.

No se sabe con certeza el valor que usó Hiparco para el radio r de esa circunferencia, pero sí se conoce que 300 años más tarde el astrónomo alejandrino Tolomeo utilizó $r = 60$, ya que los griegos adoptaron el sistema numérico sexagesimal (base 60) de los babilonios.

Tolomeo incorporó también en su reputado libro de astronomía “*Almagesto*” una tabla de cuerdas con un error menor que $1/3.600$ de unidad. Junto a ella explicaba su método para compilarla, y a lo largo del libro daba bastantes ejemplos de cómo utilizar la tabla para calcular los elementos desconocidos de un triángulo a partir de los conocidos.

Además de eso Tolomeo enunció el llamado “Teorema de Menelao”, utilizado para resolver triángulos esféricos, y aplicó sus teorías trigonométricas en la construcción de astrolabios y relojes de sol. La trigonometría de Tolomeo se empleó durante muchos siglos como introducción básica para los astrónomos.

India

Al mismo tiempo que los griegos, los astrónomos de la India desarrollaron también un sistema trigonométrico, pero basado en la función seno en vez de en cuerdas. Aunque, al contrario que el seno utilizado en la actualidad, esta función no era una proporción, sino la longitud del lado opuesto a un ángulo en un triángulo rectángulo de hipotenusa dada. Los matemáticos indios utilizaron diversos valores para esa función seno en sus tablas.

Arabia

A finales del siglo VIII los astrónomos árabes continuaron con los estudios de trigonometría heredados de los pueblos de Grecia y de la India, pero prefirieron trabajar con la función seno.

De esta forma, a finales del siglo X ya habían completado tanto la función seno como las otras cinco funciones trigonométricas: coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. También descubrieron y demostraron teoremas fundamentales de la trigonometría, tanto para triángulos planos como esféricos, donde incorporaron el triángulo polar. Estos matemáticos árabes fueron quienes sugirieron el uso del valor $r = 1$ en vez de $r = 60$, lo que dio lugar a los valores modernos de las funciones trigonométricas. Todos estos descubrimientos los fueron aplicando a la astronomía, logrando medir el tiempo astronómico, e incluso los utilizaron para encontrar la dirección de la Meca, tan fundamental a la hora de realizar las cinco oraciones diarias requeridas por la ley islámica orientados en esa dirección.

Además, el primer estudio de la trigonometría plana y esférica como ciencias matemáticas independientes lo realizó el gran astrónomo Nasir al-Din al-Tusi en su obra "Libro de la figura transversal".

Occidente

La trigonometría se introdujo en occidente sobre el siglo XII a través de traducciones de libros de astronomía arábigos. En Europa fue el matemático y astrónomo alemán Johann Müller, más conocido como Regiomontano, quien realizó el primer trabajo realmente importante en esta materia, llamado “*De Triangulis*” (1533).

Durante el siguiente siglo otro astrónomo alemán, Georges Joachim, conocido como Retico, introdujo el concepto moderno de funciones trigonométricas como proporciones en vez de como longitudes de ciertas líneas.

Ya en el siglo XVI el matemático francés François Viète incorporó en su libro “*Canon Mathematicus*”, (1579), el triángulo polar en la trigonometría esférica, y encontró fórmulas para expresar las funciones de ángulos múltiples en función de potencias de las funciones de los ángulos simples. Desde entonces, la trigonometría como estudio de las líneas circulares, y el álgebra de los polinomios, se prestan mucho apoyo.

Trigonometría en tiempos modernos

A principios del siglo XVII se produjo un gran avance en los cálculos trigonométricos gracias al matemático escocés John Napier, que fue el inventor de los logaritmos.

También encontró reglas mnemotécnicas para resolver triángulos esféricos, y algunas proporciones para resolver triángulos esféricos oblicuos, llamadas analogías de Napier. Medio siglo después, el genial Isaac Newton inventó el cálculo diferencial e integral, logrando así representar muchas funciones matemáticas mediante el uso de series infinitas de potencias de la variable x . En la rama de trigonometría, Newton encontró la serie para el $\sin x$, y series similares para el $\cos x$ y la $\operatorname{tg} x$.

Con la invención del Cálculo, las funciones trigonométricas fueron incorporadas al Análisis, donde todavía hoy desempeñan un importante papel tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas.

Por último, en el siglo XVIII, el matemático suizo Leonhard Euler fue quien verdaderamente fundó la trigonometría moderna, definiendo las funciones trigonométricas mediante expresiones con exponenciales de números complejos. Esto convirtió a la trigonometría en sólo una de las muchas aplicaciones de los números complejos. De hecho, Euler demostró que las propiedades básicas de la trigonometría eran simplemente producto de la aritmética de los números complejos.

3.2.2 Curriculum y justificación.

Desde la legislación educativa de los últimos años se hace referencia a la importancia de tener en cuenta las diferencias individuales de los alumnos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, procurar la integración de las distintas experiencias y aprendizajes del alumno y saber adaptarlas a su ritmo de aprendizaje. Sin embargo, la realidad educativa es bien distinta, porque se siguen enseñando las matemáticas de un modo tradicional en el que predomina el uso del libro de texto como guía para que los niños trabajen, y en el aprendizaje sin relación con las vivencias diarias de los alumnos.

Los contenidos que dicta el curriculum para Cantabria en la asignatura de Matemáticas en 4º de ESO, concretamente en el bloque de geometría son los siguientes:

- *“Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes.*
- *Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos.*
- *Uso de la calculadora para el cálculo de ángulos y razones trigonométricas*

- *Resolución de triángulos rectángulos.*
- *Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.*
- *Iniciación a la geometría analítica en el plano: Coordenadas. Vectores. Ecuaciones de la recta. Paralelismo, perpendicularidad.*
- *Semejanza. Figuras semejantes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.*
- *Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.”*

(Decreto 38/2015, de 22 de mayo, que establece el currículo de Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria. 2005).

Así mismo se señalan los siguientes estándares de aprendizaje en lo que al bloque de geometría se refiere y en particular a los aspectos relacionados con trigonometría:

- *“Utilizar conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos.*
- *Utilizar las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas.*
- *Resolver triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones.*
- *Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características”.*

(Decreto 38/2015, de 22 de mayo, que establece el currículo de Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria. 2005).

3.2.3 Competencias Básicas.

Las competencias básicas (CCBB) son definidas por la OCDE entre los años 2000 y 2003 en el proyecto “Definición y Selección de Competencias” (DeSeCo) como *“la capacidad de responder a demandas complejas y llevar a cabo tareas diversas de forma adecuada. Supone una combinación de habilidades prácticas, conocimientos, motivación, valores éticos, actitudes, emociones y otros componentes sociales y de comportamiento que se movilizan conjuntamente para lograr una acción eficaz”*. (Pérez A., 2006)

Se trata por lo tanto de “saber hacer” en una gran variedad de contextos que abarca conocimientos, procedimientos y actitudes. Se separa por lo tanto de la concepción tradicional de la enseñanza basada en una separación en disciplinas o áreas de conocimiento. Pérez A. (2006) plantea que para que una competencia pueda ser considerada clave o básica debe resultar valiosa para la totalidad de la población, siendo sus características principales:

- *“Carácter holístico e integrado:* conocimientos, capacidades, actitudes y valores forman un conjunto inseparable.
- *Carácter Contextual:* las Competencias se concretan y desarrollan vinculadas a los diferentes contextos de aprendizaje. Es especialmente relevante en la Sociedad de la Información porque los escenarios de aprendizaje son muy diversos y las estrategias de selección de la información son imprescindibles ante el exceso de la misma.
- *Dimensión Ética:* las competencias se alimentan de las actitudes, valores y compromisos que el alumno va adoptando a lo largo de su vida. Este compromiso y motivación necesarios está relacionado con la idea del aprendizaje a lo largo de la vida.
- *Carácter Creativo de la transferencia:* la transferencia de una capacidad debe entenderse como un proceso de adaptación creativa a cada contexto, es decir, requiere una aplicación activa y reflexiva.
- *-Carácter Reflexivo:* las CCBB suponen un proceso permanente de reflexión para armonizar las intenciones con las posibilidades de cada contexto. Será necesario reconocer que en cada actuación y en cada

contexto los individuos y los grupos humanos desarrollan aspectos singulares de sus competencias difícilmente repetibles en otros.

- *-Carácter Evolutivo*: se desarrollan, perfeccionan, amplían o se deterioran y restringen a lo largo de la vida”.

La OCDE (2006) clasifica las CCBB en tres tipos de categorías distintas:

1. Competencia para utilizar herramientas de forma efectiva y eficaz:
 - a. Capacidad para usar el lenguaje, los símbolos y el texto interactivamente
 - b. Capacidad para usar conocimiento e información interactivamente
 - c. Capacidad para usar tecnología interactivamente.
2. Competencia para funcionar en grupos sociales heterogéneos:
 - a. Capacidad para relacionarse bien con los otros
 - b. Capacidad para cooperar
 - c. Capacidad para gestionar y resolver conflictos
3. Competencia para actuar de forma autónoma:
 - a. Capacidad para actuar dentro de un amplio panorama en situaciones complejas
 - b. Capacidad para elaborar, conducir y gestionar los propios planes de vida y proyectos personales
 - c. Capacidad para manifestar y defender derechos, intereses, límites y necesidades.

Es a partir del año 2004 cuando la Unión Europea (UE) se plantea la necesidad de establecer una serie de competencias clave para el aprendizaje que sirvieran como referencia para los sistemas educativos de los países miembros, entendiendo estas como un paquete multifuncional y transferible de conocimientos, destrezas y actitudes que todos los individuos necesitan para su realización y desarrollo personal, inclusión y empleo.

Las competencias propuestas por la UE en su Recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo, de 18 de diciembre de 2006, sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente (DOUE, 30 diciembre 2006) se aproximan más en su formulación a las áreas y materias tradicionales de los currículos escolares:

- 1) *Comunicación en la lengua materna*
- 2) *Comunicación en lenguas extranjeras*
- 3) *Competencia matemática y CCBB en ciencia y tecnología*
- 4) *Competencia digital*
- 5) *Aprender a aprender*
- 6) *Competencias sociales y cívicas*
- 7) *Sentido de la iniciativa y espíritu de empresa*
- 8) *Conciencia y expresión culturales*

En España se introducen las CCBB en el Real Decreto (RD) 1631/2006, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria (BOE 5 enero 2007). Los objetivos de esta incorporación son los siguientes:

- Integrar los diferentes aprendizajes, tanto los formales (incorporados a las diferentes áreas y materias) como los informales y no formales.
- Permitir a los estudiantes aglutinar sus aprendizajes, ponerlos en relación con distintos tipos de contenidos y utilizarlos de manera efectiva cuando sean necesarios en diversas situaciones.
- Orientar la enseñanza (identificar contenidos y criterios de evaluación imprescindibles) e inspirar las distintas decisiones relativas al proceso de enseñanza-aprendizaje.

Así pues, el enfoque educativo hacia CCBB supone un cambio en el papel que el alumnado desempeña en su aprendizaje, ya que debe gestionar su propia construcción del conocimiento y reflexionar sobre sus procesos de aprendizaje.

El propósito final es que, con el apoyo de su profesorado y demás agentes educadores, el alumno:

- Aprenda a pensar, a usar procesos creativos, críticos y reflexivos que le permitan cuestionar la información recibida. El alumnado adquiere competencia cuando es capaz de buscar, seleccionar y tratar la información recibida para crear conocimiento y aplicarlo.
- Adquiera un conocimiento global y contextualizado de los temas y problemas de la enseñanza, integrando los aprendizajes y afrontando las incertidumbres propias del conocimiento.
- Aprenda a convivir, participando activamente en un mundo globalizado y cambiante. El alumnado competente afrontará los retos y la responsabilidad de contribuir a la calidad y sostenibilidad de los entornos sociales y naturales, siendo solidario con los demás seres humanos.
- Adquiera una formación ética mediante un ejercicio constante de reflexión y práctica democrática. La finalidad de la educación será que el ciudadano sea capaz de ser autónomo, para afrontar retos y para responsabilizarse de los propios actos. Esto facilitará al alumnado la motivación para aprender a lo largo de toda la vida.

También debe cambiar el rol del profesorado de forma notable, incidiendo especialmente en las pautas de actuación en la práctica del aula, participando en contextos cada vez más abiertos e inclusivos, y más dispuestos a ofrecer al alumnado aprendizajes atractivos y funcionales.

La función del docente pasa de la mera transmisión a provocar la reconstrucción del conocimiento. El profesorado debe potenciar la reflexión crítica y el uso de los saberes adquiridos, siempre en contextos significativos para que los aprendizajes adquieran valor funcional.

En Cantabria se proponen en el RD 1631/2006 mediante el Decreto 57/2007 de 10 de Mayo por el que se establece el Currículo de la ESO en la Comunidad Autónoma de Cantabria:

Competencias del currículo.

- a. Comunicación lingüística.
- b. Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- c. Competencia digital.
- d. Aprender a aprender.
- e. Competencias sociales y cívicas.
- f. Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
- g. Conciencia y expresiones culturales.

3.2.4 Contribución de las Matemáticas a las competencias.

Las Matemáticas ocupan un lugar importante en la historia del pensamiento y de la cultura, además proporcionan una disciplina mental para el trabajo y contribuyen a desarrollar y cultivar las facultades del intelecto.

En la actualidad las Matemáticas se utilizan prácticamente en todos los aspectos de la actividad humana y son consideradas como un instrumento eficaz para el estudio y tratamiento de los fenómenos más diversos. Constituyen una herramienta potente para la construcción de modelos con los que estudiar, comprender, transmitir e incluso predecir hechos que tienen lugar en una gran variedad de campos.

El uso de herramientas tecnológicas tendrá un papel esencial tanto para la mejor comprensión de conceptos o en la resolución de problemas, como para contrastar con mayor rigor las hipótesis propuestas y presentar y comunicar los resultados obtenidos.

Además, estas herramientas contribuyen a la preparación para el aprendizaje a lo largo de la vida y apoyan el trabajo fuera del aula.

En 3º y 4º de ESO, el curriculum nos dice sobre el bloque de *Geometría*, que: ahonda en conceptos y procedimientos básicos de la geometría plana analítica para reconocer, medir, describir y analizar formas y configuraciones sencillas. Finaliza profundizando, con el uso de conceptos trigonométricos y problemas

métricos, y para ello nos señala que debemos incorporar las herramientas tecnológicas, dentro de la disponibilidad de cada Centro Educativo, para el desarrollo de las actividades, de forma que su uso ayude a la asimilación de conceptos.

La enseñanza de las Matemáticas persigue múltiples y diversos objetivos que podemos resumir en los siguientes:

- Aplicar adecuadamente herramientas matemáticas en diferentes situaciones de la vida cotidiana.
- Dotar a los alumnos de capacidades y estrategias para la resolución de cualquier tipo de problema de índole matemática.
- Integrar las matemáticas dentro de la cultura del alumno, desde un punto de vista histórico, y apreciando su papel en el desarrollo de la sociedad actual. Así mismo, dotarle de herramientas para apreciar el uso de las Matemáticas en el arte, la arquitectura, etc.
- Incorporar las Matemáticas, su modo de expresión y su razonamiento al lenguaje y modo de argumentación de la persona, para conseguir dotarle de un pensamiento crítico y reflexivo.
- Dotar al alumno de un cierto manejo de diferentes recursos informáticos en el ámbito de las Matemáticas, es decir, en el uso de calculadoras y programas informáticos útiles para la resolución de problemas.

Las Matemáticas como materia a estudiar dentro del recorrido académico del alumno, no solo contribuyen a la adquisición de la competencia matemática, sino que desde la asignatura se pueden trabajar las distintas competencias con la adecuada utilización de conocimiento transversales. Así, las Matemáticas contribuyen al trabajo del resto de competencias básicas de la siguiente manera:

- El estudio de formas geométricas y modelización, a la competencia del conocimiento e interacción con el mundo físico.
- Las herramientas tecnológicas, a la competencia digital.
- La expresión del lenguaje matemático y la resolución de problemas, a la competencia lingüística.

- La geometría como expresión artística, a la competencia cultural y artística.
- La resolución de problemas, a la competencia de aprender a aprender y autonomía e iniciativa personal.
- El análisis funcional y la estadística, a la competencia social y ciudadana.

4. PROPUESTA DE ACTIVIDADES

Entre las múltiples funciones de un profesor de secundaria, está la de plantear un entorno de trabajo enriquecedor y dinámico, apoyándose para ello en herramientas como puede ser el software Geogebra, modificando la forma en que se ejerce la actividad docente de la matemática respecto de la enseñanza tradicional de la trigonometría con lápiz y papel, ya que tiene unos claros condicionantes sobre las acciones de los alumnos y en consecuencia, influye en la adquisición de sus concepciones y en el aprendizaje que éstos realizan. El programa de geometría dinámica Geogebra tiene un potencial pedagógico inmenso, no sólo por la facilidad con la que se crean sistemas matemáticos complejos ni tampoco por la capacidad de que esos sistemas sean dinámicos, sino por el modo de llegar hasta ellos y descubrir cómo funcionan.

La forma óptima de usar este software es el diseño de tareas específicas en cada caso, que huyan del modelo mecánico al que estamos acostumbrados. Para poder crear tareas que ofrezcan este uso es imprescindible comprender los procesos, habilidades y capacidades que Geogebra pone en práctica.

Por otro lado San Martín Sicre, O. J. (2003) habla de *“la naturaleza abstracta de la Trigonometría que se manifiesta en varios aspectos que inciden de forma negativa en el aprendizaje, como por ejemplo los pocos recursos de representación gráfica que se usan para el tratamiento de los objetos matemáticos lo que limita la comprensión del alumno. Ya que al tratar el seno en las mayorías de las ocasiones se recurre a la representación como una razón, no se toma en cuenta otras formas de representarla”*.

En el libro *“Historia y Didáctica de la trigonometría”* (Flores Gil, F. L., 2008) se expone la necesidad, de que la trigonometría, al ser una rama muy técnica, *“debe ser tratada con especial cuidado por el profesorado, intentando siempre motivar y animar a los alumnos para que confíen en sus propias capacidades y hacerles ver el lado más práctico de la misma”*.

4.1 Objetivos

A la hora de desarrollar y preparar las actividades para la enseñanza de la trigonometría, se han de tener en cuenta los contenidos marcados por la legislación y el curriculum para, a partir de ahí, plantear nuestros propios objetivos. Los cuales podrían ser los siguientes:

- Identificar la semejanza entre figuras planas.
- Definir las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.
- Definir las razones trigonométricas de un ángulo agudo y de un ángulo cualquiera en la circunferencia unidad.
- Obtener las razones trigonométricas de un ángulo con la ayuda de la calculadora.
- Obtener un ángulo con la calculadora a partir de una razón trigonométrica de ese ángulo.
- Obtener el signo de las razones trigonométricas de un ángulo en función del cuadrante en el que se encuentre.
- Hallar las razones trigonométricas de un ángulo a partir de una de ellas.
- Resolver un triángulo rectángulo.
- Aplicar las relaciones trigonométricas para resolver problemas diversos: cálculo de distancias, de áreas, etc.

4.2 El Protagonismo de Geogebra

En relación con su aplicación sobre trigonometría y basándonos en lo expuesto por Losada, R. (2011), pasamos a describir algunas de las funcionalidades del programa y qué utilidad tiene en relación al aprendizaje de la trigonometría. Geogebra permite que los alumnos puedan:

- Visualizar conceptos abstractos y relaciones entre objetos. A través de actividades con Geogebra se pueden realizar construcciones que ayuden a visualizar los conceptos básicos de la trigonometría y sus propiedades tal y como son las razones trigonométricas. Además va a permitir ver la relación entre la definición analítica y geométrica de una forma más intuitiva ya que el programa permite modificar los datos y mover la figura al alumno. Esto sin duda supone una mejora en la comprensión de los conceptos.
- Representar gráficamente y relacionar. Uno de los problemas con los que se encuentran los alumnos se da a la hora de las representaciones gráficas. Los recursos tradicionales (lápiz, papel, pizarra tradicional, etc.) muchas veces son limitados y no permiten proyectar al alumno, impidiendo una buena comprensión. A través de las herramientas que ofrece Geogebra se pueden dibujar distintas funciones trigonométricas e incluso manipular con el cursor para ver su comportamiento con el cambio de valores.
- Experimentar con las matemáticas y ejemplos de uso. Geogebra permite incluir imágenes reales y de esta manera analizar las relaciones trigonométricas que se puedan observar. Con esta herramienta atendemos a la justificación de la trigonometría, a la experimentación y creatividad. Lo que supone un aliciente para los alumnos.

4.3 Metodología

Una de las grandes virtudes de la utilización de esta herramienta es su faceta personal y creativa, pues permite la creación de diseños personales y adaptables a los conocimientos adquiridos. También es importante su carácter gradual, ya que el autoaprendizaje se realiza a través de actividades ordenadas y estructuradas de forma secuencialmente progresiva.

En la sección 4.4, se puede ver que algunas actividades y dinámicas de clase, están propuestas para su trabajo en grupo. Estas actividades han sido especialmente diseñadas para favorecer la cooperación y estimular la comunicación entre el alumnado. Sin embargo, todas ellas podrían realizarse perfectamente de forma individual por los alumnos.

“La posibilidad de crear diseños personales potencia los métodos del aprendizaje constructivo. Cada alumno o alumna no sólo participa de las experiencias de los demás a través de las actividades en grupo, sino que toma sus propias decisiones acerca del uso de la aplicación en los momentos importantes. Esto permite, además, una gran flexibilidad en la adaptación a los conocimientos previos y a las habilidades adquiridas”. (Losada, R., 2011).

Tras lo visto hasta este punto resulta adecuado e importante, la necesidad de justificar e introducir la trigonometría de una forma adecuada para favorecer el aprendizaje del alumno. Para ello el profesor debe enlazarlo con el estudio de los triángulos visto en la geometría de 3º ESO, haciendo un repaso para que el alumno vea una continuidad y relación, y no un tema totalmente nuevo sin nexo con lo estudiado hasta ahora. Para la introducción y justificación se podría hacer un recorrido desde las primeras aplicaciones de la trigonometría hasta la actualidad a través de alguna presentación multimedia preparada por el profesor, apoyándose por ejemplo en antecedentes históricos (§“3.2.1”).

Una vez hecha la presentación y justificación adecuada, pasamos al desarrollo propio de la trigonometría. Éste debe ser esencialmente analítico y bien ordenado y estructurado. Para llevar a cabo este punto el profesor debe establecer los contenidos concretos y los objetivos que quiere cubrir en el tema.

A partir de la legislación vigente y lo redactado por Flores Gil, F. L., (2008) consideramos los contenidos y objetivos descritos anteriormente (§ “4.1”).

Para llevar a cabo el desarrollo es importante que haya preparación por parte del profesor siguiendo una estructura que permita al alumno seguir una secuenciación lógica de los conceptos y los contenidos.

En la etapa que podríamos denominar como síntesis, se presenta tanto la conclusión como las aplicaciones concretas del tema. Es importante que el docente presente a los alumnos una síntesis del tema que puede ser a modo de esquema a partir de la estructura seguida en clase. Y plantear las aplicaciones sobre las que se va a evaluar el tema.

A continuación paso a describir como podría ser una sesión “tipo” para desarrollar en un aula cualquiera de 4º de ESO con la ayuda de Geogebra. Como ya he expuesto varias veces a lo largo este trabajo, he elegido este tema a tratar porque, es uno de los que mayor dificultad presenta para los alumnos, por lo que podemos desarrollar varios ejemplos concretos del uso de Geogebra para facilitar la comprensión de las razones trigonométricas y demás conceptos a enseñar. A continuación describo brevemente dicha sesión:

Primeramente, habría una exposición magistral. Toda la sesión o clase, se desarrollaría en el aula de informática (para que el mayor número posible de alumnos, disponga de un equipo informático para su uso individual) y tendrá una duración aproximada de 15 minutos.

En ella nos ayudaremos de todos los medios a nuestro alcance, informáticos y tradicionales, tratando de hacer la exposición lo más didáctica posible, siempre con la premisa de relacionar los conceptos trigonométricos con sus representaciones gráficas.

Seguidamente pasaremos al desarrollar la actividad con Geogebra, cuya duración total aproximada será de 30 minutos. Esta parte de la sesión comenzará con la explicación del profesor en qué va a consistir la actividad. Se procederá a la entrega del guion o enunciado de la actividad, que se leerá en voz alta para aclarar las dudas que vayan surgiendo relacionadas con el enunciado. A

continuación se procederá a la realización de la actividad propiamente dicha, que partirá de un archivo desarrollado previamente por el docente en Geogebra y sobre el cual los alumnos tendrán que dar respuesta a partir de lo observado y experimentado a través del mismo a una serie de preguntas en el guion.

Los minutos finales de la sesión, servirán para poner en común las conclusiones, sucesos observados tras la experimentación, conjeturas de los alumnos, etc., y tratar de afianzar los conceptos y aprendizajes más relevantes.

4.4 Ejemplos de actividades a través de Geogebra

A continuación se describen algunos ejemplos preparados con Geogebra que servirán de apoyo a las clases de trigonometría, donde los alumnos podrán servirse del dinamismo del programa para experimentar, generar y descubrir sus propias conjeturas.

Los alumnos tendrán que descargarse el archivo generado con Geogebra del enlace facilitado por el profesor y sobre el que se va a desarrollar la actividad.

Siguiendo observamos una imagen de un documento Geogebra donde los alumnos podrán ver como varían las razones trigonométricas del ángulo alfa (α), unas en función de otras.

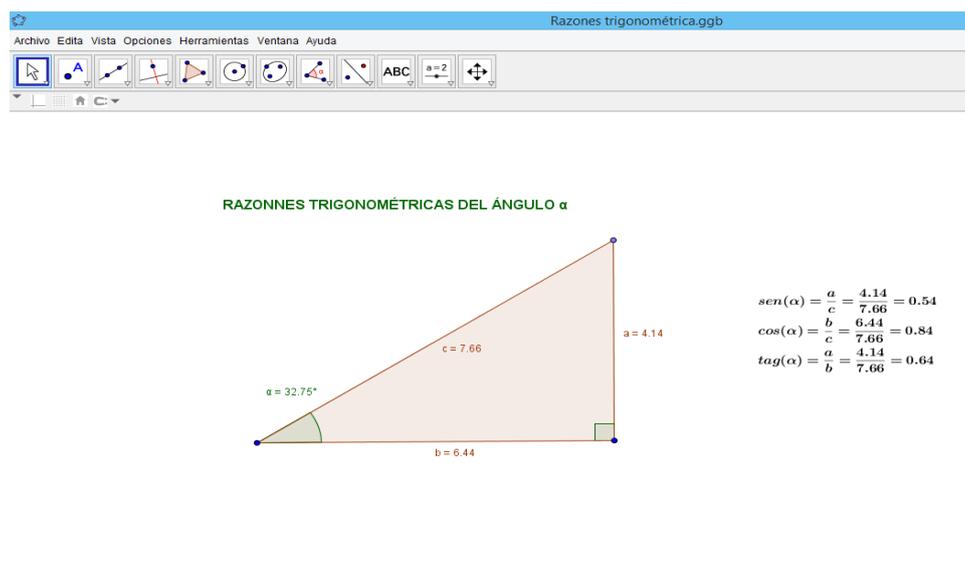


Figura 2. Razones Trigonómicas

En este archivo el alumno puede manipular los vértices del triángulo, lo que le va a permitir aumentar el tamaño del triángulo, y el ángulo α , pero manteniéndose en todo momento la relación que determina el ángulo recto.

De esta forma el alumno puede experimentar y relacionar los cambios de tamaño, aumentando o disminuyendo los lados, y de forma del triángulo, variando el valor de α , con los valores de las razones trigonométricas.

Con el ejercicio de la *Figura 3*, por ejemplo, podremos recordar la semejanza y el teorema Tales.

Los alumnos pueden mover los puntos A y A' (están superpuestos), C y C', y el punto B, donde con las restricciones marcadas, observarán los cambios en distancias y ángulos y podrán conjeturar y demostrar así, que ambos triángulos formados, son siempre semejantes, ya que las razones de semejanza A/A', B/B' y C/C', son iguales entre sí, a pesar de los cambios de longitudes y ángulos que tomemos.

Semejanza

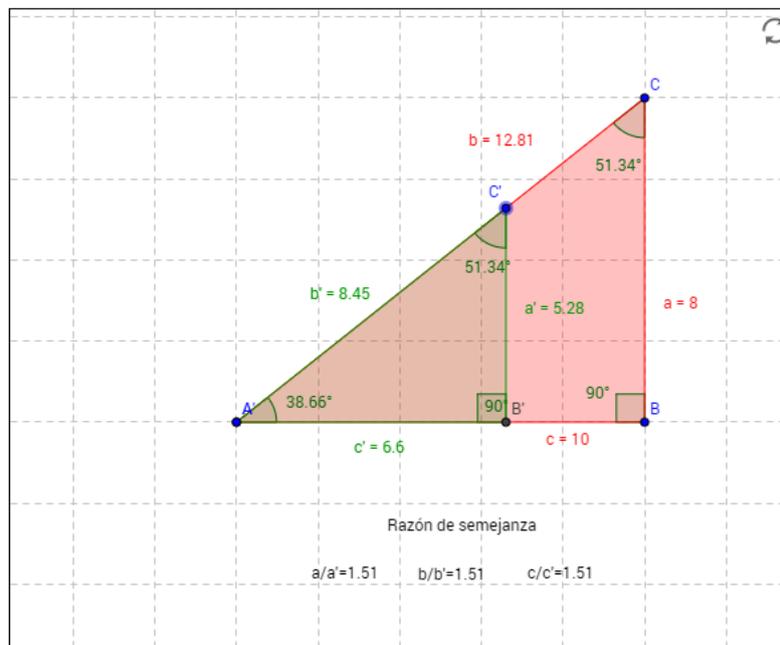


Figura 3. Teorema Tales. Razón de Semejanza.

A continuación muestro otro ejemplo más analítico, donde directamente los alumnos pueden introducir un valor numérico en el deslizador del valor del ángulo y del radio de la circunferencia generada y ver la representación gráfica y a la derecha la variación de valores de las razones seno, coseno y tangente del ángulo α .

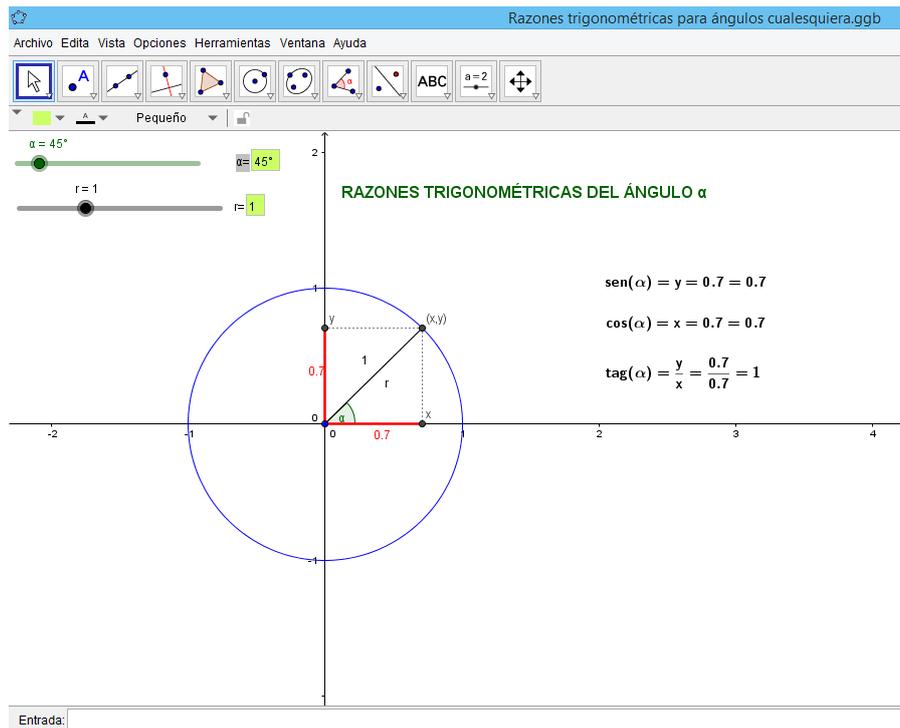


Figura 4. Razones Trigonómicas. Ángulo 0° - 90°

En el guion de esta actividad, podríamos plantear a los alumnos que razonaran las siguientes cuestiones una vez hayan experimentado con el archivo:

Visualiza sobre la circunferencia goniométrica los ángulos -30° , -45° , -60° , y -90° .

- *¿Cuál es el valor de sus razones trigonométricas?*
- *¿Qué relación hay entre las razones trigonométricas de ángulos opuestos?*
- *Halla el valor de $\text{sen } 290^\circ$, $\text{cos } 315^\circ$, $\text{tg } 350^\circ$ y $\text{sen } 330^\circ$.*
- *¿Cómo se pueden hallar las razones trigonométricas de un ángulo del cuarto cuadrante a partir de las de los ángulos del primero?*

Con estas aplicaciones, los alumnos se pueden hacer una composición mental más cercana gracias al poder de la visualización de los conceptos previamente explicados por nosotros los docentes en la primera parte de la sesión.

Dentro del mismo archivo, deberán ver y notar sus conclusiones, para ello, en el enunciado del guion del que dispondrán, se les plantearán cuestiones sobre ángulos, signos de las razones y sus variaciones respecto al cuadrante que analicemos. Arrastrando el deslizador pueden probar y descubrir que ocurre con las razones en función del ángulo, como muestro en la siguiente imagen.

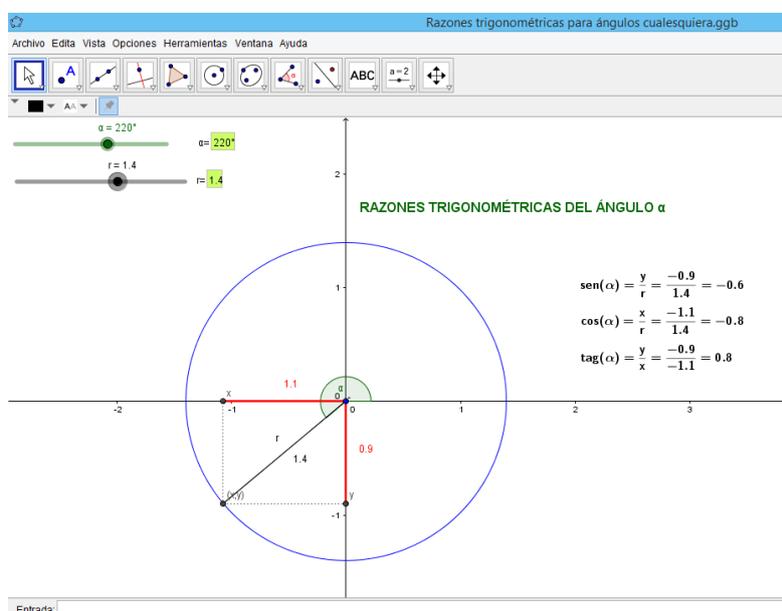


Figura 5. Applet Razones Trigonométricas. Ángulo 180° - 270°

En la medida de lo posible, y en mayor o menor grado en función de cada alumno, intentaremos dar un grado de autonomía al alumno para que experimente, guiándole en la búsqueda de relaciones y verificación de sus propias hipótesis previamente planteadas.

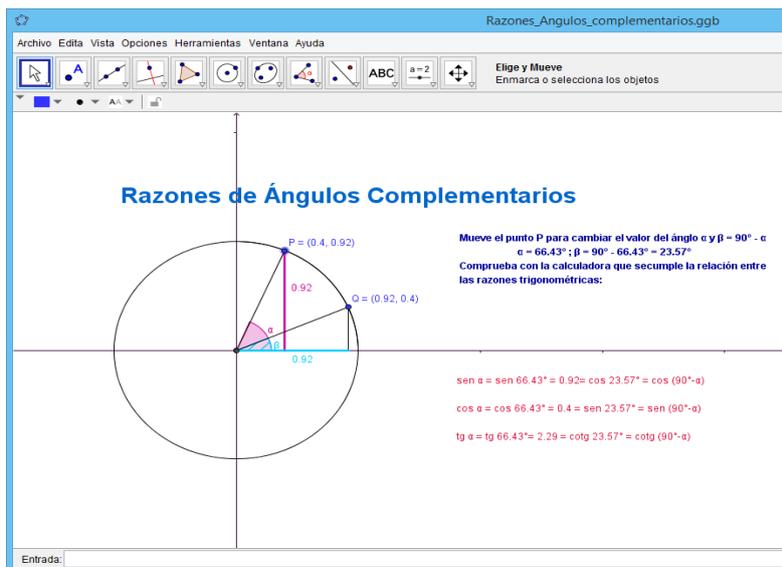


Figura 6. Razones Trigonométricas de Ángulos Complementarios.

Para ayudarnos en el proceso de enseñanza- aprendizaje de las razones trigonométricas de ángulos complementarios, podríamos cuestionar a los alumnos a través del guion que les entregaremos lo siguiente:

- ¿Qué relación hay entre los dos ángulos sombreados de la figura?
- ¿Y entre las coordenadas de los dos puntos P y Q?
- ¿Qué relación hay entre las razones trigonométricas de los ángulos 30° y 60° ?
- ¿Y entre las de los ángulos 15° y 75° ?
- ¿Qué se cumple entre las razones trigonométricas de ángulos complementarios?

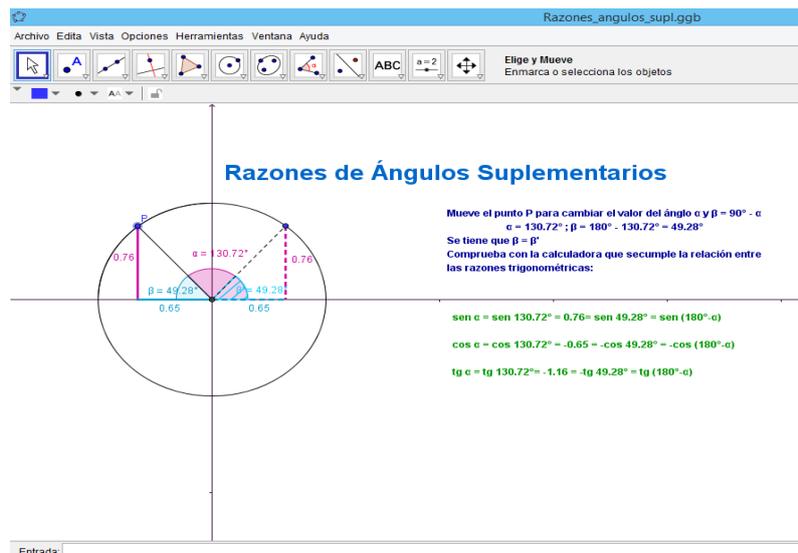


Figura 7. Razones Trigonómicas de Ángulos Suplementarios

Para el archivo de Geogebra que represento en la *Figura 7*, podríamos plantear cuestiones relativas a las razones trigonométricas de ángulos suplementarios como son:

Visualiza sobre la circunferencia goniométrica los siguientes ángulos: 120° , 135° , 150° , y 180° .

- ¿Cuál es el valor de sus razones trigonométricas?
- ¿Qué relación hay entre las razones trigonométricas de ángulos suplementarios?
- Halla el valor de $\text{sen } 170^\circ$, $\text{cos } 115^\circ$, $\text{tg } 135^\circ$ y $\text{sen } 150^\circ$.
- ¿Cómo se pueden hallar las razones trigonométricas de un ángulo del segundo cuadrante a partir de las de los ángulos del primero?

Una forma novedosa de explicar el teorema de Pitágoras para los alumnos, sería gráficamente. Es decir, trasladando los conceptos explicados de forma escrita y verbal, al modo gráfico. De forma que puedan ver la relación existente entre los lados de un triángulo rectángulo de una forma totalmente visual y experimenten con el deslizador animado de Geogebra, como la ecuación se verifica pase lo que pase con la longitud de los lados del triángulo y su orientación.

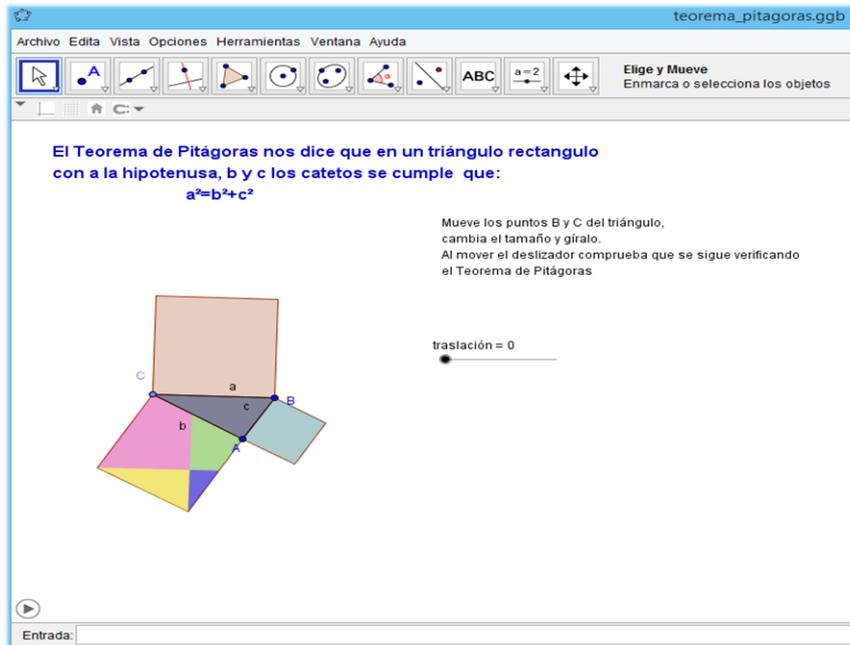


Figura 8. Representación gráfica animada del Teorema de Pitágoras

Un ejercicio donde podemos sacar el máximo partido al dinamismo característico de Geogebra es el en siguiente ejemplo. Nos será de gran utilidad a la hora de explicar todas las razones trigonométricas y ver como varían unas en función de otras y sus relaciones, de tal forma que los alumnos puedan descubrir por si mismos dichas relaciones variando el ángulo alfa (α), arrastrando el punto "C" de la construcción a través de la circunferencia. La visualización será de gran ayuda para los alumnos a la hora de interiorizar los conceptos trigonométricos, siendo el objetivo de esta herramienta, el que puedan construir deductivamente ellos solos todas las razones y sus relaciones.

Para el archivo de la *Figura 9*, podríamos cuestionar a los alumnos, (una vez se hayan familiarizado con él), sobre por ejemplo, como varia la razon tangente. EL guion de esta actividad podria incluir preguntas del tipo a:

- *¿Cuánto miden los tres lados del triángulo sombreado?*
- *¿Cuál será entonces la tangente de 60° ?*
- *Visualiza la tangente de 45° . ¿Cuál es su valor?*
- *¿Y la de 120° ?*
- *¿De qué depende el signo de la tangente de un ángulo cualquiera?*

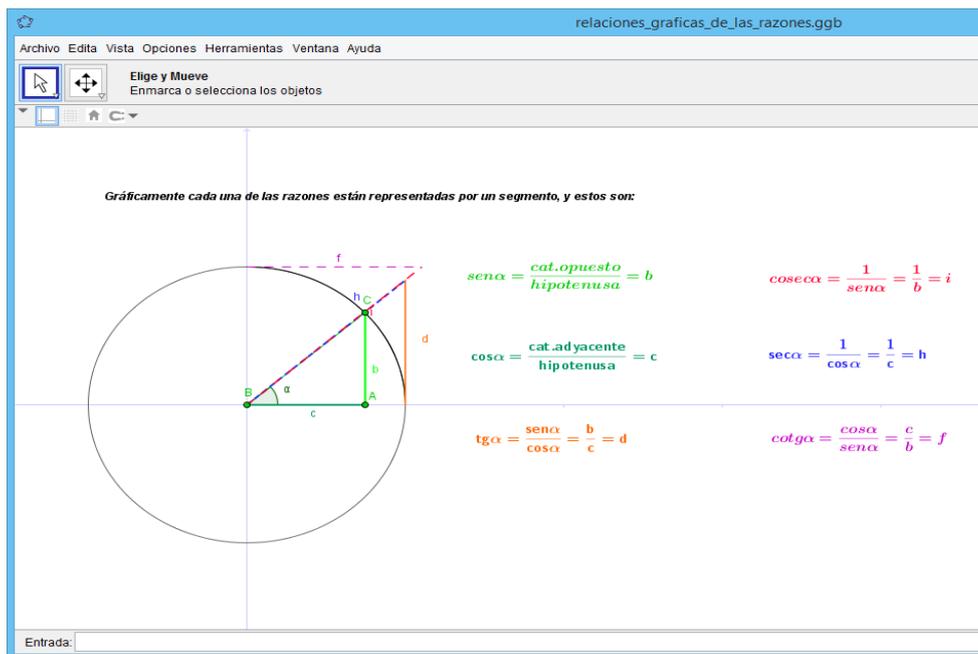


Figura 9. Relación y variación de las razones trigonométricas.

Podremos combinar estas herramientas explicativas y de experimentación dinámica por parte de los alumnos, con ejercicios propuestos donde ellos mismos construyan sus elementos partiendo de unos datos dados y a partir de ahí, sean ellos mismos quienes relacionen y obtengan sus propios resultados, los cuales han de saber razonar y exponer.

Una propuesta donde ver la aplicación podría ser la siguiente:

Les pedimos a nuestros alumnos, que calculen de forma analítica, la altura de un triángulo como el de la figura, partiendo de los datos de longitudes y ángulos conocidos. Debemos mostrarles que podemos dividir el triángulo inicial en la suma de dos triángulos rectángulos, donde ya podremos aplicar las razones estudiadas.

Después, abrimos el programa y les enseñamos esta figura, donde podrán ver como el resultado coincide y donde la posible aplicación de estos conocimientos cobra relevancia y significado.

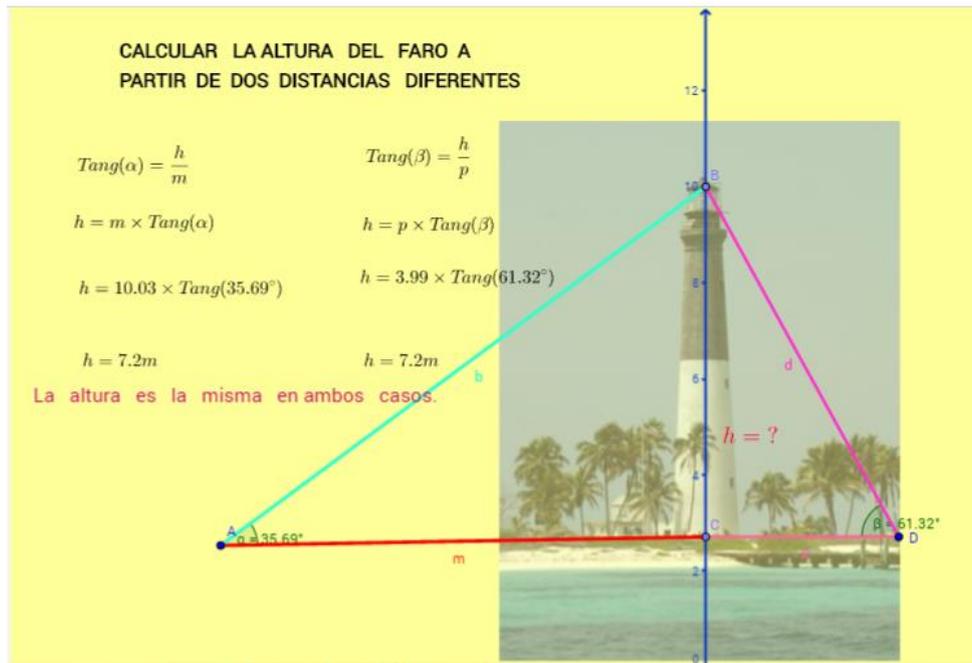


Figura 10. Cálculo aplicado de las razones trigonométricas.

5. CONCLUSIONES

Las matemáticas pueden ser tratadas en las aulas de secundaria mediante el uso de software educativos que permitan el dialogo bidireccional entre la teoría y la práctica, de tal forma que se le oferte al estudiante la aplicabilidad de cada una de las temáticas de una manera amigable, acertada y precisa.

El programa de geometría dinámica Geogebra, constituye una herramienta eficaz para la asimilación de los contenidos más abstractos y de difícil comprensión, que tratados en el aula bajo la tutela de una clase magistral, resultan muy costosos de asimilar para los estudiantes.

Hay cierta problemática en el aprendizaje de la trigonometría de 4º de la ESO ya que los alumnos tienen una especial dificultad en comprender y asimilar los conceptos relacionados con este campo. Algunos de los problemas identificados pasan por cuestiones como falta de justificación, falta de visualización, conceptos débilmente adquiridos, etc. Muchos de estos problemas pueden ser abordables a través de sistemas de geometría dinámica ya que permiten al alumno visualizar y construir de una forma sencilla y manipular las construcciones, lo que le permite experimentar y reflexionar sobre los conceptos y comprenderlos mejor.

Por lo tanto es una herramienta que hay que tener en cuenta a la hora de diseñar las sesiones de la unidad de trigonometría. A través de una exposición didáctica donde nosotros como profesores, justifiquemos y relacionemos de forma adecuada la trigonometría y sus elementos, enseñándoles de una forma organizada y clara, complementada con actividades basadas en Geogebra, ayudaremos a mejorar la comprensión de los alumnos.

De este modo y basándonos en todo lo expuesto, he presentado el uso de Geogebra como una herramienta a tener en cuenta en el diseño de las sesiones de las que se compondrán las unidades didácticas que nos ayuden a abordar de manera visual, creativa y dinámica, los conceptos de trigonometría en secundaria, gracias a lo cual, los propios alumnos serán capaces de experimentar, conjeturar, probar, y analizar todos los conceptos y relaciones trigonométricos.

6. **BIBLIOGRAFÍA**

- Decreto 38/2015, de 22 de mayo, que establece el currículo de Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria. 2005
- Fiallo J. A, Gutiérrez A. (2006). Unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente Cabri para el desarrollo de las habilidades de demostración.
- Flores Gil, F. L. (2008). Historia y Didáctica de la Trigonometría. Jaén: Íttakus. Recuperado el 8 de abril de 2014 de: <http://www.publicatuslibros.com>
- Font Moll, V., (1994) Motivación y dificultades de aprendizaje en Matemáticas.
- <https://www.geogebra.org/>
- González-López, M. J. (2001). La gestión de la clase de geometría utilizando sistemas de geometría dinámica.
- Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de Geometría dinámica.
- Ibañes, M, Ortega, T, (1998). Pruebas visuales en trigonometría.
- Ileana Enesco, (2001). Psicología del Desarrollo. www.enciclonet.es
- Losada, R. (2007). GEOGEBRA: la eficiencia de la intuición.
- Losada, R. (2011). GeoGebra en la enseñanza de las Matemáticas. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia. Recuperado el 22 de mayo de 2014 de <http://www.ite.educacion.es/formacion/materiales/123/cd/index.htm>
- Mora, J.A. (2007). Geometría Dinámica en Secundaria.
- Pérez, A. (2006). Matemáticas en las aulas de secundaria.
- Recio Muñoz, T. (2009). Geometría dinámica. Madrid: Anaya.
- San Martín Sicre, O. J. (2003). Una exploración de un proceso de construcción del significado del seno de un ángulo agudo como función y como razón. Tesis Universidad de Sonora, México.

- Yábar, J.M. (2000). El ordenador en la Enseñanza Secundaria dentro de un enfoque constructivista del aprendizaje.